UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO ACADÊMICO DA MATEMÁTICA

GIOVANY FERNANDO FARIA

A ORIGEM DA DERIVADA E DA INTEGRAL

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

CORNÉLIO PROCÓPIO

2018

GIOVANY FERNANDO FARIA

A ORIGEM DA DERIVADA E DA INTEGRAL

Trabalho de Conclusão de Curso apresentada ao Departamento Acadêmico da Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do grau de "Licenciado em Matemática" – Área de Concentração: Licenciatura em Matemática.

Orientador: Thiago Pinguello de Andrade

CORNÉLIO PROCÓPIO

2018

Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Câmpus Cornélio Procópio
Diretoria de Graduação
Departamento de Matemática
Curso de Licenciatura em Matemática

FOLHA DE APROVAÇÃO

BANCA EXAMINADORA

Prof. Thiago Pinguello de Andrade
(Orientador)

Prof. Anderson Paião dos Santos

Prof. Tiago Henrique dos Reis

"A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do Curso"

Dedico este Trabalho à minha família.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a minha mãe, dona Cleuza Fontes de Souza Faria, pai José Faria, irmã Letícia Pricila Faria, Weverton Vicentini e todos meus amigos que de alguma forma contribuíram para minha formação e por terem me aguentado durante vários e vários anos, principalmente por serem estas pessoas as que tornaram isso possível. Agradeço os professores por nos conduzir durante esta etapa da graduação, em especial ao meu professor orientador Thiago Pinguello De Andrade, por entender minhas dificuldades e ter a paciência necessária para me orientar. Agradeço novamente aos meus amigos, por me fazerem superar os problemas que a vida e que a matemática proporciona, renovando minhas energias. E a Deus, por proporcionar condições para que eu adquirisse as competências necessárias para ultrapassar esta etapa da vida.

A Matemática apresenta invenções tão sutis que poderão servir não só para satisfazer os curiosos como, também para auxiliar as artes e poupar trabalho aos homens.

René Descartes.

RESUMO

FARIA, Giovany F.. A ORIGEM DA DERIVADA E DA INTEGRAL. 80 f. Trabalho de Conclusão de Curso – Departamento Acadêmico da Matemática , Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2018.

Neste trabalho apresentaremos os métodos matemáticos, associados ao cálculo de tangentes e áreas sob curvas, desenvolvidos no século XVII, e que serviram de base para os conceitos de derivada e integral desenvolvidos por Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz. Apresentaremos também a forma como Newton e Leibniz interpretaram tais métodos e obtiveram uma relação entre eles, ou seja, o Teorema Fundamental do Cálculo. Neste contexto, veremos que o Cálculo Diferencial e Integral não foi inventado a partir do zero por esses matemáticos mas foi o resultado do aperfeiçoamento de diversos métodos criados por outros matemáticos como René Descartes, Pierre de Fermat, Bonaventura Cavalieri, John Wallis e Isaac Barrow.

Palavras-chave: História do Cálculo, História da Derivada e da Integral, Métodos das Tangentes e Áreas sob Curvas

ABSTRACT

FARIA, Giovany F.. THE BEGINNING OF THE DERIVATIVE AND INTEGRAL. 80 f. Trabalho de Conclusão de Curso – Departamento Acadêmico da Matemática , Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2018.

In this work, we present the mathematical methods related to the computations of tangents and areas under curves, developed in the XVII century, that form the basis for the concepts of derivative and integral discovered by Isaac Newton and Goofried Leibniz. We also presents Newton and Leibniz interpretation of such methods and the way they developed their own method as well the relation between them, that is, the Fundamental Theorem of Calculus. In such context, we will see the Differential and Integral Calculus were not developed from zero, but it is the result of the improvement of many mathematical methods created by other mathematicians as René Descartes, Pierre de Fermat, Bonaventura Cavalieri, Jonh Wallis and Isaac Barrow.

Keywords: History of the calculus, History of derivatives and integral, Tangents and area under curves methods

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A derivada e a integral são ferramentas de grande importância para o estudo de funções e operações matemáticas, como o estudo do coeficiente angular de retas tangentes, intervalos de decrescimento e crescimento de funções, pontos de máximos e mínimos, pontos de inflexão, taxa de variação, velocidade, aceleração, deslocamento, cálculos de área, volume, entre outras aplicações. Assim, como vários trabalhos matemáticos que levaram tempo para serem elaborados ao longo da história, o cálculo diferencial e integral não foi diferente e não surgiu da noite para o dia, sendo ele o resultado de um longo caminho percorrido por vários matemáticos, que ao longo do tempo se dedicaram e aperfeiçoaram as técnicas e resultados matemáticos.

Diante da grande utilização do cálculo diferencial e integral, um fator que permanece em evidência são os meios pelos quais se conseguiu chegar a tais resultados, onde as características e habilidades de cada matemático contribuiu de alguma forma, para o desenvolvimento do cálculo diferencial e integral. Portanto, buscamos juntar informações com a finalidade de responder as seguintes perguntas: Como surgiu o cálculo diferencial e integral? Quem são os responsáveis por tal feito? Em que época e em que contexto histórico ocorreram tais descobertas?

Com a finalidade de responder tais perguntas apresentaremos a história dos matemáticos que desenvolveram as teorias que culminaram no Cálculo Diferencial e Integral, e os conceitos desenvolvidos por cada um que contribuiu para este feito. Entre eles, veremos os métodos da tangente de Descartes, Fermat e Barrow, o método de máximos e mínimos de Fermat, o princípio de Cavalieri e o método de cálculo de área sob curvas de Fermat. Apresentaremos os métodos de cálculo de tangentes e áreas sob curvas desenvolvidos por Newton e Leibniz e como eles obtiveram uma relação fundamental entre eles, o conhecido Teorema Fundamental do Cálculo. Veremos assim como surgiram os conceitos de derivada e integral e por que uma operação é a inversa da outra.

O cálculo e consequentemente os conceitos de derivada e integral foram desenvolvidos durante todo o século XVII e envolveu o trabalho de diversos matemáticos. Como naquela época a comunicação era rudimentar, havia um certo isolamento e uma certa demora para os cientistas compartilharem entre si suas descobertas. Além disso, havia um certo isolamento natural entre as nações por não haver a globalização e tecnologia que temos hoje. Como consequência dessa falta de comunicação, e outros motivos associados às questões sócio-culturais da época, o surgimento do cálculo acabou marcado por muitos embates, desavenças e desafios. Embora possa parecer o contrário, toda essa turbulência acabou sendo produtiva e muita matemática foi criada nesse século. Nesse sentido, a história do cálculo apresenta muita inovação, cientistas fantásticos, histórias de superação, curiosidades históricas, desafios e tramas envolvendo as mentes mais brilhantes.

Para o desenvolvimento deste trabalho utilizamos pesquisas bibliográficas baseadas em livros de história da matemática e publicações matemáticas. Estruturaremos este trabalho da seguinte forma: No segundo capítulo apresentaremos uma revisão da história dos principais matemáticos que contribuíram diretamente para a criação do cálculo.

No terceiro capítulo, apresentaremos os métodos associados a diferenciação, ou seja, os métodos desenvolvidos para encontrar retas tangentes a curvas e máximos e mínimos. Veremos os métodos da tangente de Descartes e Fermat, o método dos máximos e mínimos de Fermat e o método da tangente de Isaac Barrow. Veremos também o Folium de Descartes que foi um desafio feito por este a Fermat numa tentativa frustrada de mostrar que seu método da tangente era melhor.

Na seção sobre o método da tangente de Descartes, veremos duas técnicas matemáticas que Descartes utilizava para encontrar a equação de retas tangentes a determinados pontos de curvas, sendo que em seu primeiro método era utilizado a equação da circunferência centrada no eixo das abscisas. Em seu segundo método era utilizado um procedimento que utiliza a semelhança de triângulos, sendo este método muito parecido com o método de Fermat. É importante mencionar que praticamente todos os conceitos desenvolvidos que deram origem ao cálculo só foram possíveis graças ao desenvolvimento da Geometria Analítica feito por Descartes.

A seção sobre método da tangente de Fermat abrangerá os procedimentos empregados por Fermat para o cálculo de equações de retas tangentes a determinadas curvas, sendo seu primeiro método baseado na utilização de semelhança de triângulos e desigualdades. Seu segundo método também consiste no emprego de semelhanças de triângulos, sendo um pouco mais elaborado. Após a seção sobre o método de máximos e mínimos de Fermat, apresentaremos Folium de Descartes onde mostramos a limitação do primeiro método da tangente de Descartes com relação aos métodos de Fermat.

Por fim, apresentaremos neste capítulo o método da tangente de Barrow. Este foi obtido após os métodos de Fermat e Descartes e foi o último método de tangente obtido antes de Newton e Leibniz atacarem o problema e resolverem de uma vez por todas a questão do cálculo de tangentes. Embora tenham sido Newton e Leibniz quem dera a palavra final sobre o cálculo de tangentes, é notável a capacidade dos matemáticos que o antecederam de obterem tangentes a certas famílias de curvas.

No quarto capítulo, apresentaremos os métodos matemáticos associados a integração, ou seja, o cálculo de áreas sob curvas. Primeiro apresentaremos os princípios de Cavalieri que abriram as portas para o cálculo de áreas sob curvas e em seguida o método do cálculo de área desenvolvido por Fermat, onde este tomou como base as ideias de Cavalieri.

No quinto e último capítulo, veremos inicialmente os métodos de cálculo de tangentes de Newton e como ele associou tal método ao problema de obtenção de área sob curvas, obtendo assim o Teorema Fundamental do Cálculo. Veremos que nesse processo, foi crucial a generalização do que hoje conhecemos como Binômio de Newton. Em seguida, veremos o método de tangente de Leibniz e como ele associou este método ao cálculo de áreas sob curvas. Por fim, terminaremos o trabalho contando um pouco da controvérsia, entre Newton e Leibniz, sobre a autoria do Cálculo.

2 REVISÃO HISTÓRICA

Este capitulo abordará um pequeno resumo da vida dos principais matemáticos que estão associados com a criação do Cálculo Diferencial e Integral, destacando um pouco de suas trajetórias no decorrer de suas descobertas matemáticas. Será feita a revisão histórica na seguinte ordem: René Descartes, Pierre de Fermat, Isaac Newton, Gottfried Wilhelm Leibniz, Bonaventura Cavalieri e John Wallis.

2.1 RENÉ DESCARTES

Figura 9: René Descartes

Fonte: Retrato esboçado por Frans Hals

Segundo (BOYER, 1974), (CAJORI, 2007), (EVES, 2004) e (KATZ, 2010) René Descartes foi um matemático e filósofo que nasceu no ano de 1596, na França, em La Haye, perto da cidade de Tours (hoje chamada de La Haye-Descartes). Por fazer parte de uma próspera família da velha nobreza francesa, estudou desde seus oito anos de idade até sua juventude no colégio jesuíta em La Flèche. Como possuía sua saúde debilitada, tinha a permissão de ficar até mais tarde na cama no período da manhã e nestes horários ele ficava pensando e meditando sobre o que tinha aprendido e o que já sabia. Este hábito o acompanhou durante toda a vida, ao ponto que ele mesmo considerava que estes horários matinais eram os horários mais produtivos para desenvolver seus estudos. Mais tarde, em 1612, René deixou a escola e decidiu conhecer o mundo.

> “Utilizei o resto da minha juventude para viajar, para ver cortes e exércitos, para conhecer pessoas de diferentes disposições e condições, para armazenar várias experiências, para dar provas de mim próprio nos encontros com os quais a fortuna me confrontou, e em todo o lado para refletir sobre as coisas que ocorriam, para poder tirar algum proveito delas.”(KATZ, 2010, P.135).

Em seguida, ele resolveu se mudar para França onde conseguiu se graduar em direito na Universidade de Poitier. Entretando, não exerceu a profissão por não ter muito entusiamos sobre a profissão. Durante vários anos, seguiu carreira militar, participando da Guerra dos Trinta Anos, viajando com grandes campanhas militares, como o exército do príncipe de Maurício de Orange na Holanda, depois com o exército do Duque Maximiliano I da Baviera, e tempos depois com o exército Francês no cerco de La Rochelle.

Descartes não era um soldado dedicado somente a carreira militar. Seu tempo como militar era separado por viagens e tempos de estudo. Nesta época conheceu pessoas importantes como Faulhaber na Alemanha, Desargues, Mersenne e vários cientistas na França, onde discutiram assuntos que mais tarde o ajudaram a se tornar o pai da filosofia moderna. Quando passou com o exército Bávaro o frio do inverno de 1619, onde por motivo de saúde debilitada permanecia na cama até as dez da manhã pensando em problemas, ele descobriu a fórmula dos poliedros $V+F=A+2$, onde V, F e A denotam o número de vértices, faces e arestas do poliedro, respectivamente. Outro fato importante a se destacar, é que em 10 de Novembro de 1616, quando sua tropa acampou à margem do Danúbio, ele teve um sonho que mudou sua vida. Ele relata ter sonhado com um novo método matemático revolucionário, que segundo suposições seria a geometria analítica.

Em 1625, depois de pôr um fim em sua carreira militar, passou de quatro a cinco anos de sua vida viajando pela Alemanha, Dinamarca, Holanda, Suíça e Itália. Após estas viagens retornou à França, onde continuou seus estudos filosóficos, matemáticos e construiu instrumentos ópticos.

Em 1628 ele enviou cartas para um amigo que estava na Holanda, afirmando que tinha feito descobertas na área de aritmética e geometria, o que evidencia que naquele ano René estava em plena construção de sua geometria analítica. Em seguida, em 1629, foi morar na Holanda, onde permaneceu até 1649.

Estes anos que passou na Holanda, foram os mais brilhantes de sua vida, onde se dedicou a escrever um trabalho matemático que relata o sistema físico do universo. Porém, devido a condenação de Galileu pela igreja, não quis publicar. Nessa época, um amigo seu despertou sua curiosidade a respeito do problema das três e quatro retas de Papus, que ainda não havia sido resolvido. Após aplicar os métodos que vinha desenvolvendo e resolver facilmente este problema, René percebeu a eficácia do que vinha desenvolvendo e então resolveu escrever sobre suas técnicas.

No ano de 1637 publicou um tratado filosófico sobre a ciência universal, cujo nome era *Discours de la Méthode pour Bien Conduire sa Raison et Chercher la Vérité dans les Sciences* (Discurso do Método para Bem Conduzir a Razão e Procurar a Verdade nas Ciências). Este trabalho continha três apêndices chamados: *La dioptrique* (Sobre óptica), *Les Météores* (Sobre meteorologia) e *La géométrie* (Sobre geometria). O primeiro apêndice *La dioptrique* falava sobre a lei da reflação, o segundo chamado de *Les Météores* contia explicações sobre o arco-íris e o terceiro e mais famoso dos três apêndices, era *La géométrie*, que se dividia em três partes: a primeira continha as instruções de como resolver geometricamente equações quadráticas, diferente do modo de resolução dos gregos; a segunda trazia consigo, entre várias outras coisas, uma classificação das curvas e um método fantástico de construir tangentes à curvas que descreveremos com mais detalhes na seção 3.1; a terceira parte é entendida como um curso sobre a teoria elementar das equações, que se refere a como encontrar as raízes de uma equação com o grau maior que dois, como diminuir o grau de uma equação quando se conhece uma raiz, entre vários outros conceitos encontrados. Destaca-se que a notação utilizada por Descartes é usada até hoje, e suas contribuições para matemática são de grande importância. Por este fato é chamado o pai da Geometria Analítica.

Em 1641 René conseguiu publicar mais um trabalho chamado de *Meditationes*, que se referia a suas ideias filosóficas abordadas no *Discours*. Após quatro anos, em 1644, lançou outro trabalho chamado *Principia philosophiae*, que tratava de leis da natureza imprecisa entre outros assuntos.

Em 1649 recebeu o convite da Rainha Cristina da Suécia para dar aulas particulares de filosofia e participar de uma Acadêmia de Ciências em Estocolmo. Ele aceitou o convite, mas como a Rainha Cristina se contrariava a seus hábitos de ficar mais tempo na cama, Descartes era obrigado a dar aulas muito cedo, e por causa do rigor do inverno e sua saúde frágil, acabou adquirindo uma infecção pulmonar. Por esta razão, veio a falecer em Estocolmo no ano de 1650. Seu sepultamento foi na Suécia e em 1667, seus ossos foram levados para França em Paris.

2.2 PIERRE DE FERMAT

De acordo com (BOYER, 1974), (CAJORI, 2007), (EVES, 2004) e (KATZ, 2010) Pierre de Fermat foi um matemático que nasceu em 17 de Agosto de 1601, na cidade de Beaumont-de-Lomagne na parte sul da França. Sua família era considerada uma família rica, já que seu pai era comerciante de couros, além de ser um oficial daquela região.

Figura 10: Pierre de Fermat

Fonte: Coleção David Smith

A educação inicial de Fermat foi feita em casa, e em 1631 conseguiu se formar em advocacia na Universidade de Toulouse na cidade de Orleães. Após se formar como advogado, voltou para Toulose, onde se tornou conselheiro do parlamento e responsável por serviços administrativos e legais, além de se tornar membro de várias unidades oficiais.

Fermat era considerado um homem ocupado por causa dos serviços que fazia, mas, mesmo assim, conseguia tempo para se dedicar a literatura clássica, ciências e matemática que ele fazia como lazer. Ele não era considerado um advogado bem-sucedido e brilhante, pois gastava seu tempo estudando matemática.

Em 1629 começou a trabalhar em uma área que achava muito interessante, que era a restauração de obras antigas e perdidas da antiguidade. Iniciou seu projeto de recuperação de trabalhos matemáticos antigos como *Plane Loci* escrito pelo matemático Apolônio de Perga, *O Grande Geômetra*, utilizando como base as anotações e preposições contidas na coleção matemática de Pappus de Alexandria. Quando iniciou o projeto de recuperação do Plane Loci de Apolônio, ele tentou reconstruir a obra utilizando o mesmo raciocínio que Apolônio usou nas descobertas de vários teoremas. Logo, este estudo para recuperar o Plane Loci de Apolônio levou ao que, mais tarde em 1636, foi chamado de geometria analítica de Fermat ou princípio fundamental da geometria analítica.

Como Fermat era uma pessoa muito ocupada com seus deveres e serviços e não possuía uma boa saúde, ele não podia fazer viagens para longe de casa. Assim, quando ele produzia algo baseado em matemática, só conseguia avisar os outros por suas extensas cartas. Esta é uma das razões pela qual ele não publicava quase nada relacionado a suas descobertas, geralmente elas eram encontradas em cartas enviadas a seus correspondentes.

Fermat também é considerado um dos fundadores da teoria moderna dos números, que foi inspirada pela tradução latina de *Aritmética de Diofanto*, traduzida por Bachet de Méziriac em 1621. Além disso, várias de suas conjecturas se mostraram verdadeiras, como por exemplo as que dizem:

> “Todo primo ímpar pode ser expresso como a diferença de dois quadrados de uma, e uma só, maneira”(EVES, 2004).

> “Todo inteiro não-negativo pode ser representado como a soma de no máximo quatro quadrados”(EVES, 2004).

Outra curiosidade a se destacar é que entre as cartas de Fermat, se encontra uma carta trocada com Pascal em 1654, cujo assunto matemático encontrado ocasionou a base da ciência da probabilidade. Ele também é considerado o pioneiro do cálculo diferencial, pois desenvolveu métodos que envolviam o cálculo de retas tangentes à curvas, questões de máximos e mínimos de uma função e áreas sob certas curvas. Algumas publicações relacionadas a estas contribuições foram *A introdução aos lugares de Fermat*, publicado após sua morte, e *Método para achar máximos e mínimos*, publicado em um tratado.

Pierre Fermat faleceu em Castres, Toulouse em 12 de Janeiro 1665. Foi primeiramente sepultado na igreja agostinianas em Toulouse. Com o passar dos anos seu corpo foi transferido para um museu local em Toulouse.

2.3 BONAVENTURA CAVALIERI

De acordo com (BOYER, 1974), (CAJORI, 2007), (EVES, 2004) e (KATZ, 2010) o matemático Bonaventura Cavalieri nasceu em 1598 em Milão na Itália, e basicamente viveu em Milão e Roma. Iniciou seus estudos de matemática em Pisa na Itália e teve como professor Galileu, onde os mesmos trocavam correspondências entre si a respeito de seus estudos. Cavalieri, graças a influências de Galileu, conseguiu atuar como Professor de Matemática na Universidade

Figura 11: Bonaventura Cavalieri

Fonte: Coleção David Smith

de Bolonha nos anos de 1629 até o ano de sua morte, 1647, sendo sua nomeação como professor renovada de três em três anos.

Bonaventura Cavalieri era membro de uma ordem religiosa, tornando-se jesuado (e não jesuíta). Entre suas obras, deixou um vasto trabalho baseado em matemática pura e aplicada, além de trabalhos em óptica e astronomia. Foi um dos grandes responsáveis pela introdução dos logaritmos na Europa.

Entre suas obras estão *Directorium universale uranometricum*, que foi publicada no ano de 1632. Esta publicação contém conteúdos de tangentes, tabela de senos, secantes, seno verso e logaritmos. Destaca-se que apesar de várias obras produzidas por Cavalieri, uma em especial, que é considerada uma das maiores contribuições de Cavalieri no ramo da matemática, é o tratado *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota* (Geometria, avançada de uma nova maneira pelos indivisíveis do contínuo). A primeira versão desta obra foi publicada no ano de 1635 e nela há várias menções a Demócrito e Arquimedes. Especula-se que a inspiração deste estudo sobre indivisíveis esteja fortemente relacionada com as tentativas de Kleper de encontrar áreas e volumes.

Este tratado de Cavalieri sobre indivisíveis foi amplamente estudado, mas é considerado um trabalho de difícil entendimento, pois segundo as referências é trabalhoso até de entender o que ele entendia por indivisível. Acredita-se que esta seja uma das razões por ter sido pouca estudada.

Quando Cavalieri se referia a indivisíveis tudo indica que um indivisível de uma reta seria um ponto, e um indivisível de uma região plana era uma corda desta mesma região plana, e um indivisível de um sólido se referia a uma secção plana deste sólido. Um modo mais fácil de entender a respeito de um indivisível seria imaginar que a área de um tecido é a soma indefinida de linhas que formam o tecido, e o volume de um livro seria a soma indefinida de folhas que formam o livro. Cavalieri possuía sua concepção de indivisível baseando-se como uma parte atômica de seu objeto de estudo, gerando muitas críticas de estudiosos do assunto, como o matemático suíço Paul Guldin. Cavalieri tentou em seus trabalhos reconstruir estas observações críticas feitas pelos estudiosos, mas sua reconstrução de ideias foi em vão. Destaca-se que quem se proclamou inventor do método dos indivisíveis foi o matemático francês Roberval, que manipulou com grande habilidade este método.

O método dos indivisíveis ou outros métodos equivalentes a ele foram utilizados por vários matemáticos como Pascal, Barrow, Fermat, Saint-vincent, entre outros, sendo que estes matemáticos chegaram em resultados semelhantes das integrais $sen^2(\theta)$, $\theta sen(\theta)$, x^n e $sen(\theta)$. Cavalieri fez várias contribuições para a matemática e entre elas se encontram os chamados princípios de Cavalieri:

> “1º Se duas porções planas são tais que toda reta secante a elas e paralela a uma reta dada determina nas porções segmentos de reta cuja a razão é constante, então a razão entre as áreas dessas porções é a mesma constante”(EVES, 2004, P. 426).
>
> “2º Se dois sólidos são tais que todo plano secante a eles e paralelo a um plano dado determina nos sólidos secções cuja razão é constante, então a razão entre os volumes desses sólidos é a mesma constante”(EVES, 2004, P. 426).

Estes princípios formulados por Cavalieri são considerados ferramentas muito poderosas para cálculos que envolvem a procura da área e volume e é de enorme valor para a geometria e para o cálculo integral moderno. Tais princípios auxiliam na resolução de problemas que envolvem mensuração que até então utilizavam métodos mais complexos de cálculo.

Os princípios citados acima são teoremas de grande importância feitos por Cavalieri no ano de 1626. Ele disse, através de cartas, a Galileu que publicaria trabalhos sobre tais teoremas, mas Galileu também pretendia lançar um livro baseado no infinito. Assim Cavalieri talvez tenha tardado sua publicação sobre os teoremas por deferência ao livro que Galileu publicaria. O livro de Galileu teria seu foco baseado na natureza e comportamento do infinitamente pequeno e grande, e dessa forma Cavalieri evitou este tema.

Cavalieri na verdade se dedicou a outro teorema geométrico com grande importância, que equivale a afirmação atual $\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$. O modo atual é muito diferente do modo que ele utilizou para provar tal afirmação, já que ele utilizava potências de segmentos (indivisíveis) que pertenciam a um paralelogramo, onde estes segmentos eram paralelos à base do paralelogramo. Cavalieri comparava estes com potências de segmentos que eram correspondentes de segmentos pertencentes a qualquer dos dois triângulos, em que estes dois triângulos eram produzidos através de uma diagonal que dividia o paralelogramo em duas partes.

Cavalieri também produziu outros raciocínios semelhantes, como a soma dos quadrados dos segmentos que pertenciam a um dos triângulos era igual a $\frac{1}{3}$ da soma dos quadrados dos segmentos que pertenciam ao paralelogramo. Cavalieri percebeu também que para o cubo dos segmentos existia a razão de $\frac{1}{4}$. Assim, Cavalieri conseguiu demostrar mais tarde a extensão de potências para graus superiores, publicando em *Exercitationes Geométrical Sex* (seis exercícios geométricos) do ano de 1647 a generalização para potências de segmentos. Este estudo produzido por ele era conhecido por vários matemáticos franceses da época, mas ele foi o primeiro a fazer publicações a respeito deste teorema geométrico. Destaca-se que o teorema geométrico citado acima foi de grande importância para o estudo e desenvolvimento do cálculo.

A obra *Geométrica Indivisibilibus*, que proporcionou uma grande ajuda nos estudos de quadratura, apareceu novamente em uma segunda edição, no ano de 1653, mas foi considerado como fora de moda, pois os matemáticos da época já possuíam resultados baseados em novos métodos.

O teorema mais importante a destacar sobre os estudos e obra de Cavalieri era o resultado que equivale a afirmação atual $\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$. Cavalieri também fez várias outras contribuições baseadas em seus teoremas, que levaram à contribuições importantes, como a relação da espiral $r = a\theta$ com a parábola $x^2 = ay$. Tanto a espiral quanto a parábola eram conhecidas desde a antiguidade mas ninguém tinha conseguido observar a relação entre elas, até que Cavalieri começou a comparar segmentos de reta com indivisíveis curvilíneos, encontrando a relação de área entre o arco parabólico $x^2 = ay$ e a espiral $r = a\theta$. Logo, pode-se dizer que nos trabalhos de Cavalieri se encontra muito de geometria analítica e cálculo, sendo que ele escrevia conteúdos matemáticos antes destes serem inventados. Bonaventura Cavalieri faleceu no ano de 1647.

2.4 JOHN WALLIS

De acordo com (BOYER, 1974), (CAJORI, 2007), (EVES, 2004) e (KATZ, 2010) John Wallis foi um matemático, nascido em 1616 na Inglaterra, tendo sua educação assegurada pela igreja em Cambridge. Mais tarde entrou para as ordens sagradas da igreja, mas seus gostos e habilidades pela matemática fez se dedicar ao estudo de matemática, sendo considerado um dos mais brilhantes de sua época.

Em 1649 foi lhe atribuído o cargo de professor de geometria para a catedral Saviliana em Oxford. Foi também uns dos fundadores da Real Sociedade, sendo fundada em 1663, também considerado um dos maiores criptólogos que o mundo já teve.

Wallis também produziu vários trabalhos matemáticos. Em 1665 escreveu dois traba-

Figura 12: John Wallis

Fonte: Retrato esboçado por Sir Godfrey Kneller

lhos muito importantes, um de geometria analítica e outro sobre análise infinita, sendo este dois ramos da matemática considerados os mais importantes da época.

Seu trabalho *As cônicas de Wallis* mencionava a geração de curvas através de secções de um cone, em que seu conteúdo matemático foi considerado chegar mais perto da definição de cônicas do que à de Fermat. Seu outro trabalho publicado em 1665 foi *A Arithmetica infinitorum* considerado a maior contribuição de Wallis para a matemática. Neste trabalho publicou os aperfeiçoamentos dos métodos de Descartes e de sua aritmetização da *Geometria indivisibilibus* de Cavalieri, o que corresponde hoje como:

$$\int_0^1 x^m dx = \frac{1}{m+1}.$$

Destaca-se que Cavalieri utilizava a correspondência de indivisíveis num paralelogramo com indivisíveis de um dos triângulos deste paralelogramo, em que este triângulo eram formado por uma diagonal do paralelogramo. Contudo Wallis abandonou o conceito geométrico de Cavalieri e substituiu os infinitos indivisíveis por valores numéricos. Assim, Wallis conseguiu estender seu processo matemático para potências inteiras, o que equivale hoje como sendo:

$$\int_0^1 x^m dx = \frac{1}{m+1}; \quad m \in \mathbb{Z} - \{-1\}.$$

Wallis também conseguiu mostrar que seu processo também valia para $m \in \mathbb{Q} - \{-1\}$, e chegou a dizer que o processo valia também para $m \in \mathbb{R} - \ (\mathbb{Q} - \{-1\})$. Outro fator a se destacar é que o símbolo do infinito (∞) também se deve a Wallis.

Wallis também tentou calcular π através da busca da área de um quadrante do círculo

$x^2 + y^2 = 1$. Trazendo para linguagem moderna:

$$\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{1}{2}} dx.$$

Porém Wallis não conseguiu tal feito por não saber o teorema geral do binômio. Contudo, conseguiu calcular a área de expressões que hoje se equivalem a: $\int_0^1 (1-x^2)^0 dx$, $\int_0^1 (1-x^2)^1 dx$, $\int_0^1 (1-x^2)^2 dx$, $\int_0^1 (1-x^2)^3 dx$, ..., $\int_0^1 (1-x^2)^m dx; \quad \forall \quad m \in \mathbb{N}$.

A respeito do cálculo da área do quadrante do círculo, hoje $\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{1}{2}} dx$, Wallis não conseguiu calcular, ao ponto que foi esta dificuldade que levou Isaac Newton a fazer a descoberta geral do binômio, que levou o nome de *Binômio de Newton*.

Wallis também publicou outro trabalho em 1685 chamado *Treatise of Algebra, Both Historical end Practical* onde encontra-se as primeiras tentativas de encontrar raízes complexas de uma equação quadrática e sua interpretação gráfica. Também reformulou vários trabalhos de grandes matemáticos, além de escrever vários assuntos sobre Física.

Wallis é considerado grande contribuidor de Isaac Newton por escrever e fazer o uso sistemático de séries em análise, sendo de grande importância para os estudos de Newton. A obra *Arithmetica infinitorum* de Wallis é considerada a obra mais importante estudada por Newton para as descobertas do cálculo diferencial e integral.

Destaca-se também que as maiores contribuições de John Wallis para o cálculo situa-se no cálculo integral. Wallis é considerado também um dos primeiros a criar um sistema de ensino para alunos surdos-mudos. John Wallis faleceu em 1703.

2.5 ISAAC BARROW

Segundo (BOYER, 1974), (CAJORI, 2007), (EVES, 2004) e (KATZ, 2010), o matemático Isaac Barrow nasceu em Londres no ano de 1630. Em sua infância, era considerado uma criança muito arteira e turbulenta, sendo que certa vez escutou seu pai dizer, enquanto rezava, que se Deus fosse lhe tirar algum filho, que fosse Barrow.

Isaac Barrow foi estudante do Trinity College, em Cambridge, no ano de 1643, vindo a se formar no ano de 1648, onde recebeu seu diploma de licenciatura. Também ganhou muita fama por se destacar em grego, sendo considerado um dos maiores especialistas em grego do seu tempo. Já no ano de 1652 também conseguiu o grau de mestre. Barrow, por fazer parte de um grupo de pessoas que pensavam à frente do seu tempo, e cujas ideias eram consideradas absurdas na época, foi expulso da Universidade no ano de 1655, e como punição ficou impedido

Figura 13: Isaac Barrow

Fonte: Coleção David Smith

de assumir uma cátedra. Assim, Barrow aproveitou este tempo livre de obrigações e resolveu conhecer o continente. Por quatro anos aprendeu matemática na França, Itália e Holanda. Com o passar do tempo resolveu voltar para Cambridge tornando-se professor Regius de Grego. Aceitou em 1662 a cátedra Gresham de geometria em Londres. Já em 1663 se tornou o primeiro professor Lucasiano de matemática de Cambridge.

Após apresentar várias conferências e cursos de matemática elementar, óptica e geometria nos anos que sucederam sua carreira como professor Lucasiano, ele resolveu se demitir de seu cargo no ano de 1669 para se tornar o capelão de Carlos II em Londres. Para substituir sua posição em Cambridge recomendou um jovem colega chamado Isaac Newton, pelo qual possuía grande admiração. Por esta razão, Barrow é considerado um dos primeiros a reconhecer o talento extraordinário de Newton.

Em 1673, Barrow regressou para a Trinity College como mestre, onde alguns anos antes havia se formado como licenciado. No ano de 1675 foi nomeado vice-chanceler da Universidade. No entanto, faleceu no ano de 1677, que segundo referência, provavelmente devido a uma dose excessiva de drogas.

Também se diz muito a respeito de sua personalidade, que segundo histórias, era um homem de extrema força física, coragem e de um humor inteligente.

Suas principais contribuições para a matemática encontram-se na sua obra "*Lectiones opticae et geometricae*", de 1669. Nesta obra de Barrow se encontra o agradecimento a Newton por ceder boa parte de seu material sobre Óptica a esta obra. Encontra-se também abordagens muito próximas das que se conhece hoje a respeito da diferenciação, especialmente a utilização do chamado *triângulo diferencial*. Barrow, ao contrário de Jhon Wallis, se destacou mais nas teorias sobre diferenciação.

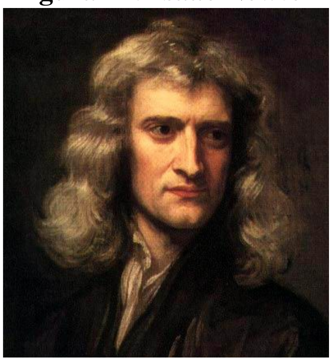
Mesmo com estudiosos apontando para outra direção, muitos consideram Barrow um dos primeiros a perceber que a integração e diferenciação são operações inversas entre si. Esta relação inversa entre as duas operações é conhecida hoje em dia como *Teorema fundamental do cálculo*, que segundo referências é relatada e provada na obra *Lectiones* de Barrow.

Mesmo que Barrow, tenha utilizado grande parte de seu tempo no estudo de teologia, ele publicou no ano de 1675 uma edição a respeito de quatro livros de secções cônicas de Apolônio, além de trabalhos a respeito de Arquimedes e Teodósio.

Neste momento da história, muito já havia sido desenvolvido a respeito do cálculo diferencial e integral, já haviam sido feitas muitas descobertas a respeito de quadraturas e retificações, assim como, haviam sido encontradas muitas tangentes a curvas, além de áreas sob curvas e possivelmente, o Teorema Fundamental do Cálculo. Nesse sentido, o que mais faltava naquele momento era a criação de um simbolismo mais geral e regras mais formais, além de um fundamento aplicável a respeito deste conteúdo. Portanto, é a partir desta etapa que a presença de Newton e Leibniz se faz crucial.

2.6 ISAAC NEWTON

Figura 14: Isaac Newton



Fonte: Retrato esboçado por Godfrey Kneller

De acordo com (BOYER, 1974), (CAJORI, 2007), (EVES, 2004) e (KATZ, 2010) o matemático e físico Isaac Newton nasceu em 25 de Dezembro de 1642, na Inglaterra, em Woolsthorpe, Lincolnshire, perto de Grantham, aproximadamente cem milhas ao norte de Londres.

Ao nascer foi considerado um recém-nascido que não sobreviveria seus primeiros dias de vida, pois nasceu prematuramente e possuía uma saúde muito frágil.

Filho de um proprietário agrícola, que havia falecido dois meses antes de seu nascimento, sua mãe voltou a se casar e o deixou para ser educado pela sua avó. Ao passar três anos, em 1653, sua mãe retornou a Woolsthorpe, pelo fato de seu segundo marido ter falecido.

Em 1655 Isaac Newton começou a frequentar uma escola local em Grantham para iniciar seus estudos. Nesta escola em Grantham ele dominou o latim e começou o estudo de matemática, como trigonometria plana, construções geométricas, aritmética básica entre outros.

No início de seus estudos, em Grantham, ele se mostrou pouco interessado, porém a partir do momento que levou um chute no estômago de um rapaz de sua escola, que estava mais adiantado que ele nos estudos, resolveu se dedicar, e com o passar do tempo ultrapassou este rapaz, se tornando o melhor aluno com aproveitamento escolar de sua classe escolar.

Na escola em Grantham, Newton mostrou ser uma pessoa engenhosa e entendida com a construção de aparelhos mecânicos. Entre suas variadas construções, estava a invenção de uma miniatura de um moinho que transformava trigo em farinha, através do andar de ratos em uma esteira. Construiu também um relógio movido a água, um moinho movido através do vento, uma carroça movida pelo condutor, entre outras invenções.

Ao completar 15 anos de idade, Isaac Newton foi levado pela sua mãe para trabalhar para família, nas atividades da fazenda. Ele não possuía um grande interesse pelo trabalho rural, pois sua paixão era os estudos. Após a insistência de um tio do lado materno, que tinha se formado em Cambridge e que sempre dizia que Newton possuía um talento matemático incomum, sua mãe o matriculou no Trinity College Cambridge em 1661 aos 18 anos de idade.

Quando Newton ingressou no colégio Trinity provavelmente não pensou em se tornar um matemático, pois a química era seu maior interesse. Este interesse, na verdade o seguiu por toda a vida. O College Trinity não possuía o conteúdo de matemática como plano de estudo, contudo, em 1663, ele passou a ter aulas de matemática, e então começou a estudar matemática por sua conta. Comprou na época um exemplar de Euclides e conseguiu entender trigonometria. Depois, leu Clavis de Oughtred, a geometria de Renato Des Cartes de Schooten, Óptica de Kepler, algumas obras de Viéte e uma das obras que é considerado de maior importância para sua carreira, a obra *Arithimetica infinitorum* de Wallis. Também se destaca de grande importância para Newton as aulas que ele começou a ter a partir de 1663 com Barrow. Ele também conheceu algumas obras de Galileu, Fermat, Huygense, entre outras.

Em 1664, Newton atingiu a fronteira do conhecimento através de seus estudos matemáticos e estava pronto para produzir novas descobertas matemáticas. Ele começou sua produção matemática, apoiada pelo seu professor Isaac Barrow, que chegou até a emprestar livros de sua coleção a Isaac Newton. Por outro lado, para conseguir avanços em seus estudos, precisava de apoio financeiro e de segurança da faculdade. A faculdade então o assegurou com bolsas de 1664 a 1667 e o nomeou professor Lucasiano em 1669, com a influência de Barrow.

Isaac Newton começou a produzir suas primeiras descobertas nos primeiros meses de 1665, onde ele conseguiu exprimir funções em termos de séries infinitas. Em 1665 começou a pensar em taxa de variação, fluxo, fluente como volume, áreas, comprimentos, temperaturas e distâncias. Esses dois problemas sobre taxa de variação e séries infinitas, foram conectados e chamado por ele de *Meu Método*.

Durante os anos de 1665 e 1666 Newton conseguiu se formar em Trinity College. Contudo, neste mesmo período o College Trinity foi fechado por causa da peste, de modo que ele teve que voltar para sua casa onde passou vários meses. Nestes meses que ficou em casa ele pensava muito em vários problemas, e foi neste período que teve seu maior desempenho em relação a descobertas matemáticas. Ele descobriu o Teorema Binomial, o Cálculo, lei da gravitação e a natureza das cores.

O Teorema Binomial surgiu a partir da leitura do livro Arithmetica infinitorum de Wallis, onde ele conseguiu fazer a transição e expansão dos coeficientes binomiais de potências inteira, para coeficientes binomiais de potências Fracionárias. Este Teorema foi encontrado em duas cartas que foram enviadas de Newton para Henry Oldenburg, secretário da Royal Society. O Teorema Binomial foi publicado pelo matemático Wallis, em Álgebra de Willis de 1685, onde nesta publicação ele dedica seus créditos a Isaac Newton.

Agora falando do cálculo, que é considerada a principal descoberta matemática feita por Newton, destaca-se que este conteúdo foi publicado em um tratado chamado *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas*. No ano de 1666, Newton já tinha desenvolvido técnicas de diferenciação, as quais foram publicadas por Barrow em 1670, porém foi no trabalho *De analysi* que Newton mostrou como é dada a área sob a curva $y = ax^{\frac{m}{n}}$, em que $m, n \in \mathbb{Z}$ com $n \neq 0$. Ali foi declarado ser a primeira vez na história da matemática que a área de uma curva foi achada pela diferenciação. Pode se dizer, que mesmo este processo sendo conhecido por Gregory, Barrow, Torricelli e Fermat, ele foi o primeiro a relacionar o procedimento inverso entre área e inclinação por meio de seus processos infinitos que até então não eram muito utilizados pelos matemáticos.

Barrow forçou e pressionou Newton para publicar seu trabalho *De analysi* em 1669, mas ele não aceitou publicar, sendo este tratado vir a ser publicado anos depois, gerando uma grande disputa com Leibniz sobre quem inventou o cálculo. Se este trabalho tivesse sido publicado em 1669, provavelmente teria evitado estas controversas.

Sabe-se que uma das mais famosas apresentações feitas por Isaac Newton sobre seus processos infinitesimais foi quando ele considerou que as variáveis x e y no plano cartesiano são quantidades que fluem, os chamados fluentes. Nesta abordagem foi possível ele trabalhar o traçado de tangentes à curvas, resolver problemas de áreas, comprimentos, método de máximo e mínimo, cálculos de aproximações de raízes de equações, entre outras contribuições. Tais abordagens foram resultados de estudos feitos por Newton em 1671, e acabou recebendo o nome de *Método dos Fluxos*. Com medo de se envolver em disputas a respeito desta nova descoberta, ou o desejo de fazê-la mais complexa e usar em seus estudos físicos, não publicou. Depois de grandes pressões vindo pelo lado de seus amigos, seu tratado chamado de Método dos Fluxos foi publicado em 1742, mesmo que uma tradução para o inglês tenha aparecido em 1736.

No ano de 1676 Isaac Newton ainda escreveu um terceiro conteúdo referente a seu cálculo, o *Quadratura curvarum*. Nesta obra ele substituía as quantidades infinitamente pequenas por um sistema de primeiras e últimas razões. Ele também escreveu dois trabalhos de Óptica, sendo estes os únicos em que ele não precisou ser pressionado por seus amigos para publicar, e um trabalho sobre a luz, criticado por muitos pesquisadores.

A primeira exposição do cálculo desenvolvido por Newton acabou acontecendo em 1687, através da obra *Philosophial Naturalis Principia Mathematica*. Neste trabalho se encontrava, fundamentos da física e fundamentos da astronomia em forma de geometria e paisagens analíticas, onde a representação de fluxos é fortemente baseada em infinitésimos. Embora o cálculo fluxionário tenha sido apresentado no *Principia*, sua notação só apareceu na publicação do segundo volume de *Algebra de Wallis* em 1693.

Uma segunda edição de sua obra *Principia* surgiu em 1713 dirigida por Edmund Halley, na qual aparecem várias melhorias. Surgiu também uma terceira publicação que foi impressa por Henry Pemberton. Dessa forma, o Principia é formado por três livros que trazem consigo princípios matemáticos, princípios da filosofia natural, leis de condições sobre movimento e força, constituição do universo e gravitação universal. Outra obra de destaque de Isaac Newton foi a *Arithmetica universalis*, publicada em 1707, trinta anos depois de ser produzida. Esta obra foi escrita por um aluno, chamado William Whiston, da época em que Newton era professor de matemática em Cambridge, e possui avanços na teoria de equações, regra de sinais de Descartes, fórmulas expressando soma de potências, entre outros conceitos.

Em 1704 foi produzido um apêndice baseado no texto sobre ótica, o *Enumerativo* *linearum tertii ordinis*, onde há várias teorias sobre curvas. Neste apêndice Isaac Newton trás uma abordagem sobre as cúbicas. Destaca-se que um dos últimos trabalhos dele feitos sobre ótica em 1687, se encontra a teoria corpuscular da luz, teoria sobre o arco-íris e o sextante. Também desenvolveu uma expressão para a velocidade do som no ar, produziu experimentos em química, lei da refrigeração, magnetismo, elasticidade, entre outras teorias.

Newton ainda fez várias outras contribuições à matemática e física, como por exemplo o cálculos de força, paralelogramo de Newton, óptica, alquimia, teologia e química. Todas as suas publicações seguem a ordem cronológica: *Principia*, 1687; *Opticks, Cubic Curves e Quadrature and rectification of Curves by the Use of infinite Series*, 1704; *Arithmetica universalis*, 1707; *Analysis per series Fluxiones, Methodus differentialis*, 1711; *Lectiones opticae*, 1729; e *The Method of Fluxions and infinite Series*, 1742.

Isaac Newton reconhecia a importância das contribuições dos matemáticos que o antecederam. Uma vez ele escreveu:

> “ Se eu enxerguei mais longe que Descartes é porque me sustentei sobre os ombros de gigantes”(BOYER, 1974).

No ano de 1689, ele foi escolhido para representar a universidade no parlamento, e três anos depois em 1692, começou a sofrer de uma doença cujos sintomas eram uma espécie de distúrbio mental. Esta doença durou dois anos de sua vida e a partir dela passou o restante de sua vida se dedicando ao estudo de alquimia, teologia e química. Mesmo tendo dividido seu tempo, ao longo de sua vida, ao estudo de vários conceitos em várias áreas, ele conseguia ultrapassar a capacidade de outros matemáticos ingleses que se dedicavam um tempo maior para a matemática.

No ano de 1696, Newton ganhou o privilégio de ser indicado a inspetor da Casa da Moeda, sendo que três anos depois foi promovido para diretor da mesma. Em 1703 foi eleito presidente da Royal Society, e em todos seus anos seguintes até sua morte ele conseguiu se reeleger. Também no ano de 1705 recebeu a nomeação do título de cavaleiro.

Isaac Newton veio a óbito em 1727, com idade de 84 anos, após uma doença penosa ter o deixado muito debilitado. Newton foi sepultado na Abadia de Westminster.

2.7 GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ

De acordo com (BOYER, 1974), (CAJORI, 2007), (EVES, 2004) e (KATZ, 2010), Gottfried Wilhelm Leibniz nasceu em 1646 em Leipzing na Alemanha. Sua mãe era a terceira

Figura 15: Gottfried Wilhelm Leibniz

Fonte: Retrato esboçado por Bernhard Christoph Francke

esposa do vice-reitor da faculdade de Filosofia de uma Universidade que ficava em Leipzing. Seu pai morreu quando ele tinha 6 anos de idade e desde muito cedo estava sempre ocupado satisfazendo o desejo de estudar e ler.

Ainda criança aprendeu latim lendo obras clássicas e grego estudando por conta própria. Também leu trabalhos filosóficos e teológicos e aos doze anos já possuía o domínio de matemática, teologia, filosofia e leis que existiam de publicações naquela época.

Em 1661, com 15 anos de idade, entrou para a Universidade de Leipzing. Na maior parte do tempo estudou filosofia, mas também estudava teologia, matemática e direito. Em 1663, aos 17 anos conseguiu se formar, obtendo o grau de bacharel.

Embora os estudos de Leibniz na Universidade de Leipzing tinha como foco os estudos das leis, ele procurava estudar todos os ramos do conhecimento. Destaca-se que uma certa vez, numa aula sobre os Elementos de Euclides de um professor chamado John Kuhn, apenas Leibniz conseguia entender, pois as aulas deste professor eram consideradas muito difíceis.

Em 1664, com 18 anos de idade, conseguiu o grau de mestre. Ainda em 1664, já tinha uma dissertação que lhe daria o grau de doutor em direito, porém a Universidade de Leipzing recusou a ele este grau. O fato de não darem a ele o grau de doutor em direito não foi por causa de sua dissertação estar com problemas, mas sim por uma da política da Universidade não permitir naquela época o grau de doutor para uma pessoa tão nova, que só possuía 20 anos de idade.

Como não conseguiu adquirir seu grau de doutor na Universidade de Leipzing, abandonou a universidade e iniciou seu estudo na Universidade de Altdort, em Nuremberga, onde conseguiu, em 1667, o grau de doutor em direito. Mais tarde, nesta mesma Universidade, ofereceram a ele uma carreira como professor, mas ele recusou a oferta.

Em um pequeno tempo que ficou de estadia na Universidade de Jena, iniciou seus trabalhos de matemática e filosofia. Seu foco principal foi a construção de pensamentos do raciocínio humano e representações simbólicas, ou seja, um método de combinação de símbolos que representava pensamentos complexos. Leibniz não conseguiu terminar este trabalho, mas suas ideias estão no *Dissertario de arte combinatória* (Dissertação da arte combinatória) de 1666, no qual também está contido sua dedução feita a respeito do triângulo de Pascal. Este interesse em encontrar símbolos apropriados para representar pensamentos e maneiras de combinar ocasionou a construção simbólica da notação de cálculo que é utilizado até nos dias de hoje.

Após recusar o cargo de professor na Universidade de Altdorf, ele resolveu entrar para o serviço diplomático, onde primeiro trabalhou para um eleitor (Do Eleitorado) em Mogúncia, depois para família Brunswick e os hanoverianos, onde acabou servindo por 40 anos, desde 1676 até sua morte. Sua escolha de entrar para o servido diplomático foi devido o fato de que quando ainda estudava na Universidade de Altdorf escreveu vários ensaios brilhantes baseados no ensino de leis usando métodos históricos. Por isso este eleitor de Mogúncia com a ajuda de Boinneburg ofereceu a Leibniz o trabalho de recodificar alguns estatutos e ele aceitou. O trabalho de Leibniz como diplomata era considerado um trabalho cansativo, que não lhe permitia muito tempo de estudo, mesmo assim ele conseguiu se tornar um grande matemático.

Como Leibniz era um diplomata muito qualificado e um influente representante do governo, ele viajava muito. Assim, em 1672, foi enviado a Paris pelo barão Boineburg em uma missão diplomática cuja finalidade era distrair os projetos aquisitivos da França contra a Alemanha. Esta distração seria por meio de uma guerra santa que seria dirigida ao Egito. Quando estava cumprindo esta missão, conheceu vários homens notáveis da época, entre eles C. Huygens.

Além de ministrar aulas de matemática para Leibniz, C. Huygens teria dado uma cópia de seu trabalho, baseado em oscilação de pêndulos, e dito que se ele quisesse ser um grande matemático era necessário ler tratados de Pascal de 1658 a 1659. Esses trabalhos foram de grande importância para que Leibniz produzisse seus estudos de matemática.

No ano seguinte, em 1673, Leibniz foi enviado a Londres pela primeira vez, onde ficou por três meses, de Janeiro a Março, para tratar de assuntos políticos, voltando novamente em 1676. Nesta primeira viagem que fez a Londres surgiram boatos de que ele poderia ter visto trabalhos de Isaac Newton, como o *De analysi*, mas pode-se dizer que é um fato duvidoso pelo motivo de Leibniz não estar em pleno saber de análise e geometria.

Quando estava em Londres fez amizade com várias pessoas importantes e comprou um exemplar do trabalho *Lectiones geométricae* de Barrow. Conheceu também Collins e Oldenburg, e se tornou membro da Royal Society. Ele aproveitou a oportunidade para mostrar a máquina de calcular que tinha inventado. Esta máquina era parecida com uma máquina que B. Pascal tinha inventado, porém era mais perfeita e eficiente. Ainda conheceu em Londres, por acaso, o matemático John Pell. Nesta ocasião Leibniz explicou um método matemático de soma de séries através da diferença de seus termos, porém John Pell ressaltou que um método semelhante teria sido publicado em 1670 por Gabriel Mouton.

Antes de voltar para Paris, Leibniz decidiu estudar matemática com foco e determinação, tendo como seu mestre C. Huygens. Naquele momento estudou vários trabalhos, entre eles, trabalhos geométricos de R. Descartes, Gregory, S.t Vicent, Honorário Fabri e B. Pascal, além das séries infinitas, onde descobriu uma expressão para a razão entre a circunferência e o diâmetro do círculo. Embora tal expressão já havia sido encontrada por James Gregory, C. Huygens ficou admirado com os resultados obtidos por Leibniz e o incentivou ao máximo para prosseguir em suas investigações.

No ano de 1673 descobriu outra série associada ao $arctangente$, sendo esta série um impulso muito grande para a construção de métodos práticos para os cálculos de π. Ele também fez estudos baseados na quadratura de curvas, sendo este estudo ligado a matemática avançada. Seus estudos sobre quadratura de curvas foram escritos em 1676, antes dele deixar Paris, e as partes mais importantes foram publicadas como artigos e depois no Acta eruditorum.

Leibniz também estudou geometria cartesiana e seu foco era baseado no estudo de direto e inverso de tangentes. Como Descartes havia resolvido o problema direto de tangentes para curvas simples, Leibniz ao investigar os dois problemas, baseou seus estudos para curvas quaisquer e conseguiu notar a relação existente entre o problema direto das tangentes e inverso das tangentes.

Quando foi para Londres pela segunda vez em 1676, assumiu o posto de bibliotecário de Hanover. Neste período ele já havia descoberto grande parte da notação para o cálculo, além do Teorema Fundamental do Cálculo e várias fórmulas de diferenciação.

Leibniz conseguiu inventar seu cálculo entre os anos de 1673 a 1676, usando pela primeira vez o símbolo de integral $\int$, que aparenta ser a letra s maiúscula, que veio da palavra latim Summa (soma). Este símbolo foi encontrado em seus manuscritos datados de 29 de Outubro de 1675. Alguns dias depois, ele já estava escrevendo notações que utilizamos hoje em dia, como

$\int xdx$ e $\int ydx$ para o cálculo integral.

Seus estudos a respeito do cálculo diferencial só apareceram em 1684, onde definiu muitas regras de diferenciação que são utilizadas até hoje por alunos no curso de cálculo. Um exemplo é a fórmula da derivada enésima do produto de duas funções, que é conhecida em geral como regra de Leibniz.

Durante o serviço público que Leibniz fazia para Hanover como bibliotecário, ele produziu vários trabalhos já que este serviço lhe oferecia tempo para pensar. Em consequência disto ele escreveu vários trabalhos e artigos de diferentes assuntos. Também foi linguista, sendo que ganhou fama em Sânscrito pela sua erudição e seus trabalhos filosóficos, dando-lhe uma posição de destaque neste campo de conhecimento.

Foi também um grande empreendedor produzindo grandes projetos, mas que não deram certos. Um de seus projetos foi a tentativa de reunir as Igrejas protestante e católica e duas ceitas protestantes de sua época. No ano de 1682 fundou uma revista junto a Otto Mencke, a Acta eruditorum. Leibniz se tornou editor-chefe e esta revista alcançou grande movimentação em boa parte da Europa. Ali ele publicou vários de seus trabalhos matemáticos onde a maioria deles haviam sido escritos de 1682 a 1692. Também foi criador da Academia de Ciências de Berlim no ano de 1700 e tentou criar academias semelhantes em Viena, Dresdem e Petersburgo.

Leibniz efetuou várias pesquisas em torno de sua obra chamada *Characteristica generalis*, que ocasionou a formulação de planos baseados em teoria de lógicas matemáticas e regras formais relacionadas a necessidades de raciocínio. Outras formulações termológicas estabelecidas por ele foram as propriedades de negação, multiplicação e adição lógicas, além de considerar a classe vazia, propriedades de inclusão de classes, semelhança de propriedades de inclusão de classes e implicações de proposições.

Leibniz possuía uma grande capacidade de discernir com clareza o potencial de um simbolismo bem estruturado, pois destaca-se a ele ser feliz por apresentar uma notação de cálculo muito mais conveniente e agradável que a de Isaac Newton.

Outra criação que se atribui a Leibniz é a teoria de determinantes que possuía como foco os estudos das equações lineares, mesmo que no Japão, Seki Kowa, tivesse feito dez anos antes argumentações parecidas. Outros méritos que se devem a ele são: A generalização do teorema binomial para o multinomial, contribuição para promover os fundamentos da teoria das envoltórias, a definição de círculo osculador bem como sua importância nos estudos baseados em curvas, além de outros trabalhos que são de caráter jurídico e metafísico.

No final da vida, Leibniz sofreu muito com as polêmicas feitas por outros a respeito da criação do cálculo em relação a Newton. Leibniz faleceu em 1716 e conta-se que em seu funeral apareceu apenas uma pessoa.

3 MÉTODOS MATEMÁTICOS ASSOCIADOS A DIFERENCIAÇÃO

Neste capítulo apresentaremos os métodos matemáticos para cálculos de retas tangentes à curvas desenvolvidos nas décadas que antecederam o surgimento do Cálculo Diferencial e Integral e veremos como estes métodos tiveram papéis cruciais para no desenvolvimento dessa teoria. Apresentaremos estes métodos na seguinte ordem: Métodos da tangente de Descartes; Métodos da tangente de Fermat; Método dos máximos e mínimos de Fermat; O Folium de Descartes e o método da tangente de Isaac Barrow.

Para fins de notação, ao longo deste trabalho, quando nos referirmos a um segmento de reta que liga um determinado ponto A a um ponto B no plano, utilizaremos a notação AB. Já o comprimento de tal segmento denotaremos por $\overline{AB}$.

3.1 MÉTODODOS DA TANGENTE DE DESCARTES

Abordaremos nesta seção os métodos matemáticos utilizados por Descartes para encontrar retas tangentes a curvas. Focaremos em dois de seus principais métodos.

3.1.1 O PRIMEIRO MÉTODO DA TANGENTE DE DESCARTES

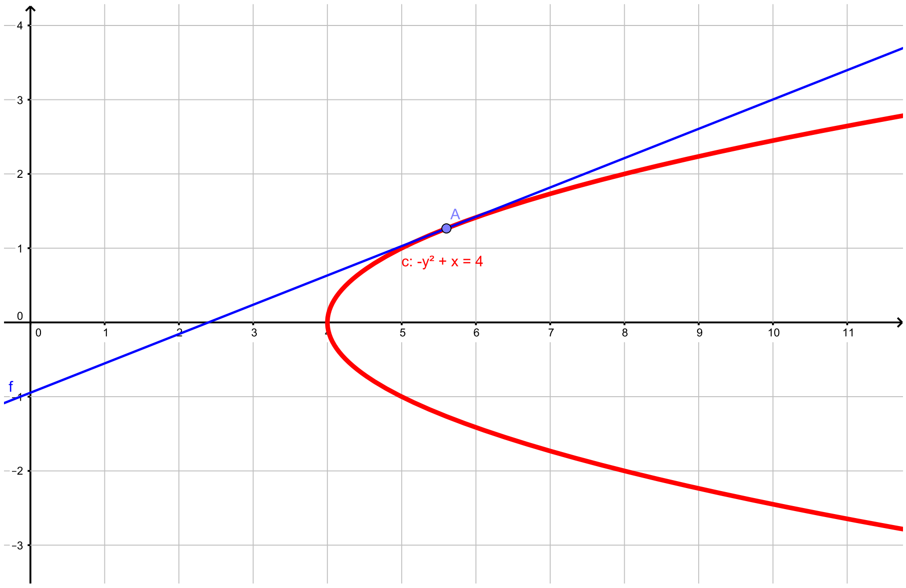
Neste método, primeiro consideramos a equação algébrica que representa a curva no plano cartesiano na qual desejamos obter tangentes $f(x;y) = 0$. Em seguida, fixamos o ponto na qual queremos a reta tangente e consideramos todas as circunferências centradas no eixo das abscissas e que passam por este ponto. Após algumas manipulações algébricas envolvendo as equações da curva $f(x;y) = 0$ e da circunferência $(x - x_0)^2 + y^2 = r^2$, encontramos uma equação que representa os pontos de intersecção da curva com a circunferência. Finalmente, forçando esta equação a ter uma única solução, obtemos que a circunferência passa a ser tangente a curva, compartilhando assim a mesma tangente. Como sabemos obter a tangente de uma circunferência, resolvemos o problema.

Para facilitar o entendimento do método que Descartes produzia para o cálculo da reta tangente, vamos seguir as etapas mencionadas acima em um exemplo específico.

Vamos determinar a tangente em algum ponto da parábola $x = y^2 + 4$. Ver Figura 17. Note que, neste caso, temos

$$f(x;y) = y^2 - x + 4 = 0.$$

Figura 17: Reta tangente a parábola num ponto.



Fonte: Autoria própria com o uso do Geogebra

Na Figura 18 (Próxima página) podemos ver uma circunferência arbitrária centrada no eixo x e que intercepta a parte de cima da parábola em pelo menos dois pontos, sendo um deles o ponto onde desejamos obter a tangente.

Os pontos (x, y) que estão simultaneamente na Parábola e na Circunferência devem satisfazer o sistema

$$\begin{cases} (x-b)^2 + y^2 = r^2 \\ x = y^2 + 4, \end{cases} \tag{10}$$

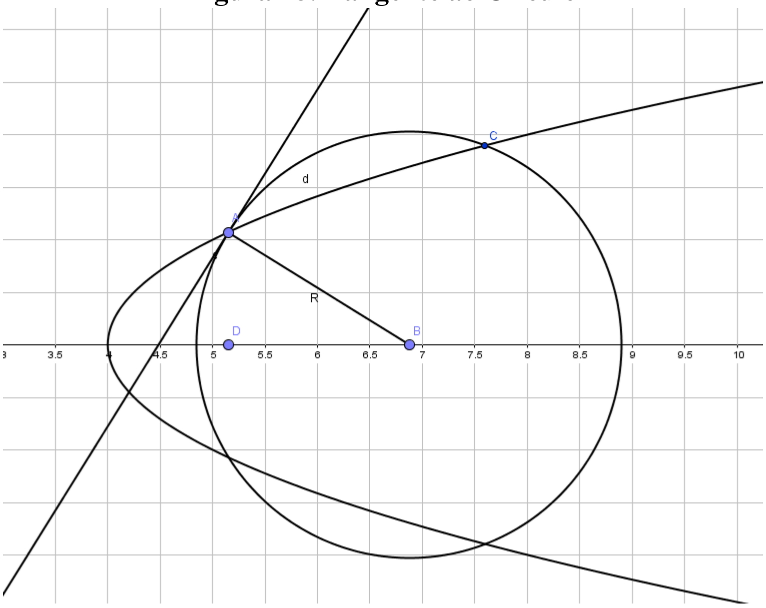
onde, $B = (b, 0)$ é o centro da circunferência. Isolando y^2 na primeira equação do sistema (10), temos

$$y^2 = r^2 - (x-b)^2 = r^2 - x^2 + 2xb - b^2. \tag{11}$$

Substituindo (11) na segunda equação de (10), encontramos

$$x = r^2 - x^2 + 2xb - b^2 + 4,$$

Figura 18: Tangente ao Círculo



Fonte: Autoria própria com o uso do Geogebra

ou seja,

$$x^2 + (1-2b)x + b^2 - 4 - r^2 = 0. \tag{12}$$

Calculando o discriminante desta equação obtemos

$$\Delta = (1-2b)^2 - 4b^2 + 16 + 4r^2 = 17 - 4b + 4r^2.$$

Como a circunferência intercepta a parábola em quatro pontos, temos que a equação (12) possui duas raízes x_1 e x_2, sendo que cada raiz possui como correspondente dois pontos do eixo das ordenadas, simétricos em relação ao eixo das abscissas. No nosso contexto, essas raízes são exatamente as coordenadas no eixo das abscissas dos pontos de intersecção da parábola com a circunferência. Como a equação (12) deve possuir duas raízes reais para conter quatro pontos de interseção da circunferência com a parábola, ela deve satisfazer $\Delta > 0$. Utilizando a expressão de Δ obtida acima, temos que $\Delta > 0$ se, e somente se, $b < \frac{17}{4} + r^2$.

Agora forçamos a circunferência a tocar a parábola em dois pontos simétricos em relação ao eixo das ordenadas, onde um desses pontos é o que queremos calcular o coeficiente angular da reta tangente. Para isso devemos ter $x_1 = x_2 = \delta$. Desta forma a equação quadrática (12) pode ser reescrita na forma $(x-\delta)^2$. Em outras palavras,

$$x^2 + (1-2b)x + b^2 - 4 - r^2 = (x-\delta)^2 = x^2 - 2\delta x + \delta^2.$$

Utilizando a propriedade de igualdade de polinômios, temos,

$$(1-2b) = -2\delta$$

e

$$b^2 - 4 - r^2 = \delta^2.$$

Isolando b na primeira equação e depois r^2 na outra, encontramos

$$b = \frac{2\delta+1}{2} \tag{13}$$

e

$$r^2 = b^2 - 4 - \delta^2. \tag{14}$$

Note que, como foi tomado $x_1 = x_2 = \delta$ (raiz dupla), se quisermos encontrar a tangente num ponto (x,y) pertencente a parábola, primeiro devemos observar que os valores x e y serão $x = \delta$ e $y = \pm\sqrt{\delta-4}$, ou seja, o ponto de tangência seria da forma $(\delta, \pm\sqrt{\delta-4})$. Em seguida, substituindo o valor de δ em (13), encontramos o valor de b e consequentemente o centro da circunferência

$$B = (b,0) = \left(\frac{2\delta+1}{2}, 0\right).$$

Substituindo agora o valor de b em (14) encontramos o raio da circunferência,

$$r = \sqrt{\left(\frac{2\delta+1}{2}\right)^2 - 4 - \delta^2}.$$

Uma vez encontrado o centro e o raio da circunferência, podemos obter a reta normal e consequentemente a tangente a circunferência que agora é também tangente a parábola. Veja a Figura 19 (Próxima Página).

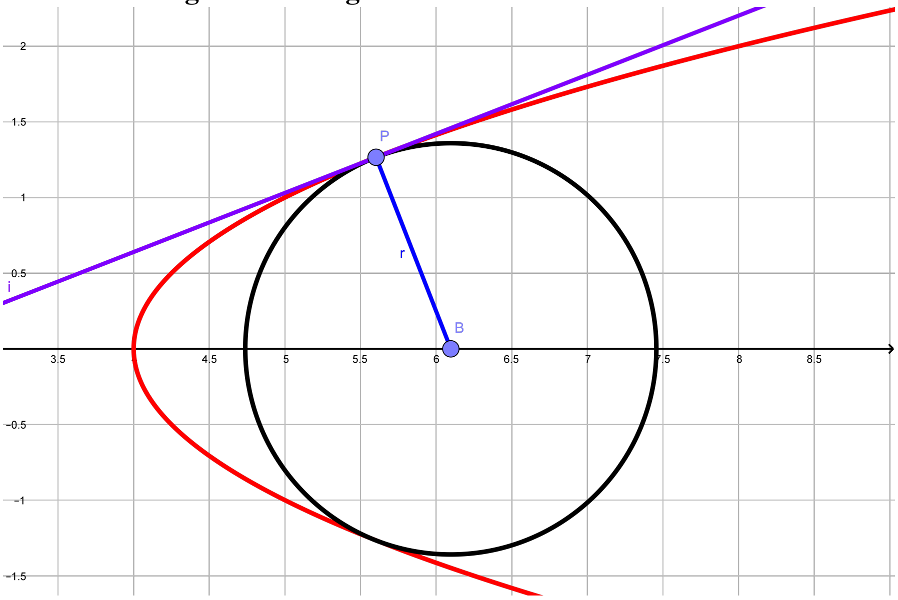
Com o intuito de obter a equação da reta tangente, primeiro calculamos o coeficiente angular m_n da reta normal da circunferência que passa pelo ponto de tangência. Dessa forma obtemos o coeficiente angular m_t da reta tangente e consequentemente sua equação.

Uma vez que a reta normal passa pelo centro da circunferência $B = (b,0) = \left(\frac{2\delta+1}{2}, 0\right)$ e pelo ponto de tangencia $P = (x,y) = (\delta, \pm\sqrt{\delta-4})$, temos que m_n é dado por

$$m_n = \frac{0-y}{B-x} = \frac{0-(\pm\sqrt{\delta-4})}{\frac{2\delta+1}{2} - \delta} = -2(\pm\sqrt{\delta-4}). \tag{15}$$

Como foi encontrado o valor do coeficiente da reta normal que liga o ponto B a P em

Figura 19: Tangente a circunferência e a curva



Fonte: Autoria própria com o uso do Geogebra

(15), agora encontraremos o valor do coeficiente da reta tangente ao ponto P, que é perpendicular a reta que passa pelos pontos B e P. Portanto, o coeficiente angular da reta tangente é dado por

$$m_t = -\frac{1}{m_n} = \frac{1}{2\ (\pm\sqrt{\delta-4})} = \frac{\pm\sqrt{\delta-4}}{2\delta-8}. \tag{16}$$

Finalmente a equação da reta tangente é

$$y = \frac{(\pm\sqrt{\delta-4})}{2\delta-8}(x-\delta)+(\pm\sqrt{\delta-4}).$$

Observação 3.1 *Utilizando a teoria moderna de derivada sabemos que é possível obter facilmente o coeficiente angular da reta tangente. Basta derivarmos a função e aplicarmos a derivada na abscissa do ponto de tangência.*

De fato, isolando y em $x = y^2+4$, temos

$$y = \pm\sqrt{x-4} = \pm(x-4)^{\frac{1}{2}}$$

Utilizando a derivada da função composta (regra da cadeia) e derivando y em relação a x, obtemos

$$y'(x) = \pm\frac{1}{2}(x-4)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2(\ \pm\sqrt{x-4})} = \frac{\pm\sqrt{x-4}}{2x-8}. \tag{17}$$

Considerando o ponto $P = (\delta, \pm\sqrt{\delta-4})$, pertencente a parábola, temos que a inclinação da reta tangente a parábola neste ponto é dado por

$$y'(\delta) = \frac{\pm\sqrt{\delta - 4}}{2\delta - 8}. \tag{18}$$

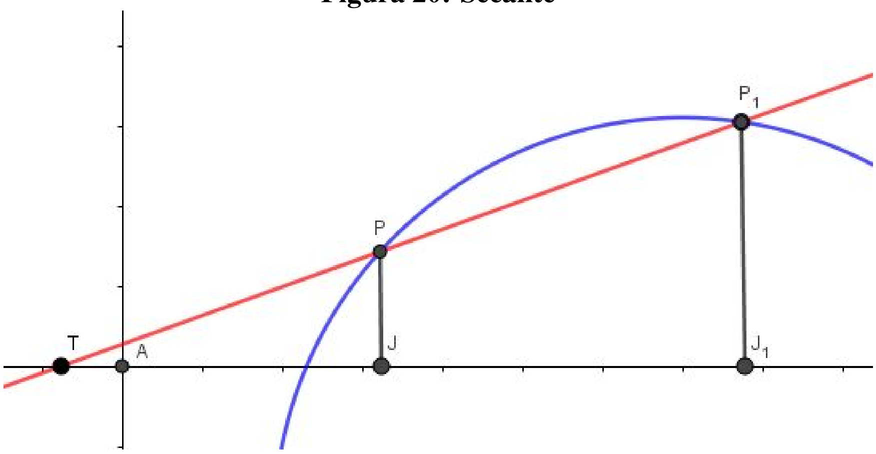
Perceba agora que (18) é igual ao resultado encontrado em (16). Concluimos que o método que Descartes utilizava para encontrar retas tangentes, para determinadas classes de curvas, nada mais é do que a noção de derivada que temos hoje. Tais contas já eram feitas antes do cálculo diferencial e integral serem estabelecidos.

3.1.2 O SEGUNDO/TERCEIRO MÉTODO DA TANGENTE DE DESCARTES

Segundo (CARVALHO, 1919) o terceiro método de Descartes é um método semelhante ao seu segundo método, sendo apenas una demonstração do terceiro método. Por essa razão, apresentaremos apenas o seu terceiro método.

O terceiro método da tangente de Descartes consiste em traçar uma secante a curva, passando pelo ponto que se deseja descobrir a reta tangente. Para entender melhor este método considere a Figura 20 abaixo:

Figura 20: Secante



Fonte: Autoria própria como uso do Geogebra

Considere o ponto P de coordenadas (x, y) que se quer calcular a reta tangente e P_1 o ponto por onde passará a reta secante. Considere também T o ponto onde a reta secante toca o eixo x. A reta tangente será obtida a partir da secante quando P_1 assumir valores muito próximos de P na curva $f(x; y) = 0$.

Descartes definia o comprimento dos segmentos da seguinte forma: $\overline{AJ} = x$, $\overline{JP} = y$, $\overline{TJ} = a$, $\overline{JJ_1} = e$ e $\overline{P_1J_1} = h$, com $f(x; y) = 0$.

Ele percebeu, que por semelhança de triângulos, TP_1J_1 é semelhante a TPJ, ou seja,

$$\frac{a}{a+e} = \frac{y}{h}.$$

Em outras palavras,

$$h = y\left(1+\frac{e}{a}\right).$$

Assim, como e assume valores muito próximos de zero, Descartes assumia que

$$f(x,y) = f\left(x+e, y\left(1+\frac{e}{a}\right)\right) = 0.$$

Para facilitar a visualização deste método vamos considerar que queremos calcular a reta tangente em um ponto P de coordenadas (x,y) da curva $y^3 = mx$. Para este exemplo, temos que a igualdade

$$f\left(x+e, y\left(1+\frac{e}{a}\right)\right) = 0 \tag{19}$$

se torna

$$y^3\left(1+\frac{e}{a}\right)^3 - m(x+e) = 0,$$

isto é,

$$y^3\left(1+\frac{3e}{a}+\frac{3e^2}{a^2}+\frac{e^3}{a^3}\right) - mx - me = 0.$$

Aplicando a propriedade distributiva, encontramos

$$y^3 + \frac{3ey^3}{a} + \frac{3e^2y^3}{a^2} + \frac{e^3y^3}{a^3} - mx - me = 0. \tag{20}$$

Simplificando em (20) a relação $y^3 = mx$, obtemos

$$\frac{3ey^3}{a} + \frac{3e^2y^3}{a^2} + \frac{e^3y^3}{a^3} - me = 0.$$

Dividindo ambos os lados desta igualdade por e, chegamos em

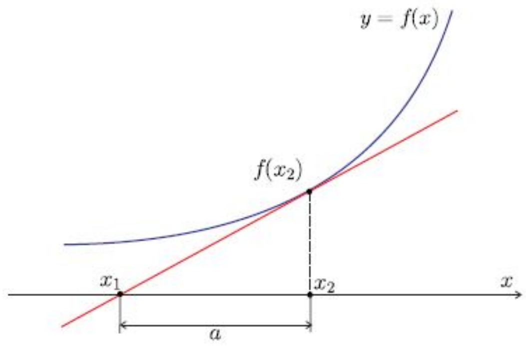
$$\frac{3y^3}{a} + \frac{3ey^3}{a^2} + \frac{e^2y^3}{a^3} - m = 0. \tag{21}$$

Uma vez que e vai adquirindo valores muito próximos de zero, podemos "desprezar"os termos que estão multiplicados por e, ou seja,

$$\frac{3y^3}{a} = m \Leftrightarrow a = \frac{3y^3}{m} \Leftrightarrow a = 3x.$$

Logo, $a = 3x$. O valor de a, ou o comprimento de TJ, era chamado naquela época de subtangente e tanto Descartes como Fermat o utilizava para encontrar a reta tangente. De acordo com a Figura 21, a subtangente nada mais é que a projeção da reta tangente sob o eixo das abscissas, ou seja, é a distância do ponto de intersecção da reta tangente com o eixo das abscissas até a coordenada x do ponto (x,y) que se quer encontrar a reta tangente.

Figura 21: Subtangente



Fonte: Autoria própria com o uso do Geogebra

Após encontrar a subtangente, Descartes automaticamente encontrava o valor de $T = (x-3x,0) = (-2x,0)$, e a partir daí podia calcular o coeficiente angular da reta que passa pelo ponto T e $P = (x,y)$, ou seja,

$$m_t = \frac{y-0}{x-(-2x)} = \frac{y}{3x} = \frac{\sqrt[3]{mx}}{3x} = \frac{m}{3(mx)^{\frac{2}{3}}}.$$

Utilizando a linguagem atual de derivada, vemos que a derivada de $y = \sqrt[3]{mx}$, é dada por

$$y'(x) = \frac{m}{3(mx)^{\frac{2}{3}}},$$

mesmo resultado que Descartes já obtinha, para esta curva específica, antes de Newton e Leibniz desenvolverem o cálculo.

3.2 MÉTODOS DA TANGENTE DE FERMAT

Nesta seção apresentaremos dois métodos matemáticos utilizado por Fermat para encontrar retas tangentes a curvas, um método para encontrar máximos e mínimos e um método de encontrar a área sob curvas.

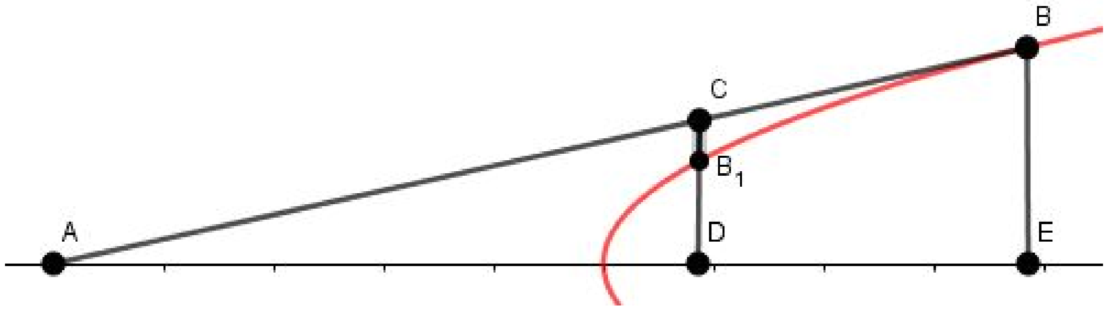
3.2.1 O PRIMEIRO MÉTODO DA TANGENTE DE FERMAT

Segundo (CARVALHO, 1919) o primeiro método da tangente de Fermat consiste em utilizar uma estrutura de desigualdades tal que, utilizando a semelhança de triângulos e substituindo alguns valores por outros e fazendo simplificações, é encontrado o valor da subtangente, e o coeficiente angular da reta tangente.

Os métodos de Fermat também lidam com curvas explícitas que podem ser expressas na forma $f(x;y)=0$. Contudo, para facilitar a visualização, o aplicaremos na parábola $y^2=x$. Neste método, ele já assume a reta tangente à curva e em seguida vai em busca da subtangente para então determinar sua inclinação.

Para calcular o coeficiente angular da reta tangente que passa pelo ponto B, de coordenadas (x,y), ele considerava o ponto B_1, próximo de B e na curva $y^2=x$, cujas coordenadas são $B_1=(x_1,y_1)$. Denotando $D=(x_1,0)$, $E=(x,0)$ e e o comprimento $\overline{DE}$, podemos escrever $B_1=(x-e,y_1)$. Ver Figura 22. Chamando de A ponto onde a reta tangente toca o eixo x, temos que o segmento AE, cujo comprimento é denotado por a, é a subtangente.

Figura 22: Parábola com as estruturas de segmentos



Fonte: (CARVALHO, 1919), modificado com uso do Geogebra

Para encontrar o comprimento da subtangente AE, Fermat realizava o seguinte cálculo: Como a equação da curva é dada por $y^2=x$ e B_1 pertence a curva, devemos ter

$$y_1^2=x-e.$$

Multiplicando esta equação por y^2, obtemos

$$y^2y_1^2=(x-e)y^2.$$

Substituindo y^2 apenas do lado esquerdo da igualdade, encontramos

$$y_1^2x=(x-e)y^2,$$

ou seja,

$$\frac{y_1^2}{x-e}=\frac{y^2}{x}.$$

Em outras palavras,

$$\frac{y^2}{y_1^2}=\frac{x}{x-e}.$$

Em seguida, observando a Figura 22, podemos constatar que o comprimento $\overline{CD} > y_1$. Daí,

$$\frac{y^2}{\overline{CD}^2} < \frac{x}{x-e}. \tag{22}$$

Utilizando a semelhança dos triângulos ACD e ABE, vemos que

$$\frac{y}{\overline{CD}} = \frac{\overline{EA}}{\overline{DA}}.$$

Como $\overline{EA} = a$ e $\overline{DA} = a - e$ temos que

$$\frac{y}{\overline{CD}} = \frac{\overline{EA}}{\overline{DA}} = \frac{a}{a-e}.$$

Substituindo este valor em (22), obtemos

$$\frac{a^2}{(a-e)^2} < \frac{x}{x-e},$$

ou seja,

$$a^2(x-e) < x(a-e)^2.$$

Desenvolvendo ambos os lados desta desigualdade, encontramos

$$xa^2 - ea^2 < xa^2 - 2aex + xe^2$$

e subtraindo xa^2 de ambos os lados,

$$-ea^2 < -2aex + xe^2.$$

Dividindo por ea ambos os lados da desigualdade acima, obtemos

$$-a < -2x + \frac{xe}{a}. \tag{23}$$

Agora vem o principal argumento de Fermat. A desigualdade em (23) é resultante de desconsiderar o segmento CB_1, onde a diferença é exatamente o comprimento deste segmento. Nesse sentido, se o ponto B_1 se aproxima de B, ao longo da curva, então a diferença na desigualdade (23) tende a diminuir e se torna uma igualdade caso B_1 atinja B. Por outro lado, pela definição de e, B_1 se aproximar de B é equivalente ao valor de e ficar cada vez menor e ele se tornar zero caso B_1 atinja B. Portanto, quando e tender para zero na desigualdade (23), o termo que depende de e desaparece e a desigualdade se torna uma igualdade, de onde obtém-se $-a = -2x$, ou seja, $a = 2x$. Fermat usava o seguinte termo para descrever este procedimento:

> "Na realidade Fermat não iguala a princípio as duas expressões. Compara-as por *adégalité* o que quer dizer que só considera o sinal igual quando faz tender e para zero".(CARVALHO, 1919, p.28)

Uma vez encontrado o valor da subtangente a, obtemos $A = (x-2x,0) = (-x,0)$. Logo, o coeficiente angular da reta tangente é dado por

$$m_t = \frac{y-0}{x-(-x)} = \frac{y}{2x} = \frac{\sqrt{x}}{2x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}. \tag{24}$$

Utilizando a noção de derivada na função $y = \sqrt{x}$, vemos que

$$y'(x) = \frac{\pm\sqrt{x}}{2x},$$

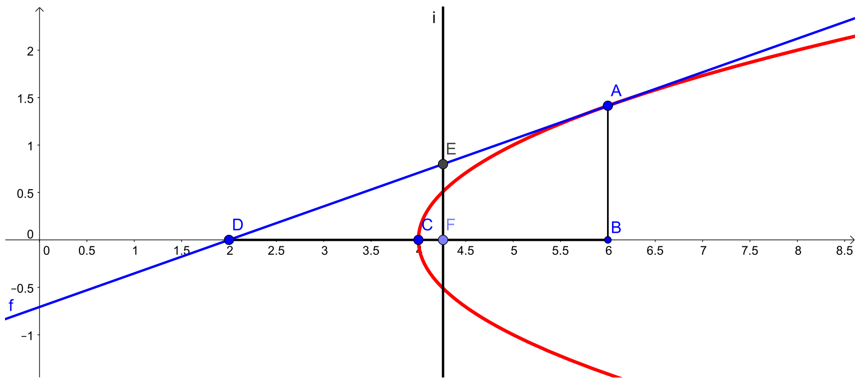
exatamente o coeficiente angular em (24) obtido por Fermat.

3.2.2 O SEGUNDO MÉTODO DA TANGENTE DE FERMAT

Veremos agora o segundo método de Fermat para o cálculo do coeficiente angular da reta tangente em pontos de determinadas curvas. Para facilitar o entendimento, consideramos o mesmo exemplo utilizado no primeiro método de tangentes de Descartes, isto é, a parábola

$$x = y^2 + 4. \tag{25}$$

Figura 23: Reta tangente a parábola



Fonte: Autoria própria com o uso do Geogebra

Conforme a Figura 23, Fermat considerava dois triângulos, ABD e EFD, onde A é o ponto da curva em que se quer a tangente, B é o ponto da abscissa cujo segmento de reta AB é perpendicular ao eixo das abscissas e paralela ao eixo das ordenadas, D é o ponto onde a reta tangente à curva no ponto A corta o eixo das abscissas, E é um ponto arbitrário na reta tangente e F é um ponto da abscissa tal que o segmento de reta EF é perpendicular ao eixo das abscissas. Aqui a subtangente é o comprimento $\overline{DB}$.

Denotando $A = (x, y)$, δ o comprimento $\overline{BF}$, β o comprimento $\overline{BD}$ e γ o comprimento $\overline{EF}$, temos por semelhança de triângulos

$$\frac{\gamma}{y} = \frac{\beta - \delta}{\beta},$$

ou seja,

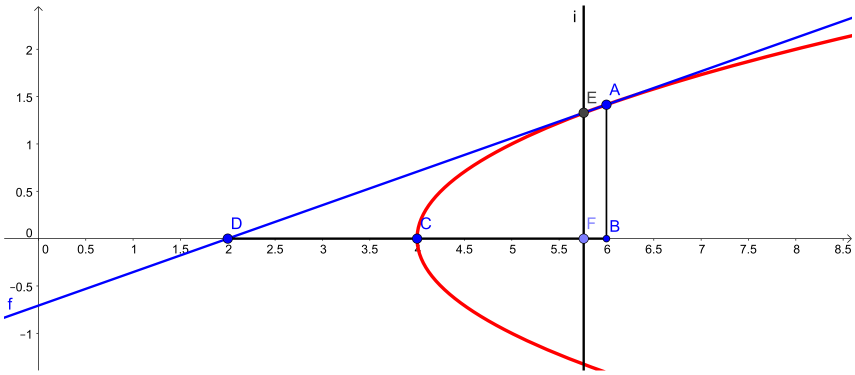
$$\gamma = y\left(\frac{\beta - \delta}{\beta}\right). \tag{26}$$

Agora, note que, fazendo δ tender para zero em (26), temos que γ tende a y, ou seja, E vai se aproximando de A e F vai se aproximando de B. Note também que o ponto E, cuja coordenada é dada por

$$E = (x - \delta, \gamma) = \left(x - \delta, y\left(\frac{\beta - \delta}{\beta}\right)\right),$$

vai se aproximando do ponto $A = (x, y)$ ao ponto que não é possível distinguir se E esta na parábola ou na reta tangente. Ver Figura 24.

Figura 24: Ponto E assumindo valores próximos de A



Fonte: Autoria própria com o uso do Geogebra

Assim, informalmente, podemos supor que δ seja tão pequeno ao ponto que E passa a pertencer a parábola, ou seja, o ponto $E = \left(x - \delta, y\left(\frac{\beta - \delta}{\beta}\right)\right)$ satisfaz (25):

$$x - \delta = y^2\left(\frac{\beta - \delta}{\beta}\right)^2 + 4.$$

Desenvolvendo os termos que contém potências, temos

$$x - \delta = y^2 - \frac{2\delta y^2}{\beta} + \frac{\delta^2 y^2}{\beta^2} + 4.$$

Como $x = y^2 + 4$, obtemos

$$y^2 + 4 - \delta = y^2 - \frac{2\delta y^2}{\beta} + \frac{\delta^2 y^2}{\beta^2} + 4,$$

isto é,

$$-\delta = -\frac{2\delta y^2}{\beta} + \frac{\delta^2 y^2}{\beta^2}. \tag{27}$$

Dividindo a equação (27) por δ,encontramos

$$-1 = -\frac{2y^2}{\beta} + \frac{\delta y^2}{\beta^2}. \tag{28}$$

Como δ é considerado suficientemente pequeno, podemos desconsiderar informalmente o termo $\dfrac{\delta y^2}{\beta^2}$ da equação (28). Daí, obtemos

$$-1 = -\frac{2y^2}{\beta},$$

ou seja,

$$\beta = 2y^2. \tag{29}$$

Logo, através de (29) é possível encontrar a subtangente. Assim, podemos obter as coordenadas de D e consequentemente a reta tangente. Em outras palavras,

$$D = (x-\beta, 0) = (x-2y^2, 0). \tag{30}$$

Como (30) nos fornece as coordenadas do ponto D em relação a x e y, podemos efetuar o cálculo do coeficiente angular da reta tangente da seguinte forma:

$$m_t = \frac{y-0}{x-(x-2y^2)} = \frac{y}{2y^2} = \frac{1}{2y},$$

ou seja, o coeficiente angular da reta tangente é

$$m_t = \frac{1}{2y} = \frac{1}{2\sqrt{x-4}} = \frac{\sqrt{x-4}}{2x-8}. \tag{31}$$

Finalmente, se quisermos por exemplo calcular o coeficiente angular da reta tangente que passa no ponto $A = (6,\sqrt{2})$ pertencente a parábola $x = y^2 + 4$, basta utilizarmos (31) e obtermos

$$m_t = \frac{\sqrt{2}-0}{6-2} = \frac{\sqrt{2}}{4}. \tag{32}$$

Neste caso, a equação da reta tangente será

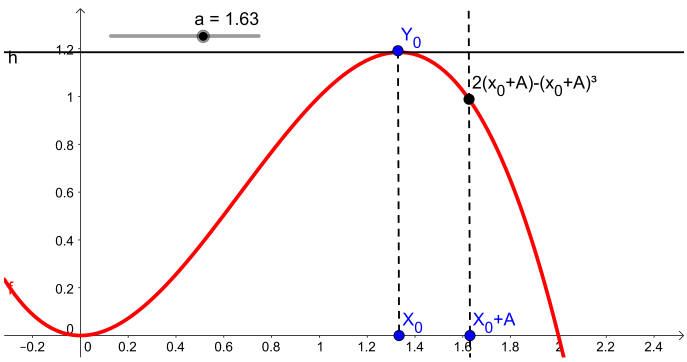
$$y = \frac{\sqrt{2}}{4}x - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Observação 3.2 *O coeficiente angular obtido por Descartes em* (16) *é o mesmo que obtido por Fermat em* (31) *que é o mesmo obtido pela teoria moderna em* (17).

3.3 MÉTODO DOS MÁXIMOS E MÍNIMOS DE FERMAT

Para ilustrarmos como Fermat encontrava os valores de máximos e mínimos de determinadas curvas, vamos considerar a curva expressa pela equação $y = 2x^2 - x^3$. A ideia utilizada por Fermat é assumir que x_0 seja o ponto de máximo e A seja um acréscimo somado a x_0. Em seguida, fazendo A se tornar um valor muito pequeno, o ponto $(x_0 + A, 2(x_0 + A)^2 - (x_0 + A)^3)$ da curva $y = 2x^2 - x^3$ se confunde com os pontos da reta constante $y = 2x_0^2 - x_0^3$, onde $2x_0^2 - x_0^3$ representa o valor máximo. Aqui, essa reta constante é a reta tangente. Quando a reta tangente é constante do tipo $y = c$ e localmente a curva não cruza a reta, o ponto de tangencia é máximo ou mínimo. Veja a Figura 25.

Figura 25: Reta constante interseccionando o valor de máximo da curva



Fonte: Autoria própria com o uso do Geogebra

Informalmente, Fermat igualava a equação da reta que passa pelo ponto de máximo com a equação da curva quando A era um valor bem pequeno e procurava quais valores iriam satisfazer a igualdade. Em outras palavras, ele assumia que

$$2x_0^2 - x_0^3 = 2(x_0 + A)^2 - (x_0 + A)^3. \tag{33}$$

Desenvolvendo a igualdade (33), temos

$$2x_0^2 - x_0^3 = 2x_0^2 + 4Ax_0 + 2A^2 - x_0^3 - 2Ax_0^2 - A^2x_0 - Ax_0^2 - 2A^2x_0 - A^3.$$

Fazendo simplificações e subtraindo $2x_0^2 - x_0^3$ de ambos os lados da igualdade, encontramos

$$4x_0A + 2A^2 - 3x_0^2A - 3x_0A^2 - A^3 = 0.$$

Colocando A em evidência, vemos que

$$A(4x_0 + 2A - 3x_0^2 - 3x_0A - A^2) = 0.$$

Agora, dividindo por A ambos os lados da igualdade, obtemos

$$4x_0 + 2A - 3x_0^2 - 3x_0A - A^2 = 0.$$

Finalmente, como A é pequeno e está assumindo valores cada vez mais próximos de zero, podemos desprezar os termos que são multiplicados por A e assim obter

$$4x_0 - 3x_0^2 = 0. \tag{34}$$

Concluímos dessa maneira, após colocar x_0 em evidência na equação (34), que

$$x_0(4 - 3x_0) = 0,$$

ou seja, $x_0 = 0$ ou $x_0 = \frac{4}{3}$. Fermat sabia assim qual era o ponto de máximo.

De acordo com a teoria moderna de derivada, se calcularmos a derivada de $y = 2x^2 - x^3$ e igualarmos a zero, temos os candidatos a extremo da função, ou seja,

$$y'(x) = 4x - 3x^2 = 0. \tag{35}$$

Note que (35) é igual a (34), ou seja, suas raízes são

$$x_0 = 0 \qquad \text{ou} \qquad x_0 = \frac{4}{3}.$$

Como $x_0 = 0$ e $x_0 = \frac{4}{3}$ são pontos críticos e $y(0) < y(\frac{4}{3})$ concluímos que $x = \frac{4}{3}$ é o ponto em que $y = 2x^2 - x^3$ atinge seu maior valor, exatamente o que era obtido por Fermat.

3.4 FOLIUM DE DESCARTES

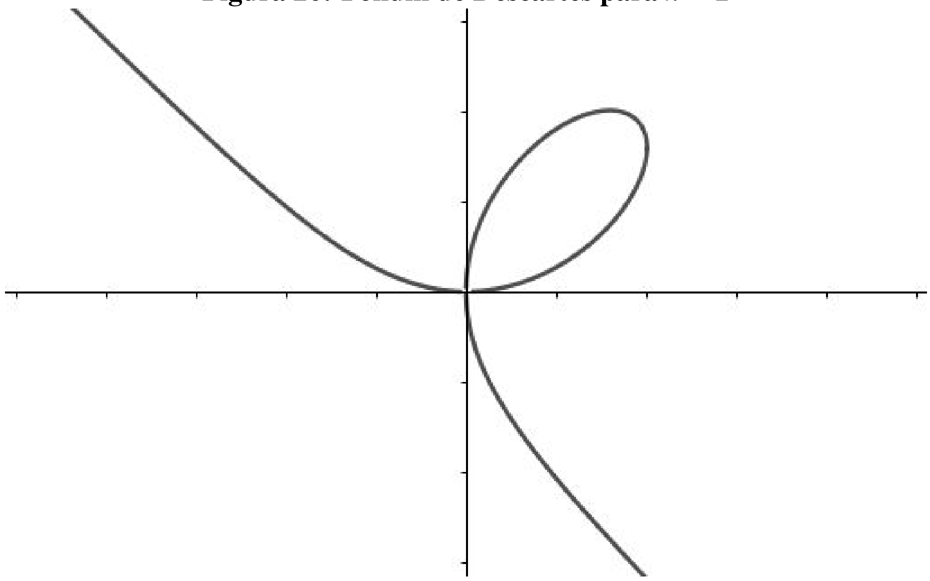
No ano de 1638 ocorreu uma controvérsia entre Descartes e Fermat em torno do método sobre máximos e mínimos desenvolvido por Fermat e sua relação com os primeiros métodos das tangentes. Descartes questionou principalmente a demonstração de tal método, o argumento de desconsiderar quantidades que eram muito pequenas, bem como se o método de Fermat era ou não mais gerais que os dele.

Embora o método de máximo e mínimo de Fermat tinha sido elaborado 7 anos antes, apenas no ínicio de 1638 foi que este método chegou às mãos de Descartes. Neste momento, Descartes ainda não tinha deduzido seu segundo método da tangente e ficou bastante cético quanto a veracidade e eficácia dos argumentos de Fermat. Diante disso, no dia 18 de Janeiro de 1638, Descartes lançou um desafio a Fermat: Obter a tangente ao Folium, cuja equação é dada por

$$x^3 + y^3 = nxy. \tag{36}$$

A Figura 26 ilustra o folium quando $n = 2$.

Figura 26: Folium de Descartes para $n = 2$



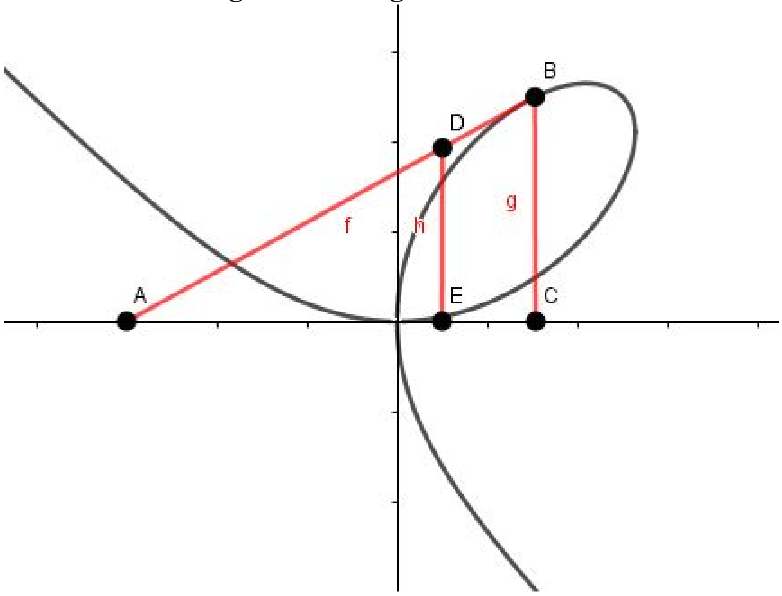
Fonte: Autoria Própria com o uso do Geogebra

Tal desafio acabou sendo bastante produtivo tanto para Fermat, que se lançou no desafio, quanto para Descartes que se propôs a corrigir "erros" que ele erroneamente enxergou num primeiro momento. Como consequência desse desafio, Fermat desenvolveu seu segundo método das tangentes, que era mais eficaz e fornecia facilmente a tangente do folium, e Descartes acabou desenvolvendo seu segundo/terceiro método da tangente. Embora haja várias semelhanças entre os segundos métodos de Fermat e Descartes, é importante mencionar que Descartes e Fermat não se comunicavam diretamente naquela época, ambos se comunicavam com P. Mersenne e Hardy através de cartas e a comunicação não era muito frequente, ou seja, seus respectivos métodos foram desenvolvidos de forma independente.

Veremos agora o processo pelo qual Fermat obteve a reta tangente a um ponto arbitrário do folium utilizando seu segundo método de cálculo de retas tangentes. Considerando $B = (x, y)$, os comprimentos $\overline{EC} = e$ e $\overline{AC} = a$, ver Figura 27, temos por semelhança de triângulos que $\overline{DE} = y\left(\frac{a-e}{a}\right)$. Considerando e pequeno e D um ponto do folium, obtemos

$$(x-e)^3 + y^3\left(1 - \frac{e}{a}\right)^3 = n(x-e).y\left(1 - \frac{e}{a}\right).$$

Figura 27: Tangente ao folium



Fonte: Autoria Própria com o uso do Geogebra

Desenvolvendo os termos, encontramos

$$x^3-3x^2e+3xe^2-e^3+y^3-3\left(\frac{e}{a}\right)y^3+3\left(\frac{e}{a}\right)^2y^3-\left(\frac{e}{a}\right)^3y^3-\left(1-\frac{e}{a}\right)(nxy-ney)=0. \quad (37)$$

Isolando y^3 em (36), substituindo e simplificando em (37), temos

$$-3x^2e+3xe^2-e^3-3\frac{e}{a}\,(nxy-x^3)+3\frac{e^2}{a^2}(nxy-x^3)-\frac{e^3}{a^3}(nxy-x^3)+nxy\frac{e}{a}+ney-ney\frac{e}{a}=0.$$

Dividindo ambos os lados da igualdade por e,

$$-3x^2+3xe-e^2-\frac{3}{a}(nxy-x^3)+3\frac{e}{a^2}(nxy-x^3)-\frac{e^2}{a^3}(nxy-x^3)+\frac{nxy}{a}+ny-ny\frac{e}{a}=0.$$

Como e assume valores muito próximo de zero, desprezando os termos que estão multiplicados por e, obtemos

$$-3x^2-\left(\frac{3}{a}\right)(nxy-x^3)+\left(\frac{nxy}{a}\right)+ny=0.$$

Isolando e fazendo a distributiva, encontramos

$$\frac{-3(nxy-x^3)+nxy}{a}=3x^2-ny,$$

o que equivale a

$$\frac{1}{a}=\frac{3x^2-ny}{-3(nxy-x^3)+nxy}.$$

Substituindo $nxy - x^3$ por y^3 e invertendo a equação, chegamos em

$$a = \frac{nxy - 3y^3}{3x^2 - ny}. \tag{38}$$

Como encontramos o valor da subtangente a, podemos encontrar o valor do ponto A e calcular o coeficiente angular da reta tangente a curva no ponto B, ou seja,

$$A = \left(x - \frac{nxy - 3y^3}{3x^2 - ny}, 0 \right)$$

e

$$m_t = \frac{y - 0}{x - A} = \frac{y}{\frac{nxy - 3y^3}{3x^2 - ny}} = \frac{y(3x^2 - ny)}{nxy - 3y^3} = \frac{3x^2 - ny}{nx - 3y^2}. \tag{39}$$

Por outro lado, utilizando a noção atual de derivação implícita para $F(x,y) = x^3 + y^3 - nxy = 0$, temos

$$y'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{3x^2 - ny}{nx - 3y^2}. \tag{40}$$

Comparando (39) com (40), percebemos que Fermat conseguiu, com sucesso, utilizando seu segundo método de cálculo de tangentes, encontrar a reta tangente a um ponto arbitrário do folium.

Descartes, no entanto, não possuía seu segundo e terceiro método de cálculo de retas tangentes na ocasião em que lançou esse desafio. Utilizando seu primeiro método da tangente acabou fracassando em seu próprio desafio. A seguir apresentamos as dificuldades encontradas ao tentar obter a tangente do folium pelo primeiro método de Descartes.

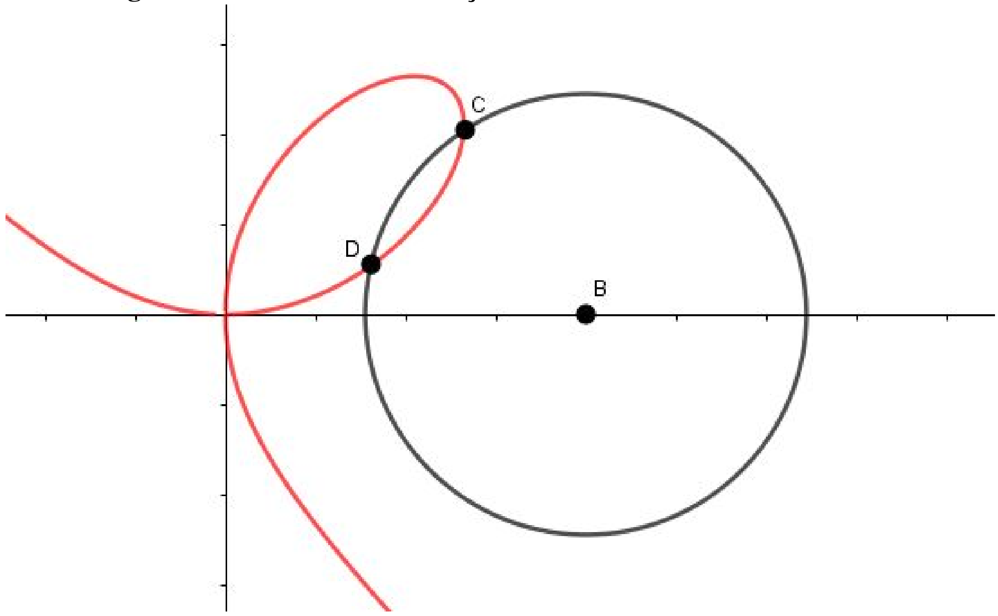
Considere o ponto D de coordenadas (x_1, y_1) o ponto da curva que se deseja encontrar a reta tangente que passa por ele, o ponto C, de coordenadas (x_2, y_2), o ponto pelo qual a circunferência também intersecciona a curva do folium. Ver Figura 28 (Póxima página). Os pontos que estão ao mesmo tempo no folium e na circunferência devem satisfazer o sistema

$$\begin{cases} (x-b)^2 + y^2 = r^2 \\ x^3 + y^3 - nxy = 0, \end{cases} \tag{41}$$

onde $B = (b, 0)$ é o ponto no eixo das abcissas, centro da circunferência que toca o folium em D e C. Isolando y na primeira equação de (41), obtemos

$$y = \pm\sqrt{-x^2 + 2xb - b^2 + r^2}. \tag{42}$$

Figura 28: Pontos de intersecção da circunferência com o folium



Fonte: Autoria Própria com o uso do Geogebra

Agora, substituindo (42) na segunda equação de (41), encontramos

$$x^3 \pm \sqrt{-x^2+2xb-b^2+r^2}(-x^2+2xb-b^2+r^2) \pm nx\sqrt{-x^2+2xb-b^2+r^2} = 0. \tag{43}$$

Veja que o argumento utilizado no primeiro método de Descartes, de considerar o discriminante nulo, no intuito de obter resolução única, não funciona pois temos uma equação cúbica. Isso mostra a limitação deste método.

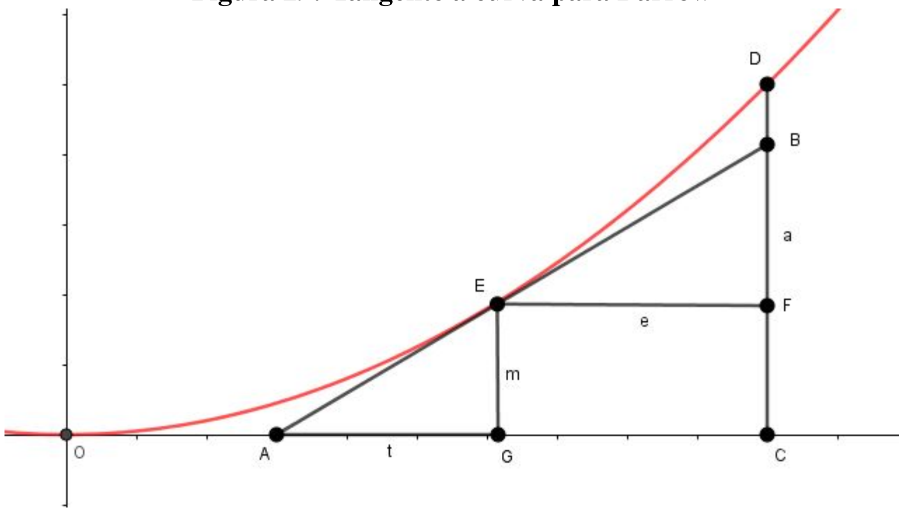
3.5 MÉTODO DA TANGENTE DE ISAAC BARROW

O método da tangente de Barrow é posterior aos métodos de Descartes e Fermat, tendo sido desenvolvido pouco antes de Newton chegar em suas descobertas. Segundo (BOYER, 1974), o método de cálculo da tangente de Barrow é considerado um método que se aproxima muito do cálculo diferencial que conhecemos hoje, também é muito parecido com os métodos das tangentes de Fermat, sendo a principal diferença o fato de que Fermat considerava apenas uma quantidade que variava e tendia a zero, a quantidade e. Já Barrow utilizava duas quantidades, que equivalem a Δx e Δy na linguagem atual.

> ”Assim como Roberval, Barrow o professor de Newton enxergava as linhas como o resultado de uma descrição feita por pontos animados de vários movimentos, considerando quase sempre aqueles que se exprimem pelas leis: $x = \varphi(t)$ e $y = at$”, (CARVALHO,1919, p.61).

Para explicar com mais facilidade o método da tangente de Barrow utilizaremos a linguagem moderna matemática, conforme a Figura 29.

Figura 29: Tangente a curva para Barrow



Fonte: Autoria própria com o uso do Geogebra

Para calcular a reta tangente ao ponto E de coordenadas (x,y) da curva polinomial $f(x;y) = 0$, Barrow primeiro considerava o ponto A como sendo a intersecção da reta tangente com o eixo x. Em seguida, considerava um acréscimo muito pequeno a E na curva, gerando D e consequentemente o pequeno arco gerado por ED, segundo (BOYER, 1974) "um arco infinitamente pequeno". Depois, trassava os segmentos de retas equivalentes aos valores das ordenadas dos pontos E e D, sendo os segmentos de retas EG e DC, respectivamente. Feito isso, ele trassava o seguimento EF paralelo ao eixo das abscissas, EG paralelo ao eixo das ordenadas. Depois, nomeava os comprimentos $\overline{EF}$ de e, da subtangente $\overline{AC}$ de t, dos comprimentos dos lados verticais dos triângulos AEG e EDF por m e a, respectivamente. Estando os pontos D e B muito próximos, ele assumia que os lados dos triângulos EDF e EBF eram iguais. Este triângulo EDF era chamado de "*triângulo diferencial*".

Barrow percebeu que a razão $\frac{a}{e}$ era igual a razão de $\frac{m}{t}$. Logo, se ele encontrasse a razão $\frac{a}{e}$ para pontos infinitamente próximos, automaticamente ele estaria encontrando a inclinação da reta que passa por A e B e tangencia o ponto E.

O método de Barrow é parecido com o de Fermat, pois ele fazia a substituição das variáveis x e y em $f(x,y) = 0$, por $x+e$ e $y+a$, respectivamente. Depois de alguns manuseios na equação, desprezava os termos que estavam multiplicados por potências de e e a maiores ou iguais a dois, já que estes valores representavam quantidades muito pequenas. Finalmente, após encontrar a razão $\frac{a}{e}$, obtinha $\frac{m}{t}$ e consequentemente a subtangente.

Para ilustrar o método de Barrow vamos aplicá-lo à *curva de Lamé*, $x^3+y^3=r^3$. Substituindo as variáveis x e y pelos pequenos acréscimos a estes pontos, obtemos

$$(x+e)^3+(y+a)^3=r^3.$$

Desenvolvendo os termos, encontramos

$$x^3+3x^2e+3xe^2+e^3+y^3+3y^2a+3ya^2+a^3=r^3.$$

Simplificando $x^3+y^3=r^3$ e desprezando os termos que são multiplicados por potências de a e e maiores ou iguais a dois, temos

$$3x^2e+3y^2a=0,$$

isto é,

$$\frac{a}{e}=-\frac{x^2}{y^2}.$$

Como $\frac{m}{t}=\frac{a}{e}=-\frac{x^2}{y^2}$, encontramos o valor da subtangente t como sendo

$$t=-\frac{my^2}{x^2}=-\frac{yy^2}{x^2}=-\frac{y^3}{x^2}.$$

Daí, a inclinação da reta tangente é dada por $-\frac{x^2}{y^2}$. Utilizando a noção de derivada atual e derivando $y=\left(r^3-x^3\right)^{\frac{1}{3}}$, obtemos

$$y'(x)=\frac{-3x^2}{3\left(r^3-x^3\right)^{\frac{2}{3}}}=-\frac{x^2}{y^2},$$

exatamente o resultado obtido naquela época por Barrow.

Embora Fermat tenha sido considerado o matemático que mais chegou próximo de descobrir a relação fundamental entre a derivada e a integral, Barrow, com seu método da tangente, é considerado um dos matemáticos que mais se aproximaram da nova análise estabelecida por Newton e Leibniz.

4 MÉTODOS MATEMÁTICOS ASSOCIADOS A INTEGRAÇÃO

Num curso de Cálculo, a primeira interpretação que é dada para o conceito de Integral é a interpretação geométrica, ou seja, se uma função $f(x)$ é positiva, então a integral definida dessa função representa a área sob o gráfico de tal função (áreas sob curvas). De fato, a motivação histórica para este conceito se deu através do estudo de áreas sob curvas. Porém, antes de Newton e Leibniz formularem tais conceitos, o cálculo sob áreas de curvas já vinha se desenvolvendo e forneceu contribuições, sem as quais, Newton e Leibniz provavelmente não teriam estabelecido a integral. A seguir apresentaremos os métodos de Cavalieri e Fermat para determinar áreas sob certas curvas específicas.

4.1 MÉTODO DO CÁLCULO DE ÁREA DE CAVALIERI

Cavalieri, em suas obras e métodos, se referia e utilizava muito o que ele chamada de *indivisíveis*, porém ele não apresentava uma visão clara do que ele entendia por este conceito. Segundo ele, uma figura no plano era formada por uma infinidade de cordas paralelas entre si, e que a união de todas estas cordas formariam a área desta figura, sendo que estas cordas (os indivisíveis do plano) não possuem espessura, algo considerado de difícil entendimento segundo pesquisadores. O mesmo argumento era aplicado para retas, onde os indivisíveis eram pontos e para objetos tridimensionais, onde os indivisíveis eram planos. Tanto os pontos na reta, quanto os planos nos objetos, não possuíam medida.

Por exemplo, a área de um tecido podia ser interpretada como a **soma** dos comprimentos de suas linhas, bem como o volume de um livro interpretado como a **soma** das áreas de suas páginas. Ver Figura 31 (Próxima página).

Para Bonaventura Cavalieri um indivisível de um objeto geométrico era como se fosse uma parte atômica deste objeto, sendo que a soma de todas estas partes atômicas lhe daria o objeto em seu total.

Tendo em mente estas ideias de *indivisíveis*, Cavalieri estabeleceu o que hoje conhe-

Figura 31: Tecido e livro

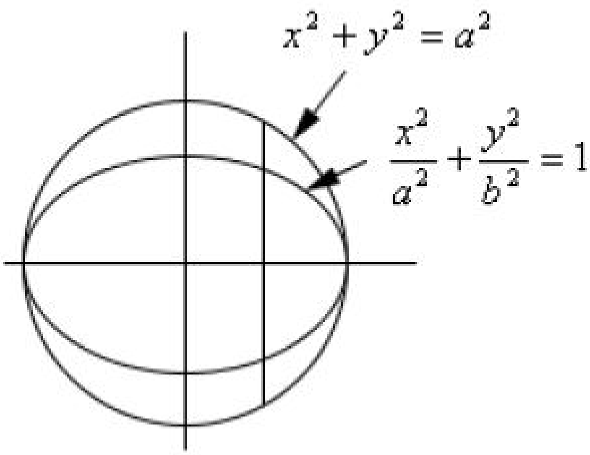
Fonte: Jute Weefsel Dekens, Livros da vida

cemos como Princípios de Cavalieri, e através deles conseguia estabelecer áreas e volumes de certos objetos. São eles:

> "1º Se duas porções planas são tais que toda reta secante a elas e paralela a uma reta dada determina nas porções segmentos de reta cuja a razão é constante, então a razão entre as áreas dessas porções é a mesma constante", (EVES, 2004, P.426).
>
> "2º Se dois sólidos são tais que todo plano secante a eles e paralelo a um plano dado determina nos sólidos secções cuja razão é constante, então a razão entre os volumes desses sólidos é a mesma constante", (EVES, 2004, P.426).

Para ilustrar a eficácia do princípio de Cavalieri e o motivo que tornava a ideia dos indivisíveis promissora, vamos ver como Cavalieri calculava a área da elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, com $a<b$.

Figura 32: Elipse e circunferência



Fonte: (EVES, 2004, p.427)

Para calcular esta área ele construía uma circunferência de modo que o raio desta circunferência seja igual ao comprimento do semi-eixo maior da elipse, ou seja,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad a<b \quad \text{e} \quad x^2+y^2=a^2.$$

Considerando a elipse e a circunferência referenciadas no sistema de coordenadas retangulares, como na Figura 32, e isolando y nas duas equações, obtemos

$$y=\frac{b}{a}(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}, \quad y=(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Analisando estas duas relações, é fácil ver que quaisquer duas ordenadas da elipse e da circunferência, possuem uma razão de $\frac{b}{a}$ entre elas, respectivamente. Logo, a razão entre duas cordas verticais quaisquer da elipse e da circunferência é $\frac{b}{a}$. Portanto, pelo primeiro princípio de Cavalieri, podemos concluir que

$$\text{Área da elipse} = \frac{b}{a}(\text{Área da circunferência}).$$

Em outras palavras,

$$\text{Área da elipse} = \frac{b}{a}(\pi a^2) = b\pi a.$$

Nesse contexto, o princípio de Cavalieri se mostrou uma ferramenta muito eficaz para o cálculo de área e volumes, facilitando e permitindo uma melhor aceitação de seus chamados *indivisíveis*. Tais princípios mostraram-se útil para vários problemas que até então era necessário meios mais complicados para se chegar nos mesmos resultados.

Cavalieri em sua vida foi além de apenas aplicar seus princípios para elipses e objetos do tipo, ele se concentrou na produção de um teorema geométrico consideravelmente útil, que facilitou o estudo de cálculos de áreas sob curvas de outros matemáticos como Fermat. Conforme (BOYER, 1974) este teorema de Cavalieri corresponde com a afirmação atual

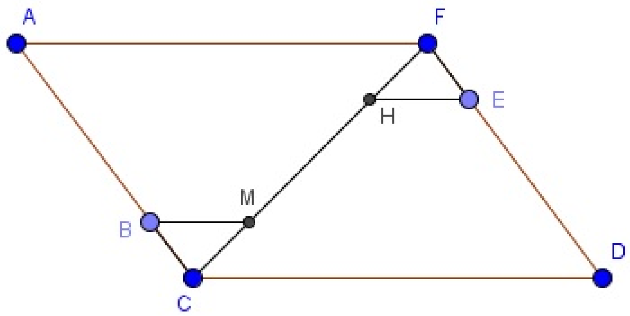
$$\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}.$$

No que segue, daremos uma ideia aproximada de como Cavalieri enxergava área sob curvas.

Para obter áreas sob curvas, Cavalieri utilizava argumentos bem diferentes do que conhecemos hoje em dia. Ele produzia a comparação de potência de segmentos de reta de um retângulo com potências de segmentos de reta de um dos triângulos formados por uma diagonal traçada neste paralelogramo. Estes segmentos de reta eram considerados por Cavalieri como indivisíveis do paralelogramo e do triângulo.

Seja $ACDF$ um paralelogramo, agora trace uma diagonal CF de modo que a área do paralelogramo seja a soma da área deste dois triângulos. Veja a Figura 33. Agora construa o segmento BM de modo que ele seja paralelo ao segmento CD, e construa um segmento HE no outro triângulo de modo que este seja paralelo ao segmento CD e que o segmento HE tenha o mesmo comprimento do segmento BM. Note que, para cada segmento de reta paralelo a CD pertencente ao triângulo ACF, existe apenas um segmento de reta também paralelo a CD com o mesmo comprimento, pertencendo ao triângulo CDF. Ainda, dentre todos os segmentos de reta paralelos a CD pertencentes ao triângulo ACF, temos a existência de um e apenas um segmento de reta paralelo a CD pertencente ao triângulo CDF no qual a soma dos comprimentos destes dois segmentos resulta no comprimento de CD ou AF.

Figura 33: Paralelogramo



Fonte: Autoria própria com o uso do Geogebra

Cavalieri comparava as potências dos comprimentos dos segmentos de um dos triângulos com potências dos comprimentos de segmentos do paralelogramo, ou seja, como os triângulos são congruentes, a soma dos infinitos indivisíveis dos dois triângulos era igual a soma dos infinitos indivisíveis do paralelogramo. Desta forma, notou-se que a soma da primeira potência dos indivisíveis de um dos triângulos é igual a metade da soma da primeira potência dos indivisíveis no paralelogramo o que na linguagem moderna é dado por:

$$\int_0^a x dx = \int_0^a \frac{a}{2} dx = \frac{a^2}{2}.$$

Cavalieri também mostrou que a soma dos quadrados dos indivisíveis no triângulo era igual a $\frac{1}{3}$ da soma dos quadrados dos indivisíveis do paralelogramo. Trazendo para uma linguagem atual, teríamos:

$$\int_0^a x^2 dx = \int_0^a \frac{1}{3} a^2 dx = \frac{a^3}{3}.$$

Também mostrou que para a soma do cubo dos indivisíveis do paralelogramo era encontrado uma razão de $\frac{1}{4}$. Então estendeu sua demonstração para potências maiores até generalizar para n-ésimas potências a razão de $\frac{1}{n+1}$ sendo este resultado de grande importância por abrir vários caminhos para o estudo de cálculo de áreas.

Assim, o teorema mais importante da vida de Cavalieri equivale a seguinte afirmação atual

$$\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}.$$

4.2 FERMAT: O PROBLEMA DA ÁREA SOB UMA CURVA

Hoje sabemos que a área sob uma curva pode ser obtida através da Integral. Segundo (GUIDORIZZI, 2001):

“Se f for uma função contínua em um intervalo [a,b], e $f(x) > 0; \forall x \in [a,b]$, então

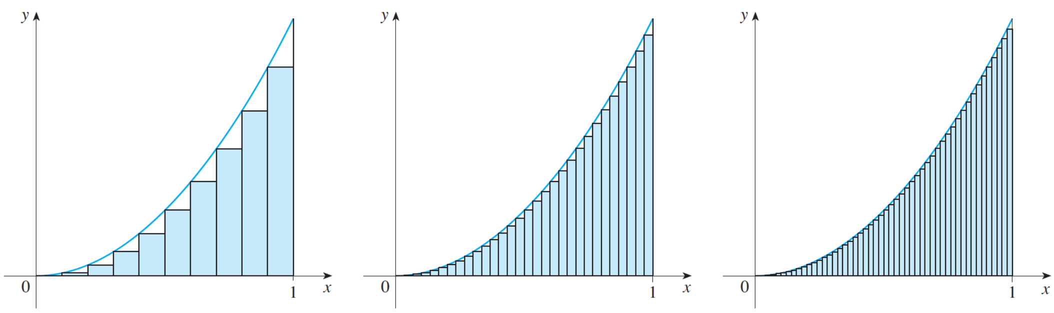
$$\text{Área} = \lim_{\text{máx}\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).\text{”}$$

Aqui x_i^* são pontos em subintervalos I_i, de comprimento Δx_i, que compõem uma partição de $[a,b]$ e $F(x)$ é a primitiva de $f(x)$.

Segundo (BOYER, 1974), (CAJORI, 2007), (EVES, 2004) e (KATZ, 2010), antes do Cálculo Diferencial e Integral ser inventado, Fermat desenvolveu um método extraordinário para obter áreas sob algumas curvas que com certeza foi crucial para Newton e Leibniz desenvolverem a integral que conhecemos hoje.

Como ainda fazemos hoje, o método de Fermat consistia em considerar uma quantidade indefinida de retângulos com bases cada vez menores abaixo da curva e em seguida somava-se as áreas de tais retângulos. Veja a Figura 34 .

Figura 34: Diferenças de áreas ocupada pelos retângulos

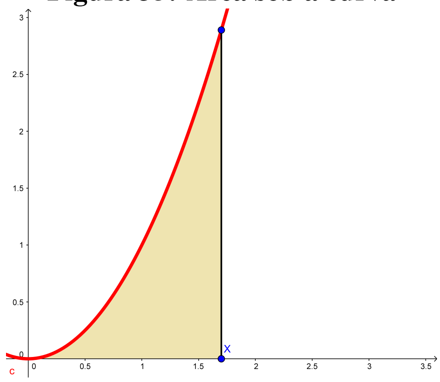


Fonte: Autoria Própria com o uso do Libre Office Draw

Na verdade, esta ideia de somar retângulos derivava na época exatamente da argumentação de Cavalieri, de que retas podiam ser enxergadas como união de pontos, plano como união de retas e objetos tridimensionais como união de planos.

Para ilustrar o método de Fermat consideraremos a curva $y = x^n$ e calcularemos a área sob essa curva de 0 até um ponto arbitrário x. Veja a ilustração da área abaixo da curva de 0 até um ponto arbitrário x na Figura 35.

Figura 35: Área sob a curva



Fonte: Autoria própria

A ideia inicial de Fermat consiste em construir uma partição infinita para o intervalo $[0,x]$. Para isso, ele fixa um valor de α tal que $0 < \alpha < 1$ e considera a sequência de termos que converge para 1,

$$0 < \cdots < \alpha^k < \cdots < \alpha^3 < \alpha^2 < \alpha < 1.$$

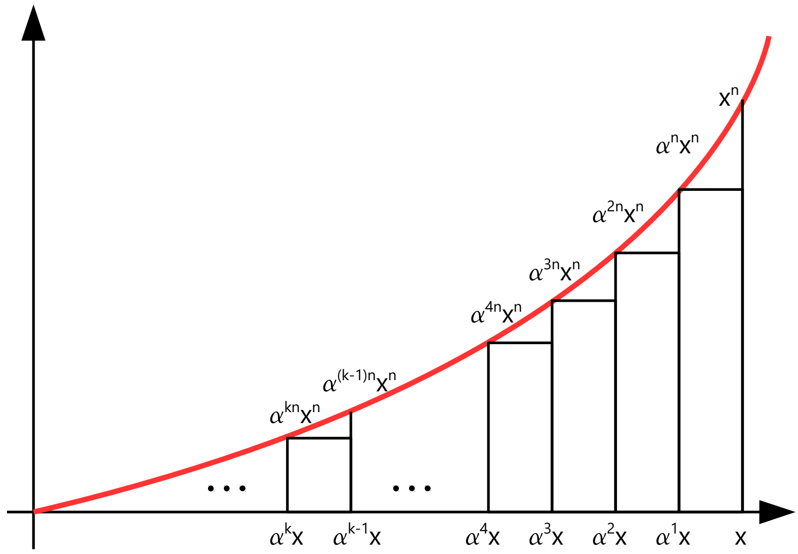
Logo, multiplicando estas desigualdades por x, obtemos a seguinte partição infinita para o intervalo $[0,x]$,

$$0 < \cdots < \alpha^k x < \cdots < \alpha^3 x < \alpha^2 x < \alpha x < x.$$

Agora, considere os infinitos retângulos que estão abaixo da curva $y = x^n$, cujas bases são os intervalo $[\alpha^k x, \alpha^{k-1} x]$ e as laterais destes retângulos são $f(\alpha^k x)$, com $k = 1,2,3,\cdots$. Veja a Figura 36.

Observe que, como a área de um retângulo é dada por $b \times h$, em que b é comprimento da base e h é a altura, se fizermos o somatório de todas as áreas de todos os retângulos que estão sob a curva teremos o valor aproximado da área sob a curva. Se tomarmos a base destes retângulos cada vez menores teremos cada vez um resultado mais próximo da área sob a curva. Assim, quanto mais perto o valor de α estiver de 1 mais preciso é o resultado da área abaixo da curva.

Figura 36: Retângulos formados abaixo da curva



Fonte: Autoria própria

O somatório da área de todos os retângulos abaixo da curva é dado por:

$$\begin{aligned} \Sigma \text{AR} &= (x-\alpha x)\alpha^n x^n + (\alpha x - \alpha^2 x)\alpha^{2n} x^n + (\alpha^2 x - \alpha^3 x)\alpha^{3n} x^n \\ &\quad + (\alpha^3 x - \alpha^4 x)\alpha^{4n} x^n + \cdots + (\alpha^{k-1} x - \alpha^k x)\alpha^{kn} x^n + \cdots \end{aligned} \tag{45}$$

Colocando x em evidência em cada área de cada retângulo de (45), temos

$$\begin{aligned} \Sigma \text{AR} &= (1-\alpha)\alpha^n x^{n+1} + (\alpha - \alpha^2)\alpha^{2n} x^{n+1} + (\alpha^2 - \alpha^3)\alpha^{3n} x^{n+1} \\ &\quad + (\alpha^3 - \alpha^4)\alpha^{4n} x^{n+1} + \cdots + (\alpha^{k-1} - \alpha^k)\alpha^{kn} x^{n+1} + \cdots \end{aligned}$$

ou ainda

$$\begin{aligned} \Sigma \text{AR} &= (1-\alpha)\alpha^n x^{n+1} + (1-\alpha)\alpha^{2n+1} x^{n+1} + (1-\alpha)\alpha^{3n+2} x^{n+1} \\ &\quad + (1-\alpha)\alpha^{4n+3} x^{n+1} + \cdots + (1-\alpha)\alpha^{kn+k-1} x^{n+1} + \cdots \end{aligned} \tag{48}$$

Agora, podemos pôr em evidência em (48) o termo $(1-\alpha)x^{n+1}$, de onde encontramos

$$\begin{aligned} \Sigma \text{AR} &= (1-\alpha)x^{n+1}[\alpha^n + \alpha^{2n+1} + \alpha^{3n+2} + \alpha^{4n+3} \\ &\quad + \cdots + \alpha^{kn+k-1} + \cdots]. \end{aligned} \tag{50}$$

Ainda, colocando α^n em evidência em (50):

$$\begin{aligned}\Sigma\text{AR} &= (1-\alpha)x^{n+1}\alpha^n[1+\alpha^{n+1}+\alpha^{2n+2}+\alpha^{3n+3} \\ &\quad +\cdots+\alpha^{(k-1)n+(k-1)}+\cdots].\end{aligned}$$

Ou

$$\begin{aligned}\Sigma\text{AR} &= (1-\alpha)x^{n+1}\alpha^n[1+\alpha^{n+1}+(\alpha^{n+1})^2+(\alpha^{n+1})^3 \\ &\quad +\cdots+(\alpha^{n+1})^{k-1}+\cdots].\end{aligned}$$

Como

$$\left[1+\alpha^{n+1}+\alpha^{2n+2}+\alpha^{3n+3}+\cdots+\alpha^{(k-1)n+(k-1)}+\cdots\right]=\sum_{k=0}^{\infty}(\alpha^{n+1})^k,$$

então

$$\Sigma\text{AR} = (1-\alpha)x^{n+1}\alpha^n\sum_{k=0}^{\infty}(\alpha^{n+1})^k. \tag{54}$$

De (54), observe que $\sum_{k=0}^{\infty}(\alpha^{n+1})^k$ é o somatório de uma progressão geométrica, cuja razão $q = \alpha^{n+1}$ satisfaz

$$0<\alpha^{n+1}<1.$$

Assim, o somatório dos termos da P.G. converge para:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\alpha^{n+1})^k=\frac{1}{1-\alpha^{n+1}}. \tag{55}$$

Substituindo (55) em (54) encontramos

$$\Sigma\text{AR} = (1-\alpha)x^{n+1}\alpha^n\frac{1}{1-\alpha^{n+1}} = x^{n+1}\frac{(1-\alpha)\alpha^n}{1-\alpha^{n+1}}. \tag{56}$$

O denominador de (56) pode ser escrito como

$$1-\alpha^{n+1}=(1-\alpha)(1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^n). \tag{57}$$

Assim, substituindo (57) em (56), temos

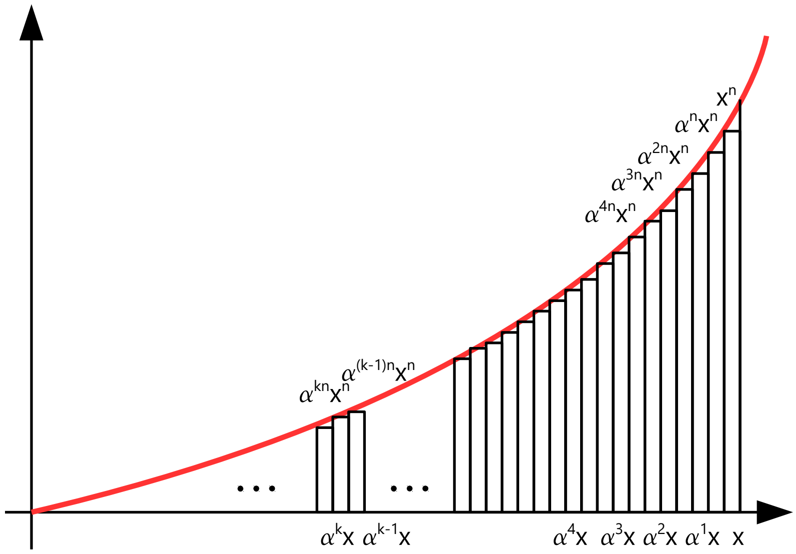
$$\Sigma\text{AR} = x^{n+1}\frac{(1-\alpha)\alpha^n}{(1-\alpha)(1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^n)},$$

ou seja,

$$\Sigma\text{AR} = x^{n+1}\frac{\alpha^n}{(1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^n)}. \tag{59}$$

Conforme já havíamos mencionado, se α se aproxima de 1, a soma das áreas dos retângulos se aproxima da área sob a curva. Veja a Figura 37.

Figura 37: Aproximação da área abaixo da curva pelo tamanho dos retângulos



Fonte: Autoria própria

Ainda, da expressão (59)

$$\Sigma \text{AR} \longrightarrow x^{n+1} \frac{1}{(1+1+1+\cdots+1)} = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \tag{61}$$

ou seja, a área sob a curva $y = x^n$ de 0 até x será $\frac{x^{n+1}}{n+1}$. Usando a linguagem moderna, acabamos de provar que

$$\int_0^x x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}. \tag{62}$$

Logo, como o resultado encontrado em (62) é igual a (61) pode-se dizer que o método de Fermat para o cálculo da área sob a curva x^n é eficaz, porém limitado.

Concluímos que Fermat desempenhou grande importância para o desenvolvimento do cálculo. Segundo (PIRES, 2004), Fermat por utilizar em seus métodos processos que envolvem aproximações e trabalhar com quantidades infinitesimais, fez uma grande contribuição á matemática e que serviu de inspiração para Leibniz e Newton desenvolverem seus estudos baseados no cálculo diferencial e integral, sendo que Fermat foi um dos matemáticos que mais se aproximaram da descoberta do cálculo infinitesimal, antes de Newton.

5 A RELAÇÃO ENTRE O PROBLEMA DA TANGENTE E O DA ÁREA

Neste Capítulo apresentaremos os métodos para cálculo de tangentes e áreas sob curvas desenvolvidos por Newton e Leibniz. Além disso, apresentaremos como eles conseguiram enxergar a relação entre o problema da tangente e o da área sob a curva, de onde surgiram os conceitos de derivada (inclinação da reta tangente) e de integral (área sob a curva), e principalmente a relação de inversão entre uma operação e outra, ou seja, o famoso Teorema Fundamental do Cálculo.

5.1 NEWTON E O PROBLEMA DA TANGENTE

Uns dos grandes influenciadores de Newton foi John Wallis (1616-1703), um competente matemático britânico de Oxford. No livro *Arithmetica Infinitorum*, Wallis incluiu as descobertas feita por Descartes, Fermat e Cavalieri que mais tarde Newton usaria para desenvolver o Cálculo Diferencial e Integral.

John Wallis ao estudar as publicações e resultado de Cavalieri a respeito dos indivisíveis resolveu substituir os valores de cada indivisível por números, conseguindo provar por indução incompleta um teorema que equivale a

$$\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}; \quad n \in \mathbb{Q} - \{-1\}.$$

Também conseguiu calcular áreas que equivalem hoje às afirmações atuais $\int_0^1 (1 - x^2)^0 dx$, $\int_0^1 (1-x^2)^1 dx$, $\int_0^1 (1-x^2)^2 dx$, $\int_0^1 (1-x^2)^3 dx$, ..., $\int_0^1 (1-x^2)^m dx$, onde $m \in \mathbb{N}$. Além disso, tentou calcular o valor de π através da busca da área de um quadrante do círculo $x^2 + y^2 = 1$ o que na linguagem moderna seria $\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{1}{2}} dx$, porém não conseguiu por não saber o teorema geral do binômio. O fato é, que esta dificuldade encontrada por John Wallis, a respeito do cálculo de área equivalente a $\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{1}{2}} dx$, foi uma motivação para os estudos de Isaac Newton.

O primeiro passo para este método da tangente passa pelo Binômio de Newton, que hoje conhecemos como sendo a expressão

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\cdots+\binom{n}{k}a^{n-k}b^k+\cdots+\binom{n}{n}b^n,$$

onde,

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Embora Newton seja homenageado nesta fóruma, ela não foi estabelecida por ele, pois já existia desde a idade média. A homenagem se deve ao fato dele ter a generalizado para expoentes racionais. Segundo (STEWART, 2011), a fórmula generalizada do Teorema Binomial é dada por

$$(1+x)^r=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{r}{k}x^k=1+rx+\frac{r(r-1)x^2}{2!}+\frac{r(r-1)(r-2)}{3!}x^3+\cdots$$

onde $r \in \mathbb{R}, |x| < 1$ e

$$\binom{r}{k}=\frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-k+1)}{k!}.$$

A motivação para o método da tangente de Newton vem dos seus estudos da Física e Astronomia. Como Newton estudava órbitas de planetas, ele enxergava um ponto (x,y) numa curva como um objeto em movimento, cuja curva representava na verdade sua trajetória. Esse modo de enxergar uma curva tem profundas implicações na maneira de lidar com o problema da tangente, da área e consequentemente na relação entre os dois problemas.

Na perpectiva de Newton, a tangente representava a direção na qual a partícula se deslocaria num instante de tempo t. Além disso, a inclinação (que determina a direção) era o resultado do quociente da velocidade da partícula na direção do eixo y pela velocidade da partícula na direção do eixo x, $\left(\dfrac{Q}{P}\right)$. Ver Figura 39. Para determinar tais velocidades no ponto (x,y), ele primeiro adicionava uma pequena diferença h ao valor x no eixo das abcissa. Como a velocidade da partícula na direção do eixo das abscissas no ponto x é P e sendo h uma distância pequena, pode-se dizer que

$$P=\frac{h}{t}, \tag{64}$$

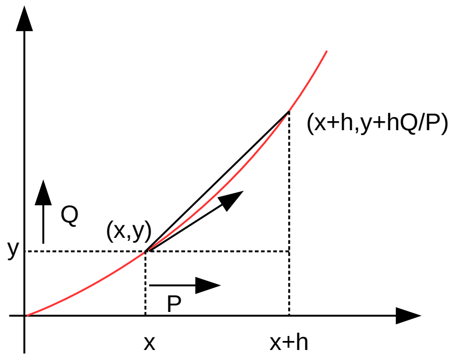
onde t é o tempo gasto pela partícula para percorrer a distância h. Além disso, como o tempo de deslocamento da partícula relacionado aos eixos x e y são os mesmos, temos

$$Q=\frac{R}{t}, \tag{65}$$

onde R é o deslocamento da partícula no eixo y no tempo t. Logo, de (64) e (65), temos que

$$\frac{Q}{P}=\frac{\frac{R}{t}}{\frac{h}{t}}=\frac{R}{h},$$

Figura 39: Tangente a curva para Newton



Fonte: Autoria própria

ou seja, $R = h\dfrac{Q}{P}$. Assim, a coordenada do ponto que representa a partícula em $x+h$ é dada por

$$(x+h, y+R) = \left(x+h, y+h\frac{Q}{P}\right). \tag{66}$$

Feito isso, Newton obtinha $\dfrac{Q}{P}$ substituindo essas coordenadas na equação da curva e fazendo análises similares a de Fermat. Destaca-se aqui que a fórmula generalizada do Binômio o permitiu obter tangentes de muito mais curvas que seus antecessores.

Para ilustrar o método de Newton, vamos obter a tangente à curva $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$, num ponto x. Substituindo as coordenadas (66) nesta curva, temos

$$y + h\frac{Q}{P} = \frac{2}{3}(x+h)^{\frac{3}{2}},$$

isto é,

$$y + h\frac{Q}{P} = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{3}{2}}. \tag{67}$$

Utilizando o Binômio de Newton em (67) para expandir os termos de $\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{3}{2}}$, encontramos

$$y + h\frac{Q}{P} = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\left(1+\frac{3}{2}\frac{h}{x}+\frac{3}{8}\frac{h^2}{x^2}+\cdots\right).$$

Em outras palavras,

$$y + h\frac{Q}{P} = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + hx^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}\frac{h^2}{x^{\frac{1}{2}}} + \cdots. \tag{68}$$

Simplificando o termo $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ em (68), chegamos em

$$h\frac{Q}{P} = hx^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}\frac{h^2}{x^{\frac{1}{2}}} + \cdots. \tag{69}$$

Dividindo (69) por h, obtemos

$$\frac{Q}{P} = x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}\frac{h}{x^{\frac{1}{2}}} + \cdots. \tag{70}$$

Finalmente, como h é considerado uma distância muito pequena, podemos desprezar os termos que dependem de h em (70). Assim, encontramos o quociente das velocidades direcionais no ponto x, que é

$$\frac{Q}{P} = x^{\frac{1}{2}}.$$

Consequentemente, a inclinação da reta tangente à curva $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ no ponto x é $x^{\frac{1}{2}}$.

Utilizando o método moderno de derivada para a função $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$, temos que

$$y'(x) = \frac{3}{2}.\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}-1} = x^{\frac{1}{2}},$$

que é exatamente o quociente das velocidades obtida por Newton. Veja que a fórmula do Binômio generalizada era crucial na determinação da tangente.

5.2 NEWTON E O PROBLEMA DA ÁREA SOB UMA CURVA

Newton, para efetuar cálculos de área, sob curvas não partiu do princípio de encontrar a área sob uma curva, e sim o caminho contrário, ou seja, resolveu o seguinte problema envolvendo área: Supondo conhecida a área z sob uma curva de 0 até x, para todo x, qual expressão de curva $C(x)$ que representa a área sob ela?

Suponha que a área z sob determinada curva, de 0 até x, seja dada por

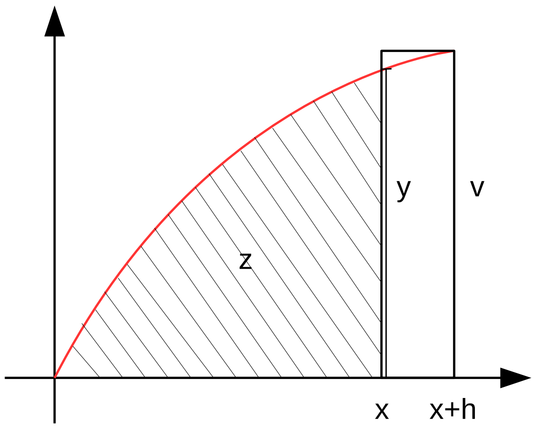
$$z = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}. \tag{71}$$

Elevando cada membro de (71) ao quadrado, vemos que

$$z^2 = \frac{4}{9}x^3.$$

Se considerarmos um acréscimo h em x e um retângulo com base h e altura v, com v sendo a ordenada dessa curva que representa a imagem de $x+h$, temos que a área desse retângulo e a área abaixo da curva, se aproximam caso h seja considerado pequeno. Ver Figura 40 (Próxima página). Como temos uma expressão para a área sob a curva, desprezando a pequena diferença entre a área hv do retângulo e a área abaixo da curva que está dentro desse retângulo, podemos

Figura 40: Área z abaixo da curva



Fonte: Autoria própria

assumir que

$$z + hv = \frac{2}{3}(x+h)^{\frac{3}{2}},$$

isto é,

$$(z+hv)^2 = \frac{4}{9}(x+h)^3.$$

Desenvolvendo $(z+hv)^2$ e $(x+h)^3$, em ambos os lados desta igualdade, encontramos

$$z^2 + 2zhv + h^2v^2 = \frac{4}{9}(x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3). \tag{72}$$

Como $z^2 = \frac{4}{9}x^3$, podemos simplificar (72) e obtermos

$$2zhv + h^2v^2 = \frac{4}{3}x^2h + \frac{4}{3}xh^2 + \frac{4}{9}h^3. \tag{73}$$

Dividindo (73) por h, esta igualdade se torna

$$2zv + hv^2 = \frac{4}{3}x^2 + \frac{4}{3}xh + \frac{4}{9}h^2. \tag{74}$$

Considerando agora h cada vez menor, a ordenada v se confunde com y e podemos desprezar os termos que são multiplicados por h. Assim, (74) se torna

$$2zy = \frac{4}{3}x^2. \tag{75}$$

Finalmente, substituindo o valor conhecido de z, que é $z = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$, em (75), obtemos

$$y = \frac{2x^2}{3z} = \frac{2x^2}{3\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}} = \frac{x^2}{x^{\frac{3}{2}}} = x^{\frac{1}{2}}. \tag{76}$$

Assim, de (76), Newton percebeu que a taxa de variação da área sob uma curva num ponto x, era exatamente a tangente da curva que descrevia a área inicial neste ponto. Esta constatação é o que conhecemos hoje como Teorema Fundamental do Cálculo.

Na linguagem de hoje, segundo (LIMA, 2017), o Teorema Fundamental do Cálculo é enunciado da forma abaixo:

Teorema 5.1 *Seja $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua no intervalo I, e $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ a função integral indefinida, baseada em a, dada por*

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(s)ds.$$

Então, $F'(x) = f(x),\ x \in I$, ou seja,

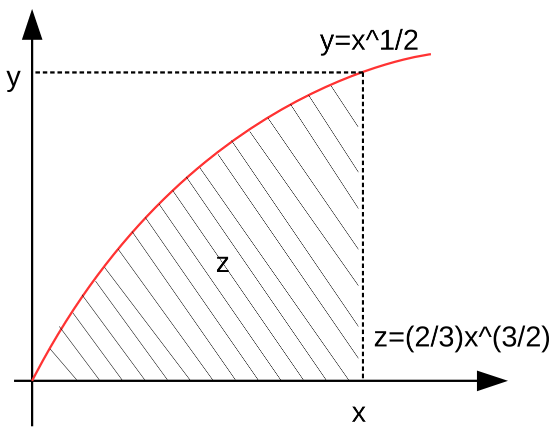
$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(s)ds = f(x) = \frac{d}{dx}F(x).$$

No problema da tangente estudado por Newton,

$$\frac{d}{dx}\int_0^x x^{\frac{1}{2}}dx = x^{\frac{1}{2}} = \frac{d}{dx}\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}},$$

como na Figura 41 .

Figura 41: Relação da curva y com a área z



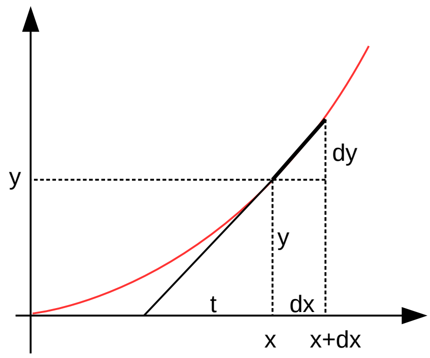
Fonte: Autoria própria

5.3 LEIBNIZ E O MÉTODO DA TANGENTE

Diferentemente de Newton, Leibniz tinha uma visão mais geométrica das curvas. Motivado por matemáticos como Cavalieri e Pascal, ele enxergava uma curva como a união de uma quantidade infinita de pequenos segmentos de reta.

Para Leibniz dy e dx são pequenas diferenças nas variáveis x e y (chamada de diferencial). Quando ele queria calcular o coeficiente angular da reta tangente que passa pelo ponto (x,y) ele considerava dx como um pequeno valor acrescentado à x e assumia que a imagem de $x+dx$, na curva, era o valor $y+dy$, ou seja, o valor de y acrescido de uma diferença que ele chamada de dy. Além disso, por enxergar a curva como união de pequenos segmentos de retas, assumia que o ponto $(x+dx,y+dy)$ também estava na reta tangente. Ver Figura 42.

Figura 42: Tangente a curva para Laibniz



Fonte: Autoria própria

Em seguida, prolongava a reta tangente até o eixo x ficando definido assim a subtangente t e dois triângulos, o primeiro formado pelos lados dy, dx e o segundo pelo lados y e t, conforme Figura 42. Desse modo, por semelhança de triângulos, concluía que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{t}. \tag{77}$$

Finalmente, usando esta relação e substituindo $(x+dx,y+dy)$ na expressão da curva, ele obtinha o valor da subtangente e consequentemente a inclinação da reta tangente.

Considerando por exemplo a curva $y = x^2$, ao substituir $(x+dx,y+dy)$ em sua expressão, encontramos

$$y+dy = (x+dx)^2,$$

isto é,

$$y + dy = x^2 + 2xdx + dx^2. \tag{78}$$

Simplificando $y = x^2$ em (78), obtemos

$$dy = 2xdx + dx^2. \tag{79}$$

Dividindo por dx em ambos os lados de (79), vemos que

$$\frac{dy}{dx} = 2x + dx. \tag{80}$$

Desprezando dx, por ser um valor pequeno, e observando que a razão $\frac{dy}{dx}$ é a inclinação da reta tangente, encontramos a inclinação como sendo $2x$. Ou então, de (80) e (77), encontramos

$$2x + dx = \frac{y}{t}.$$

Desprezando dx por ser um valor muito pequeno, temos

$$2x = \frac{y}{t}.$$

Daí, obtemos o valor da subtangente como sendo

$$t = \frac{y}{2x}.$$

Como a reta tangente deve passar pelos pontos (x, y) e $(x - t, 0) = \left(x - \frac{y}{2x}, 0\right)$, sua inclinação é dada por

$$m_t = \frac{y - 0}{x - x + \frac{y}{2x}} = y\frac{2x}{y} = 2x.$$

Utilizando a linguagem moderna de derivada, temos que se $y = x^2$, a inclinação da reta tangente num ponto x é dada por

$$y'(x) = 2x = \frac{dy}{dx}(x).$$

Aqui, a notação $\frac{dy}{dx}(x)$ é um tributo a Leibniz, devido ao que ele obteve na equação (80). Traduzindo para a liguagem moderna, já que naquela época não estava formulado o conceito de limite, podemos dizer que

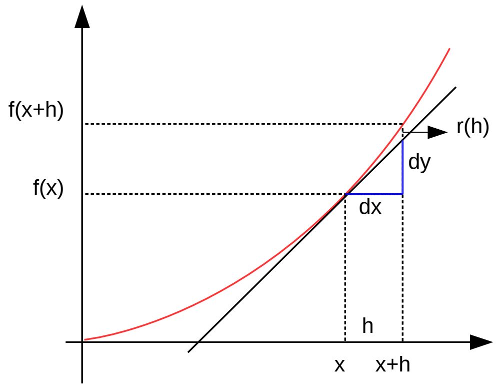
$$\frac{dy}{dx}(x) = \lim_{dx \to 0} \frac{dy}{dx} = \lim_{dx \to 0} (2x + dx) = 2x.$$

A pequena diferença que foi desprezada por Leibniz, hoje é chamada na análise matemática de função resto, e denotada por $r(h)$, onde $h = dx$.

De acordo com o ilustrado na Figura 43, podemos escrever

$$f(x+dx) = f(x) + dy + r(dx). \tag{81}$$

Figura 43: Tangente a curva e o $r(h)$



Fonte: Autoria própria

Subtraindo $f(x)$ em ambos os lados de (81) e dividindo por dx,

$$\frac{f(x+dx)-f(x)}{dx} = \frac{dy}{dx} + \frac{r(dx)}{dx}. \tag{82}$$

Trocando dx por h, podemos escrever (82) como

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{dy}{dx} + \frac{r(h)}{h}. \tag{83}$$

Passando o limite com $h \to 0$ em (83), devemos ter

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} + \lim_{h\to 0}\frac{r(h)}{h}.$$

Sabemos que, ver (LIMA, 2017), a inclinação da reta tangente ou a derivada de uma função $f(x)$ num ponto x, exite se, e somente se,

$$\lim_{h\to 0}\frac{r(h)}{h} = 0.$$

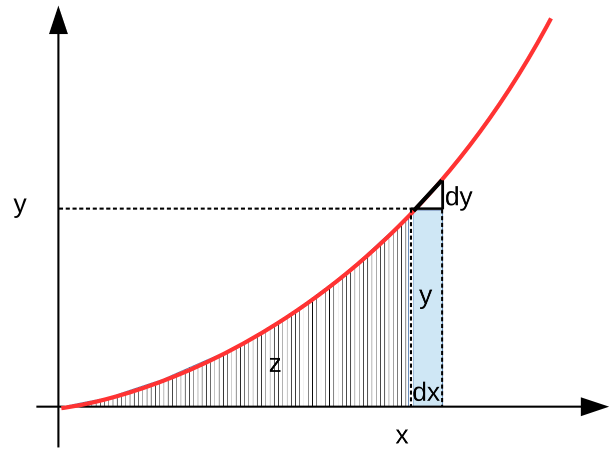
Assim, Leibniz não estava errado em desprezar aquela pequena diferença entre a função e a reta tangente, bem como os valores que dependiam de dx. Apenas não foi apresentado na época uma justificativa matemática clara, que só veio mais tarde com a introdução do conceito de limite.

No contexto do desenvolvimento feito por Leibniz, ele percebeu que a tangente era obtida através de um processo envolvendo diferenças, $dx = (x+dx)-x$ e $dy = (y+dy)-y$. Isso foi importante para ele estudar o problema da área, onde é feito o processo inverso, a soma dessas diferenças.

5.4 LEIBNIZ: O PROBLEMA DA ÁREA

Leibniz chamou de z a área sob uma curva de 0 até um valor x e calculou a diferença dz, ou seja, a diferença da área sob uma variação dx em x. Ver Figura 44.

Figura 44: Área z sob a curva



Fonte: Autoria própria

Desprezando a área do triângulo com base dx e altura dy, obtemos que a diferença dz é a área do retângulo com altura y e base dx, isto é, $dz = ydx$. Como Leibniz já sabia que a área abaixo da curva podia ser interpretada como a soma de áreas de retângulos, então a área total z podia ser vista como a soma das diferenças dz, ou seja,

$$z = Soma(dz).$$

O símbolo de integral surgiu nas anotações de Leibniz como uma variação da letra maiúscula ”S ”de soma,

$$z = Soma(dz) = Soma(ydx) = S(ydx) = \int ydx.$$

A relação entre o problema da tangente e o da área encontrada por Leibniz fica mais evidente ao dividir $dz = ydx$, em ambos os lados, por dx, ou seja,

$$\frac{dz}{dx} = y.$$

Essa igualdade nada mais é que o Teorema Fundamental do Cálculo, que em linguagem moderna se lê

$$\frac{dz}{dx}(x) = \frac{d}{dx}\int_0^x y(s)ds = y(x).$$

5.5 CONTROVÉRSIAS SOBRE QUEM CRIOU O CÁLCULO

Segundo (BARDI, 2016) no ano de 1663, alguns dos trabalhos de Isaac Newton foram impressos pela primeira vez, quando ele deixou que alguns de seus trabalhos de matemática fossem publicados junto com os trabalhos de John Wallis. Nessas publicações, de 1693 e 1695, Wallis fez várias páginas de agradecimentos a Newton e fez comparações do cálculo de fluxos e fluxões com o cálculo de Leibniz. Nas palavras dele:

> “Aqui está apresentado o método das fluxões de Newton, para usar o nome dado por este, o qual é de natureza similar ao cálculo diferencial de Leibniz, para usar o nome dado por este, como qualquer um que compare os dois métodos poderá observar bastante bem, embora seus criadores empreguem notações diferentes...”(BARDI, 2006, P.167).

Wallis também menciona sobre cartas que Newton e Leibniz trocaram a respeito do cálculo, onde Newton explica seu cálculo a Leibniz. Aí surge pela primeira vez a ideia de que um trabalho poderia ser melhor do que o outro e ter sido descoberto primeiro.

Como na época a Inglaterra tinha um certo isolamento quanto as pesquisas com relação ao resto da Europa, boa parte dos leitores europeus ficaram assustados com as afirmações feitas por Wallis a respeito do cálculo, pois conheciam as publicações de Leibniz e seu cálculo, sendo que nestas não havia nenhuma espécie de referência ou menção a Newton. Não se tinha visto ainda nada sobre os métodos de cálculo de Newton que Wallis estava mencionando. Além disso, o cálculo de Leibniz já vinha sendo impresso a uma década e sendo utilizado para resolver vários problemas considerados complicados pelos matemáticos da época. Entre os que estavam aplicando o cálculo de Leibniz para solucionar problemas estavam os irmãos Bernoulli.

Johann Bernoulli, depois de ler o livro de Wallis, achou que Wallis havia ignorado Leibniz e escreveu a Leibniz dizendo seu ponto de vista. Porém, em um trecho da carta resposta que Leibniz enviou a Johann, havia a seguinte afirmação sobre Newton:

> “Temos que admitir que o homem é extraordinário”(BARDI, 2006, P.168).

Na verdade, na época em que eles trocaram cartas, Leibniz e Newton se davam bem e em tais cartas um explicava ao outro seu cálculo. Não havia nesse momento disputa entre eles, as abordagens para se chegar nos conceitos eram diferentes e um não suspeitava de plágio do outro. Contribuía para isso o isolamento da Inglaterra e o fato de que ambos, Newton e Leibniz estavam ocupados fazendo outras coisas.

O bom relacionamento entre Newton e Leibniz não foi suficiente para conter as suspeitas e polêmicas em torno da autoria do cálculo causadas pelas publicações de Wallis. Johann Bernoulli, por exemplo, achava o trabalho de Leibniz tão admirável que não acreditava que ele havia copiado de Newton, mas sim que Newton havia copiado o trabalho de Leibniz, sendo que Bernoulli até admitia a possibilidade de plágio. Em uma carta de Bernoulli a Leibniz, Bernoulli disse:

> "Eu não sei se Newton concebeu ou não suas ideias depois de ter visto seu cálculo, especialmente porque eu sei que você transmitiu a ele seu cálculo, antes que ele publicasse o método dele"(BARDI, 2006, p.168).

Depois de ter conhecimento das publicações de Wallis, e das comparações do seu cálculo com o de Newton, Leibniz não ficou satisfeito com a forma que fora tratado por Wallis e enviou cartas a várias pessoas se queixando. Newton, por outro lado, estava com alguns problemas na época e se dedicava a outros assuntos. Sendo assim, quando perguntavam a ele sobre essa polêmica ou sobre as críticas de Leibniz às publicações de Wallis, ele simplesmente ficava em silêncio. Nesse momento, Leibniz acabou usando esse silêncio de Newton para se sobressair como criador do Cálculo. Quando questionado sobre a autoria do Cálculo, ele simplesmente dizia: "Pergunte ao próprio Newton se isso é verdade, ele dirá".

Na verdade Wallis não era inimigo de Leibniz, sendo considerado muito mais aliado dele do que de Newton até então. Inclusive, eles trocaram muitas cartas até os finais de suas vidas. Mais tarde, na última década do século XVII, quando Newton decidiu entrar na disputa sobre a criação do cálculo, ele acabou utilizando essa proximidade de Wallis e Leibniz para dar o troco nas retóricas de Leibniz. Quando questionado, ele dizia "Pergunte a Wallis, ele dirá".

Leibniz estava disposto a elogiar Newton pelas suas criações. Em cartas de Huygens a Leibniz, antes de Huygens ter morrido, Huygens dizia ter lido o livro da Álgebra de Wallis e ter encontrado equações diferenciais muito iguais às suas, exceto quanto aos símbolos. Depois de Leibniz ter lido a obra de Wallis que continha o trabalho de Newton, Leibniz respondeu a Huygens:

> "Eu vejo que o cálculo dele concorda com o meu, mas meus métodos são mais esclarecidos a mente"(BARDI, 2006, p.170).

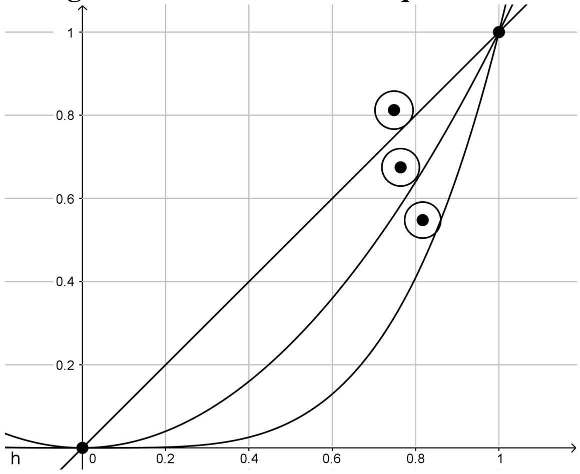
Leibniz não desejava que as coisas ficassem desta forma, e como vários matemáticos de sua época, escreveu resenhas anônimas que criticava o trabalho de Newton e elogiava o seu. Ele não enxergava, até então, Newton como uma ameaça, e por suas produções em Metafísica, filosofia e estudos lógicos estava se tornando uma pessoa muito respeitada na Europa, onde era considerado até então o patriarca do cálculo. Se Leibniz tivesse atacado Newton no início da última década do século XVII, provavelmente teria vencido a disputa da criação do cálculo, pois Newton, neste momento, não se preocupava com este fato, já que estava entretido com outras coisas, não estava em seu auge de poder, sendo que ainda não havia se tornado presidente da Royal Society, além de ter tido um surto psicótico o que diminuiu sua credibilidade. Eles até trocaram cartas de elogios um ao outro em 1693.

Esse clima mais ameno não durou muito, ainda no final dessa década, Newton passou a reclamar para si a autoria do Cálculo e a partir daí ambos passaram a travar um embate ferrenho em torno da autoria do Cálculo que perdurou até mesmo após a morte de Leibniz em 1716. Por um lado, Leibniz passou a usar toda sua influência na Europa, seu prestígio, para angariar aliados para defender sua tese e atacar Newton. Por outro lado, Newton, com seu prestígio na Inglaterra, também angariava aliados para defendê-los e atacar Leibniz. Em um momento Newton esteve tão convicto que Leibniz era de fato um ladrão que suas ações nem foram consideradas como sendo ciúmes ou malícia.

Johann Bernoulli, sendo considerado um dos maiores seguidores de Leibniz, não estava afim de deixar as coisas como elas estavam, pois ele defendia a ideia de que Newton havia copiado o trabalho de Leibniz a respeito do cálculo e queria provar a incapacidade de Newton de competir com Leibniz a respeito do cálculo. Assim, Bernoulli fez algo que era muito comum naquela época, propôs um desfio a vários matemáticos para avaliar o tanto que estes sabiam de cálculo, colocando prazo para a data de devolução da resposta. Em 1696, Bernoulli lançou um desafio chamado O problema da braquistócrona"e mandou aos mais variados matemáticos da época, contendo na carta as palavras "Aos mais espertos matemáticos do mundo". Cópias foram entregues a Newton e Wallis. Leibniz aproveitou a oportunidade do problema e publicou um artigo na revista alemã sobre o problema. O prazo para entregar a resposta havia sido marcado até a Páscoa.

Johann Bernoulli possuía a finalidade de saber o quão poderoso era o cálculo de Newton, que ele achava semelhante ao de Leibniz. Em seu entendimento, através do problema da braquistócrona ou "O tempo mais curto", ele colocaria a prova se seus pensamentos sobre Newton estavam certos. Este problema consiste em encontrar a linha curva que ligava dois pontos dados, sendo estes pontos não diretamente um abaixo do outro, pelo qual um determinado corpo pesado, que cai pela ação da gravidade, desceria no menor tempo possível. Ver Figura 45 (Próxima página). Este exemplo, é um típico problema que pode ser resolvido pelo cálculo, sendo uma ótima ideia para testar a capacidade de Isaac Newton a respeito de seus métodos e sobre sua capacidade. De acordo com referências, apenas cinco matemáticos foram capazes de

Figura 45: Problema da Braquistócrona



Fonte: Autoria própria

resolver o problema ou enviaram a resolução dentro do prazo previsto, sendo considerados os únicos matemáticos da época que possuíam o domínio do cálculo. Eram eles: Leibniz, Newton, L'Hôpital e os irmãos Bernoulli. De acordo com a história, Newton não teve nenhum problema para resolver o desafio, após o recebê-lo em 29 de Janeiro de 1697, e depois de ter trabalhado o dia inteiro na Casa da Moeda, chegou em casa e resolveu o problema na mesma noite e enviou a resposta do desafio anonimamente. Leibniz e outros matemáticos sabiam que quem enviou aquela resposta era uma pessoa que estava inteiramente em domínio do cálculo, e eles sabiam que esta pessoa era Isaac Newton.

A ideia de fazer com que Newton fosse exposto por não possuir um domínio do cálculo ou de tentar provar que ele possuía uma menor capacidade falhou, sendo provado sua grande habilidade a respeito do cálculo.

O consenso entre os historiadores hoje é que de fato Newton desenvolveu o Cálculo primeiro, mesmo tendo sido Leibniz o primeiro a publicá-lo. É consenso também, que Newton utilizou uma notação pesada e confusa que dificilmente alguém mais, além dele mesmo, pudesse ter domínio sobre aquilo naquele momento. Somando a isso, o isolamento da Inglaterra e a maneira como cada um chegou nos conceitos de derivada e integral, chega-se no consenso de que Leibniz de fato desenvolveu seu cálculo sozinho. Independente de Newtow ter a ideia primeiro, e Leibniz copiado ou não, é mérito de Leibniz ter publicado seus trabalhos e ter desenvolvido uma notação clara para representar os conceitos de derivada e integral. Isso ajudou na difusão do Cálculo ao ponto que usamos suas notações até hoje.

Por fim, olhando num contexto mais geral, chegamos a conclusão que atribuir a criação do Cálculo apenas a Newton e Leibniz acaba não sendo justo, uma vez que eles pegaram um caminho já pavimentado por matemáticos como René Descartes, Pierre de Fermat, Bonaventura Cavalieri, John Wallis e Isaac Barrow, criando toda a base para o cálculo surgir. Inclusive, muitos historiadores consideram estes também criadores do Cálculo.

6 CONCLUSÃO

O desenvolvimento do presente trabalho possibilitou um melhor entendimento de como o cálculo diferencial e o cálculo integral surgiram, além de proporcionar uma melhor compreensão e valorização de cada método matemático utilizado por cada matemático associado a descoberta do cálculo diferencial e integral, seja este método restrito a certos tipos de curvas ou não. Além disso, também permitiu um melhor conhecimento sobre a evolução dos métodos matemáticos para o cálculo de retas tangentes e áreas sob curvas, que proporcionaram as técnicas, notações e definições do cálculo que conhecemos hoje. Destaca-se também que a parte mais demorada da produção deste trabalho de conclusão de curso foi o recolhimento e o entendimento dos dados, pois, pouco se tem escrito sobre os métodos matemáticos de cálculos de retas tangentes e áreas sob curvas antes da utilização dos métodos de derivada e integral.

Destaca-se que os métodos matemáticos aqui utilizados são de natureza intuitiva e geométrica, sendo esta interpretação o meio matemático pelo qual os matemáticos chegaram na criação do cálculo. Pode-se dizer que estes métodos matemáticos apesar se serem intuitivos e geométricos levam a base para os estudos que antecederam o cálculo deferencial e integral que conhecemos hoje, sendo os procedimentos matemáticos do tempo deste matemáticos caracterizado pelo pouco rigor matemático, mas que possuíam grande valor geométrico e aplicável.

De um modo geral no final do século XVII houve controvérsias de quem teria criado o cálculo, Isaac Newton ou Gottfried Wilhelm Leibniz? Segundo (BOYER, 1974), (CAJORI, 2007), (EVES, 2004) e (KATZ, 2010) Isaac Newton inventou primeiro. Contudo sua notação era muito complicada, difícil de entender e ele demorou para publicar seus trabalhos. Leibniz por sua vez, teve ideias mais intuitivas, suas notações eram mais fáceis de se entender e ele publicou seus resultados. Tanto é verdade que ainda utilizamos as notações estabelecidas por ele. Além disso, olhando a maneira como ambos conceberam seus resultados, chega-se à conclusão que o desenvolvimento foi independente, já que Newton utilizava argumentos ligados à velocidade, deslocamento e trajetórias, enquanto que Leibniz tinha argumentos mais analíticos e ligados à geometria.

Finalmente, olhando de um contexto mais geral, não dá para deixar de lado nomes como René Descartes, Bonaventura Cavaliei, John Wallis e principalmente Pierre de Fermat sem os quais talvez o cálculo diferencial e o cálculo integral tivesse demorado um pouco mais para aparecer.

No entanto, posso dizer que levo deste trabalho o entendimento de poder dizer como a genialidade destes matemáticos era tão espetacular, sendo estas descobertas feitas em épocas com poucas tecnologias em relação a vasta modernidade que temos hoje, sendo esta genialidade responsável pela criação do cálculo diferencial e integral que conhecemos, além da sua vasta aplicação de resolver problemas no campo da física ou matemática. Talvez sem essa ferramenta, simples problemas que são facilmente resolvidos pelo cálculo diferencial e integral se tornariam um grande obstáculo de difícil entendimento e comprovação. Logo, apesar da linguagem deste matemáticos responsáveis pela criação do cálculo não serem muito associável a linguagem de demostrações matemáticas associadas ao rigor matemático, tentei trazer as interpretações e modos com que os matemáticos dos séculos anteriores lidavam e manipulavam os problemas matemáticos, que até então não eram apresentados segundo uma linguagem formal e universal, sendo esta matemática expressa de formas variadas de acordo com cada matemático e seus entendimentos de cada assunto.

REFERÊNCIAS

BARDI, J. S. **A guerra do Cálculo**. 3. ed. Rio de Janeiro: RECORD LTDA, 2016.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. 1. ed. São Paulo: Edgard Blucher LTDA, 1974.

CAJORI, F. **Uma História da Matemática**. São Paulo: Chelsea publishing Company, 2007.

CARVALHO, S. G. **A Teoria das Tangentes Antes Da Invenção Do Cálculo Diferencial**. 1. ed. Coimbra: Imprensa da Universidade, 1919.

EVES, H. **Introdução á história da Matemática**. 1. ed. São Paulo: Unicamp, 2004.

GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de cálculo**. vol. 1, 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001.

KATZ, V. J. **História da Matemática**. 2. ed. Lisboa: Fundacao Calouste Gulbenkian, 2010.

LIMA, E. L. **Análise real**. vol. 1. 12. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2017.

PIRES, J. A. L. **Cálculo diferencial: estudo histórico sobre a evolução do cálculo diferencial no século XVII.** Dissertação (Mestrado), 2004.

STEWART, J. **Cálculo**. vol. 1. ed. 2. São Paulo: Cengage Learning, 2011.