

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

LUCAS GABRIEL DE SOUZA RICARDO

**INVESTIGAÇÃO NUMÉRICA SOBRE A DETECÇÃO DE DANOS EM  
VIGAS METÁLICAS PELO MÉTODO DO ERRO NA EQUAÇÃO DE  
MOVIMENTO**

CAMPO MOURÃO

2017

LUCAS GABRIEL DE SOUZA RICARDO

**INVESTIGAÇÃO NUMÉRICA SOBRE A DETECÇÃO DE DANOS EM  
VIGAS METÁLICAS PELO MÉTODO DO ERRO NA EQUAÇÃO DE  
MOVIMENTO**

Trabalho de Conclusão de Curso de graduação, apresentado à disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso, do curso de Engenharia Civil do Departamento Acadêmico de Construção Civil – DACOC - da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR para obtenção do título de Bacharel em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Rodrigo Carreira

CAMPO MOURÃO

2017



Ministério da Educação  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná  
Câmpus Campo Mourão  
Diretoria de Graduação e Educação Profissional  
Departamento Acadêmico de Construção Civil  
Coordenação de Engenharia Civil



---

## TERMO DE APROVAÇÃO

Trabalho de Conclusão de Curso

**INVESTIGAÇÃO NUMÉRICA SOBRE A DETECÇÃO DE DANOS EM VIGAS METÁLICAS  
PELO MÉTODO DO ERRO NA EQUAÇÃO DE MOVIMENTO**

por

**Lucas Gabriel de Souza Ricardo**

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi apresentado às 14h40min do dia 30 de novembro de 2017 como requisito parcial para a obtenção do título de ENGENHEIRO CIVIL, pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Após deliberação, a Banca Examinadora considerou o trabalho aprovado.

---

**Prof. Me. Ângelo Giovanni Bonfim  
Corelhano  
(UTFPR)**

---

**Prof. Dr. Ronaldo Rigobello  
(UTFPR)**

---

**Prof. Dr. Marcelo Rodrigo Carreira  
(UTFPR)**

*Orientador*

Responsável pelo TCC: **Prof. Me. Valdomiro Lubachevski Kurta**

Coordenador do Curso de Engenharia Civil:

**Prof. Dr. Ronaldo Rigobello**

*A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do Curso.*

Dedico este trabalho a minha família que sempre me apoiou e incentivou a estar aqui, aos meus amigos que sempre estiveram ao meu lado e a Deus que me deu toda força e sabedoria para tornar isto possível.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço principalmente a Deus que me deu esperanças e capacidade para a realização de feitos tão importantes na minha vida. A Deus também agradeço pelos bons amigos que encontrei nesta jornada, e que apesar de poucos, sei que foram enviados por Ele para iluminar meu caminho e fortalecer meus passos.

À minha família por sempre me apoiar nos momentos bons e ruins em que estive, em especial a minha mãe Elza e ao meu pai Reinaldo que acreditaram em mim e sempre serão meu exemplo de vida, para cada dia me tornar melhor. Agradeço aos meus irmãos Roberta, Lara, Miguel e Diana, por estarem cuidando da família na minha ausência.

Agradeço ao meu orientador e professor Dr. Marcelo Rodrigo Carreira por todo tempo e dedicação, bem como toda a sabedoria, a mim despendidos, sendo sempre uma referência a seguir seguida e um exemplo de profissional. E também ao professor Leandro Waideman que por vezes me auxiliou durante o processo de elaboração deste trabalho.

Por fim agradeço aos meus amigos que estiveram comigo durante a graduação, torcendo por mim e me incentivando a nunca desanimar. E também aqueles que mesmo longe sempre torceram por mim.

*“Seria mais fácil fazer como todo mundo faz,  
O caminho mais curto, produto que rende mais  
Mas nós vibramos em outra frequência”*

*(Humberto Gessinger)*

## RESUMO

O objetivo deste trabalho foi desenvolver uma investigação numérica a respeito da aplicação do Método do Erro na Equação de Movimento em vigas. O método testado foi desenvolvido por Genovese (2000) e basicamente consiste em avaliar o erro gerado na equação de movimento de um sistema dinâmico em vibração livre quando na equação de movimento do sistema consideram-se as matrizes de massa e de rigidez do sistema integro e os autovalores e autovetores do sistema danificado. O método foi testado em duas vigas, uma biapoiada e outra engastada-livre, sendo simulados, isoladamente, dois danos em cada viga, em duas posições diferentes sendo na metade do comprimento e próximo à extremidade. Para cada dano foram avaliadas duas intensidades de danificação sendo uma redução de 2% e posteriormente de 40% no momento de inércia da seção transversal. As vigas foram discretizadas em 20 elementos usando o Método dos Elementos Finitos. A implementação computacional da modelagem foi realizada utilizando-se o software Scilab versão 5.5.2. A partir das diferenças na matriz de resíduos, pôde-se localizar de maneira exata a posição e a intensidade dos danos simulados. Assim, com a elaboração do trabalho constatou-se a eficiência do método do erro na equação de movimento, apresentando suas etapas e seus fundamentos.

**Palavras-Chave:** Investigação numérica. Erro. Equação de Movimento.

## ABSTRACT

The main objective of this paper was to develop a numerical investigation regarding the application of Error Method in the Motion Equation in beams. The method tested was developed by Genovese (2000) and basically consists on evaluating the error generated in the equation of motion of a dynamic system in free vibration, when the system's equation of motion are considered as mass and stiffness matrices of the integral system and the eigenvalues and eigenvectors of the damaged system. The method was tested in two beams, the first beam was a simply supported and the second was the cantilever type, which were simulated, individually, two damages in each beam, in two different positions, the first being half of the length and the other near the end. For each damage were assessed two damage intensities, the first had a reduction of 2% and posterior of 40% at the moment of inertia of the cross section. The beams were discretized in 20 elements using the Finite Element Method. A computation implantation was made using the software Scilab, version 5.5.2. Starting from the differences in the residue matrix was possible to locate the position and the intensity of the damages that were being simulated. Thus, with the elaboration of this paper was possible to prove the efficiency of the method of the error in the movement equation, presenting the steps and the foundations.

**Key-Words:** Numerical Investigation. Error. Motion Equation.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Sistema com um grau de liberdade - Pêndulo simples .....	17
Figura 2 (a) Sistema Massa – Mola – Amortecedor com um GDL; (b) Diagrama de corpo livre (DCL) .....	18
Figura 3 - Resposta à vibração livre de um sistema com amortecimento subcrítico...	21
Figura 4 - Sistema Massa – Mola – Amortecedor com dois GDLs.....	23
Figura 5 - (a) DCL do bloco de massa $m_1$ ; (b) DCL do bloco de massa $m_2$ .....	23
Figura 6 - (a) elemento de viga simplesmente apoiado submetido a um carregamento distribuído arbitrariamente. (b) Elemento de viga fletido; (c) Convenção positiva adotada na Mecânica das Estruturas para os sinais de esforço cortante e momento fletor.....	26
Figura 7 - (a) e (b) elementos de viga com deslocamentos idênticos nas extremidades, mas com modos de deformação diferentes. (c) Descontinuidade fisicamente inaceitável nos valores de deslocamentos e giros dos nós da ligação.....	30
Figura 8 - Deslocamentos nodais do elemento de viga.....	30
Figura 9 - (a) Diagrama de momento fletor do elemento (b) convenção de sinais da Resistência dos Materiais.....	31
Figura 10 - Viga Biapoiada com dano no elemento 1 .....	47
Figura 11 - Viga Biapoiada com dano no elemento 10.....	47
Figura 12 - Viga Engastada com dano no elemento 1 .....	47
Figura 13 - Viga Engastada com dano no elemento 10.....	48
Figura 14 - Deslocamentos nodais do elemento de viga.....	48
Figura 15 - Modos de Flexão Viga Íntegra (biapoiada).....	50
Figura 16 - Modos de Flexão Viga Íntegra (Viga Engastada-livre) .....	51
Figura 17 - (a) Translações e rotações dos pontos nodais da viga discretizada; (b) Translações e rotações do elemento 1 da viga; (c) Translações e rotações do elemento 2 da viga .....	63
Figura 18 - Matriz Resíduo - Viga Biapoiada com dano de 2% no elemento 1.....	64
Figura 19 - Matriz Resíduo - Viga Biapoiada com dano de 40% no elemento 1 .....	65
Figura 20 - Matriz Resíduo - Viga Biapoiada com dano de 2% no elemento 10 .....	66
Figura 21 - Matriz Resíduo - Viga Biapoiada com dano de 40% no elemento 10 .....	67
Figura 22 - Matriz Resíduo - Viga Engastada-livre com dano de 2% no elemento 1 .....	68
Figura 23 - Matriz Resíduo - Viga Engastada-livre com dano de 40% no elemento 1....	69
Figura 24 - Matriz Resíduo - Viga Engastada-livre com dano de 2% no elemento 10....	70
Figura 25 - Matriz Resíduo - Viga Engastada-livre com dano de 40% no elemento 10 .	71

## LISTA DE TABELAS

<b>Tabela 1</b> Cenários de danificação estudados .....	48
<b>Tabela 2</b> Viga biapoiada com danos no elemento 1 (cenários 1 e 2) .....	60
<b>Tabela 3</b> Viga biapoiada com dano no elemento 10 (cenários 3 e 4 ) .....	61
<b>Tabela 4</b> Viga engastada-livre com dano no elemento 1 (cenário 1 e 2) .....	61
<b>Tabela 5</b> Viga engastada-livre com dano no elemento 10 (cenários 3 e 4) .....	62

## LISTA DE GRÁFICOS

<b>Gráfico 1</b> 1º Modo de Flexão (Cenário de danificação 1 e 2) .....	51
<b>Gráfico 2</b> 1º Modo de Flexão (Cenário de danificação 3 e 4) .....	52
<b>Gráfico 3</b> 2º Modo de Flexão (Cenário de danificação 1 e 2) .....	52
<b>Gráfico 4</b> 2º Modo de Flexão (Cenário de danificação 3 e 4) .....	52
<b>Gráfico 5</b> 3º Modo de Flexão (Cenário de danificação 1 e 2) .....	53
<b>Gráfico 6</b> 3º Modo de Flexão (Cenário de danificação 3 e 4) .....	53
<b>Gráfico 7</b> 4º Modo de Flexão (Cenário de danificação 1 e 2) .....	53
<b>Gráfico 8</b> 4º Modo de Flexão (Cenário de danificação 3 e 4) .....	54
<b>Gráfico 9</b> 5º Modo de Flexão (Cenário de danificação 1 e 2) .....	54
<b>Gráfico 10</b> 5º Modo de Flexão (Cenário de danificação 3 e 4) .....	54
<b>Gráfico 11</b> 6º Modo de Flexão (Cenário de danificação 1 e 2) .....	55
<b>Gráfico 12</b> 6º Modo de Flexão (Cenário de Danificação 3 e 4).....	55
<b>Gráfico 13</b> 1º Modo de Flexão (Cenário de danificação 1 e 2) .....	56
<b>Gráfico 14</b> 1º Modo de Flexão (Cenário de danificação 3 e 4) .....	56
<b>Gráfico 15</b> 2º Modo de Flexão (Cenário de danificação 1 e 2) .....	56
<b>Gráfico 16</b> 2º Modo de Flexão (Cenário de danificação 3 e 4) .....	57
<b>Gráfico 17</b> 3º Modo de Flexão (Cenário de danificação 1 e 2) .....	57
<b>Gráfico 18</b> 3º Modo de Flexão (Cenário de danificação 3 e 4) .....	57
<b>Gráfico 19</b> 4º Modo de Flexão (Cenário de danificação 1 e 2) .....	58
<b>Gráfico 20</b> 4º Modo de Flexão (Cenário de danificação 3 e 4) .....	58
<b>Gráfico 21</b> 5º Modo de Flexão (Cenário de danificação 1 e 2) .....	58
<b>Gráfico 22</b> 5º Modo de Flexão (Cenário de danificação 3 e 4) .....	59
<b>Gráfico 23</b> 6º Modo de Flexão (Cenário de danificação 1 e 2) .....	59
<b>Gráfico 24</b> 6º Modo de Flexão (Cenário de danificação 3 e 4) .....	59
<b>Gráfico 25</b> Quantificação do dano no elemento 1 (Cenário 1).....	72
<b>Gráfico 26</b> Quantificação do dano no elemento 1 (Cenário 2).....	73
<b>Gráfico 27</b> Quantificação do dano no elemento 10 (Cenário 3).....	73
<b>Gráfico 28</b> Quantificação do dano no elemento 10 (Cenário 4).....	74
<b>Gráfico 29</b> Quantificação do dano no elemento 1 (Cenário 1).....	74
<b>Gráfico 30</b> Quantificação do dano no elemento 1 (Cenário 2).....	75
<b>Gráfico 31</b> Quantificação do dano no elemento 10 (Cenário 3).....	75
<b>Gráfico 32</b> Quantificação do dano no elemento 10 (Cenário 4).....	76

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>12</b>
<b>2</b>	<b>OBJETIVOS</b>	<b>13</b>
2.1	Objetivo Geral	13
2.2	Objetivos Específicos	13
<b>3</b>	<b>JUSTIFICATIVA</b>	<b>14</b>
<b>4</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b>	<b>15</b>
4.1	Dinâmica Das Estruturas	15
4.1.1	Modelos matemáticos para a análise dinâmica de estruturas	16
4.1.2	Modelos discretos	17
a.	Modelo com um grau de liberdade	18
b.	Modelo com dois graus de liberdade	22
c.	Construção de modelos com $n$ graus de liberdade	24
4.2.1	Teoria Elementar das Vigas	26
4.2.2	Formulação do Elemento de Viga	29
<b>4.3</b>	<b>Análise Modal Teórica De Estruturas</b>	<b>40</b>
<b>4.4</b>	<b>Detecção De Danos Em Estruturas Por Meio De Ensaio Dinâmicos</b>	<b>43</b>
4.4.1	Método do Erro na Equação de Movimento	44
<b>5</b>	<b>MÉTODOS</b>	<b>47</b>
5.1	Modelagem Numérica E Análise Modal	47
5.2	Localização E Quantificação Dos Danos	49
<b>6</b>	<b>RESULTADOS</b>	<b>50</b>
<b>6.1</b>	<b>Análise Das Diferenças Nos Modos De Flexão E Nas Frequências Naturais Das Vigas</b>	<b>50</b>
6.1.1	Análise dos modos de flexão das vigas	50
a)	Modos de flexão viga biapoiada	51
b)	Modos de flexão viga engastada-livre	56
6.1.2	Diferenças das frequências naturais	60

<b>6.2</b>	<b>Localização Do Dano</b> .....	<b>63</b>
<b>6.3</b>	<b>Quantificação Do Dano</b> .....	<b>72</b>
<b>7</b>	<b>CONCLUSÕES</b> .....	<b>77</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> .....	<b>78</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Ao longo do tempo as estruturas são submetidas a diferentes tipos de ações, sejam elas estáticas ou dinâmicas, as quais podem causar desgastes, deterioração e diminuição na rigidez de seus elementos, fazendo com que seu desempenho seja inferior ao esperado. Assim, cada vez mais se tem a necessidade de meios efetivos para acompanhamento, detecção e quantificação de danos nas estruturas.

Com a deterioração da estrutura, sua capacidade de carga é prejudicada, podendo apresentar, como consequência, outros problemas estruturais, como fissurações e vibrações excessivas, gerando ao usuário desconforto e insegurança. Desse modo, torna-se necessário o desenvolvimento de técnicas que possibilitem a avaliação da integridade estrutural, sem que haja a danificação da estrutura examinada (BRASILIANO; DOZ; BRITO, 2002).

O desenvolvimento e aprimoramento dos métodos construtivos nos últimos anos, fez com que fossem elaborados estudos acerca das técnicas de análise de estruturas, dentre as quais pode-se citar aquelas baseadas nas propriedades dinâmicas dos elementos.

Dentre os métodos de avaliação não destrutiva com maior aplicabilidade, destacam-se aqueles baseados em ensaios estáticos, técnicas de raio X e ultrassom e ensaios dinâmicos (GENOVESE, 2000).

Proposto por Genovese (2000) o Método do Erro na Equação de Movimento, lida diretamente com as matrizes de massa e rigidez da estrutura não danificada e utiliza as frequências naturais de vibração da estrutura danificada. Tal método se sobressai, se comparado com os diversos métodos de detecção de danos com base em ensaios dinâmicos, pela simplicidade e eficiência, visto que além de localizar o dano, indica a redução percentual da rigidez do elemento estrutural.

Além disso, deve-se ressaltar ainda que, devido ao método avaliar o erro residual na equação do movimento, o mesmo pode ser aplicado tanto em elementos fletidos como àqueles submetidos à força normal e torção.

## **2 OBJETIVOS**

### **2.1 Objetivo Geral**

Compreender e aplicar o Método do Erro na Equação de Movimento para a detecção de danos em vigas de aço.

### **2.2 Objetivos Específicos**

- Formular um modelo modal para vigas retas com base no Método dos Elementos Finitos;
- Realizar a análise modal numérica de vigas de aço nas condições íntegra e danificada;
- Aplicar o Método do Erro na Equação de Movimento para localizar e quantificar os danos e avaliar os resultados obtidos.

### 3 JUSTIFICATIVA

Na Engenharia Civil, observa-se o aprimoramento e avanço contínuo das técnicas construtivas bem como a criação de novas estruturas, mais arrojadas e complexas. É importante desenvolver métodos para se detectar e quantificar os danos presentes nas estruturas e, a partir disso, tornar possível o monitoramento de sua integridade e desempenho, diminuindo assim, custos com reparo e reconstrução de estruturas. Nesse sentido, é de extrema importância que se desenvolvam estudos acerca de métodos de avaliação não destrutiva, capazes de identificar danos estruturais.

Proposto por Genovese (2000), o Método do Erro na Equação de Movimento faz uso das matrizes de massa e de rigidez da estrutura bem como dos autovalores e dos autovetores. Uma das grandes vantagens deste método reside no fato de que, além da posição do dano, o mesmo indica também a severidade da falha estrutural.

Diante do exposto observa-se que o método proposto por Genovese (2000) pode ser uma ferramenta de grande utilidade para a avaliação da integridade estrutural e por este motivo é importante seu estudo.



## **4 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA**

Neste capítulo serão apresentados os assuntos necessários ao desenvolvimento do trabalho, abordando as áreas de estudo da Dinâmica das Estruturas, do Método dos Elementos Finitos, da Análise Modal Teórica e da Detecção de Danos em Estruturas por meio de Ensaio Dinâmico. Desse modo, serão apresentadas, adiante, definições e modelos utilizados como fundamentação para elaboração do estudo.

### **4.1 Dinâmica Das Estruturas**

As estruturas devem ser capazes de absorver e transmitir para as fundações os esforços, provenientes de diferentes ações, que devem ser caracterizados matematicamente nos projetos estruturais, determinando o efeito e a relevância das oscilações geradas por esses esforços.

Segundo Clough e Penzien (2003) a Dinâmica das Estruturas pode ser considerada como uma extensão dos métodos clássicos de análise estrutural, que em geral, abordam apenas o carregamento estático, condição esta, que pode ser encarada como uma particularidade da análise dinâmica.

As ações externas dinâmicas podem ser classificadas como determinísticas ou aleatórias. No primeiro caso, as ações são definidas analítica ou numericamente em função do tempo. No segundo caso, a partir de informações estatísticas é possível determinar as características probabilísticas da ação. A análise dinâmica baseia-se na construção e resolução de modelos matemáticos através de métodos matriciais e numéricos, que simulam ações determinísticas (SORIANO, 2014).

Os problemas referentes à análise dinâmica em geral podem ser subdivididos em três grupos diferentes. No primeiro, estuda-se o comportamento da estrutura a partir de seus modos e frequências fundamentais de vibração, sem, no entanto, preocupar-se com o histórico de deslocamentos, este procedimento é usualmente chamado de Análise Modal. Já no segundo, faz-se a análise dos deslocamentos ao longo do tempo, provocados por diferentes ações que as estruturas são submetidas, estudo este, denominado de Análise de Resposta no Tempo. No último, designado Vibrações Randômicas, é estudado o comportamento estrutural sujeito a vibrações de caráter aleatório (TORII, 2012).

- Vibração

O movimento de um ponto material ou de um corpo que oscila em torno de uma posição de equilíbrio, a partir do deslocamento do sistema de sua posição de equilíbrio estável, é definido como vibração mecânica. O sistema tende a retornar a sua posição inicial, sob a ação de forças restauradoras, mas em geral, alcança esta posição com certa velocidade e a ultrapassa (BEER; JOHNSTON, 1991).

As vibrações podem ser livres ou forçadas. Quando o movimento oscilatório é mantido somente por forças restauradoras denomina-se vibração livre. Já quando se tem uma força provocando a vibração diz-se tratar de vibração forçada. Além disso, as vibrações podem ou não ter amortecimento (BEER; JOHNSTON, 1991).

#### 4.1.1 Modelos matemáticos para a análise dinâmica de estruturas

Devido à complexidade da natureza dos sistemas físicos, se faz necessária a construção de modelos matemáticos que simulem os comportamentos desses sistemas, o que demanda a adoção de princípios e leis físicas, e o uso de aproximações. A elaboração de tais modelos deve levar em conta as ferramentas e recursos disponíveis para cálculo, optando sempre pela simplicidade e maior exatidão possível (SORIANO, 2014).

A formulação do modelo matemático a ser utilizado para o estudo da vibração depende das propriedades da estrutura analisada, são estas, a rigidez, a massa e o amortecimento. Tais propriedades são usualmente definidas na forma matricial, provenientes da discretização espacial da estrutura em elementos finitos (MAGALHÃES, 2012).

É preciso cautela na escolha do modelo matemático a ser utilizado para a simulação do comportamento dinâmico de uma estrutura, visto que a depender do sistema estudado, sua simulação numérica pode não ser exata e sua solução analítica de grande complexidade. Por isso, deve-se atentar para alguns parâmetros empregados durante a resolução dos problemas, como por exemplo, as condições de contorno e o tipo de elemento em estudo (ANDRADE, 2011).

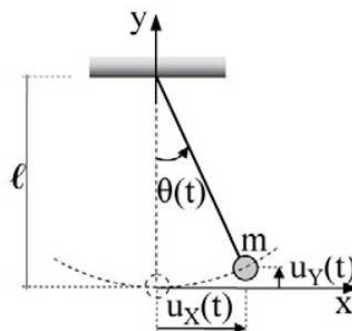
De posse das matrizes de propriedades da estrutura, rigidez, massa e amortecimento, é possível a montagem dos sistemas de equações diferenciais, que descrevem a base de diferentes modelos matemáticos.

#### 4.1.2 Modelos discretos

Soriano (2014) define um modelo discreto como a idealização de uma partícula ou ponto material, com uma quantidade de matéria finita, dimensões e rotações desprezíveis, na qual um sistema mecânico, em qualquer instante de tempo, é descrito por um número finito de coordenadas de deslocamento independentes entre si, denominados graus de liberdade (GDL).

Como exemplo, a Fig. (1) a seguir apresenta um modelo discreto de um pêndulo simples composto por uma massa  $m$  e um fio inextensível de comprimento  $l$  e com massa desprezível. O sistema após receber uma perturbação lateral oscila em um plano  $(x; y)$  e tem seu movimento descrito pelo ângulo  $\theta$ , que é, portanto, o grau de liberdade do elemento. Apesar de ser possível a especificação da posição da massa a partir de suas coordenadas  $(x; y)$ , as mesmas não são consideradas graus de liberdade por não serem independentes entre si (SORIANO,2014).

**Figura 1 - Sistema com um grau de liberdade - Pêndulo simples**



**Fonte:** Adaptado de Soriano (2014).

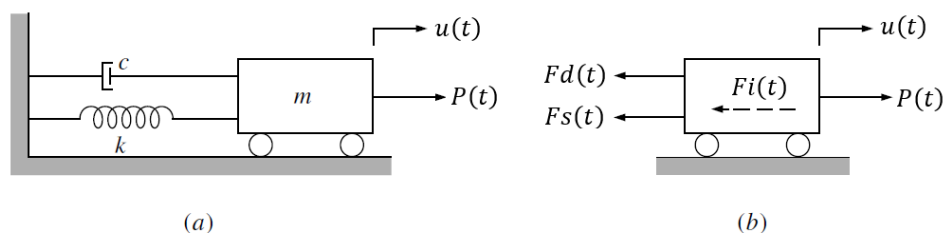
O comportamento dos modelos discretos é regido por equações diferenciais ordinárias (NASCIMENTO, 2011).

a. Modelo com um grau de liberdade

As propriedades físicas fundamentais de um sistema dinâmico são sua massa ( $m$ ), rigidez ( $k$ ) e amortecimento ( $c$ ) (CLOUGH; PENZIEN, 2003).

A Fig. (2) mostra um modelo de um GDL no qual a massa do sistema é representada por um bloco rígido, com translação simples na horizontal, compreendendo seu deslocamento apenas como função do tempo  $u(t)$ . A rigidez elástica ( $k$ ) do sistema é dada pela mola de massa desprezível e o mecanismo de dissipação de energia é representado por um amortecedor ( $c$ ). Neste sistema, foi considerado o amortecimento do tipo viscoso e a excitação aplicada  $P(t)$  variável ao no tempo.

**Figura 2 (a) Sistema Massa – Mola – Amortecedor com um GDL; (b) Diagrama de corpo livre (DCL)**



**Fonte:** Adaptado de Clough e Penzien (2003).

Onde:

$u(t)$  = Deslocamento (m);

$m$  = Massa (Kg);

$k$  = Rigidez do sistema (N/m);

$c$  = Amortecimento viscoso (N.s/m);

$P(t)$  = Força de excitação (N);

$Fd(t)$  = Força de amortecimento (N);

$Fs(t)$  = Força elástica (N);

$Fi(t)$  = Força de inércia (N).

É possível obter a equação do movimento do sistema fazendo o equilíbrio dinâmico das forças mostradas no diagrama de corpo livre DCL conforme Fig. (2b). Desta forma, encontra-se a Eq. (1).

$$F_d(t) + F_s(t) + F_i(t) = P(t) \quad (1)$$

Onde:

$$F_s = k u \quad (2)$$

$$F_d = c \dot{u} \quad (3)$$

$$F_i = m \ddot{u} \quad (4)$$

Assim, é possível reescrever a equação de movimento como:

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = P(t) \quad (5)$$

- Resposta à vibração livre

A Eq. (5) rege o movimento de um sistema com um GDL. Tal equação apresenta o termo  $P(t)$ , que como dito anteriormente é a força de excitação. Para sistemas submetidos à vibração livre o termo  $P(t)$  é igual a zero, assim a equação de movimento de um sistema de um grau de liberdade, sujeito ao amortecimento viscoso e a vibração livre é escrita conforme Eq. (6):

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = 0 \quad (6)$$

A seguir é apresentada a solução homogênea da Eq. (6), para o caso de amortecimento subcrítico  $0 < \xi < 1$ .

$$u(t) = X e^{-\xi \omega_n t} \cos(\omega_D t - \theta) \quad (7)$$

Onde:

$X$  = Amplitude (m);

$\xi$  = Amortecimento adimensional;

$\omega_n$  = Frequência natural (rad/s);

$\omega_D$  = Frequência natural amortecida (rad/s);

$\theta$  = Constante de fase (rad).

Onde:

$$X = \sqrt{(u_0)^2 + \left(\frac{\dot{u}_0 + \xi \omega_n u_0}{\omega_D}\right)^2} \quad (8)$$

$$\theta = \tan^{-1} \left( \frac{\dot{u}_0 + \xi \omega_n u_0}{u_0 \omega_D} \right) \quad (9)$$

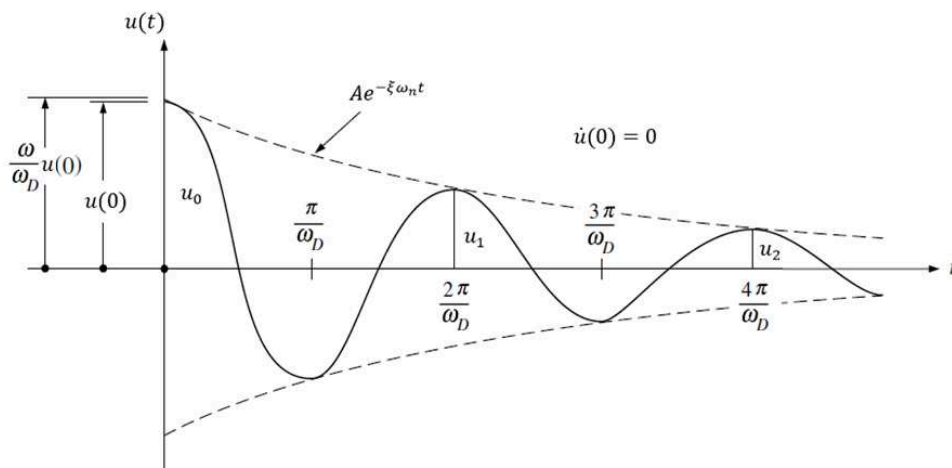
$$\xi = \frac{c}{2m\omega_n} \quad (10)$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (11)$$

$$\omega_D = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \quad (12)$$

A Fig. (3) mostra um exemplo de vibração livre em um sistema com um grau de liberdade e submetida a amortecimento viscoso. Observa-se nesta figura o decaimento exponencial na amplitude dos deslocamentos

**Figura 3 - Resposta à vibração livre de um sistema com amortecimento subcrítico**



**Fonte:** Adaptado de Clough e Penzien (2003).

- Resposta à solicitação harmônica

A solicitação harmônica é uma das formas mais simples de se excitar uma estrutura periodicamente, e pode ser representada a partir de funções trigonométricas como  $P(t) = P_0 \text{sen}(\omega t)$  ou  $P(t) = P_0 \text{cos}(\omega t)$ . Considerando que um sistema com um GDL esteja submetido a uma solicitação harmônica do tipo  $P(t) = P_0 \text{cos}(\omega t)$ , a equação de movimento pode ser escrita como:

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = P_0 \text{cos}(\omega t) \quad (13)$$

A solução da Eq. (13) pode ser escrita como a soma de duas parcelas:

$$u = u_h + u_p \quad (14)$$

Onde:

$u_h$  é a solução homogênea e

$u_p$  é a solução particular.

A solução homogênea  $u_h$  corresponde a solução da Eq. (6), quando se tem  $P(t) = 0$  e amortecimento subcrítico, a mesma pode ser escrita como a Eq. (15) a seguir (RAO, 2011):

$$u_h(t) = e^{-\xi\omega_n t} [A \text{ sen } (\omega_d t) + B \text{ cos}(\omega_d t)] \quad (15)$$

As constantes  $A$  e  $B$  são determinadas utilizando as condições iniciais e são dadas pelas Eq. (16) e (17) respectivamente.

$$A = \frac{u_0}{\omega_d} + \frac{\xi u_0}{\sqrt{1-\xi^2}} - \frac{p}{k\sqrt{1-\xi^2}} \left[ \frac{\xi(1+\alpha^2)}{(1-\alpha^2)^2 + (2\xi\alpha)^2} \right] \quad (16)$$

$$B = u_0 - \frac{p}{k} \left[ \frac{(1-\alpha^2)}{(1-\alpha^2)^2 + (2\xi\alpha)^2} \right] \quad (17)$$

Já a solução particular  $u_p$  é uma resposta em regime permanente e é dada por como:

$$u(t) = C_1 \text{ cos}(\omega t) + C_2 \text{ sen } (\omega t) \quad (18)$$

Onde:

$$C_1 = \frac{p}{k} \left[ \frac{1-\alpha^2}{(1-\alpha^2)^2 + (2\xi\alpha)^2} \right] \quad (19)$$

$$C_2 = \frac{p}{k} \left[ \frac{2\xi\alpha}{(1-\alpha^2)^2 + (2\xi\alpha)^2} \right] \quad (20)$$

Assim somando-se a solução homogênea a particular, obtém-se a solução geral para o sistema:

$$u(t) = e^{-\xi\omega_n t} [A \text{ sen } (\omega_d t) + B \text{ cos}(\omega_d t)] + C_1 \text{ cos}(\omega t) + C_2 \text{ sen } (\omega t) \quad (21)$$

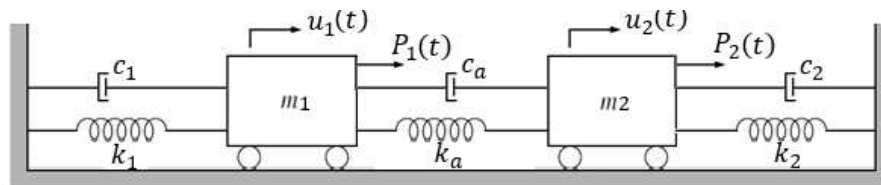
b. Modelo com dois graus de liberdade



A representação da maioria das estruturas com um modelo de apenas um GDL nem sempre fornece a precisão necessária, posto que as estruturas em geral, possuem comportamento mais complexo do que o idealizado (SORIANO, 2014). A seguir é apresentado o equacionamento de um sistema com dois GDLs, que apesar de também ser limitado, é utilizado para a introdução e compreensão de conceitos importantes para sistemas com  $n$  GDLs como mostrado mais adiante.

Para o equacionamento de um sistema com dois GDLs, se faz a discretização de suas propriedades (massa, rigidez e amortecimento) em duas equações, que representam o equilíbrio dinâmico de cada massa do sistema. A Fig. (4) apresenta um sistema massa-mola-amortecedor com dois graus de liberdade.

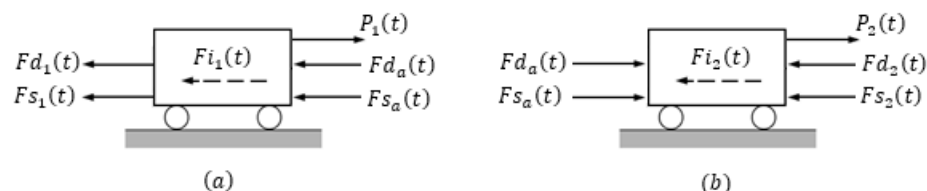
**Figura 4 - Sistema Massa – Mola – Amortecedor com dois GDLs.**



**Fonte:** Adaptado de Clough e Penzien (2003).

A partir da representação do sistema em diagramas de corpo livre (DCLs), conforme Fig. (5) é possível escrever as equações de movimento de cada bloco, por meio do equilíbrio dinâmico do conjunto.

**Figura 5 - (a) DCL do bloco de massa  $m_1$ ; (b) DCL do bloco de massa  $m_2$**



**Fonte:** Adaptado de Clough e Penzien (2003).

Assim:

Para a massa  $m_1$ :

$$Fd_1(t) + Fd_a(t) + Fs_1(t) + Fs_a(t) + Fi_1(t) = P_1(t) \quad (22)$$

Para a massa  $m_2$ :

$$Fd_2(t) + Fd_a(t) + Fs_2(t) + Fs_a(t) + Fi_2(t) = P_2(t) \quad (23)$$

- Resposta à vibração livre não amortecida

Admitindo-se amortecimento nulo ( $[c] = [0]$ ), vibração livre ( $\{P(t)\} = \{0\}$ ) e substituindo as Eq. (2), (3) e (4) nas Eq. (22) e (23) é possível representar matricialmente a equação de movimento de um sistema com dois GDLs sem amortecimento e em vibração livre, como mostra a Eq. (24):

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_a & -k_a \\ -k_a & k_2 + k_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (24)$$

Ou usando uma notação mais compacta:

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} = \{0\} \quad (25)$$

Onde:

$[M]$  = Matriz de massa;

$\{\ddot{u}\}$  = Vetor de aceleração;

$[K]$  = Matriz de rigidez;

$\{u\}$  = Vetor de deslocamento.

c. Construção de modelos com  $n$  graus de liberdade

As estruturas reais possuem muitas coordenadas de deslocamento independentes, assim, para sua idealização e representação matemática exata seriam necessários infinitos GDLs, no entanto, na prática isso não é possível. Logo, quando se deseja uma boa representação das condições reais da estrutura, substitui-se o chamado problema físico real por um problema equivalente, que por meio de métodos numéricos, discretiza o domínio ou contorno e torna possível a solução de maneira mais simples (ALVES, 2007).

De maneira análoga à feita para dois GDLs, é possível escrever as equações que regem o movimento de sistemas com  $n$  GDLs, por meio da montagem de matrizes, nas quais serão aplicadas as condições de contorno dos problemas em questão.

As equações de movimento de modelos discretos são obtidas, em geral, pela discretização de modelos contínuos através do Método dos Elementos Finitos, transformando os infinitos graus de liberdade do elemento em estudo, em um número finito de graus de liberdade (SORIANO, 2014). No Item 4.2 é apresentada a formulação a partir do Método dos Elementos Finitos para o modelo de vigas.

## **4.2 Método Dos Elementos Finitos**

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é um método numérico utilizado para a obtenção de uma solução aproximada de problemas de Engenharia descritos por meio de Equações Diferenciais Parciais e sujeitos a determinadas condições de contorno e com condições iniciais (no caso de problemas de Análise Dinâmica).

O MEF possibilita a solução de problemas complexos em um espaço discreto, cujo limite infinitesimal tende ao contínuo. A premissa utilizada por este método consiste em subdividir o domínio do problema em subdomínios de dimensões finitas, de forma que quando somadas as soluções destes subdomínios se obtenha a resposta para o problema original. Os subdomínios são denominados elementos finitos (ALVES, 2007).

O desenvolvimento da formulação do MEF para elementos de viga via Método dos Elementos Finitos será apresentado conforme Hutton (2004).

Inicialmente o elemento de viga será representado como uma linha capaz de fletir em um plano. Durante o desenvolvimento das equações para o elemento de viga será apresentado um procedimento geral para a determinação das funções de

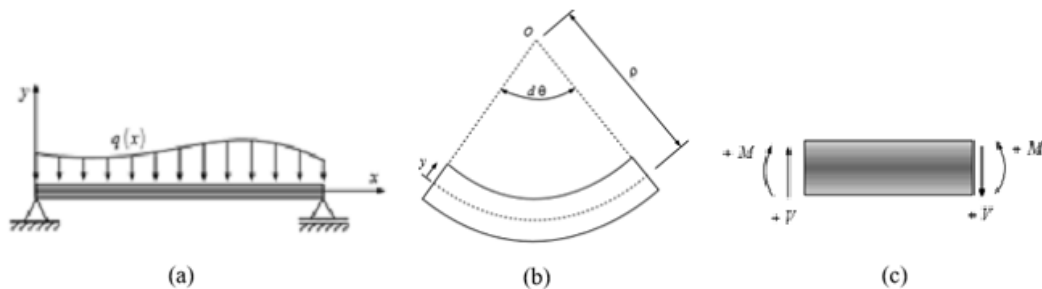
interpolação usando uma forma polinomial para a variável de campo (deslocamento) (HUTTON, 2004).

#### 4.2.1 Teoria Elementar das Vigas

A Fig. (6) representa uma viga simplesmente apoiada submetida a uma carga  $q(x)$  arbitrariamente distribuída. O sistema de coordenadas local  $(x; y)$ , é apresentado com  $x$  representado a coordenada axial e  $y$  a coordenada transversal do elemento. As hipóteses usuais da teoria elementar de vigas aplicáveis aqui são:

1. A viga é carregada somente na direção  $y$ ;
2. Os deslocamentos transversais da viga são pequenos;
3. O material da viga é homogêneo, elástico linear e isotrópico;
4. A viga é prismática e a seção transversal tem um eixo de simetria no plano de flexão.

**Figura 6 - (a) elemento de viga simplesmente apoiado submetido a um carregamento distribuído arbitrariamente. (b) Elemento de viga fletido; (c) Convenção positiva adotada na Mecânica das Estruturas para os sinais de esforço cortante e momento fletor.**



**Fonte:** Adaptado de Hutton (2004).

A Fig. (6b) apresenta um elemento diferencial de comprimento  $dx$  que depois de submetido à flexão apresenta encurtamento em sua superfície superior e alongamento em sua superfície inferior, implicando na existência de um plano ao longo de sua altura que não apresenta deformações, o qual é chamado de linha neutra. Supõe-se que a linha neutra tenha uma distância  $\rho$  do centro de curvatura  $O$ . Fixando o centro do eixo vertical de coordenadas neste plano ( $y = 0$ ) é possível

calcular o comprimento final do elemento  $dx'$  em uma altura qualquer  $y$ , como na Eq. (26), a seguir:

$$dx' = (\rho - y)d\theta \quad (26)$$

Como o valor de  $d\theta$  é muito pequeno, pode-se aproximar seu valor para:

$$d\theta \cong \frac{dx}{\rho} \quad (27)$$

Assim:

$$dx' = \left(1 - \frac{y}{\rho}\right) dx \quad (28)$$

Então, a deformação específica do elemento em uma ordenada  $y$  qualquer é igual a:

$$\varepsilon_x = -\frac{y}{\rho} \quad (29)$$

Do cálculo diferencial, tem-se que a curvatura de uma função  $v(x)$  é dada por:

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2v}{dx^2}} \quad (30)$$

Onde  $v = v(x)$  representa a deflexão na linha neutra.

Considerando que as deflexões sejam pequenas, as inclinações também serão pequenas, conforme Eq. (31) a seguir:

$$\rho = \frac{1}{\frac{d^2v}{dx^2}} \quad (31)$$

Substituindo a Eq. (31) na Eq. (29) tem-se:

$$\varepsilon_x = -\frac{y}{\frac{1}{\frac{d^2v}{dx^2}}} \quad (32)$$

Assim, a tensão normal é dada por:

$$\sigma_x = -E y \frac{d^2v}{dx^2} \quad (33)$$

Onde  $E$  é o módulo de elasticidade longitudinal.

A Eq. (33) mostra que, em uma determinada seção transversal a tensão normal varia linearmente com a distância medida a partir da linha neutra. Como nenhuma força axial atua na viga, a resultante da distribuição de tensões normais na seção transversal do elemento é igual à zero. Assim em qualquer posição  $x$  ao longo do comprimento do elemento tem-se:

$$f_x = \int_A \sigma_x dA = -\int_A E y \frac{d^2v}{dx^2} dA = 0 \quad (34)$$

Em uma seção transversal qualquer a curvatura é constante, assim:

$$\int_A y dA = 0 \quad (35)$$

Equação esta, satisfeita quando o eixo  $z$  passa pelo centroide da seção transversal do elemento, implicando que a linha neutra é perpendicular em relação ao plano de flexão e passa no centroide da seção transversal.

Da mesma forma, o momento fletor em uma seção transversal deve ser equivalente ao momento resultante da distribuição de tensão normal, então:

$$m_z(x) = -\int_A y \sigma_x dA = E \frac{d^2v}{dx^2} \int_A y^2 dA \quad (36)$$

A integral na Eq. (36) representa o momento de inércia da seção transversal em relação ao eixo z. Assim, o momento fletor é dado por:

$$m_z(x) = -E \frac{d^2v}{dx^2} I_z \quad (37)$$

Substituindo a Eq. (45) na Eq. (49) tem-se:

$$\sigma_x = \frac{-m_z(x)y}{I_z} \quad (38)$$

Nota-se que o sinal negativo na Eq. (38) garante que para momento fletor positivo como convencionado na Fig. (6C), os pontos com coordenada (+y) da linha neutra sofrem compressão e os pontos com coordenadas (-y) sofrem tração.

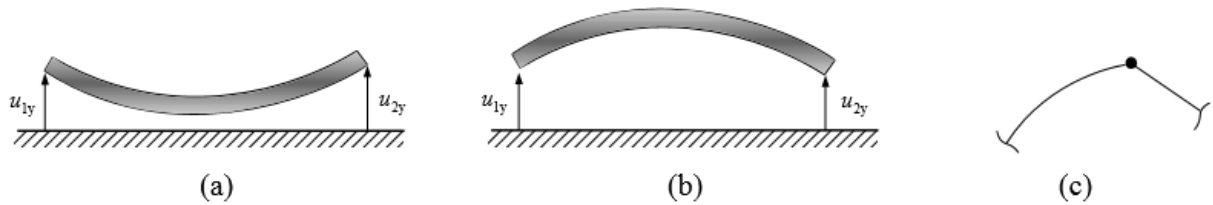
#### 4.2.2 Formulação do Elemento de Viga

A formulação para o elemento de viga, com base na teoria elementar das vigas, e com o auxílio do primeiro teorema de Castigliano é apresentada a seguir, considerando que as limitações a respeito do elemento são as mesmas da teoria elementar das vigas com a adição de:

1. O elemento tem comprimento L e tem um nó em cada extremidade;
2. O elemento é conectado a outros elementos somente pelos nós;
3. O carregamento é aplicado somente nos nós do elemento.

A premissa básica da formulação do método dos elementos finitos é expressar a variação contínua da variável de campo, deslocamento, em termos de um número finito de valores avaliados nos nós dos elementos. Conforme ilustrado nas Fig. (7a) e (7b) a seguir, a variação na deformação transversal de uma viga não é descrita adequadamente somente pelos deslocamentos em suas extremidades, visto que os deslocamentos podem ser idênticos, mas provenientes de uma curvatura diferente.

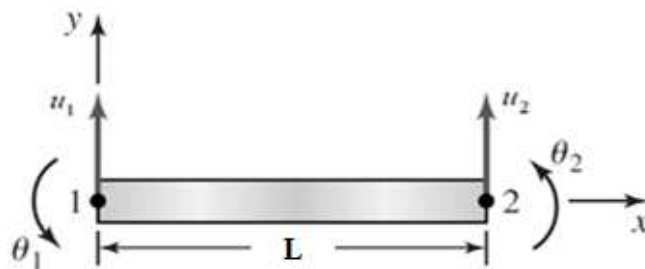
Figura 7 - (a) e (b) elementos de viga com deslocamentos idênticos nas extremidades, mas com modos de deformação diferentes. (c) Descontinuidade fisicamente inaceitável nos valores de deslocamentos e giros dos nós da ligação.



Fonte: Adaptado de Hutton (2004).

Assim, para formulação do elemento deve-se levar em conta a rotação do mesmo, além dos seus deslocamentos nas extremidades, como apresentado na Fig. (8) a seguir.

Figura 8 - Deslocamentos nodais do elemento de viga



Fonte: Adaptado de Hutton (2004)

A compatibilidade das rotações nas ligações entre elementos é feita com a inclusão da rotação nodal do elemento, impedindo assim a descontinuidade fisicamente inaceitável apresentada na Fig. (7c). Escrevendo assim, o deslocamento transversal da viga como uma função das variáveis nodais conforme Eq. (39) a seguir:

$$v(x) = f(u_{1y}, u_{2y}, \theta_{1z}, \theta_{2z}, x). \quad (39)$$

Tendo como condições de contorno:

$$v(x = x_1) = u_{1y} \quad (40)$$

$$v(x = x_2) = u_{2y} \quad (41)$$



$$\frac{dv}{dx}(x = x_1) = \theta_{1z} \quad (42)$$

$$\frac{dv}{dx}(x = x_2) = \theta_{2z} \quad (43)$$

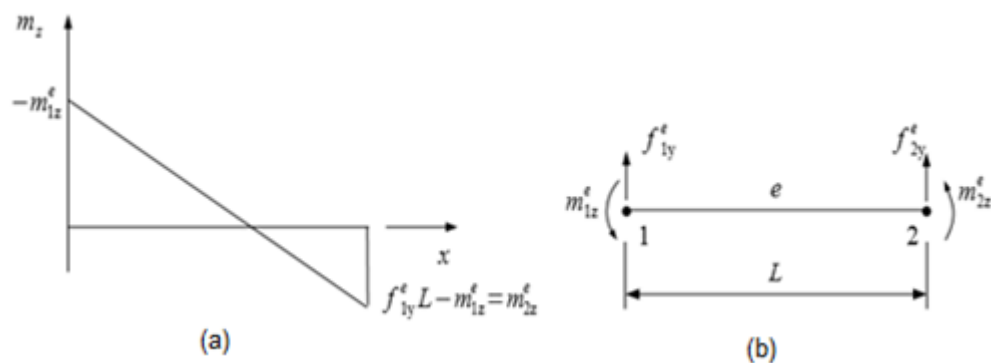
Considerando-se que o sistema de coordenadas do elemento seja dado por  $x_1 = 0$  e  $x_2 = L$ .

Considerando as condições de contorno e a natureza unidimensional do problema, é possível aproximar a função deslocamento na forma de um polinômio de 3º grau conforme Eq. (44).

$$v(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \quad (44)$$

A escolha da função cubica para descrever o deslocamento não é arbitrária, baseando-se no fato de que com quatro condições de contorno, é possível determinar no máximo até quatro constantes na função que descreve o deslocamento. De acordo com a Eq. (33) a derivada segunda da função deslocamento resulta em uma função linear, indicando assim que o momento fletor tem uma variação linear ao longo do comprimento do elemento confirmando a hipótese de que as cargas são aplicadas somente nos nós do elemento como ilustra a Fig. (9).

**Figura 9 - (a) Diagrama de momento fletor do elemento (b) convenção de sinais da Resistência dos Materiais.**



**Fonte:** Adaptado de Hutton (2004).

A aplicação das condições de contorno (40) a (43), considerando a Eq. (44) resulta em:

$$v(x = 0) = u_{1y} = a_0 \quad (45)$$

$$v(x = L) = u_{2y} = a_0 + a_1L + a_2L^2 + a_3L^3 \quad (46)$$

$$\frac{dv}{dx}(x = L) = a_1 \quad (47)$$

$$\frac{dv}{dx}(x = L) = \theta_{2z} = a_1 + 2a_2L + 3a_3L^2 \quad (48)$$

Resolvendo as Eq. (45) a (48) simultaneamente obtém-se os coeficientes em termos de variáveis nodais:

$$a_0 = u_{1y} \quad (49)$$

$$a_1 = \theta_{1z} \quad (50)$$

$$a_2 = \frac{3}{L^2}(u_{2y} - u_{1y}) - \frac{1}{L}(2\theta_{1z} + \theta_{2z}) \quad (51)$$

$$a_3 = \frac{2}{L^3}(u_{1y} - u_{2y}) + \frac{1}{L^2}(\theta_{1z} + \theta_{2z}) \quad (52)$$

Substituindo as Eq. (49) a (52) na Eq. (44) e agrupando os coeficientes das variáveis nodais tem-se:

$$v(x) = \left(1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}\right)u_{1y} + \left(x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}\right)\theta_{1z} + \left(\frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3}\right)u_{2y} + \left(\frac{x^3}{L^2} - \frac{x^2}{L}\right)\theta_{2z} \quad (53)$$

Ou ainda:

$$v(x) = N_1(x)u_{1y} + N_2(x)\theta_{1z} + N_3(x)u_{2y} + N_4(x)\theta_{2z} \quad (54)$$

Onde

$$N_1(x) = 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \quad (55)$$

$$N_2(x) = x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \quad (56)$$

$$N_3(x) = \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \quad (57)$$

$$N_4(x) = \frac{x^3}{L^2} - \frac{x^2}{L} \quad (58)$$

Escrevendo a Eq. (54) em notação matricial obtém-se:

$$v(x) = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4] \begin{Bmatrix} u_{1y} \\ \theta_{1z} \\ u_{2y} \\ \theta_{2z} \end{Bmatrix} = [N]\{\delta\} \quad (59)$$

Onde  $N_1$   $N_2$   $N_3$  e  $N_4$  são as funções de interpolação que descrevem a distribuição de deslocamentos em termos dos valores nodais no vetor de deslocamentos nodais  $\{\delta\}$ . Para o elemento fletido, é conveniente introduzir a coordenada adimensional de comprimento.

$$\zeta = \frac{x}{L} \quad (60)$$

Assim a Eq. (53) pode ser reescrita como:

$$v(x) = (1 - 3\zeta^2 + 2\zeta^3)u_{1y} + L(\zeta - 2\zeta^2 + \zeta^3)\theta_{1z} + (3\zeta^2 - 2\zeta^3)u_{2y} + L\zeta^2(\zeta - 1)\theta_{2z} \quad (61)$$

Sendo  $0 \leq \zeta \leq 1$ . Fazendo uso da Eq. (38) em conjunto com a Eq. (59), a distribuição de tensões normais em uma seção transversal localizada em uma posição  $x$  qualquer é dada por:

$$\sigma_x = -yE \frac{d^2[N]}{dx^2} \{\delta\} \quad (62)$$

Uma vez que a tensão normal varia linearmente em uma seção transversal, os valores máximos e mínimos em qualquer seção transversal ocorrem nas superfícies externas do elemento, onde a distância  $y$  da linha neutra é maior.

Os valores das tensões nas duas faces do elemento são iguais e, portanto, a tensão máxima em valor absoluto, pode ser determinada por:

$$\sigma_x = y_{m\acute{a}x} E \frac{d^2[N]}{dx^2} \{\delta\} \quad (63)$$

Substituindo as funções de interpolação e executando as derivadas tem-se:

$$\sigma_x(x) = y_{m\acute{a}x} E \left[ \left( \frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2} \right) u_{1y} + \left( \frac{6x}{L^2} - \frac{4}{L} \right) \theta_{1z} + \left( \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \right) u_{2y} + \left( \frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L} \right) \theta_{2z} \right] \quad (64)$$

Observando-se da Eq. (64) constata-se que a tensão normal ao longo do comprimento do elemento varia linearmente. Desse modo, depois de calculados os deslocamentos é necessário somente calcular os valores de tensão nas seções transversais correspondentes às extremidades dos elementos, isto é, em  $x = 0$  e  $x = L$ . Os valores de tensão nas seções nodais são dadas por:

$$\sigma_x(x = 0) = y_{m\acute{a}x} E \left[ \frac{6}{L^2} (u_{2y} - u_{1y}) - \frac{2}{L} (2\theta_{1z} + \theta_{2z}) \right] \quad (65)$$

$$\sigma_x(x = L) = y_{m\acute{a}x} E \left[ \frac{6}{L^2} (u_{1y} - u_{2y}) + \frac{2}{L} (2\theta_{2z} + \theta_{1z}) \right] \quad (66)$$

#### a. Matriz de rigidez do elemento de viga

Para a obtenção da matriz de rigidez foi considerado o modelo de viga de Bernoulli, no qual é ignorada a energia de deformação referente ao esforço cortante.

É possível a partir da aproximação discretizada para o elemento de viga determinar sua matriz de rigidez, analisando suas tensões, deformações e a energia de deformação do elemento submetido a um carregamento qualquer. A energia de deformação total é expressa como:

$$U_e = \frac{E}{2} \int_V \sigma_x \varepsilon_x dV \quad (67)$$

Onde  $V$  é o volume total do elemento. Substituindo as Eq. (33) e (34) na Eq. (67) encontra-se:

$$U_e = \frac{E}{2} \int_V y^2 \left( \frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 dV \quad (68)$$

Que pode ser escrita como:

$$U_e = \frac{E}{2} \int_0^L \left( \frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 \left( \int_A y^2 dA \right) dx \quad (69)$$

Observa-se que a integral de área corresponde ao momento de inércia  $I_z$  em relação ao eixo perpendicular ao plano de flexão. Assim tem-se:

$$U_e = \frac{EI_z}{2} \int_0^L \left( \frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 dx \quad (70)$$

A Eq. (70) representa a energia de deformação de flexão em qualquer seção transversal do elemento, desde que atendidas às suposições feitas inicialmente para o modelo. Para o cálculo da energia de deformação, substitui-se o deslocamento discretizado da Eq. (54) para obter a aproximação da energia de deformação dada pela Eq. (70).

$$U_e = \frac{EI_z}{2} \int_0^L \left( \frac{d^2 N_1}{dx^2} u_{1y} + \frac{d^2 N_2}{dx^2} \theta_{1z} + \frac{d^2 N_3}{dx^2} u_{2y} + \frac{d^2 N_4}{dx^2} \theta_{2z} \right)^2 dx \quad (71)$$

Para a função da energia de deformação com relação ao deslocamento nodal  $u_{1y}$  obtém-se a força transversal no nó 1 a partir da aplicação do primeiro Teorema de Castigliano, como se segue.

$$\frac{\partial U_e}{\partial u_{1y}} = f_{1y} = EI_z \int_0^L \left( \frac{d^2 N_1}{dx^2} u_{1y} + \frac{d^2 N_2}{dx^2} \theta_{1z} + \frac{d^2 N_3}{dx^2} u_{2y} + \frac{d^2 N_4}{dx^2} \theta_{2z} \right) \frac{d^2 N_1}{dx^2} dx \quad (72)$$

A aplicação do teorema com relação à rotação do nó 1 resulta em:

$$\frac{\partial U_e}{\partial \theta_{1z}} = m_{1z} = EI_z \int_0^L \left( \frac{d^2 N_1}{dx^2} u_{1y} + \frac{d^2 N_2}{dx^2} \theta_{1z} + \frac{d^2 N_3}{dx^2} u_{2y} + \frac{d^2 N_4}{dx^2} \theta_{2z} \right) \frac{d^2 N_2}{dx^2} dx \quad (73)$$

Encontra-se no nó 2:

$$\frac{\partial U_e}{\partial u_{2y}} = f_{2y} = EI_z \int_0^L \left( \frac{d^2 N_1}{dx^2} u_{1y} + \frac{d^2 N_2}{dx^2} \theta_{1z} + \frac{d^2 N_3}{dx^2} u_{2y} + \frac{d^2 N_4}{dx^2} \theta_{2z} \right) \frac{d^2 N_3}{dx^2} dx \quad (74)$$

e

$$\frac{\partial U_e}{\partial \theta_{2z}} = m_{2z} = EI_z \int_0^L \left( \frac{d^2 N_1}{dx^2} u_{1y} + \frac{d^2 N_2}{dx^2} \theta_{1z} + \frac{d^2 N_3}{dx^2} u_{2y} + \frac{d^2 N_4}{dx^2} \theta_{2z} \right) \frac{d^2 N_4}{dx^2} dx \quad (75)$$

Os valores dos quatro deslocamentos nodais e das quatro forças nodais aplicadas são relacionados algebricamente nas Eq. (72) a (75). Essas equações podem ser representadas como:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{1y} \\ \theta_{1z} \\ u_{2y} \\ \theta_{2z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{1y} \\ m_{1z} \\ f_{2y} \\ m_{2z} \end{Bmatrix} \quad (76)$$

Onde  $k_{mn}$ ,  $m, n = 1,4$  são os coeficientes da matriz de rigidez. Comparando as Eq. (72) a (75) com a Eq. (76) observa-se que:

$$k_{mn} = k_{nm} = EI_z \int_0^L \frac{d^2 N_m}{dx^2} \frac{d^2 N_n}{dx^2} dx \quad m, n = 1,4 \quad (77)$$

É conveniente converter a integração para o comprimento adimensional  $\zeta = \frac{x}{L}$ , antes de computar os coeficientes de rigidez, denotando:

$$\int_0^L f(x) dx = \int_0^1 f(\zeta) L d\zeta \quad (78)$$

$$\frac{d}{dx} = \frac{1}{L} \frac{d}{d\zeta} \quad (79)$$

Assim, as integrações da Eq. (77) tornam-se:

$$k_{mn} = k_{nm} = EI_z \int_0^L \frac{d^2 N_m}{dx^2} \frac{d^2 N_n}{dx^2} dx = \frac{EI_z}{L^3} \int_0^1 \frac{d^2 N_m}{d\zeta^2} \frac{d^2 N_n}{d\zeta^2} d\zeta \quad m, n = 1, 4 \quad (80)$$

Dessa forma, é possível calcular os coeficientes de rigidez como:

$$k_{11} = \frac{EI_z}{L^3} \int_0^1 (12\zeta - 6)^2 d\zeta = \frac{36EI_z}{L^3} \left( \frac{4}{3} - 2 + 1 \right) = \frac{12EI_z}{L^3} \quad (81)$$

$$k_{12} = k_{21} = \frac{EI_z}{L^3} \int_0^1 (12\zeta - 6)(6\zeta - 4)L d\zeta = \frac{6EI_z}{L^2} \quad (82)$$

$$k_{13} = k_{31} = \frac{EI_z}{L^3} \int_0^1 (12\zeta - 6)(6 - 12\zeta)L d\zeta = \frac{-6EI_z}{L^3} \quad (83)$$

$$k_{14} = k_{41} = \frac{EI_z}{L^3} \int_0^1 (12\zeta - 6)(6\zeta - 2)L d\zeta = \frac{6EI_z}{L^2} \quad (84)$$

Continuando com a integração encontra-se:

$$k_{22} = \frac{4EI_z}{L} \quad (85)$$

$$k_{23} = k_{32} = \frac{-6EI_z}{L^2} \quad (86)$$

$$k_{24} = k_{42} = \frac{2EI_z}{L} \quad (87)$$

$$k_{33} = \frac{12EI_z}{L^3} \quad (88)$$

$$k_{34} = k_{43} = \frac{-6EI_z}{L^3} \quad (89)$$

$$k_{44} = \frac{4EI_z}{L} \quad (90)$$

Assim é possível escrever a matriz de rigidez completa do elemento fletido, no sistema local de coordenadas como mostrado na Eq. (91), a seguir:

$$[k^e] = \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (91)$$

#### b. Matriz de massa do elemento de viga

Através da formulação variacional a matriz de massa é obtida conforme Rao (2011). Para a obtenção da matriz de massa por meio desse método, calcula-se a parte do funcional de energia relacionada com a energia cinética. A energia cinética de um elemento com densidade  $\rho$  que ocupa o domínio  $\Omega^e$  e se move com velocidade de campo  $\{v^e\}$  é igual a:

$$T^e = \frac{1}{2} \int_{\Omega^e} \rho \{v^e\}^T \{v^e\} d\Omega^e \quad (92)$$

Seguindo o princípio do MEF, a obtenção do campo de velocidades do elemento é feita a partir da interpolação por funções de forma de deslocamentos nodais como se segue:

$$\{v^e\} = [N^e] \{\dot{u}^e\} \quad (93)$$

Onde  $\{\dot{u}^e\}$  é o vetor das velocidades nodais do elemento e  $[N^e]$  é a matriz de funções de forma dados respectivamente por:

$$[N^e] = N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4 \ \dots \ N_n \quad (94)$$

e



$$\{\dot{u}^e\} = \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \\ \vdots \\ \dot{u}_n \end{Bmatrix} \quad (95)$$

Substituindo a Eq. (93) na Eq. (92) tem-se:

$$T^e = \frac{1}{2} \int_{\Omega^e} \rho \{\dot{u}^e\}^T [N^e]^T [N^e] \{\dot{u}^e\} d\Omega^e \quad (96)$$

A integração indicada na Eq. (96) é realizada em todo o volume do elemento. Para elementos lineares prismáticos pode-se expressar a energia cinética do elemento como mostrado na Eq. (97).

$$T^e = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A \{\dot{u}^e\}^T [N^e]^T [N^e] \{\dot{u}^e\} dx \quad (97)$$

Movendo as velocidades  $\{\dot{u}^e\}$  para fora da integral encontra-se:

$$T^e = \frac{1}{2} \{\dot{u}^e\}^T \int_0^L \rho A [N^e]^T [N^e] dx \{\dot{u}^e\} = \frac{1}{2} \{\dot{u}^e\}^T [m^e] \{\dot{u}^e\} \quad (98)$$

A partir da aplicação das funções de forma usadas para a obtenção da matriz de rigidez na Eq. (110), a matriz de massa obtida é denominada matriz de massa consistente. Para elementos lineares prismáticos, a matriz de massa consistente pode ser calculada por:

$$[m^e] = \int_0^L \rho A [N^e]^T [N^e] dx \quad (99)$$

Substituindo na Eq. (99) as funções de forma de um elemento de viga, encontra-se a matriz de massa consistente de um elemento de viga de Euler Bernoulli, como apresentada na Eq. (100).

$$[m^e] = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (100)$$

#### c. Obtenção das matrizes de rigidez e massa da estrutura

Para a obtenção das matrizes de rigidez e massa da estrutura, é forçada a compatibilidade entre os deslocamentos nodais locais dos elementos com as coordenadas de deslocamentos globais da estrutura. Essa compatibilidade é realizada, fazendo-se uso das matrizes de incidência cinemática  $[\beta^e]$  conforme Moreira (1977).

As matrizes de incidência cinemática, também conhecidas como matrizes binárias são obtidas relacionando os GDLs da estrutura com seus deslocamentos nodais, onde as posições  $i, j$ , referentes ao elemento que se deseja escrever matricialmente, é preenchida com valor um e nas demais posições com valor zero.

Depois de obtidas as matrizes de incidência cinemática, é possível escrever a matriz de rigidez global da estrutura e a matriz de massa global da estrutura fazendo uso da Eq. (101) e da Eq. (102) respectivamente:

$$[K] = \sum_{e=1}^n [\beta^e]^T [K^e] [\beta^e] \quad (101)$$

$$[M] = \sum_{e=1}^n [\beta^e]^T [M^e] [\beta^e] \quad (102)$$

Sendo  $n$  o número de elementos da estrutura.

### 4.3 Análise Modal Teórica De Estruturas

A Análise Modal tornou-se uma ferramenta importante no estudo e melhoria das características dinâmicas de estruturas na engenharia em geral. No campo da engenharia civil se tem, a cada dia, o uso de novos materiais e a criação de estruturas mais complexas, o que gera uma necessidade de análise do comportamento estrutural cada vez maior. Assim o estudo, elaboração e otimização

das técnicas de análise modal tiveram grande avanço nos últimos anos (HE; FU, 2001).

He e Fu (2001) definem Análise Modal como um processo de determinação das características dinâmicas inerentes de um sistema, em forma de frequências naturais, fatores de amortecimento e modos de vibrar, usados para formular um modelo matemático para descrever o comportamento dinâmico do sistema e a segmenta em Análise Modal Teórica e Experimental.

A análise modal teórica baseia-se na elaboração de um modelo matemático composto das matrizes que apresentam as propriedades físicas da estrutura, massa, rigidez e amortecimento e sua distribuição espacial. A esse modelo dá-se o nome de modelo espacial. De posse das matrizes de massa, rigidez e amortecimento formula-se um problema de autovalor, o qual fornece as características dinâmicas da estrutura, frequências naturais, modos de vibrar e fatores de amortecimento, e é denominado modelo modal. (NEVES, 2006)

A seguir é apresentada a solução para um sistema com dois GDLs a partir do método da superposição modal.

Tem-se que o vetor de deslocamento pode ser escrito conforme a Eq. (103) a seguir:

$$\{u\} = [\Phi]\{q\} \quad (103)$$

Onde:

$\{q\}$  é o vetor de deslocamentos no espaço modal e

$[\Phi]$  é a matriz modal.

Como se sabe, o vetor de aceleração pode ser obtido a partir da derivada segunda do vetor de deslocamento, na Eq. (104) a seguir:

$$\{\ddot{u}\} = -\omega_n^2\{u\} \quad (104)$$

Reescrevendo  $\{\ddot{u}\}$  em função de  $\{q\}$ :

$$\{\ddot{u}\} = -\omega_n^2[\Phi]\{q\} \quad (105)$$

Assim, a Eq. (25) pode ser reescrita como:

$$(-\omega_n^2[M][\Phi] + [K][\Phi])\{q\} = \{0\} \quad (106)$$

A parcela contendo o deslocamento modal do sistema é diferente de zero, assim pode-se reescrever a Eq. (106) da seguinte maneira:

$$(-\omega_n^2[M][\Phi] + [K][\Phi]) = [0] \quad (107)$$

Somando-se  $\omega_n^2[M][\Phi]$  em ambos os lados obtém-se:

$$[K][\Phi] = \omega_n^2[M][\Phi] \quad (108)$$

Pré multiplicando a Eq. (108) por  $[M]^{-1}$

$$[M]^{-1}[K][\Phi] = \omega_n^2[I][\Phi] \quad (109)$$

Onde:

$$[A] = [M]^{-1}[K] \quad (110)$$

$$\lambda = \omega_n^2 \quad (111)$$

Com isso, é possível escrever o problema de autovalores e autovetores como se segue:

$$[A]\{x\} = \lambda[I]\{x\} \quad (112)$$

Onde:

$[A]$  = Matriz dinâmica;

$\lambda$  = Autovalor;

$\{x\}$  = Autovetor;

Ou ainda:

$$([A] - \lambda[I]) \{x\} = \{0\} \quad (113)$$

A determinação dos autovalores se dá pela resolução da Eq. (114) a seguir:

$$\det ([A] - \lambda[I]) = 0 \quad (114)$$

Após determinado os autovalores, substitui-se os mesmos na Eq. (113) e obtêm-se os autovetores. Com os autovalores em mãos determinam-se as frequências naturais da estrutura e com os autovetores determinam-se os modos de vibração para cada uma dessas frequências naturais.

#### 4.4 Detecção De Danos Em Estruturas Por Meio De Ensaio Dinâmicos

Atualmente existem diversos métodos para a detecção e quantificação de danos em estruturas. Dentre os primeiros métodos a serem utilizados para esse fim, pode-se citar os de raio X, ressonância magnética e ultrassom, tais métodos, no entanto, demandavam tempo significativo e tinham em geral um alto custo, tornando necessário o desenvolvimento e refinamento de técnicas mais eficientes (MARCY, 2013).

Adams *et al.* (1978 *apud* GENOVESE, 2000, p.08)<sup>1</sup> realizaram um dos primeiros estudos que levava em conta as propriedades dinâmicas dos elementos. O método consistia em simular o dano em barras submetidas a vibração axial, empregando uma mola em determinado local da barra e a partir das respostas dinâmicas do elemento conseguiram localizar o dano e sua intensidade.

Nota-se, a grande quantidade de estudos realizados levando em conta o comportamento dinâmico das estruturas, os quais diversificam-se apenas na abordagem utilizada para estabelecer alguma relação entre a excitação e a resposta estrutural. Isso se deve à possibilidade de avaliação sem que haja danificação da estrutura em estudo, gerando uma busca contínua pela melhoria e desenvolvimento

---

<sup>1</sup> ADAMS, R. D., CAWLEY, P., Pye, C. J. e Stone B. J. (1978). **A vibration technique for nondestructively assessing the integrity of structures**, Journal of Mechanical Engineering, Science, 20(2), 93-100.

de técnicas de análise não destrutiva. Neste trabalho será abordado o Método do Erro na Equação de Movimento proposto por Genovese (2000).

#### 4.4.1 Método do Erro na Equação de Movimento

O Método do Erro na Equação de Movimento baseia-se em duas etapas. Inicialmente se tem a localização do dano na estrutura, a partir do desequilíbrio ou erro na equação de movimento. Após isso, é realizada a quantificação do dano através da minimização do erro na mencionada equação (GENOVESE, 2000).

A equação de movimento, no domínio modal, de uma estrutura sem danos e com amortecimento nulo, submetida à vibração livre, pode ser escrita como:

$$[K][\Phi] - [M][\phi][\Lambda] = [0] \quad (115)$$

Onde:

$[M]$  = Matriz global de massa da estrutura;

$[\Phi]$  = Matriz modal;

$[K]$  = Matriz global de rigidez da estrutura;

$[\Lambda]$  = Matriz espectral;

Quando a estrutura possui danos, suas propriedades são alteradas pelo dano, assim, seu equacionamento passa a ser dado como:

$$[K'][\phi'] - [M'][\phi'][\Lambda'] = [0] \quad (116)$$

Onde:

$[M']$  = Matriz global de massa da estrutura danificada;

$[\phi']$  = Matriz modal da estrutura danificada;

$[K']$  = Matriz global de rigidez da estrutura danificada;

$[\Lambda']$  = Matriz espectral da estrutura danificada;

Segundo Adams et al (1978 *apud* GENOVESE, 2000)<sup>2</sup> o dano não afeta, em geral, a matriz de massa de maneira significativa, assim pode-se considerar:

$$[M'] \cong [M] \quad (117)$$

Dessa maneira, a equação (116) pode ser reescrita como:

$$[K'][\phi'] - [M][\phi'][\Lambda'] = [0] \quad (118)$$

Para obter a matriz de rigidez da estrutura danificada Genovese (2000) propõe pré-multiplicar a matriz de rigidez da estrutura sem dano por um vetor como mostrado na Eq. (119). Desta forma, tem-se do lado direito da Eq. (119) uma matriz resíduo  $[E]$ .

$$\alpha [K] [\phi'] - [M] [\phi'] [\Lambda'] = [E] \quad (119)$$

Onde:

$[E]$  = Matriz de erro na equação de movimento.

Depois de gerada a matriz  $[E]$ , a partir da análise das posições  $(i, j)$ , a posição  $E_{i,j}$  onde o valor encontrado seja diferente de zero, determina as coordenadas locais do elemento danificado tornando possível localizar o dano.

De acordo com Genovese (2000), o vetor  $\alpha$  é igual à transposta do vetor identidade, com exceção da linha correspondente ao local do dano, isto é:

$$\alpha = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ \dots \ 1 \ p \ 1 \ \dots \ 1 \ 1 \ 1 \ \dots]^T \quad (120)$$

---

<sup>2</sup> ADAMS, R. D., CAWLEY, P., Pye, C. J. e Stone B. J. (1978). **A vibration technique for nondestructively assessing the integrity of structures**, Journal of Mechanical Engineering, Science, 20(2), 93-100.

O valor de  $p$  varia entre 0 e 1, e representa a porcentagem de rigidez remanescente no elemento, sendo que quando  $p = 1$  tem-se que o elemento não apresenta danos.

O processo iterativo consiste em variar o valor de  $p$  entre 0 e 1, e escrever a norma da matriz  $[E]$  em função de  $p$ , para se obter o mínimo da norma da função  $E(p)$ . Assim o valor de  $p$  que minimiza a norma da matriz  $[E]$  representa a redução na rigidez do elemento danificado, em relação a um elemento íntegro.

Com o valor de  $p$ , é possível a determinação da porcentagem de dano no elemento conforme a Eq. (121):

$$(1 - p) * 100 = \textit{perda de rigidez do elemento danificado (\%)} \quad (121)$$

Uma alteração sugerida por Brasiliano et al (2012, p. 2500) na quantificação do dano é aplicação do coeficiente  $\alpha$  apenas na matriz de rigidez do elemento danificado. Assim, a matriz global de rigidez considerada na equação do erro residual passa a ter coeficientes de rigidez com alguns valores reduzidos, visto que estes representam a parcela referente ao elemento danificado, conforme Eq. (122) a seguir:

$$[K''] [\phi'] - [M] [\phi'] [\Lambda'] = [E] \quad (122)$$

Onde

$$[K''] = [K_{ei}] + p [K_{ed}] \quad (123)$$

$[K_{ed}]$  = Matriz de rigidez global com elementos danificados;

$[K_{ei}]$  = Matriz de rigidez global com elementos íntegros.



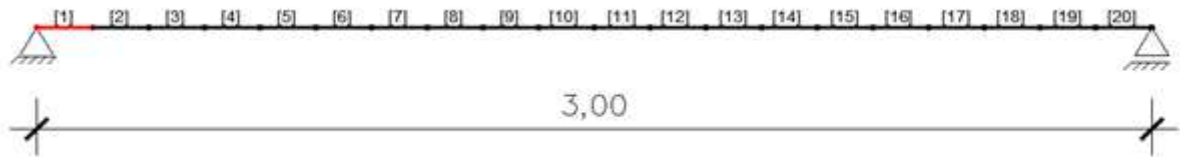
## 5 MÉTODOS

Os itens a seguir descrevem as etapas realizadas para o desenvolvimento do trabalho.

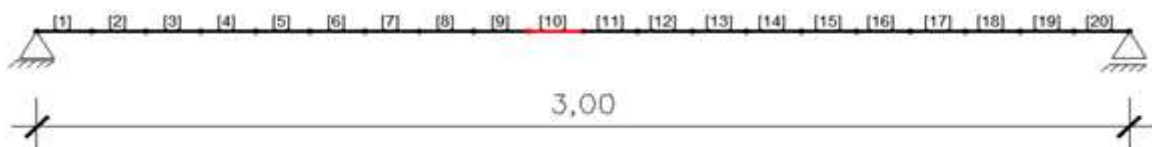
### 5.1 Modelagem Numérica E Análise Modal

A modelagem numérica e análise modal foram realizadas em duas vigas de aço, com perfil *I*, sendo a primeira biapoiada e a segunda engastada-livre, ambas com um comprimento de três metros (3 m). Foram aplicados danos de 2% e 40%, separadamente, próximo aos apoios (elemento 1) e próximo ao meio do vão (elemento 10), para as vigas, conforme as Fig. (10) a (13) apresentadas a seguir:

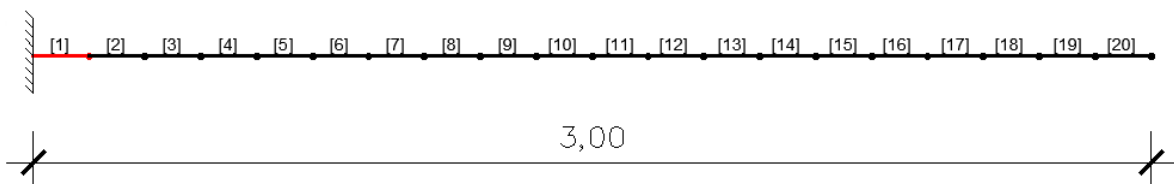
**Figura 10 - Viga Biapoiada com dano no elemento 1**



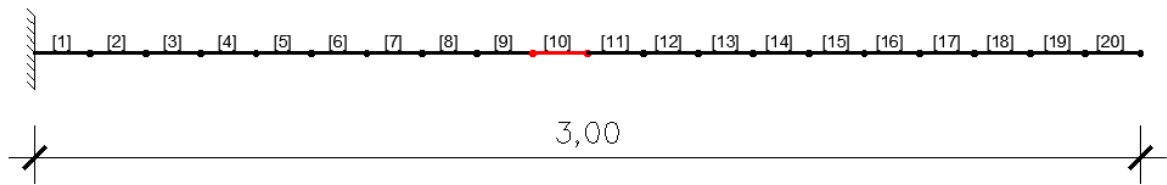
**Figura 11 - Viga Biapoiada com dano no elemento 10**



**Figura 12 - Viga Engastada com dano no elemento 1**

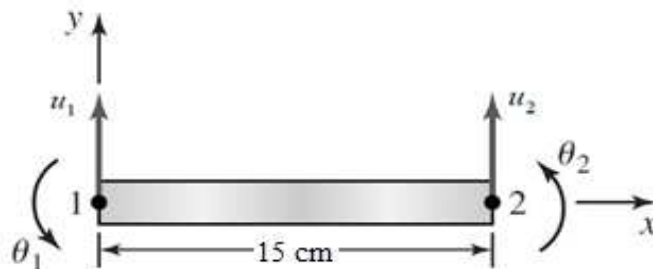


**Figura 13 - Viga Engastada com dano no elemento 10**



A modelagem numérica foi feita a partir do Método dos Elementos Finitos, discretizando as vigas em vinte elementos de viga com quinze centímetros ( $15\text{ cm}$ ) de comprimento conforme a Fig. (14) a seguir:

**Figura 14 - Deslocamentos nodais do elemento de viga**



**Fonte:** Adaptado de Hutton (2004)

Para a avaliação da sensibilidade do método do erro na equação de movimento, no que tange ao grau de danificação e à posição dos danos, foram determinados os parâmetros modais das vigas para quatro cenários de danificação, conforme Tabela 1. Ambas as vigas simuladas possuem seção transversal  $I$  ( $W 310 \times 44,5$ ), feitas em aço.

**Tabela 1** Cenários de danificação estudados

Cenário	Elemento danificado	Redução no momento inércia do elemento
1	1	2%
2	1	40%
3	10	2%
4	10	40%

Utilizando o MEF foram montadas as matrizes globais de massa e de rigidez da viga nas condições íntegra e danificada conforme cenários de danificação mostrados na Tabela 1. De posse dessas matrizes foi realizada a Análise Modal das mesmas a fim de se obter os autovalores e autovetores para cada caso.

Para a implementação computacional do MEF foi utilizado o programa de código aberto Scilab versão 5.5.2.

## **5.2 Localização E Quantificação Dos Danos**

Uma vez obtidas as matrizes de massa e de rigidez e os parâmetros modais das vigas (frequências naturais e modos de vibração), para os quatro cenários de danificação, mostrados na Tabela 1, foi aplicado o Método do Erro na Equação de Movimento proposto por Genovese (2000), com alterações sugeridas por Brasiliano et al (2012), com o objetivo de localizar os danos e avaliar sua severidade.

Foram realizadas quatro simulações para cada viga, conforme a Tabela 1, sendo que na primeira simulação o elemento sofreu redução de 2% no valor de sua inércia e na segunda simulação a redução foi de 40%. A partir disso, foram plotadas as matrizes de resíduos referentes a cada simulação.

Com as matrizes de resíduos em mãos a partir da análise das linhas com valores não nulos é possível identificar os GDLs do elemento danificado, visto que nas linhas referentes aos GDLs relacionados com o elemento danificado, o valor é diferente de zero, indicando que há alterações nas propriedades físicas do mesmo.

Como a viga foi dividida em vinte elementos, a mesma possui vinte e um nós, sendo que em cada um deles têm-se dois graus de liberdade. Desse modo, as matrizes referentes às propriedades do elemento, rigidez, massa, modos de vibrar, e frequências naturais, possuem cada uma delas, antes da aplicação das condições de contorno, ordem igual a (42 x 42).

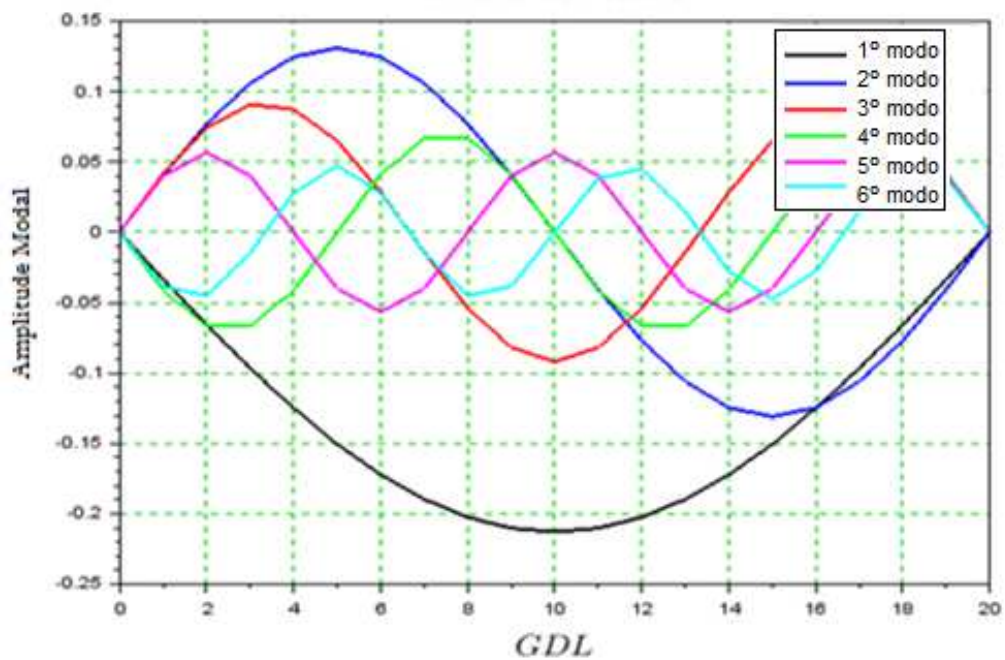
## 6 RESULTADOS

### 6.1 Análise Das Diferenças Nos Modos De Flexão E Nas Frequências Naturais Das Vigas

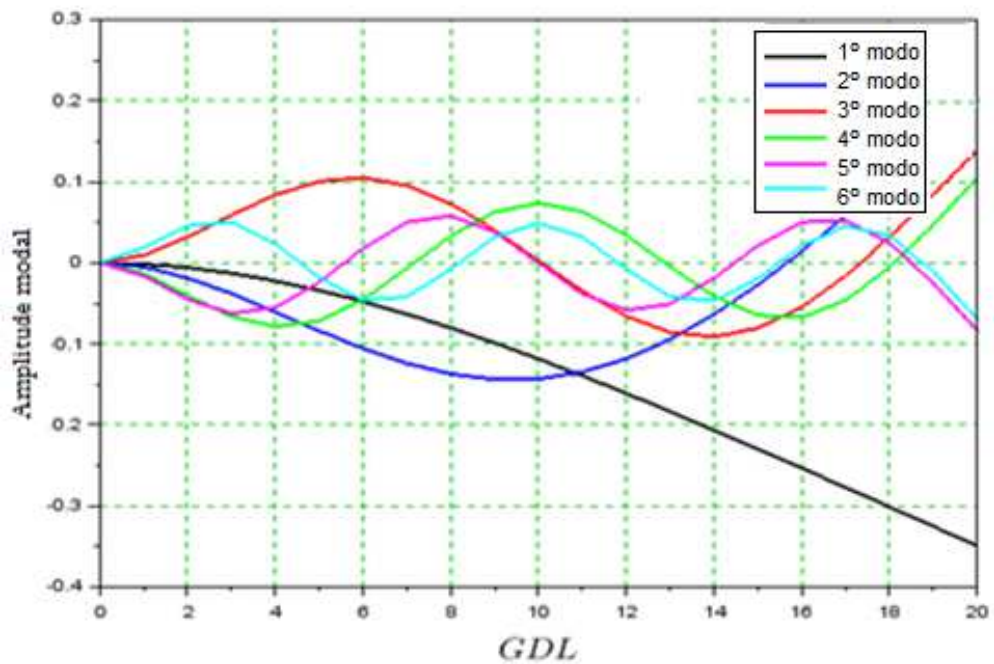
#### 6.1.1 Análise dos modos de flexão das vigas

Nas figuras 15 e 16 a seguir, são apresentados os seis primeiros modos de flexão da viga biapoiada, e da viga engastada-livre, respectivamente, ambas sem nenhum dano aplicado.

Figura 15 - Modos de Flexão Viga Íntegra (biapoiada)

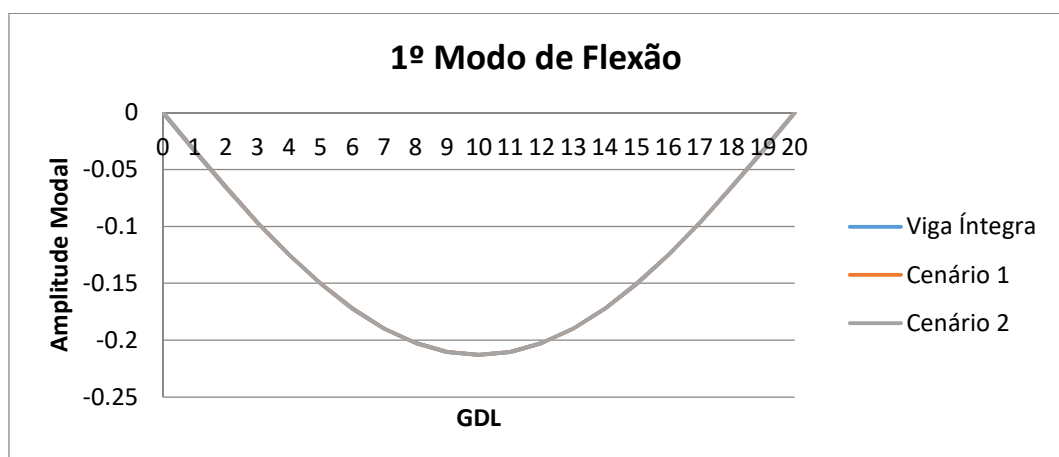


**Figura 16 - Modos de Flexão Viga Íntegra (Viga Engastada-livre)**

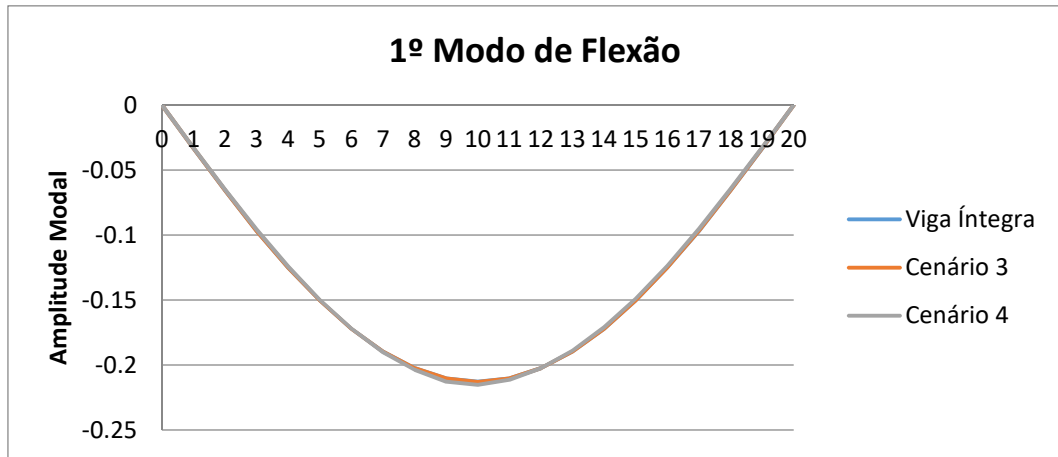


Para a análise dos modos de flexão, foram plotados gráficos sobrepondo os seis primeiros modos referentes a cada cenário de danificação, para cada viga, como se segue nos gráficos 1 a 24.

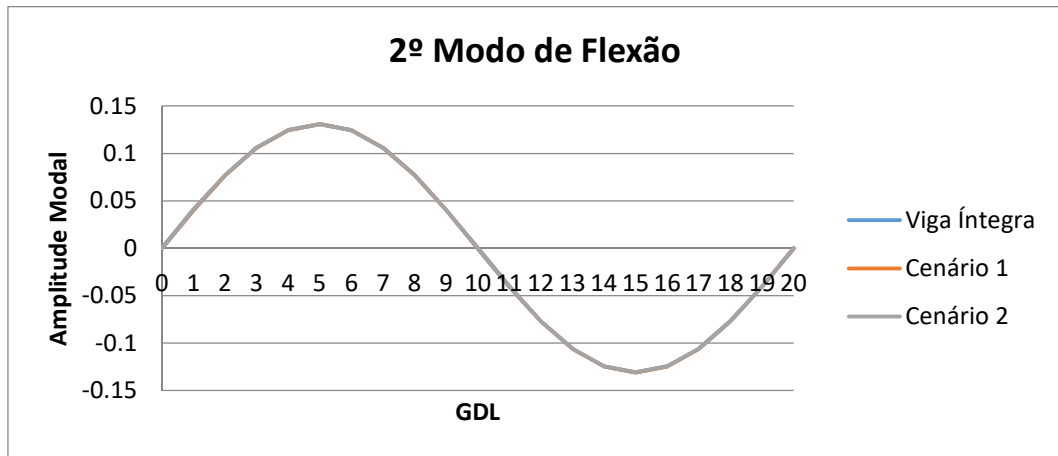
a) Modos de flexão viga biapoiada



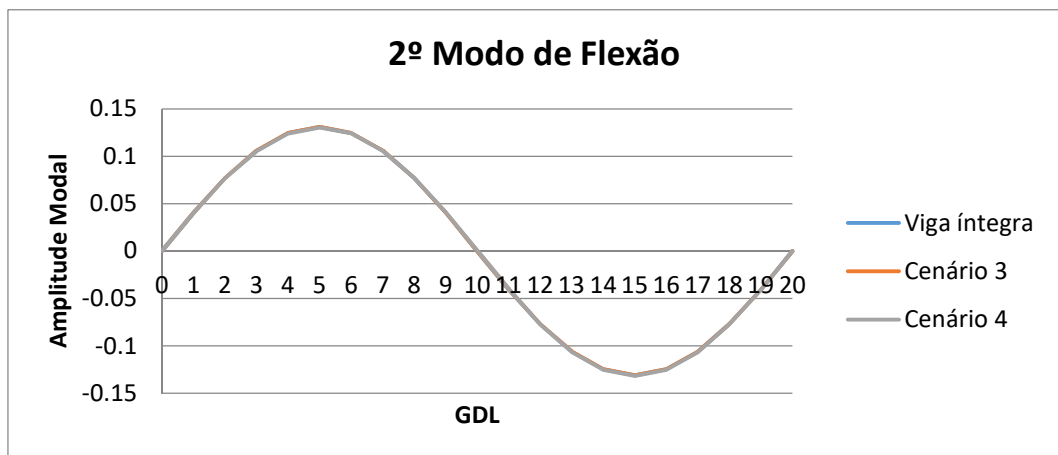
**Gráfico 1 1º Modo de Flexão (Cenário de danificação 1 e 2)**



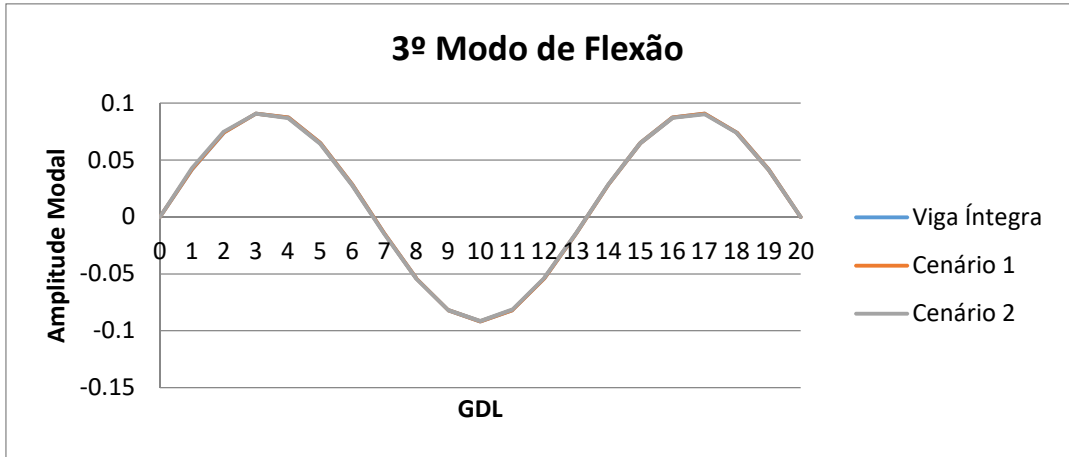
**Gráfico 2** 1º Modo de Flexão (Cenário de danificação 3 e 4)



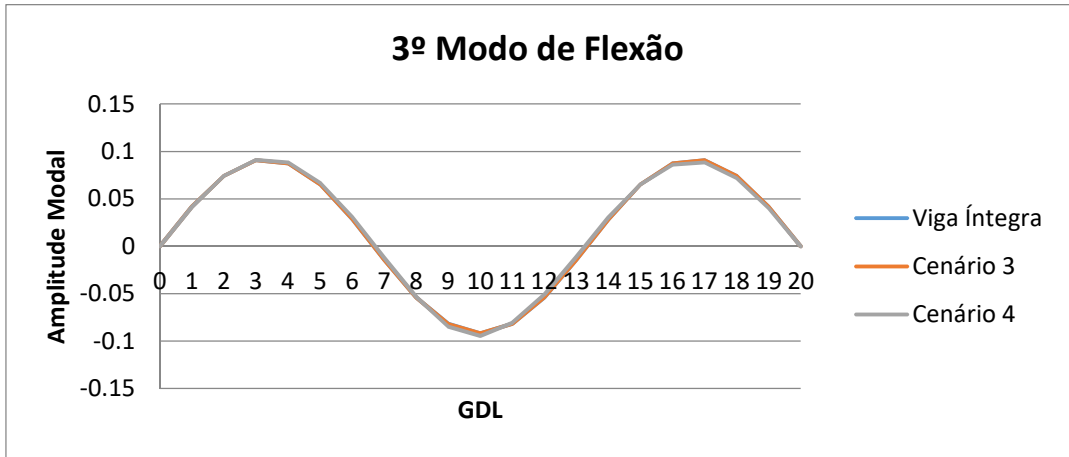
**Gráfico 3** 2º Modo de Flexão (Cenário de danificação 1 e 2)



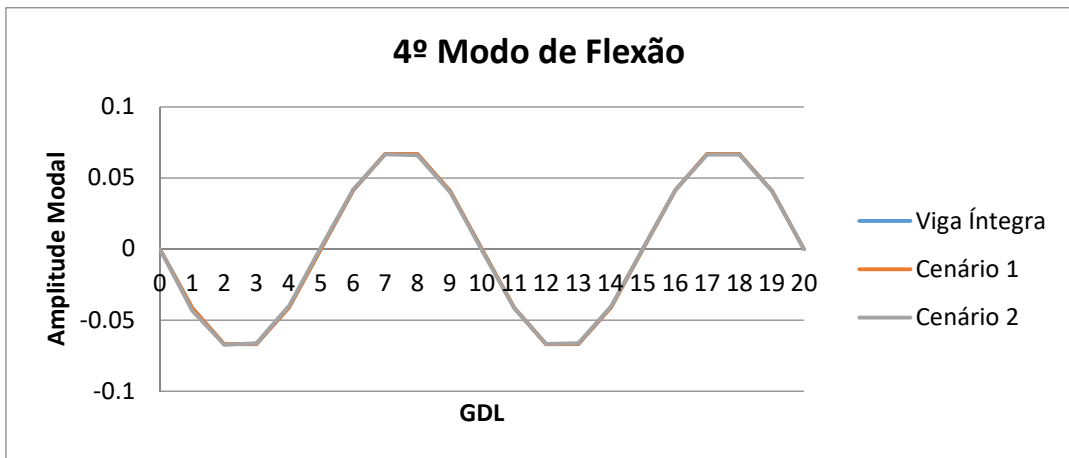
**Gráfico 4** 2º Modo de Flexão (Cenário de danificação 3 e 4)



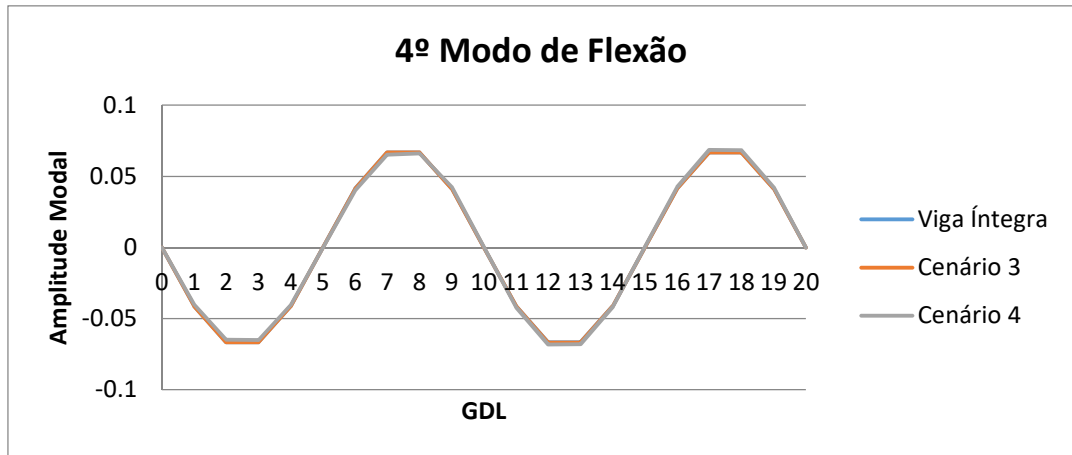
**Gráfico 5** 3º Modo de Flexão (Cenário de danificação 1 e 2)



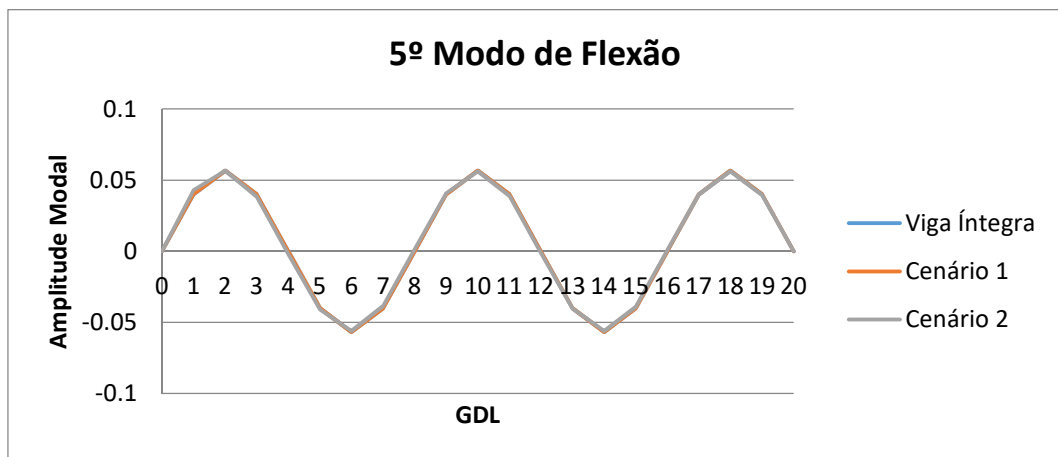
**Gráfico 6** 3º Modo de Flexão (Cenário de danificação 3 e 4)



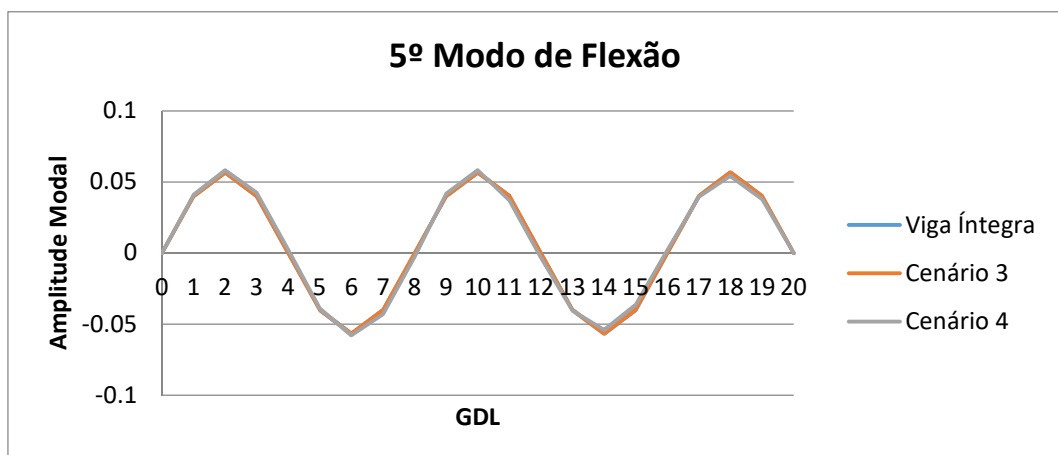
**Gráfico 7** 4º Modo de Flexão (Cenário de danificação 1 e 2)



**Gráfico 8** 4º Modo de Flexão (Cenário de danificação 3 e 4)

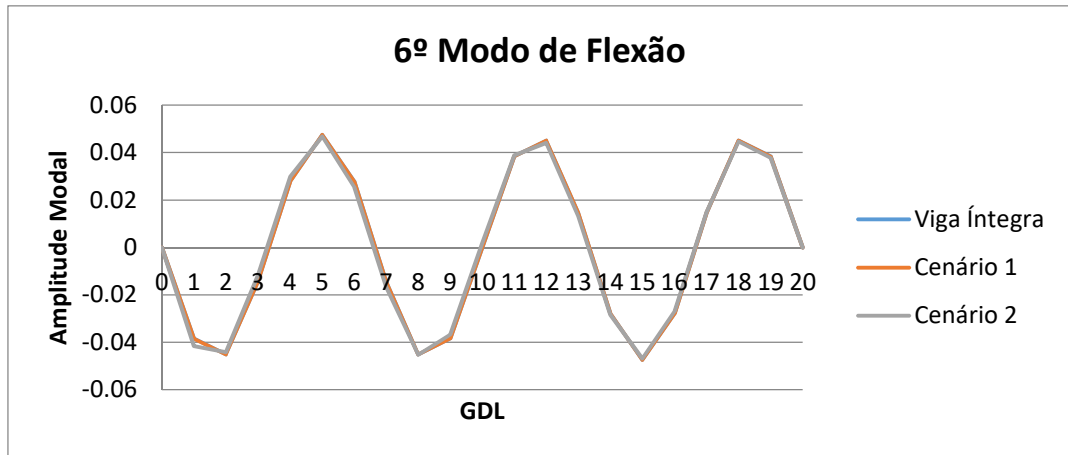


**Gráfico 9** 5º Modo de Flexão (Cenário de danificação 1 e 2)

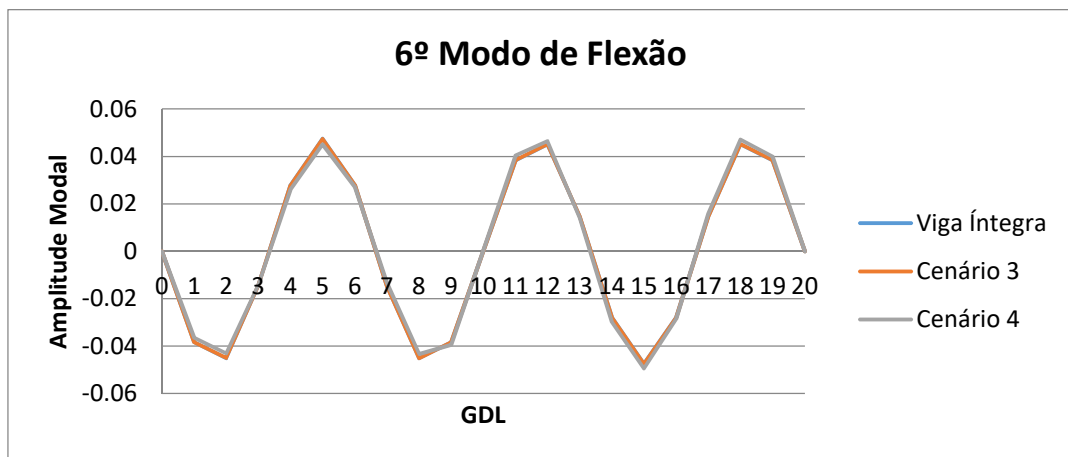


**Gráfico 10** 5º Modo de Flexão (Cenário de danificação 3 e 4)





**Gráfico 11** 6º Modo de Flexão (Cenário de danificação 1 e 2)



**Gráfico 12** 6º Modo de Flexão (Cenário de Danificação 3 e 4)

A partir da análise dos modos de flexão da viga biapoiada não foi possível constatar a existência de danos com porcentagem igual a 2%, visto que as diferenças para esta quantidade de dano são quase imperceptíveis a olho nu. Já para os danos de 40%, ficou mais visível a existência de alterações nos modos de flexão, que apesar de não apontar a localização do dano, indicou sua existência.

## b) Modos de flexão viga engastada-livre

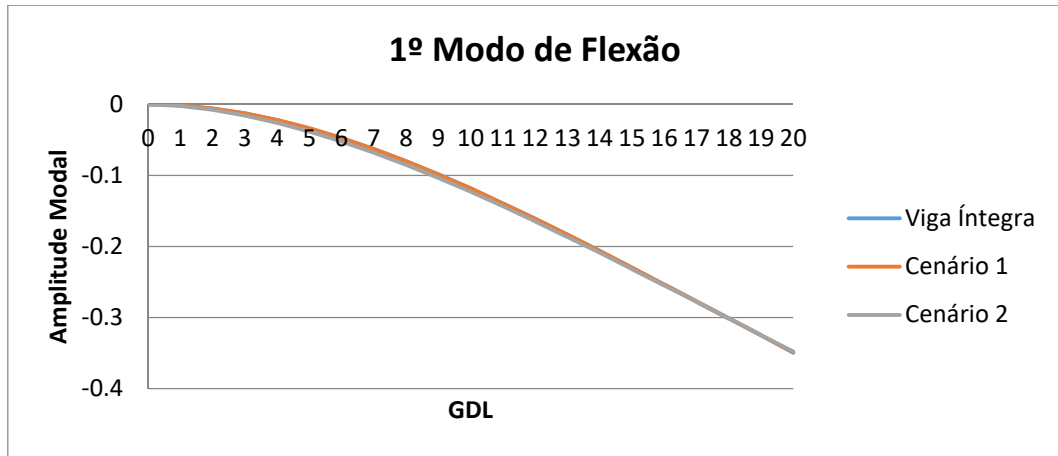


Gráfico 13 1º Modo de Flexão (Cenário de danificação 1 e 2)

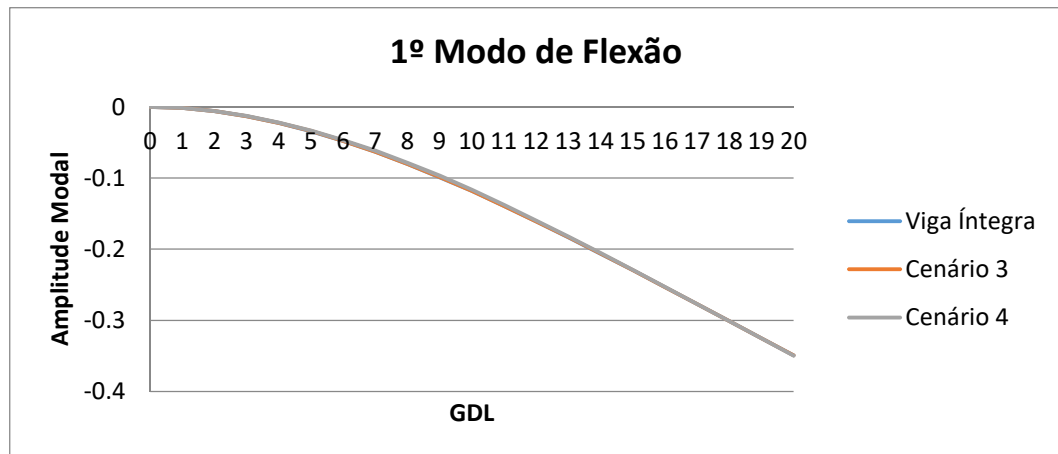


Gráfico 14 1º Modo de Flexão (Cenário de danificação 3 e 4)

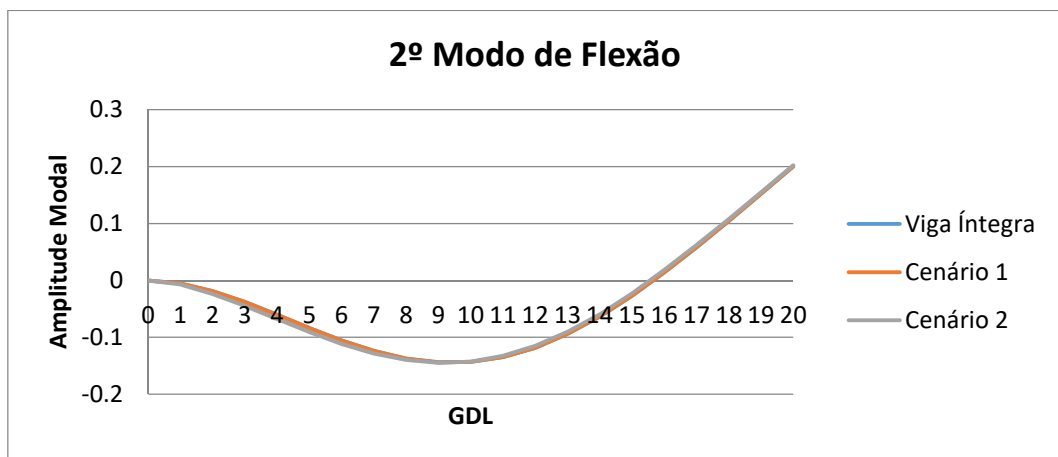
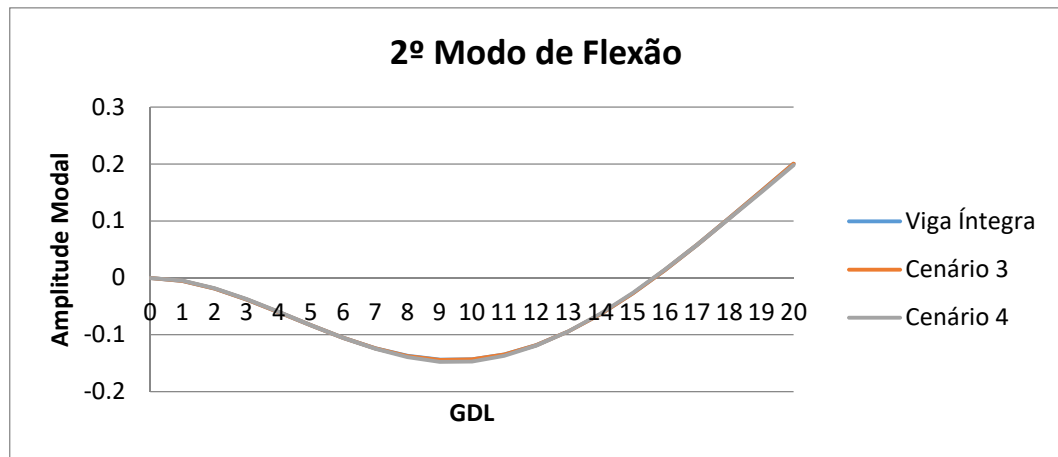
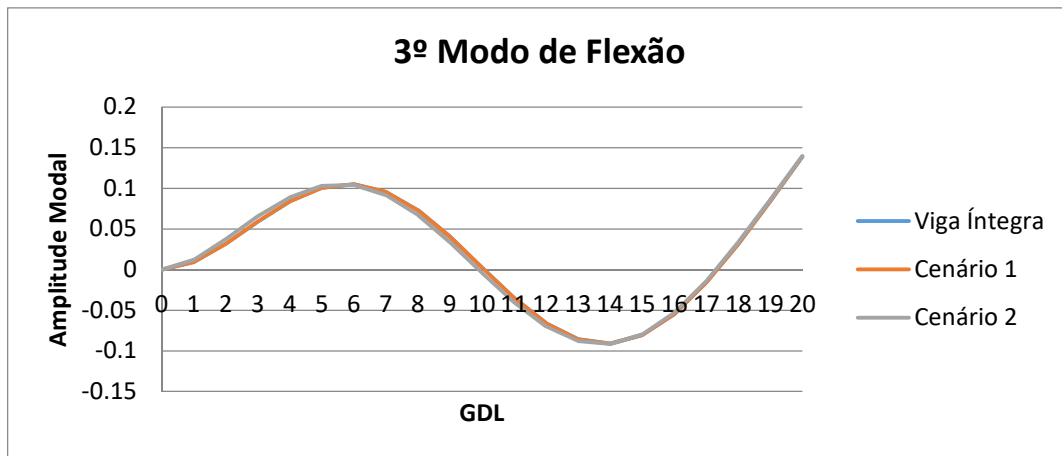


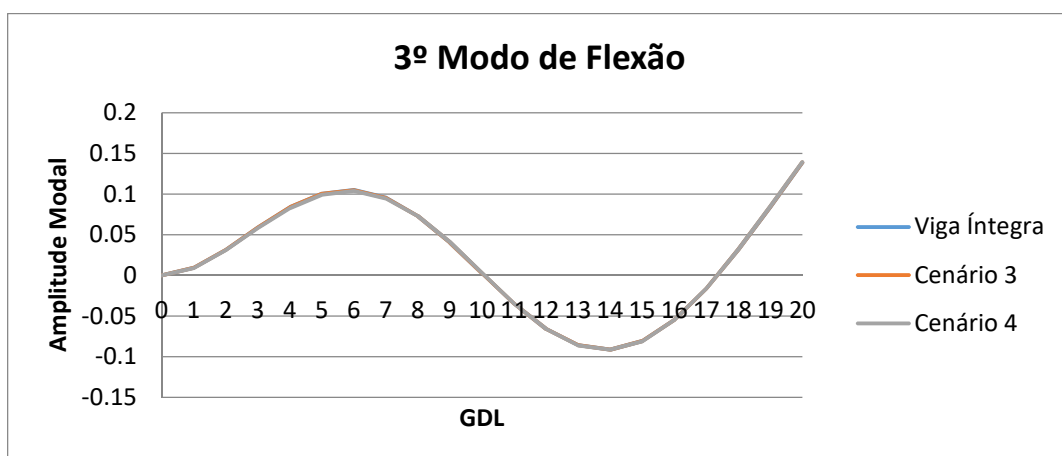
Gráfico 15 2º Modo de Flexão (Cenário de danificação 1 e 2)



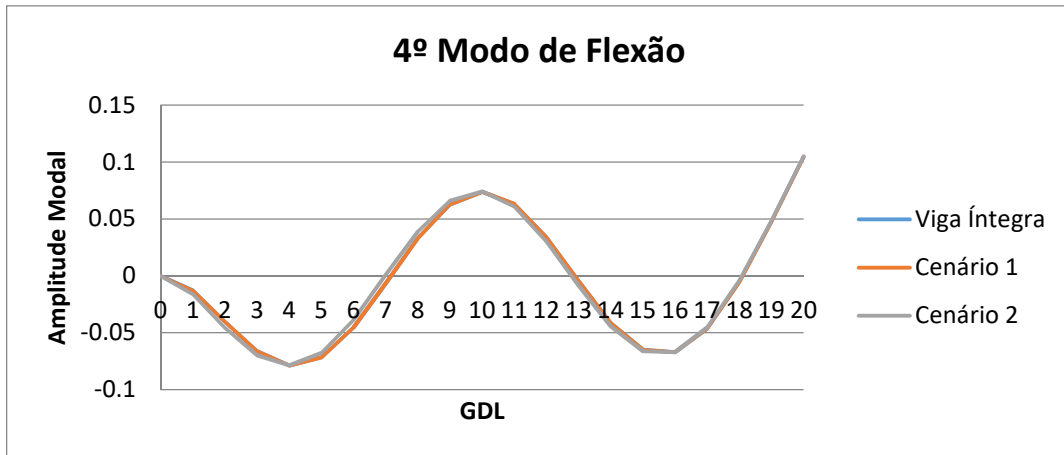
**Gráfico 16** 2º Modo de Flexão (Cenário de danificação 3 e 4)



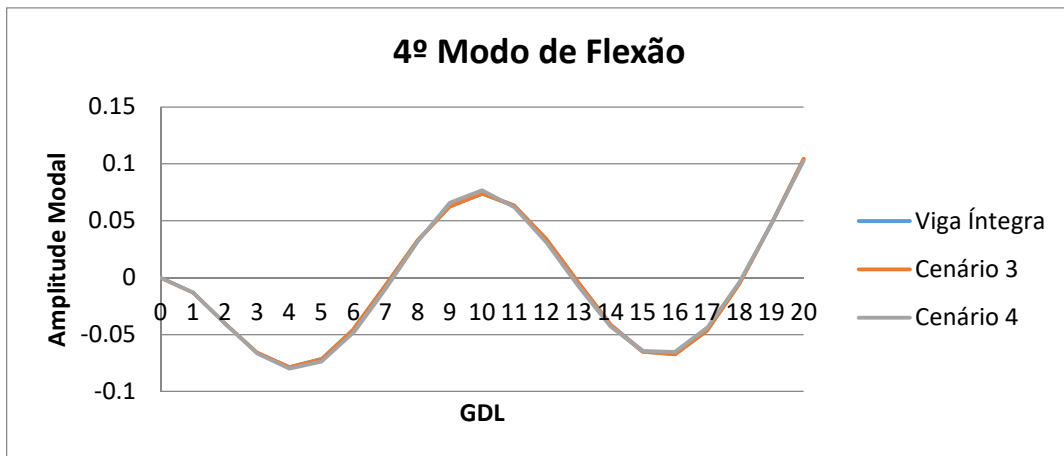
**Gráfico 17** 3º Modo de Flexão (Cenário de danificação 1 e 2)



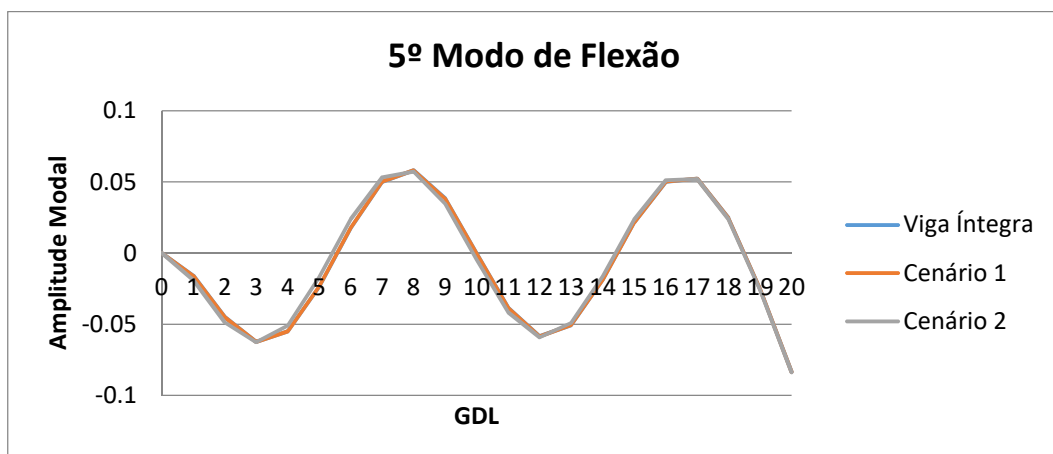
**Gráfico 18** 3º Modo de Flexão (Cenário de danificação 3 e 4)



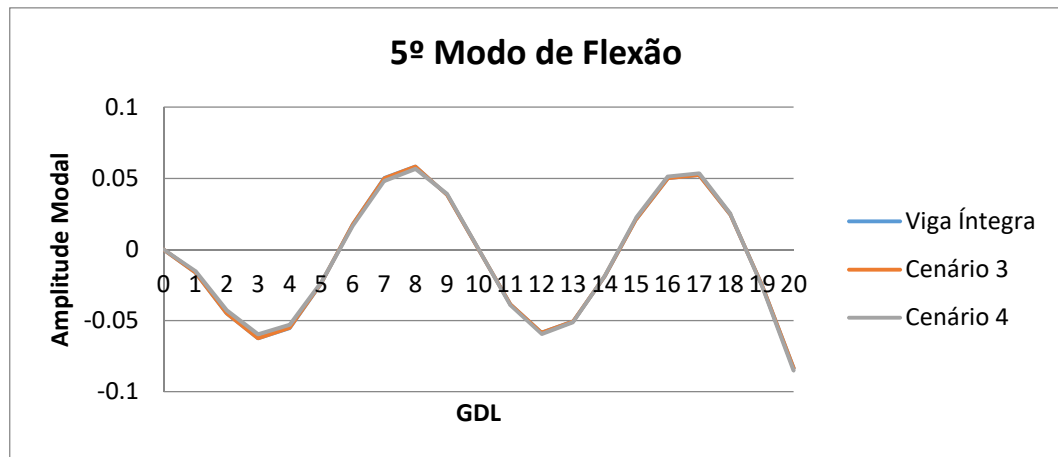
**Gráfico 19** 4º Modo de Flexão (Cenário de danificação 1 e 2)



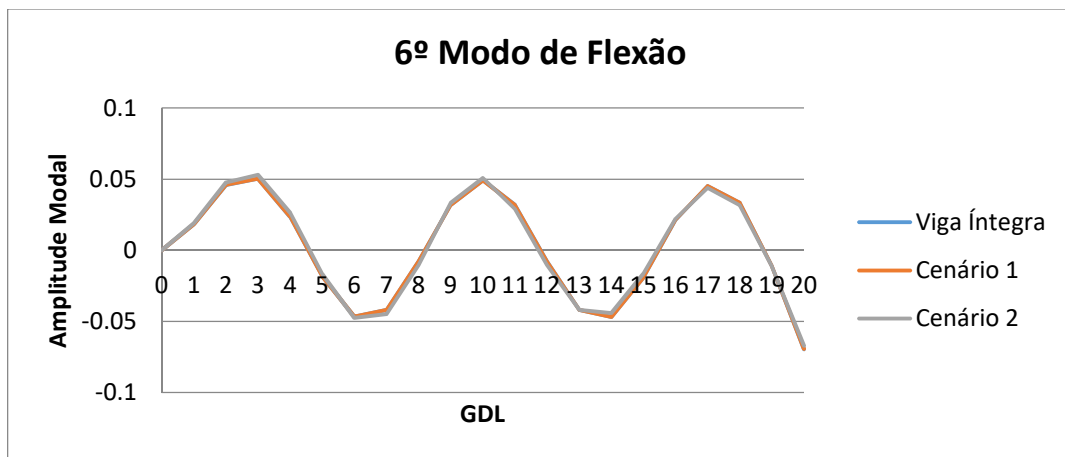
**Gráfico 20** 4º Modo de Flexão (Cenário de danificação 3 e 4)



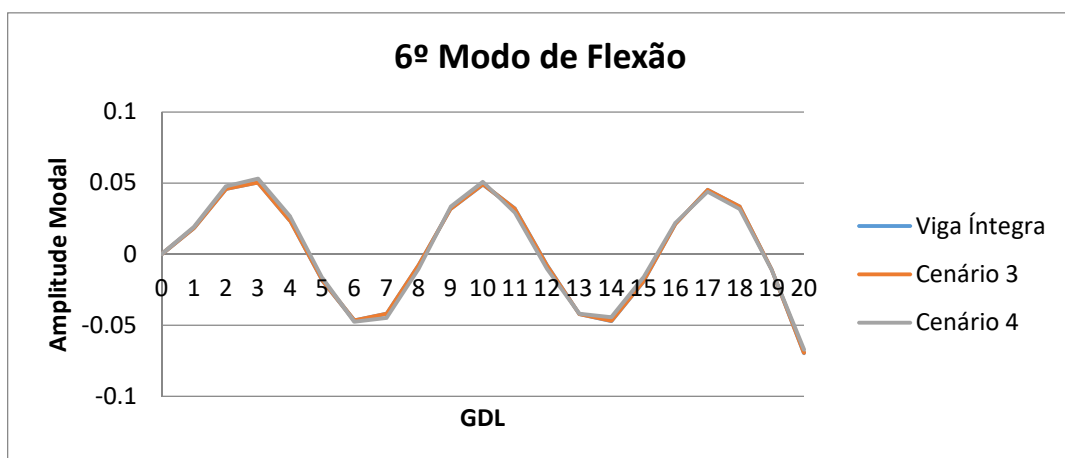
**Gráfico 21** 5º Modo de Flexão (Cenário de danificação 1 e 2)



**Gráfico 22** 5º Modo de Flexão (Cenário de danificação 3 e 4)



**Gráfico 23** 6º Modo de Flexão (Cenário de danificação 1 e 2)



**Gráfico 24** 6º Modo de Flexão (Cenário de danificação 3 e 4)

Com a análise dos modos de flexão da viga engastada-livre averiguou-se que a identificação de danos com porcentagem de 2%, como no caso da viga biapoiada, é de difícil constatação, visto que as diferenças gráficas são mínimas. No entanto, para os danos de 40%, obtiveram-se melhores resultados, que possibilitaram atestar a existência de algum dano na estrutura, apesar de não apontar sua localização ou ainda sua quantidade.

### 6.1.2 Diferenças das frequências naturais

Para a análise das diferenças nas frequências naturais das vigas, os valores obtidos para os seis primeiros modos de flexão, de ambas as vigas, são apresentados nas tabelas 2, 3, 4 e 5 a seguir.

**Tabela 2** Viga biapoiada com danos no elemento 1 (cenários 1 e 2)

Modo	Frequência natural (rad/s)				
	Viga Íntegra	Dano de 2%	Diferença	Dano de 40%	Diferença
1º	751,155	751,149	0,001%	750,95027	0,027%
2º	3004,64	3004,54	0,003%	3001,40739	0,108%
3º	6760,62	6760,14	0,007%	6744,62863	0,237%
4º	12019,8	12018,3	0,012%	11970,80321	0,407%
5º	18783,7	18780,3	0,019%	18669,21366	0,610%
6º	27056	27049,2	0,025%	26831,3598	0,830%

Observou-se que as diferenças nas frequências naturais apresentadas no elemento próximo ao apoio, apesar de existentes, são menores que 1%, tanto para o dano de 2% quanto para o dano de 40%. Essas diferenças, no entanto, por serem muito pequenas, não são suficientes para a constatação da existência de danos na estrutura, isso porque, tais variações poderiam ser interpretadas como oriundas de arredondamentos nos cálculos.

**Tabela 3** Viga biapoiada com dano no elemento 10 (cenários 3 e 4 )

Modo	Frequência natural (rad/s)				
	Viga Íntegra	Dano de 2%	Diferença	Dano de 40%	Diferença
1º	751,155	750,396	0,101%	727,467	3,154%
2º	3004,64	3004,54	0,003%	3001,54	0,103%
3º	6760,62	6754,23	0,095%	6570,5	2,812%
4º	12019,8	12018,3	0,012%	11974,9	0,373%
5º	18783,7	18768,1	0,083%	18339,2	2,366%
6º	27056	27049,2	0,025%	26859,3	0,727%

Quando o dano é localizado no elemento próximo ao meio do vão, observou-se que as diferenças nas frequências naturais para o dano de 2% são muito pequenas o que mais uma vez torna difícil a afirmação da existência de danos na viga. Já para o dano de 40%, percebe-se que existe uma diferença significativamente maior nos modos ímpares em relação aos modos pares, isso ocorre porque o elemento danificado está próximo ao meio do vão onde localizam-se os pontos nodais (pontos de amplitude modal nula) destes modos. Essas diferenças observadas somente nos modos nos quais não há ponto nodal no meio do vão sugerem a existência de algum dano próximo ao meio do vão.

**Tabela 4** Viga engastada-livre com dano no elemento 1 (cenário 1 e 2)

Modo	Frequência natural (rad/s)				
	Viga Íntegra	Dano de 2%	Diferença	Dano de 40%	Diferença
1º	267,59655	267,08856	0,190%	252,325	5,707%
2º	1677,00236	1674,34801	0,158%	1603,72	4,370%
3º	4695,72217	4689,45743	0,133%	4533,91	3,446%
4º	9202,1655	9191,9121	0,111%	8951,53	2,724%
5º	15213,46554	15199,31745	0,093%	14880,8	2,187%
6º	22730,94626	22713,21616	0,078%	22322,3	1,798%

No caso da viga engastada-livre também se observou uma diferença pequena (menor que 1%) para o cenário de danificação de 2% no elemento próximo ao engaste, não possibilitando a fácil identificação da existência de danos nesta viga. Para o dano de 40% a diferença nas frequências diminui nos modos

superiores, isso se deve ao fato de que o dano está inserido próximo aos pontos de menor amplitude modal (dano próximo ao engaste numa viga engastada-livre), como também constatado por Deokar e Wackhaure (2011) em experimento realizado.

**Tabela 5** Viga engastada-livre com dano no elemento 10 (cenários 3 e 4)

Modo	Frequência natural (rad/s)				
	Viga Íntegra	Dano de 2%	Diferença	Dano de 40%	Diferença
<b>1º</b>	267,59655	267,52202	0,028%	265,19	0,899%
<b>2º</b>	1677,00236	1675,34838	0,099%	1626,13	3,034%
<b>3º</b>	4695,72217	4695,53356	0,004%	4689,83	0,125%
<b>4º</b>	9202,1655	9193,66664	0,092%	8952,03	2,718%
<b>5º</b>	15213,46554	15211,11913	0,015%	15143,5	0,460%
<b>6º</b>	22730,94626	22712,81487	0,080%	22220,2	2,247%

Com a análise da Tabela 5 constatou-se que para o dano de 2% a diferença apresentada é insignificante, não sendo possível a confirmação da existência de danos. Já para o dano com redução de 40% no momento de inércia, verificou-se uma diferença significativamente maior nos modos pares, indicando a existência de dano no elemento próximo ao meio do vão onde há coincidência dos pontos de maior amplitude modal para estes modos.

Assim, pôde-se perceber pela análise das frequências naturais e dos modos de flexão a existência de danos nas vigas, no entanto, tais diferenças isoladamente não foram suficientes para quantificar ou localizar precisamente a posição dos danos.

Mesmo com a análise conjunta das informações, quando se trata de danos de pequenas porcentagens as frequências naturais não apresentaram variações significativas, o que dificulta a identificação de danos.

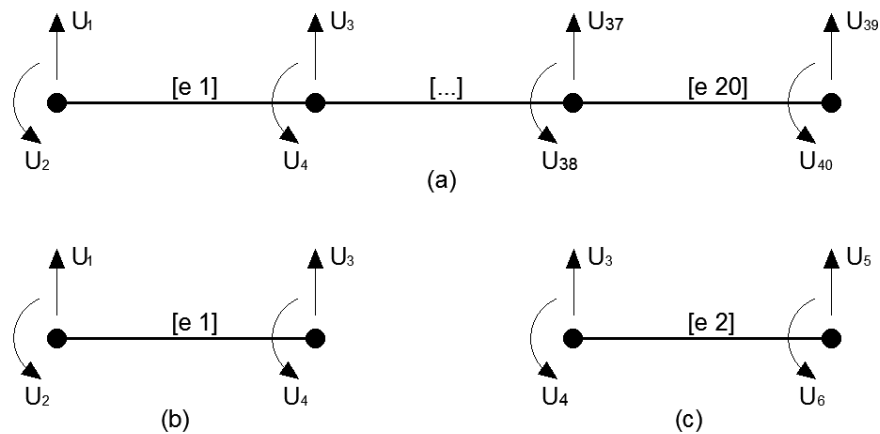
Constatou-se também, que quanto maior o modo analisado mais explícita é a variação entre elementos íntegros e danificados, mostrando que os modos superiores são mais sensíveis que os modos mais baixos.



## 6.2 Localização Do Dano

Como já mencionado, a viga foi discretizada em vinte elementos, sendo considerados para cada nó de cada elemento quatro GDLs, referentes à translação e a rotação de cada nó respectivamente. A Fig. (17) exemplifica essa consideração.

**Figura 17 - (a) Translações e rotações dos pontos nodais da viga discretizada; (b) Translações e rotações do elemento 1 da viga; (c) Translações e rotações do elemento 2 da viga**



A seguir são apresentadas as matrizes de resíduos de cada simulação para as duas vigas, nas quais é possível identificar o elemento danificado, verificando a linha com valores não nulos, visto que cada GDL da estrutura é representado por uma linha da matriz, conforme mostrado nas Fig. (18) a (25).





## c) Cenário de danificação 3 para viga biapoiada

Figura 20 - Matriz Resíduo - Viga Biapoiada com dano de 2% no elemento 10

[1]	[2]	[3]	...	[38]	[39]	[40]
0,000	0,000	0,000	...	-0,000	-0,000	-0,000
0,000	0,000	-0,000	...	-0,000	-0,000	-0,000
0,000	0,000	0,000	...	-0,000	-0,000	-0,000
0,000	-0,000	0,000	...	-0,000	-0,000	-0,000
-0,000	-0,000	0,000	...	-0,000	-0,000	-0,000
0,000	-0,000	0,000	...	0,000	0,000	0,000
0,000	-0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000
0,000	-0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000
-0,000	0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000
-0,000	0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000
0,000	-0,000	0,000	...	0,000	0,000	0,000
-0,000	-0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000
-0,000	-0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000
0,000	-0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000
0,000	-0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000
-0,000	0,000	0,000	...	0,000	0,000	0,000
-0,000	0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000
0,000	-0,000	0,000	...	0,000	0,000	0,000
46932829.737	-5328493.481	66209425.507	...	282658.190	508092.898	8193.826
3519525.512	-531532.149	4923568.553	...	-351612.804	76405.192	-98805.943
-46932829.737	5328493.481	-66209425.507	...	-282658.190	-508092.898	-8193.826
3520398.948	-267741.873	5007845.273	...	394011.533	-191.257	100035.017
-0,000	-0,000	0,000	...	0,000	0,000	0,000
-0,000	-0,000	0,000	...	0,000	0,000	0,000
-0,000	0,000	0,000	...	0,000	0,000	0,000
0,000	0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000
0,000	-0,000	0,000	...	0,000	0,000	0,000
-0,000	-0,000	0,000	...	0,000	0,000	0,000
-0,000	0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000
-0,000	0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000
-0,000	0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000
-0,000	0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000
-0,000	-0,000	0,000	...	0,000	0,000	0,000
0,000	-0,000	0,000	...	0,000	0,000	0,000
-0,000	0,000	0,000	...	0,000	0,000	0,000
-0,000	0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000
-0,000	0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000
0,000	0,000	0,000	...	0,000	0,000	0,000
-0,000	0,000	0,000	...	0,000	0,000	0,000
0,000	-0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000
0,000	-0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000

d) Cenário de danificação 4 para a viga biapoçada

Figura 21 - Matriz Resíduo - Viga Biapoçada com dano de 40% no elemento 10

[1]	[2]	[3]	...	[38]	[39]	[40]
0,000	0,000	0,000	...	-0,000	-0,000	-0,000
0,000	0,000	-0,000	...	-0,000	-0,000	-0,000
0,000	0,000	0,000	...	-0,000	-0,000	-0,000
0,000	-0,000	0,000	...	-0,000	-0,000	-0,000
-0,000	-0,000	0,000	...	-0,000	-0,000	-0,000
0,000	-0,000	0,000	...	0,000	0,000	0,000
0,000	-0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000
0,000	-0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000
-0,000	0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000
-0,000	0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000
0,000	-0,000	0,000	...	0,000	0,000	0,000
0,000	-0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000
-0,000	0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000
0,000	-0,000	0,000	...	0,000	0,000	0,000
-0,000	0,000	0,000	...	0,000	0,000	0,000
-0,000	-0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000
0,000	-0,000	0,000	...	0,000	0,000	0,000
0,000	-0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000
-0,000	0,000	0,000	...	0,000	0,000	0,000
-0,000	-0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000
0,000	-0,000	0,000	...	0,000	0,000	0,000
0,000	-0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000
-0,000	0,000	0,000	...	0,000	0,000	0,000
-0,000	-0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000
0,000	-0,000	0,000	...	0,000	0,000	0,000
0,000	-0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000
484689635.501	-118741040.805	-1065782131.604	...	8717007.467	16573655.931	248782.605
36068590.627	-11469285.016	-78515919.633	...	-10276118.366	2431348.414	-3037525.165
-484689635.500	118741040.805	1065782131.604	...	-8717007.467	-16573655.931	-248782.605
36634854.698	-6341871.104	-81351400.107	...	11583669.486	54699.976	3074842.556
-0,000	-0,000	0,000	...	0,000	0,000	0,000
-0,000	-0,000	0,000	...	0,000	0,000	0,000
-0,000	0,000	0,000	...	0,000	0,000	0,000
0,000	0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000
0,000	-0,000	0,000	...	0,000	0,000	0,000
-0,000	-0,000	0,000	...	0,000	0,000	0,000
-0,000	0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000
-0,000	0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000
-0,000	0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000
-0,000	-0,000	0,000	...	0,000	0,000	0,000
-0,000	-0,000	0,000	...	0,000	0,000	0,000
-0,000	0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000
-0,000	0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000
0,000	-0,000	0,000	...	0,000	0,000	0,000
0,000	-0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000
0,000	-0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000
0,000	-0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000
0,000	-0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000

Foi possível observar nas Fig. (20) e (21) que os resíduos estão localizados nas linhas 18, 19, 20 e 21, e referem-se respectivamente aos GDLS 19,20, 21 e 22 do sistema, logo o elemento danificado é o de número 10, localizando corretamente a posição do dano inserido.

e) Cenário de danificação 1 para a viga engastada-livre

Para a viga engastada-livre a aplicação das condições de contorno elimina o primeiro e segundo GDL, correspondentes, respectivamente, ao deslocamento e giro do primeiro nó da estrutura.

Os quatro primeiros GDLs referem-se ao primeiro elemento da estrutura, quando se localiza o dano neste elemento e aplica-se as condições de contorno os resíduos são apresentados nas duas primeiras linhas da matriz, como mostrado nas Fig. (22) e (23).

**Figura 22 - Matriz Resíduo - Viga Engastada-livre com dano de 2% no elemento 1**

[1]	[2]	[3]	...	[38]	[39]	[40]
151.039	3636798.335	7108081.666	...	-1061338.175	334534.394	-26737.946
-16.027	-384051.559	-749919.595	...	-245259.885	159185.506	-54247.261
0,000	0,000	0,000	...	-0,000	-0,000	-0,000
0,000	0,000	-0,000	...	-0,000	-0,000	-0,000
0,000	0,000	0,000	...	-0,000	-0,000	-0,000
0,000	0,000	-0,000	...	-0,000	-0,000	-0,000
0,000	0,000	0,000	...	-0,000	-0,000	-0,000
0,000	-0,000	0,000	...	-0,000	-0,000	-0,000
-0,000	-0,000	0,000	...	-0,000	-0,000	-0,000
0,000	-0,000	0,000	...	0,000	0,000	0,000
0,000	-0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000
0,000	-0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000
-0,000	0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000
0,000	-0,000	0,000	...	0,000	0,000	0,000
0,000	-0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000
-0,000	0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000
0,000	-0,000	0,000	...	0,000	0,000	0,000
-0,000	0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000
0,000	-0,000	0,000	...	0,000	0,000	0,000
0,000	-0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000
-0,000	0,000	0,000	...	0,000	0,000	0,000
-0,000	-0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000
0,000	-0,000	0,000	...	0,000	0,000	0,000
0,000	-0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000
-0,000	0,000	0,000	...	0,000	0,000	0,000
-0,000	-0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000
0,000	0,000	0,000	...	0,000	0,000	0,000
0,000	0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000
-0,000	-0,000	0,000	...	0,000	0,000	0,000
-0,000	0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000
-0,000	0,000	0,000	...	0,000	0,000	0,000
-0,000	0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000
-0,000	0,000	0,000	...	0,000	0,000	0,000
0,000	-0,000	0,000	...	0,000	0,000	0,000
-0,000	0,000	0,000	...	0,000	0,000	0,000
-0,000	0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000
0,000	0,000	0,000	...	0,000	0,000	0,000
-0,000	0,000	0,000	...	0,000	0,000	0,000
0,000	-0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000
0,000	-0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000

f) Cenário de danificação 2 para a viga engastada-livre

Figura 23 - Matriz Resíduo - Viga Engastada-livre com dano de 40% no elemento 1

[1]	[2]	[3]	...	[38]	[39]	[40]
2901.866	-67084883.646	-130829879.964	...	-32018070.272	-10136573.153	-795235.667
-308.558	7105100.068	13845762.602	...	-5881434.197	-4279106.306	-1598758.962
0,000	0,000	0,000	...	-0,000	-0,000	-0,000
0,000	0,000	-0,000	...	-0,000	-0,000	-0,000
0,000	0,000	0,000	...	-0,000	-0,000	-0,000
0,000	0,000	-0,000	...	-0,000	-0,000	-0,000
0,000	0,000	0,000	...	-0,000	-0,000	-0,000
0,000	-0,000	0,000	...	-0,000	-0,000	-0,000
-0,000	-0,000	0,000	...	-0,000	-0,000	-0,000
0,000	-0,000	0,000	...	0,000	0,000	0,000
0,000	-0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000
0,000	-0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000
-0,000	0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000
-0,000	0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000
0,000	0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000
0,000	0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000
-0,000	0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000
-0,000	0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000
0,000	-0,000	0,000	...	0,000	0,000	0,000
0,000	-0,000	0,000	...	0,000	0,000	0,000
-0,000	0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000
-0,000	0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000
0,000	-0,000	0,000	...	0,000	0,000	0,000
0,000	-0,000	0,000	...	0,000	0,000	0,000
-0,000	0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000
-0,000	0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000
0,000	0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000
0,000	0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000
-0,000	0,000	0,000	...	0,000	0,000	0,000
0,000	-0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000
0,000	-0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000
-0,000	0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000
-0,000	0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000
0,000	0,000	0,000	...	0,000	0,000	0,000
-0,000	0,000	0,000	...	0,000	0,000	0,000
0,000	-0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000
0,000	-0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000



## g) Cenário de danificação 3 para a viga engastada-livre

Observa-se nas Fig. (24) e (25) que as matrizes de resíduo apresentam valores diferentes de zero nas linhas 17, 18, 19 e 20, comprovando a existência de dano no elemento 10, visto que estas linhas referem-se ao GDLs do décimo elemento da estrutura.

**Figura 24 - Matriz Resíduo - Viga Engastada-livre com dano de 2% no elemento 10**

[1]	[2]	[3]	...	[38]	[39]	[40]
0,000	0,000	0,000	...	-0,000	-0,000	-0,000
0,000	0,000	-0,000	...	-0,000	-0,000	-0,000
0,000	0,000	0,000	...	-0,000	-0,000	-0,000
0,000	0,000	-0,000	...	-0,000	-0,000	-0,000
0,000	0,000	0,000	...	-0,000	-0,000	-0,000
0,000	-0,000	0,000	...	-0,000	-0,000	-0,000
-0,000	-0,000	0,000	...	-0,000	-0,000	-0,000
0,000	-0,000	0,000	...	0,000	0,000	0,000
0,000	-0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000
0,000	-0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000
-0,000	0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000
-0,000	0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000
0,000	-0,000	0,000	...	0,000	0,000	0,000
-0,000	-0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000
0,000	-0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000
0,000	-0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000
-158113.800	-71781555.386	-1037669.544	...	732671.421	59529.206	23198.894
-10569.416	-5383597.246	-382412.102	...	102462.622	-141696.973	23301.650
158113.800	71781555.386	1037669.544	...	-732671.421	-59529.206	-23198.894
-13147.654	-5383636.062	226761.670	...	7438.091	150626.354	-19821.816
-0,000	0,000	0,000	...	0,000	0,000	0,000
-0,000	-0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000
0,000	-0,000	0,000	...	0,000	0,000	0,000
-0,000	-0,000	0,000	...	0,000	0,000	0,000
-0,000	-0,000	0,000	...	0,000	0,000	0,000
-0,000	0,000	0,000	...	0,000	0,000	0,000
0,000	0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000
0,000	-0,000	0,000	...	0,000	0,000	0,000
-0,000	-0,000	0,000	...	0,000	0,000	0,000
-0,000	0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000
-0,000	0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000
-0,000	0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000
-0,000	0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000
-0,000	0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000
-0,000	0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000
-0,000	0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000
0,000	-0,000	0,000	...	0,000	0,000	0,000
-0,000	0,000	0,000	...	0,000	0,000	0,000
-0,000	0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000
-0,000	0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000
0,000	0,000	0,000	...	0,000	0,000	0,000
-0,000	0,000	0,000	...	0,000	0,000	0,000
0,000	-0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000



## h) Cenário de danificação 4 para a viga engastada-livre

Figura 25 - Matriz Resíduo - Viga Engastada-livre com dano de 40% no elemento 10

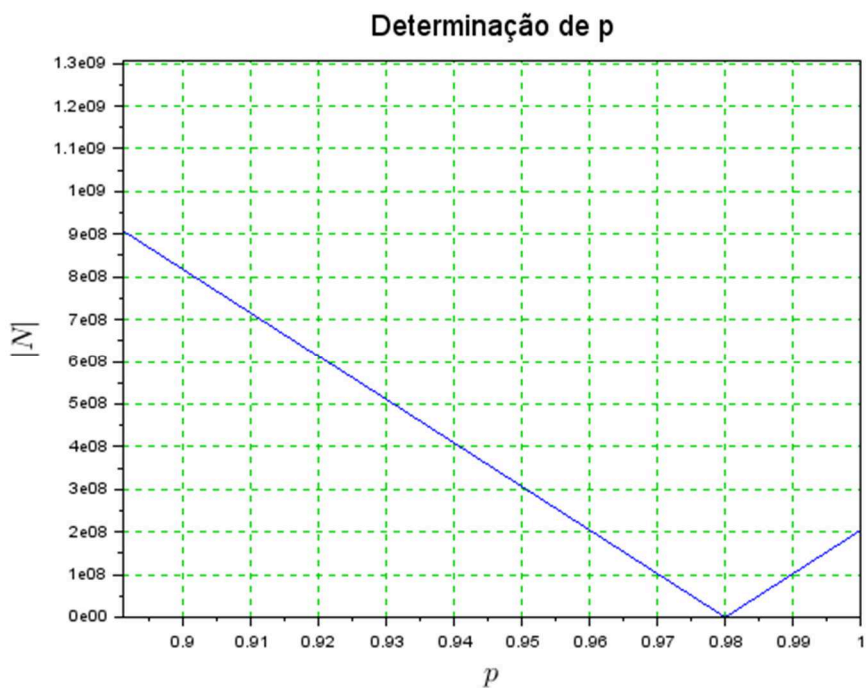
[1]	[2]	[3]	...	[38]	[39]	[40]
0,000	0,000	0,000	...	-0,000	-0,000	-0,000
0,000	0,000	-0,000	...	-0,000	-0,000	-0,000
0,000	0,000	0,000	...	-0,000	-0,000	-0,000
0,000	0,000	-0,000	...	-0,000	-0,000	-0,000
0,000	0,000	0,000	...	-0,000	-0,000	-0,000
0,000	-0,000	0,000	...	-0,000	-0,000	-0,000
-0,000	-0,000	0,000	...	-0,000	-0,000	-0,000
0,000	-0,000	0,000	...	0,000	0,000	0,000
0,000	-0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000
-0,000	0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000
-0,000	0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000
0,000	-0,000	0,000	...	0,000	0,000	0,000
-0,000	-0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000
0,000	-0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000
0,000	-0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000
-2600721.407	-968351420.639	-24002981.987	...	23816380.708	1917642.059	742185.284
-169643.758	-72588759.626	-7725365.387	...	3236706.010	-4309312.949	747007.397
2600721.407	968351420.639	24002981.987	...	-23816380.708	-1917642.059	-742185.284
-220464.453	-72663953.470	4124918.089	...	335751.096	4596959.258	-635679.604
-0,000	0,000	0,000	...	0,000	0,000	0,000
-0,000	-0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000
0,000	-0,000	0,000	...	0,000	0,000	0,000
-0,000	-0,000	0,000	...	0,000	0,000	0,000
-0,000	-0,000	0,000	...	0,000	0,000	0,000
-0,000	0,000	0,000	...	0,000	0,000	0,000
0,000	0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000
0,000	-0,000	0,000	...	0,000	0,000	0,000
-0,000	-0,000	0,000	...	0,000	0,000	0,000
-0,000	0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000
-0,000	0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000
-0,000	0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000
-0,000	0,000	0,000	...	0,000	0,000	0,000
-0,000	-0,000	0,000	...	0,000	0,000	0,000
0,000	-0,000	0,000	...	0,000	0,000	0,000
-0,000	0,000	0,000	...	0,000	0,000	0,000
-0,000	0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000
0,000	0,000	0,000	...	0,000	0,000	0,000
-0,000	0,000	0,000	...	0,000	0,000	0,000
0,000	-0,000	-0,000	...	0,000	0,000	0,000

Com a análise das matrizes de resíduos constatou-se então, que para todos os casos estudados, tanto para pequenas como para grandes porcentagens de dano, estando localizados próximos aos apoios ou próximos ao meio do vão os danos foram localizados corretamente.

### 6.3 Quantificação Do Dano

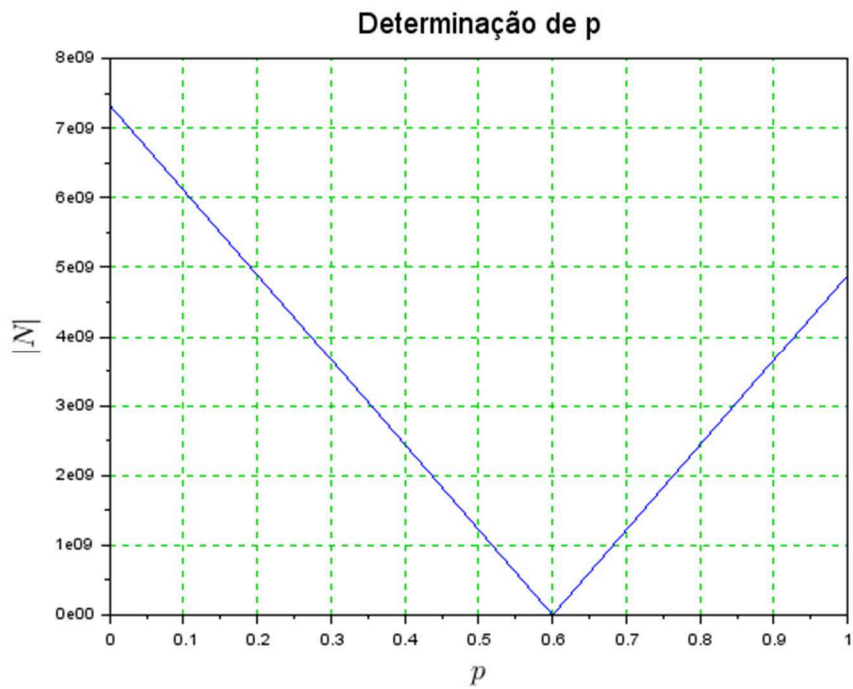
A quantificação do dano foi feita a partir do cálculo da norma da matriz resíduo para diferentes valores de  $p$ , variando de 0 (zero) a 1 (um) a cada 0,001 sendo adotado o valor de  $p$  que resultava no menor norma do vetor resíduo. Foram os plotados gráficos (25) a (32) representando essa quantificação para ambas as vigas simuladas, nos quatro cenários pré-definidos, como se segue.

a) Cenário de danificação 1 para a viga biapoiada



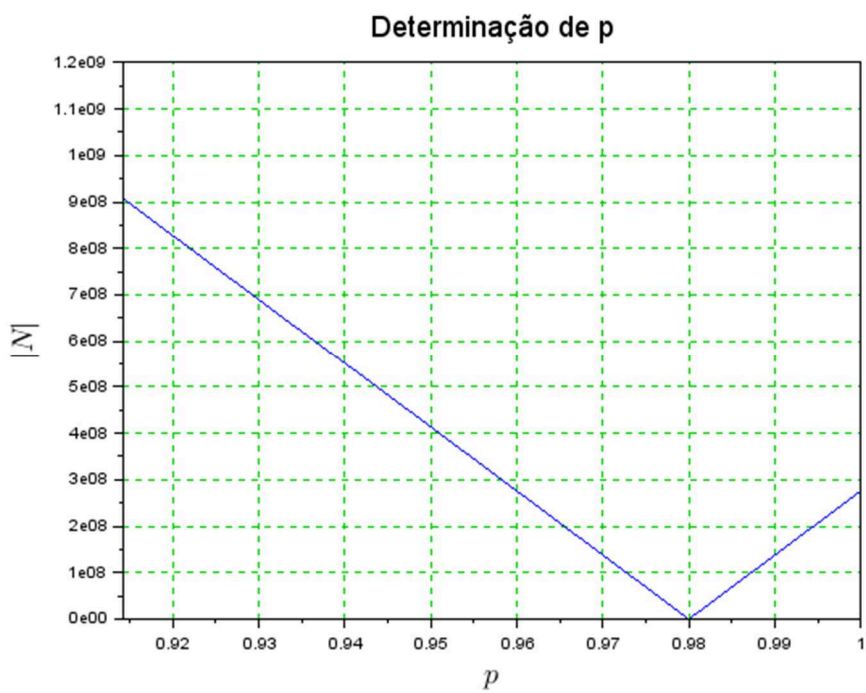
**Gráfico 25** Quantificação do dano no elemento 1 (Cenário 1)

b) Cenário de danificação 2 para a viga biapoada



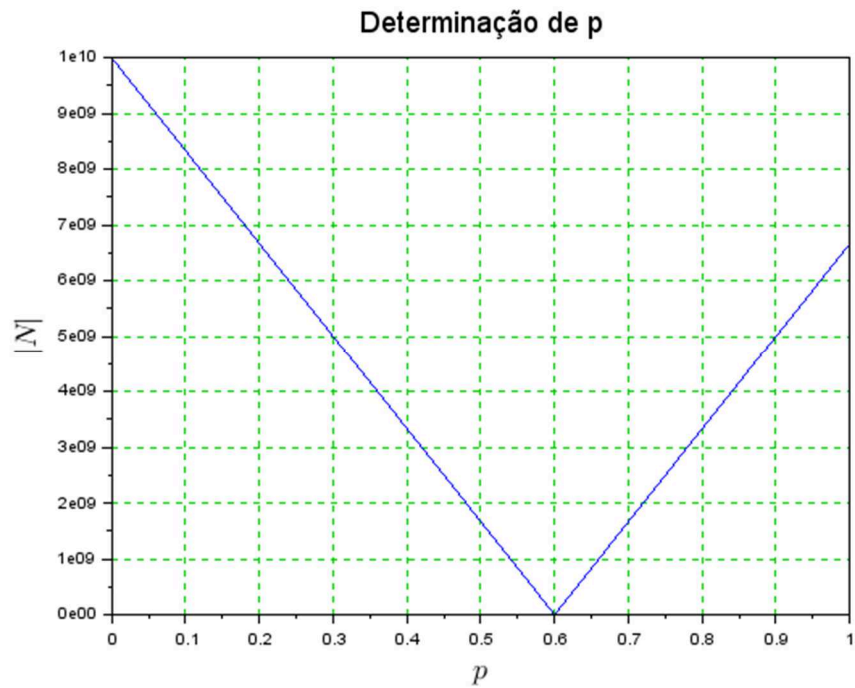
**Gráfico 26** Quantificação do dano no elemento 1 (Cenário 2)

c) Cenário de danificação 3 para a viga biapoada



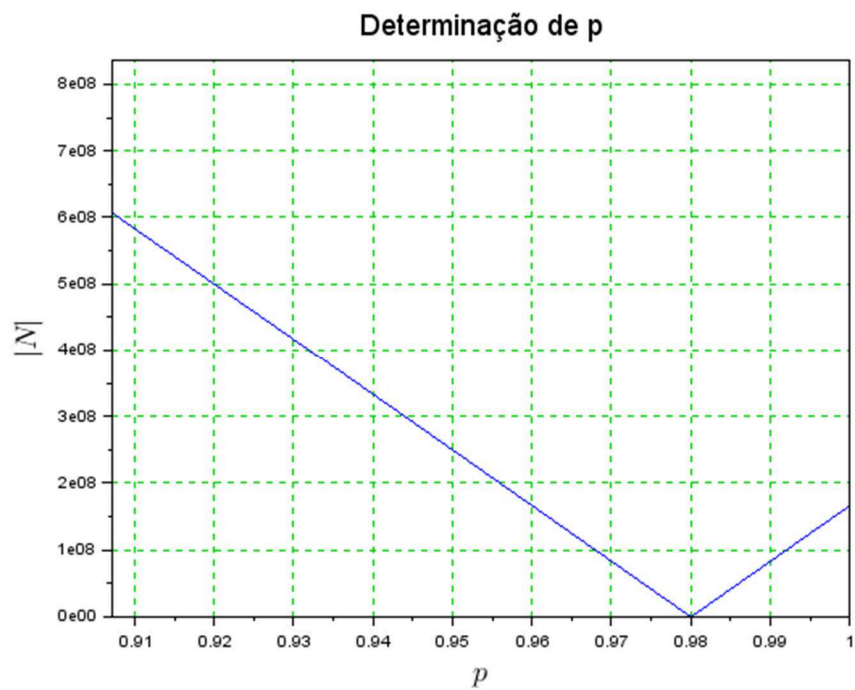
**Gráfico 27** Quantificação do dano no elemento 10 (Cenário 3)

d) Cenário de danificação 4 para a viga biapoada



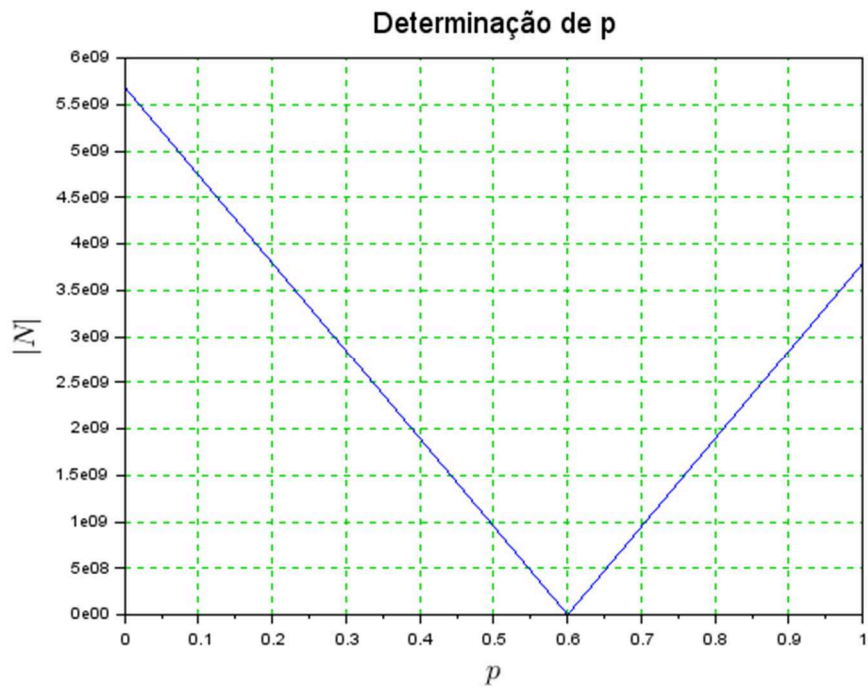
**Gráfico 28** Quantificação do dano no elemento 10 (Cenário 4)

e) Cenário de danificação 1 para a viga engastada-livre



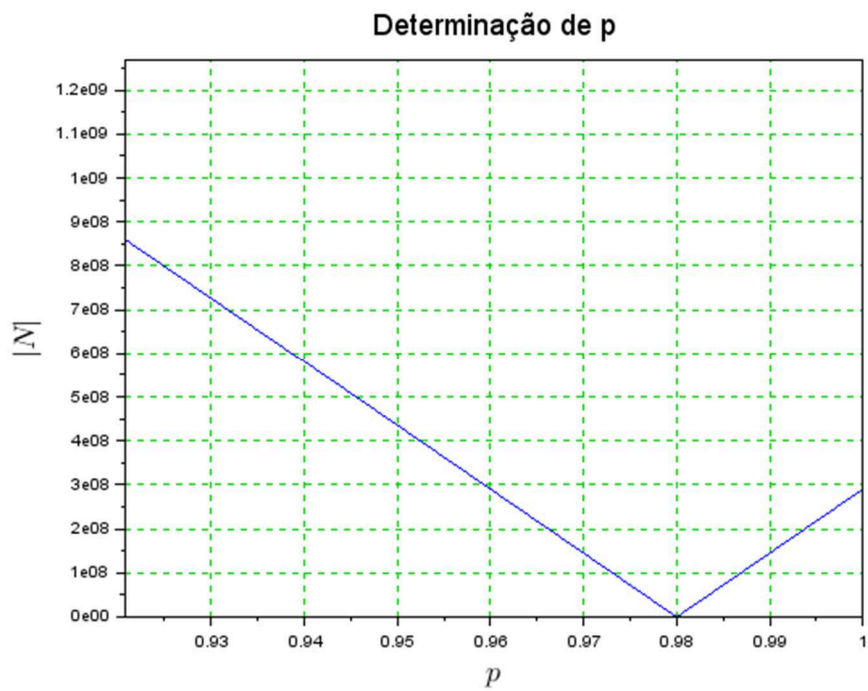
**Gráfico 29** Quantificação do dano no elemento 1 (Cenário 1)

f) Cenário de danificação 2 para a viga engastada-livre



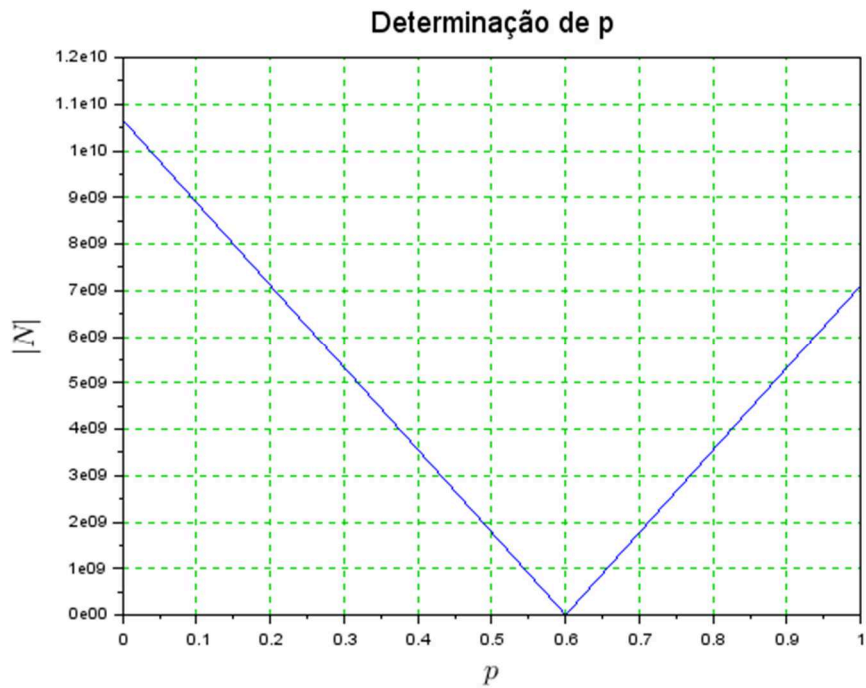
**Gráfico 30** Quantificação do dano no elemento 1 (Cenário 2)

g) Cenário de danificação 3 para a viga engastada-livre



**Gráfico 31** Quantificação do dano no elemento 10 (Cenário 3)

h) Cenário de danificação 4 para a viga engastada-livre



**Gráfico 32** Quantificação do dano no elemento 10 (Cenário 4)

Com a análise dos gráficos obtidos pôde-se verificar a efetividade do método em quantificar a porcentagem de dano simulado nas vigas, apontando de maneira precisa o valor de redução no momento de inercia da seção transversal dos elementos.

## 7 CONCLUSÕES

Durante o desenvolvimento do trabalho verificou-se que danos de pequena magnitude causam poucas alterações nas características da estrutura, tornando difícil a identificação de danos na mesma. Ainda sim, fazendo uso de métodos que utilizam e analisam as propriedades dinâmicas das estruturas é possível, a partir das diferenças nas frequências naturais ou nos modos de flexão, a localização correta dos referidos danos, como por exemplo, no Método das Curvaturas Modais proposto por Pandey, Biswas e Samman (1991), que a partir de diferenças nos modos de vibração da estrutura localiza os danos existentes. Contudo, tais métodos não permitem quantificar a extensão do dano.

O Método do Erro na Equação de Movimento proposto por Genovese (2000) com alterações sugeridas por Brasiliano et al (2012) se mostrou eficiente quanto aos danos simulados numericamente, mesmo para pequenas porcentagens de danos, estando elas próximas dos apoios ou próximas ao meio do vão, convergindo para a localização exata e quantificando-os corretamente. Entretanto, como já constatado por Genovese (2000) a sensibilidade do método em ensaios experimentais pode ser prejudicada, visto que durante os ensaios pode haver ruídos que prejudiquem a coleta de dados alterando os valores das frequências naturais e a amplitude dos modos de flexão da estrutura comprometendo assim a eficiência do método. É interessante que se desenvolva em trabalhos futuros novas análises experimentais do método, para maior apuração de sua eficiência prática.

Constatou-se também que é viável o estudo das características dinâmicas das estruturas para a localização e quantificação de danos, todavia, tais estudos, se feitos experimentalmente devem ser realizados de maneira adequada para que as interferências externas sejam minimizadas e assim se consiga alcançar resultados aceitáveis.



## REFERÊNCIAS

- ALVES, Lucas M., **Métodos dos Elementos Finitos**, Curitiba, 2007, Apostila organizada como resultado do estudo das aulas para obtenção de créditos da Disciplina de Método dos Elementos Finitos do Programa de Pós-Graduação da Universidade Federal do Paraná, 2007.
- ANDRADE, B. C. C. **Avaliação Comparativa Entre Modelos De Análises Modais Numérico-Experimentais De Uma Chapa Vibrante**. 2011. p 65. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado) – Universidade Federal do Pará. Belém, 2011.
- AZEVEDO, Álvaro F. M. **Método dos Elementos Finitos**, 1ª Edição – abril 2003, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto. Portugal, 2003.
- BEER, Ferdinand P.; JOHNSTON Russel Jr.. **Mecânica Vetorial para Engenheiros** 5. Ed – São Paulo, 1991.
- BRASILIANO, A., DOZ, G. N.; BRITO, J. L. V. **Avaliação De Dano Em Estruturas Por Intermédio Das Características Dinâmica**. Programa de Pós-Graduação em Estruturas e Construção Civil Universidade de Brasília, Brasília, 2002.
- CAWLEY, Peter; ADAMS, Robert D. **The locations of defects in structures from measurements of natural frequencies**, Journal of Strain Analysis, Vol. 14, No. 2, pp. 49–57, 1979.
- CLOUGH, Ray W.; PENZIEN, Joseph. **Dynamics of Structures**. 3 ed. Computers & Structures, 2003.
- GENOVESE, Miguel E. **Localização e quantificação de danos em estruturas por meio de suas características dinâmicas**. 2000. 120f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) - Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF.2000.
- HE, Jimin; FU, Zhi-Fang. **Modal Analysis**. 7. ed. Oxford, MA: Butterworth-Heinemann, 2001.
- HUTTON, David V. **Fundamentals of finite element analysis**. 1 ed p. cm.
- LIFSHITZ, Jacob M; Rotem, Assa. **Determination of Reinforcement Unbonding of Composites by a Vibration Technique**. Journal of Composite Materials. Vol. 3, pp. 412–423, 1969.
- MAGALHÃES, Filipe M. R. L. **Identificação Modal Estocástica Para Validação Experimental De Modelos Numéricos** 2012. 208f Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) - Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto. Porto, Portugal. 2012.
- MARCY, Marília. **Identificação e Quantificação de Danos em Pórticos Espaciais via Método do Erro Residual e Redes Neurais Artificiais**. Dissertação de



Mestrado em Estruturas e Construção Civil, Publicação E.DM-001A/13, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 112p, 2013.

MOREIRA, Domicio F. **Análise Matricial Das Estruturas**. 1 ed. RIO DE JANEIRO. Livros técnicos e científicos; São Paulo, Editora da Universidade de São Paulo, 1977.

NASCIMENTO, Carlos A. M. **Modelagem Numérica De Vibrações Em Cabos De Transmissão De Energia Elétrica**. 2011. 71 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, 2011.

NEVES, Alessandra T. (2006) **Application of ARMAV and ARV Parametric Models in the model identification of Mechanical Systems**. Ph D. Thesis – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2006.

PANDEY, A. K.; BISWAS, M.; SAMMAN, M. M. Damage detection from changes in curvature mode shapes. **Journal of Sound and Vibration**, v. 145, n. 2, p. 321-332, 1991

RAO, Singiresu S. **Mechanical vibrations**. 5. ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2011.

SASMAL, Saptarshi; RAMANJANEYULU, Karusala. **Detection and Quantification of Structural Damage of a Beam-Like Structure Using Natural Frequencies**. Structural Engineering Research Centre, Council of Scientific and Industrial Research (CSIR), Chennai, India, 2009.

SORIANO, Humberto Lima. **Introdução à dinâmica das estruturas**. 1. ed. - Rio de Janeiro, 2014.

TORII, André Jacomel. **Análise Dinâmica De Estruturas Com O Método Dos Elementos Finitos Generalizado**. 2012. 223f. Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná, 2012.

ZANG, Chaoping; FRISWELL, Michael I.; IMREGUN, M. **Structural Health Monitoring and Damage Assessment Using Measured FRFs from Multiple Sensors, Part I: The Indicator of Correlation Criteria** - Department of Aerospace Engineering, University of Bristol; Department of Mechanical Engineering, Imperial College. United Kingdom, 2003.