

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO ACADÊMICO DE ELÉTRICA
CURSO DE ENGENHARIA DE CONTROLE E AUTOMAÇÃO

MARCO ANTONIO LEITE BETETO

**SÍNTESE DE CONTROLADORES ROBUSTOS LQR-DERIVATIVO
POR APROXIMAÇÕES LMIs: SINTONIA VIA ALGORITMO
GENÉTICO**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

CORNÉLIO PROCÓPIO

2016

MARCO ANTONIO LEITE BETETO

**SÍNTESE DE CONTROLADORES ROBUSTOS LQR-DERIVATIVO
POR APROXIMAÇÕES LMIs: SINTONIA VIA ALGORITMO
GENÉTICO**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentada ao curso superior de Engenharia de Controle e Automação da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, como requisito parcial para obtenção do título de Engenheiro de Controle e Automação.

Orientador: Prof. Dr. Emerson Ravazzi Pires da
Silva

CORNÉLIO PROCÓPIO

2016



Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Cornélio Procópio
Departamento Acadêmico de Elétrica
Curso de Engenharia de Controle e Automação



FOLHA DE APROVAÇÃO

Marco Antonio Leite Beteto

Síntese de Controladores Robustos LQR-Derivativo por Aproximações LMIs: Sintonia via Algoritmo Genético

Trabalho de conclusão de curso apresentado às 14:00hs do dia 16/11/2016 como requisito parcial para a obtenção do título de Engenheiro de Controle e Automação no programa de Graduação em Engenharia de Controle e Automação da Universidade Tecnológica Federal do Paraná. O candidato foi arguido pela Banca Avaliadora composta pelos professores abaixo assinados. Após deliberação, a Banca Avaliadora considerou o trabalho aprovado.

Prof(a). Dr(a). Emerson Ravazzi Pires da Silva - Presidente (Orientador)

Prof(a). Dr(a). Cristiano Marcos Agulhari - (Membro)

Prof(a). Dr(a). Luiz Francisco Sanches Buzachero - (Membro)

Dedico este trabalho aos meus pais, Claudemir e Luciana, minha irmã, Emanuela e a minha namorada, Ana Paula, pelo apoio e por sempre estarem presentes.

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador professor Dr. Emerson Ravazzi, pela amizade, pelos ensinamentos, pela paciência e, principalmente, pelo incentivo e confiança.

Aos professores de minha graduação, em especial ao professor Dr. Cristiano Marcos Agulhari e professor Dr. Luiz Buzachero, pelas críticas e sugestões para este trabalho.

Aos amigos do Laboratório de Controle e Otimização de Sistemas (LACOS), Amanda Spagolla, Marlon Pascoal, Pedro Leme, Thiago Honorato, Thiago Grossi e Vinícius de Paula, pelas conversas produtivas ao longo das madrugadas.

Aos amigos dos demais laboratórios, em especial ao Danilo Wollz, Gustavo Flore e Thainara de Araújo. Também, ao colega do laboratório vizinho, Daniel Horevicz, pela ajuda com gráfico do *ITAE*.

Aos amigos da graduação, em especial ao Daniel Izumi, Hellen Ancelmo, Nicolas Lens, Tayane Vidal, Thamiris Lima, as gêmeas da mecânica, Beatriz e Marina Sandrini, e Wagner Chaves (Sequela).

”Tudo que o homem não conhece não existe para ele. Por isso, o mundo tem para cada um o tamanho que abrange o seu conhecimento” - Carlos Bernardo González Pecotche (1901 - 1963)

”Todas as grandes coisas são simples, e muitas podem ser expressas em palavras simples: liberdade, justiça, honra, dever, misericórdia e esperança” - Winston Churchill (1874 - 1965)

RESUMO

BETETO, Marco Antonio Leite. **Síntese de controladores robustos LQR-LMI via realimentação derivativa: aplicações em sistemas dinâmicos com falhas estruturais**. 2016. 61 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação), Engenharia de Controle e Automação. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2016.

Neste trabalho é proposta a resolução do problema do regulador linear quadrático (do inglês, *Linear Quadratic Regulator* - LQR) por aproximação via desigualdades matriciais lineares (do inglês, *Linear Matrix Inequalities* - LMIs) para sistemas lineares e sistemas lineares incertos, ou sujeitos a falhas estruturais. Ainda, no projeto dos controladores é considerada a realimentação da derivada do vetor de estados (realimentação derivativa). Um fator para a escolha de realimentar a derivada do vetor de estados é sua fácil implementação em determinados sistemas mecânicos, como no controle de vibrações, por exemplo. As matrizes de ponderação do vetor da derivada dos estados e do vetor do sinal de controle para o projeto LQR são obtidas por meio de um algoritmo genético (do inglês, *Genetic Algorithm* - GA). O uso de uma técnica de busca e otimização, o GA, se dá pelo fato da necessidade de ponderar adequadamente as matrizes de ponderação do problema LQR de modo a atingir certos requisitos de projeto, como tempo de estabelecimento, por exemplo. Ao final, são feitas simulações como forma de ilustrar a eficiência dos teoremas propostos.

Palavras-chave: Regulador Linear Quadrático (LQR), Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs), Realimentação Derivativa, Estabilidade Robusta, Taxa de Decaimento, Falhas Estruturais.

ABSTRACT

BETETO, Marco Antonio Leite. **Synthesis of robust controllers LQR-LMI via state-derivative feedback: applications in dynamic systems with structural failures.** 2016. 61 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação), Engenharia de Controle e Automação. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2016.

In this paper, the resolution of the problem of the linear quadratic regulator (LQR) by approximation via linear matrix inequalities (LMIs) for linear systems and uncertain linear systems, or subject to structural failures, is proposed. Still, in the controllers design it is considered the state-derivative feedback. The factor for the choice of the state-derivative feedback is your easy implementation in certain mechanical systems, such as in vibrations control, for example. The weighting matrices the vector of state-derivative and the signal vector of control are obtained by a genetic algorithm (GA). The use of a search and optimization technique, the GA, is given by the fact of the need to properly consider the LQR problem of determining the weighting matrices to achieve certain design requirements, such as setting time, for example. Finally, simulations to illustrate the efficiency of the proposed theorems are performed.

Keywords: Linear Quadratic Regulator, Linear Matrix Inequalities, State-Derivative Feedback, Robust Stability, Decay Rate, Structural Failures.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1	– Região de restrição dos polos do sistema com restrição de taxa de decaimento	19
FIGURA 2	– Fluxograma de funcionamento de um algoritmo genético	36
FIGURA 3	– Resposta com índice <i>ITAE</i>	37
FIGURA 4	– Exemplo de isolamento de vibração	38
FIGURA 5	– Estados do sistema para o Teorema 1	40
FIGURA 6	– Derivada dos estados para o Teorema 1	40
FIGURA 7	– Sinais de controle para o Teorema 1	41
FIGURA 8	– Estados do sistema para o Teorema 3	42
FIGURA 9	– Derivada dos estados para o Teorema 3	42
FIGURA 10	– Sinais de controle para o Teorema 3	43
FIGURA 11	– Estados do sistema para o Teorema 5	45
FIGURA 12	– Derivada dos estados para o Teorema 5	46
FIGURA 13	– Sinais de controle para o Teorema 5	46
FIGURA 14	– Estados do sistema para o Teorema 2	48
FIGURA 15	– Derivada dos estados para o Teorema 2	48
FIGURA 16	– Sinais de controle para o Teorema 2	49
FIGURA 17	– Região de restrição dos polos do sistema para o Teorema 2	49
FIGURA 18	– Estados do sistema para o Teorema 4	50
FIGURA 19	– Derivada dos estados para o Teorema 4	50
FIGURA 20	– Sinais de controle para o Teorema 4	51
FIGURA 21	– Região de restrição dos polos do sistema incerto para o Teorema 4	51
FIGURA 22	– Estados do sistema para o Teorema 6	54
FIGURA 23	– Derivada dos estados para o Teorema 6	54
FIGURA 24	– Sinais de controle para o Teorema 6	55
FIGURA 25	– Região de restrição dos polos do sistema incerto para o Teorema 6	55

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
2	PROBLEMA	12
3	JUSTIFICATIVA	13
4	OBJETIVOS	14
4.1	OBJETIVO GERAL	14
4.2	OBJETIVOS ESPECÍFICOS	14
5	METODOLOGIA	15
6	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	16
6.1	ESTABILIDADE DE LYAPUNOV	16
6.2	REALIMENTAÇÃO DERIVATIVA	17
6.2.1	Condição de Estabilidade	17
6.2.2	Condição de Estabilidade com Restrição na Taxa de Decaimento	18
6.3	CONTROLADOR LQR	19
6.4	CONTROLADOR LQR-DERIVATIVO	21
6.5	CONTROLADOR LQR-DERIVATIVO VIA LMIs	23
6.5.1	Condição de Estabilidade	24
6.5.2	Condição de Estabilidade com Restrição de Taxa de Decaimento	26
6.6	REALIMENTAÇÃO DERIVATIVA PARA SISTEMAS INCERTOS	29
6.6.1	Condição de Estabilidade	30
6.6.2	Condição de Estabilidade com Restrição de Taxa de Decaimento	31
6.7	CONTROLADOR LQR-DERIVATIVO VIA LMIS PARA SISTEMAS INCERTOS	31
6.7.1	Condição de Estabilidade	31
6.7.2	Condição de Estabilidade com Restrição de Taxa de Decaimento	33
6.8	ROBUSTEZ NAS MATRIZES DE PONDERAÇÃO	34
6.8.1	Condição de Estabilidade	34
6.8.2	Condição de Estabilidade com Restrição de Taxa de Decaimento	35
6.9	ALGORITMO GENÉTICO	35
6.9.1	Função Objetivo	37
7	EXEMPLO ILUSTRATIVO	38
7.1	CONDIÇÃO DE ESTABILIDADE	39
7.2	CONDIÇÃO DE ESTABILIDADE COM RESTRIÇÃO DE TAXA DE DECAIMENTO	47
8	CONCLUSÕES	57
	REFERÊNCIAS	59

1 INTRODUÇÃO

A teoria de controle ótimo cada vez mais é usada no projeto de sistemas de controle modernos, determinando os sinais de controle por meio da minimização (ou maximização) de uma função objetivo (ou função custo) (KIRK, 2012). A otimização da função objetivo garante a estabilidade do sistema em malha fechada e satisfaz as restrições do projeto (ROBANDI et al., 2001; ZHAI et al., 2014; DAS et al., 2013). Em muitos casos, a função objetivo é uma função de custo quadrático, sendo a definição desta uma parte importante no projeto de controle ótimo, uma vez que determina o bom desempenho do sistema (OGATA, 1995).

O controle linear ótimo é uma parte especial do controle ótimo, no qual assume-se que o sistema e o controlador são lineares, sendo estes obtidos por meio de índices quadráticos (ANDERSON; MOORE, 1971). Ainda, em ANDERSON; MOORE (1971), os métodos que permitem alcançar uma lei de controle ótimo são denominados de métodos quadráticos lineares (do inglês, *Linear Quadratic* - LQ). Um dos diversos métodos LQ é o Regulador Linear Quadrático (do inglês, *Linear Quadratic Regulator* - LQR). Tal método vem sendo amplamente abordado, como pode ser visto em diversos trabalhos, por exemplo (CHOI et al., 1998), que aproxima o LQR via posicionamento de autoestrutura; em (KANIESKI et al., 2010), que utiliza o LQR no controle de um condicionador de energia; em (DAS et al., 2013), o qual utiliza o LQR na sintonia de controladores PID ótimos; entre outros.

Controladores do tipo LQR possuem três principais características: (a) é possível utilizar o modelo em espaço de estados; (b) o sinal de controle ótimo é obtido pela resolução da Equação de Riccati (do inglês, *Algebraic Riccati Equation* - ARE); (c) é possível ponderar os vetores de estado e controle por meio das matrizes de ponderação \mathcal{Q} e \mathcal{R} , respectivamente (CAUN et al., 2015; DAS et al., 2013). A escolha adequada das matrizes de ponderação garante que a amplitude dos estados e do sinal de controle estejam dentro das especificações do projeto (BURNS, 2001).

A ARE pode ser resolvida de diversas maneiras, sendo uma delas utilizando Desigualdades Matriciais Lineares (do inglês, *Linear Matrix Inequalities* - LMI). Estratégias

via LMIs são baseadas no critério de estabilidade de Lyapunov e possuem certas vantagens, como a simplicidade de se tratar incertezas no modelo dinâmico e a facilidade de incluir índices de desempenho na abordagem do problema (BOYD et al., 1994). Ainda, LMIs podem ser resolvidas eficientemente por meio de algumas ferramentas disponíveis na literatura de programação matemática, como o software MatLab[®] (GAHINET et al., 1995). Diferentes trabalhos têm abordado técnicas fundamentadas em LMIs, por exemplo, em (SILVA et al., 2009), que aborda o uso de LMIs no controle de sistemas não-lineares; em (TANAKA et al., 1998), que utiliza LMIs juntamente com sistemas de controle *Fuzzy*; em (BUZACHERO et al., 2012), que utiliza LMIs na síntese de controladores robustos para sistemas lineares com incertezas politópicas; (AGULHARI et al., 2010), que aborda o uso de LMIs no projeto de controladores robustos para sistemas lineares discretos com incertezas politópicas; em (GE et al., 2002), o qual apresenta a solução da ARE via LMIs; em (CAUN et al., 2015), que também apresenta a solução da ARE via LMIs, contudo aborda a utilização de um índice de desempenho no projeto dos controladores, a taxa de decaimento, responsável pela rapidez da resposta transitória. Nesses dois últimos trabalhos é utilizada a realimentação do vetor de estados na formulação da função quadrática do problema LQR.

Neste trabalho será apresentada a formulação da função quadrática do problema LQR utilizando a realimentação derivativa, como visto em (ABDELAZIZ; VALÁŠEK, 2005; ABDELAZIZ, 2010; KWAK et al., 2002). No entanto, a solução da ARE será feita pela resolução de LMIs, além de utilizar uma técnica de busca e otimização, o algoritmo genético (do inglês, *Genetic Algorithm - GA*), para computar as matrizes de ponderação, \mathcal{Q} e \mathcal{R} . O controle baseado na realimentação derivativa é vantajoso uma vez que em determinados sistemas, geralmente os sistemas mecânicos, sinais da segunda derivada dos estados podem ser utilizados para realimentação. Tais sinais são obtidos por meio de sensores do tipo acelerômetros. A partir do sinal da aceleração é possível reconstruir o sinal da velocidade com boa precisão, mas não o sinal de deslocamento (ABDELAZIZ; VALÁŠEK, 2004). Logo, os sinais utilizados para a realimentação são acelerações e velocidades, isto é, as derivadas da velocidade e deslocamento, que na maioria das vezes representam os estados do sistema. Segundo SILVA et al. (2012), acelerômetros têm sido utilizados para a solução de vários tipos de problemas de engenharia devido à sua estrutura simples e ao baixo custo operacional. Por

exemplo, em (KWAK et al., 2002), os acelerômetros são utilizados no controle das vibrações de componentes de aeronaves de grande escala; em (DUAN et al., 2005), no controle de vibrações de cabos de pontes suspensas; em (REITHMEIER; LEITMANN, 2003), no controle de sistemas de suspensões ativas de automóveis; em (ABDELAZIZ, 2010), no controle de vibrações de sistemas mecânicos.

A partir dessas informações, neste trabalho são propostas condições suficientes baseadas na técnica de controle LQR-derivativo aproximado via LMI. A síntese dos controladores tem como objetivo garantir a estabilidade com ou sem restrições na taxa de decaimento de sistemas lineares invariantes no tempo. A restrição de taxa de decaimento é um importante índice de desempenho, responsável pela rapidez de resposta do sistema (BOYD et al., 1994). O parâmetro da taxa de decaimento será calculado utilizando o GA. Os resultados obtidos serão generalizados para sistemas incertos invariantes no tempo, uma vez que a técnica pode ser aplicada a sistemas sujeitos a falhas estruturais, as quais são um caso particular de incertezas. Falhas estruturais podem ser causadas por diversos motivos, por exemplo, desgaste físico do equipamento, quebra por fatores externos, entre outros (SILVA et al., 2009). Por fim, simulações digitais em sistemas dinâmicos serão feitas para validar a técnica proposta.

A contribuição deste trabalho está no fato de propor uma nova técnica de controle LQR baseado em LMIs via realimentação derivativa, bem como utilizar o algoritmo genético para ponderar as matrizes \mathcal{Q} e \mathcal{R} do controlador LQR.

O trabalho está organizado como segue: No Capítulo 2 é feita a problematização do trabalho. No Capítulo 3 são apresentadas algumas das vantagens de utilizar o controlador LQR, bem como utilizar LMIs no projeto. No Capítulo 4 são apresentados os objetivos deste trabalho. No Capítulo 5 estão presentes os procedimentos necessários para a obtenção dos resultados. No Capítulo 6 estão presentes algumas propriedades necessárias ao decorrer do trabalho e alguns lemas, os quais utilizam a realimentação derivativa, propostos na literatura. Ainda, é feita uma introdução a respeito do controlador LQR e do controlador LQR-derivativo, bem como são apresentados os teoremas propostos. No Capítulo 7 é apresentado um exemplo ilustrativo.

2 PROBLEMA

A obtenção dos modelos dinâmicos nem sempre é exata. Devido a problemas de medições, a maioria dos modelos apresentam incertezas que devem ser consideradas no projeto dos controladores. Um caso particular de incertezas são as falhas estruturais, que podem ocorrer a qualquer momento em sistemas dinâmicos, devido, por exemplo, ao desgaste natural de algum componente, quebra por fatores externos, entre outras (ISERMANN, 2006).

Devido a isso, optou-se na utilização de controladores robustos, levando em consideração as incertezas dos componentes do sistema desde o estágio de projeto dos controladores (SILVA et al., 2009). A escolha do LQR é devido a possíveis limitações nos estados e sinal de controle. No entanto, normalmente, as matrizes \mathcal{Q} e \mathcal{R} são obtidas empiricamente. Neste trabalho será utilizado o GA para o cálculo dessas matrizes de ponderação, baseado no critério de desempenho *ITAE* (do inglês, *Integral of Time-weight Absolute Error*).

Além disso, garantir a estabilidade do sistema nem sempre é suficiente. Assim, é proposto o projeto com a restrição de taxa de decaimento.

3 JUSTIFICATIVA

A abordagem do controle LQR trata da otimização de uma função custo ou índice de desempenho (OGATA, 1995). Dessa forma, é possível ponderar o vetor dos estados, assim como o vetor do sinal de controle, de forma a buscar um transitório com desempenho adequado (OLALLA et al., 2007).

A contribuição deste trabalho é formular o problema do LQR via realimentação derivativa, além de ponderar adequadamente as matrizes \mathcal{Q} e \mathcal{R} por meio de uma técnica de busca paralela e global, os algoritmos genéticos (GAs). Ainda, o LQR-derivativo será solucionado utilizando LMIs, as quais emergiram há pouco tempo como uma ferramenta na busca de soluções numéricas de problemas de otimização de natureza convexa, através de pacotes computacionais, por exemplo, o LMI-tool (CAUN et al., 2015; BOYD et al., 1994).

No uso de LMIs, pode-se incorporar facilmente o conceito de alocação de polos, caracterizando regiões de operações que atendam requisitos de projetos em síntese de controladores (CHILALI; GAHINET, 1996), assim como o conceito de sistemas lineares incertos caracterizados por incertezas decorrentes de imprecisões em medidas, erros cometidos nas aproximações por modelos lineares ou linearizados, falhas estruturais, entre outros (ASSUNÇÃO et al., 2007).

4 OBJETIVOS

4.1 OBJETIVO GERAL

Desenvolver uma técnica de controle fundamentada na resolução do problema do regulador linear quadrático (LQR) por aproximação via desigualdades matriciais lineares (LMIs) para sistemas lineares e sistemas lineares incertos, ambos invariantes no tempo, considerando a realimentação derivativa. Tal técnica pode ser aplicada a sistemas sujeitos a falhas estruturais.

4.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Formular o problema LQR via realimentação derivativa;
- Solucionar a ARE via LMIs;
- Encontrar as matrizes de ponderação, \mathcal{Q} e \mathcal{R} , do problema LQR usando o algoritmo genético, considerando o índice *ITAE*;
- Adicionar a restrição da taxa de decaimento no projeto dos controladores;
- Encontrar o parâmetro, $\gamma > 0$, da taxa de decaimento usando o algoritmo genético, considerando o índice *ITAE*;
- Analisar o desempenho dos controladores propostos por meio de simulações digitais.

5 METODOLOGIA

Primeiramente foi feito um levantamento bibliográfico, com o intuito de identificar os principais trabalhos envolvendo o tema. Com base nos trabalhos ABDELAZIZ; VALÁŠEK (2005) e ABDELAZIZ (2010), a formulação do problema LQR via realimentação derivativa foi analisada. Da mesma forma, a resolução da ARE por aproximação LMIs foi estudada através de (GE et al., 2002) e (CAUN et al., 2015).

Para o projeto dos controladores foram consideradas as condições de estabilidade e estabilidade com restrição de taxa de decaimento. Ambos projetos utilizam a realimentação derivativa (ASSUNÇÃO et al., 2007). Tais condições foram consideradas no projeto dos controladores LQR-derivativos.

No final, é realizada uma extensão dos resultados obtidos para sistemas lineares sujeitos a falhas estruturais. Também, serão realizadas simulações digitais como forma de verificar o desempenho dos controladores projetados.

6 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

6.1 ESTABILIDADE DE LYAPUNOV

Considere o sistema linear e invariante no tempo, dado por (1):

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad (1)$$

sendo $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a matriz de dinâmica do sistema e $x(t) \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estados. Considere, agora, uma candidata a função de Lyapunov do tipo $V(x(t)) = x(t)^T P x(t) > 0$, sendo $P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, com $\dot{V}(x(t)) < 0$ para todo $x(t) \neq 0$, onde

$$\dot{V}(x(t)) = \dot{x}(t)^T P x(t) + x(t)^T P \dot{x}(t). \quad (2)$$

Substituindo $\dot{x}(t)$ pelo sistema (1), tem-se

$$\dot{V}(x(t)) = x(t)^T A^T P x(t) + x(t)^T P A x(t) < 0, \quad (3)$$

$$\dot{V}(x(t)) = x(t)^T (A^T P + P A) x(t) < 0. \quad (4)$$

Uma condição necessária e suficiente para a estabilidade quadrática do sistema (1) é que exista uma matriz P tal que as condições (5) e (6) sejam satisfeitas (BOYD et al., 1994):

$$A^T P + P A < 0, \quad (5)$$

$$P > 0. \quad (6)$$

A Seção 6.2 apresenta a condição de estabilidade para sistemas realimentados, envolvendo a realimentação derivativa.

6.2 REALIMENTAÇÃO DERIVATIVA

Considere o sistema controlável, linear e invariante no tempo descrito por:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(t_0) = x(0), \quad (7)$$

sendo $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ matrizes que descrevem o comportamento do sistema, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados e $u(t) \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de entrada de controle.

Admitindo que a matriz A é não singular, ou seja, $\det(A) \neq 0$. O objetivo é encontrar uma matriz $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$, tal que a entrada de controle, $u(t)$, seja:

$$u(t) = -K\dot{x}(t), \quad (8)$$

de modo a viabilizar a realimentação derivativa e a matriz $(I + BK)$ seja invertível. Assim, o sistema em malha fechada se torna

$$\dot{x}(t) = Ax(t) - BK\dot{x}(t) \Leftrightarrow \dot{x}(t) = (I + BK)^{-1}Ax(t), \quad (9)$$

sendo $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a matriz identidade. Para maiores detalhes vide (ABDELAZIZ; VALÁŠEK, 2004).

6.2.1 Condição de Estabilidade

Considerando a candidata a função de Lyapunov (2) e substituindo $\dot{x}(t)$ pelo sistema em malha fechada (9), tem-se o lema a seguir, o qual apresenta condições necessárias e suficientes para que o sistema seja estabilizável.

Lema 1 *Admitindo que o sistema (7) não possua polos na origem (ou, $\det(A) \neq 0$), o sistema (9) é estabilizável se, e somente se, existir uma matriz simétrica $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e uma matriz $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$ que satisfaçam as LMIs:*

$$XA^T + AX + BYA^T + AY^T B^T < 0, \quad (10)$$

$$X > 0. \quad (11)$$

O ganho de realimentação da derivada dos estados pode ser dado por $K = YX^{-1}$.

Prova 1 *Vide (ASSUNÇÃO et al., 2007).*

As LMIs do Lema 1, quando factíveis, são resolvidas eficientemente por meio de ferramentas disponíveis na literatura de programação matemática, como, por exemplo, o software MatLab[®] (GAHINET et al., 1995).

Contudo, existem casos em que garantir apenas a estabilidade do sistema nem sempre é suficiente, sendo que alguns projetos necessitam de restrições de desempenho. Um índice de desempenho muito importante é a taxa de decaimento, responsável pela rapidez de resposta do sistema (BOYD et al., 1994).

6.2.2 Condição de Estabilidade com Restrição na Taxa de Decaimento

A taxa de decaimento, ou maior expoente de Lyapunov, é definida como a maior constante positiva γ , tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\gamma t} \|x(t)\| = 0, \quad (12)$$

se mantém para toda trajetória $x(t)$.

Pode-se usar a função quadrática de Lyapunov $V(x(t)) = x(t)^T P x(t) > 0$, sendo $P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, para estabelecer um limite inferior na taxa de decaimento do sistema (9), com $\dot{V}(x(t)) \leq -2\gamma V(x(t))$ para todo $x(t) \neq 0, t \geq 0$ (BOYD et al., 1994). Assim,

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) \leq -2\gamma V(x(t)) &\Leftrightarrow \\ \dot{x}(t)^T P x(t) + x(t)^T P \dot{x}(t) &\leq -2\gamma x(t)^T P x(t). \end{aligned} \quad (13)$$

Substituindo $\dot{x}(t)$ pelo sistema em malha fechada (9), tem-se o Lema 2, o qual apresenta condições necessárias e suficientes para o sistema ser estabilizável com restrição de taxa de decaimento. A Figura 1 mostra a restrição dos polos utilizando a taxa de decaimento.

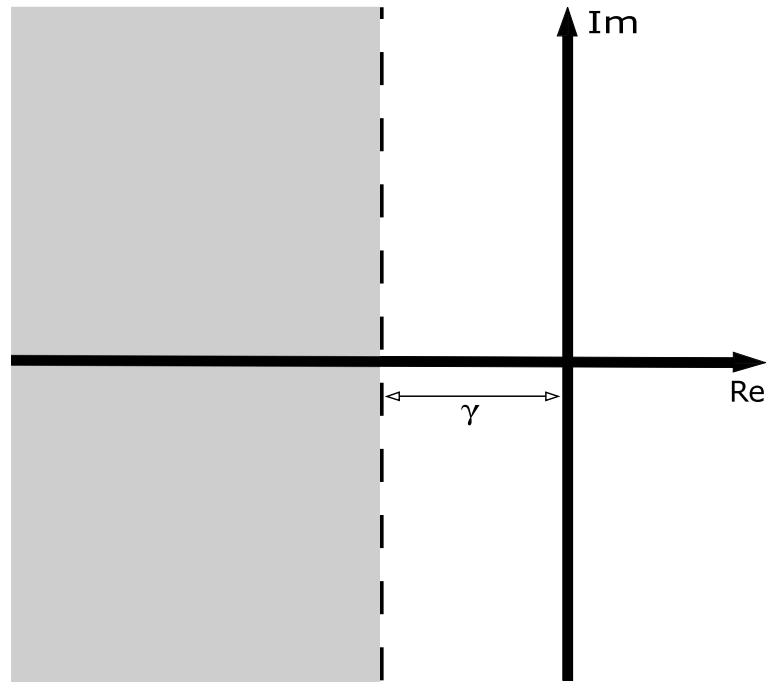


Figura 1: Região de restrição dos polos do sistema com restrição de taxa de decaimento.
Fonte: Autoria Própria.

Lema 2 Admitindo que o sistema (7) não possua polos na origem (ou, $\det(A) \neq 0$) e dado $\gamma > 0$, o sistema (9) é estabilizável com restrição de taxa de decaimento se, e somente se, existir uma matriz simétrica $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e uma matriz $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$ que satisfaçam as LMIs:

$$\begin{bmatrix} XA^T + AX + BYA^T + AY^T B^T & X + BY \\ X + Y^T B^T & -X/(2\gamma) \end{bmatrix} < 0, \quad (14)$$

$$X > 0. \quad (15)$$

O ganho de realimentação da derivada dos estados pode ser dado por $K = YX^{-1}$.

Prova 2 Vide (ASSUNÇÃO et al., 2007).

6.3 CONTROLADOR LQR

Considere o sistema controlável, linear e invariante no tempo descrito por (7).

O problema LQR consiste em determinar uma lei de controle

$$u(t) = -Kx(t), \quad (16)$$

que minimize uma função quadrática, tal que:

$$J(x(t), u(t)) = \int_0^{\infty} (x(t)^T \mathcal{Q}x(t) + u(t)^T \mathcal{R}u(t)) dt, \quad (17)$$

sendo \mathcal{Q} uma matriz simétrica $n \times n$ definida positiva e \mathcal{R} uma matriz simétrica $m \times m$ definida positiva. \mathcal{Q} e \mathcal{R} são as matrizes de ponderação dos estados e do sinal de controle, respectivamente.

Substituindo (16) em (17), o índice J pode se minimizado através de (18),

$$J = \int_0^{\infty} (x(t)^T \mathcal{Q}x(t) + x(t)^T K^T \mathcal{R}Kx(t)) dt = \int_0^{\infty} x(t)^T (\mathcal{Q} + K^T \mathcal{R}K)x(t) dt. \quad (18)$$

Suponha que se possa encontrar uma matriz simétrica definida positiva P que minimize (18). Então

$$x(t)^T (\mathcal{Q} + K^T \mathcal{R}K)x(t) = -\frac{d}{dt}(x(t)^T Px(t)) = -\dot{x}(t)^T Px(t) - x(t)^T P\dot{x}(t). \quad (19)$$

Assim, o índice pode ser reescrito como:

$$J = \int_0^{\infty} x(t)^T (\mathcal{Q} + K^T \mathcal{R}K)x(t) dt = -x(t)^T Px(t) \Big|_0^{\infty} = -x(\infty)^T Px(\infty) + x(0)^T Px(0). \quad (20)$$

Substituindo (16) em (7), o sistema em malha fechada torna-se,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) - BKx(t) = (A - BK)x(t). \quad (21)$$

Partindo do pressuposto que todos os autovalores de (21) tenham partes reais negativas, então $x(\infty) \rightarrow 0$. Assim, o índice converge para o valor ótimo quando

$$J = x(0)^T P x(0). \quad (22)$$

O índice J pode ser obtido em termos da condição inicial $x(0)$ e pela matriz P . Dessa forma, a lei de controle ótimo do problema LQR, quando o índice de desempenho é dado por (17), é:

$$u(t) = -Kx(t) = -\mathcal{R}^{-1}B^T P x(t), \quad (23)$$

de modo que P satisfaça a equação de Riccati (ARE)

$$A^T P + PA - PB\mathcal{R}^{-1}B^T P + \mathcal{Q} = 0. \quad (24)$$

O controlador linear quadrático ótimo (LQR) pode ser visto com maiores detalhes em (OGATA, 2010).

6.4 CONTROLADOR LQR-DERIVATIVO

Considere o sistema controlável, linear e invariante no tempo descrito por (7).

O controle com bom desempenho dinâmico é alcançado por meio do projeto do controlador que minimize a função quadrática ou índice de desempenho do tipo:

$$J(\dot{x}(t), u(t)) = \min_u \int_0^{\infty} (\dot{x}(t)^T \mathcal{Q} \dot{x}(t) + u(t)^T \mathcal{R} u(t)) dt, \quad (25)$$

sendo \mathcal{Q} uma matriz simétrica $n \times n$ definida positiva e \mathcal{R} uma matriz simétrica $m \times m$ definida positiva. As matrizes \mathcal{Q} e \mathcal{R} são as matrizes de ponderação da derivada dos estados e do sinal de controle, respectivamente. Nota-se que essa formulação é semelhante ao LQR original, porém o índice é baseado na derivada dos estados, não nos estados.

A lei de controle que soluciona o problema do LQR é dada por

$$u(t) = -K\dot{x}(t) = -\mathcal{R}^{-1}B^T A^{-T} P \dot{x}(t), \quad (26)$$

de modo que P satisfaça a equação de Riccati (ARE)

$$PA^{-1} + A^{-T}P - PA^{-1}B\mathcal{R}^{-1}B^T A^{-T}P + \mathcal{Q} = 0. \quad (27)$$

Substituindo (8) em (25), o índice J pode ser minimizado através de (28),

$$J = \int_0^{\infty} (\dot{x}(t)^T \mathcal{Q} \dot{x}(t) + (K\dot{x}(t))^T \mathcal{R} (K\dot{x}(t))) dt = \int_0^{\infty} (\dot{x}(t)^T (\mathcal{Q} + K^T \mathcal{R} K) \dot{x}(t)) dt. \quad (28)$$

O problema de projeto é encontrar um ganho de realimentação K de modo que J seja minimizado sujeito à restrição dinâmica (9). Logo, o problema LQR com realimentação derivativa para sistemas lineares é dado por:

Problema 1 *Dada a dinâmica do sistema linear (7) e as matrizes simétricas $\mathcal{Q} > 0$ e $\mathcal{R} > 0$, deve-se encontrar a matriz de ganho de realimentação $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ de entrada de controle (8) que minimize o valor da função custo (28) e estabilize o sistema em malha fechada (9) para algum estado inicial $x(0)$.*

O principal objetivo é minimizar o índice (28) para a obtenção do ganho de realimentação K . Suponha que pode-se encontrar uma matriz simétrica definida positiva, P , que minimize (28), então

$$\dot{x}(t)^T (\mathcal{Q} + K^T \mathcal{R} K) \dot{x}(t) = -\frac{d}{dt} (x(t)^T P x(t)) = -\dot{x}(t)^T P x(t) - x(t)^T P \dot{x}(t). \quad (29)$$

Desse modo, o índice pode ser reescrito como:

$$J = \int_0^{\infty} (\dot{x}(t)^T (\mathcal{Q} + K^T \mathcal{R} K) \dot{x}(t)) dt = -x(t)^T P x(t) \Big|_0^{\infty} = -x(\infty)^T P x(\infty) + x(0)^T P x(0). \quad (30)$$

Levando em consideração que o sistema em malha fechada é assintoticamente estável, isto é, todos os autovalores de (9) possuem parte real negativa, então $x(\infty) \rightarrow 0$. Assim, o índice

converge para o valor ótimo quando

$$J = x(0)^T P x(0). \quad (31)$$

O índice J pode ser obtido por meio das condições iniciais $x(0)$ e pela matriz P . O LQR-derivativo pode ser visto com maiores detalhes em (ABDELAZIZ; VALÁŠEK, 2005).

6.5 CONTROLADOR LQR-DERIVATIVO VIA LMIs

O problema LQR, basicamente, consiste na resolução da ARE e, considerando sua natureza matricial, pode ser solucionado via LMIs.

A Propriedade 1 e o Lema 3 são utilizadas para a demonstração, em termos de LMIs, do controlador LQR-derivativo.

Propriedade 1 *Uma matriz M é invertível se $M + M^T < 0$ para qualquer matriz M não simétrica ($M \neq M^T$) (SLOTINE; LI, 1991).*

Lema 3 *Considere a LMI*

$$\begin{bmatrix} M_1(x) & M_2(x) \\ M_2(x)^T & M_3(x) \end{bmatrix} > 0, \quad (32)$$

sendo que $M_1(x) = M_1(x)^T$, $M_3(x) = M_3(x)^T$ e $M_2(x)$ dependem de modo afim de x . A LMI (32) é equivalente a

$$M_3(x) > 0, M_1(x) - M_2(x)(M_3(x))^{-1}M_2(x)^T > 0, \quad (33)$$

ou ainda,

$$M_1(x) > 0, M_3(x) - M_2(x)^T(M_1(x))^{-1}M_2(x) > 0. \quad (34)$$

Conhecido na literatura como complemento de Schur.

Prova 3 *Vide (BOYD et al., 1994).*

6.5.1 Condição de Estabilidade

Considerando a candidata à função de Lyapunov (2) e substituindo $\dot{x}(t)$ pelo sistema em malha fechada (9), o Teorema 1 propõe condições LMIs suficientes para que o sistema seja estabilizável por meio do controlador LQR-derivativo.

Teorema 1 (LQR-Derivativo via LMI) *Dado $\mathcal{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ e $x(0) \in \mathbb{R}^{n \times m}$, o sistema (9) é estável e com desempenho otimizado se existir uma matriz simétrica $X > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e uma matriz $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$ que satisfaçam as LMIs:*

$$\begin{aligned} \min \mu \\ X = X^T > 0, Y \end{aligned}$$

Sujeito a

$$\begin{bmatrix} \mu & x(0)^T \\ x(0) & X \end{bmatrix} \geq 0, \quad (35)$$

$$\begin{bmatrix} V & X & Y^T \\ X & -\mathcal{Q}^{-1} & 0 \\ Y & 0 & -\mathcal{R}^{-1} \end{bmatrix} < 0, \quad (36)$$

sendo $V = A^{-1}X + XA^{-T} + A^{-1}BY + Y^TB^TA^{-T}$. O ganho de realimentação da derivada dos estados pode ser dado por

$$K = YX^{-1}, \quad (37)$$

com $X^{-1} = P$.

Prova 4 *Aplicando o complemento de Schur na LMI (35), tem-se*

$$x(0)^T X^{-1} x(0) \leq \mu. \quad (38)$$

Em muitas situações práticas, o objetivo (31) pode ser modificado por (38), onde μ é o limite superior especificado.

Separando a LMI (36) em blocos matriciais:

$$\left[\begin{array}{cc|c} V & X & Y^T \\ X & -\mathcal{Q}^{-1} & 0 \\ \hline Y & 0 & -\mathcal{R}^{-1} \end{array} \right] < 0. \quad (39)$$

Aplicando o complemento de Schur, tem-se:

$$\begin{bmatrix} V & X \\ X & -\mathcal{Q}^{-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Y^T \\ 0 \end{bmatrix} (-\mathcal{R}^{-1})^{-1} \begin{bmatrix} Y & 0 \end{bmatrix} < 0, \quad (40)$$

que reorganizando,

$$\begin{bmatrix} V + Y^T \mathcal{R} Y & X \\ X & -\mathcal{Q}^{-1} \end{bmatrix} < 0. \quad (41)$$

Aplicando, novamente, o complemento de Schur e substituindo a variável V , tem-se:

$$A^{-1}X + XA^{-T} + A^{-1}BY + Y^T B^T A^{-T} + Y^T \mathcal{R} Y + X \mathcal{Q} X < 0, \quad (42)$$

Considerando a mudança de variável $Y = KX$ e multiplicando à direita e à esquerda por $X^{-1} = P$, tem-se:

$$PA^{-1} + A^{-T}P + PA^{-1}BK + K^T B^T A^{-T}P + K^T \mathcal{R} K + \mathcal{Q} < 0, \quad (43)$$

organizando, temos

$$PA^{-1}(I + BK) + (I + BK)^T A^{-T}P + K^T \mathcal{R} K + \mathcal{Q} < 0. \quad (44)$$

Aplicando a Propriedade 1 em (44) conclui-se que as matrizes $(I + BK)$ e A são invertíveis.

Multiplicando à esquerda por $A^T(I + BK)^{-T}$, à direita por $(I + BK)^{-1}A$ e substituindo $A_{cl} = (I + BK)^{-1}A$, sendo A_{cl} a matriz de dinâmica do sistema em malha fechada, tem-se

$$A_{cl}^T P + P A_{cl} + A_{cl}^T K^T \mathcal{R} K A_{cl} + A_{cl}^T \mathcal{Q} A_{cl} < 0. \quad (45)$$

Multiplicando a esquerda por $x^T(t)$ e a direita por $x(t)$, tem-se que:

$$x(t)^T A_{cl}^T P x(t) + x(t)^T P A_{cl} x(t) + x(t)^T A_{cl}^T K^T \mathcal{R} K A_{cl} x(t) + x(t)^T A_{cl}^T \mathcal{Q} A_{cl} x(t) < 0. \quad (46)$$

Substituindo $\dot{x}(t) = A_{cl}x(t) = (I + BK)^{-1}Ax(t)$, tem-se:

$$\dot{x}(t)^T P x(t) + x(t)^T P \dot{x}(t) \leq -\dot{x}(t)^T (K^T \mathcal{R} K + \mathcal{Q}) \dot{x}(t). \quad (47)$$

Assim,

$$\dot{V}(x(t)) \leq 0. \quad (48)$$

A prova do Teorema 1 está concluída.

6.5.2 Condição de Estabilidade com Restrição de Taxa de Decaimento

Considerando a candidata à função de Lyapunov (13) e substituindo $\dot{x}(t)$ pelo sistema em malha fechada (9), o Teorema 2 propõe condições LMIs suficientes para a estabilização com restrição de taxa de decaimento do sistema por meio do controlador LQR-derivativo.

Teorema 2 (LQR-Derivativo via LMI, γ) Dado $\mathcal{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $x(0) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $\gamma > 0$, o sistema (9) é estável com restrição de taxa de decaimento e com desempenho otimizado se existir uma matriz simétrica $X > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e uma matriz $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$ que satisfaçam as LMIs:

$$\begin{aligned} \min \mu \\ X = X^T > 0, Y \end{aligned}$$

Sujeito a

$$\begin{bmatrix} \mu & x(0)^T \\ x(0) & X \end{bmatrix} \geq 0, \quad (49)$$

$$\begin{bmatrix} \Lambda & X & Y^T & XA^{-T} + Y^T B^T A^{-T} \\ X & -\mathcal{Q}^{-1} & 0 & 0 \\ Y & 0 & -\mathcal{R}^{-1} & 0 \\ A^{-1}X + A^{-1}BY & 0 & 0 & -X/(2\gamma) \end{bmatrix} < 0, \quad (50)$$

sendo $\Lambda = A^{-1}X + XA^{-T} + A^{-1}BY + Y^T B^T A^{-T}$. O ganho de realimentação da derivada dos estados pode ser dado por

$$K = YX^{-1}, \quad (51)$$

com $X^{-1} = P$.

Prova 5 Separando a LMI (50) em blocos matriciais:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \Lambda & X & Y^T & \Phi^T \\ X & -\mathcal{Q}^{-1} & 0 & 0 \\ Y & 0 & -\mathcal{R}^{-1} & 0 \\ \hline \Phi & 0 & 0 & -X/(2\gamma) \end{array} \right] < 0, \quad (52)$$

onde $\Phi = A^{-1}X + A^{-1}BY$.

Aplicando o complemento de Schur, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \Lambda & X & Y^T \\ X & -\mathcal{Q}^{-1} & 0 \\ Y & 0 & -\mathcal{R}^{-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Phi^T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (-X/(2\gamma))^{-1} \begin{bmatrix} \Phi & 0 & 0 \end{bmatrix} < 0, \quad (53)$$

que reorganizando,

$$\begin{bmatrix} \Lambda + \Phi^T 2\gamma X^{-1} \Phi & X & Y^T \\ X & -\mathcal{Q}^{-1} & 0 \\ Y & 0 & -\mathcal{R}^{-1} \end{bmatrix} < 0. \quad (54)$$

Agora, separando a LMI (54) em blocos matriciais:

$$\left[\begin{array}{cc|c} \Lambda + \Phi^T 2\gamma X^{-1} \Phi & X & Y^T \\ X & -\mathcal{Q}^{-1} & 0 \\ \hline Y & 0 & -\mathcal{R}^{-1} \end{array} \right] < 0. \quad (55)$$

Aplicando, novamente, o complemento de Schur, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \Lambda + \Phi^T 2\gamma X^{-1} \Phi & X \\ X & -\mathcal{Q}^{-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Y^T \\ 0 \end{bmatrix} (-\mathcal{R}^{-1})^{-1} \begin{bmatrix} Y & 0 \end{bmatrix} < 0, \quad (56)$$

que reorganizando,

$$\begin{bmatrix} \Lambda + \Phi^T 2\gamma X^{-1} \Phi + Y^T \mathcal{R} Y & X \\ X & -\mathcal{Q}^{-1} \end{bmatrix} < 0. \quad (57)$$

Aplicando, mais uma vez, o complemento de Schur e substituindo a variável Λ , tem-se:

$$A^{-1}X + XA^{-T} + A^{-1}BY + Y^T B^T A^{-T} + \Phi^T 2\gamma X^{-1} \Phi + Y^T \mathcal{R} Y + X \mathcal{Q} X < 0, \quad (58)$$

Considerando a mudança de variável $Y = KX$, $\Phi = A^{-1}X + A^{-1}BY$ e multiplicando à direita e à esquerda por $X^{-1} = P$, tem-se:

$$PA^{-1} + A^{-T}P + PA^{-1}BK + K^T B^T A^{-T}P + (A^{-T} + K^T B^T A^{-T})(2\gamma)P(A^{-1} + A^{-1}BK) + K^T \mathcal{R} K + \mathcal{Q} < 0, \quad (59)$$

organizando, temos

$$PA^{-1}(I+BK) + (I+BK)^T A^{-T} P + (I+BK)^T A^{-T} (2\gamma) PA^{-1}(I+BK) + K^T \mathcal{R}K + \mathcal{Q} < 0. \quad (60)$$

Aplicando a Propriedade 1 em (60) conclui-se que as matrizes $(I+BK)$ e A são invertíveis.

Multiplicando à esquerda por $A^T(I+BK)^{-T}$, à direita por $(I+BK)^{-1}A$ e substituindo $A_{cl} = (I+BK)^{-1}A$, sendo A_{cl} a equação do sistema em malha fechada, tem-se

$$A_{cl}^T P + PA_{cl} + 2\gamma P + A_{cl}^T K^T \mathcal{R}K A_{cl} + A_{cl}^T \mathcal{Q} A_{cl} < 0. \quad (61)$$

Multiplicando à esquerda por $x(t)^T$ e à direita por $x(t)$, tem-se que:

$$x(t)^T A_{cl}^T P x(t) + x(t)^T P A_{cl} x(t) + x(t)^T 2\gamma P x(t) + x(t)^T A_{cl}^T K^T \mathcal{R}K A_{cl} x(t) + x(t)^T A_{cl}^T \mathcal{Q} A_{cl} x(t) < 0. \quad (62)$$

Substituindo $\dot{x}(t) = A_{cl}x(t) = (I+BK)^{-1}Ax(t)$, tem-se:

$$\dot{x}(t)^T P x(t) + x(t)^T P \dot{x}(t) + 2\gamma x(t)^T P x(t) \leq -\dot{x}(t)^T (K^T \mathcal{R}K + \mathcal{Q}) \dot{x}(t). \quad (63)$$

Assim,

$$\dot{V}(x(t)) + 2\gamma V(x(t)) \leq 0, \quad \gamma > 0. \quad (64)$$

A prova do Teorema 2 está concluída.

6.6 REALIMENTAÇÃO DERIVATIVA PARA SISTEMAS INCERTOS

Considere o sistema linear incerto e invariante no tempo descrito como uma combinação convexa dos vértices do politopo:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i A_i x(t) + \sum_{j=1}^s \beta_j B_j u(t), \quad (65)$$

e

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, r, \quad \sum_{i=1}^r \alpha_i = 1 \\ \beta_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, s, \quad \sum_{j=1}^s \beta_j = 1 \end{array} \right\} \quad (66)$$

onde r e s são o número de vértices do politopo de A e B , respectivamente. Em (66), $\alpha_i, i = 1, 2, \dots, r$ e $\beta_j, j = 1, 2, \dots, s$, são números reais constantes e desconhecidos.

Substituindo $u(t)$ por (8), tem-se o sistema incerto em malha fechada:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i A_i x(t) - \sum_{j=1}^s \beta_j B_j K \dot{x}(t) \Leftrightarrow \dot{x}(t) = (I + \sum_{j=1}^s \beta_j B_j K)^{-1} \sum_{i=1}^r \alpha_i A_i x(t). \quad (67)$$

6.6.1 Condição de Estabilidade

Considerando a candidata à função de Lyapunov (2) e substituindo $\dot{x}(t)$ pelo sistema incerto em malha fechada (67), o Lema 4 propõe condições robustas suficientes para a estabilização do sistema incerto.

Lema 4 *O sistema (67) é estabilizável se existir uma matriz simétrica $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e uma matriz $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$ que satisfaçam as LMIs:*

$$XA_i^T + A_i X + B_j Y A_i^T + A_i Y^T B_j^T < 0, \quad \left. \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, r, \\ j = 1, 2, \dots, s, \end{array} \right\} \quad (68)$$

$$X > 0. \quad (69)$$

O ganho de realimentação da derivada dos estados pode ser dado por $K = YX^{-1}$.

Prova 6 *Vide (ASSUNÇÃO et al., 2007).*

6.6.2 Condição de Estabilidade com Restrição de Taxa de Decaimento

Considerando a candidata à função de Lyapunov (13) e substituindo $\dot{x}(t)$ pelo sistema incerto em malha fechada (67), o Lema 5 propõe condições robustas suficientes para a estabilização com restrição de taxa de decaimento do sistema incerto.

Lema 5 *Dado $\gamma > 0$, o sistema incerto (67) é estabilizável com restrição de taxa de decaimento se existir uma matriz simétrica $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e uma matriz $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$ que satisfaçam as LMIs:*

$$\left[\begin{array}{cc} XA_i^T + A_iX + B_jYA_i^T + A_iY^TB_j^T & X + B_jY \\ X + Y^TB_j^T & -X/(2\gamma) \end{array} \right] < 0, \quad \left. \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, r, \\ j = 1, 2, \dots, s, \end{array} \right\}, \quad (70)$$

$$X > 0. \quad (71)$$

O ganho de realimentação da derivada dos estados pode ser dado por $K = YX^{-1}$.

Prova 7 *Vide (ASSUNÇÃO et al., 2007).*

6.7 CONTROLADOR LQR-DERIVATIVO VIA LMIS PARA SISTEMAS INCERTOS

6.7.1 Condição de Estabilidade

Considerando a candidata à função de Lyapunov (2) e substituindo $\dot{x}(t)$ pelo sistema incerto em malha fechada (67), o Teorema 3 propõe condições robustas suficientes para a estabilização do sistema incerto.

Teorema 3 (LQR-Derivativo Robusto via LMIs) *Dado $\mathcal{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ e $x(0) \in \mathbb{R}^{n \times m}$, o sistema incerto (65) é estável e com desempenho otimizado se existir uma matriz simétrica $X > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e uma matriz $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$ que satisfaçam as LMIs:*

$$\begin{aligned} & \min \mu \\ & X = X^T > 0, Y \end{aligned}$$

Sujeito a

$$\begin{bmatrix} \mu & x(0)^T \\ x(0) & X \end{bmatrix} \geq 0, \quad (72)$$

$$\left. \begin{bmatrix} V_{i,j} & X & Y^T \\ X & -\mathcal{Q}^{-1} & 0 \\ Y & 0 & -\mathcal{R}^{-1} \end{bmatrix} < 0, \quad \left. \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, r, \\ j = 1, 2, \dots, s, \end{array} \right\}, \quad (73)$$

sendo $V_{i,j} = A_i^{-1}X + XA_i^{-T} + A_i^{-1}B_jY + Y^TB_j^TA_i^{-T}$. O ganho de realimentação da derivada dos estados pode ser dado por

$$K = YX^{-1}, \quad (74)$$

com $X^{-1} = P$.

Prova 8 De (66), considerando $V_{i,j}$ e multiplicando a esquerda por A_i e a direita por A_i^T , segue que

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^r \alpha_i \sum_{j=1}^s \beta_j [XA_i^T + A_iX + B_jYA_i^T + A_iY^TB_j^T] = \\ & = X \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i A_i^T \right) \left(\sum_{j=1}^s \beta_j \right) + \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i A_i \right) \left(\sum_{j=1}^s \beta_j \right) X + \\ & \quad + \left(\sum_{j=1}^s \beta_j B_j \right) Y \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i A_i^T \right) + \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i A_i \right) Y^T \left(\sum_{j=1}^s \beta_j B_j^T \right) = \\ & = X \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i A_i^T \right) + \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i A_i \right) X + \left(\sum_{j=1}^s \beta_j B_j \right) Y \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i A_i^T \right) + \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i A_i \right) Y^T \left(\sum_{j=1}^s \beta_j B_j^T \right) < 0. \end{aligned}$$

Logo, a condição (36) do Teorema 1 se mantém para o sistema incerto (65), onde $A = \alpha_1 A_1 + \dots + \alpha_r A_r$ e $B = \beta_1 B_1 + \dots + \beta_s B_s$. Agora, as condições (72) e (74) são equivalentes às condições (35) e (37). Finalmente, a partir do Teorema 1, a existência das matrizes $X = X^T$ e Y tal que (72) e (73) se mantêm é uma condição suficiente para a solução de (9).

6.7.2 Condição de Estabilidade com Restrição de Taxa de Decaimento

Considerando a candidata à função de Lyapunov (13) e substituindo $\dot{x}(t)$ pelo sistema incerto em malha fechada (67), o Teorema 4 propõe condições robustas suficientes para a estabilização do sistema incerto.

Teorema 4 (LQR-Derivativo Robusto via LMIs, γ) Dado $\mathcal{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $x(0) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $\gamma > 0$, o sistema incerto (65) é estável com restrição de taxa de decaimento e com desempenho otimizado se existir uma matriz simétrica $X > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e uma matriz $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$ que satisfaçam as LMIs:

$$\begin{aligned} \min \mu \\ X = X^T > 0, Y \end{aligned}$$

Sujeito a

$$\begin{bmatrix} \mu & x(0)^T \\ x(0) & X \end{bmatrix} \geq 0, \quad (75)$$

$$\left[\begin{array}{cccc} \Lambda_{i,j} & X & Y^T & XA_i^{-T} + Y^T B_j^T A_i^{-T} \\ X & -\mathcal{Q}^{-1} & 0 & 0 \\ Y & 0 & -\mathcal{R}^{-1} & 0 \\ A_i^{-1}X + A_i^{-1}B_jY & 0 & 0 & -X/(2\gamma) \end{array} \right] < 0, \quad \left. \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, r, \\ j = 1, 2, \dots, s, \end{array} \right\}, \quad (76)$$

sendo $\Lambda_{i,j} = A_i^{-1}X + XA_i^{-T} + A_i^{-1}B_jY + Y^T B_j^T A_i^{-T}$. O ganho de realimentação da derivada dos estados pode ser dado por

$$K = YX^{-1}, \quad (77)$$

com $X^{-1} = P$.

Prova 9 Segue passos similares a prova do Teorema 3, considerando as LMIs (75) e (76). As condições (75) e (77) são equivalente às condições (49) e (51).

6.8 ROBUSTEZ NAS MATRIZES DE PONDERAÇÃO

Considere agora, a existência de matrizes de ponderação para cada vértice do politopo. Assim, tem-se \mathcal{Q}_k e \mathcal{R}_k , com $k \in \mathbb{N} \mid k = 1, 2, \dots, l$, sendo l o número de vértices do politopo. Dessa forma, os Teoremas 5 e 6 apresentam condições robustas suficientes para a estabilização do sistema incerto (65).

6.8.1 Condição de Estabilidade

Teorema 5 (LQR-Derivativo Robusto via LMIs, $\mathcal{Q}_k, \mathcal{R}_k$) Dado $\mathcal{Q}_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathcal{R}_k \in \mathbb{R}^{m \times m}$ e $x(0) \in \mathbb{R}^{n \times m}$, o sistema incerto (65) é estável e com desempenho otimizado se existir uma matriz simétrica $X > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e uma matriz $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$ que satisfaçam as LMIs:

$$\begin{aligned} \min \mu \\ X = X^T > 0, Y \end{aligned}$$

Sujeito a

$$\begin{bmatrix} \mu & x(0)^T \\ x(0) & X \end{bmatrix} \geq 0, \quad (78)$$

$$\left. \begin{bmatrix} V_{i,j} & X & Y^T \\ X & -\mathcal{Q}_k^{-1} & 0 \\ Y & 0 & -\mathcal{R}_k^{-1} \end{bmatrix} < 0, \right\} \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, r, \\ j = 1, 2, \dots, s, \\ k = 1, 2, \dots, l, \end{array} \quad (79)$$

sendo $V_{i,j} = A_i^{-1}X + XA_i^{-T} + A_i^{-1}B_jY + Y^TB_j^T A_i^{-T}$. O ganho de realimentação da derivada dos estados pode ser dado por

$$K = YX^{-1}, \quad (80)$$

com $X^{-1} = P$.

Prova 10 Equivalente à prova do Teorema 3, considerando as LMIs (78) e (79).

6.8.2 Condição de Estabilidade com Restrição de Taxa de Decaimento

Teorema 6 (LQR-Derivativo Robusto via LMIs, γ , \mathcal{Q}_k , \mathcal{R}_k) Dado $\mathcal{Q}_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathcal{R}_k \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $x(0) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $\gamma > 0$, o sistema incerto (65) é estável com restrição de taxa de decaimento e com desempenho otimizado se existir uma matriz simétrica $X > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e uma matriz $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$ que satisfaçam as LMIs:

$$\begin{aligned} \min \mu \\ X = X^T > 0, Y \end{aligned}$$

Sujeito a

$$\begin{bmatrix} \mu & x(0)^T \\ x(0) & X \end{bmatrix} \geq 0, \quad (81)$$

$$\left[\begin{array}{cccc} \Lambda_{i,j} & X & Y^T & XA_i^{-T} + Y^T B_j^T A_i^{-T} \\ X & -\mathcal{Q}_k^{-1} & 0 & 0 \\ Y & 0 & -\mathcal{R}_k^{-1} & 0 \\ A_i^{-1}X + A_i^{-1}B_jY & 0 & 0 & -X/(2\gamma) \end{array} \right] < 0, \quad \left. \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, r, \\ j = 1, 2, \dots, s, \\ k = 1, 2, \dots, l, \end{array} \right\} \quad (82)$$

sendo $\Lambda_{i,j} = A_i^{-1}X + XA_i^{-T} + A_i^{-1}B_jY + Y^T B_j^T A_i^{-T}$. O ganho de realimentação da derivada dos estados pode ser dado por

$$K = YX^{-1}, \quad (83)$$

com $X^{-1} = P$.

Prova 11 Equivalente à prova do Teorema 4, considerando as LMIs (81) e (82).

6.9 ALGORITMO GENÉTICO

Computação bioinspirada compreende mecanismos de processamento de informação fundamentados em estratégias empregadas por organismos vivos para se adaptarem a mudanças do meio, tomarem decisões na presença de incertezas e aprenderem com a experiência

(AGUIRRE et al., 2007).

Dentro da computação bioinspirada está presente a computação evolutiva. Como o próprio nome já diz, é uma parte especial da computação inspirada no processo de evolução natural (EIBEN; SMITH, 2003).

Fundamentalmente, a evolução baseia-se em três métodos: geração de informação de genética nova, avaliação e seleção (AGUIRRE et al., 2007). A seleção natural favorece os indivíduos mais eficazes na busca por recursos, em outras palavras, aqueles indivíduos que melhor se adaptam ao ambiente em que vivem (EIBEN; SMITH, 2003). Durante o processo de evolução, as mudanças que favorecem esses indivíduos permanecem, caracterizando o processo de evolução a partir dos antigos indivíduos (KONAK et al., 2006).

Nesse contexto, GAs são um ramo da computação evolutiva, podendo ser definidos como uma técnica de busca baseada numa metáfora do processo biológico de evolução natural (LINDEN, 2012). O funcionamento de um GA é visto no fluxograma da Figura 2. Maiores informações sobre o funcionamento de GAs podem ser vistas em (KONAK et al., 2006).

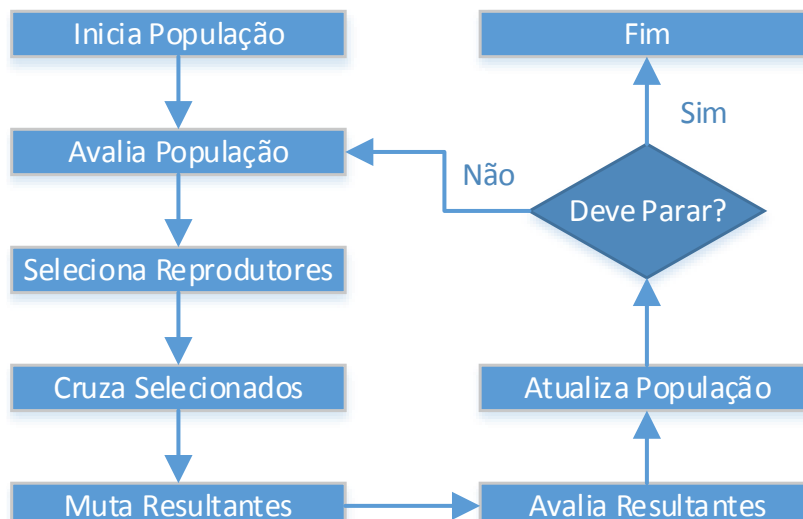


Figura 2: Fluxograma de funcionamento de um algoritmo genético.
Fonte: Autoria Própria.

Como o GA é uma técnica heurística de otimização baseada numa metáfora do processo biológico de evolução natural, é necessário definir uma função objetivo para ser otimizada (minimizada ou maximizada) (LINDEN, 2012).

6.9.1 Função Objetivo

Neste trabalho, a função objetivo a ser minimizada é definida pela integral do erro absoluto entre a entrada e saída do sistema, $e(t)$, vezes o tempo, t :

$$ITAE = \int_0^{T_s} t|e(t)|dt. \quad (84)$$

Esta função objetivo é conhecida como índice de desempenho *ITAE* (do inglês, *Integral of Time-weight Absolute Error*). O índice de desempenho *ITAE* fornece a melhor seletividade dos índices de desempenho, isto é, o valor mínimo da integral é prontamente discernível à medida que os parâmetros dos sistema são variados (DORF; BISHOP, 2012). A Figura 3 mostra um exemplo de como a minimização do índice *ITAE* influencia na resposta do sistema. O erro é a somatória das áreas hachuradas ao longo do tempo.

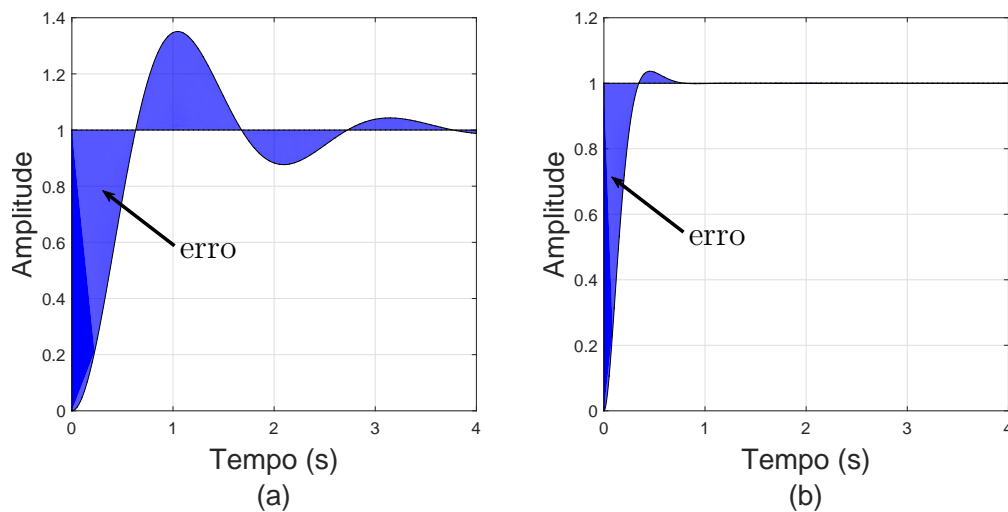


Figura 3: (a) Resposta ao degrau com índice *ITAE* elevado; (b) Resposta ao degrau com índice *ITAE* minimizado.

Fonte: Autoria Própria.

Nota-se pela Figura 3a que a resposta do sistema a uma entrada degrau possui um erro elevado. Considerando a minimização do índice de desempenho *ITAE*, é possível diminuir este erro conforme minimiza-se o índice, o que pode ser visto na Figura 3b.

7 EXEMPLO ILUSTRATIVO

Considere o sistema mecânico de isolamento de vibração, mostrado na Figura 4. A dinâmica do sistema, assumindo o ângulo φ pequeno, pode ser descrito na forma de espaço de estados usando o vetor de estados $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ \dot{x}_1(t) \ \dot{x}_2(t)]^T$ como:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k_1 c_1 & -k_2 c_2 & -b_1 c_1 & -b_2 c_2 \\ -k_1 c_2 & -k_2 c_1 & -b_1 c_2 & -b_2 c_1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ c_1 & c_2 \\ c_2 & c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad (85)$$

onde $c_1 = 1/m + L^2/I$, $c_2 = 1/m - L^2/I$, $x_3 = 0,5(x_1 + x_2)$ e $\varphi = 0,5(x_1 + x_2)/L$, m e I representam a massa e o momento de inércia, k_1 e k_2 são as constantes da mola, b_1 e b_2 são as constantes dos amortecedores, x_1 e x_2 representam o deslocamento de massa em ambos os lados, x_3 é o deslocamento vertical do centro de massa, φ é o ângulo de inclinação da massa com a horizontal, $2L$ é a distância entre os dois pontos de suporte, e u_1 e u_2 são as entradas de controle.

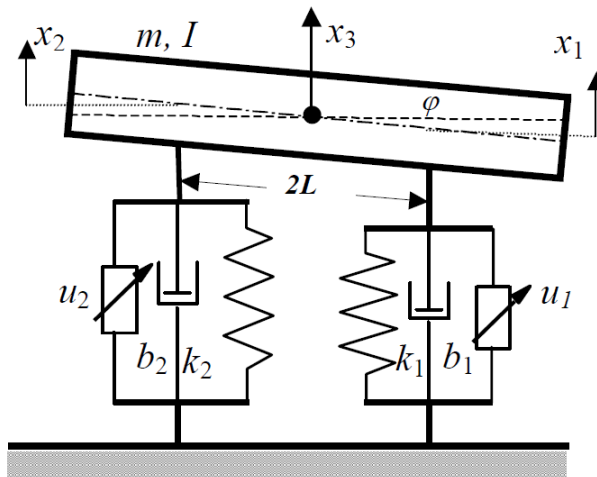


Figura 4: Exemplo de isolamento de vibração.
Fonte: (ABDELAZIZ; VALÁŠEK, 2005).

Os parâmetros do modelo são dados como $m = 10 \text{ kg}$, $I = 1 \text{ kg.m}^2$, $L = 1 \text{ m}$, $k_1 = 500 \text{ N/m}$, $k_2 = 700 \text{ N/m}$, $b_1 = 10 \text{ N.s/m}$ e $b_2 = 20 \text{ N.s/m}$ (ABDELAZIZ; VALÁŠEK, 2005).

Considerando que pode-se adicionar uma carga ao sistema, a massa total (m) será a soma da massa da estrutura mais a massa da carga, a qual possui um valor igual a 10 kg. Dessa forma, a massa m pode ser considerada uma incerteza do sistema, já que pode assumir valores entre 10 kg (massa da estrutura) e 20 kg (massa da estrutura mais a carga). Isso significa que a massa m pode pertencer ao intervalo $10 \leq m \leq 20$ (kg).

Ainda, além de considerar a massa do sistema incerta, considerou-se a ocorrência de uma eventual falha em cada amortecedor, b_1 e b_2 . Assim, caso ocorram as falhas, implicará em $b_1 = b_2 = 0$, neste caso b_1 e b_2 são incertos e pertencentes aos intervalos $0 \leq b_1 \leq 10$ (N.s/m) e $0 \leq b_2 \leq 20$ (N.s/m), respectivamente.

Para a resolução das LMIs foi utilizado o software MatLab[®], juntamente com o solver "SeDuMi"[®] (STURM, 1999). As matrizes de ponderação, \mathcal{Q} e \mathcal{R} , foram obtidas por meio do GA, minimizando o critério de desempenho *ITAE*. Para a realização das simulações foi utilizada a função *ODE45* do software MatLab[®], considerando a condição inicial $x(0) = [-0,01 \ 0,02 \ -0,02 \ 0,01]^T$, que é a mesma condição inicial usada nas LMIs (35), (49), (72), (75), (78) e (81).

7.1 CONDIÇÃO DE ESTABILIDADE

Após a execução do GA, as matrizes de ponderação que obtiveram o melhor critério de desempenho foram:

$$\mathcal{Q} = \begin{bmatrix} 451,9514 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 451,9647 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 101,9989 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 101,4929 \end{bmatrix}, \quad (86)$$

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 5,9053 & 0 \\ 0 & 2,9021 \end{bmatrix}. \quad (87)$$

Então, por meio das matrizes de ponderação, (86) e (87), e das LMIs (35) e (36), projetou-se o seguinte controlador:

$$K = \begin{bmatrix} 51,1608 & -5,0043 & 2,9920 & -1,1689 \\ -7,2733 & 68,5775 & -0,6316 & 4,8394 \end{bmatrix}, \quad (88)$$

o qual garante que as condições de projeto do controlador LQR-derivativo do Teorema 1 sejam atendidas.

Nas Figuras 5 e 6 são mostrados os estados e a derivada dos estados do sistema considerando o controlador (88). A Figura 7 mostra os sinais de controle do sistema de isolamento de vibração.

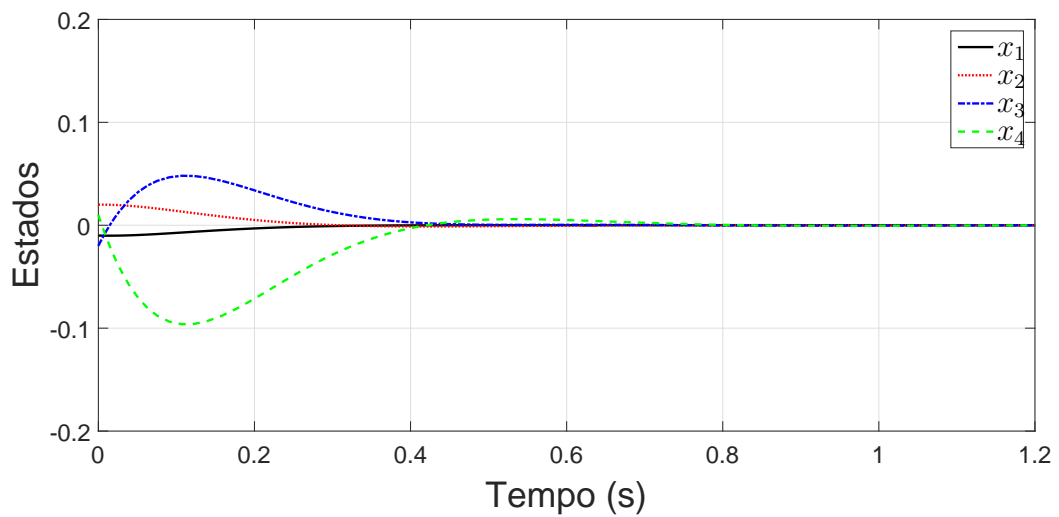


Figura 5: Estados do sistema para o Teorema 1.

Fonte: Autoria própria.

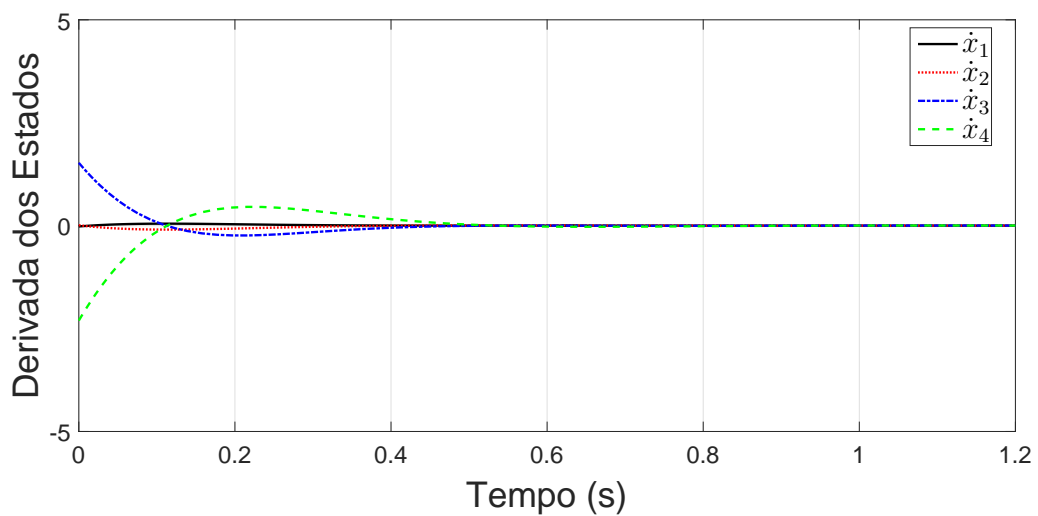


Figura 6: Derivada dos estados para o Teorema 1.

Fonte: Autoria própria.

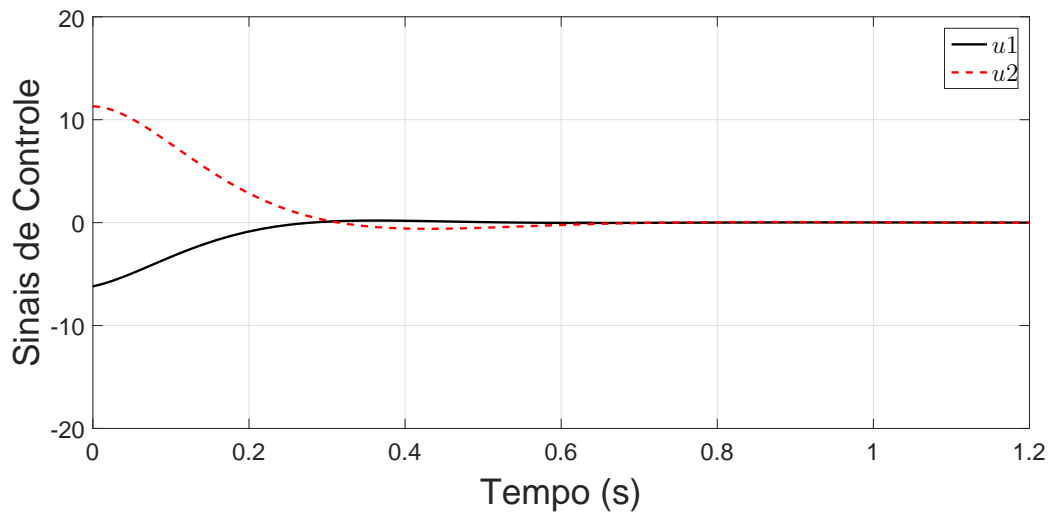


Figura 7: Sinais de controle para o Teorema 1.

Fonte: Autoria própria.

Considerando as mesmas matrizes de ponderação, (86) e (87), e as LMIs (72) e (73), projetou-se o seguinte controlador robusto:

$$K_R = \begin{bmatrix} 63,6964 & -3,6194 & 3,1527 & -1,1338 \\ -5,2603 & 88,7509 & -0,4888 & 4,9657 \end{bmatrix}, \quad (89)$$

o qual garante que as condições de projeto do controlador LQR-derivativo do Teorema 3 sejam atendidas.

Nas Figuras 8 e 9 são mostrados os estados e a derivada dos estados do sistema na ocorrência de falhas, levando em conta o controlador robusto (89). Contudo, nas Figuras 8(a) e 9(a) considera-se apenas a massa da estrutura, ou seja, $m = 10$ kg. Já para as Figuras 8(b) e 9(b), levou-se em conta a massa da estrutura mais a massa da carga, ou seja, $m = 20$ kg. A Figura 10 mostra os sinais de controle para ambas as situações, sendo a Figura 10(a) para $m = 10$ kg e a Figura 10(b) para $m = 20$ kg.

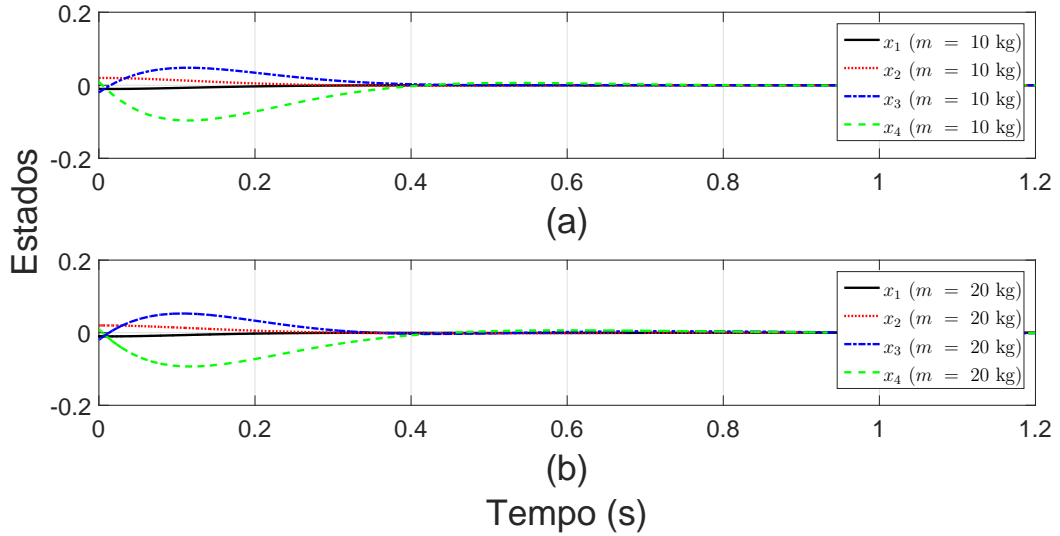


Figura 8: (a) Comportamento dos estados considerando a falha em cada um dos amortecedores b_1 e b_2 , com massa $m = 10$ kg; (b) Comportamento dos estados considerando a falha em cada um dos amortecedores b_1 e b_2 , com massa $m = 20$ kg.

Fonte: Autoria própria.

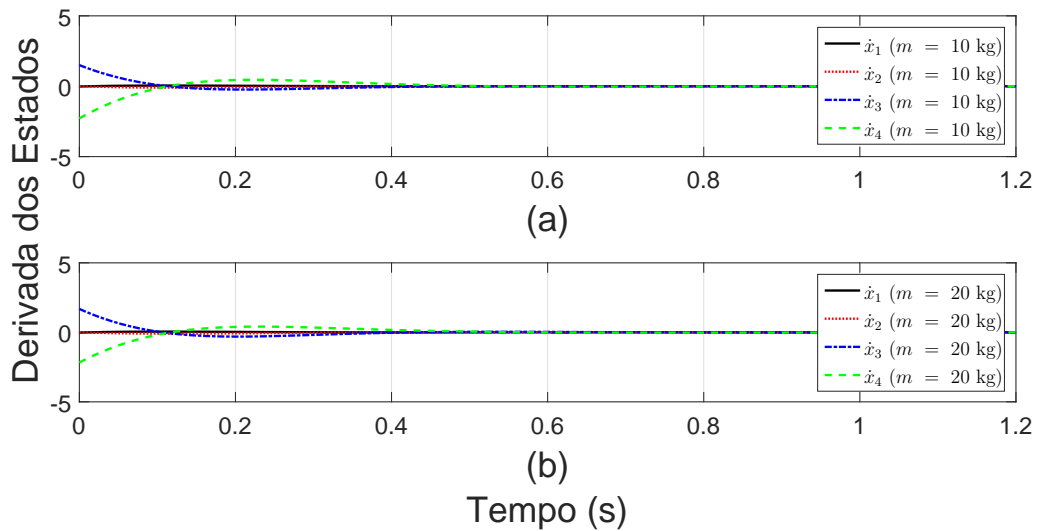


Figura 9: (a) Comportamento da derivada dos estados considerando a falha em cada um dos amortecedores b_1 e b_2 , com massa $m = 10$ kg; (b) Comportamento da derivada dos estados considerando a falha em cada um dos amortecedores b_1 e b_2 , com massa $m = 20$ kg.

Fonte: Autoria própria.

Agora, considerando o Teorema 5, para encontrar um controlador robusto que atenda as condições de projeto, além do fato de existir uma matriz \mathcal{L} e \mathcal{R} para cada vértice do politopo, foram obtidas novas matrizes de ponderação por meio do GA.

Dessa forma, após a execução do GA, as matrizes de ponderação que obtiveram o melhor critério de desempenho foram:

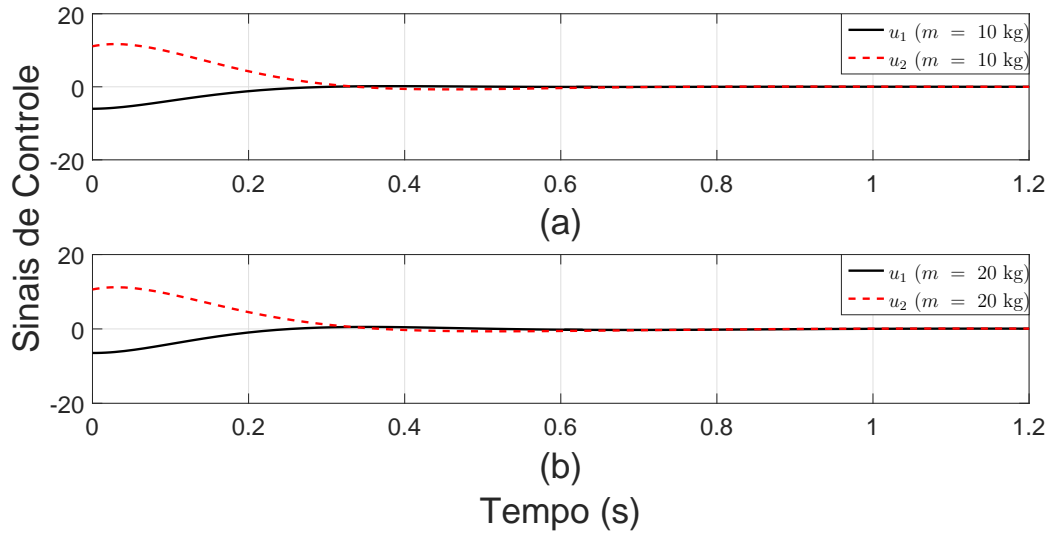


Figura 10: (a) Sinais de controle considerando a falha em cada um dos amortecedores b_1 e b_2 , com massa $m = 10$ kg; (b) Sinais de controle considerando a falha em cada um dos amortecedores b_1 e b_2 , com massa $m = 20$ kg.

Fonte: Autoria própria.

$$\mathcal{Q}_1 = \begin{bmatrix} 507,9126 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 483,3359 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 129,1088 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 133,2900 \end{bmatrix}, \quad (90)$$

$$\mathcal{Q}_2 = \begin{bmatrix} 526,2356 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 498,3387 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 129,7271 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 115,5053 \end{bmatrix}, \quad (91)$$

$$\mathcal{Q}_3 = \begin{bmatrix} 494,4525 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 476,1726 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 136,7403 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 135,042 \end{bmatrix}, \quad (92)$$

$$\mathcal{Q}_4 = \begin{bmatrix} 489,1421 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 514,9296 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 120,5596 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 136,3586 \end{bmatrix}, \quad (93)$$

$$\mathcal{Q}_5 = \begin{bmatrix} 468,9319 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 494,4293 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 125,0390 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 111,5202 \end{bmatrix}, \quad (94)$$

$$\mathcal{Q}_6 = \begin{bmatrix} 488,0850 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 475,2484 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 119,9351 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 122,8719 \end{bmatrix}, \quad (95)$$

$$\mathcal{Q}_7 = \begin{bmatrix} 494,0275 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 491,5418 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 110,4671 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 125,6781 \end{bmatrix}, \quad (96)$$

$$\mathcal{Q}_8 = \begin{bmatrix} 495,9037 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 497,8958 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 114,4910 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 106,5773 \end{bmatrix}, \quad (97)$$

$$\mathcal{R}_1 = \begin{bmatrix} 6,6421 & 0 \\ 0 & 3,1287 \end{bmatrix}, \quad (98) \quad \mathcal{R}_5 = \begin{bmatrix} 7,3795 & 0 \\ 0 & 6,8270 \end{bmatrix}, \quad (102)$$

$$\mathcal{R}_2 = \begin{bmatrix} 6,7493 & 0 \\ 0 & 5,8629 \end{bmatrix}, \quad (99) \quad \mathcal{R}_6 = \begin{bmatrix} 7,8560 & 0 \\ 0 & 5,8883 \end{bmatrix}, \quad (103)$$

$$\mathcal{R}_3 = \begin{bmatrix} 6,6612 & 0 \\ 0 & 6,9009 \end{bmatrix}, \quad (100) \quad \mathcal{R}_7 = \begin{bmatrix} 8,0235 & 0 \\ 0 & 5,5435 \end{bmatrix}, \quad (104)$$

$$\mathcal{R}_4 = \begin{bmatrix} 7,9745 & 0 \\ 0 & 3,7092 \end{bmatrix}, \quad (101) \quad \mathcal{R}_8 = \begin{bmatrix} 7,8849 & 0 \\ 0 & 6,5456 \end{bmatrix}, \quad (105)$$

sendo o controlador projetado:

$$K_R = \begin{bmatrix} 66,5637 & -3,0864 & 3,4349 & -1,1450 \\ -4,6797 & 94,3467 & -0,4736 & 5,5984 \end{bmatrix}. \quad (106)$$

Nas Figuras 11 e 12 são mostrados dos estados e a derivada dos estados do sistema na ocorrência de falhas, levando em conta o controlador robusto (106). Contudo, nas Figuras 11(a) e 12(a) considera-se apenas a massa da estrutura, ou seja, $m = 10$ kg. Já para as Figuras 11(b) e 12(b), levou-se em conta a massa da estrutura mais a massa da carga, ou seja, $m = 20$ kg. A Figura 13 mostra os sinais de controle para ambas as situações, sendo a Figura 13(a) para $m = 10$ kg e a Figura 13(b) para $m = 20$ kg.

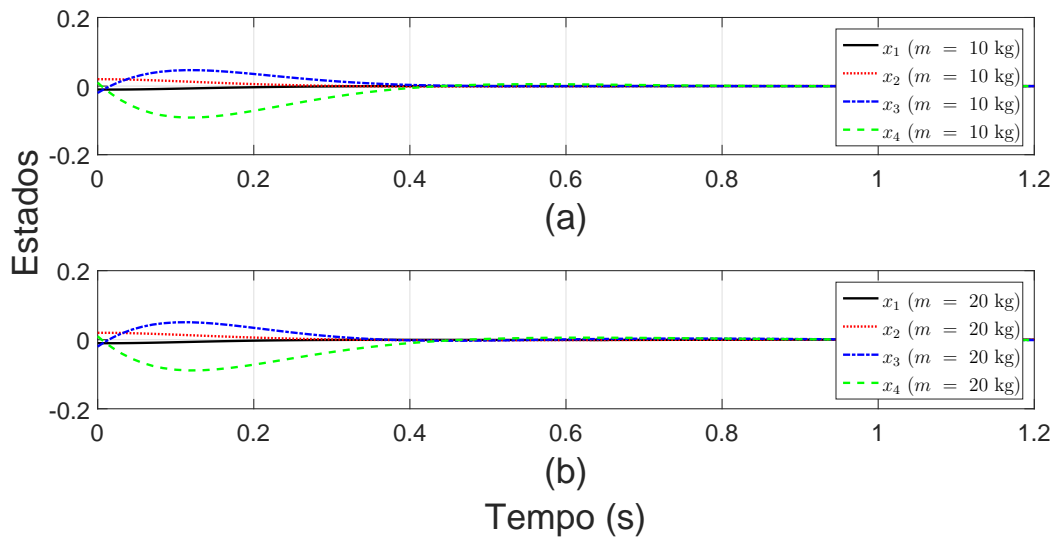


Figura 11: (a) Comportamento dos estados considerando a falha em cada um dos amortecedores b_1 e b_2 , com massa $m = 10$ kg; (b) Comportamento dos estados considerando a falha em cada um dos amortecedores b_1 e b_2 , com massa $m = 20$ kg.
Fonte: Autoria própria.

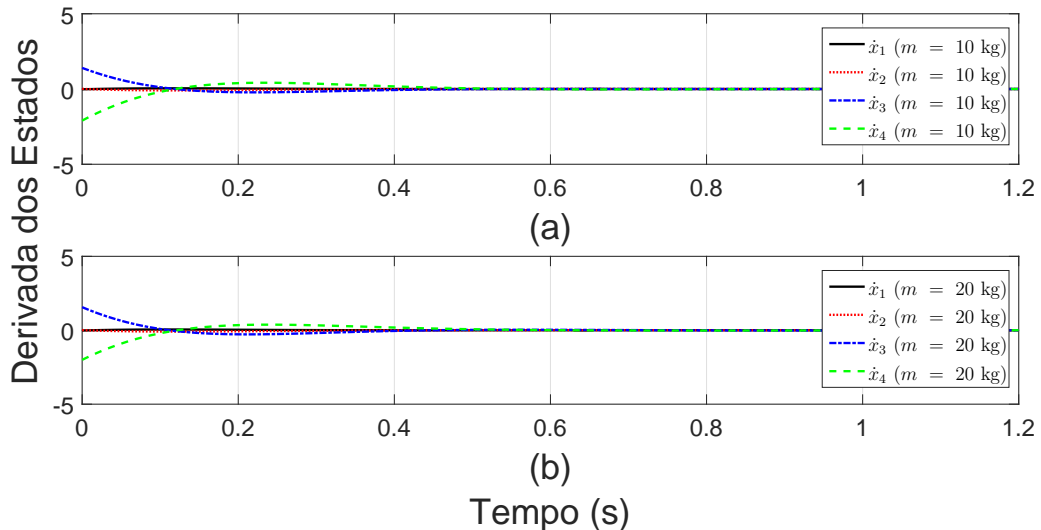


Figura 12: (a) Comportamento da derivada dos estados considerando a falha em cada um dos amortecedores b_1 e b_2 , com massa $m = 10$ kg; (b) Comportamento da derivada dos estados considerando a falha em cada um dos amortecedores b_1 e b_2 , com massa $m = 20$ kg. Fonte: Autoria própria.

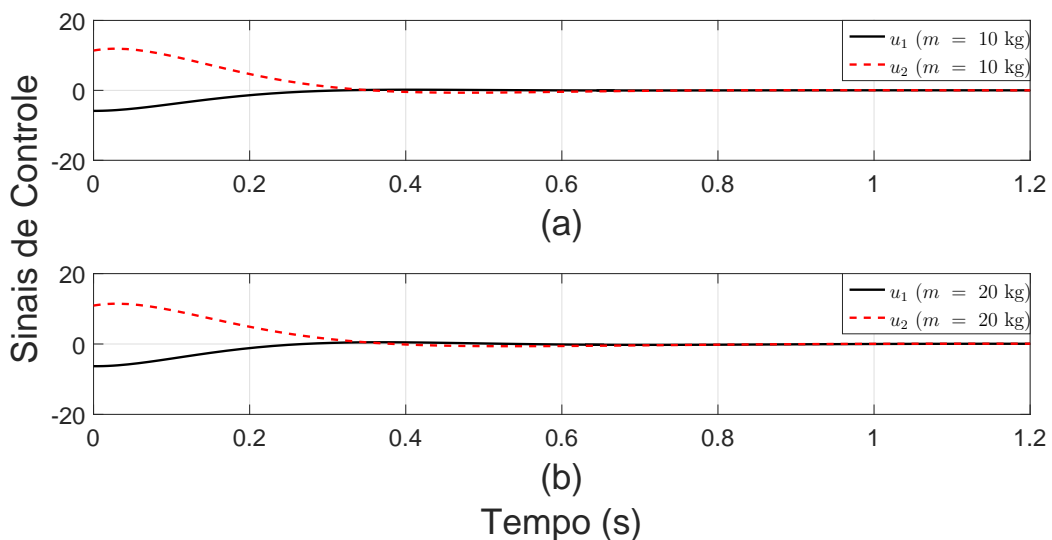


Figura 13: (a) Sinais de controle considerando a falha em cada um dos amortecedores b_1 e b_2 , com massa $m = 10$ kg; (b) Sinais de controle considerando a falha em cada um dos amortecedores b_1 e b_2 , com massa $m = 20$ kg. Fonte: Autoria própria.

Observe que o controlador LQR-derivativo se mostrou eficiente, uma vez que estabilizou o sistema em um curto período de tempo, inclusive na ocorrência de falhas. Note que a amplitude das derivadas dos estados e dos sinais de controle não são elevadas, devido ao fato da escolha adequada das matrizes de ponderação do problema LQR-derivativo.

Analisando agora os resultados dos Teoremas 3 (Figuras 8, 9 e 10) e 5 (Figuras 11, 12 e 13), nota-se que adicionar uma matriz \mathcal{Q} e uma matriz \mathcal{R} para cada vértice do politopo

não alterou significativamente a resposta do sistema, sendo os resultados bem semelhantes para ambos os teoremas.

7.2 CONDIÇÃO DE ESTABILIDADE COM RESTRIÇÃO DE TAXA DE DECAIMENTO

Após a execução do GA, as matrizes de ponderação e o parâmetro γ que obtiveram o melhor critério de desempenho foram:

$$\mathcal{Q} = \begin{bmatrix} 9498 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 19,8117 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1499,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 901,0048 \end{bmatrix}, \quad (107)$$

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 0,9 & 0 \\ 0 & 0,9 \end{bmatrix}, \quad (108)$$

$$\gamma = 6,0001. \quad (109)$$

Então, por meio das matrizes de ponderação, (107) e (108), do parâmetro γ e das LMIs (49) e (50), projetou-se o seguinte controlador:

$$K = \begin{bmatrix} 71,0469 & -0,0846 & 0,5610 & -2,2535 \\ 0,1495 & 92,8469 & -2,2163 & 1,8936 \end{bmatrix}, \quad (110)$$

o qual garante que as condições de projeto do controlador LQR-derivativo do Teorema 2 sejam atendidas.

Nas Figuras 14 e 15 são mostrados os estados e a derivada dos estados do sistema considerando o controlador (110). A Figura 16 mostra os sinais de controle do sistema de isolamento de vibração. Já na Figura 17 é possível ver a região de restrição dos polos do sistema.

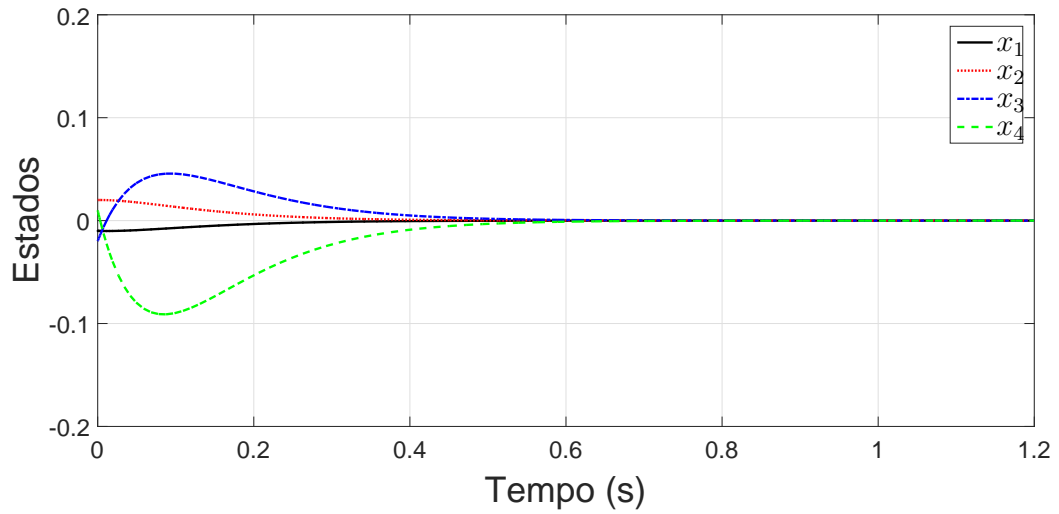


Figura 14: Estados do sistema para o Teorema 2.
Fonte: Autoria própria.

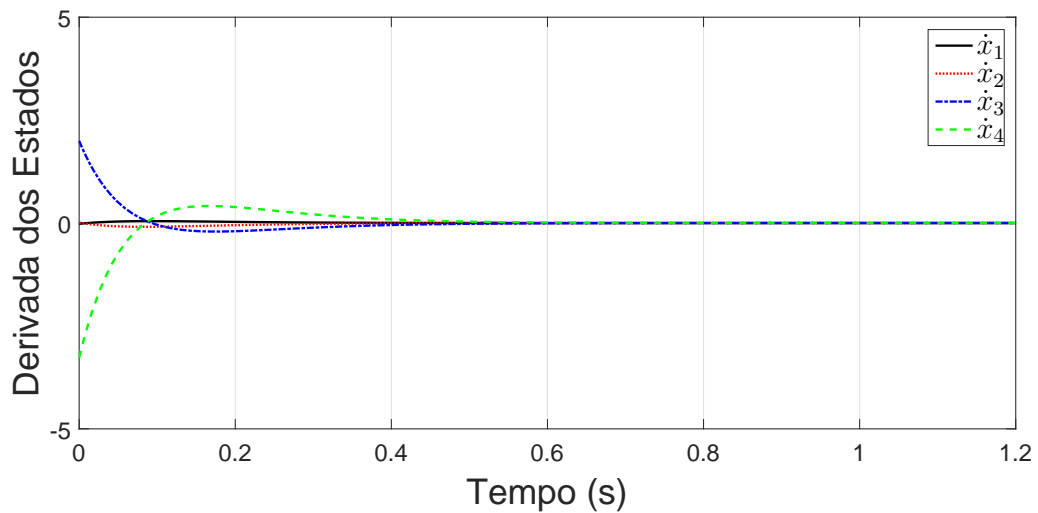


Figura 15: Derivada dos estados para o Teorema 2.
Fonte: Autoria própria.

Considerando as mesmas matrizes de ponderação, (107) e (108), o parâmetro γ , (109), e as LMIs (75) e (76), projetou-se o seguinte controlador robusto:

$$K_R = \begin{bmatrix} 72,5689 & 2,4427 & -1,0011 & -3,3211 \\ 3,4892 & 97,5343 & -3,2222 & 0,1437 \end{bmatrix}, \quad (111)$$

o qual garante que as condições de projeto do controlador LQR-derivativo do Teorema 4 sejam atendidas.

Nas Figuras 18 e 19 são mostrados os estados e a derivada dos estados do sistema na

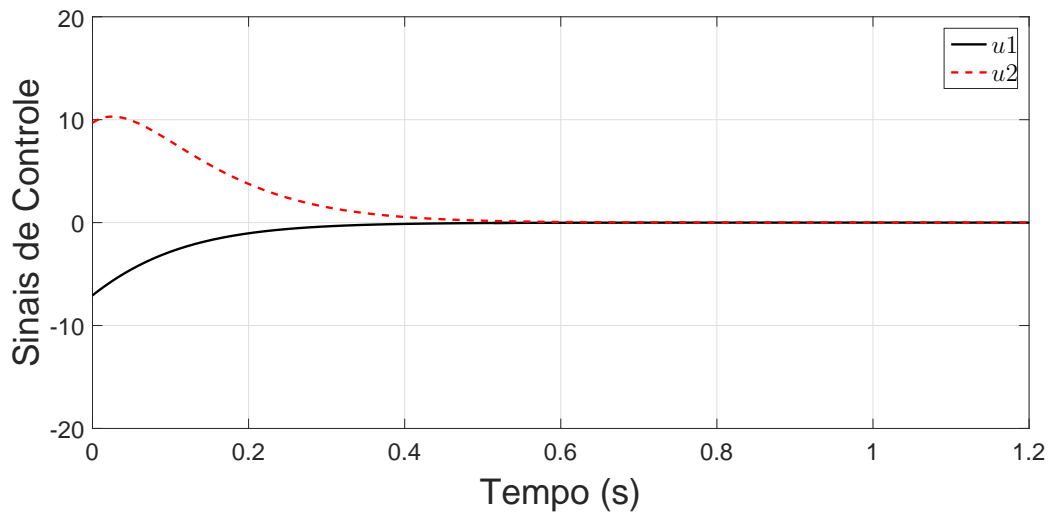


Figura 16: Sinais de controle para o Teorema 2.
Fonte: Autoria própria.

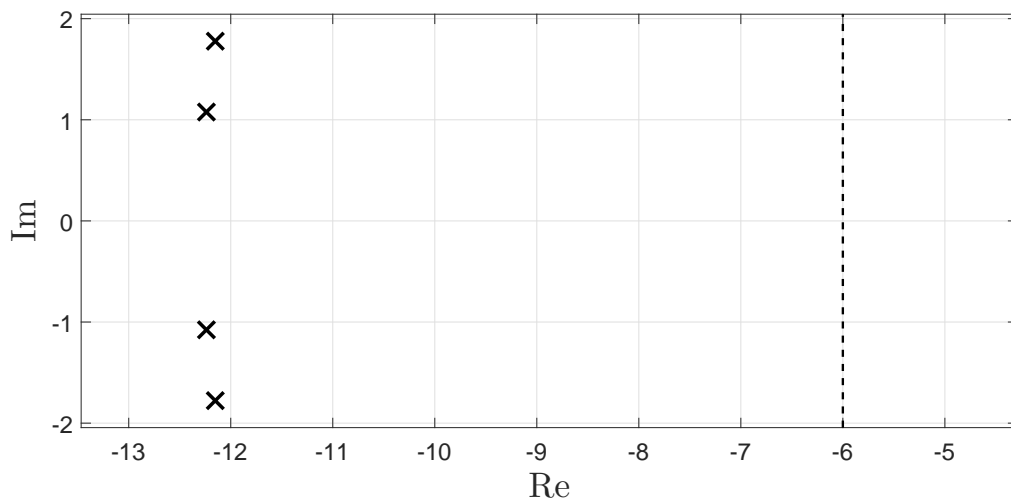


Figura 17: Região de restrição dos polos do sistema para o Teorema 2.
Fonte: Autoria própria.

ocorrência de falhas, levando em conta o controlador robusto (111). Contudo, nas Figuras 18(a) e 19(a) considera-se apenas a massa da estrutura, ou seja, $m = 10$ kg. Já para as Figuras 18(b) e 19(b), levou-se em conta a massa da estrutura mais a massa da carga, ou seja, $m = 20$ kg. A Figura 20 mostra os sinais de controle para ambas as situações, sendo a Figura 20(a) para $m = 10$ kg e a Figura 20(b) para $m = 20$ kg. Já na Figura 21 é possível ver a região de restrição dos polos do sistema incerto, considerando todos os vértices do politopo.

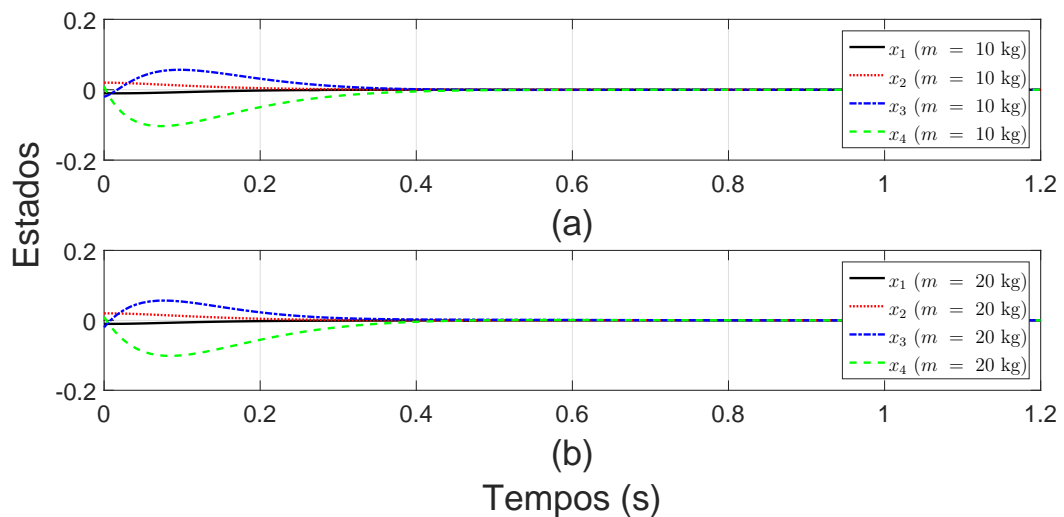


Figura 18: (a) Comportamento dos estados considerando a falha em cada um dos amortecedores b_1 e b_2 , com massa $m = 10$ kg; (b) Comportamento dos estados considerando a falha em cada um dos amortecedores b_1 e b_2 , com massa $m = 20$ kg.
Fonte: Autoria própria.

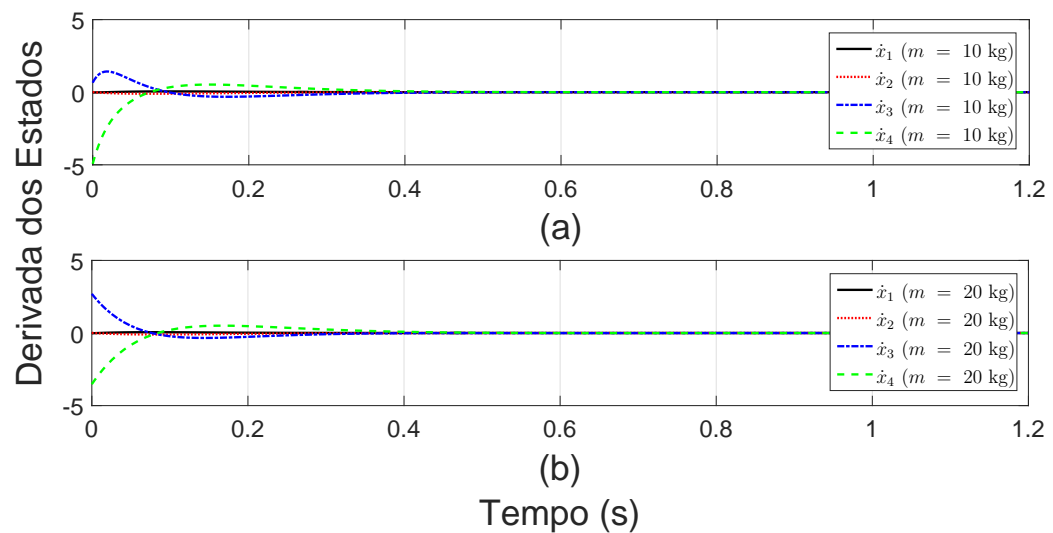


Figura 19: (a) Comportamento da derivada dos estados considerando a falha em cada um dos amortecedores b_1 e b_2 , com massa $m = 10$ kg; (b) Comportamento da derivada dos estados considerando a falha em cada um dos amortecedores b_1 e b_2 , com massa $m = 20$ kg.
Fonte: Autoria própria.

Agora, levando em conta o Teorema 6, para encontrar um controlador robusto que atenda as condições de projeto, além do fato de existir uma matriz \mathcal{L} e \mathcal{R} para cada vértice do politopo, foram obtidas novas matrizes de ponderação por meio do GA.

Dessa forma, após a execução do GA, as matrizes de ponderação que obtiveram o melhor critério de desempenho foram:

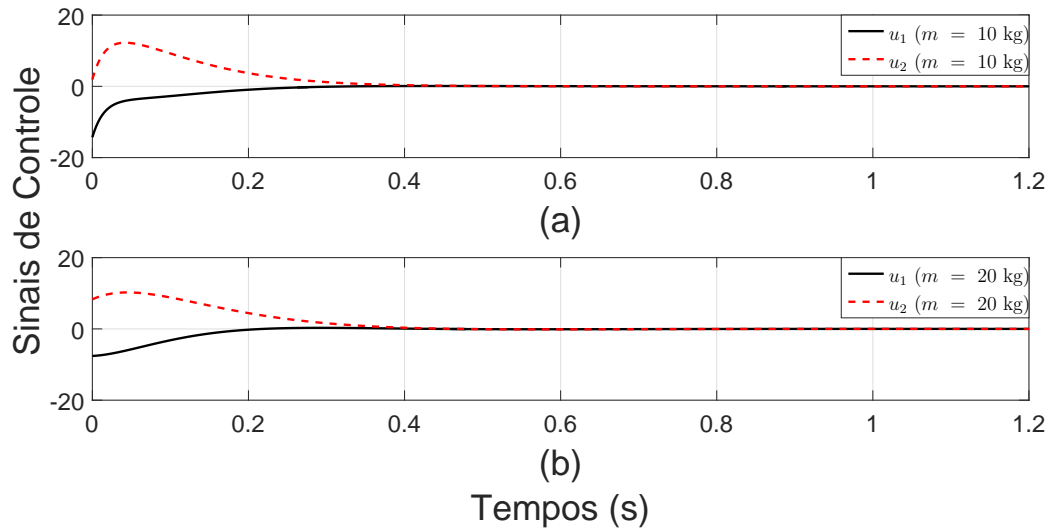


Figura 20: (a) Sinais de controle considerando a falha em cada um dos amortecedores b_1 e b_2 , com massa $m = 10$ kg; (b) Sinais de controle considerando a falha em cada um dos amortecedores b_1 e b_2 , com massa $m = 20$ kg.

Fonte: Autoria própria.

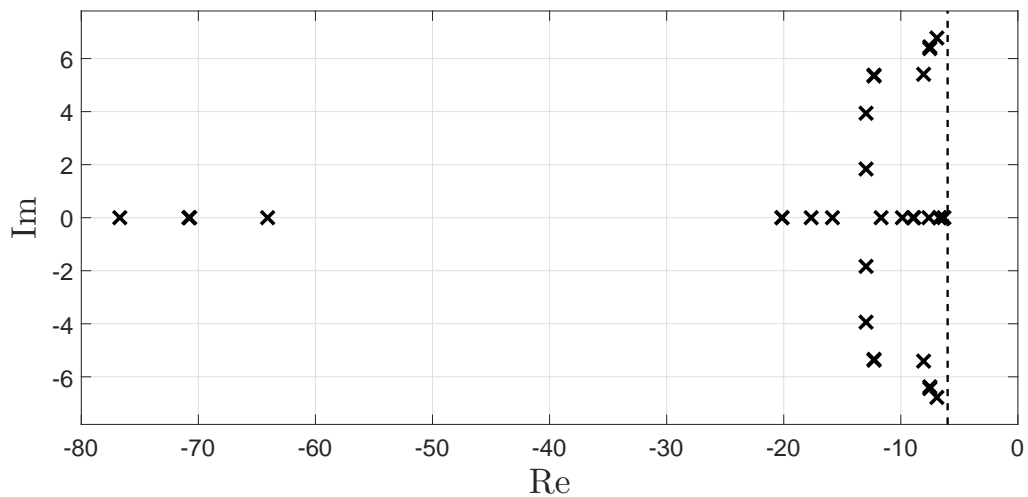


Figura 21: Região de restrição dos polos do sistema incerto para o Teorema 4.

Fonte: Autoria própria.

$$\mathcal{Q}_1 = \begin{bmatrix} 8530 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4,1530 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 753,9146 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2498,3574 \end{bmatrix}, \quad (112)$$

$$\mathcal{Q}_2 = \begin{bmatrix} 7561,2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5,2125 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 781,1584 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 372,3861 \end{bmatrix}, \quad (113)$$

$$\mathcal{Q}_3 = \begin{bmatrix} 7508,8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4,6481 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 836,8409 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 147,1100 \end{bmatrix}, \quad (114)$$

$$\mathcal{Q}_4 = \begin{bmatrix} 7663 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7,4542 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 768,9330 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 253,5418 \end{bmatrix}, \quad (115)$$

$$\mathcal{Q}_5 = \begin{bmatrix} 7622,8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6,5094 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 756,2597 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 534,9870 \end{bmatrix}, \quad (116)$$

$$\mathcal{Q}_6 = \begin{bmatrix} 7731,7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6,7545 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 816,5146 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 202,2863 \end{bmatrix}, \quad (117)$$

$$\mathcal{Q}_7 = \begin{bmatrix} 7542,3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5,5654 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 826,1680 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 265,4327 \end{bmatrix}, \quad (118)$$

$$\mathcal{Q}_8 = \begin{bmatrix} 7603,8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5,1558 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 805,1675 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 233,7095 \end{bmatrix}, \quad (119)$$

$$\mathcal{R}_1 = \begin{bmatrix} 1,9634 & 0 \\ 0 & 4,0279 \end{bmatrix}, \quad (120)$$

$$\mathcal{R}_2 = \begin{bmatrix} 0,5869 & 0 \\ 0 & 0,8829 \end{bmatrix}, \quad (121)$$

$$\mathcal{R}_3 = \begin{bmatrix} 0,5621 & 0 \\ 0 & 0,8495 \end{bmatrix}, \quad (122)$$

$$\mathcal{R}_4 = \begin{bmatrix} 0,6246 & 0 \\ 0 & 0,8987 \end{bmatrix}, \quad (123)$$

$$\mathcal{R}_5 = \begin{bmatrix} 0,9183 & 0 \\ 0 & 1,2098 \end{bmatrix}, \quad (124)$$

$$\mathcal{R}_6 = \begin{bmatrix} 1,0941 & 0 \\ 0 & 1,2820 \end{bmatrix}, \quad (125)$$

$$\mathcal{R}_7 = \begin{bmatrix} 1,2566 & 0 \\ 0 & 1,7008 \end{bmatrix}, \quad (126)$$

$$\mathcal{R}_8 = \begin{bmatrix} 0,6336 & 0 \\ 0 & 0,9482 \end{bmatrix}, \quad (127)$$

$$\gamma = 6,2165, \quad (128)$$

sendo o controlador projetado:

$$K_R = \begin{bmatrix} 70,9007 & 1,6202 & -1,2646 & -2,9827 \\ 0,5933 & 97,5114 & -3,4207 & 0,0120 \end{bmatrix}. \quad (129)$$

Nas Figuras 22 e 23 são mostrados dos estados e a derivada dos estados do sistema na ocorrência de falhas, levando em conta o controlador robusto (129). Contudo, nas Figuras 22(a) e 23(a) considera-se apenas a massa da estrutura, ou seja, $m = 10$ kg. Já para as Figuras 22(b) e 23(b), levou-se em conta a massa da estrutura mais a massa da carga, ou seja, $m = 20$ kg. A Figura 24 mostra os sinais de controle para ambas as situações, sendo a Figura 24(a) para $m = 10$ kg e a Figura 24(b) para $m = 20$ kg. Já na Figura 25 é possível ver a região de restrição dos polos do sistema incerto, considerando todos os vértices do politopo.

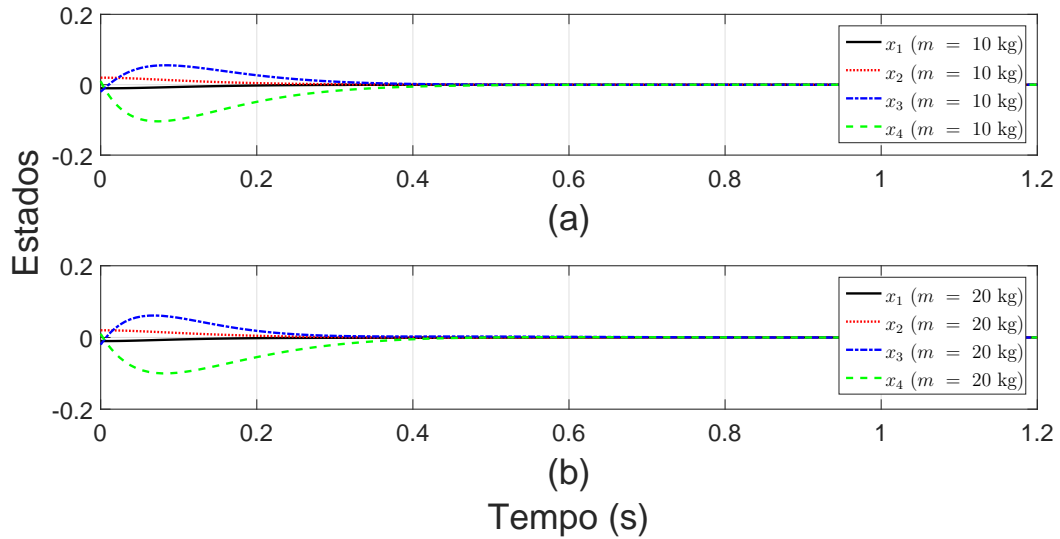


Figura 22: (a) Comportamento dos estados considerando a falha em cada um dos amortecedores b_1 e b_2 , com massa $m = 10$ kg; (b) Comportamento dos estados considerando a falha em cada um dos amortecedores b_1 e b_2 , com massa $m = 20$ kg.
Fonte: Autoria própria.

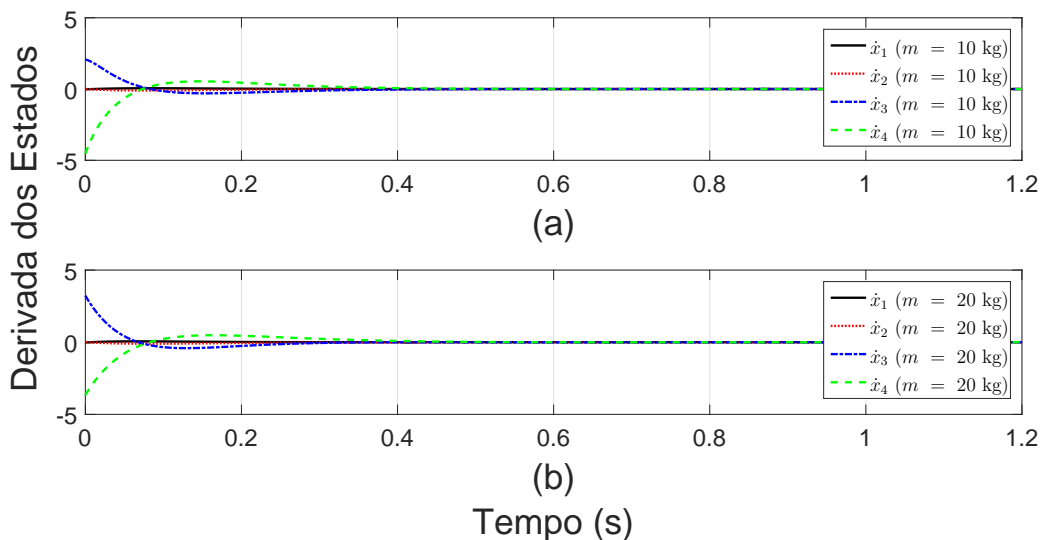


Figura 23: (a) Comportamento da derivada dos estados considerando a falha em cada um dos amortecedores b_1 e b_2 , com massa $m = 10$ kg; (b) Comportamento da derivada dos estados considerando a falha em cada um dos amortecedores b_1 e b_2 , com massa $m = 20$ kg.
Fonte: Autoria própria.

Novamente o controlador LQR-derivativo se mostrou eficiente ao estabilizar o sistema em um curto período de tempo. Devido à restrição da taxa de decaimento, que diminui o tempo que o sistema leva para atingir o regime, os controladores (110), (111) e (129) se mostraram levemente superiores aos controladores (88), (89) e (106).

Aqui, analisando os resultados dos Teoremas 4 (Figuras 18, 19 e 20) e 6 (Figuras 22, 23 e 24), novamente os resultados foram semelhantes. Contudo, comparando as Figuras 19(a)

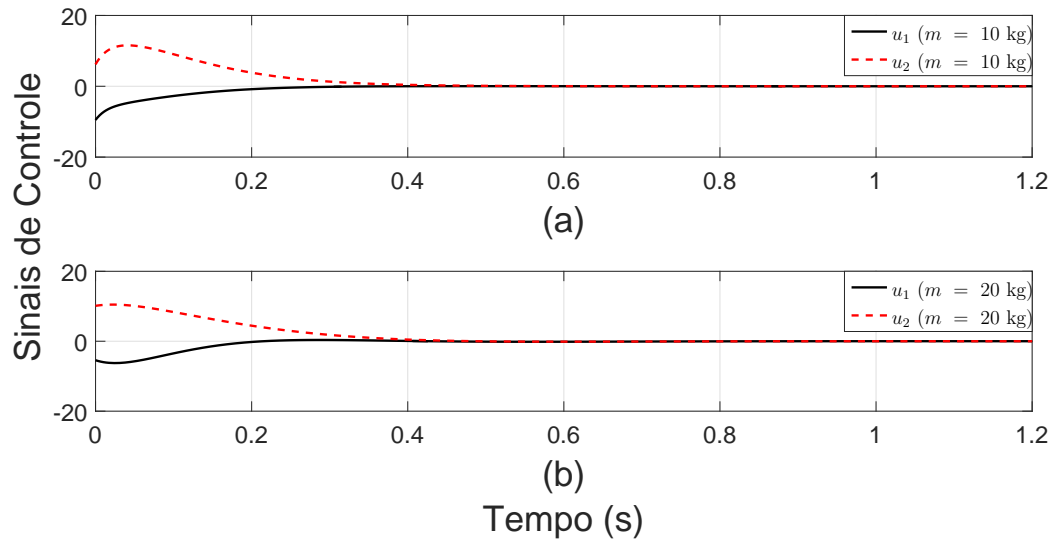


Figura 24: (a) Sinais de controle considerando a falha em cada um dos amortecedores b_1 e b_2 , com massa $m = 10$ kg; (b) Sinais de controle considerando a falha em cada um dos amortecedores b_1 e b_2 , com massa $m = 20$ kg.

Fonte: Autoria própria.

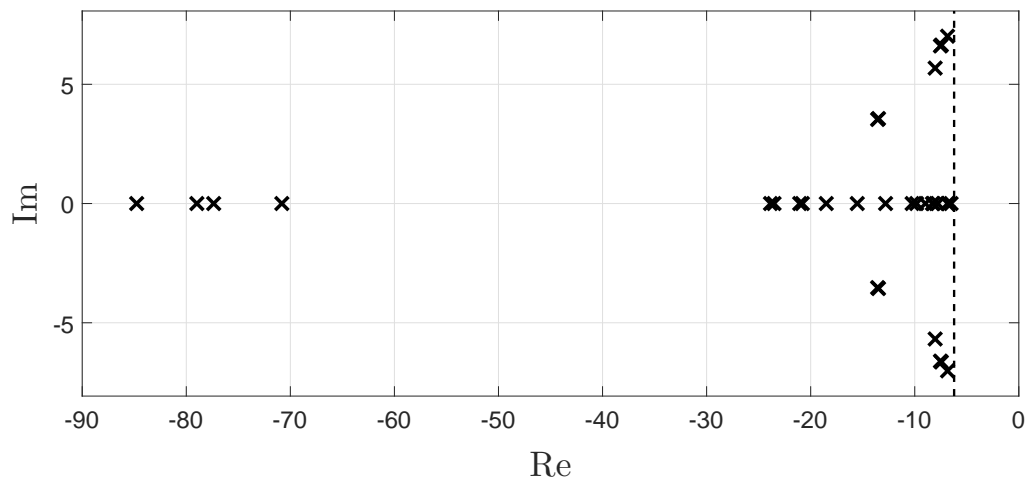


Figura 25: Região de restrição dos polos do sistema incerto para o Teorema 6.

Fonte: Autoria própria.

e 23(a) e as Figuras 20(a) e 24(a), nota-se uma diferença no comportamento das derivadas dos estados, \dot{x}_3 e \dot{x}_4 , e dos sinais de controle, u_1 e u_2 , quando considerada a falha nos amortecedores, b_1 e b_2 , e a massa $m = 10$ kg. Assim, o controlador (129) obteve um desempenho superior ao controlador (111).

Contudo, observou-se no projeto que o valor do parâmetro γ dependia dos valores da matriz \mathcal{R} . Ao aumentar o valor de γ , aumenta-se a rapidez de resposta do sistema. Dessa forma, é necessário mais energia, ou seja, mais sinal de controle $u(t)$. Como a matriz \mathcal{R} está

relacionada com o sinal de controle $u(t)$, e para que a energia de $u(t)$ não seja muito elevada, é preciso dar importância para a matriz \mathcal{R} , o que, no controle LQR-derivativo, é feito aumentando seus valores. Porém, o valor de γ não podia ser muito elevado, pois não era possível alcançar soluções factíveis.

8 CONCLUSÕES

O principal objetivo deste trabalho foi propor novas condições para a síntese de controladores ótimos de sistemas dinâmicos e sistemas dinâmicos incertos, ou com falhas estruturais, sendo os projetos dos controladores baseados em LMIs. Tais condições LMIs foram expostas na forma de teoremas e, quando factíveis, são facilmente resolvidas por meio de microcomputadores, utilizando, por exemplo, o software MatLab[®] (GAHINET et al., 1995). Além disso, uma outra vantagem do uso de LMIs é a facilidade de inclusão de incertezas do tipo politópicas presentes no modelo do sistema e, também, de índices de desempenho no projeto do controlador, como a taxa de decaimento (γ).

Ainda, utilizaram-se leis de controle baseadas na realimentação da derivada do vetor de estados, ou realimentação derivativa ($u(t) = -K\dot{x}(t)$). A realimentação derivativa apresenta resultados interessantes em algumas aplicações mecânicas, como, por exemplo, no controle de vibrações, onde pode-se utilizar sensores do tipo acelerômetros para medir o sinal da segunda derivada (aceleração) do estado (posição) do sistema. Os acelerômetros têm sido utilizados para a solução de vários tipos de problemas de engenharia, podendo reduzir custos de implementação, já que possui uma fácil implementação e um baixo custo operacional.

O controlador LQR-derivativo se mostrou uma importante ferramenta quando é necessário atingir certos requisitos de projeto, como, por exemplo, amplitude do sinal de controle ou tempo de estabelecimento, já que é possível ponderar o vetor da derivada dos estados e o vetor do sinal de controle utilizando as matrizes de ponderação do problema LQR, \mathcal{Q} e \mathcal{R} . Um método para ponderar adequadamente tais matrizes foi o uso do algoritmo genético, método apresentado neste trabalho. O uso do algoritmo genético em conjunto com a definição adequada de uma função objetivo mostrou-se eficaz nas definições das matrizes \mathcal{Q} e \mathcal{R} do problema LQR. No caso deste trabalho, escolheu-se como função objetivo o índice ITAE.

As metodologias presentes neste trabalho permitem que o projetista projete controladores com o objetivo de estabilizar o sistema, além de garantir alguns índices de desempenho (amplitude do sinal de controle, amplitude da derivada dos estados, tempo de

estabelecimento). Ainda, o projetista pode restringir os polos do sistema por meio da restrição de taxa de decaimento.

Agora, analisando os teoremas que consideram a restrição de taxa de decaimento, estes apresentaram resultados superiores aos teoremas que consideram apenas a condição de estabilidade, tanto para o tempo de estabelecimento quanto para a amplitude da derivada dos estados e sinais de controle. Isso se deve a escolha adequada das matrizes de ponderação, bem como a escolha adequada do parâmetro γ da taxa de decaimento, o qual é responsável por diminuir o tempo que o sistema leva para atingir o regime.

Ainda, para os teoremas que consideraram uma matriz \mathcal{Q} e uma matriz \mathcal{R} para cada vértice do politopo (Teoremas 5 e 6), estes apresentaram resultados semelhantes aos Teoremas 3 e 4.

Os resultados deste trabalho foram publicados em dois congressos, Congresso Brasileiro de Automática (CBA) e INDUSCON.

REFERÊNCIAS

- ABDELAZIZ, T. H. S. **Optimal Control Using Derivative Feedback for Linear Systems**. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering March 1, 224:185-202, 2010.
- ABDELAZIZ, T. H. S.; VALÁŠEK, M. **Pole placement for SISO linear systems by state-derivative feedback**. IEE Proceedings-Control Theory Applications. 151(4):377-385, 2004.
- ABDELAZIZ, T. H. S.; VALÁŠEK, M. **State derivative Feedback by LQR for Linear Time-Invariant Systems**. International Federation of Automatic Control. IFAC, 2005.
- AGUIRRE, L. A.; BRUCIAPAGLIA, A. H.; MIYAGI, P. E.; PIQUEIRA, J. R. C. **Enciclopédia de automática: controle e automação**. Blucher, vol. 3, 2007.
- AGULHARI, C. M.; OLIVEIRA, R. C.; PERES, P. L. **Robust \mathcal{H}_∞ static output-feedback design for time-invariant discrete-time polytopic systems from parameter-dependent state-feedback gains**. American Control Conference (ACC), 2010, IEEE, 2010. 4677–4682 p.
- ANDERSON, B. D.; MOORE, J. B. **Linear optimal control**. Prentice-Hall Englewood Cliffs, 1971.
- ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; FARIA, F. A.; SILVA, N. A. P. da; CARDIM, R. **Robust state-derivative feedback LMI-based designs for multivariable linear systems**. International Journal of Control, vol. 80, n0. 8, pp. 1260-1270, 2007, 2007.
- BOYD, S.; GHAOUI, L. E.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. **Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory**. Studies in Applied Mathematics, 15, 2 edn, SIAM Studies in Applied Mathematics, 1994.
- BURNS, R. S. **Advanced Control Engineerig**. 1st ed. London, UK: Butterworth, 2001.
- BUZACHERO, L. F. S.; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; SILVA, E. R. P. da. **New techniques for optimizing the norm of robust controllers of polytopic uncertain linear systems**. in G. L. de Oliveira Serra (Ed.)(ed), Frontiers in Advanced Control Systems, InTech, pp. 75-100, 2012.
- CAUN, R. P.; ASSUNÇÃO, E.; LLINS, L. I. H.; TEIXEIRA, M. C. M. **Controlador LQR via aproximação LMI com restrição de taxa de decaimento aplicado ao helicótero 3-DOF de bancada**. SBAI - Simpósio Brasileiro de Automática Inteligente, 2015.
- CHILALI, M.; GAHINET, P. **constraints: An LMI approach**. IEEE Transactions on Automatic Control, 1996.

- CHOI, J. W.; SEE, Y. B.; YOO, W. S.; LEE, M. H. **LQR approach using eigenstructure assignment with an active suspension control application**. Proceedings of the 1998 IEEE International Conference on Control Applications, Trieste, pp. 1235-1239 vol.2, 1998.
- DAS, S.; PAN, I.; HALDER, K.; DAS, S.; GUPTA, A. **LQR Based Improved Discrete PID Controller Design Via Optimum Selection of Weighting Matrices Using Fractional Order Integral Performance Index**. Applied Mathematical Modelling, Vol. 37, pp. 4253-4268, 2013.
- DORF, R. C.; BISHOP, R. H. **Sistemas de Controle Modernos**. 12ª Edição, Editora LTC, 2012.
- DUAN, Y. F.; NI, Y. Q.; KO, J. M. **State-Derivative feedback control of cable vibration using semiactive magnetorheological dampers**. Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering, Hoboken, v.20, n. 6, p. 431-449, Nov. 2005, 2005.
- EIBEN, A. E.; SMITH, J. E. **Introduction to evolutionary computing**. Springer, 2003.
- GAHINET, P.; NEMIROVSKI, A.; LAUB, A.; CHILALI, M. **LMI control toolbox - For use with MATLAB**. The Math Works Inc., 1995.
- GE, M.; CHIU, M.-S.; WANG, Q.-G. **Robust PID controller design via LMI approach**. Journal of Process Control, Vol. 12, pp. 3-13, 2002.
- ISERMANN, R. **Fault-Diagnosis Systems: An Introduction from Fault Detection to Fault Tolerance**. Springer, Berlin, 2006.
- KANIESKI, J. M.; NDLING, H. A. G.; CARDOSO, R. **A New LQR Modeling Approach for Power Quality Conditioning Devices**. IECON 2010-36th Annual Conference on IEEE Industrial Electronics Society, p. 2001-2006, 2010.
- KIRK, D. E. **Optimal control theory: an introduction**. Courier Corporation, 2012.
- KONAK, A.; COIT, D. W.; SMITH, A. E. **Multi-objective optimization using genetic algorithms: A tutorial**. Reliability Engineering & System Safety, Elsevier, Vol. 91, (9):992-1007, 2006.
- KWAK, S. K.; WASHINGTON, G.; YEDAVALLI, R. K. **Aceleration Feedback-based Active and Passive Vibration Control of Landing Gear Components**. Journal of Aerospace Engineering, New York, v. 15, n.1, p. 1-9, Jan, 2002.
- LINDEN, R. **Algoritmos genéticos**. Brasport, 3a edição, 2012.
- OGATA, K. **Discrete Time Control System**. Prentice-Hall, 2nd Edition, 1995.
- OGATA, K. **Engenharia de Controle Moderno**. Prentice Hall, 5 ed., 2010.
- OLALLA, C.; LEYVA, R.; AROUDI, A. E.; QUEINNEC, I. **Robust LQR Control For PWM Converters: An LMI Approach**. IEEE Transactions on Industrial Electronics, Vol. 56, No. 7, Julho, 2007.
- REITHMEIER, E.; LEITMANN, G. **Robust Vibration Control of Dynamical Systems Based on the Derivative of the State**. Archive of Applied Mechanics, Heidelberg, v. 72, n. 11-12, p. 856-864, June, 2003.

ROBANDI, I.; NISHIMORIB, K.; NISHIMURAB, R.; ISHIHARAB, N. **Optimal Feedback Control Design Using Genetic Algorithm in Multimachine Power System**. Electrical Power and Energy Systems, Vol. 23, pp. 263-271, 2001.

SILVA, E. da; TEIXEIRA, M.; ASSUNÇÃO, E.; FARIA, F. **Controle robusto de sistemas não-lineares sujeitos a falhas estruturais usando realimentação da derivada dos estados**. Anais do 9^o Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente, SBA, Brasília., 2009.

SILVA, E. R. P. da; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; BUZACHERO, L. F. S. **Condições robustas para a D-estabilização de sistemas lineares politópicos usando a realimentação derivativa**. XIX Congresso Brasileiro de Automática, 2012, Campina Grande, PB. XIX Congresso Brasileiro de Automática - CBA 2012. v. 1. p. 722-729, 2012.

SLOTINE, J.-J. E.; LI, W. **Applied Nonlinear Control**. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall. 460 p., 1991.

STURM, J. **Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones**. Optimization Methods and Software 11-12: 625-653, 1999.

TANAKA, K.; IKEDA, T.; WANG, H. O. **Fuzzy regulators and fuzzy observers: relaxed stability conditions and LMI-based designs**. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, IEEE, v. 6 (2): 250-265, 1998.

ZHAI, J.; SHENB, B.; FENG, E.; YIN, H. **Optimal Control of Switched Systems and its Parallel Optimization Algorithm**. Journal of Computational and Applied Mathematics, Vol. 261, pp. 287-298, 2014.