

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO PARA A
CIÊNCIA E A MATEMÁTICA**

CLAUDETE CARGNIN

**ENSINO E APRENDIZAGEM DA INTEGRAL DE RIEMANN DE
FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL REAL:
possibilidades de articulação da utilização de Mapas Conceituais com a teoria dos
Registros de Representações Semióticas**

**MARINGÁ – PR
2013**

CLAUDETE CARGNIN

**ENSINO E APRENDIZAGEM DA INTEGRAL DE RIEMANN DE
FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL REAL:
possibilidades de articulação da utilização de Mapas Conceituais com a teoria dos
Registros de Representações Semióticas**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática do Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Educação para a Ciência e a Matemática.

Área de concentração: Ensino de Ciências e Matemática

Orientador: Prof. Dr. Rui Marcos de Oliveira Barros

**MARINGÁ – PR
2013**

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Biblioteca Central - UEM, Maringá, PR, Brasil)

C276e Cargnin, Claudete
Ensino e aprendizagem da integral de Riemann de funções de uma variável real: possibilidades de articulação da utilização de mapas conceituais com a teoria dos registros de representações semióticas / Claudete Cargnin. -- Maringá, 2013.
416 f. : il. color., figs.

Orientador: Prof. Dr. Rui Marcos de Oliveira Barros.
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática, 2013.

1. Integral de Riemann. 2. Mapas Conceituais. 3. Teoria de Registro de Representação Semiótica. 4. Teoria da Situação Didática. I. Barros, Rui Marcos de Oliveira. II. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática. III. Título.

CDD 21.ed.372.7

MGC-000817

CLAUDETE CARGNIN

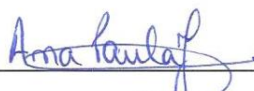
**Ensino e aprendizagem da Integral de Riemann de funções de
uma variável real: possibilidades de articulação da utilização de
Mapas Conceituais com a teoria dos Registros de
Representações Semióticas**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em
Educação para a Ciência e a Matemática do Centro de
Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá,
como requisito parcial para a obtenção do título de
Doutor em Educação para a Ciência e a Matemática.

BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Rui Marcos de Oliveira Barros
Universidade Estadual de Maringá – UEM



Profa. Dra. Ana Paula Jahn
Universidade de São Paulo – USP



Profa. Dra. Tânia Stella Bassoi
Universidade Estadual do Oeste do Paraná – UNIOESTE



Profa. Dra. Célia Finck Brandt
Universidade Estadual de Ponta Grossa - UEPG



Profa. Dra. Lilian Akemi Kato
Universidade Estadual de Maringá - UEM



Prof. Dr. Valdeni Soliani Franco
Universidade Estadual de Maringá – UEM

Maringá, 25 de Julho de 2013.

DEDICATÓRIA

Aos meus filhos **Giovanna
Carolina e Pietro
Giuseppe!**
Meus pais: **Adelirio e
Altair!**
Minha irmã **Iva**
E aos **amigos** que se fizeram
presentes no caminho...

AGRADECIMENTOS

A Deus Pai, pela graça de mais uma vitória, e à poderosa intercessão de Nossa Senhora Aparecida;

Ao corpo docente deste programa de pós-graduação, especialmente aos professores Clélia Nogueira, Marta Belini, Ourides Santin, Rui Marcos, Lilian Akemi Kato e Valdeni Franco, que souberam, brilhantemente, mostrar o caminho a ser trilhado no curso, além do exemplo profissional;

Aos professores membros da banca de avaliação, Dra. Ana Paula Jahn, Dra. Célia Finck Brandt, Dra. Tania Stella Bassoi, Dra. Lilian Akemi Kato, Dr. Valdeni Soliani Franco, pelas sempre valiosas contribuições para o enriquecimento deste trabalho;

Ao prof. Dr. Rui Marcos, por sua extrema competência profissional, orientação segura, e por ter compreendido que, às vezes, precisamos de um tempo para “por a casa em ordem” antes de continuarmos;

Claro que não poderia faltar meus agradecimentos à Sandra Grzegorzcyk, pelo carinho e competência com que sempre atendeu a mim e aos colegas do programa;

Embora esses professores tenham sido muito importantes no decorrer dessa minha formação, há outras pessoas que precisam ser destacadas, pois contribuíram ainda mais para a concretização desse sonho, ajudaram-me a superar os obstáculos do caminho, oferecendo-me o ombro amigo, as orações, o apoio, o estudo conjunto:

- ✓ Meus filhos: Giovanna Carolina e Pietro Giuseppe, que, mesmo sentindo minha ausência, jamais deixaram de me apoiar.
- ✓ Meus pais: Adelirio Cargnin e Altair Comeli Cargnin – quantas velas e orações hein mãe?!!!
- ✓ Meus irmãos e irmãs, pelo carinho.
- ✓ Meus amigos Marcia Boiko dos Santos, Marli Ap. Pedro Duque, Silvia Frizzarini, Veridiana Rezende e Claison Candido de Araujo – cada um destes, a seu modo, me ajudou a chegar até aqui;
- ✓ Aos amigos da UTFPR que aceitaram assumir umas “aulinhas” a mais para que eu pudesse, pelo menos, por um tempo, dedicar-me exclusivamente ao doutorado: Angela Mognon, Diogo Macowski, Michele Barros e Thelma Vecchi.

A todos vocês, minha eterna gratidão e reconhecimento!!!

Ainda não poderia terminar sem agradecer, imensamente, aos alunos que se dispuseram a interromper o recesso forçado para participar voluntariamente da pesquisa. Por questões éticas não posso nominá-los, mas agradeço usando seus nomes fictícios: Alvaro, Bia, Bruno, Camila, Caroline, Claison, Daia, Desiée, Débora, Denise, Fernanda, Gabriel e Marcos.

CARGNIN, C. ENSINO E APRENDIZAGEM DA INTEGRAL DE RIEMANN DE FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL REAL: possibilidades de articulação da utilização de Mapas Conceituais com a teoria dos Registros de Representações Semióticas. **Tese** de Doutorado (Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática). Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2013.

RESUMO: A presente pesquisa tem por objetivos identificar as contribuições: 1) da Teoria de Registros de Representação Semiótica, aliada à Teoria das Situações Didáticas, para a conceitualização da Integral de Riemann para funções de uma variável real (chamada de Integral Definida, ao longo do texto); 2) da utilização dos Mapas Conceituais para acompanhar o desenvolvimento da conceitualização da Integral Definida. É uma pesquisa qualitativa, de natureza exploratória, que tem a Engenharia Didática como metodologia de pesquisa. Os pressupostos teóricos estão alicerçados às Teorias das Situações Didáticas e à Teoria de Registro de Representação Semiótica. Os Mapas Conceituais foram usados como instrumento didático de acompanhamento. Após pesquisa bibliográfica, foi elaborada e aplicada uma sequência didática por meio de minicurso, em um grupo de treze alunos de 1º a 3º períodos dos cursos de Engenharia Civil, de Engenharia Ambiental, Engenharia de Produção e Licenciatura em Química. Na sequência didática, aplicada no período de 06 a 15 de agosto de 2012, foi solicitada, em cinco momentos, a elaboração e/ou alteração de um Mapa Conceitual, no *software Cmap Tools*, envolvendo os conteúdos das atividades. Os *softwares Geogebra* e *wxMaxima* foram usados como recursos didáticos na resolução das atividades propostas. Foi observado que a discussão em grupo e a exploração computacional trazem importantes contribuições para a aprendizagem dos conceitos. Além disso, pode-se inferir que a análise dos Mapas Conceituais elaborados pelos alunos, permite, ao professor, conhecer os aspectos que devem ser reforçados para que a compreensão do conteúdo integral definida seja amplificada, identificar possíveis obstáculos didáticos e confrontar conceitos-chave de docentes e discentes. Observou-se, ainda, que, as atividades planejadas a fim de proporcionar autonomia e ação pelo aluno, baseadas nos diferentes registros de representação semiótica, tornam-se mais propícias à atribuição de significação ao conteúdo ensinado.

Palavras-Chave: Integral de Riemann. Mapas Conceituais. Teoria de Registro de Representação Semiótica. Teoria da Situação Didática.

CARGNIN, C. ENSINO E APRENDIZAGEM DA INTEGRAL DE RIEMANN DE FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL REAL: possibilidades de articulação da utilização de Mapas Conceituais com a teoria dos Registros de Representações Semióticas. Tese de Doutorado (Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática). Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2013.

ABSTRACT: The purposes of the present research are to identify the contributions of: 1) the theory of Semiotic Representation Registers, allied to theory of Didactic Situations, to the construction of the concept of Riemann's Integral for functions of a real variable (named as Definite Integral along the text); 2) the use of Concept Maps in order to notice the development of conceptualization of Definite Integral. It is a qualitative research, of exploratory nature, which has adopted the Didactical Engineering as research methodology. The theoretical support is based on Theories of Didactic Situations and Theory of Semiotic Representation Registers. For monitoring, the Concept Maps were used as didactic instruments. After literature review, it was developed and applied a didactic sequence, through a mini course for thirteen students of 1st to 3rd grade levels of Civil Engineering, Environmental Engineering, Production Engineering and License in Chemistry. During the didactic sequence applied from 6th to 15th of August of 2012, on five occasions, it was required the production and/or alteration of a Concept Map, in the *software Cmap Tools*, involving the contents of the activities. The *softwares Geogebra* and *wxMaxima* were used as didactic resources for solving the respective activities. It was observed that group discussion and computational exploration can bring about important contributions for the concepts learning. Furthermore, the analysis of the Concept Maps produced by students, allows the teacher to recognize features that should be strengthened to improve the understanding of Definite Integral content. It also allows to identify possible didactic difficulties, and to confront key-concepts of teachers and students. It was noticed that, activities planned in order to provide autonomy and attitude in the students, based on different registers of semiotic representation, are more likely to provide meanings to the taught contents.

Keywords: Riemann's Integral. Conceptual Maps. Theory of Semiotic Representation Registers. Theory of Didactic Situation.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Elementos da Situação Didática	37
Figura 2: Interações nas situações de ação (adaptado de KUSNIAK, 2004, p.27)	39
Figura 3: Interações nas situações de formulação (Adaptado de BROUSSEAU, 1997, p.7)	40
Figura 4: Designações verbais de uma unidade figural (DUVAL, 2011, p.78)	48
Figura 5: Tarefa de redação de uma mensagem de construção (DUVAL, 2011, p.79)..	49
Figura 6: Arquitetura Cognitiva (DUVAL, 2000, p.66, <i>apud</i> KARRER, 2006, p.29)...	52
Figura 7: Exemplo de tratamento e conversão no cálculo de área	56
Figura 8: Tratamento gráfico para o cálculo de área sob uma curva	57
Figura 9: Área sob uma curva, calculada por reconfiguração intermediária	63
Figura 10: Estrutura triádica e diádica da significância (DUVAL, 2009, p.85).....	68
Figura 11: Conversões utilizadas por alunos no cálculo de área sob uma curva.....	92
Figura 12: Exemplo do Desenvolvimento operacional-estrutural de um conceito matemático (OLIVEIRA, 2004, p.18)	93
Figura 13: Tratamento em R da convergência da Sequência cn	136
Figura 14: Tratamento em R2 da convergência da sequência cn	137
Figura 15: Distinção dos critérios de convergência dos exercícios 4 e 5 (Débora).....	141
Figura 16: anotação de ϵ e n requeridos na tarefa 10 - aluna Daia	155
Figura 17: Representação de convergência de um aluno	158
Figura 18: Notação de convergência de uma das alunas participantes do curso.....	158
Figura 19: Resposta da pergunta 13, do aluno Álvaro.....	161
Figura 20: Estimativa de mapa conceitual para os conceitos associados à parte A	164
Figura 21: Critério de convergência de sequência do aluno Álvaro.....	165
Figura 22: Mapa de Marcos/Alvaro antes da discussão coletiva.....	171
Figura 23: Mapa Conceitual da parte A, elaborado por Marcos/Alvaro após discussão coletiva	172
Figura 24: Mapa Conceitual relativo à parte A de Bruno/Camila	173
Figura 25: Mapa Conceitual da parte A da aluna Débora.....	173
Figura 26: Mapa Conceitual elaborado pelo aluno Claison depois da discussão em sala	174
Figura 27: Mapa Conceitual da aluna Bia	174
Figura 28: Mapa Conceitual parte A de Daia/Caroline.....	175
Figura 29: associação convergência X existência do limite observada nos MC dos alunos	176
Figura 30: Acesso aos caracteres matemáticos no <i>Cmap Tools</i>	177
Figura 31: Confusão em relação à convergência	179
Figura 32: informações desconexas no MC de Daia/Caroline	180
Figura 33: Mapa inicial da parte A (após discussão) do aluno Bruno	181
Figura 34: Mapa final da parte A (após discussão) do aluno Bruno.....	182
Figura 35: Resolução das questões 1 e 2 – parte B da aluna Caroline.....	187
Figura 36: Resolução do grupo Daia/Caroline para a questão 3.	190
Figura 37: Resolução da tarefa 3 (Bruno/Camila)	190
Figura 38: Resolução da tarefa 4 (Camila/Bruno).....	190
Figura 39: Formalização do aluno Bruno para a questão 5.....	193

Figura 40: Formalização do aluno Claison para a questão 5.....	193
Figura 41: Fórmulas da equipe Bruno/Camila para as atividades 3 e 4.....	194
Figura 42: Fórmulas do Álvaro para as atividades 3 e 4.....	194
Figura 43: Representação de Camila	196
Figura 44: Representação de Caroline	196
Figura 45: Tratamentos e conversão usados na atividade 8-b.....	198
Figura 46: Estimativa para o mapa conceitual do final da parte B das atividades propostas.....	200
Figura 47: Desenvolvimento dado por Bruno à fórmula do somatório	201
Figura 48: Desenvolvimento do somatório dado por Claison	201
Figura 49: Mudança de registros na questão 3-B	204
Figura 50: Unidades Significantes para a conversão RLN -->RA da tarefa 1	209
Figura 51: Dois Tratamentos para a soma de termos de uma sequência	210
Figura 52: As sequências dos exercícios 3 e 4 no Geogebra.....	219
Figura 53: Somas parciais obtidas no wxMaxima	220
Figura 54: Registro da expressão para a série alternada da tarefa 5 (Álvaro).....	222
Figura 55: Mapa conceitual estimado para conceitos trabalhados até a parte C	225
Figura 56: Mapa conceitual elaborado por Alvaro/Marcos após parte C	231
Figura 57: MC - parte C elaborado por Daia/Caroline	232
Figura 58: Registro do desenvolvimento do somatório por Claison	236
Figura 59: Registro do desenvolvimento do somatório do Marcos.....	236
Figura 60: Gráfico da função $f(x) = x^2$ em $[2;4]$ de Álvaro	240
Figura 61: Decomposição de uma área em retângulos (Daia).....	242
Figura 62: Procedimento para calcular área sob o gráfico (Daia/Caroline).....	242
Figura 63: Estimativa do mapa conceitual referente à parte D:	247
Figura 64: Observações sobre a divisão da área em retângulos	248
Figura 65: Amplitude na física	249
Figura 66: Tela do Geogebra mostrando as funções interpoladoras.....	254
Figura 67: áreas sob as curvas mostradas no Geogebra.....	255
Figura 68: Área mostrada pela Soma de Riemann para $f(x)-g(x)$	256
Figura 69: Cálculo da área pelo método dos retângulos (Débora)	259
Figura 70: Comando usado por Bruno/Álvaro para o cálculo da área.....	259
Figura 71: Cálculo de área sob as curvas (Bruno).....	262
Figura 72: Estimativa de mapa conceitual elaborado para a parte E.....	267
Figura 73: Valores para as somas superior e inferior (Débora).....	268
Figura 74: Interpretação da integral definida (Bruno)	268
Figura 75: Cálculo da área da cobertura do ginásio por Álvaro/Bruno	269
Figura 76: Conversão RLN para RG requerida na questão 4E	270
Figura 77: Área calculada por meio da decomposição em retângulos.....	271
Figura 78: Conversões na questão 8E.....	272
Figura 79: Alguns tratamentos possíveis para o Cálculo de áreas.....	272
Figura 80: Mapa Conceitual da sequência didática de Débora	275
Figura 81: Mapa Conceitual da sequência didática de Claison	276
Figura 82: Mapa Conceitual da Sequência Didática de Bruno.....	277
Figura 83: Mapa Conceitual da Sequência Didática de Álvaro e Marcos	278
Figura 84: Excerto - relações da integral definida (Débora).....	279
Figura 85: Excerto do MC Bruno/Alvaro - integral definida X soma de Riemann.....	280

Figura 86: Materiais manipuláveis - recipientes.....	294
Figura 87: Representações Numérica, Gráfica e Algébrica dos dados do recipiente circular.....	328
Figura 88: Tela do Geogebra com dados do recipiente circular.....	329
Figura 89: Representações Numérica, Gráfica e Algébrica para os dados do recipiente semi-circular.....	330
Figura 90: Tela do Geogebra com dados do recipiente semi-circular.....	331
Figura 91: Representações Numérica, Gráfica e Algébrica para os dados do recipiente trapezoidal.....	332
Figura 92: Tela do Geogebra com dados do recipiente trapezoidal.....	333
Figura 93: Representações Numérica, Gráfica e Algébrica para os dados do recipiente ampulheta.....	334
Figura 94: Tela do Geogebra com dados do recipiente ampulheta.....	335
Figura 95: Representações Numérica, Gráfica e Algébrica para os dados do recipiente retangular.....	336
Figura 96: Tela do Geogebra com dados do recipiente retangular.....	337
Figura 97: Representações Numérica, Gráfica e Algébrica para os dados do recipiente retangular alto.....	338
Figura 98: Tela do Geogebra com dados do recipiente retangular alto.....	339
Figura 99: Exemplo de Conversão de Representação na questão 11.....	342
Figura 100: Tratamento e conversão para os números triangulares da questão 13.....	343

LISTA DE QUADROS

Quadro 1: Tipos de Representação, com seus respectivos objeto de estudo, noção de representação e método de pesquisa, segundo Duval (2009).....	47
Quadro 2: Exemplo de representação de uma sequência numérica em vários registros	53
Quadro 3: Análise de congruência para representações do conceito de convergência ...	61
Quadro 4: Análise de congruência para representações do conceito do cálculo de área por meio de integrais.....	62
Quadro 5: Valores e variáveis visuais para a reta no plano cartesiano (DUVAL, 2011, p.101)	65
Quadro 6: Valores e variáveis visuais para $y = ax+b$ no plano cartesiano. (DUVAL, 2011, p.101).....	66
Quadro 7: Comparativo entre os livros-textos descritos, para as entidades primárias de Contreras e Ordóñez (2006)	107
Quadro 8: Participantes da Pesquisa	115
Quadro 9: Caracterização da situação adidática - análise <i>a posteriori</i> da questão 1A .	126
Quadro 10: Caracterização da situação adidática da questão 2 A	129
Quadro 11: Unidades Significantes para os registros associados ao conceito de limite.	132
Quadro 12: Caracterização da situação adidática da questão 3A	133
Quadro 13: Diferentes tratamentos em diferentes registros para a convergência da sequência	136
Quadro 14: Caracterização da situação adidática da questão 4A	138
Quadro 15: Caracterização da situação adidática da questão 5A	141
Quadro 16: Caracterização da situação adidática da questão 6A	143
Quadro 17: Análise de Congruência RLN-->RA	145
Quadro 18: Caracterização da situação adidática da questão 7A	145
Quadro 19: Caracterização da situação adidática da questão 8A	149
Quadro 20: Codificação necessária para a conversão de um registro algébrico para um numérico	153
Quadro 21: Caracterização da situação adidática das questões 9-10A	155
Quadro 22: Caracterização da situação adidática das questões 11A	157
Quadro 23: Caracterização da situação adidática da questão 12A	160
Quadro 24: Caracterização da situação adidática da questão 13A	161
Quadro 25: Caracterização da situação adidática da questão 14A	162
Quadro 26: Enfoque da Convergência de Sequência Numérica.....	166
Quadro 27: Tratamentos e Conversões requeridas nas atividades da parte A.....	167
Quadro 28: Análise de Congruência da conversão envolvida no desenvolvimento do somatório	188
Quadro 29: Caracterização da situação adidática das questões 1-2B	188
Quadro 30: Caracterização da situação adidática das questões 3-4B	191
Quadro 31: Caracterização da situação adidática da questão 5B	193
Quadro 32: Caracterização da situação adidática da questão 6B	195
Quadro 33: Caracterização da situação adidática da questão 7B	197
Quadro 34: Caracterização da situação adidática da questão 8B	199
Quadro 35: Caracterização da situação adidática das questões 9-10B	202
Quadro 36: Atividades Cognitivas das questões da parte B.....	203

Quadro 37: Caracterização da situação adidática da questão 1C	209
Quadro 38: Caracterização da situação adidática da questão 2C	213
Quadro 39: Caracterização da situação adidática da questão 3C	216
Quadro 40: Caracterização da situação adidática da questão 4C	220
Quadro 41: Caracterização da situação adidática das questões 5-6C	223
Quadro 42: Caracterização da situação adidática da questão 7C	226
Quadro 43: Aspectos relativos às questões da parte C	228
Quadro 44: Conceitos-Chave das atividades da parte C	228
Quadro 45: Caracterização da situação adidática da questão 1D	237
Quadro 46: Caracterização da situação adidática da questão 2D	238
Quadro 47: Caracterização da situação adidática da questão 3-4D	244
Quadro 48: Caracterização da situação adidática das questões 5-10D	249
Quadro 49: Mudança proposta no enunciado das questões 8 e 9D	251
Quadro 50: funções interpoladoras para as margens do lago	252
Quadro 51: Caracterização da situação adidática da questão 1E	257
Quadro 52: Caracterização da situação adidática da questão 2E	260
Quadro 53: Caracterização da situação adidática da questão 3E	261
Quadro 54: Caracterização da situação adidática da questão 4E	262
Quadro 55: Caracterização da situação adidática da questão 5E	264
Quadro 56: Caracterização da situação adidática das questões 6-8E	269
Quadro 57: Os Conceitos Esperados e os Mapas	273
Quadro 58: Conversões requeridas na questão 9	341
Quadro 59: Exemplo de análise de congruência na questão 12	342

SUMÁRIO

Introdução.....	19
Seção 1 - Suporte Teórico e Metodológico	25
1.1 O percurso metodológico	25
1.2 Fundamentos Teóricos e Metodológicos	26
1.2.1 Engenharia Didática	27
1.2.1.1 Fases da Metodologia da Engenharia Didática	29
1.2.2 Teoria das Situações Didáticas (TSD)	32
1.2.3 Teoria de Registro das Representações Semióticas (TRRS)	45
1.2.3.1 A estrutura triádica de Duval	67
1.2.4 Mapas Conceituais (MC).....	71
Seção 2 – Análise Preliminar	80
2.1 O Ensino de Cálculo Diferencial e Integral	80
2.2 Bernhard Riemann.....	100
2.3 A Integral Definida em Livros-Textos de Cálculo: uma análise.....	102
Seção 3 – Aspectos Gerais da Sequência Didática Proposta e Sua Aplicação.....	111
3.1 Aspectos Gerais da Sequência Didática proposta	111
3.2 A Aplicação da sequência didática	114
3.2.1 O planejado	114
3.2.2 O executado	114
Seção 4 - Análise <i>a priori</i> e <i>a posteriori</i> das Atividades Propostas na Parte A	120
4.1 A tarefa 1 e as análises <i>a priori</i> e <i>a posteriori</i>	120
4.1.1 Análise <i>a priori</i>	120
4.1.2 Análise <i>a posteriori</i>	121
4.2 A tarefa 2 e as análises <i>a priori</i> e <i>a posteriori</i>	126
4.2.1 Análise <i>a priori</i>	126
4.2.2 Análise <i>a posteriori</i>	127
4.3 A tarefa 3 e as análises <i>a priori</i> e <i>a posteriori</i>	129
4.3.1 Análise <i>a priori</i>	129
4.3.2 Análise <i>a posteriori</i>	130
4.4 A tarefa 4 e as análises <i>a priori</i> e <i>a posteriori</i>	134
4.4.1 Análise <i>a priori</i>	134
4.4.2 Análise <i>a posteriori</i>	134
4.5 A tarefa 5 e as análises <i>a priori</i> e <i>a posteriori</i>	138
4.5.1 Análise <i>a priori</i>	138

4.5.2	Análise <i>a posteriori</i>	139
4.6	A tarefa 6 e as análises a priori e a posteriori	142
4.6.1	Análise <i>a priori</i>	142
4.6.2	Análise <i>a posteriori</i>	142
4.7	A tarefa 7 e as análises a priori e a posteriori	143
4.7.1	Análise <i>a priori</i>	143
4.7.2	Análise <i>a posteriori</i>	143
4.8	A tarefa 8 e as análises a priori e a posteriori	145
4.8.1	Análise <i>a priori</i>	145
4.8.2	Análise <i>a posteriori</i>	147
4.9	Os exercícios 9 e 10 e as análises a priori e a posteriori.....	149
4.9.1	Análise <i>a priori</i>	149
4.9.2	Análise <i>a posteriori</i>	150
4.10	A tarefa 11 e as análises a priori e a posteriori.....	156
4.10.1	Análise <i>a priori</i>	156
4.10.2	Análise <i>a posteriori</i>	156
4.11	A tarefa 12 e as análises a priori e a posteriori.....	157
4.11.1	Análise <i>a priori</i>	157
4.11.2	Análise <i>a posteriori</i>	158
4.12	A tarefa 13 e as análises a priori e a posteriori.....	160
4.12.1	Análise <i>a priori</i>	160
4.12.2	Análise <i>a posteriori</i>	160
4.13	A tarefa 14 e as análises a priori e a posteriori.....	161
4.13.1	Análise <i>a priori</i>	161
4.13.2	Análise <i>a posteriori</i>	162
4.14	Os exercícios 15 e 16 e as análises a priori e a posteriori.....	163
4.14.1	Análise <i>a priori</i>	163
4.14.2	Análise <i>a posteriori</i>	165
4.15	Análise Didática das Atividades.....	165
4.16	Análise Didática dos Mapas Conceituais.....	170
Seção 5	- Análise <i>a priori</i> e a <i>Posteriori</i> das Atividades Propostas na Parte B.....	185
5.1	Os exercícios 1 e 2 e as análises a priori e a posteriori:.....	185
5.1.1	Análise <i>a priori</i>	185
5.1.2	Análise <i>a posteriori</i>	186
5.2	Os exercícios 3 e 4 e as análises a priori e a posteriori.....	188

5.2.1	Análise <i>a priori</i>	188
5.2.2	Análise <i>a posteriori</i>	189
5.3	A tarefa 5 e as análises a priori e a posteriori	191
5.3.1	Análise <i>a priori</i>	191
5.3.2	Análise <i>a posteriori</i>	192
5.4	A tarefa 6 e as análises a priori e a posteriori	193
5.4.1	Análise <i>a priori</i>	193
5.4.2	Análise <i>a posteriori</i>	194
5.5	A tarefa 7 e as análises a priori e a posteriori	195
5.5.1	Análise <i>a priori</i>	195
5.5.2	Análise <i>a posteriori</i>	196
5.6	A tarefa 8 e as análises a priori e a posteriori	197
5.6.1	Análise <i>a priori</i>	197
5.6.2	Análise <i>a posteriori</i>	197
5.7	As tarefas 9 a 11 e as análises a priori e a posteriori	199
5.7.1	Análise <i>a priori</i>	199
5.7.2	Análise <i>a posteriori</i>	201
5.8	Análise Didática das atividades.....	202
5.9	Análise Didática dos Mapas Conceituais da parte B	206
Seção 6 - Análise <i>a priori</i> e <i>a posteriori</i> das Atividades Propostas na Parte C		208
6.1	A tarefa 1 e as análises a priori e a posteriori	208
6.1.1	Análise <i>a priori</i>	208
6.1.2	Análise <i>a posteriori</i>	209
6.2	A tarefa 2 e as análises a priori e a posteriori	209
6.2.1	Análise <i>a priori</i>	209
6.2.2	Análise <i>a posteriori</i>	211
6.3	A tarefa 3 e as análises a priori e a posteriori	213
6.3.1	Análise <i>a priori</i>	213
6.3.2	Análise <i>a posteriori</i>	215
6.4	A tarefa 4 e as análises a priori e a posteriori	216
6.4.1	Análise <i>a priori</i>	216
6.4.2	Análise <i>a posteriori</i>	217
6.5	As tarefas 5 e 6 e as análises a priori e a posteriori.....	220
6.5.1	Análise <i>a priori</i>	220
6.5.2	Análise <i>a posteriori</i>	222

6.6 As tarefas 7 e 8 e as análises a priori e a posteriori.....	223
6.6.1 Análise <i>a priori</i>	223
6.6.2 Análise <i>a posteriori</i>	226
6.7 Análise Didática das Atividades.....	227
6.8 Análise Didática dos Mapas Conceituais da parte C.....	228
Seção 7 - Análises <i>a priori</i> e <i>a posteriori</i> das Atividades Propostas na Parte D	234
7.1 A tarefa 1 e as análises a priori e a posteriori	234
7.1.1 Análise <i>a priori</i>	234
7.1.2 Análise <i>a posteriori</i>	235
7.2 A tarefa 2 e as análises a priori e a posteriori	237
7.2.1 Análise <i>a priori</i>	237
7.2.2 Análise <i>a posteriori</i>	238
7.3 A tarefa 3 e as análises a priori e a posteriori	238
7.3.1 Análise <i>a priori</i>	238
7.3.2 Análise <i>a posteriori</i>	239
7.4 A tarefa 4 e as análises a priori e a posteriori	243
7.4.1 Análise <i>a priori</i>	243
7.4.2 Análise <i>a posteriori</i>	243
7.5 As tarefas 5 a 11 e as análises a priori e a posteriori.....	244
7.5.1 Análise <i>a priori</i>	244
7.5.2 Análise <i>a posteriori</i>	248
7.6 Análise Didática das Atividades.....	250
7.7 Análise Didática dos Mapas Conceituais da parte D.....	251
Seção 8 - Análise <i>a priori</i> e <i>a posteriori</i> das Atividades Propostas na Parte E	252
8.1 A tarefa 1 e as análises a priori e a posteriori	252
8.1.1 Análise <i>a priori</i>	252
8.1.2 Análise <i>a posteriori</i>	253
8.2 A tarefa 2 e as análises a priori e a posteriori	257
8.2.1 Análise <i>a priori</i>	257
8.2.2 Análise <i>a posteriori</i>	258
8.3 A tarefa 3 e as análises a priori e a posteriori	260
8.3.1 Análise <i>a priori</i>	260
8.3.2 Análise <i>a posteriori</i>	260
8.4 A tarefa 4 e as análises a priori e a posteriori	261
8.4.1 Análise <i>a priori</i>	261

8.4.2	Análise <i>a posteriori</i>	262
8.5	A tarefa 5 e as análises <i>a priori</i> e <i>a posteriori</i>	262
8.5.1	Análise <i>a priori</i>	262
8.5.2	Análise <i>a posteriori</i>	263
8.6	As tarefas 6 a 9 e as análises <i>a priori</i> e <i>a posteriori</i>	264
8.6.1	Análise <i>a priori</i>	264
8.6.2	Análise <i>a posteriori</i>	268
8.7	Análise Didática das Atividades.....	270
8.8	Análise Didática dos Mapas Conceituais.....	273
Seção 9 – Síntese das Análises dos Resultados.....		281
9.1	A sequência didática X aprendizagem autônoma.....	281
9.2	A metodologia docente X Consequências para o professor.....	286
9.3	Os Mapas Conceituais X aprendizagem X postura do professor	288
Seção 10 – Nova Proposta de Abordagem para a Construção do Conceito de Integral Definida.....		292
10.1	Análise <i>a priori</i> das atividades componentes da parte introdutória	326
Conclusão		344
Referências		352
Apêndice A - A descrição do conteúdo Integral Definida em Livros-Textos de Cálculo		367
1	LEITHOLD, L. O cálculo com geometria analítica.	367
2	ÁVILA, Geraldo. Cálculo das funções de uma variável.....	369
3	ANTON, Howard. Cálculo: um novo horizonte.....	371
4	TAN, S.T. Matemática Aplicada à Administração e Economia.....	374
5	STEWART, J. Cálculo.....	378
6	HUGHES-HALLETT, D; GLEASON, A.M.; McCALLUM, W.G. <i>et al.</i> Cálculo de uma variável.....	383
Apêndice B - Lista de Tarefas da Parte A da Sequência Didática.....		388
Apêndice C - Atividades Componentes da parte B da Sequência Didática		394
Apêndice D - Atividades Componentes da parte C da Sequência Didática.....		397
Apêndice E - Atividades Componentes da parte D da Sequência Didática		400
Apêndice F - Atividades Componentes da parte E da Sequência Didática.....		403
Apêndice G - Fotos do material manipulável.....		408
Apêndice H - Comandos no Geogebra		412

Introdução

Durante minha experiência profissional como professora da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral (CDI) nos cursos de Tecnologia Ambiental, Tecnologia em Construção Civil e Engenharia Ambiental, na Universidade Tecnológica Federal do Paraná, câmpus Campo Mourão, as disciplinas da área de matemática eram as que mais reprovavam, ocasionando grandes transtornos, tanto aos alunos quanto à instituição, como por exemplo, a necessidade de oferta de turmas especiais para os reprovados.

Embora a lei de diretrizes e bases da educação nacional considere que os cursos superiores são uma continuidade dos estudos, muitas vezes, o que se percebe é que ali ainda é um início, haja vista a inaptidão para os estudos observados nos anos iniciais de graduação.

Beltrão (2009) aponta que ingressantes dos cursos superiores de tecnologia, na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, não parecem ter os conhecimentos necessários para a continuidade dos estudos, apresentando dificuldade, especialmente, nos conteúdos básicos da matemática. Esta falta de conhecimentos básicos da matemática em alunos ingressantes em cursos superiores, é citada também por autores como Santos e Borges Neto (2009), Frescki e Pigatto (2009) e Silva *et al* (2006), dentre outros. Esta deficiência traz consequências desagradáveis para o graduando, uma vez que ele não consegue acompanhar os conteúdos contemplados na disciplina de Cálculo.

Em geral, os professores percebem a falta de compreensão desses princípios básicos, dos conceitos, propriedades, teoremas e da relação entre diversos assuntos relacionados à chamada matemática básica. No entanto, sentem-se de mãos atadas, já que há um extenso programa a ser cumprido, com isso, não dispõem de tempo (carga horária da disciplina) para retomar todos os conteúdos necessários. A progressão do discente para as séries ou períodos posteriores torna-se consequência de simples memorização que, passada sua necessidade – ou seja, a avaliação, a obtenção da nota para aprovação – desaparecem da memória. Isso acontece tanto no Ensino Médio como nos cursos Superiores.

Santos e Borges Neto (2009), Frescki e Pigatto (2009) e Silva *et al* (2006) relatam, em pesquisas realizadas em cursos superiores, sobre a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, que a metodologia adotada pelos professores pesquisados tende a ser a tradicional, ou seja, aulas baseadas no método expositivo-dialogado e avaliações na forma de provas escritas. Nos momentos de prova, com raras exceções, o aluno lê a

questão e não sabe o significado, o que está sendo exigido, qual fórmula usar, ou qual a relação da questão com o conteúdo visto em sala.

Uma das dificuldades das disciplinas da área da Matemática, apontada por Silva (2002), está relacionada ao fato de haver uma preocupação excessiva, por parte dos professores, com o conteúdo a ser trabalhado, em detrimento da aprendizagem do aluno.

É difícil o professor que consegue se convencer de que seu objetivo principal no processo educacional é o maior aproveitamento possível dos alunos, e que esse objetivo fica longe de ser atingido quando a sua meta passa a ser cobrir a maior quantidade possível de matéria em aula (SILVA, 2002, p. 67).

A dificuldade apontada por Nascimento (2001), que também surge nas conversas informais entre os professores de matemática, é que os alunos chegam à universidade sem saber estudar, não consultam professores, não debatem, não suportam rotinas de trabalho mais demoradas e acabam se perdendo nos seus objetivos.

Na busca de investigar possibilidades aos apontamentos já citados, nesta pesquisa, pretende-se propor uma sequência didática em que o aluno seja conduzido ao estudo e discussão de aspectos matemáticos, associados ao conceito de Integral de Riemann para funções de uma variável real (neste texto denominada Integral Definida), de forma mais espontânea (e frequente) que nas aulas tradicionais¹ de Cálculo. A partir disso, podem surgir propostas para encaminhamentos diferentes, concernentes à metodologia de ensino para as aulas de Cálculo.

Mesmo com as dificuldades já citadas, acredita-se que quando o professor leva em conta os pré-requisitos para aprender (ou ensinar) um determinado assunto, as dificuldades de aprendizagem (ou mesmo de ensino) podem ser minimizadas. Mas não adianta levar isso em consideração, sem deixar que o aluno atue, efetivamente, para sua aprendizagem. Tenho percebido que nas aulas de Cálculo quem mais fala é o professor, enquanto a maioria dos alunos parecem divagar, sem compreender o que está sendo explicado.

Uma alternativa para tentar reduzir esse problema, pode ser a elaboração de tarefas em que o aluno tenha um papel mais ativo na compreensão dos conceitos, em que ele seja mais autônomo em relação a sua aprendizagem. Todavia, pouco adianta uma lista de tarefas bem planejadas se o professor não acompanhar o desenvolvimento cognitivo dos estudantes, em relação ao conteúdo que se deseja ensinar.

¹ Aqui entendidas como as aulas expositivas, em que ao aluno cabe sentar e ouvir o professor falar.

Na pesquisa bibliográfica realizada percebeu-se que várias alternativas para melhorar a aprendizagem do CDI têm sido apontadas como, por exemplo: a utilização de computadores em sala de aula, a experimentação, a criação de um ambiente em que o aluno se sinta capaz de pensar, investigar e resolver problemas. Também são apontadas alternativas para acompanhar a construção dos conceitos em estudo, dentre as quais, a elaboração de Mapas Conceituais.

Diante disso, a proposta desse trabalho é utilizar mapas conceituais como instrumento didático, para acompanhar o desenvolvimento do conceito de integral definida, para estudantes de primeiro semestre, dos cursos de engenharia, tecnologia e licenciatura, do Campus Campo Mourão da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Pretende-se, ainda, utilizar ferramentas computacionais como apoio à resolução de atividades que priorizem a ação e investigação do aluno frente ao conteúdo visado.

Na literatura, os Mapas Conceituais são apresentados como um instrumento capaz de mostrar dúvidas interpretações ou a compreensão de conceitos. Sua elaboração exige, por parte do aluno, maior reflexão e entrelaçamento dos conceitos estudados, o que pode proporcionar melhor compreensão do conteúdo. Além disso, a literatura aponta que a análise docente dos mapas conceituais elaborados pelos discentes permite, ao professor, conhecer os pontos que precisam ser retomados e melhor esclarecidos, antes do dia da prova escrita. Assim, supõe-se que a chance do aluno ter sucesso nas avaliações é maior, aumentando a chance de aprovação na disciplina. Neste contexto, acredita-se que, considerar os pressupostos das Teorias das Situações Didáticas e dos Registros de Representação Semiótica, seja uma opção importante para a elaboração de tarefas que visem maior autonomia estudantil e para atender as especificidades da matemática.

Nesta tese, pretende-se elaborar uma sequência de tarefas, embasada nestas concepções teóricas, para o conceito de Integral de Riemann para funções de uma variável real. Por outro lado, a verificação do alcance dos objetivos propostos será feita por meio da análise de mapas conceituais elaborados pelos alunos.

O conceito de Integral de Riemann necessita de outros conceitos estudados desde os primeiros anos do Ensino Fundamental, e a reconstrução destes será planejada na sequência didática a ser aplicada, que será sustentada pela Teoria das Situações Didáticas, de Brousseau, e Teoria de Registro de Representação Semiótica, de Duval. Pretende-se elaborar tarefas que visem maior autonomia estudantil e que atenda as

especificidades da Matemática, proporcionando maior interação entre aluno e objeto de conhecimento, bem como maior reflexão sobre o tema estudado, e que resultem em benefícios para o discente.

Por outro lado, o tema “Integral Definida” requer, também, a compreensão de conceitos como os de função e limites, além de aspectos específicos da linguagem matemática, como a notação sigma, que são tratados na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral (doravante, CDI), viu-se, então, a oportunidade desta pesquisa contribuir com os avanços para a aprendizagem do Cálculo. Nossa hipótese de pesquisa é que os Mapas Conceituais são um meio rico em informações, e pode facilitar o acompanhamento, pelo professor, da construção de um conceito.

Diante do exposto, nossa **pergunta de pesquisa** é: **em que medida os Mapas Conceituais contribuem para acompanhar o desenvolvimento da conceitualização da Integral de Riemann?**

Para isso, procurar-se-á responder às seguintes questões intermediárias:

- É possível observar a construção da conceitualização da Integral de Riemann por meio de Mapas Conceituais?
- A elaboração de Mapas Conceituais facilita a compreensão e a construção do conceito em tela?

Após reflexões analíticas, temos por **objetivos** nessa tese:

- Identificar as contribuições da teoria de registros de representação semiótica, aliada à teoria das situações didáticas, para a conceitualização da Integral de Riemann para funções de uma variável real;
- Identificar as contribuições da utilização de Mapas Conceituais para acompanhar o desenvolvimento da conceitualização da Integral de Riemann para funções de uma variável real.

A metodologia de pesquisa adotada foi a Engenharia Didática (ARTIGUE, 1995), com aporte teórico das Teorias das Situações Didáticas (TSD) (BROUSSEAU, 1976), de Brousseau, e da Teoria de Registro de Representação Semiótica (TRRS), de Duval (2009), como já exposto. Os Mapas Conceituais (NOVAK e CAÑAS, 2008) foram tratados como instrumento de acompanhamento da construção do conceito de Integral Definida.

O desenvolvimento da pesquisa em nível teórico e prático, bem como os resultados obtidos, estão apresentados neste texto, organizados por meio de seções. A

primeira delas descreve a pesquisa, esclarece os sujeitos envolvidos, e apresenta, sucintamente, a metodologia da Engenharia Didática, as Teorias TSD e TRRS e os Mapas Conceituais, procurando descrever as contribuições para esta pesquisa.

A segunda seção apresenta uma revisão de literatura, baseada em publicações recentes sobre o ensino e a aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral. Em particular, deu-se atenção àquelas referentes ao objeto Integral. De modo geral, tais pesquisas indicam o uso de ferramentas computacionais, a diversidade de representações e os trabalhos coletivos como potencialmente facilitadores da aprendizagem discente no Cálculo Diferencial e Integral (CDI). Esta seção apresenta, ainda, uma breve discussão sobre como o tema “Integral Definida” é tratado em seis Livros-texto, constante nos planos de ensino de CDI em algumas universidades do País, como Universidade de São Paulo (USP), Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), Universidade de Brasília (UnB), Universidade Estadual do Paraná – Câmpus Campo Mourão (UEPR), Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Câmpus Campo Mourão (UTFPR). Tal análise visa perceber a apresentação do tema nos livros-textos adotados por professores de CDI para posterior confronto com a indicação das pesquisas.

A partir da análise das sugestões das pesquisas e da apresentação do tema pelos livros descritos, montou-se uma sequência didática para o estudo das Integrais Definidas.

Na terceira seção, são expostos os aspectos gerais da sequência didática, os pressupostos considerados na sua elaboração, o planejamento e a realização da sequência para a coleta de dados, bem como alguns fatores que chamaram a atenção no momento da aplicação. Foram considerados, como pré-requisitos para a compreensão do conceito de Integral Definida, os conceitos de convergência de sequências e séries, a notação somatória e o cálculo de áreas por meio do método dos retângulos. Desta forma, a sequência didática constou de cinco partes, sendo que cada uma delas contemplou um destes conceitos e a última parte foi dedicada à Integral Definida. Ao final de cada parte, solicitou-se a elaboração de um Mapa Conceitual, que serviu para análise do alcance do objetivo relativo a cada uma delas.

A quarta seção apresenta as respectivas análises *a priori* e *a posteriori* das atividades propostas para a parte A da sequência didática. Esta parte objetivou a retomada de noções e notações para convergência de sequências. Alguns pontos observados durante a resolução das atividades foram destacados ao final, numa seção

denominada Análise Didática das Atividades. Também, ao final, foram analisados os mapas elaborados, sob o ponto de vista das informações que o docente pode perceber a partir das construções.

As seções cinco, seis, sete e oito apresentam as análises *a priori* e *a posteriori* das atividades propostas nas partes B, C, D e E, respectivamente. Na parte B, o foco foi a notação somatória. Na parte C, tratou-se da convergência de séries. A parte D enfatizou o cálculo de áreas sob uma curva, e a parte E, enfocou o conceito de Integral Definida.

Na seção nove foi realizada uma breve discussão dos resultados obtidos, que sintetiza as informações advindas dos protocolos discentes da sequência didática e dos Mapas elaborados, e sugere ações docentes.

Alguns pontos de melhoria detectados durante a aplicação indicaram a necessidade de uma melhor reestruturação das atividades, o que é apresentado na seção dez (10), com a respectiva análise *a priori*.

Finalmente, são apresentadas as conclusões que sintetizam os resultados obtidos na pesquisa com ênfase no trabalho docente em sala de aula de CDI em face da aprendizagem dos alunos, bem como sugere trabalhos futuros.

Seção 1 - Suporte Teórico e Metodológico

O objetivo desta seção é descrever o percurso metodológico e apresentar uma síntese acerca das teorias que fundamentam esta tese.

1.1 O percurso metodológico

O presente estudo caracteriza-se como uma pesquisa qualitativa, de natureza exploratória (TRIVIÑOS, 1987; KÖCHE, 2002) e tem por objetivo identificar as contribuições da utilização: 1) de Mapas Conceituais para acompanhar o desenvolvimento da conceitualização da Integral de Riemann para funções de uma variável real e 2) da teoria de registros de representação semiótica, aliada à teoria das situações didáticas, para a conceitualização da Integral de Riemann para funções de uma variável real.

Para isso, foi planejada uma sequência didática de atividades em que o objeto central foi a construção do conceito de Integral Definida pelo aluno, na qual o professor/pesquisador pudesse acompanhar essa evolução por meio da observação dos Mapas Conceituais elaborados pelos discentes.

Com esse intuito, iniciou-se uma pesquisa bibliográfica que buscava sintetizar dificuldades e possibilidades para o ensino e a aprendizagem do CDI, e, em especial, do conceito de Integral Definida. Foi pesquisado o tratamento dado ao tema por livros-textos usuais da disciplina, bem como, os conceitos necessários à sua compreensão, e as teorias que pudessem fornecer o embasamento necessário à elaboração das atividades.

A segunda² versão da sequência, apresentada nas seções 4 a 8, foi aplicada na forma de minicurso, a 13 alunos voluntários, no período de 06 a 15 de agosto de 2012, com duração de 32 horas, ofertado das 19 às 23 horas. Devido à greve nas universidades federais, o período foi estabelecido de acordo com a possibilidade de participação dos alunos, já que alguns deles trabalhavam durante o dia e outros moravam em outras cidades. Maiores informações sobre o minicurso serão oportunizadas na seção 3.

Ao final do minicurso, os alunos fizeram uma avaliação das atividades apresentadas e da contribuição da elaboração dos Mapas Conceituais para a

²A primeira versão da sequência didática foi discutida, informalmente, com alguns alunos (apenas para verificar a compreensão da redação e da sequência lógica das atividades, que não foram resolvidas).

aprendizagem do conceito em questão. Os resultados foram analisados e comentados na seção 9.

Verificou-se a existência de pontos passíveis de melhoria e foi proposta uma reformulação (a sequência que é apresentada na seção 10). As considerações acerca dos resultados obtidos em cada uma das partes da sequência didática foram descritas e analisadas nas seções 4.15, 5.8, 6.7, 7.6, 8.7 e sintetizadas na seção 9.

1.2 Fundamentos Teóricos e Metodológicos

A metodologia de pesquisa utilizada foi a Engenharia Didática, descrita na seção 1.2.1. A primeira etapa dessa metodologia é composta por uma análise preliminar. Nesta tese, esta etapa contemplou a consideração da vivência profissional da pesquisadora, a revisão da literatura e a análise do modo pelo qual os livros didáticos usuais abordam o tema em tela, sintetizados na seção 2. Estas informações ajudaram a compor as tarefas da sequência didática. Nesta composição, ainda foram considerados os pressupostos da Teoria das Situações Didáticas, apresentada na seção 1.2.2, e do Registro das Representações Semióticas (seção 1.2.3). Esta união de fundamentos proporcionou a elaboração de atividades para a construção do conceito de Integral Definida que pode ser acompanhada por meio da observação de Mapas Conceituais, que são apresentados na seção 1.2.4.

Neste trabalho, foram usados os *softwares* Geogebra³, wxMaxima⁴ e Cmap Tools⁵, todos *softwares* gratuitos. O Geogebra apresenta interface gráfica e algébrica, o que permite a visualização de duas representações de um mesmo objeto simultaneamente. O wxMaxima apresenta interface algébrica/numérica e permite a comparação destas representações com as apresentadas pelo Geogebra, bem como às escritas pelos alunos. A complementaridade dos dois *softwares* potencializa a compreensão do conceito, uma vez que possibilita a observação e comparação de um mesmo objeto em pelo menos três registros diferentes: gráfico, numérico e algébrico, além da língua natural. O *Cmap Tools* agiliza a elaboração de Mapas Conceituais, por dar acesso aos conceitos e frases de ligação apenas com um clique, devido aos

³Veja <http://www.Geogebra.org/cms/>

⁴Veja <http://andrejv.github.com/wxMaxima/>

⁵Veja <http://cmap.ihmc.us/>

caracteres matemáticos. Isso facilita a escrita algébrica, além da opção de gravação dos passos para a elaboração dos Mapas, cujo acesso permite ao professor, reconhecer as dúvidas discentes e prováveis dificuldades, e, ainda, permite a revisão dos Mapas elaborados de uma forma bastante prática.

Além do que foi exposto, estes recursos didáticos (*Geogebra*, *wxMaxima* e *Cmap Tools*) são facilmente encontrados na web.

A partir da próxima subseção, apresenta-se a síntese das Teorias abordadas, com a finalidade de situar o leitor nos pressupostos considerados para a presente pesquisa.

1.2.1 Engenharia Didática

A síntese sobre a “Engenharia Didática”, exposta a seguir, é baseada nos textos disponibilizados por Michele Artigue por ocasião do curso “Engenharia Didática” realizado em outubro de 2010 na Uniban, de São Paulo, na Escola de Altos Estudos, promovida por aquela universidade em convênio com a CAPES. Os textos encontram-se nas referências bibliográficas (ARTIGUE, 2009, 2009a, 2002, 2009b, 2009c). Aqui, apenas são mencionados explicitamente outros textos que não foram os recomendados na ocasião, mas que contribuíram para o esclarecimento da metodologia “Engenharia Didática”.

A Engenharia Didática emergiu no seio da comunidade francesa de Didática da Matemática a fim de difundir os resultados de pesquisas e de ações didáticas. Constituiu-se como tema de estudo a partir da escola de verão de didática realizada em 1982, na França. Desde então, tem se desenvolvido, e atualmente, é utilizada em outras áreas, além da Matemática.

Segundo Artigue (1995; 1996), a Engenharia Didática surgiu na Didática da Matemática no início dos anos oitenta, numa referência ao trabalho do engenheiro que, para elaborar um projeto, utiliza os conhecimentos científicos e aceita submeter-se ao controle científico.

O quadro teórico natural da Engenharia Didática era a Teoria das Situações Didáticas (TSD), que será tratada mais adiante. Foi na década de 80 (período considerado idade de ouro da Engenharia Didática) que ocorreram avanços essenciais na TSD e na consolidação da Engenharia Didática como metodologia privilegiada de pesquisa na França.

Devido ao desenvolvimento da Didática da Matemática da época, vislumbrou-se a possibilidade de abordagem, por meio da Engenharia Didática, de duas questões, quase sempre deixadas de lado: as relações entre investigação e ação no sistema de ensino, e o papel das “relações didáticas” nas metodologias de investigação em Educação Matemática.

Assim, enquanto metodologia da pesquisa, a Engenharia Didática é caracterizada por basear-se em realizações didáticas em salas de aula, isto é, sobre a concepção, a realização, a observação e análise de sequências de ensino, e por possuir uma validação essencialmente interna, baseada no confronto entre a análise *a priori* e a análise *a posteriori*.

A Engenharia Didática faz parte de um conjunto mais amplo, chamado por alguns de *design* didático, cujo interesse tem sido crescente, devido:

- ao fato de que a educação matemática procura pesquisar o que e como melhorar uma situação de ensino da matemática que atualmente é considerada insatisfatória;
- à pressão crescente sobre os sistemas educativos, tendo em vista os resultados das avaliações nacionais e internacionais;
- os debates crescentes sobre as reformas curriculares e seus efeitos;
- a sensibilidade crescente da pesquisa nas dimensões situacional, institucional e cultural do processo de ensino e aprendizagem, e a necessidade de organizar um confronto da contingência coerente com esta sensibilidade;
- à vontade de pesquisadores de desenvolver intervenções didáticas nas salas de aula, apoiando-se nos avanços da pesquisa fundamental.

Para Artigue (2009), o *design* didático pode ser visto como uma ferramenta de desenvolvimento, um meio de organizar as relações entre pesquisa e prática, de transformar as intervenções didáticas inspiradas pela pesquisa e de incorporar seus resultados.

Os objetivos de pesquisa associados à Engenharia Didática podem ser de natureza diversa e não se limitam à aprendizagem de conceitos matemáticos de certo nível de ensino. Aliás, seu desenvolvimento já abrange áreas como a Educação Física, Biologia, entre outras. Existem também associações da Engenharia Didática com a

Transposição Didática⁶. Os trabalhos de Rosa (1998), Martins (2010) e Olgin e Groenwald (2011) exemplificam o uso desta metodologia em outras áreas.

O trabalho de Rosa (1998), na área de engenharia de produção, avalia a contribuição do uso do perspectógrafo, aparelho desenvolvido para a grafia de perspectivas em situações de ensino, para o processo de condução da construção de conhecimentos. Martins (2010) investigou como o estudante revela, trata e domina a noção de processo dinâmico inerente a um algoritmo ou programa, em disciplinas de Introdução aos Algoritmos e Programação, da área de Ciências da Computação. Olgin e Groenwald (2011) apresentam uma engenharia didática com o tema criptografia, buscando aliá-lo aos conceitos matemáticos estudados no Ensino Médio.

1.2.1.1 Fases da Metodologia da Engenharia Didática

Esta metodologia de pesquisa consiste em quatro fases, não necessariamente disjuntas, chamadas de: 1) análises preliminares, 2) concepção e análise *a priori* das situações didáticas, 3) experimentação, 4) análise *a posteriori* e validação.

A primeira fase, **análise preliminar**, consiste na análise epistemológica dos conteúdos a serem ensinados, da forma de ensinar e seus efeitos, bem como, nas concepções dos alunos e suas dificuldades de aprendizagem. Ou seja, são analisadas as dimensões epistemológicas, cognitivas e didáticas do objeto envolvido, tendo em vista o objetivo da pesquisa. Esse estudo, na verdade, perpassa todas as demais fases (ARTIGUE, 1996).

Nesta tese, essa análise preliminar consistiu na revisão de literatura, em que se buscou conhecer as dificuldades e possibilidades de trabalho do campo conceitual da Integral Definida, o tratamento dado ao tema nos livros didáticos usados como referência básica nos cursos de Cálculo de várias instituições do país⁷, e a busca de referencial teórico a ser usado como apoio ao enfrentamento das dificuldades apontadas.

Os livros-texto analisados refletem, em sua maioria, o ensino tradicional do CDI, com exposições de elementos teóricos e sugestão de exercícios repetitivos que visam a reprodução de técnicas. Tomando-os por base, deduz-se que as aulas de Cálculo estão centradas na representação algébrica dos saberes a serem ensinados, na postura do

⁶Campos (2006) afirma que a Engenharia Didática tem seu pressuposto teórico nas Teorias das Situações Didáticas, proposta por Brousseau, e da Transposição Didática, proposta por Chevallard.

⁷ Tais informações estão contempladas na seção 2.

professor enquanto detentor do saber, na atitude passiva dos alunos nas aulas de Cálculo e na falta de diálogo entre alunos e entre alunos e professor. No entanto, as pesquisas sobre o processo de ensino e aprendizagem de Cálculo indicam outras metodologias, centradas na diversidade de representações, no uso de recursos didáticos computacionais e no diálogo entre alunos e destes com o professor.

A partir das sugestões de metodologia e recursos didáticos apontados na revisão de literatura para melhorar a aprendizagem na disciplina de Cálculo, em particular, para o assunto Integral Definida, e a análise da apresentação do tema pelos livros didáticos analisados, e tendo em vista a experiência docente da pesquisadora, iniciou-se o processo de elaboração da sequência didática, etapa inicial da segunda fase.

Para tanto, pressupôs-se a necessidade de trabalhar com diferentes registros de representação, dando especial atenção à representação em língua natural⁸ e às conversões entre representações algébricas, gráficas e em língua natural. Além disso, considerou-se necessário elaborar atividades em que o aluno pudesse elaborar conjecturas sobre os assuntos em estudo e testá-las. Estas questões serão retomadas nas seções 3 a 8, as quais apresentam e analisam a sequência didática.

Na segunda fase, **concepção e análise a priori** das situações didáticas da engenharia, o investigador atua sobre determinada quantidade de variáveis do sistema, não fixadas pelas restrições. Essas variáveis podem ser macro-didáticas ou globais, que se referem à organização global da engenharia, e micro-didáticas ou locais, que se referem à organização local da engenharia, como, por exemplo, a sequência de ensino ou as variáveis dependentes do objeto em estudo.

Nesta tese, as variáveis macro-didáticas consideradas foram a **organização temporal** do minicurso (tempo disponibilizado pelos alunos para a realização da sequência), e o **uso de softwares** computacionais. Isto, porque se acredita que tais variáveis interferem diretamente no aprendizado: a concentração das aulas, ao mesmo tempo em que pode ajudar no encadeamento de conceitos interligados, pode sobrecarregar o aluno e tornar pouco produtivo seu tempo de estudo; o uso dos aplicativos computacionais pode interferir no desenrolar das atividades pela familiaridade, ou não, do usuário com as interfaces utilizadas e os respectivos registros mostrados na tela.

⁸ Usaremos Língua Natural no sentido da linguagem falada/escrita no cotidiano dos alunos.

Quanto às variáveis micro-didáticas, foram consideradas como tais, aquelas diretamente ligadas à sequência didática: o **domínio de conceitos** tidos como **pré-requisitos** para a compreensão do conceito de Integral Definida, como a convergência de sequências e séries e o cálculo de áreas sob uma curva (que requerem as noções de infinito, infinitésimo, proximidade); **familiaridade** discente **com a representação em Língua Natural** (facilidade de comunicação escrita); **conversão de registros** de representação com apoio do aplicativo computacional.

Na fase de **concepção** da sequência, é preciso levar em consideração o problema que cada aluno tem de resolver, e de que maneiras ele pode fazê-lo, que conhecimentos serão necessários para tanto, tendo em vista, é claro, o objeto de estudo que, em nosso caso, é a Integral Definida.

Considerou-se que, para compreender o conceito de Integral Definida, era imprescindível o conhecimento acerca da convergência de sequências e séries e de suas respectivas notações, e do cálculo de uma área sob uma curva pelo método dos retângulos. O uso de diferentes registros de representação semiótica com apoio computacional e a diversidade de situações foram considerados como elementos adequados para assimilação e ancoragem dos referidos conceitos. Diante disso, concebeu-se uma sequência em que estes conceitos foram focados (vide seções 3 a 8).

O objetivo da **análise a priori** é determinar quais escolhas permitem controlar os comportamentos dos alunos e de seus significados. Por isso, ela se baseia em hipóteses, cuja validação será atestada, ou não, no confronto das análises *a priori* e *a posteriori*.

Para este trabalho, a análise *a priori* buscou prever os comportamentos dos alunos frente às situações propostas, bem como possíveis dificuldades e facilidades na compreensão dos conceitos visados.

A fase 3 da metodologia da engenharia didática, **experimentação**, constitui-se da parte prática, em que os alunos, diante das tarefas que lhe são propostas, colocam em prática seus conhecimentos a fim de resolver o que foi solicitado, e, com isso, adquirir novos conhecimentos. As informações detalhadas desta fase para esta tese estão na seção 3.

A fase 4, **análise a posteriori e validação**, constitui-se do momento em que se valida a proposta efetuada, numa comparação essencialmente interna. É verificado se o que foi devolvido pelos alunos é condizente com o que foi planejado. Caso não tenha sido, são realizados os ajustes necessários.

A análise *a posteriori* se apoia no conjunto de dados recolhidos do experimento: as observações realizadas durante a sequência e as produções dos alunos. Muitas vezes estes dados são complementados por outros obtidos por meio de entrevistas ou questionários.

Segundo Brousseau (1997, p.7):

A Engenharia Didática se propõe a identificar ou produzir as situações cujo controle exige considerar os conhecimentos visados e, por meio destas situações, distinguir quais permitem a criação desse conhecimento por uma adaptação espontânea do sujeito, e aquelas para as quais a adaptação é imediata ou impossível (tradução nossa)⁹.

Para Carneiro (2005, p.90), “A teoria da Engenharia Didática pode ser vista como referencial para o desenvolvimento de produtos para o ensino, gerados na junção do conhecimento prático com o conhecimento teórico”. Esta é uma das pretensões desta tese: tornar-se, mediante validação acadêmica, um produto voltado diretamente ao ensino do Cálculo Diferencial e Integral em diversas Instituições de Ensino Superior (IES), cuja disseminação poderá ser realizada por meio de minicursos e palestras ofertados em IES, ou até mesmo com a criação de páginas, na internet, para este fim.

1.2.2 Teoria das Situações Didáticas (TSD)¹⁰

É um modelo teórico desenvolvido na França, desde 1986, por Guy Brousseau, a partir da tese que

[...] para produzir, melhorar, reproduzir, descrever, e compreender as situações de ensino de matemáticas, tornou-se necessário – e possível – teorizar esta atividade de ensino como objeto original de estudos e não como simples conjunção de fatos teorizáveis unicamente dentro de domínios autônomos como a pedagogia, a sociologia [...]¹¹ (BROUSSEAU, 1986, p.2).

⁹No original: L'ingénierie didactique s'attache à identifier ou à produire les situations dont le contrôle exige la mise en oeuvre des connaissances visées et parmi ces situations, à distinguer celles qui permettent la création de cette connaissance par une adaptation spontanée du sujet, de celles auxquelles l'adaptation est immédiate ou impossible.

¹⁰ Para mais informações históricas sobre esta teoria, consulte Kusniak (2004).

¹¹ No original: “[...] pour produire, améliorer, reproduire, décrire, et comprendre les situations d'enseignement des mathématiques, il est devenu nécessaire - et possible - de théoriser cette activité d'enseignement en tant qu'objet original d'études et non pas en tant que simple conjonction de faits théorisables uniquement dans des domaines autonomes comme la pédagogie, la sociologie, la psychologie, les mathématiques, la linguistique ou l'épistémologie”.

Na TSD, o objetivo é modelizar situações com fins didáticos¹², de modo a melhorar o aprendizado. O enfoque da teoria está na construção que permite “a compreensão das interações sociais de alunos, professores e conhecimentos matemáticos que ocorrem em uma sala de aula e que condicionam o que se aprende e a forma como isso se dá” (BROUSSEAU, 2008, p.11).

Para Balacheff e Margolinas (2005), a TSD modeliza o sistema educativo pelas relações entre sistemas: o sistema que determina o que deve ser ensinado e o sistema que determina o que de fato o é, bem como, a relação de uma situação de ensino como jogo específico do saber visado entre diferentes subsistemas tais como o sistema didático, do aluno ou do meio.

Uma **situação** é “um modelo de interação de um sujeito com um meio determinado” (BROUSSEAU, 2008, p.21). Na TSD, uma **situação didática** é todo o contexto que cerca o aluno, que está em seu entorno, e nele estão incluídos o professor e tudo o mais que “colabora no componente matemático de sua formação” (idem, p.53).

O método usado para a construção do conhecimento é o fornecimento, pelo professor, de **situações fundamentais** que fazem funcionar uma determinada noção. Após isso, mudam-se os valores de suas variáveis de tal maneira que os conhecimentos prévios dos alunos permitem elaborar estratégias eficazes para a solução deste novo problema, e também explorar as características da situação, como os objetivos, as regras, as propriedades, sem que as regras da ação (do jogo, como chama Brousseau) sejam modificadas. Estas novas estratégias devem exigir que sejam estabelecidos novos conhecimentos (BROUSSEAU, 1986).

Exemplificando para a estatística, Brousseau (2003) classifica uma situação fundamental quanto à forma, em três tipos.

A primeira forma de situação fundamental é a *situação típica ou característica*, em que se busca caracterizar os elementos fundamentais das situações que caracterizam a teoria, ou o conceito (no caso do autor, a estatística; no nosso caso, os conceitos para a compreensão da Integral Definida). O autor afirma que, para integrar uma situação estatística particular, é suficiente estabelecer como “meio” os elementos da situação em questão, como contingência, estrutura, modelo, etc.; identificar uma estratégia de resolução de um estatístico e integrá-los em uma justificativa para um uso ou para responder a uma questão. Uma situação fundamental é considerada típica ou

¹² Inicialmente, o objeto de estudo era o conhecimento matemático, no entanto, atualmente, a TSD já é aplicada a inúmeras áreas (ARTIGUE, 2000).

característica se ela fornecer um modelo que possa ser usado independentemente da situação ou da noção envolvida.

A segunda forma é chamada de *situação significativa*, que pode ser útil para gerar outros tipos de situação e que permite justificar um conjunto de estratégias e conceitos característicos do conteúdo e articulá-los. No caso da estatística, esta situação busca não apenas aplicar um teste estatístico, mas também interpretar os dados obtidos à luz do fenômeno em análise. Uma situação é significativa se ela for concebida como referência para representar simbolicamente como requerido, no que é essencial no objeto e nas relações. Esta segunda forma completa e tende a justificar a primeira e serve de base para a terceira, *situação inicial de um processo genético*.

Esta terceira forma da situação fundamental está associada ao fato que o desenvolvimento de uma ciência acontece a partir de questionamentos, que geram soluções, que permitem criar novas situações, que geram novas questões, e se repete o ciclo. Ou seja, esta forma leva em conta o todo o processo histórico de desenvolvimento do conceito (ou ciência!) e se apresenta

como a última de uma sequência de situações, tal que cada uma é resultado da anterior e prepara a próxima, com o mínimo de aportes externos. Situações, questões e conhecimentos que se manifestam devem ser justificados por causas e razões internas. A situação inicial desempenha papel fundamental no processo que ela vai gerar e deve conter a pergunta que o processo vai responder¹³ (BROUSSEAU, 2005, p.181-tradução nossa).

Brousseau afirma que para cada conhecimento matemático existe pelo menos uma situação fundamental que o caracterize. Uma *situação fundamental* então é aquela em que a determinação das variáveis envolvidas gera todo o saber visado. A pesquisa aprofundada das variáveis didáticas envolvidas e as análises epistemológicas e didáticas desse saber visado, aliada à pesquisa dos obstáculos para a aprendizagem dos alunos, permitem encontrar uma situação fundamental para tal saber (KUSNIAK, 2004).

Bloch (2005, p.17) sustenta que uma situação fundamental é “uma construção epistemológica feita a partir do saber matemático, e os problemas resolvidos com esse saber levam em conta a transposição didática no momento de ‘ensinar’ um conteúdo¹⁴”.

¹³“ comme la dernière d’une suite de situations, telle que chacune résulte de la précédente et prepare la suivante avec Le minimum d’apports extérieurs. Les situations, les questions et les connaissances qui s’y manifestent doivent se justifier par des causes et des raisons internes. La situation initiale joue un rôle essentiel dans le processus qu’elle va générer, elle doit contenir la question à laquelle le processus va répondre”.

¹⁴[...]une construction épistémologique faite à partir du savoir mathématique, et des problèmes qu'il est envisageable de résoudre avec ce savoir, alors qu'une réalisation (même envisagée) prenden compte la transposition didactique du moment et "l'enseignabilité" d'un projet

O objetivo das situações fundamentais é a aprendizagem de um determinado conceito. Brousseau (s/d, *apud* BESSOT, 2009) define-a como um processo de adaptação (assimilação e acomodação, de acordo com a teoria Piagetiana) a um **meio** que é produtor de contradições, dificuldades e desequilíbrios, aliado a um processo de aculturação em que se insere a prática da instituição, como os contratos didáticos (ou seja, há dois conceitos importantes nesse processo de aprendizagem e que serão explicitados mais adiante: **o meio** e o **contrato didático**).

Desta forma, a tarefa do professor é a de provocar no aluno as adaptações desejadas, fornecendo situações que os façam agir, falar, refletir, desenvolver seu próprio movimento. Entre o momento que o aluno aceita o problema como sendo seu até a produção da resposta, o docente deve evitar intervir no conhecimento que ele deseja ver concretizado. O aluno deve saber que o problema foi escolhido para que ele adquira um novo conhecimento, para que ele seja capaz de implementá-lo em situações fora do contexto de ensino e sem indicação intencional (BROUSSEAU, 1986; 2008).

Na busca das situações específicas para este novo conhecimento, Balacheff e Margolinas (2005, p.76), expõem que “o principal entrave é a construção do **meio**, sistema antagonista do sistema ensinado (aluno), de forma que as estratégias dos alunos são motivadas pelas necessidades das suas relações com o meio”¹⁵ (tradução nossa). Brousseau (1988) argumenta que o meio deve ser construído como objeto de saber para o aluno.

Para entender o papel do “sistema antagonista” do parágrafo anterior, considere as práticas nas quais o professor procura mostrar ao aluno o que ele deve ver e compreender e no qual o aluno deve ler ou reconhecer, dentro daquele meio, o conhecimento que se quer adquirir (MARGOLINAS, 1998). Nesse caso, o meio atua como aliado e não como sistema antagonista: basta aprender a fazer esta leitura ou reconhecimento que a resposta está dada (e o conhecimento visado admitido como adquirido). É este meio aliado que parece tomar conta nas aulas de Cálculo.

Bessot (2009) defende que a noção de **meio** é essencial para compreender e/ou provocar a aprendizagem autônoma no aluno como um sujeito dentro de uma situação didática.

¹⁵ No original: “Cette ‘spécificité’ est une contrainte essentielle: Il s’agit de construire un milieu, système antagoniste du système enseigné, tel que les stratégies des élèves soient motivées par les necessites de leurs relations avec le milieu”.

Para Brousseau (1989, *apud* COMITI, GRENIER e MARGOLINAS, 1995, p.4), o meio:

aparece como o sistema antagonista do sistema ensinado (aluno). Por representar convenientemente o funcionamento não didático dos conhecimentos, devemos adotar maior diversidade de situações dentro das quais os estados do jogo são determinados alternativamente pelo jogador e por um SISTEMA antagonista que modifica os estados de maneira não controlada pelo jogador. Este sistema é, para o observador, um modelização do meio e de suas respostas pertinentes para a aprendizagem em curso. Não é uma parte de uma situação. [...] É este sistema antagonista que temos proposto chamar de meio. Ele, portanto, desempenha um papel central na aprendizagem, como causa de adaptações e no ensino, como referência e objeto epistemológico¹⁶ (tradução nossa)

Dependendo da relação destas situações a que temos nos referido com a aquisição de conhecimento, elas recebem nomes específicos. Uma situação em que não há a intenção de ensinar, mas que é específica de um saber, é chamada por Brousseau de **situação adidática**, enquanto as situações que não são específicas de um saber são chamadas de situações **não-didáticas**. As situações mais gerais, que implicam nas interações entre alunos e tarefas/meio, são chamadas **situações didáticas** (BROUSSEAU, 1986).

Uma *situação não-didática* é aquela que não foi construída especialmente para fazer adquirir ou para avaliar um determinado conhecimento. Neste tipo de situação, o indivíduo procura produzir ações, formulações e provas para agir sobre um meio que compreende elementos materiais e eventualmente humanos (MARGOLINAS, 1998).

Uma *situação adidática* é aquela onde o ator (no caso, o aluno) “se considera, a priori, responsável pelo sucesso ou fracasso de suas ações, sem intervenção didática de um terceiro”¹⁷ (BROUSSEAU, 2000-2001, p.7). Para Margolinas (1998), uma situação adidática é aquela em que o aluno se encontra em interação com um meio em que não estão presentes, necessariamente, as intenções didáticas do professor.

¹⁶ No original: apparaît comme le système antagoniste du système enseigné: ‘Pour représenter convenablement le fonctionnement non didactique des connaissances, nous devons adopter le plus souvent des situations dans lesquelles les états du jeu sont déterminés alternativement par le joueur et par un SYSTÈME antagoniste qui modifie les états du jeu de façon non contrôlée par le joueur. Ce système est pour l’observateur, une modélisation de l’environnement et de ses réponses pertinentes pour l’apprentissage en cours. Il n’est qu’une partie de la situation. [...] C’est ce système antagoniste que nous avons proposé d’appeler milieu. Il joue donc un rôle central dans l’apprentissage, comme cause des adaptations et dans l’enseignement, comme référence et objet épistémologique’.

¹⁷ No original: “celles où l’actant se considère a priori responsable de la réussite ou de l’échec de ses actions, sans intervention didactique d’un tiers”

Nesta tese, uma situação adidática será considerada como aquela fornecida ao aluno a fim de causar desequilíbrios e que o leve a agir autonomamente, sem a presença do professor.

Em situações como essa, podem acontecer erros que não sejam percebidos pelos próprios alunos, sendo necessária, então, a intervenção do professor para identificá-los e apontá-los dentro de uma relação didática.

Nem sempre o aluno consegue resolver as situações adidáticas que lhe são oferecidas. O professor deve estar disponível para auxiliá-lo ao ser solicitado, deixando, porém, que o conhecimento seja pessoal e objetivo, isto é, sem fornecer respostas prontas.

De um modo geral, as *situações didáticas* podem ser entendidas como o conjunto das interações que permitem ao aluno estabelecer relações entre conhecimentos ou transformar conhecimentos em saberes (BROUSSEAU, 2008), fruto das ações intencionais realizadas pelo professor “para possibilitar ao aluno a aprendizagem de um conteúdo” (FREITAS, 2010, p.80). Tal interação entre professor-aluno-meio está esquematizada na Figura 1, em que S designa o saber envolvido.

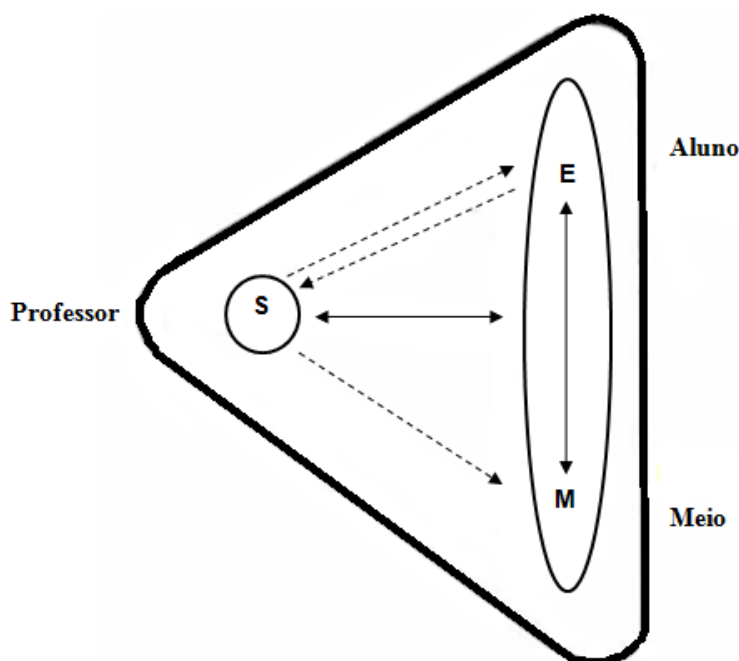


Figura 1: Elementos da Situação Didática

Fonte: Adaptado de BROUSSEAU, 1998, p.92 *apud* KUSNIAK, 2004, p.25 – tradução nossa

Na Figura 1 destacam-se os elementos da situação didática com os quais o professor deve estabelecer uma interação, o Saber (S), o Meio (M) e o Estudante (E). As interações são representadas com flechas contínuas. É papel do professor organizar um

Meio adequado, chamado anteriormente de antagonista, para que o Estudante (Aluno) acesse o Saber visado. As flechas pontilhadas representam a significação que o próprio aluno atribui ao Saber, de acordo com as possibilidades oferecidas pelo Meio.

Contudo, as situações didáticas não se restringem ao ambiente da sala de aula. Brousseau (2008) afirma que “situação didática é todo o contexto que cerca o aluno, nele incluídos o professor e o sistema educacional” (BROUSSEAU, 2008, p.21).

Já citamos que uma importante noção, atrelada à aprendizagem por meio de situações didáticas, é o contrato didático. O **contrato didático** é uma relação que determina, sobretudo implicitamente, as responsabilidades do professor e do aluno em relação ao conhecimento visado. É específico do conteúdo. É um conjunto de obrigações recíprocas, como por exemplo: é o professor que cria as condições suficientes para a apropriação dos conhecimentos e que deve reconhecê-la quando esta se produz, por outro lado, o aluno deve poder satisfazer as condições estabelecidas (BROUSSEAU, 1986). A efetivação do contrato didático depende do meio disponível para a situação.

Geralmente, a evolução de uma situação modifica o contrato didático estabelecido, e permite a obtenção de novas situações, que geram novas estratégias e novos conhecimentos, e assim por diante. No entanto, nos casos em que os alunos não conseguem resolver a tarefa proposta, é preciso que o professor auxilie e proponha outras situações que mobilizem o conhecimento visado. Isto é, o professor deve efetuar, não a comunicação do conhecimento, mas sim a devolução de um bom problema que permita o acesso àquele conhecimento.

No caso desta tese, o meio é o conjunto de situações (tarefas) que serão propostas aos alunos a fim de construir o conceito de Integral Definida, incluindo aí as conversões de registros, a utilização de mídias digitais, a elaboração de mapas conceituais, a estrutura da sala de aula e a comunicação com os demais alunos. Todas estas características permitem classificar o meio como um sistema antagônico ao sistema de ensino, pois proporcionam modificações sobre as quais o estudante não tem controle: por exemplo, como explicar a convergência de uma sequência a um colega de modo que a explicação lhe seja compreensível? Em \mathbb{R} ou em \mathbb{R}^2 vale a mesma explicação?

Implicitamente, no contrato didático, a sequência de atividades proposta permite que o aluno adquira o conhecimento visado (conceito de Integral Definida), tornando-se capaz de atingi-lo a partir da sua interação com o meio.

Nesse processo de aquisição de conhecimento, a variação dos tipos de situações didáticas propostas tem papel preponderante. Brousseau as classifica em situações de **ação, formulação, validação e institucionalização**.

Nas **situações de ação** “um sujeito manifesta seus conhecimentos dentro das suas interações com o meio” (BROUSSEAU, 1997, p.6 - tradução nossa). Quando um aluno resolve um problema, por exemplo, que está pondo em prática os conceitos e teoremas em ato, predomina-se o aspecto experimental do conhecimento. O meio oferece informação e retroação em relação às suas ações.

Nas situações de ação, o aluno, seguindo suas próprias motivações, interage com o meio que lhe é proposto, o qual, por sua vez, deve proporcionar possibilidades de aprendizagem, isto é, deve permitir o desequilíbrio de conhecimentos que ainda não estão ancorados. Em nosso caso, considerou-se que as tarefas em que se requeria a conversão de uma representação em outra, eram situações de ação. A Figura 2 retrata a interação aluno x meio.

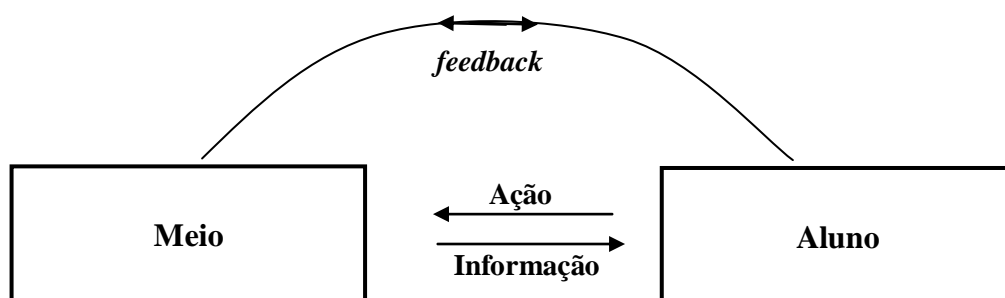


Figura 2: Interações nas situações de ação (adaptado de KUSNIAK, 2004, p.27)

Numa **situação de formulação** o aluno explicita o modelo implícito de suas ações (BESSOT, 2009). Acontece quando o aluno “cria” resultados, verdadeiros ou não, a partir das observações e análises das tarefas resolvidas, isto é, quando faz conjecturas a respeito do conhecimento sistematizado. Nesta etapa, o meio deve conter outro sujeito (fictício ou não) ao qual o primeiro sujeito transmite uma informação (BROUSSEAU, 1997). A redação de um texto explicando o comportamento de uma sequência, por exemplo, retrata esse tipo de situação, uma vez que o aluno tem que refletir sobre as variações ocorridas nas atividades e extrair uma propriedade (por exemplo, que para uma sequência ser convergente os seus termos devem se aproximar de algum número real, para todo $n > n_0$), que pode ser verdadeira ou não, sintetizando-a na Língua Natural. O ato de formular uma hipótese pode ser mais eficiente se estiver associado ao discurso desse ato mental a outros alunos.

Para Freitas (2010), uma situação adidática de formulação é aquela em que o aluno “faz determinadas afirmações relativas à sua interação com o problema, mas sem a intenção de julgamento sobre validade, embora contenham implicitamente intenções de validação” (idem, p.97). Kusniak (2004) ressalta a obrigação, nesta fase, da comunicação com outro interlocutor, a fim de melhorar o repertório linguístico e facilitar a aprendizagem.

Em outras palavras, na interação com uma situação, um aluno A pode “formular uma teoria”. Esse aluno A comunica-a a um aluno B, que vai agir sobre a situação, na qual esta “teoria” é válida ou não, dando retorno ao aluno A. Caso a hipótese formulada (“teoria”) seja contestada ou não aplicável, repete-se o processo, como indica a Figura 3.

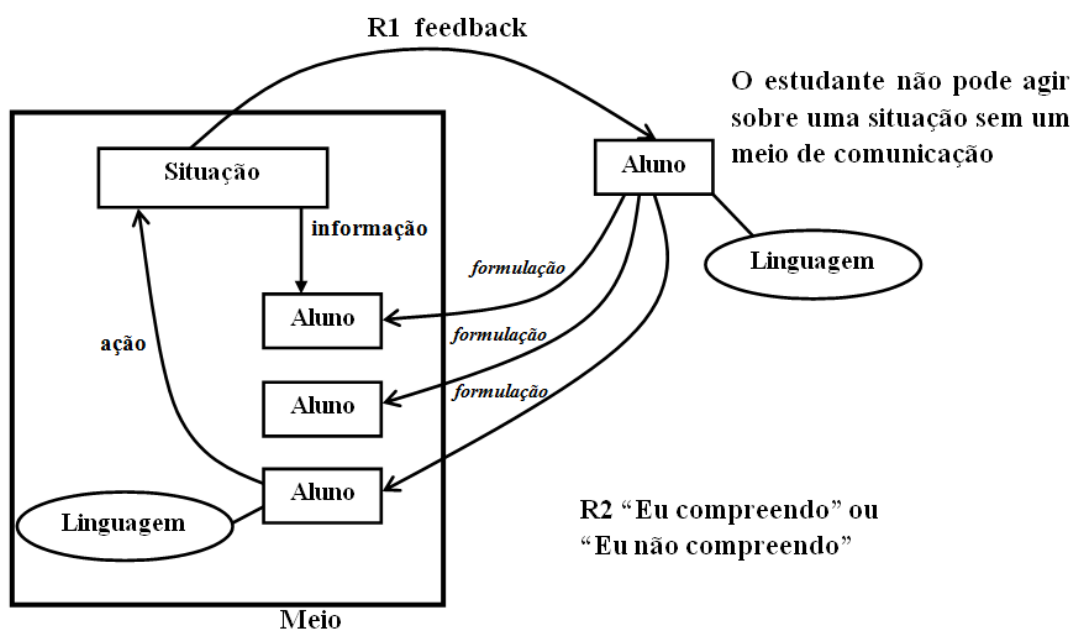


Figura 3: Interações nas situações de formulação (Adaptado de BROUSSEAU, 1997, p.7)

Na **situação de validação**, o aluno deve apresentar provas intelectuais¹⁸. (BESSOT, 2009). Para a autora, a validação empírica é devido à insuficiência do meio. Ou seja, a situação de validação deve preocupar-se com a veracidade das informações levantadas pelos alunos em relação ao conhecimento matemático. As declarações explícitas devem ser passíveis de prova. Por ser esta pesquisa de natureza exploratória, admitimos como válidos os processos de validação ocorridos por meio da análise dos

¹⁸ A autora refere-se a, por exemplo, elaborar asserções de modo que elas façam parte de algum teorema conhecido de todos.

dados produzidos pelos *softwares* ou pelo confronto das conjecturas dos grupos, mesmo que propriedades passíveis de prova não tenham sido escritas.

A **situação de institucionalização** ocorre quando o professor formaliza, por meio da sequência didática, o conceito em estudo, de acordo com o conhecimento sistematizado. Visa “estabelecer o caráter de objetividade e de universalidade do conhecimento” (FREITAS, 2010, p.101). Kusniak (2004, p.29) afirma:

A institucionalização é a passagem de um conhecimento de seu papel de meio de resolução de uma situação de ação, de formulação ou prova, a uma nova regra: que se refere a utilizações futuras, coletivas ou pessoais. Esta fase é indispensável para assegurar a transição de um conhecimento restrito a uma situação individual e contextualizada a um saber descontextualizado ativo numa determinada instituição¹⁹ (tradução nossa).

Neste processo de institucionalização, o conhecimento do aluno é convertido em um saber para a instituição de ensino. Bessot (2009, p. 52 – tradução nossa) escreve: “A negociação de um contrato ilusório ‘permite a ficção que o professor ensina um saber definitivo sem problemas para as aquisições posteriores.’ (Brousseau, 2000, p.18)²⁰”.

Para Brousseau (1997), um conhecimento pode ser adquirido diretamente, por meio da ação, ou pela conversão em modelos implícitos das aquisições obtidas por meio das formulações e comunicações.

Os três primeiros tipos de situações, ação, formulação, validação, dependem prioritariamente do aluno, enquanto a quarta, depende do professor que, naquele momento, é o possuidor do saber matemático. Estes níveis das situações servem para que a aprendizagem aconteça com maior profundidade para o aluno, e, para Brousseau (1997), o processo de sucessivas situações de ação, formulação e validação podem potencializar a aprendizagem, seja ela espontânea ou provocada voluntariamente.

Nesse sentido, Brousseau (2008) classifica a aprendizagem como sendo: 1) **por adaptação** – quando o aluno se defronta com a necessidade de adaptar o seu conhecimento para resolver outro que lhe fora proposto; e 2) **formal** – que “procura sobrepor a memorização, a técnica e os processos de automatismos à compreensão verdadeira das ideias matemáticas” (FREITAS, 2010, p.86).

¹⁹ No original: L’institutionnalisation est le passage pour une connaissance de son rôle de moyen de résolution d’une situation d’action, de formulation ou de preuve, à un nouveau rôle: celui de référence pour des utilisations futures, collectives ou personnelles. Cette phase est indispensable pour assurer le passage d’une connaissance reliée à une situation vécue individuellement et très contextualisée à un savoir decontextualisé actif dans une institution donnée.

²⁰ “La négociation d’un contrat illusoire ‘permet la fiction que le professeur enseigne un savoir définitive préparant sans à coups les acquisitions ultérieures.’ (Brousseau, 2000, p.18)”

Este segundo tipo de aprendizagem acontece em meio a situações de ensino ou situações didáticas. Freitas esclarece a diferença entre elas quando diz que “é principalmente a presença, a valorização e a funcionalidade de situações didáticas no transcorrer de uma situação didática que diferencia fundamentalmente estas duas formas de ensinar” (FREITAS, 2010, p.88). Isto significa que é possível associar a aprendizagem por adaptação às situações didáticas e a aprendizagem formal por meio das situações de ensino, embora nesta relação também tenha que ser considerada a metodologia adotada pelo professor.

Brousseau (1988, p.323) afirma que o “ensino consiste em provocar no aluno a aprendizagem projetada por situações apropriadas, às quais ele responde ‘espontaneamente’ por adaptação. É preciso, portanto, determinar quais são as adaptações que correspondem aos saberes e aos conhecimentos visados, e a quais circunstâncias eles respondem”²¹.

É papel do professor, conceber adequadamente as situações didáticas que permitem esta adaptação, e promover interações aluno-meio de forma a garantir a adequação do conhecimento adquirido com o saber visado (MARGOLINAS, 1998).

Na TSD, há dois processos de regulação nos quais o professor é peça fundamental: o de **devolução** e o de **institucionalização**. Este último já fora comentado anteriormente.

O **processo de devolução** é aquele em que o professor negocia uma série de regras de contrato didático em que ele transfere ao aluno parte da responsabilidade relativa ao saber visado, isto é, o aluno toma lugar na situação didática (BESSOT, 2009).

Brousseau (1988, p.325 – tradução nossa) define a **devolução** como “o ato pelo qual o professor faz o aluno aceitar a responsabilidade de uma situação de aprendizagem (didática) ou de um problema e aceita as consequências desta transferência”²². O autor ressalta um paradoxo existente neste processo de devolução: ao mesmo tempo em que o professor deseja que o aluno responda sozinho a uma questão, ele quer que esta seja uma **boa** resposta. No entanto, o professor não desvela esse saber ao aluno.

²¹ No original: L'enseignement consiste à provoquer chez l'élève des apprentissages projetés en le plaçant dans des situations appropriées auxquelles il va répondre 'spontanément' par des adaptations. Il s'agit donc de déterminer quelles sont les adaptations qui correspondent aux savoirs et aux connaissances visées, et à quelles circonstances elles répondent.

²² La dévolution est l'acte par lequel l'enseignant fait accepter à l'élève la responsabilité d'une situation d'apprentissage (a-didactique) ou d'un problème et accepte lui-même les conséquences de ce transfert.

Neste ponto, Margolinas (1998) ressalta que, em sala de aula, é o professor que mantém a relação dos alunos com a situação adidática escolhida, que apoia os esforços dos alunos na busca de respostas, e que observa o trabalho por eles desenvolvido, propondo novas situações, se necessário, para permitir que o aluno atinja o objetivo almejado para determinada situação.

Na sequência didática planejada, as atividades foram elaboradas para que atingissem os quatro níveis das situações: ação, formulação, validação e institucionalização, e para que proporcionassem a desestabilização necessária para a ancoragem do conhecimento novo. Desse modo, a intenção era que ocorresse uma aprendizagem por adaptação, uma vez que, em vários momentos, é solicitado que o aluno observe, faça conjecturas e teste suas afirmações, antes mesmo da apresentação formal do conteúdo abordado em cada uma das etapas. Esta abordagem permite que o aluno experimente, discuta com os colegas e comece por desvelar o saber visado.

Na transposição didática dos conteúdos, é importante considerar os obstáculos presentes no sistema didático e que atrapalham a apropriação de certos conhecimentos por parte do aluno e podem ter várias causas. Tais origens podem ser de ordem **ontogênica**, devido a limitações do sujeito no seu desenvolvimento; de ordem **didática**, devido às escolhas ou projetos do sistema educativo; ou de ordem **epistemológica**, que são próprios do conhecimento visado (BROUSSEAU, 1976).

Os obstáculos ontogenéticos são oriundos dos conhecimentos transmitidos, de forma intencional ou não, ao ser humano, por sua cultura, ou por aquisições espontâneas dos indivíduos (BROUSSEAU, 2005). Na aplicação da nossa sequência didática, podemos associar o obstáculo ontogenético com o impasse gerado numa das questões em que se definia uma sequência convergente. O desconhecimento do significado da palavra “convergir”, por não ser uma palavra usada corriqueiramente, tornou-se um obstáculo ao entendimento da convergência. A pesquisa no dicionário e a discussão em grupos dirimiram esta dificuldade. O aluno não se sentir capaz de resolver uma tarefa de Matemática, ou de escrever sobre ela, também pode ser classificado como um obstáculo ontogenético. Por exemplo, o obstáculo pode advir de limitações emotivas, adquiridas por frustrações anteriores às aulas de Matemática.

Os obstáculos epistemológicos levam em consideração as dificuldades recorrentes ocorridas numa determinada área ou conceito ao longo do tempo. Brousseau (2003) cita a variedade de argumentos e objeções à utilização de medidas de tendência central ou de dispersão como representantes de um conjunto de dados (informações),

como sendo um obstáculo epistemológico específico. Já no nosso caso, Contreras e Ordoñez (2006) citam a convergência de uma série infinita como um obstáculo epistemológico, pela dificuldade de “enxergar” que a soma de infinitas áreas de retângulos possa ser finita.

Os obstáculos didáticos estão associados às escolhas didáticas realizadas. Brousseau (2003) os divide em microdidáticos e macrodidáticos. Os *microdidáticos* são os obstáculos gerados por escolhas didáticas como, por exemplo, a ordem do ementário ou a introdução de um determinado conceito. No entanto, independentemente do método de ensino, os microdidáticos conseguem identificar os obstáculos epistemológicos. São mais geradores de obstáculos do que propriamente obstáculos. Um exemplo do obstáculo microdidático pode ser tomado na conceitualização de Integral Definida. Geralmente, o conceito é introduzido sem que o aluno tenha estudado sobre a convergência de uma série infinita ou sobre o símbolo \sum (sigma).

Os *macrodidáticos* (ou sócio-culturais) provêm das limitações das escolhas didáticas impostas pelas práticas e os conhecimentos diante da sociedade, da instituição. Brousseau (2005, p.186) os explica dizendo “são aqueles resultantes da incapacidade de grandes sistemas sócio-culturais em assumir suas responsabilidades educativas²³” (tradução nossa). O autor pontua, ainda, que, na atual sociedade, os obstáculos à difusão dos conhecimentos podem ser considerados obstáculos macrodidáticos.

A diferença entre os obstáculos ontogenéticos e os epistemológicos e didáticos é que os primeiros podem desaparecer da memória, podem deixar de existir, enquanto os demais permanecem na consciência (BROUSSEAU, 2000-2001).

Em relação à TSD, Freitas afirma que:

Trata-se de um referencial para uma educação matemática que, por um lado, valoriza os conhecimentos mobilizados pelo aluno e seu envolvimento na construção do saber matemático e, por outro, valoriza o trabalho do professor, que consiste, fundamentalmente, em criar condições suficientes para que o aluno se aproprie de conteúdos matemáticos específicos (FREITAS, 2010, p.78).

No caso desta pesquisa, as ‘condições suficientes’, a que se refere Freitas, foram pensadas como os assuntos considerados como pré-requisitos ao entendimento do conceito de Integral Definida, a saber: a noção de infinito, a notação sigma, o cálculo de área e a convergência de sequências e séries.

²³ “les obstacles macrodidactiques sont ceux qui résultent de l’incapacité des grands systèmes socio-culturels à assumer leurs responsabilités didactiques”.

Na próxima seção, apresenta-se uma síntese sobre a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, que indica meios pelos quais os objetos matemáticos podem ser acessados.

1.2.3 Teoria de Registro das Representações Semióticas (TRRS)

A Teoria de Registro das Representações Semióticas (TRRS) foi criada por Raymond Duval em 1986, a partir dos estudos de Psicologia Cognitiva. Colombo, Flores e Moretti (2008) afirmam que as primeiras publicações, no Brasil, que usam a TRRS, datam da segunda metade da década de 90. Das pesquisas analisadas, os autores sintetizam que

o trabalho com registros de representação semiótica com alunos, ou mesmo com professores em processo de formação, possibilita uma melhor compreensão não apenas do objeto matemático em estudo por parte dos estudantes, como também da especificidade da aprendizagem matemática (COLOMBO, FLORES e MORETTI, 2008, p.61).

A TRRS apresenta uma abordagem cognitiva que procura conhecer a maneira de se adquirir o conhecimento, como é o funcionamento cognitivo do aluno para que ele conduza autonomamente seu processo de aprendizagem. O foco da teoria é a complexidade cognitiva do pensamento humano e o papel das diversas representações para a compreensão da matemática (DAMM, 2010; SILVA, 2004; KARRER, 2006). Karrer (2006) apresenta os fundamentos desta teoria desde Pierce e Frege. Aos interessados, recomenda-se a leitura.

A Matemática trabalha com objetos abstratos. As representações desses objetos por meio de símbolos, signos, códigos, tabelas, gráficos, são a maneira de acessá-los.

Damm (2010, p.167) afirma que

em matemática, toda a comunicação se estabelece com base em representações, os objetos a serem estudados são conceitos, propriedades, estruturas, relações que podem expressar diferentes situações, portanto, para seu ensino, precisamos levar em consideração as diferentes formas de representação de um mesmo objeto matemático.

Essas representações podem ser algébricas, gráficas, numéricas, ou na língua natural. E isso “(...) pode desencadear no estudante, a confusão entre um objeto matemático e uma de suas representações, caso não haja no ensino de um conteúdo desta área a preocupação de coordenar diferentes registros durante o seu

desenvolvimento” (KARRER, 2006, p.3). O que significa que o aluno pode confundir o objeto matemático com a sua representação quando não são utilizadas, no ensino, várias representações, a fim de que o aluno compreenda, verdadeiramente, o que é o objeto matemático a que esses registros fazem referência.

O significado de “objeto matemático” é complexo e mostra diferenças até mesmo para os matemáticos. Lefebvre (2001, *apud* FLORES, 2006) perguntou “o que é um objeto matemático?” para matemáticos e obteve respostas que estavam em conformidade com suas práticas.

Os matemáticos platônicos definem os objetos matemáticos como entidades ideais que existiriam independentemente do espírito humano. Para os formalistas, a matemática é definida como a ciência da dedução formal, dos axiomas aos teoremas. Seus enunciados só têm conteúdo quando é fornecida uma interpretação. Para os mais radicais dentre eles, a matemática se resume em um jogo de linguagem sem relação com os ‘objetos’ materiais (LEFEBVRE, 2001, p.154 *apud* FLORES, 2006, p.11).

Flores (2006) interpreta o resultado da pesquisa de Lefebvre a fim de compreender como a representação influencia a apreensão do objeto matemático. No que diz respeito ao ensino da matemática, para o autor, o uso de diversas representações de um mesmo objeto pode facilitar a elaboração mental, no aluno, do significado deste objeto matemático.

A literatura consultada sobre o ensino de Cálculo Diferencial e Integral também recomenda a exploração de diversas representações para um mesmo objeto matemático. Acredita-se que a compreensão de um objeto acontece quando o aluno consegue representá-lo das diversas formas e, facilmente, converter uma representação em outra.

A noção de representação é tão importante que tem sido tratada, ao longo dos últimos 100 anos, sob vários enfoques, para o estudo de diferentes fenômenos. São elas: *representação mental* (1924- 1926); *representação interna ou computacional* (1955-1960); *representação semiótica* (1985). O Quadro 1 apresenta algumas particularidades destas representações.

Tipo de Representação	Objeto de estudo	Noção de representação utilizada	Método de pesquisa
Mental	“as crenças e as explicações das crianças pequenas concernentes aos fenômenos naturais e psíquicos” (DUVAL, 2009, p.30)	“evocação dos objetos ausentes” (DUVAL, 2009, p.30)	Entrevista
Interna ou Computacional	“o tratamento, por um sistema, das informações recebidas de forma a produzir uma resposta” (DUVAL, 2009, p.30)	“forma pela qual uma informação pode ser descrita e considerada em um sistema de tratamento” (DUVAL, 2009, p.31)	Codificação da informação
Semiótica	Aquisição do conhecimento e os problemas originados por sua aprendizagem, relativos a um sistema particular de signos	Forma pela qual um conhecimento é representado.	Pressupõe sistemas semióticos diferentes e de uma operação cognitiva de conversão das representações de um sistema semiótico para um outro (p.32)

Quadro 1: Tipos de Representação, com seus respectivos objeto de estudo, noção de representação e método de pesquisa, segundo Duval (2009)

Nesta subseção, o foco principal é apenas a síntese dos Registros de Representação Semiótica, pois pretende-se situar o leitor nas análises acerca da Sequência Didática elaborada para esta tese.

Duval (2009), ao considerar *semiósis* como a apreensão ou produção de uma representação semiótica e *noésis* como os atos cognitivos (apreensão conceitual), defende que não há *noésis* sem *semiósis*. Para o autor, “é a *semiósis* que determina as condições de possibilidade e de exercício da *noésis*” (p. 17 – grifo do autor) e “não há *noésis* sem o recurso a uma pluralidade ao menos potencial de sistemas semióticos, recurso que implica sua coordenação para o próprio sujeito” (p.18 – grifo do autor).

Um Sistema de Representação Semiótica deve preencher as funções de *comunicação*, *discursiva* e *cognitiva* no funcionamento do pensamento.

Duval (2009) considera quatro **funções discursivas que são inseparáveis das funções cognitivas**:

- ✓ A função referencial de **designação de objetos**;
- ✓ A função apofântica de **enunciados completos**;

- ✓ A função de **expansão discursiva** de um enunciado completo;
- ✓ A função metalinguística de **reflexividade discursiva**.

Em relação às funções cognitivas da língua natural, Duval (2011) destaca que esta contempla três tipos de operações discursivas, a saber: enunciação, designação e expansão discursiva, fundamentais na análise de um encaminhamento matemático ou de um raciocínio. A *enunciação* refere-se ao enunciado de qualquer coisa (inicia ou prolonga um discurso), que implica na *designação* de sobre o que ou a propósito do que se está falando, isto é, a designação deve respeitar a unicidade do que está sendo designado. Para esclarecer isto, observe o ponto O da Figura 4.

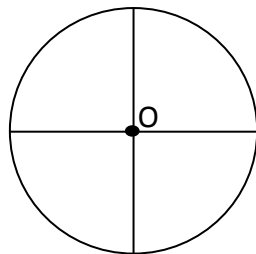


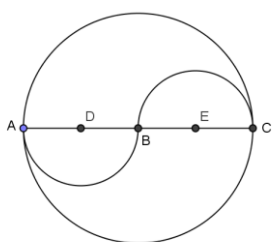
Figura 4: Designações verbais de uma unidade figural (DUVAL, 2011, p.78)

O ponto O é chamado de *unidade figural*. Neste caso, são possíveis quatro designações verbais para ele: centro do círculo, ponto de intersecção dos diâmetros, meio do segmento horizontal e meio do segmento vertical. Este é um exemplo em que não há unicidade na designação.

Enquanto a frase é a *unidade de sentido* de um discurso, a *expansão discursiva* é aquela que organiza uma sequência de frases em uma unidade coerente e com o mesmo propósito. Ou seja, é o que permite dar sentido a uma unidade figural em relação a outra unidade figural.

Estas operações discursivas devem ser levadas em conta na redação de uma argumentação ou na proposição de uma tarefa.

Duval (2011, p.79) mostra um exemplo de como usar estas operações em uma tarefa de redação de uma mensagem de construção de um círculo (Figura 5).



Vocabulário geométrico a ser utilizado	Palavras relativas às ações para não serem empregadas
Centro (de um círculo)	Ponta do compasso (<i>centro</i>)
Meio (de um segmento)	Meio \cong metade
Metade de um segmento, raio	Ponta do lápis do compasso (<i>ponto sobre o círculo</i>)

Figura 5: Tarefa de redação de uma mensagem de construção (DUVAL, 2011, p.79)

A descrição da primeira parte do procedimento reiterado na tarefa, levando em conta as operações discursivas, apresentada por Duval (2011, p.80, grifo do autor) é:

1. Traçar um segmento [AC]
2. **B é o meio de [AC]**
3. Traçar um círculo de **centro B passando por A e por C**

Na citação, o que está em negrito tem a função de designação do objeto. Tomar ciência da importância das operações discursivas e conseguir articulá-las adequadamente está associado à compreensão da tarefa ou ao objeto em estudo.

Duval ainda afirma que estas operações discursivas são operações cognitivas que “se situam *no ponto exato em que conhecimento, compreensão e conscientização* – e, portanto, progresso para o conhecimento – são inseparáveis. Assim, é preciso se exprimir para si e para os outros para poder tomar consciência. A expressão verbal abre a via para o pensamento, e não o inverso, [...]” (DUVAL, 2011, p.80-81, grifo do autor).

Mais adiante, o autor afirma: “Para ter consciência das operações discursivas próprias aos raciocínios matemáticos, é preciso passar por uma produção escrita. [...]. A redação na matemática exige um trabalho explícito de tomada de consciência das operações discursivas próprias aos raciocínios matemáticos”. (DUVAL, 2011, p.82).

Duval (2009) ainda analisa o papel da diversidade dos sistemas semióticos no funcionamento do pensamento e a complexidade da conversão das representações de um sistema a outro, isto é, explora a relação entre *semiósis* e *noésis*. Nesse sentido, estabelece que os sistemas semióticos devem permitir o cumprimento de três **atividades cognitivas fundamentais** ligadas à *semiósis*, especialmente para o desenvolvimento de uma atividade matemática, quais sejam:

- **Comunicação:** “Constituir um traço ou ajuntamento de traços perceptíveis que sejam identificáveis como *uma representação de alguma coisa* em um sistema determinado” (DUVAL, 2009, p.37).

- **Tratamento:** “Transformar as representações apenas pelas regras próprias ao sistema, de modo a obter outras representações que possam constituir uma relação de conhecimento em comparação às representações iniciais” (id, p.37-38).
- **Objetivação** ou tomada de conhecimento: “Converter as representações produzidas em um sistema em representações de um outro sistema, de tal maneira que estas últimas permitam explicar outras significações relativas ao que é representado” (ibidem, p.38).

Note que a operação de conversão é essencial para a objetivação, momento em que se pressupõe que o aluno tenha compreendido o objeto em estudo. Voltaremos a tratar desse assunto logo mais.

Diante da diversidade de sistemas semióticos que cumprem as três atividades cognitivas fundamentais mencionadas (a saber: língua natural, línguas simbólicas, gráficos, figuras geométricas, entre outras), Duval (2009) os classifica em **Registros de Representação Semiótica**: Representação em Língua Natural, Representação Simbólica (Algébrica ou Numérica), Representação Gráfica (Tabelas, gráficos, imagens e outros).

Duval considera que as representações semióticas, entendidas como “as produções constituídas pelo emprego de regra de sinais (enunciado em língua natural, fórmula algébrica, gráfico, figura geométrica,...)” (DUVAL, 2009, p.15), são uma forma de o indivíduo comunicar, tornar acessível aos outros e a si mesmo, as suas representações mentais acerca dos objetos matemáticos. Neste sentido, as representações semióticas têm uma *função de comunicação* que corresponde à função discursiva de designação de objetos.

O autor considera, ainda, que para que uma representação possibilite o *acesso ao objeto representado*, é necessário o uso de pelo menos **dois sistemas semióticos diferentes** para produzir a representação de um objeto e a **conversão espontânea** de um sistema semiótico a outro.

Isto porque, para Duval (2009), não se pode ter compreensão na matemática se não houver uma diferenciação entre o objeto matemático e sua representação, pois um mesmo objeto pode ser representado de várias formas. E é justamente o trânsito entre diferentes sistemas semióticos, aqui denominados Registros de Representação

Semiótica (RRS), por meio de diferentes representações, que permite, ao indivíduo, conhecer o objeto matemático, sem confundi-lo com sua representação.

Moretti (2002) afirma que um registro é quase sempre uma representação parcial do objeto, por isso a necessidade de vários registros e o trânsito por entre eles. O autor exemplifica:

Consideremos as diferentes representações cartesianas da mesma parábola

(a) $y = x^2 - 4x + 3$

(b) $y + 1 = (x - 2)^2$

(c) $y = (x - 3)(x - 1)$

(d) esboço da parábola no plano cartesiano

Cada uma dessas representações possui, em sua integralidade, as mesmas informações do objeto matemático referido. No entanto, do ponto de vista cognitivo, um certo tipo de informação sobressai mais em uma do que em outra forma: em (c) vemos com clareza as raízes; em (b), as coordenadas do vértice da parábola; em (d), uma representação em um sistema semiótico diferente dos anteriores e que em muitas vezes é bastante adequada à interpretação, se for o caso, do fenômeno representado. Nesta mesma forma, no entanto, não temos com precisão, por exemplo, o valor de y e devemos recorrer a uma das formas anteriores para obtê-lo (MORETTI, 2002, p.347).

Karrer (2006) é mais específica quanto aos tipos de registro que devem ser usados para facilitar o aprendizado. Citando Duval, a autora expõe que, para acontecer o entendimento matemático, é importante usar pelo menos dois tipos de registro: um multifuncional e outro monofuncional. A autora os diferencia:

Os registros multifuncionais são aqueles usados em vários campos da cultura, tanto para fins de comunicação como para tratamento. Apesar de este tipo de registro admitir várias formas de tratamento, estas não podem ser realizadas de modo algorítmico. Como exemplos de registros multifuncionais, temos a língua natural e a configuração de formas. Já os registros monofuncionais têm sido desenvolvidos para um tipo específico de tratamento, com a finalidade de se obter melhores desempenhos, e, conseqüentemente, os mesmos admitem tratamentos mais algoritmizáveis. Como exemplos de registros monofuncionais, podemos citar os sistemas numéricos, as notações algébricas, os gráficos cartesianos, dentre outros (KARRER, 2006, p.21-22).

Ao mobilizar os diversos registros, a compreensão de um conceito matemático se internaliza e se integra à estrutura cognitiva do aluno. Isso faz com que as operações requeridas num exercício, por exemplo, estejam no nível automático, fase em que o conhecimento se torna operatório, isto é, sejam facilmente acessadas pelo aprendiz. A Figura 6 representa uma arquitetura cognitiva, em que as interações entre os esquemas intencionais e automáticos são mostradas.

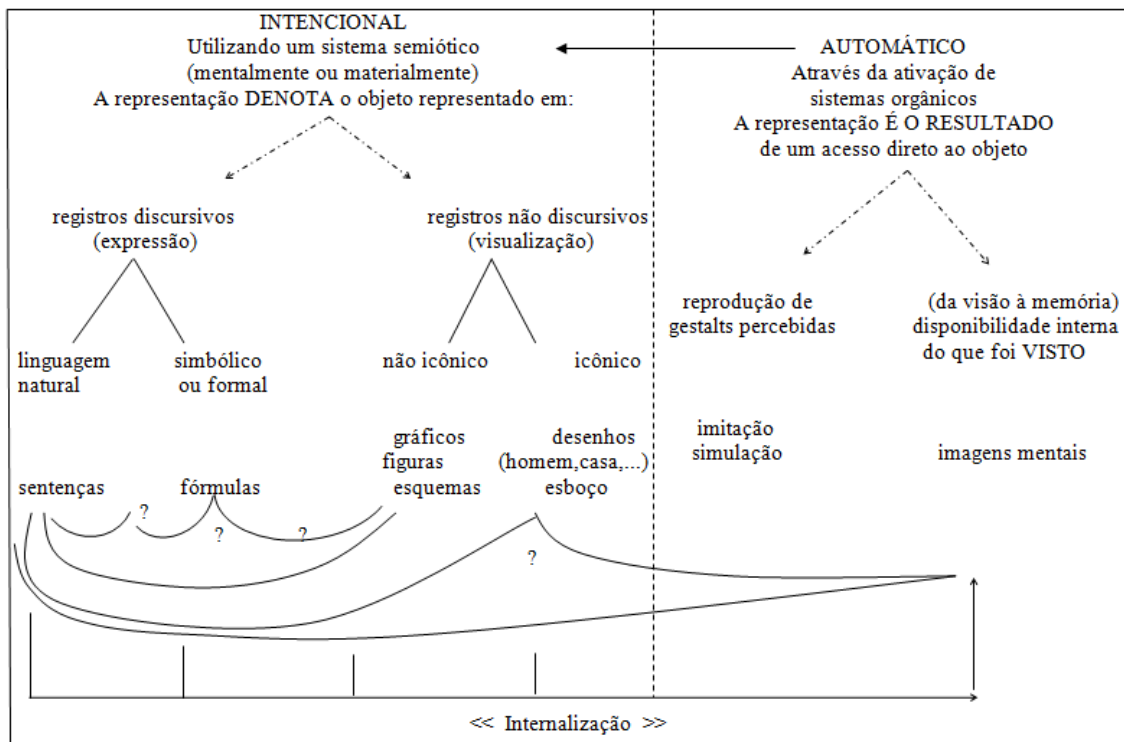
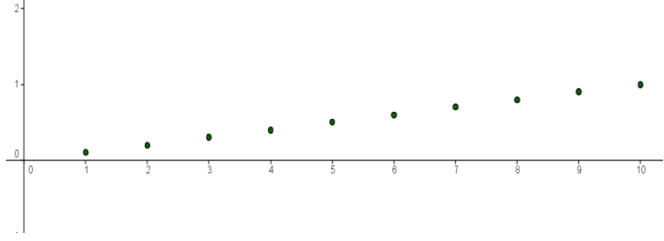


Figura 6: Arquitetura Cognitiva (DUVAL, 2000, p.66, *apud* KARRER, 2006, p.29)

Como pode ser observado na Figura 6, após a internalização do conceito, mediante um processo intencional que utiliza um registro semiótico, a conduta do indivíduo passa a ser automatizada, o que significa a compreensão, o acesso ao objeto. Diante disso, novos desafios devem ser postos para que novos conceitos sejam internalizados, isso altera a estrutura cognitiva, e assim por diante. O trabalho docente deve ser, justamente, o de propor novas questões para levar o aluno a passar de uma conduta automática para uma internalização.

Também como exemplo, consideremos o objeto matemático “sequência numérica”, em particular, consideremos a sequência que associa a cada número natural maior que zero a sua décima parte. Nesta situação podemos distinguir algumas representações, como podem ser observadas no Quadro 2:

Tipo de Registro de Representação	Exemplo
Algébrico (denominação do termo geral da sequência)	$a_n = \frac{n}{10}, n \in N^*$
Numérico (especificação de pares ordenados representativos da sequência)	$\left\{ \left(1, \frac{1}{10}\right), \left(2, \frac{2}{10}\right), \left(3, \frac{3}{10}\right), \left(4, \frac{4}{10}\right), \dots, \left(n, \frac{n}{10}\right), \dots \right\}$
Gráfico (desenho dos pontos representativos no plano cartesiano)	
Língua Natural (discurso)	Conjunto de pares ordenados em que o valor da ordenada é um décimo do valor da abscissa, sendo a abscissa um número natural não nulo.

Quadro 2: Exemplo de representação de uma sequência numérica em vários registros

Duval afirma que “Toda confusão entre o objeto e sua representação provoca, com o decorrer do tempo, uma perda de compreensão. Os conhecimentos adquiridos tornam-se rapidamente inutilizáveis fora de seus contextos de aprendizagem” (DUVAL, 2009, p.14). Talvez seja a ausência da diversidade de Registros de Representação no processo de ensino do Cálculo, a causa das dificuldades em sua aprendizagem, apontadas em diferentes pesquisas, como pode ser observado na seção 2.

Como é possível perceber, para a aquisição do conhecimento, não basta apenas saber a designação de um objeto, ou conhecer uma representação, mas também, operar com estas representações segundo as regras próprias de cada sistema semiótico. As operações associadas às atividades cognitivas de tratamento e objetivação de um Registro de Representação Semiótica são o **tratamento e conversão** dos Registros de Representação Semiótica.

O *tratamento* é uma transformação de representação que ocorre dentro de um mesmo registro, é interna a ele. No tratamento, uma representação inicial é transformada numa representação final sem mudar o RRS. O tratamento em um RRS corresponde à função discursiva de expansão informacional/discursiva (DUVAL, 2009).

Um exemplo: Considere a tarefa: desenvolver a expressão $\sum_{i=1}^3 i^2$, especificando seu valor numérico.

A resolução desta tarefa requer uma conversão e um tratamento que transforma a representação inicial $\sum_{i=1}^3 i^2$ na representação final 14.

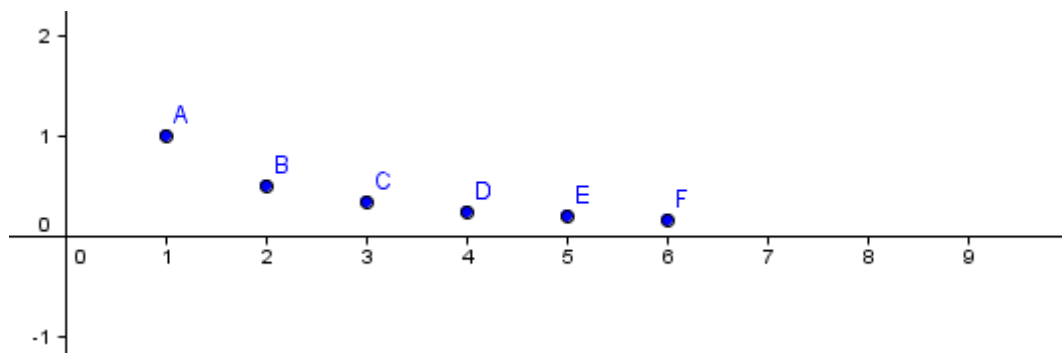
$$\sum_{i=1}^3 i^2 \xrightarrow{\text{Conversão}} \underbrace{(1)^2}_{i=1} + \underbrace{(2)^2}_{i=2} + \underbrace{(3)^2}_{i=3} \xrightarrow{\text{Tratamento}} 1 + 4 + 9 \xrightarrow{\text{Tratamento}} 14$$

A conversão é necessária para substituir o registro em forma de somatória (algebraica) em um registro numérico operacional (sob o ponto de vista aritmético). Em seguida, são necessários tratamentos que substituem os registros numéricos com as notações exponenciais nos registros numéricos $1 + 4 + 9$ e finalmente, outro tratamento que substitui o registro numérico que indica a adição no registro numérico 14.

A **conversão** é uma transformação que faz mudar a representação de um objeto em um registro para uma representação do mesmo objeto em outro registro. Requer, do indivíduo, a coordenação de diferentes sistemas semióticos para ser posta em prática. “A colocação em equação dos dados de um enunciado do problema é a conversão de diferentes expressões lingüísticas de relações em outras expressões dessas relações no registro de uma escritura simbólica” (DUVAL, 2009, p.59).

Voltando ao exemplo apresentado no Quadro 2, uma atividade de conversão seria solicitar a representação gráfica da sequência $a_n = \frac{n}{10}$, $n \in N^*$. Neste caso, o aluno teria que passar do registro algébrico para o registro gráfico.

Por exemplo, considere a tarefa: Descreva o comportamento da sequência $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ onde $a_n = \frac{1}{n}$. Para realizar essa tarefa, a observação do comportamento do aluno nos mostra que, geralmente, ele considera o registro fornecido, converte-o para Língua Natural (mesmo que para si próprio), trabalha mentalmente com ela, converte-a, possivelmente, para uma representação numérica como $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$, em seguida converte tal representação numa forma gráfica como a seguinte:



Após isso, o aluno deve observar a variação e o padrão de comportamento da amplitude vertical dos pontos marcados, expressar, mesmo que mentalmente, em língua natural que a quantidade analisada se aproxima de zero sempre com valores positivos, e finalizar, efetuando nova conversão para representação algébrica escrevendo a seguinte informação $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

Converter uma representação em outra, neste caso, significa: Ler o que está escrito numa Representação Gráfica; interpretá-la com a Língua Natural; alterar a maneira de registrá-la ao passá-la para outro campo de representação quantas vezes for necessário até que uma conclusão em Língua Natural possa ser deduzida; proferir tal conclusão e registrá-la mediante a escolha de uma maneira específica de registro.

A Figura 7 apresenta possibilidades de tratamento e conversão para a seguinte tarefa: Calcular a área sob a curva $x^2 + 1$ no intervalo $[1,3]$.

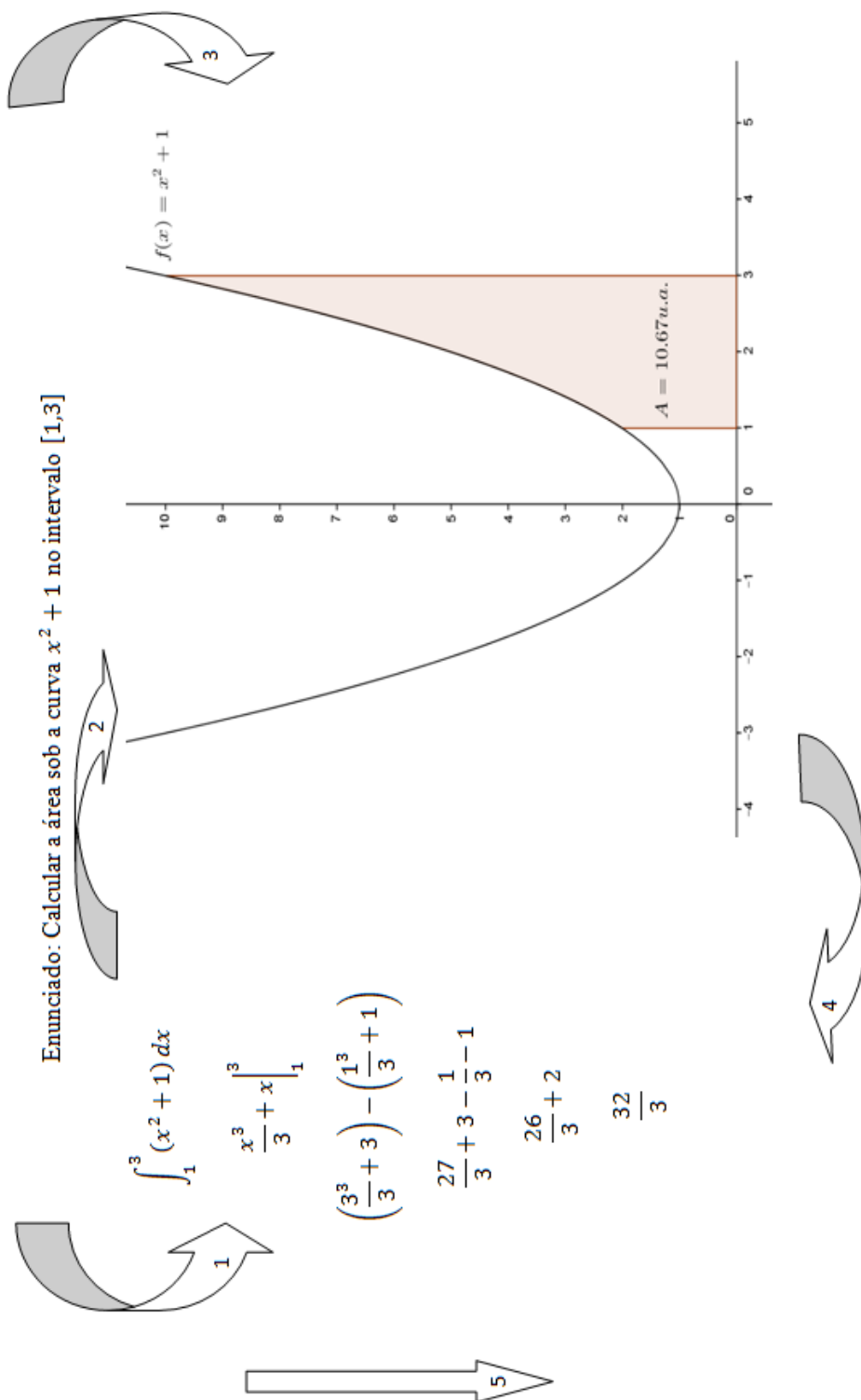


Figura 7: Exemplo de tratamento e conversão no cálculo de área

Na Figura 7 são ressaltadas quatro possíveis conversões, assinaladas pelas flechas 1, 2, 3, 4, que são: 1: Registro em Língua Natural (RLN) para Registro Algébrico (RA); 2: RA para Registro Gráfico (RG); 3: RLN para RG; 4: RG para RA. A flecha 5 assinala um tratamento, um cálculo do valor da integral definida, dentro do Registro Algébrico.

Neste exemplo, ainda é possível considerar o tratamento gráfico para a tarefa, aproximando a área pedida pela soma de áreas de retângulos, como indicado na Figura 8.

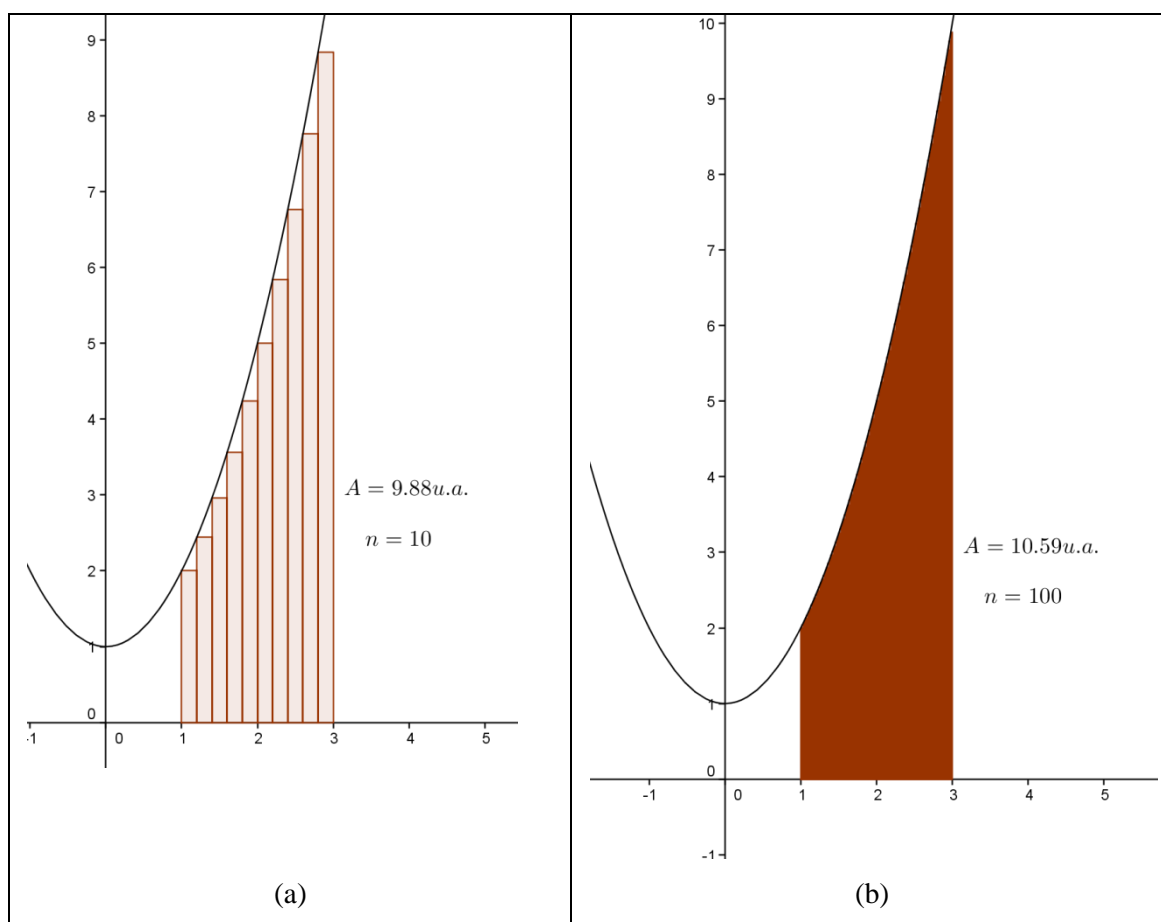


Figura 8: Tratamento gráfico para o cálculo de área sob uma curva

A conversão não é natural para a maior parte dos alunos. Ela requer a coordenação de diferentes sistemas semióticos, o que já é complicado, devido a provável ausência de uma exploração da representação gráfica dos conteúdos ensinados de forma mais consistente. Além disso, a conversão ainda exige a percepção da diferença entre representante e representado, entre sentido e referência.

Aliás, Duval (2009) associa três fenômenos ao **desenvolvimento do conhecimento**, relativos à *semiósis* e à operação de conversão, isto é, ao acesso ao objeto representado. São eles:

1. *Diversificação dos registros de representação semiótica*. Cada tipo de registro tem ênfase em questões de aprendizagens específicas, por isso há necessidade de diversificação, de buscar a complementaridade das informações relativas ao objeto representado, como apontado anteriormente por Moretti (2002). Em nossa sequência didática aplicada, buscou-se trabalhar os elementos do conceito de Integral Definida e transitar pelos Registros Algébrico, Numérico, Gráfico e em Língua Natural;
2. *Diferenciação entre representante e representado (ou forma e conteúdo)*: está associada à compreensão de que uma representação apenas representa o objeto, não é o objeto. A ele é possível associar outras representações;
3. *Coordenação entre os diferentes registros*: assume-se que quando o indivíduo consegue facilmente mudar a forma de representação do objeto, ele compreendeu o objeto.

No ensino, seja em nível de educação básica ou em nível superior, o professor deve buscar atender aos aspectos supracitados no intento de fazer com que o aluno consiga apreender o conteúdo que se pretende ensinar. Para isso, é importante trabalhar com tarefas de produção e compreensão. As **tarefas de produção** mobilizam as atividades cognitivas de *formação/comunicação* de representação num registro semiótico (correspondente à função discursiva de designação de objetos) e de *tratamento*. As **tarefas de compreensão** mobilizam as atividades cognitivas de *formação e conversão* ou as *três atividades* simultaneamente: formação, tratamento e conversão.

Em nossa sequência didática, buscou-se elaborar tarefas que pudessem ser chamadas de tarefas de compreensão, por envolver, na maior parte delas, atividades cognitivas de conversão de representações.

Antes de tratarmos melhor sobre a conversão de representações, precisamos chamar a atenção para as atividades cognitivas chamadas de **formação**, componente essencial das tarefas de produção.

Segundo Duval (2009), a *formação de uma representação semiótica* é o recurso a um (ou a muitos) signo(s) de um sistema semiótico já constituído (a língua materna ou a língua simbólica, por exemplo), para designar um objeto. Ela “implica a seleção de certo número de caracteres de um conteúdo percebido, imaginado ou já representado em função de possibilidades de representação próprias ao registro escolhido” (DUVAL, 2009, p.56) e serve para exprimir uma representação mental ou evocar um objeto real. Por exemplo, para representar uma Integral Definida, são necessárias as *unidades simbólicas* \int , a , b , $f(x)$, dx , para compor a unidade de nível superior $\int_a^b f(x) dx$ no Registro de Representação Algébrica.

Neste caso, podemos identificar os atos mais elementares de formação, que são, por exemplo, conforme os registros: a designação nominal “Integral Definida” e a codificação de relações como

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \frac{b-a}{i}$$

Ou seja, a produção de uma representação semiótica está subordinada às regras sintáticas de formação e tratamento de *unidades constitutivas* de todas as representações possíveis num registro e que versam sobre:

- a determinação de unidades elementares: símbolos, vocabulários etc.;
- combinações admissíveis de unidades elementares para formar unidades de nível superior: como, por exemplo, regras de formação de um sistema formal, gramática da língua portuguesa, etc.;
- as condições para que uma representação de ordem superior seja uma produção pertinente e completa.

A determinação destas **unidades elementares** está diretamente associada à atividade cognitiva de conversão de registros de representação semiótica, uma vez que o grau de *correspondência associativa*, entre as unidades significantes elementares constitutivas de cada uma das duas representações pertencentes a dois registros diferentes, determina a facilidade ou não da conversão.

Quando há *correspondência termo a termo* entre as *unidades significantes* dos dois registros, dizemos que há **congruência das representações** e, neste caso, a conversão é quase imediata. Caso contrário, dizemos que as representações são **não-congruentes**. Nesse caso, a dificuldade de realizar a conversão depende do grau da não-congruência e da possibilidade de coordenação dos dois registros pelo indivíduo.

Sendo assim, estabelecer se duas representações entre dois registros diferentes são ou não congruentes implica, primeiramente, segundo Duval (2009), em segmentá-las em suas unidades significantes elementares²⁴ respectivas, de forma tal que elas possam ser colocadas em correspondência. Ao final da comparação, é possível perceber se as unidades significantes são, em cada registro, simples ou combinação de unidades simples.

Esta análise da congruência entre duas representações foi sintetizada por Duval (2009) nos três **critérios de congruência**:

- 1) *Correspondência semântica das unidades significantes (CS)*: a cada unidade significativa simples (elementar) de uma das representações, pode-se associar uma unidade significativa elementar da outra representação. Os exemplos apresentados no Quadro 3 ilustram esse critério.
- 2) *Univocidade semântica terminal (US)*: a cada unidade significativa elementar da representação de partida corresponde **uma só** unidade elementar no registro de representação de chegada (terminal). É o caso do exemplo 1 apresentado no Quadro 3. O exemplo 2 do Quadro 3 é um contra-exemplo deste critério;
- 3) *Mesma ordem possível de apreensão das unidades significantes nas duas representações (OR)*.

No exemplo 1 do Quadro 3, pela análise dos critérios estabelecidos por Duval, a representação no registro em Língua Natural é congruente à representação algébrica. Já no exemplo 2, observamos a não congruência. Quanto mais “não” existirem nas colunas relativas aos critérios de convergência, maior é a dificuldade para o aluno fazer a conversão, pois haverá mais critérios de convergência não atendidos (veja o exemplo no Quadro 4). Assim, exprimir a convergência usando a linguagem algébrica torna-se mais difícil para o estudante. Neste caso, é preciso mais tarefas de produção e compreensão para pleitear a compreensão necessária para este conceito.

²⁴Unidade Significante Elementar é “toda unidade que se destaca do ‘léxico’ de um registro” (DUVAL, 2009, p. 68). Veja exemplo no Quadro 1.

Exemplo 1: Verificar a congruência das representações nos registros língua natural (RLN) e algébrico (RA) dadas por “a sequência k_n converge para o número L ” e “ $k_n \rightarrow L$ ”, respectivamente.

Unidades Significantes para RLN	Unidades Significantes para RA	Segmentação Comparativa	Critério de Congruência			Conclusão
			CS	US	OR	
Sequência	k_n	Simples	Sim	Sim	Sim	Congruente
Converge	\rightarrow	Simples	Sim	Sim	Sim	
L	L	Simples	Sim	Sim	Sim	

Exemplo 2: Verificar a congruência das representações nos registros língua natural (RLN) e algébrico (RA) dadas por “a sequência k_n converge para o número L ” e “ $\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = L$ ”

Sequência	k_n	Simples	Sim	Sim	Não	Não congruente
Converge	$\lim, n, \rightarrow, \infty, =$	Combinada	Sim	Não	Não	
L	L	Simples	Sim	Sim	Sim	

Quadro 3: Análise de congruência para representações do conceito de convergência

Analisemos, agora, a congruência entre as representações envolvidas na conversão 1 da Figura 7, que trata de converter a representação no registro em Língua Natural “Calcular a área sob a curva $x^2 + 1$, no intervalo $[1,3]$ ” na representação no Registro Algébrico “ $\int_a^b (x^2 + 1)dx$ ”. As unidades significantes elementares de cada representação e os critérios de congruência são apresentadas no Quadro 4.

Aqui, verifica-se a segmentação comparativa combinada para as unidades significantes dos registros RLN e RA, o que já implica em não univocidade semântica terminal, um dos fatores de não congruência.

Verificar a congruência das representações nos RLN e RA, dadas por “Calcular a área sob a curva $x^2 + 1$, no intervalo $[1,3]$ ” e “ $\int_a^b (x^2 + 1)dx$ onde $a = 1$ e $b = 3$ ”, respectivamente.						
Unidades Significantes para RLN	Unidades Significantes para RA	Segmentação Comparativa	Critério de Congruência			Conclusão
			CS	US	OR	
Área	$\int_a^b dx$, para a e b definidos	Combinada	Sim	Não	Sim	Não congruente
Sob a Curva	$x^2 + 1$	Combinada	Sim	Não	Sim	
Intervalo $[1,3]$	\int_a^b , onde $a = 1$ e $b = 3$	Combinada	Sim	Não	Não	

Quadro 4: Análise de congruência para representações do conceito do cálculo de área por meio de integrais

Flores e Moretti (s/d) reforçam que para acontecer a conversão de registro é necessário que haja congruência semântica entre as unidades significantes de cada uma das representações. Quando isto não acontece, há dificuldade maior em fazer a conversão. Por congruência semântica os autores entendem que “é um fenômeno que ocorre quando é preciso transitar entre representações semióticas distintas para um mesmo objeto conceitual” (p.33).

Os autores citam como exemplo o cálculo de uma velocidade a partir de um gráfico em que são dados as posições e o tempo de um móvel. Para este caso, o aluno deve responder a tarefa mediante análise da inclinação da reta e não obter informações diretamente advindas do traçado gráfico, isto é, a informação solicitada requer outras propriedades não diretamente obtidas. Analisar a dificuldade do estudante mediante a análise de congruência é importante, pois “não havendo reciprocidade entre o que é dito no enunciado do problema e aquilo que é visto no gráfico gera dificuldades de interpretação por parte dos alunos” (FLORES e MORETTI, s/d, p.28).

Quando a conversão em questão envolve um Registro Gráfico, como no exemplo supracitado, há algumas outras questões a serem observadas. Isto porque, quando se trata de imagens, a representação semiótica é **analógica**, ou seja, *conserva as propriedades do objeto*, diferente do que acontece nas representações **não-analógicas**, já que, embora não conservem as propriedades, podem permitir operações ou transformações sobre o modelo. (DUVAL, 2009).

Segundo Duval (2012), nas atividades matemáticas, as figuras são objeto de duas atitudes geralmente contrárias. Uma é *imediate e automática*: a apreensão perceptiva das formas. A outra é *controlada*: a interpretação discursiva (isto é, comandada pelas hipóteses do enunciado) dos elementos figurais. É esta segunda atitude que deveria prevalecer no ensino.

Toda figura pode ser modificada de modo que ela se torne uma subfigura por meio de alguma transformação como rotação, ou uma deformação, ou de modo que ela seja dividida em subfiguras. Essas modificações são chamadas, por Duval (2012), de **modificações mereológicas**.

As modificações mereológicas fazem surgir formas como um todo fracionado em partes homogêneas, ou seja, a forma da parte é a mesma do todo, ou em partes heterogêneas, neste caso, todo e partes não tem a mesma forma.

Desse fracionamento origina-se a **operação de reconfiguração intermediária**, que pode fazer com que as partes elementares sejam reagrupadas em várias subfiguras, todas pertencendo à mesma figura inicial.

Essa operação se faz presente ao se determinar a área sob uma curva, por exemplo, uma das possíveis aplicações da Integral Definida. Na Figura 9, a área sob a curva $c(x) = x^4 + x + 1$ no intervalo $[-1,1]$ é fracionada em retângulos, cuja soma das respectivas áreas (2,26 u. a.) é uma aproximação para a área sob a curva, no intervalo pedido.

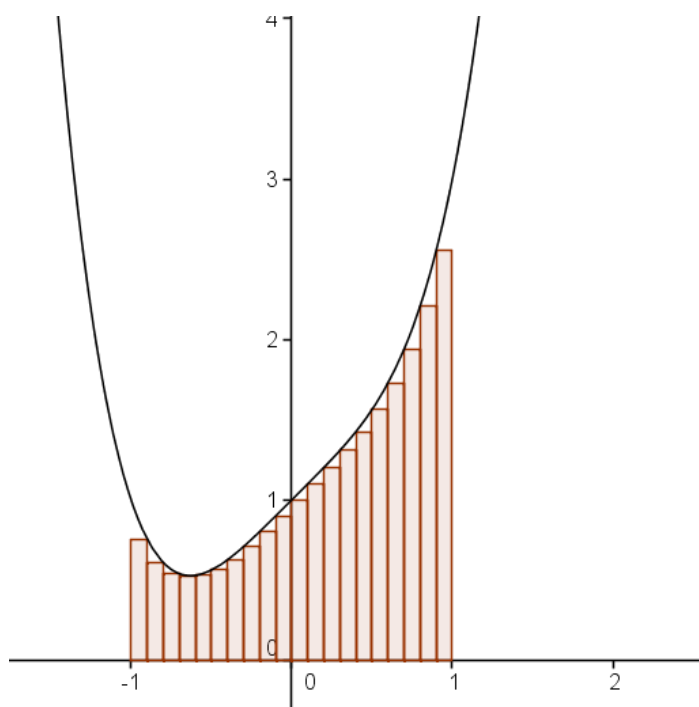


Figura 9: Área sob uma curva, calculada por reconfiguração intermediária

O fracionamento mostrado na Figura 9 não é o único possível. Cada aluno pode fracionar a região de modo diferente, dependendo de sua apreensão perceptiva.

Na atividade de conversão que envolve uma representação gráfica, a determinação de unidades visuais é essencial, porém, isso depende da apreensão perceptiva discente da figura/gráfico e do tratamento dado a essas representações durante a escolarização.

Duval (2011) discute *três tratamentos das representações gráficas* e suas relações com a operação de conversão e com a capacidade de interpretação heurística de uma figura. Estes tratamentos são descritos a seguir.

1º Abordagem ponto a ponto: Embora esta seja a abordagem gráfica usual no ensino de matemática, ela limita-se a alguns valores particulares, favorece a leitura das coordenadas de algum ponto interessante e o traçado de um gráfico correspondente a uma função de 1º ou 2º grau. O uso de recurso computacional poderia reduzir o uso dessa abordagem, e ampliar o rol de funções representadas graficamente, entretanto, sabemos que a infraestrutura e as condições de utilização desses recursos oferecidas nas escolas estaduais do Paraná, por exemplo, não permitem que os professores usufruam adequadamente das potencialidades desses recursos computacionais.

2º Abordagem de extensão do traçado efetuado: nesta abordagem, “levam-se em conta os dados do traçado e não as variáveis visuais pertinentes da representação gráfica. No mais, o tratamento se mantém orientado na busca de valores particulares sem se ocupar com a forma da expressão algébrica” (DUVAL, 2011, p.99). Geralmente esta abordagem se mantém puramente mental.

3º Abordagem de interpretação global de propriedades figurais: Nesta abordagem, os traços de um gráfico representam um objeto descrito por uma expressão algébrica. Toda mudança na imagem que acarreta uma mudança na expressão algébrica determina uma variável visual pertinente para a interpretação gráfica. Duval (2011, p.99) alerta que “É importante, [...], identificar [...] as modificações conjuntas da imagem e da expressão algébrica: isto significa proceder a uma análise de congruência entre dois registros de apresentação de um objeto ou de uma informação”. Aqui, busca-se perceber a associação entre a variável visual da representação e a unidade significativa da expressão algébrica, isto é, a atenção tem que estar voltada para o conjunto das propriedades, ao contrário das abordagens anteriores em que a associação era entre ponto e par de números.

A abordagem de interpretação global é necessária quando, por exemplo, se quer converter uma representação gráfica numa representação algébrica. Mas, é também importante para designar as unidades significantes para efetuar a análise de congruência.

Para os registros algébricos, as unidades significativas são os símbolos relacionais (<, >, =, .), símbolos de operações ou de sinais (+, -, ...), símbolos de variável, ou símbolos de expoente, coeficientes e constante. Geralmente, cada símbolo é uma unidade significativa.

Para os registros gráficos, a determinação destas unidades significantes requer uma análise mais aprofundada da imagem. Duval (2011) distingue, então, as **variáveis gerais e variáveis relativas**, e as analisa para o caso de retas.

As **variáveis gerais** são relativas à **implantação e forma da tarefa**²⁵. Na implantação, deve ser percebido o que se *destaca como figura sobre o fundo*: uma linha ou uma região. Quanto à forma: deve-se analisar a forma do traço, se a linha traçada é reta ou curva, se curva, se é aberta ou fechada.

As **variáveis relativas** correspondem às modificações de configuração da linha traçada. São essas modificações (no sentido mais geral), chamadas de **variáveis visuais**, que serão as **unidades significantes** para a representação gráfica. Os seus valores específicos serão usados para obter a correspondência com as unidades correspondentes da representação no registro algébrico. A cada valor da variável visual “correspondente uma unidade significativa na expressão algébrica da reta” (DUVAL, 2011, 101). Os Quadro 5 e Quadro 6 ilustram esta análise, caso a linha traçada seja uma reta.

Variáveis visuais	Valores das variáveis visuais
O sentido da inclinação do traçado	- a linha sobe da esquerda para a direita - a linha desce da esquerda para a direita Observação: a referência esquerda/direita é o sentido normal do percurso visual de uma página escrita em caracteres latinos
Os ângulos do traçado com os eixos	- Há uma repartição simétrica do quadrante percorrido; - o ângulo formado com o eixo horizontal é menor que o ângulo formado com o eixo vertical; - o ângulo formado com o eixo horizontal é maior que o ângulo formado com o eixo vertical Observação: no caso que o traçado não passa pela origem, basta deslocar o eixo vertical, por exemplo, até o ponto da interseção da reta com o eixo horizontal.
A posição do traçado em relação à origem do eixo vertical	- o traçado passa abaixo da origem; - o traçado passa acima da origem; - o traçado passa pela origem .

Quadro 5: Valores e variáveis visuais para a reta no plano cartesiano (DUVAL, 2011, p.101)

²⁵ O autor usa a palavra tarefa no sentido do gráfico traçado.

O passo seguinte é buscar a correspondência algébrica de cada um dos valores das variáveis visuais obtidos, representados no Quadro 6.

Variáveis visuais	Valores	Unidades Simbólicas correspondents	
Sentido da inclinação	Ascendente Descendente	coeficiente > 0 coeficiente < 0	ausência de sinal presença do sinal -
Ângulo com os eixos	partição simétrica ângulo menor ângulo maior	coef. variável = 1 coef. variável < 1 coef. variável > 1	não há coef. escrito há coef. Escrito há coef. Escrito
Posição sobre o eixo	corta acima corta abaixo corta na origem	acresc. constante subtrai-se constante sem correção aditiva	sinal + sinal - ausência de sinal

Quadro 6: Valores e variáveis visuais para $y = ax+b$ no plano cartesiano. (DUVAL, 2011, p.101)

Observe no Quadro 6, que o conceito de inclinação está associado ao coeficiente da variável, que por sua vez está associado a *duas* variáveis visuais: sentido da inclinação e ângulo. Assim, “não há congruência entre a direção da reta no plano cartesiano e o coeficiente que determina esta direção na expressão algébrica” (DUVAL, 2011, p.102).

Como foi possível observar na síntese apresentada, a coordenação de registros de representação implica conhecer cada tipo de representação para saber correlacioná-las e, posteriormente, convertê-las. Porém, essa é uma tarefa que não pode ficar apenas sob a responsabilidade do aluno. É preciso que o trabalho desenvolvido em sala de aula seja também nesse sentido. É sabido que muitos professores baseiam-se em livros textos para ministrarem suas aulas, desse modo, é importante que esses livros também abordem os diversos conteúdos matemáticos com este enfoque semiótico.

Silva (2004) analisou a apresentação do conceito de Integral em dois livros didáticos de Cálculo I (Guidorizzi e Stewart), sob a ótica da Teoria de Registro de Representações Semióticas. O autor concluiu que ambos os livros exploram o tratamento e a conversão de registros, embora em níveis diferentes, e com prioridade ao registro simbólico. E sugere uma melhor utilização dos livros didáticos por parte dos professores, e destaca, ainda, que o livro não precisa, necessariamente, ser estudado por completo, com a resolução de todos os exercícios. O professor pode selecioná-los de modo que abranjam todos os tipos de representação.

1.2.3.1 A estrutura triádica de Duval

Para Duval (1996), a abordagem cognitiva se interessa pelo funcionamento do conhecimento sob o ponto de vista dos mecanismos e dos processos que tornam a atividade cognitiva como uma atividade inerente ao sujeito.

No que diz respeito à Matemática, o desenvolvimento cognitivo requer especificidades diferentes de outros domínios como a botânica, por exemplo. Aí entram as representações semióticas, como meio de acesso e reconhecimento dos objetos matemáticos.

As representações semióticas são representações cuja produção não pode ser feita sem a mobilização de um sistema semiótico, produções essas que não atendem apenas a uma função de comunicação, mas também a funções de tratamento e objetivação.

Devido ao fato que as representações semióticas podem evocar tanto a apreensão do objeto quanto à apreensão da representação, Duval (2006) considera que as representações semióticas tem uma significação que é determinada:

- Pelo **sistema semiótico** utilizado para representar a escolha do mundo percebido, do mundo imaginário ou do mundo idealizado (sejam situações, ações, objetos,...). Isto geralmente é conhecido como forma da representação.
- Pela **referência** ao objeto representado.

Para evitar as ambiguidades envolvidas com o termo signo, o qual pode ser tomado como uma classe especial de signos, como por exemplo, os símbolos matemáticos, Duval (1996) parte da noção de **significância** (que é diferente de sentido, significação, significante...) e diferencia duas estruturas para a significância: as estruturas diáticas e triádicas.

Para Duval, há signos cuja significância é determinada pelo sistema ao qual eles pertencem, por exemplo, as palavras de uma língua. Nesse caso, as palavras tem uma significação que predetermina seu emprego e este emprego lhe confere um significado específico dentro de um enunciado. É o caso, por exemplo, da palavra amplitude, discutida na seção 4.15.

Por outro lado, Duval (1996) considera que há signos cuja significância é determinada independentemente de todo sistema. Estes signos não têm significação

própria, mas sua significância é constituída pela relação de referência dentro dos quais eles estão instituídos.

Segundo Burak e Brandt (2010), as estruturas diáticas e triádicas são relações que se estabelecem entre objetos e suas representações. Elas analisam as representações em relação às funções de expressão, tratamento e objetivação, isto é, no âmbito da dimensão linguística. “Na função de expressão, vale ressaltar que, entre os diversos significantes de um determinado significado, existe uma significação por parte do sujeito em relação a um conceito, tendo por referência um objeto”. (id., p.74).

Um esquema para as estruturas triádica e diádica da significação é apresentado na Figura 10.

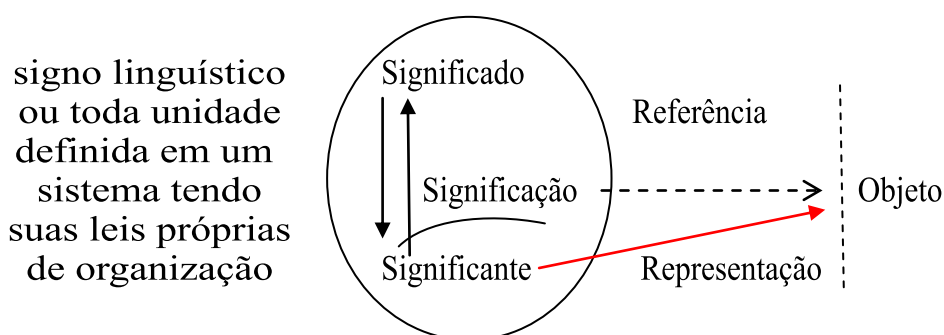


Figura 10: Estrutura triádica e diádica da significância (DUVAL, 2009, p.85)

Na Figura 10, as relações entre os elementos constitutivos da significância, que são o significante²⁶, significado e objeto, podem ser de referência ou de representação. Para a estrutura diádica, a relação é de **representação**, pois acontece apenas entre o representante (na figura, o significante) e o representado, indicada pela flecha em vermelho. Na estrutura triádica, a relação é a de “**referência** ao objeto para os signos, aos quais será atribuída uma significação determinada pelo sistema da língua, ao relacionar o significante e o significado” (BURAK e BRANDT, 2010, p.74, grifo nosso). Isto é, a relação triádica é estabelecida entre significante, significado e objeto. Ou seja, nesse caso, “subordina a relação de referência àquela de significação entre significante e o significado” (DUVAL, 2009, p.85).

Duval (2009, p.41) afirma que “é sempre através de uma significação que se faz a apreensão perceptiva ou conceitual de um objeto”.

²⁶ Para Duval (1996), o significante não precisa ser materializado para ser mobilizado.

Mesmo assim, Duval (1996) alerta para o fato de que o objeto representado não pode ser confundido com o **conteúdo** da representação. “O ‘conteúdo’ é o que o registro utilizado permite apresentar explicitamente do objeto representado”²⁷ (DUVAL, 1996, p. 358- grifo do autor). Em parte, o conteúdo da representação depende da forma. Por exemplo, a equação de uma parábola e sua representação gráfica tem por **referência** o mesmo objeto, mas apresentam conteúdos diferentes, uma vez que apresentam propriedades distintas do objeto em estudo. Cada representação transmite informações parciais em relação ao objeto.

No processo de conceitualização, deve-se levar em consideração essa relação entre o **significante** (uma expressão algébrica, ou uma palavra, por exemplo) e o **significado** (conceito evocado pela representação mental), criada pelo sujeito. Esse processo por meio do qual a pessoa atribui um significado ao significante é chamado de **significação**. Um significante não tem o mesmo significado para o sujeito, pois esse significado depende da significação atribuída por esse sujeito. Como aos significantes (registros) podem ser atribuídas diferentes significações, estas podem comprometer o valor verdade (referência).

Em Burak e Brandt (2010) encontramos um exemplo importante para a compreensão da significação. A palavra razão, quando dita a um matemático, provavelmente evocará o conceito de quociente, mas quando dita a um não-matemático, é possível que evoque o conceito de estar certo. A palavra “razão” é o significante e quociente e estar certo são os significados atribuídos (significação) a esse significante.

Ainda podemos citar como exemplo o fato de alunos do ensino superior não conseguirem atribuir um significado ao significante $|a_n - L| < \varepsilon$, para $n > N$ dado. Nesse caso, não sendo possível estabelecer uma significação ao significante, o aluno torna-se incapaz de compreender que a expressão designa a proximidade de pontos de uma sequência em relação ao seu valor limite, e está associada à convergência de sequências.

Outro aspecto que depende da significação relacionada ao significante é o **sentido**, que depende também do conteúdo do registro de representação. Por exemplo: os significantes 0,5 e $\frac{1}{2}$ se referem ao mesmo significado e ambos têm por referência o mesmo objeto do conhecimento: o número $\frac{1}{2}$. No entanto, os conteúdos dos registros de representação são diferentes. Não é a mesma coisa operar com números decimais e

²⁷ No original: le «contenu» est ce que le registre utilisé permet de présenter explicitement de l’objet représenté.

operar com frações. Além disso, esses registros revelam aspectos diferentes do objeto e, por essa razão, possuem sentidos diferentes.

No estudo do Cálculo, trabalhamos com dois tipos diferentes de registros para a função derivada. A notação de Newton $f'(x)$ e a notação de Leibniz $\frac{df}{dx}(x)$. Esses distintos registros associam-se a distintos significados atribuídos por cada estudante. E tais significados devem ser convenientemente constituídos para que seja minimizada a dificuldade na compreensão de que a expressão $df(x_0) = f'(x_0)dx$ é uma relação entre elementos de bases duais num espaço de funções (transformações lineares) e não o resultado da multiplicação e cancelamento por “ dx ” na igualdade dos valores funcionais da derivada no ponto x_0 :

$$\frac{df}{dx}(x_0) = f'(x_0) \Rightarrow df(x_0) = f'(x_0)dx.$$

Deseja-se que o sentido da representação $f'(x_0)$ na igualdade da esquerda da implicação seja o de uma relação funcional calculada num determinado ponto do domínio. Já para a igualdade da direita da implicação, deseja-se que o sentido da representação $f'(x_0)$ seja o de uma matriz quadrada de dimensão 1×1 . Entretanto, os estudantes nem sempre atribuem sentidos diferentes a esse mesmo significante $f'(x_0)$.

Ao se trabalhar no ensino apenas com um tipo de registro semiótico, a aprendizagem pode ficar prejudicada, justamente por essa significação que o estudante atribui ao que está sendo estudado. Ao usar mais registros de representação semiótica, com tratamentos e conversões entre essas representações, é possível contribuir com a conceitualização pretendida.

Como vimos na síntese sobre TRRS, o tratamento de diferentes representações dos objetos matemáticos é importante. Contudo, é também necessário que o aluno seja capaz de associar os diversos conceitos estudados por meio de diferentes representações. Uma das maneiras possíveis de fazer isso é elaborando um Mapa Conceitual, assunto da próxima seção.

1.2.4 Mapas Conceituais (MC)

O Mapa Conceitual (MC) é uma ferramenta gráfica para organizar e representar o conhecimento. Ele inclui conceitos e relações entre conceitos. Foi desenvolvido por Novak, pesquisador sênior do Institute for Human and Machine Cognition (IHMC²⁸), em 1972, devido à necessidade de identificar mudanças específicas na compreensão de conceitos de ciências em crianças, que não estavam sendo percebidas a partir das transcrições das entrevistas realizadas.

Para Novak e Cañas (2008, p.1), um **conceito** é “uma regularidade em eventos ou objetos, ou registros de eventos ou objetos, designados por um rótulo²⁹” (tradução nossa), e uma **proposição** é uma declaração sobre algum evento ou objeto, que conecta dois ou mais conceitos por meio de uma linha, usando palavras ou frases de ligação para formar uma declaração significativa³⁰. Algumas vezes, as palavras são chamadas de unidades semânticas.

Souza (s/d) alerta que as palavras ou frases de ligação devem evidenciar as relações significativas entre os conceitos ligados.

Uma das características do MC é a **estrutura na forma hierárquica**. Os conceitos mais gerais ficam no topo e os mais específicos ficam, hierarquicamente, abaixo. Um MC pode pertencer a alguma situação que se queira compreender por meio da organização do conhecimento na forma de MC (NOVAK e CAÑAS, 2008). Devido às inúmeras áreas de aplicação, essa estrutura já se tornou flexível, ou seja, não deve possuir, necessariamente, uma estrutura verticalizada (SOUZA, s/d).

Outra característica é a inclusão de **ligações cruzadas**, que permite perceber como dois conceitos presentes no MC estão relacionados. Novak e Cañas afirmam que “na criação de novos conhecimentos, as ligações cruzadas frequentemente apresentam saltos criativos na parte do conhecimento produtor³¹” (NOVAK e CAÑAS, 2008, p.2).

Esses autores ainda consideram a estrutura hierárquica e a capacidade para pesquisar e caracterizar novas ligações cruzadas, duas características dos MC que facilitam o pensamento criativo no indivíduo.

²⁸ Mais informações veja <http://www.ihmc.us/>

²⁹ No original: “We define concept as a perceived regularity in events or objects, or records of events or objects, designated by a label”.

³⁰ No original (p.1): Propositions are statements about some object or event in the universe, either naturally occurring or constructed. Propositions contain two or more concepts connected using linking words or phrases to form a meaningful statement.

³¹No original: “In the creation of new knowledge, cross-links often represent creative leaps on the part of the knowledge producer”.

Uma terceira característica do MC é que nele podem ser **adicionados exemplos** específicos, o que ajuda a esclarecer o significado de um conceito. Porém, os exemplos não são, geralmente, utilizados em caixas, por não serem conceitos.

O MC está baseado na Teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel, cuja ideia fundamental é que a aprendizagem acontece pela **assimilação** de novos conceitos e proposições, a partir de enquadramentos de conceitos e proposições anteriores realizados pelos alunos. Esta estrutura do conhecimento realizada pelo aluno é chamada de **estrutura cognitiva** do indivíduo.

Para Novak e Cañas (2008), os MCs, além de serem usados como **ferramentas de aprendizagem**, podem ser usados como **ferramentas de avaliação**, pois são eficazes na identificação das ideias válidas e não-válidas dos alunos, nos conceitos que são ou não relevantes para eles.

Para Moreira (s/d), MC são diagramas bidimensionais que mostram relações hierárquicas entre conceitos e refletem a compreensão e interpretação das relações entre os conceitos-chave de uma disciplina. Moreira (s/d, p.18) argumenta que:

Eles mostram relações de subordinação e superordenação que possivelmente afetarão a aprendizagem de conceitos. Eles são representações concisas das estruturas conceituais que estão sendo ensinadas e, como tal, provavelmente facilitarão a aprendizagem dessas estruturas.

Face ao já exposto para essa pesquisa, os Mapas Conceituais são usados como ferramenta de acompanhamento da construção discente do conceito de Integral Definida. Lembremos que podem ser utilizados, também, como instrumentos de avaliação.

Na construção de um mapa conceitual, é possível acompanhar a representação dos sistemas e subsistemas de significações ativados num sujeito. O *software Cmap Tools* possibilita esse trabalho.

Dutra, Fagundes e Cañas (2004) dão especial atenção às frases de ligação, pois elas podem ser concebidas como tendo função estruturante num mapa, já que elas devem representar claramente a relação entre dois conceitos.

Nos textos de Souza (s/d) e Cargnin e Barros (2012), há comentários dos alunos pesquisados sobre a dificuldade de escolher tais frases, talvez, por essa função relacional ser conhecida, porém, difícil de ser expressa em palavras. Para Novak e Cañas (2008), a dificuldade citada pelos alunos no estabelecimento destas frases de ligação é devido a pouca compreensão da relação entre os conceitos.

Enquanto instrumento de avaliação e acompanhamento, função atribuída ao Mapa Conceitual nesse trabalho, Moreira (s/d) expõe que os mapas permitem verificar o conhecimento do aluno em termos conceituais, ou seja, como o assunto é estruturado, hierarquizado, diferenciado, integrado, etc. O mais importante num Mapa Conceitual, segundo Barbosa *et al* (2005), não é a forma gráfica, mas sim a disposição de ideias e conceitos.

Araújo, Menezes e Cury (2002) propuseram um ambiente virtual em que os Mapas Conceituais são avaliados eletronicamente a partir de informações repassadas pelo professor, em relação a um material didático, a um banco de dados. O objetivo do ambiente é

integrar as tarefas de construção e avaliação de Mapas Conceituais, facilitando o acompanhamento da evolução do aluno e da turma como um todo, oferecendo *feedback* ao aluno e ajudando o professor a verificar a qualidade do seu material didático e planejar suas atividades futuras” (ARAÚJO, MENEZES E CURY, 2002, p.1)

Para Souza (s/d, p.5):

Os Mapas Conceituais favorecem a consecução de uma avaliação formativa, até porque eles permitem a compreensão da situação do aluno ao propiciar a identificação e análise dos erros, juntamente com a promoção de diagnóstico mais apurado do funcionamento cognitivo envolvido. Em decorrência, podem fornecer indicadores mais precisos ao professor para a recomposição do trabalho didático.

Dutra, Fagundes, Cañas (2004) elaboraram uma estratégia de avaliação de um Mapa Conceitual, baseados na teoria de Piaget e Garcia. Os autores, ao analisar as implicações significantes causadas pelas frases de ligação, as categorizaram em: locais, sistemáticas e estruturais. A diferença entre elas é esclarecida da seguinte forma:

Uma **implicação local** pode ser definida como o resultado de uma observação direta, ou seja, aquilo que pode ser registrado do objeto apenas da observação de seu contexto e de seus atributos. De certa forma, uma implicação local pode caracterizar um objeto sem, contudo, atualizar o conhecimento sobre ele. É o caso de proposições em um mapa conceitual que usualmente usam verbos de ligação como “é”, “tem” etc. Contudo, a utilização de frases de ligação “é” e “tem”, por exemplo, não significa necessariamente uma implicação local.

Uma **implicação sistêmica**, por sua vez, insere as implicações em um sistema de relações no qual as generalizações e propriedades não diretamente observáveis (seja na ação ou na percepção) começam a aparecer. Nesse sentido as diferenciações não são mais apenas percebidas do objeto, são deduzidas dele ou da ação sobre o mesmo. Contudo, as coordenações do indivíduo ainda não produzem uma compreensão das razões de tais implicações e sim um conhecimento ainda procedural, obtido passo a passo na construção das implicações. A indiferenciação entre generalidade e necessidade é outra característica desse tipo de implicação. Nos mapas, podemos perceber sistemas de relação (geralmente hierárquicos) em que há implicações entre os conceitos dando conta de causas e conseqüências sem

ainda levar a explicações e/ou justificações. Como? Por que? Essas são perguntas que ainda não tem respostas.

Por fim, uma **implicação estrutural** amplia as anteriores no sentido de dar explicações das razões que levam a fazê-las. As generalizações agora são relativas ao próprio objeto e dizem respeito ao que se pode afirmar sobre ele e não necessariamente sobre a sua classe mais geral. Piaget fala em compreensão endógena das razões e na descoberta das relações necessárias [Piaget & Garcia, 1989]. Assim, mais do que um conhecimento de causas e conseqüências, as implicações estruturais estabelecem que condições (no sentido lógico) são imprescindíveis às explicações, fazendo distinções daquelas que são apenas suficientes. No caso dos Mapas Conceituais, isso pode ser observado nos ciclos de determinados subsistemas de significações. (DUTRA, FAGUNDES, CAÑAS, 2004, p.6).

Moreira (1997) ressalta o caráter dinâmico e individual dos Mapas Conceituais e da inviabilidade de um método quantitativo de avaliação dos mesmos, já que uma releitura ou discussão pode mudar o entendimento de uma questão, acarretando uma mudança no mapa. Aliás, é notória na literatura pesquisada a não existência DO mapa conceitual, o correto, mas sim de UM mapa conceitual, que atende as características de aprendizagem de um indivíduo ou grupo.

Para Tavares (2007, p.74),

Quando um aprendiz utiliza o mapa durante o seu processo de aprendizagem de determinado tema, vai ficando claro para si as suas dificuldades de entendimento desse tema. Um aprendiz não tem muita clareza sobre quais são os conceitos relevantes de determinado tema, e ainda mais, quais as relações sobre esses conceitos. Ao perceber com clareza e especificidade essas lacunas, ele poderá voltar a procurar subsídios (livro ou outro material instrucional) sobre suas dúvidas, e daí voltar para a construção de seu mapa. Esse ir e vir entre a construção do mapa e a procura de respostas para suas dúvidas irá facilitar a construção de significados sobre conteúdo que está sendo estudado. O aluno que desenvolver essa habilidade de construir seu mapa conceitual enquanto estuda determinado assunto, está se tornando capaz de encontrar autonomamente o seu caminho no processo de aprendizagem.

Em relação à confecção, há alguns passos sugeridos para um trabalho inicial, destacados no apêndice do artigo de Moreira (1997). São eles:

1. Identifique os conceitos-chave do conteúdo que vai mapear e ponha-os em uma lista. Limite entre 6 e 10 o número de conceitos.
2. Ordene os conceitos, colocando o(s) mais geral(is), mais inclusivo(s), no topo do mapa e, gradualmente, vá agregando os demais até completar o diagrama de acordo com o princípio da diferenciação progressiva.
3. Se o mapa se refere, por exemplo, a um parágrafo de um texto, o número de conceitos fica limitado pelo próprio parágrafo. Se o mapa incorpora também o seu conhecimento sobre o assunto, além do contido no texto, conceitos mais específicos podem ser incluídos no mapa.
4. Conecte os conceitos com linhas e rotule essas linhas com uma ou mais palavras chave que explicitem a relação entre os conceitos. Os conceitos e as palavras-chave devem sugerir uma proposição que expresse o significado da relação.

5. Evite palavras que apenas indiquem relações triviais entre os conceitos. Busque relações horizontais e cruzadas.
6. Exemplos podem ser agregados ao mapa, embaixo dos conceitos correspondentes. Em geral, os exemplos ficam na parte inferior do mapa.
7. Geralmente, o primeiro intento de mapa tem simetria pobre e alguns conceitos ou grupos de conceitos acabam mal situados em relação a outros que estão mais relacionados.
8. Talvez neste ponto você já comece a imaginar outras maneiras de fazer o mapa, outros modos de hierarquizar os conceitos. Lembre-se que não há um único modo de traçar um mapa conceitual. À medida que muda sua compreensão sobre as relações entre os conceitos, ou à medida que você aprende, seu mapa também muda. Um mapa conceitual é um instrumento dinâmico, refletindo a compreensão de quem o faz no momento em que o faz.
9. Compartilhe seu mapa com colegas e examine os mapas deles. Pergunte o que significam as relações, questione a localização de certos conceitos, a inclusão de alguns que não lhe parecem importantes, a omissão de outros que você julga fundamentais. O mapa conceitual é um bom instrumento para compartilhar, trocar e “negociar” significados.

Apesar disso, Novak e Cañas (2008) destacam que, de início, para aprender elaborar um mapa, é preciso construí-lo sobre um assunto em que se tem domínio, algo familiar. A estrutura do MC depende do **contexto** em que ele será usado, se é um fragmento de texto, uma atividade de laboratório ou de campo, ou ainda um problema que se deseja compreender. Para isso, deve-se criar uma **questão foco**, uma questão que claramente especifica o problema ou questão que o mapa irá ajudar a resolver.

Sendo assim, Novak e Cañas (2008) sugerem os **seguintes passos** para a elaboração de um MC: 1) elaborar boas questões, 2) identificar os conceitos-chave e hierarquizá-los, 3) elaborar um Mapa preliminar; 4) rever o Mapa elaborado.

As **boas questões-foco**, quando bem elaboradas, além de enriquecer o mapa, ajudam a esclarecer os pontos que se busca compreender com a elaboração do mapa. Cada MC responde a uma questão foco.

Identificar os conceitos-chave associados ao contexto ajuda a compreendê-lo, pela reflexão que ocorre nesta fase de identificação. Novak e Cañas (2008) sugerem de 15 a 25 conceitos, que, após listados, devem ser analisados e hierarquizados, sendo deixados no topo do MC aqueles que são mais abrangentes.

A **elaboração do Mapa Preliminar** indica uma primeira maneira de associar os conceitos, porém, este processo pode mostrar outros encaminhamentos, que podem gerar alterações nos mapas iniciais. Os autores supracitados sugerem **pelo menos três revisões** num Mapa, e ainda alertam que um mapa conceitual nunca está pronto, sempre se é possível adicionar novos conceitos, à medida que se evolui a percepção sobre o contexto em tela.

Novak e Cañas (2008) destacam que o mapeamento conceitual é um caminho para melhorar a performance cognitiva dos estudantes, desde que o processo seja bem feito. Este instrumento tem sido cada vez mais usado em diversas pesquisas.

Magalhães (2009) investigou se o trabalho cognitivo gerado pela elaboração de Mapas Conceituais alavanca estratégias de metacognição nos estudantes. A metacognição é entendida como o conhecimento que o indivíduo tem sobre o seu próprio processo cognitivo, tanto em termos de aquisição do conhecimento quanto em aperfeiçoamento e regulação e/ou estruturação dos processos cognitivos. As estratégias (ou ações) de metacognição “estão associadas ao fato do indivíduo ser capaz de usar seus recursos cognitivos para poder avaliar, monitorar e julgar seu desempenho em relação a um determinado objetivo a ser alcançado” (idem, p.60).

As estratégias cognitivas consideradas por Magalhães foram: a **experiência cognitiva**, que está associada ao esforço intelectual para dominar algo que o indivíduo deseja compreender; o **conhecimento metacognitivo**, relacionado aos momentos em que o sujeito consegue identificar conceitos no seu mapa conceitual, mesmo sem poder expressá-los por escrito, e “revela o conhecimento do indivíduo sobre seu próprio funcionamento cognitivo”(p.63); o **juízo metacognitivo**, que se refere às ações que lhe mostram a necessidade de aperfeiçoar sua aprendizagem; e a decisão **metacognitiva**, que está associada à capacidade de realizar ajustes com bases no seu juízo metacognitivo.

O autor estudou o tema funções e utilizou o *software Cmap Tools*, em especial analisou os resultados produzidos por meio da ferramenta gravador³². Cinco alunos participaram do experimento de Magalhães, que analisou apenas dois deles. Foram usados seis encontros de quatro horas, sendo que nos dois primeiros os alunos responderam a um questionário inicial e fizeram atividades livres nos aplicativos Geogebra e *Cmap Tools*. Quanto aos mapas, os cursistas construíram um antes da realização das atividades e outro ao final do minicurso.

O trabalho mostrou que durante a elaboração do Mapa Conceitual, os alunos mobilizam estratégias metacognitivas que podem influenciar positivamente no processo de aprendizagem. O autor afirma que os mapas finais foram bastante ricos em relação aos mapas iniciais, “denotando indícios de que os alunos conseguiram integrar, associar e regular seus conhecimentos ao longo do experimento” (p.230).

³² Opcional do software que, quando habilitado, grava todos os passos do aluno para a elaboração de um Mapa Conceitual.

Massart, Freyens e Giet (2008) relatam o uso de Mapas Conceituais como um dos métodos de obtenção e interpretação de dados para avaliação de alunos dos dois últimos anos do curso de medicina da Universidade de Liège, em um módulo obrigatório na formação, que são chamadas “seções de aprendizagem à resolução de problemas complexos”. Nesse módulo, os alunos são submetidos à análise de uma situação complexa de um paciente, e eles devem decidir, antecipadamente, com base nas disciplinas da sua formação, quais outros profissionais lhes darão suporte no atendimento, por exemplo, se vão ou não pedir exames, quais; se o paciente precisará de acompanhamento psicológico, entre outros. Os alunos elaboram um mapa conceitual antes do atendimento, com base nos conhecimentos teóricos acerca da situação, procurando descrever todo o conjunto de ações, e outro, após o acompanhamento clínico, com as ações efetivadas. Os dois mapas são comparados e avaliados por dois médicos generalistas e uma pedagoga.

Segundo esses autores, os Mapas Conceituais são usados com os seguintes objetivos: “fazer emergir a organização cognitiva dos estudantes; avaliar qualitativamente e quantitativamente as ações de recursos multidisciplinares quando da resolução de um problema escrito, a dimensão organizacional e a complexidade da estruturação dos conhecimentos” (MASSART, FREYENS e GIET, 2008, p.144 – tradução nossa). A análise dos Mapas Conceituais realizada após a formação indicou a sua validade para o conhecimento da estrutura organizacional dos elementos conceituais dos alunos, como mencionam os autores:

A hierarquização dos elementos conceituais ou das ações relatadas foi considerada mais relevante, pelos dois avaliadores, em mapas elaborados após o treinamento (formação). A estrutura organizacional dos mapas é igualmente sensivelmente mais complexa, com uma apresentação menos linear ou em estrela e mais frequentemente em rede, após a formação [...]³³. (MASSART, FREYENS e GIET, 2008, p.147- tradução nossa).

Basque, Pudelko e Legros (2003) descreveram uma experiência de construção de Mapas Conceituais (mapa(s)) com o uso de um aplicativo, chamado MOT³⁴, em um curso de graduação à distância. Na pesquisa, os alunos tinham que elaborar um mapa com, no mínimo, quinze conceitos-chave presentes em pelo menos dois dos quatro

³³La hiérarchisation des éléments conceptuels ou des actions rapportés a été jugée plus pertinente par les deux évaluateurs dans les cartes rédigées après la formation. La structure organisationnelle de ces cartes y est également sensiblement plus complexe, avec une présentation moins linéaire ou en étoile et plus souvent en réseau après la formation [...].

³⁴ Ferramenta de modelagem orientada a objetos.

textos sobre ciências cognitivas, recomendados. Em seguida, os alunos deveriam redigir um texto explicativo dos mapas.

Na maior parte dos mapas analisados, o número de conceitos ultrapassou o número mínimo estabelecido. Obtiveram, em média, 40 conceitos. Além disso, o número de conceitos e ligações presentes nos mapas foi superior aos presentes nos textos produzidos. Apesar disso, os autores alertam sobre a necessidade de propiciar tempo necessário à aprendizagem do aluno para que o mapa possa ser representativo sobre o conteúdo estudado.

Nesta tese, busca-se investigar as contribuições da utilização de Mapas Conceituais para a percepção do progresso conceitual do aluno em relação à integral de Riemann para funções de uma variável real. Em cada etapa em que se trabalhou uma noção, considerada como pré-requisito para a construção do conceito chave, foi solicitada a elaboração de um Mapa Conceitual.

A hipótese é de que o professor pode perceber, mediante análise dos mapas, se há pontos do conteúdo que os alunos ainda não assimilaram, com isso, retomar o assunto, ou promover atividades que reforcem a compreensão destes pontos.

Tal hipótese já fora testada em um curso de algoritmo no INSA³⁵-Rouen – França. Delorme, Deletre e Pécuchet (2005) sustentam que os mapas conceituais podem ajudar a avaliar um aprendiz, em qualquer conceito de qualquer disciplina. Os pesquisadores criaram uma ferramenta virtual, chamada DIOGEN, a qual, mediante comparação entre o Mapa Conceitual elaborado pelo aluno e o Mapa elaborado pelo professor, permite perceber se o aluno realmente compreendeu o conceito ensinado pelo professor, se confunde aspectos essenciais do conceito com outros conceitos, ou se não compreendeu o conceito.

Delorme, Deletre e Pécuchet (2004) alertam para a estrutura operatória da construção de um mapa conceitual de referência, a fim de que este possa realmente ser usado como tal. Para os autores, é necessário considerar que um conceito é definido a partir de uma lista de atributos, os quais são condições necessárias e suficientes para um dado fenômeno relativo ao conceito.

Magalhães (2009) utilizou a ferramenta “gravador” do *Cmap Tools* para avaliar as etapas da construção dos Mapas dos alunos e mostrou como a análise destes passos

³⁵ Institut National des Sciences Appliquées de Rouen – Université de Rouen

fornece informações aos professores. Maiores detalhes sobre este trabalho são apresentados na seção 2.

Tendo este último estudo citado como referência, também nesta pesquisa foi solicitado que os alunos acionassem esta ferramenta. Os resultados serão discutidos nas seções de análise didática dos mapas conceituais mais adiante.

Na próxima seção, é apresentada uma revisão de literatura, em que são apresentadas algumas pesquisas atuais referentes ao ensino de Cálculo Diferencial e Integral, com prioridade àquelas específicas do objeto Integral Definida. A seção também apresenta uma descrição de alguns livros usados como referência básica em cursos de matemática de algumas instituições brasileiras. Todo esse material serve de base para a elaboração das atividades componentes da Sequência Didática.

Seção 2 – Análise Preliminar

2.1 O Ensino de Cálculo Diferencial e Integral

Este capítulo tem por objetivo apresentar pesquisas existentes sobre o ensino do Cálculo Diferencial e Integral I (CDI), com ênfase, em particular, no ensino das Integrais Definidas. São elencadas as dificuldades e sugestões apresentadas pelos diversos pesquisadores em conteúdos relativos ao CDI, que fundamentam, parcialmente, as atividades propostas para o ensino da Integral Definida.

Não é recente a preocupação com o processo da aprendizagem em Cálculo Diferencial e Integral. Além dos problemas já apontados, é possível que exista dificuldade em ensiná-lo, pois ele requer noções, como a de infinito, que ainda são obstáculos para os alunos e até professores.

O ensino de Cálculo nos séculos XX e XXI segue a apresentação axiomática, que foi possibilitada após a formalização do “controle do infinito” no século XIX por Cauchy e Weierstrass e pela fundamentação da análise na teoria dos conjuntos. Em resposta à crise estabelecida nesse processo, já há algumas décadas, tem-se tentado novas alternativas. Desse modo, o processo de ensino e de aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral tem sido objeto de estudo.

A dificuldade que muitos alunos egressos apresentam, nos cursos de CDI, ao usarem seu conhecimento em seu benefício, na sua vida real, demonstra a necessidade de rever o método de abordagem do ensino do CDI (FRID, 1994, *apud* SERHAN, 2009).

Na busca de alternativas, tem se estudado a possibilidade de abordar o ensino de conceitos e não apenas o de apresentação de técnicas. Nessa perspectiva, pretende-se trabalhar no ensino do CDI com o maior número possível de representações e de situações que envolvam os conceitos. Serhan (2009) cita a incorporação de escrita e de aplicativos computacionais como meios de melhorar a aprendizagem de conceitos matemáticos, além da introdução destes nas suas formas algébrica, gráfica e numérica.

Essa metodologia vem ao encontro com o que está estabelecido no parecer n. 776/97 do Conselho Nacional de Educação, que traz “Orientações para as diretrizes curriculares dos cursos de graduação”. Segundo elas:

Os cursos de graduação precisam ser conduzidos [...] a abandonar as características de que muitas vezes se revestem, quais sejam as de atuarem como meros instrumentos de transmissão de conhecimento e informações, passando a orientar-se para oferecer uma sólida formação básica, preparando o futuro graduado para enfrentar os desafios das rápidas transformações da sociedade, do mercado de trabalho e das condições de exercício profissional (BRASIL, 1997, p.2).

Ao analisar as exigências da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional para o ensino superior, Cury (2000, s/p), diz que:

O ensino das disciplinas básicas, especialmente do Cálculo Diferencial e Integral, não está ainda atendendo essas exigências, pois está muito calcado nas explanações do professor, nos exercícios padronizados, na preocupação com o cumprimento de cronogramas. Para que o aluno aproveite ao máximo as ferramentas que o Cálculo lhe disponibiliza, é necessário que ele tenha uma compreensão do significado dos conceitos estudados e tenha despertada sua curiosidade para as possibilidades de utilização dos mesmos.

A autora argumenta que:

No tocante ao ensino de Matemática, o que se tem visto, em geral, são professores que enfatizam um determinado estilo de ensinar, o que, por sua vez, privilegia uma determinada dimensão de um modelo de aprendizagem. Se um professor, por exemplo, sistematicamente demonstra os teoremas sem ilustrá-los com representações gráficas ou numéricas, está favorecendo os aprendizes verbais. Se privilegia o trabalho individual, está agradando aqueles que são reflexivos. Mas o bom ensino é aquele que habilita o aluno a processar as informações tanto verbal quanto visualmente, tanto ativa quanto reflexivamente, e assim por diante (CURY, 2000, s/p).

Existem várias pesquisas que apontam a dificuldade de aprender e de ensinar CDI. De um modo geral, os trabalhos de: Beltrão (2009), Santos e Borges Neto (2009), Frescki e Pigatto (2009) e Silva *et al* (2006), Ferreira (2009), Silva (2002), Gimenes (2006), Santos (2006) e Sutherland (2009), sugerem o uso de várias representações para um conceito, assim como a introdução de métodos computacionais, em aulas de CDI, para facilitar a compreensão e aprendizagem dos assuntos em estudo.

Nascimento (2000) comenta sobre a diferença metodológica existente entre a educação básica e superior. Para ele, os conceitos essenciais sejam revistos de forma intuitiva, como deveriam ser trabalhados na educação básica à medida que são necessários à disciplina, para facilitar a adaptação e aprendizagem do assunto pelo aluno e minimizando as dificuldades encontradas para o ensino do CDI.

Sobre a metodologia proposta para o ensino de cálculo, para Nascimento (2001, p.331):

Todos os tópicos necessários ao aprendizado seriam adicionados ao programa e desenvolvidos de forma seqüencial, utilizando abordagens composta por: motivação do tema, questionamentos originados nos pré-conceitos, análises

interativas, tempo para raciocínio, tentativa de respostas e consolidação de conceitos. A conceituação era desenvolvida de forma incompleta, deixando-se sempre a oportunidade de tentativas de conclusões pelos alunos. A formalização era o que menos importava, sendo a operacionalização dos conceitos feita através de atividades (exercícios) resolvidos em sala de aula, com o mesmo procedimento adotado para a abordagem teórica. Os métodos adotados são caracterizados por grande interatividade entre alunos e professor, baseados na realização de atividades individuais e em grupo, com conteúdos de recuperação e do Cálculo Diferencial e Integral, atingindo a marca de mais de 20 trabalhos em cada turma. Todas as atividades eram pontuadas de forma a incentivar a participação e a presença em sala de aula.

Na busca de alternativas, Cury (2000) sugere que o professor de CDI deve considerar as diferentes formas de aprender, visto que os alunos possuem diferentes estilos de aprendizagem, a saber: ativos/reflexivos; sensoriais/intuitivos; visuais/verbais; indutivos/dedutivos e sequenciais/globais. Para a autora, quando o professor privilegia uma maneira de ensinar, aumenta as dificuldades de aprendizagem dos alunos.

Cury e Cassol (2004), ao analisarem os erros cometidos numa turma de CDI, apontam a falta de domínio de conteúdos de Álgebra e Geometria do Ensino Fundamental, e Trigonometria e Geometria espacial do ensino médio, além da dificuldade de abstração e generalização, como um dos motivos de desistência ou reprovação nas disciplinas da área de Exatas.

Erros de compreensão de conceitos do CDI, tais como funções, derivadas e limites, e de escrita matemática (como, por exemplo, a existência do termo “lim” quando da resolução de um limite) também são apontados. As referidas autoras sugerem que a falta de estudos individuais, fora da sala de aula, também influenciam na dificuldade de aprender, pois não discutem as dúvidas advindas desse estudo, tampouco refletem sobre suas dificuldades. Como alternativa, as autoras propõem o acompanhamento dos alunos e a utilização de metodologias de ensino que incentivem a busca pelo conhecimento, a troca de ideias e a argumentação.

Ferraz e Gitirana (2007, p.1) pesquisaram sobre o ensino de gráfico de funções em livros de Cálculo, no período de 1965 a 2003. Chamam a atenção para a não compreensão e ênfase nos conceitos matemáticos, bem como, para a “ausência de um enfoque que leve em consideração a aprendizagem em matemática através do uso de pelo menos duas representações do mesmo elemento”. A hipótese inicial das autoras é que “o processo metodológico da apresentação tradicional do gráfico de funções é um dos fatores que dificultam a aprendizagem do aluno”. Elas defendem uma metodologia na qual se enfatize, inicialmente, o gráfico completo, no sentido da apresentação e exploração de todos os seus elementos e relações, como crescimento, decréscimo,

concavidade, entre outros. A partir desse conhecimento, o aluno poderá compreender a utilização dos mesmos em outros setores, fora da Matemática.

Almeida e Viseu (2002) estudaram estagiários de Matemática com relação à compreensão gráfica do conceito de derivada e detectaram a dificuldade no estabelecimento das relações gráficas e analíticas. Apresentaram estudos que indicavam que uma abordagem de assuntos por meios excessivamente visuais, comprometem os resultados analíticos e vice-versa. Os resultados da pesquisa sugerem “a importância de uma prática de ensino/aprendizagem de conceitos de Cálculo que integrem simultaneamente as abordagens gráficas e analíticas de forma a evidenciar significados e relações” (p.217).

Mas não é apenas no método de abordagem do conteúdo que reside o problema. O material didático utilizado e a forma de consulta, também têm sua parcela na dificuldade de aprendizagem. Hsia (2006) pesquisou, em sua dissertação, alunos do 2º semestre, que ainda não tinham estudado o conceito, e do 5º semestre, ambos, de um curso de licenciatura em matemática sobre a utilização de livros didáticos pelo aluno, ao estudar a integral, buscando mapear as estratégias utilizadas para adquirir o conhecimento. O livro utilizado foi ‘Cálculo’, de James Stewart (STEWART, 2002). A pesquisa mostrou que a maioria dos alunos vai diretamente ao tema proposto, ou seja, não se interessam em ver o que vem antes ou depois no livro didático; que eles mobilizam vários registros de representação possibilitados pelo enfoque no livro. Mas não foi possível perceber, porém, diferenças nas produções escritas dos alunos dos dois períodos. Nas considerações finais, destaca-se que:

Vários dos estudantes, que trabalharam nessa investigação, manifestaram-se afirmando que seria interessante uma prática, que partisse da leitura preliminar do livro texto, com a possibilidade de consulta ao professor sobre dificuldades apresentadas na leitura e posteriores discussões sobre os conteúdos propriamente tratados (HSIA, 2006, p.93).

Ribeiro (2010) pesquisou a influência do uso da Resolução de Problemas, aliado à História da Matemática, num trabalho coletivo, como metodologia de ensino nas aulas de Cálculo II e concluiu que “a metodologia adotada, como dinâmica de sala de aula, mostrou-se eficiente, integradora, motivadora e capaz de deixar os alunos mais confiantes” (p.303), pois em grupos os alunos podiam discutir suas idéias e conjecturas, não ficando apenas como meros expectadores das aulas expositivas. O autor destaca a dificuldade inicial de envolvimento dos alunos na nova metodologia, na qual o aluno tem um papel mais ativo, que ele não estava acostumado.

Soares de Mello e Soares de Mello (s/d) argumentam que a interdisciplinaridade no ensino de Cálculo pode colaborar na aprendizagem de conceitos. Citam a pesquisa operacional como disciplina com a qual pode haver interdisciplinaridade, bastando, para tanto, uma modificação na apresentação de problemas de otimização. Como exemplo, o fornecimento de enunciados mais relacionados à realidade, nos quais os alunos tenham que analisar as restrições e condições iniciais dos problemas, e não apenas procedimentos técnicos, visando “derivar e igualar a zero”.

Costa e Salvador (2004) também citam a interdisciplinaridade com a Física, e a utilização de *softwares* computacionais, como fortes motivadores da aprendizagem do CDI. No entanto, ressaltam a importância de dar ênfase na exploração dos conceitos matemáticos. Em alguns momentos, foram usados Mapas Conceituais para “fixar alguns conteúdos, suas relações e aplicações” (p.6). Os autores recomendam a busca/escrita de funções associadas à vida real ou a experimentos como resgate às origens do Cálculo. Em relação a esse ponto, os autores comentam que:

Uma das estratégias que usamos foi no sentido de orientar os alunos sobre as noções dinâmicas, estáticas e geométricas de funções, por exemplo, incentivando-os a buscar um problema que dê origem a uma função do cotidiano ou gerada por um experimento. A maioria deles sempre recebeu as funções prontas para estudar, e apresentou dificuldade na procura de sua própria função. É importante que o aluno enxergue e aprenda a ler o mundo em que ele vive, e uma sugestão simples e geralmente colocada, é propor que eles plotem pontos obtidos de um experimento realizado numa outra disciplina, visando à interdisciplinaridade, ou mesmo que busquem um problema ou conjunto de dados descritos em jornais, revistas, etc. de modo que eles possam reconhecer/descobrir/verificar a função que melhor se aproxima daqueles dados. Tentamos fazer com que o aluno explore os conceitos do Cálculo com a sua própria função ao longo do período, inclusive voltando-se a discutir o problema original e fazer simulações através de variação de alguns dos parâmetros envolvidos no problema. [...]. É importante observar que antes de realizar as simulações, os alunos possam pensar, argumentar, fazer conjecturas e discussões sobre a situação problema (COSTA e SALVADOR, 2004, p.6).

Pedroso e Krupechacke (2009) apontam, como sugestões para minimizar o índice de reprovação na disciplina de Cálculo, o aumento da carga horária da disciplina, proporcionando revisão de assuntos quando surge a necessidade, e aulas extras de revisão de fundamentos da Matemática, ao menos, enquanto não houver uma reformulação da Educação Básica que proporcione a formação necessária para prosseguir os estudos. Na pesquisa realizada, os autores concluíram que o aumento da carga horária da disciplina, de forma a proporcionar a revisão dos assuntos quando da sua utilização, surtiu um melhor resultado, atingindo mais alunos que as aulas extras. Nestas, havia sido verificado um grande índice de abstenção.

Já o trabalho de Kalinke (2009), cujo objetivo era verificar de que forma o emprego da linguagem usualmente aplicada em ambientes *web*, em detrimento da linguagem lógica-matemática, pode interferir na interpretação de problemas matemáticos formulados com o uso da “linguagem *web*”. Comparou-se a resolução de exercícios matemáticos, via mídias computador e papel, com alunos da 3ª série do Ensino Médio, escritos em linguagem *web*. O resultado mostrou que a leitura de problemas propostos num ambiente virtual de aprendizagem não fica prejudicada. No entanto, o autor verificou um “percentual significativo de problemas originados pela mudança da linguagem e da mídia utilizada para formulação das questões” (p. 157). Segundo o autor:

Esses problemas nos levam a concluir que a linguagem usualmente utilizada em ambientes *web*, conjugada à mídia em que se insere, pode trazer problemas de interpretação e compreensão dos enunciados dos problemas. Percebemos que houve dificuldade na resolução de problemas que envolvem assuntos como potências, frações e raízes. Percebemos ainda que esses problemas são mais evidentes quando foi usada a mídia computador, em relação à mídia papel. Concluímos que o papel pode ser um facilitador para a resolução de problemas matemáticos, se comparado ao computador; que os sujeitos conseguiram interpretar de forma correta os enunciados propostos em linguagem usualmente utilizada em ambientes *web*; que conseguiram utilizar o computador para resolver problemas em que foi usada a simbologia matemática, desde que tivessem acesso aos recursos necessários; que a junção da mídia computador com a linguagem usualmente utilizada em ambientes *web* apresentou dificuldades aos sujeitos participantes da pesquisa (KALINKE, 2009, p.157).

Kalinke (2009) chama a atenção para o material escrito disponível ao aluno, especialmente se este for disponibilizado em algum Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA). Se considerarmos que grande parte dos estudantes critica os livros de Cálculo justamente por sua complexidade na apresentação dos conceitos (MOMETTI, 2007; SILVA, 2004; BARUFI, 1999; REZENDE, 2003), vale a pena analisar o posicionamento de Kalinke (2009, p.158), para o qual o texto deve ter as seguintes características:

- realce nas palavras chaves;
- subtítulos expressivos;
- listas com *bullets* (marcadores);
- uma ideia por parágrafo;
- introduzir o assunto a partir de possíveis aplicações, por exemplo para o caso da Matemática, para depois desenvolver o conteúdo, o que o autor chama de estilo pirâmide invertida;
- metade das palavras (ou menos) que as utilizadas na escrita convencional.

Considerando a aprendizagem virtual, Fortes (2009) defende a utilização de *blogs* como elemento articulador e apoiador das discussões entre o professor e seus alunos, pois permite ao aluno participar de forma ativa e interventiva na construção do conhecimento. Além disso, se utilizado de forma correta, proporciona uma aprendizagem mais autônoma. A autora chama atenção para o fato do professor saber utilizar essa ferramenta para extrair dela toda a sua potencialidade.

Scucuglia (2007) estudou a utilização de calculadoras gráficas aliadas a uma metodologia investigativa de ensino para o estudo do Teorema Fundamental do Cálculo. Concluiu que esse recurso contribuiu para entendimentos, significados e conhecimentos matemáticos produzidos coletivamente, além de possibilitar o engajamento gradativo dos alunos em discussões matemáticas dedutivas. Foram usados os programas AREA e SOMA e o comando de Cálculo da Integral Definida da calculadora TI-83, para calcular a área sob a curva $y = x^2$, no intervalo $[0,3] \subset \mathbb{R}$. A experimentação no AREA permitiu que os alunos conjecturassem que o aplicativo calculava uma área por aproximação, executando uma simulação que envolvia retângulos. O *software* SOMA e a calculadora gráfica permitiram que os alunos conjecturassem a Integral Definida como o limite de uma soma de retângulos. Lembramos que nesta tese, os *softwares* a serem utilizados são o Geogebra³⁶ e o wxMáxima³⁷. O autor escreve que:

Com o SOMA, os coletivos pensantes identificaram a viabilidade de explorar $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$ e discutiram a possibilidade de calcular o valor exato da área da região R. Em seguida, com o comando de integração definida, os coletivos pensantes puderam estruturar relações intuitivas-algébricas-visuais entre calcular $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$ e o processo que constitui o conceito de Integração Definida. Assim, coordenando gradativamente múltiplas representações, Estudantes-com-Calculadoras-Gráficas puderam experimentar que a área da região R pode ser calculada, entendida e/ou representada por $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x = \int_a^b f(x) dx$: essência do Teorema Fundamental do Cálculo (SCUCUGLIA, 2007, p.8).

Outro benefício dos *softwares*, citado por Campuzano e Figueroa (2011), é que estes permitem análises mais profundas sobre o conteúdo em estudo. Os autores analisaram o uso da tecnologia para cálculo de primitivas e mostram os contrastes que podem ser explorados a partir das respostas oferecidos pelos *softwares* (no estudo citado são usados: Derive 6.0, Scientific Work Place 4.0 e o sítio de acesso livre WolframAlpha). Para algumas integrais indefinidas apresentadas no artigo, os

³⁶ Maiores informações sobre o *software* veja: <http://www.Geogebra.org/cms/>

³⁷ Maiores informações acesse: <http://andrevj.github.com/wxmaxima/index.html> ou <http://sourceforge.net/projects/wxmaxima/files/wxmaxima/>

resultados fornecidos são diferentes, porém, com a mesma derivada, o que permite trabalhar a importância da constante de integração, por exemplo, além de retomar alguns conteúdos como trigonometria e logaritmos.

Outro argumento em favor do uso do recurso computacional é apresentado por Richit *et al* (2011), para os quais o uso de diferentes tecnologias na abordagem de conceitos matemáticos permite a articulação entre as diversas representações (gráficas, geométricas e algébricas) de um conceito matemático. Sustentam que transitar por diferentes representações matemáticas facilita a compreensão de conceitos. Também apontam pesquisas que indicam a importância da inferência dos alunos sobre determinados resultados matemáticos a partir do uso de calculadoras gráficas e/ou *softwares* matemáticos.

Os autores comentam o trabalho de Scucuglia (2007) e dizem que, com a intervenção do pesquisador e a análise dos dados obtidos por meio das tecnologias, os estudantes perceberam padrões para o cálculo de áreas de algumas funções específicas no intervalo $[a, b]$, e conjecturaram que “a integral de uma função $f(x)$ em um intervalo $[a, b]$, com antiderivada $F(x)$ é ‘ F aplicada em b menos a F aplicada em a ’. Isto é, $F(b) - F(a)$ ” (RICHIT *et al* 2011, p.5).

Gonzales-Martin e Camacho (2004; s/d) desenvolveram uma sequência didática para o conteúdo “Integrais Impróprias”, em que deveria ser usado um *Computer Algebra System (CAS)*, para analisar a articulação dos registros gráfico e algébrico, segundo a teoria de Duval³⁸, e a reconstrução de conceitos anteriores, quais sejam, séries e Integral Definida. Foram usados problemas não-rotineiros³⁹ e requerido a construção sistemática de exemplos e contra-exemplos nos dois registros.

Os autores pretendiam identificar obstáculos para a compreensão da integral imprópria, e erros e/ou dificuldades na conversão dos registros gráfico e algébrico. Comentam sobre as dificuldades do uso do registro gráfico por requerer maior conhecimento, porém, são aceitos pelos alunos desde que haja a utilização pelo professor, que também deve mostrar sua utilidade para a institucionalização do conteúdo. No entanto, os discentes preferem a representação algébrica. Questões nas quais são exigidas justificativas das respostas tendem a deixá-los desorientados.

³⁸Teoria de Registro das Representações Semióticas

³⁹ Problemas que não se resumiam a simples cálculos, mas que envolviam questões intuitivas e resultados paradoxais, como uma figura infinita com volume finito.

Quanto à utilização de conceitos anteriores, os autores expõem que o conceito de Integral é visto sempre como uma área, independente da função ser positiva, negativa, ou parte positiva e parte negativa, o que atesta a incompreensão do conceito. De modo geral, os participantes do estudo exploratório não conseguiram articular as informações entre os dois registros.

Já Barroso *et al* (2008) montaram uma sequência didática para a “introdução do conceito de Integral de Riemann, fundamentada na origem histórica do conceito e vinculada à busca de solução para a medida de regiões do plano” (idem, p.3). Para os autores, esta introdução dá-se de forma mais abrangente que a apresentada nos livros didáticos: a integral como antiderivada. Os autores tinham por objetivo usar os conhecimentos prévios dos alunos, obtidos ainda na Educação Básica, sobre medidas de segmentos e regiões planas, e trabalhar com aproximações de área usando a Soma de Riemann (no *software* Geogebra) a fim de tornar compreensível aos alunos o conceito de integral.

Foram usadas para o experimento três sessões de duas horas-aula. Na primeira sessão foram apresentadas as origens do conceito, por meio de transparências eletrônicas. Na segunda, o conceito foi construído por meio de atividades, algumas das quais estão na parte D da sequência didática elaborada para esta tese. Utilizou-se o *software* Geogebra. Na terceira sessão, buscou-se a formalização do conceito. Os autores comentam que o estabelecimento do contrato didático antes do início do experimento permitiu a participação efetiva dos alunos, já que todos conheciam seu papel; além disso, o uso do *software* possibilitou a resolução das questões de soma inferior e superior solicitadas, sem maiores dificuldades, o que permitiu a exploração de conceitos mais abrangentes.

Entendemos que, na presente tese, embora também tenhamos trabalhado com a Integral Definida, nossa proposta para a sequência didática é mais ampla, pois contempla os conceitos de convergência de sequências e séries, e a notação sigma, além do cálculo de áreas por aproximação. Ainda, nosso problema de pesquisa é avaliar em que medida os Mapas Conceituais contribuem para a conceitualização da integral definida, ou seja, não estamos meramente interessados no conceito em si, mas sim em estudar um modo de perceber as dificuldades e erros que os alunos cometam a caminho da construção desse conceito.

Além do *software* Geogebra, usamos também o aplicativo wxMaxima como recurso didático. No Geogebra, usado por Barroso *et al* (2008), utilizamos os comandos

de somas de Riemann superior e inferior e o de integral. Foram empregados, também, vários outros comandos e em diferentes contextos com variações de representações, e não nos restringimos a situações puramente matemáticas⁴⁰.

Camacho e Depool (2003) apresentaram um estudo piloto com onze alunos venezuelanos, cujo objetivo era analisar a influência do uso do *software* Derive na ideia de área delimitada por uma curva e o eixo x , quando o tema é introduzido por um método diferente do tradicional. Foram propostas oito atividades a serem resolvidas com o uso do aplicativo e ao final, alguns alunos foram entrevistados. Os autores tomaram por base teórica as Representações Semióticas de Duval. Dessa forma, as atividades foram elaboradas para o reconhecimento das representações gráfica, algébrica e numérica e o tratamento em uma delas. A análise dos resultados indicou dificuldade na conversão de representações, que os alunos preferem usar a representação algébrica em detrimento da gráfica. Contudo, o uso do aplicativo interferiu positivamente na resolução das questões propostas.

Rasslan e Tall (2002) pesquisaram sobre a imagem conceitual de estudantes em relação à Integral Definida. A pesquisa foi realizada com 41 estudantes de ensino médio, entre 16 e 18 anos, da Inglaterra, onde este conceito é tratado ainda nesse nível de ensino. Os alunos responderam a um questionário com seis questões, sendo que, as cinco primeiras, referiam-se ao cálculo de áreas sob curvas, e a última, sobre a imagem do conceito da Integral Definida. A pergunta era concernente à sua opinião. O que era $\int_a^b f(x) dx$?

Para esta pergunta, estabeleceram-se, a partir das respostas, cinco categorias, que abrangiam, desde a conceitualização correta, até a não resposta. Nessa categorização, apenas sete alunos deram uma definição do conceito de integral definida. Três deles enfocaram o uso em situações específicas, e a ampla maioria (31/41) respondeu erroneamente (cinco alunos) ou não respondeu, indicando a dificuldade em explicar o conceito de integral definida.

Diante dos dados analisados, os autores do estudo sugerem conhecer o nível dos alunos com quem se vai trabalhar a fim de amenizar as dificuldades enfrentadas por eles, sanando eventuais dúvidas, uma vez que, procedimentos/rotinas inadequadas podem ser prejudiciais nos estudos posteriores, como já verificado em outras pesquisas na Inglaterra. Mesmo tendo sido pesquisados alunos que já haviam estudado o conceito

⁴⁰ Aquelas em que são dadas funções algébricas e a partir delas desenvolve-se o conteúdo visado.

de Integral Definida, e que estavam em uma escola cuja média era maior que a média nacional, os alunos não resolveram adequadamente os problemas propostos (RASSLAN e TALL, 2002).

Andrade Filho e Cardoso (2012) apresentam uma sequência didática com o intuito de possibilitar, ao aluno, a mobilização de diferentes sistemas semióticos no estudo das Integrais Duplas. A aplicação da sequência consistiu em cinco partes, sendo uma delas, com o objetivo de revisar o conceito de Integral Definida de uma variável e suas representações⁴¹.

A partir das atividades, os autores destacam a importância do registro gráfico, por exemplo, na determinação dos limites de integração para o cálculo de uma área ou volume, quando se utiliza a Integral Dupla. Enfatizam que as transformações de tratamento e conversão entre os diversos registros estão presentes desde a proposição da atividade por meio da Língua Natural até a resolução final. Concluem que “a utilização dos registros de representação é imprescindível no processo de transposição didática dos objetos matemáticos” (idem, p.17), porque, além de permitirem a visualização do objeto matemático, permitem a compreensão dos algoritmos usados na resolução dos problemas. Neste trabalho, os autores afirmam:

é necessário que o professor crie estratégias que permitam aos alunos mobilizar os diferentes registros e, ainda, que estas conversões possibilitem que o aluno identifique as unidades significantes nos registros de chegada e partida, considerando que essa discriminação é condição necessária para a atividade de conversão e, conseqüentemente, para o desenvolvimento da coordenação de diferentes registros de representação (id, 2012, p.17).

A sugestão de Andrade Filho e Cardoso (2012) vai à contramão da observação de Vaz (2010), que investigou os conceitos de Limite, Derivada e Integral, pelos professores de Matemática, e de disciplinas específicas e autores de livros-texto, do ponto de vista metodológico, ou seja, abordagem e utilização. Vaz usou a análise documental, a observação de aulas e entrevistas semi-estruturadas em sua pesquisa, e concluiu que há uma pressa dos professores pesquisados em chegar ao cálculo algébrico, e que os professores de disciplinas específicas usam os referidos conceitos para a ilustração de conceitos tecnológicos, porém, limitam-se à estruturação algébrica dos mesmos.

⁴¹ As cinco partes foram, em síntese: 1ª) atividades que envolvem integrais duplas; 2ª) Revisão de Integral definida de uma variável; 3ª) volume e integrais duplas; 4ª) Retomando as questões; 5ª) Exercícios.

Vaz (2010) considera existir, nos livros analisados⁴², um equilíbrio das representações gráficas, algébricas e numéricas, com maior diversidade de situações e com o apoio da informática. Nas palavras da autora:

Notou-se a intenção e a tendência dos professores em chegar rápido ao cálculo algébrico. Assim, se privilegiam mais a definição formal e os cálculos operacionais. A motivação conceitual ficou mais no campo de uma propedêutica da definição e do algebrismo.

Os professores das disciplinas específicas se satisfizeram em mostrar a estruturação algébrica dos conceitos tecnológicos, utilizaram mais a transformação dentro de um mesmo registro, usando o “tratamento” de Duval (2003) sem uma intensiva e demorada interpretação da Matemática com o objetivo de desvelar o qualitativo, seja explícito ou implícito nas várias transformações algébricas (id., p.154).

Em suma, se tem numa análise comparativa da didática dos livros-texto e das aulas, quanto a uma similaridade conceitual usando a álgebra, aritmética e a geometria. Há um ganho nos livros da exposição mais abrangente, com mais situações matemáticas e da Física, e com sugestão do apoio da informática, inclusive citando tipos de softwares, que podem ser usados. Há um equilíbrio na abordagem gráfica, aritmética (tabela de valores) e a exposição algébrica. Os livros proporcionam ao estudante uma diversidade de situações, que poderão possibilitar uma maior aprendizagem (ibidem, p.155).

Dalto e Pazuch (2011) corroboram Andrade Filho e Cardoso (2012) quando relatam a experiência em uma disciplina de Cálculo, ministrada na modalidade semi-presencial. O curso era de 200 horas, das quais 84 eram presenciais, e, inicialmente, destinavam-se à formalização de conceitos e resolução de exercícios⁴³. Em relação aos resultados da metodologia usada inicialmente no curso, os autores expõem:

Os resultados de tal escolha metodológica não estavam sendo muito positivos, pois o desempenho de muitos estudantes nas avaliações anteriores foi abaixo do esperado. Aparentemente, uma das causas do baixo desempenho foi a excessiva ênfase dada aos aspectos algébricos, de técnicas de resolução e de algoritmos que foram dados aos conteúdos anteriores, além do uso excessivo de tratamentos de registros de representação, em detrimento da transformação de conversão de registros, o que contribuiu para a apresentação de dificuldades na conceitualização, por parte dos estudantes, dos objetos matemáticos que foram trabalhados anteriormente. Assim, o professor da turma decidiu trabalhar o conceito de integral de forma diferente comparada àquela em que foram introduzidos os conceitos anteriores, de modo que os estudantes pudessem conceitualizar integral definida sem grandes dificuldades e fazendo uso de processos matemáticos de conceitos já vistos em outras ocasiões (DALTO e PAZUCH, 2011, p.5).

⁴² A autora analisou os livros de Cálculo dos autores 1) James Stewart, 2) Howard Anton, Irl Bivens e Stephen Davis, 3) George Thomas e 4) Ron Larson e Bruce Edwards.

⁴³ Os autores observaram que esta metodologia não estava trazendo bons resultados, devido às notas baixas nas provas realizadas. Decidiram mudar a metodologia antes de começarem o tema “Integrais”. Por isso a afirmação que inicialmente a carga horária era destinada a institucionalização e resolução de exercícios.

Nesta mudança metodológica, os professores (eram quatro ao todo, para 4 turmas diferentes), começaram o tema de integrais pedindo que os alunos calculassem a área sob a curva $f(x) = x^2$ da maneira como soubessem. Muitos alunos, a princípio, esperaram pela resposta do professor, mas aos poucos, em grupos, tentaram resolver o problema dado. Os autores retratam as conversões usadas pelos alunos durante a resolução do problema, conforme mostra a Figura 11.

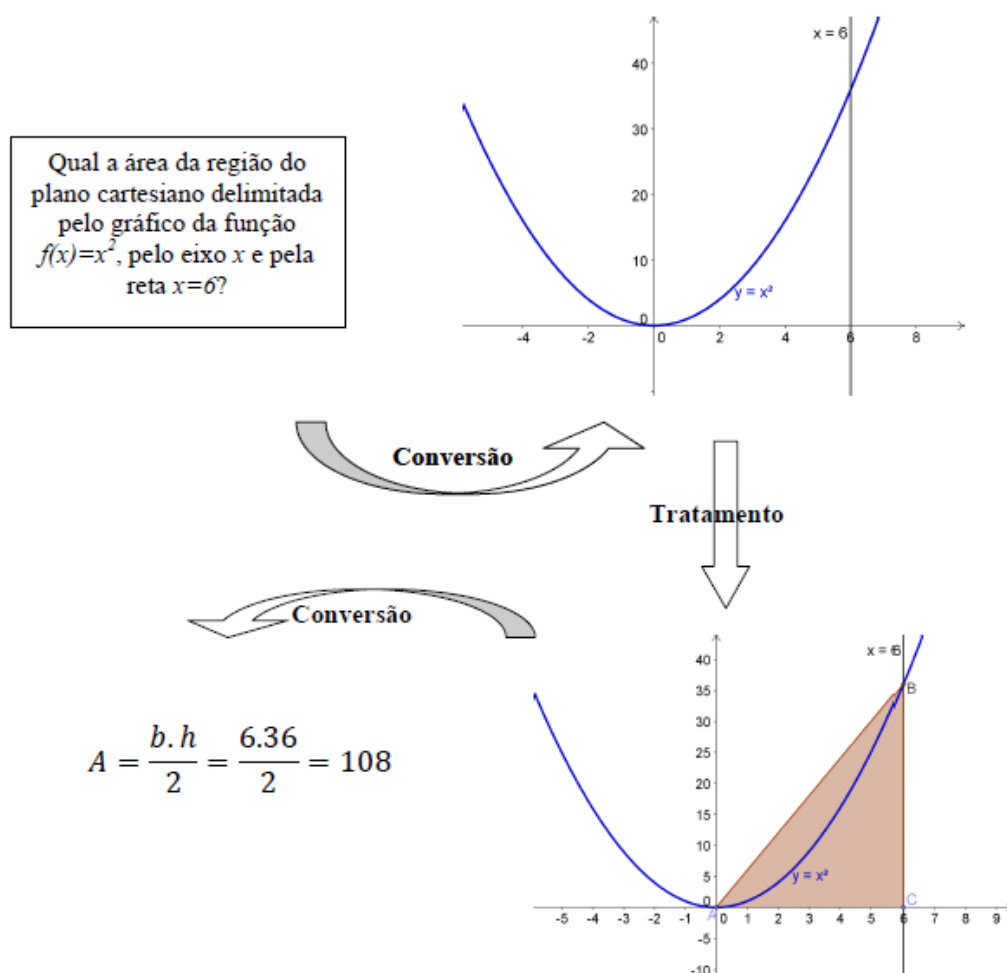


Figura 11: Conversões utilizadas por alunos no cálculo de área sob uma curva
Fonte: Dalto e Pazuch (2011, p.6).

As pesquisas de Dalto e Pazuch (2011), Vaz (2010) e Andrade Filho e Cardoso (2012), entre outras, apontam perspectivas para a aprendizagem do conceito de Integral Definida.

Na tentativa de estabelecer um caminho a ser trilhado para o ensino do conceito em tela, Oliveira (2004) apresenta, como mostrado na Figura 12, como deve ser o desenvolvimento operacional-estrutural ideal de um conceito matemático, no caso para a integral definida, de acordo com a teoria de Sfard, segundo a qual

uma noção matemática é inicialmente concebida como um processo, no qual suas características são evidenciadas. Depois ela passa a ser vista como um objeto, não se enfatizando os seus detalhes. A primeira concepção é chamada de operacional e a segunda de estrutural. A passagem de uma para outra se dá através de três fases hierarquizadas: interiorização, condensação e reificação (OLIVEIRA, 2004, p.1).

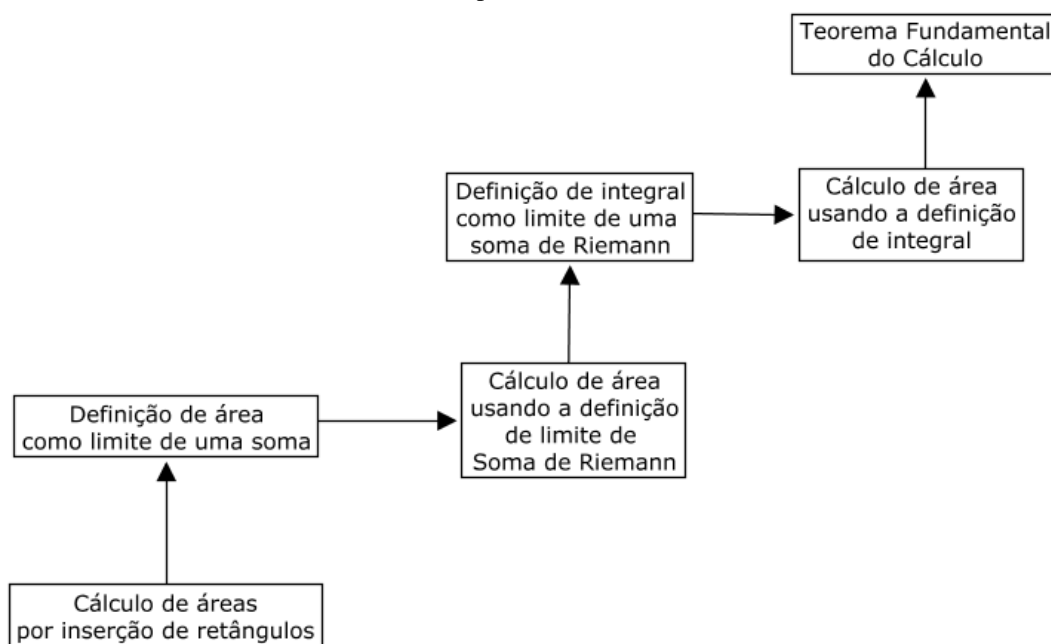


Figura 12: Exemplo do Desenvolvimento operacional-estrutural de um conceito matemático (OLIVEIRA, 2004, p.18)

O esquema da Figura 12 indica a sequência de fases a ser seguida a fim de que o aluno compreenda o conceito de integral definida. Ou seja,

Inicialmente, o cálculo da área de uma região é feita pela inserção de retângulos e somando-se as suas áreas. Isto dá origem ao conceito de área da região abaixo do gráfico de uma função contínua e, limitada e definida num intervalo fechado como limite de uma soma de Riemann. Os cálculos de área passam a ser feitos com este novo conceito. Isto dá origem ao conceito de integral como limite de uma soma de Riemann. Os cálculos de área passam a ser feitos com este novo conceito. Isto dá origem ao teorema fundamental do Cálculo (OLIVEIRA, 2004, p.18-19).

Mesmo com referencial teórico diferente do usado por Oliveira, procuraremos seguir essa sequência de fases, já validada academicamente, para a construção do conceito de integral definida, após a retomada de algumas noções consideradas de extrema importância como a de convergência de sequências e séries.

Henriques (2006) estudou a contribuição do *software Maple* para o ensino e a aprendizagem de volume a partir das Integrais Múltiplas, em estudantes universitários do Brasil e das classes preparatórias tecnológicas da França, apoiado nas teorias de Instrumentação, de Rabadel, Antropológica do Didático, de Chevallard, e Registros de

Representação, de Duval. O objetivo da pesquisa era compreender melhor as dificuldades de cálculo enfrentadas pelos alunos e estudar como o uso de *softwares* como o *Maple* pode ajudá-los a superá-las, além de incentivar a interação entre a representação gráfica e o objeto de análise. O autor conclui que o *software* “permite um trabalho específico onde a interação entre o usuário e a máquina faz aparecer elementos de articulação entre o gráfico e o analítico”.

Melo (2002) propôs uma sequência didática computacional para o ensino e a aprendizagem do conceito de Integral, usando por base as teorias de Piaget, Vygotsky e Lévy, com o objetivo de responder à questão: “os alunos são capazes de construir o conceito da Integral, por meio de atividades que levem em conta sua gênese, utilizando um *software* matemático?” (p.76).

Melo desenvolveu uma sequência didática composta por quatro atividades, para serem realizadas em duplas (ao todo havia 30 alunos), em ambiente computacional, usando o *software Maple V*. O experimento desenvolveu-se em quatro sessões de três horas. Em cada atividade os alunos eram estimulados a descrever as etapas necessárias à compreensão do conceito de Integral.

Na primeira atividade, o objetivo era apresentar a gênese do conceito de Integral por meio de atividades exploratórias de cálculo de áreas. Pediu-se que algumas regiões, como um retângulo, um trapézio, e a região sob a curva $x^2 + 1$, num intervalo determinado, fossem criadas com a ajuda do *software* e a área calculada, descrevendo o procedimento utilizado para o cálculo. Depois, pediu-se que a área fosse calculada por meio da aproximação da soma de área de retângulos cuja altura era o menor valor da função para o intervalo da partição, indagando sobre a possibilidade de determinar o valor exato da área sob a curva.

A segunda trabalhou a construção do conceito de Integral, usando os retângulos com altura sendo o maior valor da função para o intervalo da partição. Manteve-se a função $f(x) = x^2 + 1$ e foi-se aumentando a quantidade de retângulos considerados. Ao final, foi institucionalizada a soma superior de Riemann.

Na terceira atividade construíram-se retângulos usando os pontos médios dos intervalos das partições, empregando a mesma função.

A quarta atividade destinou-se à institucionalização do conceito, identificando as semelhanças entre os métodos de cálculo de área sob uma curva por meio da utilização de áreas de retângulos.

Em relação à questão proposta, Melo (2002) concluiu que os alunos podem sim construir o conceito de Integral por meio do *software*, entretanto, observou algumas dificuldades, a saber:

- Ao comparar as respostas escritas das duplas com os comentários, constatou-se que eles apresentam dificuldades em expressar-se por escrito utilizando a linguagem matemática.
- Dificuldade na aplicação do conceito de domínio e imagem de uma função em novas situações-problema.
- Dificuldade em desenvolver cálculos que necessitem transformar números da representação decimal ou dízimas periódicas para a representação fracionária.
- **Dificuldade em desenvolver cálculos com aproximações numéricas.**
- A maioria dos alunos têm a concepção de que o infinito é um número real.
- Alguns dos alunos têm a concepção de que a tendência para zero é igual a zero e que a tendência para o infinito é igual a um número ‘bastante grande’.
- **A maioria dos alunos teve dificuldade em relacionar o conceito de Limite ao conceito de Integral.** Um dos motivos, talvez, seja que esses conceitos são apresentados, separadamente, tanto nas aulas como na maioria dos livros didáticos.
- A maioria dos alunos não tem o significado da área de uma figura e o do número obtido por meio de algoritmos.
- **A maioria dos alunos não tem o significado matemático de ‘tendência’ ou ‘aproximar-se’.** (MELO, 2002, p. 148, negrito nosso)

Nesta tese, buscar-se-á trabalhar com as dificuldades apontadas por Melo (2002) e que estão assinaladas em negrito, a fim de minimizá-las na sequência didática a ser elaborada.

A dificuldade de associar o limite à Integral, apontada por Melo, também aparece no trabalho de Schneider (1988, *apud* Contreras e Ordóñez, 2006), sobre o qual Contreras e Ordóñez comentam e citam como um obstáculo relevante a dificuldade de compreender que “uma área se calcula mediante um processo infinito de soma de retângulos e o resultado seja um número finito” (CONTRERAS & ORDÓÑEZ, 2006, p.73 – tradução nossa).

Esta mesma constatação está no trabalho de Cañada e Fuente (2003) que também sugerem a introdução do conteúdo Integral Definida como o resultado dos processos de variação de diversos fenômenos, o que levaria à associação natural entre a Integral e a Derivada, já que esta última estuda as variações instantâneas. Esta metodologia poderia proporcionar uma melhor, e mais ampla, compreensão do conceito de Integral.

No estudo apresentado por Amadei (2005) sobre o infinito, sob os pontos de vista matemático, epistemológico, histórico e educacional, o autor esclarece as

dificuldades existentes em torno do conceito de infinito, desde os tempos de Arquimedes. Vários matemáticos importantes na história da matemática, não o concebiam. Apesar da sua importância para o Cálculo Diferencial e Integral, o infinito foi tratado inicialmente como “números especiais” e apenas com Cantor o infinito passou a ser entendido como *infinito atual*, o *verdadeiro infinito*, que pode ser quantificável. Anteriormente, concebia-se, com dificuldades, o chamado *infinito potencial*, aquele que não pode ser realmente atingido, que acaba reduzindo-se ao finito, com um número “infinitamente grande”.

Amadei (2005) argumenta que a noção de infinito contraria a nossa intuição, uma vez que as coisas são finitas no nosso mundo real, por isso a dificuldade em aceitá-lo. O autor relata pesquisas realizadas com estudantes que indicam que o curso de Cálculo não trabalha adequadamente com este conceito, e que a concepção de infinito é, na verdade, a de infinito potencial.

Como o conceito de limite é intrínseco ao conceito de Integral Definida, este ponto deverá ser cuidadosamente planejado na nossa Sequência Didática.

Mometti (2007) pesquisou como a reflexão sobre a prática pode contribuir com o desenvolvimento profissional de docentes participantes de um grupo de discussão, em relação às aulas de Integral de Riemann, usando como aportes teóricos metodológicos o “Modelo da Estratégia Cognitiva” e a “Teoria da Cognição Corporificada”. Foi verificada uma “forte tensão entre intuição e conceito, entre facilitar a compreensão do conteúdo e enforçar a matemática” (MOMETTI, 2007, p.156). Isso ocorre porque, segundo o autor, quando o professor apela para a intuição, há uma maior compreensão e aceitação por parte do aluno, do discurso do professor, enquanto o uso da definição aumenta o nível de dificuldade da compreensão dos mesmos pelos alunos.

O autor supracitado também comenta que a utilização de *softwares* (em particular cita o *Mathematica*) em aulas de Cálculo Diferencial e Integral faz com que os alunos sintam-se mais entusiasmados e interessados, especialmente em relação à visualização gráfica e cálculos de limites, derivadas e integrais. No entanto, na pesquisa citada, apesar do interesse dos alunos, o índice de reprovação continuou alto (o autor não cita o índice. Eram usadas 20% das aulas em laboratório de informática e as outras em sala de aula. Não foi comentado se o *software* era ou não utilizado nas avaliações). Pretendendo avançar na discussão da melhoria do ensino de Cálculo, é proposta a investigação sobre o papel da linguagem utilizada pelo professor e a corporeidade na discussão e reflexão da prática pedagógica.

Mometti sintetiza os problemas com o ensino de cálculo, observados na sua revisão de literatura, da seguinte forma:

Os problemas do ensino de cálculo parecem convergir para os mesmos fatores: ênfase nos procedimentos e técnicas, falta de conexão entre as diferentes representações (algébrica, geométrica, numérica), falta de conhecimentos prévios (pré-requisitos) por parte do aluno, dificuldade com o rigor dos conceitos de Cálculo, etc. (MOMETTI, 2007, p.44).

A revisão apresentada até o momento, para as dificuldades em ensinar e aprender CDI, aponta para a necessidade de:

- trabalhar com mais de uma representação de um conceito matemático (exemplo: gráfica e analítica);
- compreender do conceito e não da técnica;
- incentivar a busca do conhecimento;
- atentar para a linguagem utilizada na apresentação das atividades e orientações.

Tais apontamentos serão considerados quando da elaboração das atividades propostas para o desenvolvimento do conceito de Integral Definida. No entanto, há outro ponto que acreditamos poder contribuir na aprendizagem deste conceito: a confecção de Mapas Conceituais, neles são requeridas as habilidades de leitura e escrita, além da concatenação das redes de situações que compõem os conceitos.

As pesquisas de Dall'anese (2006), Mariani (2006) e Adu-Gyamfi, Bossé e Faulconer (2010), entre outros, apontam a linguagem natural, leitura e escrita, como aliados do professor.

Dall'anese (2006) evidencia a importância da linguagem natural para a construção do conhecimento matemático. Citando Bakhtin, Dall'anese diz que “a relação do sujeito com o mundo e com outros sujeitos se dão de acordo com prioridades e interesses estabelecidos com e na linguagem cotidiana” (p.25-26). Citando Castro e Bolite Frant (2002), Dall'anese diz que

a linguagem que efetivamente participa da produção de conhecimentos matemáticos na sala de aula (contexto) é, preferencialmente, a linguagem natural ou linguagem materna, ou linguagem ordinária, aquela na qual construímos nossa visão de mundo, assim como nossos pontos de vista (DALL'ANESE, 2006, p.28).

Para Mariani (2006, p.202):

o registro da língua natural, em específico, mostrou-se extremamente adequado para uma pesquisa que vise identificar os conhecimentos dos alunos, pois, por meio dele, foram reveladas muitas concepções que, geralmente, ficam ‘mascaradas’ por algoritmos mecânicos e convencionais, que ‘transmitem’ ao aluno a impressão de que ‘estão sabendo’ o que estão fazendo (grifos da autora).

Adu-Gyamfi, Bossé e Faulconer (2010) afirmam que a leitura e escrita matemática são habilidades necessárias para o desenvolvimento da compreensão matemática. Eles escrevem: “a leitura é vista como um veículo por meio do qual o texto e o contexto são negociados para a construção do conhecimento matemático” (tradução nossa, p.3). Os autores também comentam sobre pesquisadores que acreditam que a escrita sustenta o desenvolvimento da comunicação, raciocínio e conexões dos alunos, gerando o conhecimento matemático. Afirmam, ainda, que ler e escrever Matemática são diferentes de fazê-los em outros campos. Considerando isso, o uso de Mapas Conceituais, que exige as habilidades mencionadas, pode contribuir com a aprendizagem matemática.

Na pesquisa bibliográfica realizada, foram encontrados indícios da importância do uso de Mapas Conceituais para a aprendizagem de CDI (AHUMADA, 1983; ARAÚJO, 2007; CAÑAS *et al*, 2004; CUNHA *et al*, 2004; MAGALHÃES, 2009; MOREIRA, 1980; MOREIRA, 1993; NOVAK e CAÑAS, 2006). Em particular, para elaboração desses Mapas Conceituais, as habilidades de leitura e escrita são requeridas, como já foi afirmado anteriormente.

Magalhães (2009) estudou a utilização de Mapas Conceituais digitais como estratégia da metacognição para o estudo de Funções, desde a representação no plano até o estudo dos coeficientes da função afim (usando como sujeitos de pesquisa cinco alunos do curso de ciência da computação – 1º semestre), tendo como referencial teórico a Teoria das Situações Didáticas de Brousseau. Concluiu que as estratégias desenvolvidas pelos alunos foram: Conhecimento Metacognitivo, Julgamento Metacognitivo e Decisão Metacognitiva.

Magalhães (2009) ressalta que a elaboração de mapas conceituais exige uma “concentração maior para estabelecer as relações entre as ideias que estão sendo expressas em forma de mapa” (p. 231), ou seja, essa atividade requer que o aluno reflita sobre seu próprio processo cognitivo. Estabelecer as relações entre as ideias, em especial entre o que sabem e o que precisam aprender, é justamente o que Gravemeijer

(2005) aponta como um motivo pelo qual aprender Matemática é tão difícil para os alunos.

Menegola (2006, p. 84-85) afirma que

o uso de mapas conceituais permite que os alunos organizem, hierarquizem, sintetizem e estabeleçam relações entre conceitos, favorecendo a aprendizagem significativa. Os alunos, usando os mapas conceituais, desenvolvem, além disso, um processo metacognitivo, que lhes permite ter consciência de seu processo de aprendizagem [...].

Para Dutra (2006, p. 108) “aquele que constrói o mapa conceitual vê-se forçado a colocar em outra forma aquilo que seu pensamento ou seu texto (oral ou escrito) expressam”. E é nesse processo que o conhecimento adquirido se consolida.

Jaramillo (2001, p.6) cita outras possibilidades para o uso de Mapas Conceituais, agora para o professor, quais sejam:

- **Dar-se conta das conexões que faltam entre os conceitos e que sugerem a necessidade de uma nova aprendizagem.**
- **Dar-se conta das concepções equivocadas.**
 - Negociar significados. Neste sentido é importante ressaltar que é claro que existem "significados cognitivos" já estabelecidos, mas o professor tem duas alternativas, de um lado os transfere (como uma transfusão de sangue), ou de outro lado dialoga, troca, comparte (às vezes até chegar a um compromisso) para que o significado desse conhecimento seja aprendido. O importante nesta negociação, é que o estudante sempre aporta algo de si mesmo.
 - **Avaliar os processos de ensino e aprendizagem.** Esta avaliação, durante todo o processo de aprendizagem do aluno permite que o professor:
 - Verifique o uso adequado de conceitos e termos num determinado momento, as conexões claras e com significados apropriados, e, o uso de exemplos adequados.
 - Verifique o aprofundamento do conteúdo e as inter-relações destes conteúdos com outros temas.
 - Verifique a aprendizagem dos alunos de forma mais livre e aberta, quer de forma individual, quer de forma grupal.(JARAMILLO, 2001, p.6, grifo nosso).

Nesta pesquisa, os Mapas Conceituais serão usados na tentativa de acompanhar o desenvolvimento do conceito de Integral Definida por alunos de primeiro período de cursos de graduação.

Na próxima seção, como a reconstituição histórica traz benefícios para a constituição do campo conceitual das integrais definidas, será apresentada uma pequena biografia de Riemann, já que a integral que se propõe a tratar aqui é a devida a ele. Recomendamos aos interessados no desenvolvimento histórico do conceito de Integral, a leitura do capítulo quatro da dissertação de Melo (2002), onde podemos encontrar uma síntese histórica do conceito de Integral, constando, desde elementos históricos como o método de exaustão até a conceitualização de Integral por Riemann.

2.2 Bernhard Riemann

O texto seguinte é baseado na biografia de Riemann que é apresentada no sítio: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Riemann.html> (O'CONNOR e ROBERTSON, 1998):

Georg Friedrich Bernhard Riemann nasceu em 17 de setembro de 1826, em Breselens, Hanover, atual Alemanha. Até os 10 anos teve seu pai como professor, depois disso passou a ser acompanhado por um professor da escola local, de nome Schulz.

Quando foi para o Ginásio Johanneum, em Lüneburg, em 1842, demonstrou interesse em estudar Matemática, e o diretor do ginásio permitiu que Riemann estudasse-a na sua biblioteca particular.

Em 1846 Riemann matriculou-se na Universidade de Göttingen, inicialmente num curso de Teologia, mas depois transferiu para Filosofia, para estudar Matemática. Teve aulas com Moritz Stern e Gauss, este último foi seu orientador no doutorado.

Para facilitar seu estudo matemático, Riemann transferiu-se para a Universidade de Berlin, instituição que lhe propiciava melhores condições de acesso ao conhecimento matemático. Estudou com Steiner, Jacobi e Dirichlet, e Eisenstein, sendo que, com este último, discutiu uma teoria de função elíptica usando variáveis complexas. Seu grande inspirador foi Dirichlet.

Em 1849 voltou a Göttingen, para ser orientado por Gauss em sua tese de doutorado, defendida em 1851. Nela, estudou a teoria das variáveis complexas e, em particular, o que agora é chamado de superfícies de Riemann. Introduziu métodos topológicos na teoria das funções complexas e baseando-se na teoria de variáveis complexas de Cauchy, examinou propriedades geométricas de funções analíticas e a conectividade de superfícies.

Segundo Struik (1987), Georg Friedrich Bernhard Riemann, sucessor de Dirichlet em Göttingen, foi o homem que mais influenciou o curso da Matemática moderna. Em sua vida, publicou poucos artigos, mas cada um deles foi, e continua sendo, importante para a abertura de novos e produtivos campos.

Riemann tornou-se conferencista (privatdozent) em 1850, submetendo dois trabalhos fundamentais: um sobre séries trigonométricas e os fundamentos da análise, e outro sobre fundamentos da geometria. No primeiro deles, analisou as condições de Dirichlet para a expansão de uma série de Fourier. Uma dessas condições estabelecidas

era de que a função deveria ser integrável. Mas o que significava isso? Cauchy e Dirichlet já haviam dado respostas, porém, Riemann desenvolveu uma formulação mais compreensiva, segundo O'Connor e Robertson (1998). Ele é responsável pela definição que conhecemos, hoje, por Integral de Riemann, a qual foi substituída apenas no século XX, pela Integral de Lebesgue. Segundo O'Connor e Robertson (2004), Lebesgue a publicou apenas em 1901, estendendo o conceito de área sob uma curva para algumas funções descontínuas. Mais detalhes sobre Riemann pode ser obtido na dissertação de Marcos Vinícius RIBEIRO (2010) e no MacTutor History of Mathematics da St Andrews University (O'CONNOR e ROBERTSON, 1998).

Hsia (2006) apresenta um capítulo da sua dissertação sobre o objeto matemático Integral, onde descreve o desenvolvimento histórico do conceito de integral, destacando as diferenças entre as integrais de Cauchy e as integrais de Riemann. Aos interessados, sugere-se a leitura.

A seguir, são descritos os procedimentos de ensino do conceito de Integral Definida em alguns livros de Cálculo. Tais descrições são analisadas de acordo com as entidades primárias, propostos por Contreras e Ordóñez (2006), com o intuito de estudar a relação entre os signos usados para codificar o conhecimento e os contextos que servem para estabelecer o seu significado. Para tal modelo teórico, os autores consideraram o modelo de triângulo epistemológico de Steinbring, cujos elementos são conceito, signo/símbolo e objeto/contexto de referência, e a terna (S, I, R) de Vergnaud. As entidades primárias, consideradas como constituintes primários de outros objetos como, por exemplo, o sistema conceitual, no modelo de Contreras e Ordóñez (2006, p.69-70), são:

1. **Linguagem** (termos, expressões, notações, gráficos): são consideradas a linguagem natural, analítica/simbólica, gráfica e numérica.
2. **Situações**: são as tarefas que induzem a atividade matemática (problemas, aplicações, exercícios).
3. **Ações do sujeito** diante das tarefas matemáticas: operações, algoritmos, técnicas de cálculo e procedimentos.
4. **Conceitos**: dados mediante definições ou descrições.
5. **Propriedades ou atributos dos objetos**: que geralmente ocorrem por meio de enunciados e/ou proposições.

6. **Argumentação:** que podem realizar-se de modo heurístico, usando a intuição, chamadas de justificação ou validação; e as de modo formal, chamadas de deduções ou demonstrações.

A análise ontosemiótica⁴⁴, realizada pelos autores num livro de Cálculo usado nas principais universidades espanholas, apontou:

- é preciso cuidado quando da comparação do cálculo da área de uma figura plana com a área de uma região em que não há uma fórmula específica, especialmente quando calculada por meio de fórmulas estudadas no Ensino Médio, pois os alunos podem não compreender o processo;

- só podemos ter acesso aos objetos matemáticos por meio das suas representações, porém, isso pode confundir o aluno, fazendo-o pensar que o objeto matemático é a própria representação.

Este último item merece destaque, uma vez que, quando professores, e mesmo alunos, se referem à “área exata” da figura dada pela Integral Definida, estão utilizando, na Língua Natural, a identificação entre a representação e o objeto. Não existe área exata, ela é definida mediante o processo de limite.

2.3 A Integral Definida em Livros-Textos de Cálculo: uma análise

Nesta seção são discutidas as metodologias adotadas para a explanação do conteúdo Integral Definida em alguns livros-textos, constantes dos planos de ensino da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I para o curso de Matemática, de diversas IES, tais como USP, UFSC, UnB, Unespar-Fecilcam, UTFPR. Mesmo não sendo objetivo desta tese a análise aprofundada dos livros-textos mais usuais nos cursos de Matemática, considera-se que estes têm forte influência na ação docente. Por isso, importa conhecer, mesmo que superficialmente, o enfoque dado ao conceito de Integral Definida pelos livros adotados, até mesmo para embasar a sequência didática a ser elaborada.

Com essa intenção, foram selecionados os seguintes livros-textos, todos constantes dos planos de ensino de Cálculo 1 das Instituições de Ensino supracitadas:

⁴⁴é uma análise que envolve as relações dialéticas entre o pensamento matemático, o sistema de signos utilizado e as situações-problemas usadas na interação didática, isto é, busca abranger questões de ordem epistemológicas, cognitivas e ontológicas (GODINO, 2012).

1. LEITHOLD, Louis. O Cálculo com geometria analítica. 3ª Ed. Vol.1. Tradução de Cyro de Carvalho Patarra. São Paulo: Harbra, 1994.
2. ÁVILA, Geraldo. Cálculo das funções de uma variável. 7ª Ed. V.1.. Rio de Janeiro: LTC, 2003.
3. ANTON, Howard. Cálculo: um novo horizonte. 6ª Ed. V.1. Porto Alegre: Bookman, 2000.
4. TAN, S.T. Matemática aplicada à Administração e Economia. Tradução Edson de Faria. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2001.
5. STEWART, James. Cálculo. V.1. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2002.
6. HUGHES-HALLETT, D.; GLEASON, A. M. ; McCALLUM, W.G. et al. Cálculo de uma variável. 3ª Ed. Tradução Rafael José Iorio Junior. Rio de Janeiro: LTC Livros Técnicos e Científicos Editora, 2004.

A descrição do desenvolvimento do tema pelos respectivos livros-textos pode ser lida no apêndice A. Aqui, faremos uma breve análise do que foi observado.

O levantamento bibliográfico mostra que as pesquisas relacionadas ao ensino de Cálculo retratam algumas dificuldades por parte dos alunos, dentre elas a falta de compreensão dos conceitos básicos necessários.

Por outro lado, são apontadas alternativas para uma aprendizagem mais eficaz, dentre as quais estão: a utilização de recursos tecnológicos, como os *softwares* computacionais e as calculadoras gráficas; os trabalhos em grupo; o uso da intuição do aluno; a interdisciplinaridade e a diversidade de registros de representação dos conteúdos tratados.

Os livros analisados atendem parcialmente a recomendação das pesquisas mencionadas, alguns em maior, outros em menor grau. Cabe lembrar que apenas a seção Integral Definida está sendo discutida.

Ao analisar os aspectos citados por Contreras e Ordoñez (2006), podemos dizer que os referidos livros-textos mais recentes têm inserido mais fortemente o discurso na língua natural em sua linguagem, o que pode significar maior atenção a esse tipo de registro, muitas vezes ignorado no ensino, mas que pode contribuir com a aprendizagem matemática, como foi apontado na revisão de literatura.

O ordenamento e a concatenação das ideias, especialmente dos últimos quatro livros (ANTON, TAN, STEWART, HUGLES-HALLET), facilitam o entendimento do conceito de integral definida, por inserirem com mais frequência o discurso em língua

natural e a intuição do estudante. Mas ainda é possível levantar alguns questionamentos: os alunos compreendem as notações apresentadas ou apenas as copiam? Será que os estudantes conseguiriam usar estas notações em outros contextos?; Se o aluno tivesse um papel mais ativo nessa escrita algébrica, ele compreenderia melhor as notações e conceitos?

O livro de Leithold, por exemplo, prioriza o registro simbólico-algébrico, o que é de difícil compreensão, já que os conceitos e propriedades são apresentados formalmente, sem discussões. Da mesma forma, os exercícios são meramente reproduções dos exemplos, teoremas e demonstrações. Obviamente, isto não é um questionamento acerca da qualidade⁴⁵ do seu texto, apenas uma constatação de que este material poderia se tornar mais acessível a todos os alunos graduandos, se apresentasse seu conteúdo de forma mais interativa com o estudante.

Já o livro de Ávila utiliza-se mais da Língua Natural, ou seja, tenta aproximar-se da linguagem usada no cotidiano das pessoas, do que o de Leithold, mas ainda com uma apresentação muito formal. Traz algumas inovações em relação aos exercícios propostos aos alunos, que exigem, em alguns casos, algumas conjecturas. Contudo, apresenta exercícios teóricos, com demonstrações. Os conceitos e propriedades do conteúdo são apresentados numa tentativa de convencer o estudante acerca do que ele deve compreender, ainda que prevaleça a linguagem demonstrativa.

Anton busca escrever o texto matemático com o uso da Língua Natural como eixo norteador, isto é, os conceitos e propriedades relativos ao tema são descritos de forma a culminar na sua definição, que são enunciadas, sem demonstrações, mas são ilustrados com gráficos e exemplos numéricos. Os exercícios são escritos em forma de situação-problema e direcionados para a compreensão dos conceitos e a conversão de representações é requerida, assim como a resolução em ambiente computacional.

A Língua Natural também é explorada no livro de Tan, que ilustra os conceitos e propriedades enunciados com gráficos e exemplos numéricos, especialmente relativos à área da Administração e Economia, áreas às quais se destina. Seu diferencial é a proposta de atividades em grupo, nas quais novos desafios são apresentados, alguns deles teóricos, para serem discutidos coletivamente. Além disso, há o incentivo ao uso de calculadoras gráficas, o que permite, ao aluno, explorar mais variações para um

⁴⁵ Entendido como “Grau de perfeição, de precisão, de conformidade a um certo padrão” (<http://michaelis.uol.com.br/moderno/portugues/index.php?lingua=portugues-portugues&palavra=qualidade>)

mesmo caso. Os conceitos são enunciados depois de uma descrição de uma situação, isto é, o estudante é levado a compreender o conceito em questão.

Stewart tem uma abordagem mais computacional, isto é, insere mais fortemente recursos como calculadoras gráficas na sua apresentação, mas é guiado pela Língua Natural, o que significa que a linguagem usada em seu discurso é mais próxima da linguagem usual. Análises gráfica e interpretativa são requeridas nos exercícios, apresentados sob a forma de situações-problema. Resoluções em ambiente computacional também são requeridas em vários momentos. Há diversidade de apresentação dos registros de representação semiótica como tabelas, gráficos, língua natural, demonstrações.

Quanto aos diferentes registros, notou-se uma exploração maior desse fator em Hughes-Hallett, que apresenta todo o conteúdo com tentativas de explorar as representações verbal, numérica, gráfica e algébrica. Há atividades para serem resolvidas em ambiente computacional. Os conceitos são apresentados em meio à exploração de situações, o que faz com o que este se torne mais natural de ser aceito. A parte formal do conteúdo (as demonstrações) é apresentada numa seção ao final do capítulo. Cabe informar que no prefácio do livro de Hughes-Hallett, ao apresentar seus princípios norteadores, os autores afirmam:

(...) achamos que representações múltiplas encorajam os estudantes à reflexão sobre o significado do material. Em conseqüência, fomos guiados pelos seguintes princípios: Nossos problemas são variados. (...) A maior parte exige que os estudantes entendam os conceitos e não podem ser feitos segundo um modelo no texto. A regra de quatro: onde seja apropriado, os tópicos devem ser apresentados sob as formas geométrica, numérica, analítica e verbal.

Cabe destacar, ainda, que a diferença entre os livros mencionados e outros como Courant (1965) e Piskunov (1983), quanto ao tratamento dado à integral definida, está especialmente na abordagem do tema por meio da Língua Natural. Esta se encontra mais presente em autores das últimas duas décadas, como Hughes-Hallett, Stewart, Anton e Tan. O livro de Leithold ainda se aproxima muito da abordagem de Piskunov (1983), ou seja, extremamente formal e pouco atraente.

Esta análise dos livros-textos não pretende minimizar a importância dos teoremas e demonstrações matemáticas, apenas enfatizar que o tratamento matemático dos conceitos deve vir acompanhado pela sua compreensão. Nesse sentido, a literatura pesquisada aponta as contribuições de maior exploração dos recursos computacionais, da Língua Natural, do trabalho em grupo e da intuição discente para a aprendizagem do

Cálculo. Estes fatores devem estar presentes no material que o professor pretende usar como referência para suas aulas.

Critério/livro	Leithold	Ávila	Anton	Tan	Stewart	Hughes-Hallett
Linguagem (natural, simbólica, gráfica, numérica)	Matemática (formal).	Matemática (com tendência ao uso da língua natural).	Associa a língua natural à escrita simbólica (com ilustrações e exemplos numéricos).	Língua natural (com exemplos numéricos e gráficos).	Língua natural (com exemplos numéricos e gráficos).	Língua Natural associando as representações verbal, numérica, gráfica e algébrica.
Situações (tarefas que induzem a atividade matemática)	Exercícios teóricos (com demonstrações)	Exercícios teóricos (alguns são demonstrações), com casos para serem conjecturados.	Situações-problema e exercícios para ambiente computacional.	Situações-problema e exercícios para ambiente computacional. Atividades em grupo.	Situações-problema e exercícios para ambiente computacional, análise gráfica e interpretativa.	Situações-problema em que os dados ora estão tabelados, ora descritos, ora em gráficos.
Ações do sujeito	Cálculo de integrais dadas e demonstrações.	Cálculos e interpretações geométricas de integrais dadas, e demonstrações.	Resolução de problemas e cálculo de áreas.	Resolução de problemas, cálculo de áreas e discussão em grupo.	Resolução algébrica e computacional de problemas, interpretação de enunciados, gráficos e tabelas.	Resolução algébrica e computacional de problemas, interpretação de enunciados, gráficos e tabelas.
Conceitos	São definições.	São definições.	São descrições que culminam na definição.	São descrições que culminam na definição.	São enunciados e exemplificados.	São apresentados em meio a exploração de situações.
Propriedades (enunciadas ou proposições)	São proposições e teoremas.	São enunciadas.	São enunciadas.	São enunciadas.	São enunciadas.	São apresentados em meio aos comentários e formalizadas ao final do capítulo.
Argumentação (Heurística ou demonstrativa)	Demonstrativa.	Heurística/ demonstrativa.	Heurística.	Heurística.	Heurística.	Heurística.

Quadro 7: Comparativo entre os livros-textos descritos, para as entidades primárias de Contreras e Ordóñez (2006)

Barufi (1999) analisou livros didáticos de Cálculo I (e alguns de Análise) para perceber como se dá a negociação de significados para a construção do conhecimento desejável por parte do aluno. Ao que parece, os resultados dessa pesquisa também apontaram no sentido de um distanciamento entre a apresentação dos livros didáticos e o que indicam as pesquisas acadêmicas para um ensino de Cálculo mais eficaz.

A referida autora analisou vinte e quatro livros didáticos⁴⁶ usados ou recomendados por professores da Universidade de São Paulo, em cursos de Cálculo I, à luz do referencial teórico da rede de conhecimentos e significados. Os critérios utilizados foram: Ideia, Problematização, Linguagem, Visualização, Argumentação, Formalização.

Na pesquisa de Barufi (1999), para cada um dos critérios analisou-se alguns quesitos 1) Ideias: presença das idéias fundamentais que, historicamente, propiciaram o desenvolvimento do Cálculo; 2) Problematização: existência de problemas motivadores para chegar à construção do conceito; 3) Linguagem: além da linguagem matemática se há texto em linguagem corrente (língua natural) por meio do qual o autor busca o convencimento do leitor; 4) Visualização: riqueza de figuras para embasar cálculos algébricos; 5) Argumentação: exploração de aproximações, sem caráter definitivo logo na primeira exposição, e uso da intuição; 6) Formalização/generalização: a naturalidade com que as formalizações são obtidas.

Em relação aos critérios considerados, Barufi (1999) concluiu que:

- ✓ Ideias: “29% deles (livros didáticos analisados) explicitam fortemente as idéias do Cálculo, importantes historicamente ou por sua atualidade” (p.128). Isto significa que em 71% dos livros analisados há pouca ou nenhuma preocupação com as idéias que levaram ao desenvolvimento do Cálculo.
- ✓ Problematização: Em apenas “38% dos livros analisados foram observados problemas importantes para motivar a introdução de conceitos” (p.129).
- ✓ Linguagem: Em “66% dos livros analisados o autor busca o convencimento do leitor, discute dificuldades e mostra possíveis caminhos por meio de texto em linguagem corrente” (p.130). 17% dos livros não usam a linguagem corrente e outros 17% a usam apenas como texto informativo.

⁴⁶Os autores dos livros didáticos analisados são: H.M.Alexander; T.M. Apostol (análise e Cálculo I); G. Avila; K.G. Bartkovich; P.Boulos (v.1 ,2); M. Bruckheimer et al (v.1,2); R.C.Buck; R. Courant; F. John e R. Courant; H.P. Greenspan e D.J. Benney; H.L.Guidorizzi; W. Kaplan; W. Kaplan e D.J. Lewis; S. Lang; L. Leithold; E.E. Moise; N. Piskunov; W. Rudin; G.F.Simmons; M. Spivak; E.W. Swokowski; A.J.White; A.B.Willcox

- ✓ Visualização: Em 54% dos livros analisados foi observado o uso de imagens (figuras ou gráficos) para extrair conclusões, enquanto que em 33%, as figuras foram usadas apenas para verificar aquilo que foi estabelecido, e outros 17% não apresenta (ou apresenta muito pouco) figuras.
- ✓ Argumentação: “33% dos livros busca a construção do conhecimento por aproximações, sem imprimir um caráter definitivo, logo da primeira vez” (p.132). Em contrapartida, “42% dos textos utilizam recursos provenientes da lógica interna, caracterizando a dedução e evitando ao máximo a intuição” (p.132). Nos demais 25%, “a argumentação não é apenas internalista, mas é estabelecido um caráter definitivo”.
- ✓ Formalização: “Apenas 21% dos autores apresenta o Cálculo em construção” (p.133). Em 54% dos textos foi observado que ainda permanece a noção de transmissão de conhecimento.

Pelos resultados obtidos por Barufi (1999), é possível deduzir que nem sempre os livros didáticos usados como apoio, pelos professores, apresentam o texto de forma a contemplar as sugestões das pesquisas acadêmicas para uma adequada compreensão do aluno.

Em particular, em relação ao conteúdo Integral Definida, é importante conhecer a maneira como ele é apresentado nos livros-textos para que o professor possa escolher a metodologia de ensino mais adequada ao seu contexto. Machado (1996) discute alguns pontos em relação ao livro didático e argumenta que, em muitos casos, é ele que indica o caminho que o professor deve seguir. O autor afirma ainda que, muitas vezes:

O professor abdica do privilégio de projetar os caminhos a serem trilhados, em consonância com as circunstâncias — experiências, interesses, perspectivas — de seus alunos, passando a conformar-se, mais ou menos acriticamente, com o encadeamento de temas propostos pelo autor. Tal encadeamento ora tem características idiossincráticas, ora resulta da cristalização de certos percursos, que de tanto serem repetidos, adquirem certa aparência de necessidade lógica; nos dois casos, a passividade do professor torna um pouco mais difícil a já complexa tarefa da construção da autonomia intelectual dos alunos (MACHADO, 1996, p.31).

Nesse sentido, é essencial que os livros-textos usados nas aulas de CDI correspondam ao que se indicam nas pesquisas acadêmicas, em relação: aos obstáculos epistemológicos, didáticos ou ontogenéticos envolvidos em cada conteúdo; à variedade de registros semióticos a serem usados e à própria metodologia, inserindo atividades em que os estudantes sejam levados a explorar e a usar seus conhecimentos em busca de

um novo saber. Por exemplo, nos livros descritos, há a **definição** da área como o limite da soma. Orton (1983 *apud* Contreras e Ordoñez, 2006) considera que a integração, enquanto soma, constitui um obstáculo epistemológico para a noção. Schneider (1988 *apud* Contreras e Ordoñez, 2006) também considera que seja obstáculo para a compreensão da noção da Integral que a área seja calculada por meio de uma soma infinita de áreas de retângulos. Estas pesquisas nos indicam que, ao definir a área como uma soma, provavelmente o aluno aceitará a definição, mas não a compreenderá. Elas, ainda, nos induzem a pensar que este conceito deve ser mais bem estruturado para permitir a compreensão do aluno. É preciso resgatar que o **conceito** de área se forma a partir de experimentações, especialmente nos casos não contemplados pela geometria euclidiana. E é nesse sentido que buscamos tratar esse obstáculo nesta tese: fornecendo atividades em que a área seja calculada por meio da soma de infinitas áreas de retângulos, de modo que o aluno compreenda o processo de cálculo dessa área e relacione-o aos registros algébricos.

Nesta pesquisa, procura-se fornecer atividades para que o aluno perceba que a área sob uma curva é escrita como limite de uma soma, o que geralmente é apresentado na disciplina CDI mediante uma definição. Considerar-se-á que os estudantes possuam noção sobre a relação entre área e figuras poligonais e entre área e algumas figuras geométricas como círculos, elipses etc. A partir de então, construir-se-á a relação entre área e figuras, como a figura de um lago. Tais atividades estão apresentadas nas seções 4 a 8.

Seção 3 – Aspectos Gerais da Sequência Didática Proposta e Sua Aplicação

3.1 Aspectos Gerais da Sequência Didática proposta

A literatura pesquisada propõe o uso de recursos computacionais e de diversas representações para o entendimento dos conceitos do CDI. Aqui, buscou-se aliar, por meio de situações didáticas, a utilização destes fatores aos conceitos os quais, em nosso ponto de vista, são contemplados pelo campo conceitual da Integral Definida e que interferem, diretamente, na sua compreensão. Além disso, procurou-se fazer uso das atividades de tratamento e conversão de registros de que trata a teoria de Registro de Representações Semióticas. Em síntese, na sequência didática buscamos planejar atividades em que os alunos tivessem um papel ativo de investigação, que exigiam o tratamento e, principalmente, a conversão entre diversos registros, incluindo a língua natural, e o recurso computacional era usado como suporte à exploração. Além disso, era preciso refletir sobre a ação para representar os conceitos-chave e suas ligações nos mapas conceituais. Acreditamos que este enfoque seja diferente do apresentado nos livros-textos já descritos e que atende as recomendações da pesquisa bibliográfica.

Nossa intenção é que a sequência didática ofereça a possibilidade de experimentação, observação, análise e compreensão dos conceitos por parte do aluno. Cremos que tais atividades podem ajudar o aluno a se tornar o elemento principal do processo de aprendizagem, levando-o a agir de forma autônoma. Para tanto, convencionou-se que o professor-pesquisador deveria atuar apenas no acompanhamento e observação, e interferir apenas quando extremamente necessário para o desenvolvimento das atividades, sem que isso comprometesse o processo de devolução, conforme indica a TSD para situações didáticas.

Cada uma das questões propostas na referida sequência é classificada segundo a tipologia das situações didáticas em relação à situação de ação, formulação, validação e institucionalização, tendo por base, a exposição da seção 1.

As atividades foram organizadas em partes, denominadas A, B, C, D e E, cada uma com um objetivo específico, segundo um critério *a priori* do que seria uma ordem lógica para que o objetivo fosse atingido. Tal ordem foi estabelecida pelas dificuldades detectadas durante os anos de magistério superior no trabalho em sala de aula da

disciplina CDI, e seguindo a linha de pensamento de Duval⁴⁷ (2010, p.7) para o qual “A organização de um programa de ensino em um ciclo se faz pela ordem inversa do processo de decomposição regressiva”.

Decomposição ou análise regressiva, para Duval, é a decomposição de um conhecimento em conhecimentos que são pré-requisitos elementares (conteúdos ou procedimentos mínimos para adquirir o conhecimento almejado) (DUVAL, 2010). Por exemplo, para o conceito de integral definida, alguns pré-requisitos elementares são a noção de limite, a convergência de sequências e séries, e a notação sigma. Estes assuntos são determinados a partir da análise dos componentes do conceito chave.

As seções 4 a 8 apresentam as análises *a priori* e *a posteriori* das atividades propostas para a compreensão da conceitualização de integral definida, segundo Riemann, para funções de uma variável real.

Inicialmente, foi planejado um trabalho com a convergência de sequências numéricas. Procurou-se, nessa fase, fornecer situações que possibilitassem ao aluno transitar entre diferentes sistemas semióticos (DUVAL, 2011), representações gráficas, numéricas e escritas simbólicas, com o intento de fornecer elementos importantes para a compreensão do conceito de integral definida. Tais atividades devem proporcionar o entendimento do conceito de limite e sua representação para aproximações, cujas dificuldades de compreensão já foram citadas por Melo (2002) e Amadei (2005). As análises *a priori* e *a posteriori* da parte A são apresentadas na seção 4.

A construção do conceito de Integral Definida, aliado à compreensão do sistema semiótico da notação algébrica, é tratada também na segunda parte, na qual o objetivo foi reconhecer as necessidades e utilidades das notações (signos) usadas neste contexto. As análises *a priori* e *a posteriori* da parte B são apresentadas na seção 5.

Na terceira parte, denominada de C, são trabalhados conceitos considerados fundamentais para o entendimento das integrais definidas, quais sejam: infinito potencial⁴⁸; infinitésimo⁴⁹; soma finita⁵⁰; soma infinita⁵¹ e proximidade numérica⁵².

⁴⁷No original: “L’organisation d’une progression de l’enseignement sur un cycle se fait alors selon l’ordre inverse du processus de décomposition régressive”

⁴⁸ Infinito potencial “É aquele que não se pode realmente atingir – um ideal, um lugar muito distante ou um número que não se materializa de fato” (AMADEI, 2005, p.32). O infinito potencial está associado à divisibilidade ao infinito. Um exemplo é o cálculo de uma área por meio da soma de infinitas áreas de retângulos, por mais que se aumente infinitamente a quantidade de retângulos, essa quantidade continua sendo um número finito. Esse infinito é o infinito potencial.

⁴⁹ Infinitésimo: uma quantidade infinitamente pequena. Em Amadei (2005, p.68) afirma-se que o infinitamente pequeno “é admitido apenas como infinito potencial e somente para avaliar a razão de dois infinitamente pequenos”.

Além destes, é extremamente necessário que o estudante compreenda a significação dos signos utilizados na Análise Matemática para o tratamento do “infinito atingido” e do “limite atingido”. Tais signos estão relacionados a significados estabelecidos no século XIX e são geralmente apresentados aos estudantes nas primeiras semanas do curso de Cálculo, sem o fornecimento de situações para que trabalhem com diferentes sistemas semióticos e com situações numéricas. As análises *a priori* e *a posteriori* da parte C são apresentadas na seção 6.

Nas partes D e E, as atividades procuram levar o estudante a associar a Integral Definida com o cálculo de uma área, que é obtida por meio do limite de uma soma de pequenas áreas. As análises *a priori* e *a posteriori* das partes D e E são apresentadas nas seções 7 e 8, respectivamente.

Nosso intuito é que a sequência didática elaborada possa contribuir para sanar as dificuldades de associação do conceito de limite ao de integral, citadas por Melo (2002), de compreensão de um processo infinito, que gera um número finito, citado por Contreras e Ordoñez (2006) e de compreensão da definição do conceito de Integral Definida, citada por Mometti (2007). Além disso, pretende-se explorar os conceitos matemáticos em Língua Natural, cujos benefícios já foram apresentados por Mariani (2006) e Dall’anese (2006). Para tanto, foram utilizados recursos computacionais, como apontam as pesquisas de Camacho e Depool (2003), Scucuglia (2007), Campuzano e Figueroa (2011), Richit *et al* (2011) e Barroso *et al* (2008).

Em cada uma das etapas da sequência didática, planejou-se que o aluno elaborasse e/ou complementasse um Mapa Conceitual, com os conceitos-chave percebidos em cada parte, a fim de acompanhar a evolução da construção do conceito de integral definida e possíveis dificuldades que podem se tornar obstáculos didáticos ou ontogenéticos para essa compreensão.

As seções de 4 a 8 apresentam as análises *a priori* e *a posteriori* de cada questão ou grupo de questões, com o intuito de facilitar a compreensão e análise do que fora esperado e alcançado em cada caso. O leitor interessado em conhecer toda a lista de tarefas de cada uma das partes, para avaliar o conjunto de problemas propostos, poderá obtê-las nos apêndices B, C, D, E e F, respectivamente, lista de tarefas das partes A, B, C, D e E.

⁵⁰ Soma finita: soma de infinitos valores que se aproximam de um determinado valor, um valor finito.

⁵¹ Soma infinita: soma de infinitos valores que não se aproximam de um determinado valor.

⁵² Quando a diferença entre um valor e outro número dado é infinitamente pequena.

3.2 A Aplicação da sequência didática

3.2.1 O planejado

O planejamento inicial era elaborar um minicurso com cerca de 20 horas, de 2 horas por semana durante o primeiro semestre de 2012, a fim de apresentar aos alunos atividades referentes ao conceito da integral definida. Desta forma, haveria tempo para que fossem analisadas as dificuldades apresentadas pelos alunos e para possíveis reformulações das atividades de modo a trabalhá-las.

O público alvo pretendido constituía-se de alunos de 1º período dos cursos de graduação do Câmpus Campo Mourão da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR-CM), preferencialmente reprovados, a fim de melhor avaliar a sequência didática proposta e perceber o papel da elaboração dos Mapas Conceituais na construção do conceito em tela. Acreditava-se que estes alunos, por já terem cursado a disciplina, terem experimentado as aulas expositivas, realizado provas e sem obterem aprovação, poderiam nos fornecer dados mais significativos em relação à sua aprendizagem.

Pretendia-se trabalhar com um número de alunos entre 10 (dez) a 15 (quinze) para facilitar a análise e confronto dos Mapas Conceituais confeccionados individualmente pelos discentes.

3.2.2 O executado

Devido a uma greve nas Universidades Federais, iniciada em maio de 2012⁵³, alguns alunos, por terem sido encontrados mais facilmente, foram convidados a fazer o minicurso, que ocorreu de forma **presencial**, no período de **06 a 15 de agosto de 2012**, na UTFPR de Campo Mourão, **das 19 às 23 horas**⁵⁴. Participaram, ao todo, 13 alunos de 1º a 3º períodos, sendo 4 alunos do curso de engenharia ambiental, 1 aluno do curso de Engenharia de Produção, 1 aluno de Engenharia Civil e 7 alunos do curso de Licenciatura em Química. Destes, apenas três alunos haviam sido aprovados em Cálculo

⁵³A título de informação, na UTFPR-CM as aulas retornaram em 24 de setembro de 2012.

⁵⁴ Consideramos a concentração da carga horária do curso, um empecilho que atrapalhou o desenvolvimento dos Mapas Conceituais dos alunos, pois se sentiam pressionados a acompanhar os demais colegas, deixando de lado a elaboração dos Mapas para realizar as atividades. Além disso, não houve tempo suficiente para o aluno refletir sobre as atividades realizadas e descrever os conceitos trabalhados em forma de Mapa Conceitual.

I e estavam cursando o Cálculo II, e um deles havia sido reprovado e não estava cursando a disciplina nesse semestre. Os demais estavam cursando pela 2ª ou 3ª vez. Com exceção da aluna Denise, que era de outra universidade, todos os participantes eram alunos da UTFPR-CM. No Quadro 8 estão caracterizados os participantes voluntários da pesquisa.

Nome Fictício	Período na matrícula	Curso	Situação em Cálculo I	Mapas Elaborados*	Observação
Alvaro	2º semestre	Eng Civil	Cursando pela 2ª vez	3 (A1,A2,C,E)	Concluiu
Bia	1º semestre	Licenciatura em Química	Cursando pela 1ª vez	1 (A)	Frequentou todos os dias, mas não conseguiu resolver todas as atividades
Bruno	2º semestre	Eng Ambiental	Cursando pela 2ª vez	2 (A1,A2,E)	Concluiu
Camila	2º semestre	Eng Ambiental	Cursando pela 3ª vez	2 (A1,A2,E)	Não fez a última parte do minicurso
Caroline	2 semestre	Lic Química	Aprovada, cursando Cálculo 2	2 (A,C)	Concluiu, mas não fez os mapas
Claison	2º semestre	Eng Ambiental	Reprovado, não está cursando	3 (A,E)	Concluiu
Daia	2 semestre	Lic Química	Aprovada, cursando Cálculo 2	1 (A,C)	Concluiu, mas não fez os mapas
Débora	3º semestre	Lic Química	Cursando pela 2ª vez	2 (A,E)	Concluiu
Denise	2º ano	Engenharia de Produção (UNESPAR)	Cursando pela 2ª vez	0	Não concluiu o curso
Desiéé	2 semestre	Lic Química	Aprovada, cursando Cálculo 2	0	Não concluiu
Fernanda	2 semestre	Lic Química	Reprovada, mas fazendo Cálculo 2	0	Não concluiu
Gabriel	3º semestre	Lic Química	Cursando pela 2ª vez	0	Não terminou a parte A
Marcos	2º semestre	Eng Ambiental	Reprovado, não está cursando	3 (A1,A2,C,E)	Concluiu

Quadro 8: Participantes da Pesquisa

*As letras referem a parte da qual o MC foi elaborado. A1 significa MC da parte A, antes da discussão coletiva, A2 significa MC da parte A, depois da discussão coletiva. A letra A significa que o aluno entregou apenas um mapa, que pode ter sido elaborado antes ou depois da discussão.

Quando questionados sobre o motivo pelo qual aceitaram o convite para fazer o minicurso, alguns poucos alunos afirmaram ter sido apenas por curiosidade, já que era para ser algo diferente das usuais aulas de Cálculo, outros disseram que esta era uma oportunidade de aproveitar um período sem aulas para aprender um pouco mais de Cálculo, pois essa “matéria” é muito difícil.

Em relação às principais dificuldades que eles sentiram quando estudaram Cálculo 1, quatro dos treze participantes indicaram explicitamente a matemática básica como obstáculo, outros três o fizeram indiretamente, quando afirmaram que a dificuldade estava em saber o que fazer quando tinha uma equação para resolver, ou algum termo para multiplicar. Nove dos treze alunos citaram a compreensão dos conceitos como principal dificuldade, sendo que, destes, cinco mencionaram os conceitos de integral e derivada como sendo mais difíceis e um deles ainda acrescentou o conceito de limite.

Todos os cursistas afirmaram ser o estudo em grupo a melhor maneira de aprender os conceitos do Cálculo (esta é a estratégia usada por eles fora da sala de aula), sendo que para oito deles, além desse estudo coletivo, deve existir o estudo individual.

No minicurso, inicialmente, foi explicado do que se tratava a pesquisa e seus objetivos, o que eram os Mapas Conceituais, inclusive com a confecção de um mapa conceitual em conjunto, no quadro negro, pois a maioria dos cursistas não conhecia. Após, foi apresentada a ferramenta *Cmap Tools* a ser usada para a confecção dos mapas, desde como começar um mapa, incluir as frases de ligação, até a formatação dos retângulos para os conceitos e das linhas de conexão entre conceitos, e como inserir signos matemáticos.

Devido à inexperiência dos alunos com os mapas conceituais, as produções deles não atendem, necessariamente, ao proposto por Novak (2006). Entretanto, optamos por analisá-las mesmo assim, considerando-as como mapas conceituais, por considerarmos que os diagramas elaborados continham informações relevantes sobre a aprendizagem em construção com a sequência didática.

Em contato por email na semana anterior ao minicurso, os alunos foram convidados a fazerem *download* dos *softwares* Geogebra e wxMaxima, que seriam usados como ferramentas computacionais de apoio ao desenvolvimento das tarefas, e explorá-los. No primeiro dia do curso, quando questionados sobre o manuseio dos aplicativos, a maior parte dos alunos afirmou ter conseguido trabalhar com o Geogebra, mas não com o wxMaxima. Dessa forma, a pesquisadora optou por iniciar a resolução das tarefas, que requeria apenas o Geogebra, e explicar mais detalhadamente o uso do wxMaxima nas atividades que necessitassem desse aplicativo. Esta atitude foi motivada pela ansiedade mostrada pelos alunos em saber o que eles teriam que fazer, já que não haveria uma aula de Cálculo como eles estavam acostumados.

Nas tarefas que requeriam o wxMaxima, a pesquisadora explicou para cada aluno e/ou equipe como usá-lo. Antes, porém, os alunos foram incitados a usarem os comandos e fazerem sozinhos, acompanhados pela pesquisadora. A dificuldade maior estava em seguir todos os comandos dados no enunciado da tarefa, isso porque, geralmente, os alunos ignoravam a prioridade das operações aritméticas, assim como os parênteses; também, algumas vezes, não liam o enunciado com atenção.

Apesar dessa dificuldade com o wxMaxima, esse aplicativo contribuiu para que os alunos pudessem enxergar os registros algébricos fornecidos pelo software de acordo com a informação das operações que deveriam ser efetuadas, que foi repassada pelo estudante.

Após a explanação do Cmap Tools e questionamentos dos *softwares*, por opção deles, agruparam-se em duplas e um trio. A cada participante foi entregue um pacote com todas as atividades, sendo uma ou duas em cada folha, dependendo da complexidade da solução. Cada pacote foi denominado pelos alunos com um pseudônimo (**nome fictício**), que é usado para identificá-los neste trabalho, nas seções de 4 a 8, que tratam das análises *a priori* e *a posteriori*. Seus pseudônimos estão apresentados no Quadro 8. Foi solicitado que terminassem completamente uma tarefa, inclusive a redação das suas conclusões, antes de lerem ou começarem a outra. Ao final de cada dia de curso os alunos devolviam seus pacotes com as tarefas realizadas no período, para possibilitar a análise das resoluções e garantir que cada aluno tivesse o seu material no dia seguinte.

É importante comentar que os alunos foram orientados a montar os Mapas Conceituais, buscando atender aos pressupostos apresentados, mas sem ater-se exclusivamente nisso, a partir da relação percebida entre os conceitos trabalhados em cada seção, ou seja, em cada uma das partes A, B, C, D, E. Isto significa que se os alunos não percebiam que tinham que realizar acréscimos nos Mapas, eles não eram induzidos a fazê-los. Esta postura foi tomada considerando que, nem sempre os professores têm, em sala de aula, como acompanhar individualmente os alunos, especialmente no primeiro período de graduação, cujas turmas comportam em torno de 50 alunos ou mais. Desta maneira, a pesquisa poderia indicar, também, que assuntos poderiam ou deveriam ser retomados mediante análise dos Mapas Conceituais elaborados. Além disso, poderia ser avaliada a eficácia da própria sequência didática.

Informalmente, alguns alunos comentaram preferir terminar a resolução da Sequência de Atividades para verificar como os diversos assuntos estariam associados

ao final, para só então, elaborar o seu Mapa, já que haveria apenas uma semana para realizar a atividade.

Cabe, ainda, destacar que as dúvidas surgidas durante a resolução das atividades foram sanadas pela pesquisadora logo após a produção das respostas pelos alunos, as quais foram usadas na análise dos resultados.

No primeiro dia, 06 de agosto, a maioria dos alunos, respondeu as quatro primeiras questões da parte A, sendo que dois responderam até a quinta questão, e dois até a terceira. Durante todo o período, os alunos mostraram-se interessados na solução das questões, discutindo entre si cada dúvida surgida. Precisaram muito da ajuda da professora para executar os comandos do Geogebra, principalmente devido a incompreensões da simbologia matemática, como o uso de parênteses nas fórmulas, comandos para as operações básicas, a compreensão do comando. Ao final, quando foram dispensados, alguns alunos exclamaram que não haviam percebido o tempo passar. Segundo a declaração da aluna Bia: “estava gostoso fazer, porque mesmo que você não soubesse como resolver uma questão, o colega ajudava, e isso te estimulava a tentar fazer o próximo sozinha”.

As representações gráficas em \mathbb{R} e em \mathbb{R}^2 , aliadas à representação numérica, possibilitou a correspondência entre a convergência de uma sequência e a noção de limite de uma função.

No segundo dia, 07 de agosto, os alunos continuaram a resolução do ponto em que pararam. Alguns deles, antes de reiniciar o minicurso, comentaram que as atividades do dia anterior haviam facilitado a percepção de algumas noções de limites que não tinham sido efetivamente compreendidas, e sugeriram o seu uso nas aulas regulares para mostrar a teoria explicada pelo professor. Neste dia, sete alunos conseguiram chegar à questão 10, três conseguiram até a 8, e três alunos faltaram. Uma das dificuldades foi novamente usar os comandos do Geogebra, porém, todos já sabiam qual era a variável dos exercícios, o que não ocorreu no dia anterior. Contudo, o momento mais difícil foi o de institucionalização, proporcionado pela questão 7. Os alunos não perceberam a relação entre o enunciado da referida questão e os enunciados anteriores. Foi necessária a intervenção da pesquisadora para o esclarecimento das “letras” que apareciam nele. Mesmo assim, muitos alunos permaneceram, grande parte do tempo, analisando as possibilidades. Notamos que seria mais interessante a disponibilidade de mais exercícios semelhantes para a efetiva construção da noção matemática de convergência.

No terceiro dia, quatro alunos conseguiram chegar até a tarefa 4 da parte B, três conseguiram terminar a parte A, e outros quatro chegaram apenas até a tarefa 13, porém, haviam começado na tarefa número 10. Com relação a esses últimos, a principal dificuldade manifestada por eles foi na compreensão do significado da expressão $f(n) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.

No 4º dia, 09 de agosto, os alunos conseguiram terminar a parte B e iniciar a parte C. A dificuldade maior foi na obtenção das fórmulas que descrevem os termos gerais das sequências analisadas.

No dia 10 de agosto, apenas foram concluídas as atividades da parte C, com a confecção do mapa conceitual. Os alunos demonstraram cansaço e pouco ânimo para fazer exercícios repetitivos.

No dia 13 de agosto, 6º dia de aplicação das atividades, os alunos fizeram a parte D, mas ainda com dificuldades na escrita simbólica.

Nos dias 14 e 15 de agosto foi trabalhada a parte E, incluindo a elaboração do Mapa Conceitual.

Nestes últimos dias, de 13 a 15 de agosto, o trabalho em grupo foi bastante produtivo. Já não havia mais duplas separadas, mas uma equipe com todos os alunos que haviam se empenhado até o final do minicurso.

Seção 4 - Análise *a priori* e *a posteriori* das Atividades Propostas na Parte A

Nesta parte inicial, procurou-se contemplar a atividade cognitiva de conversão entre representações em diferentes sistemas semióticos. Prezou-se pela utilização de representações semióticas gráficas e simbólicas (numéricas e algébricas). A ordem de apresentação das atividades foi considerada como de dificuldade progressiva, e procurou-se explorar o conhecimento matemático anterior do aluno. O objetivo principal desta etapa foi construir o conceito de convergência de uma sequência numérica, a partir das múltiplas representações. Outro objetivo das atividades, foi o de desenvolver a capacidade lógico-matemática, pressupondo que o aluno a tivesse em nível elementar. Essa capacidade mais desenvolvida é necessária para a construção dos conceitos envolvidos com as ideias e o uso de representação formal de infinito.

4.1 A tarefa 1 e as análises *a priori* e *a posteriori*

4.1.1 Análise *a priori*

Considere a primeira tarefa, cujo enunciado é:

1. Com o software Geogebra é possível mostrar, no plano cartesiano, pontos de coordenadas (x,y) que descrevem graficamente o comportamento de uma sequência. A abscissa x simplesmente indica o índice dos termos da sequência (primeiro termo, $x = 1$; segundo termo, $x = 2$, e assim por diante), enquanto que a ordenada y mostra a grandeza numérica do termo de índice x (y é o valor obtido quando substituímos x por um número na fórmula do termo geral da sequência, e representa a distância vertical do ponto de coordenadas (x,y) ao eixo Ox). Com essa representação gráfica, é possível analisar o comportamento da sequência (saber onde cresce, decresce, aproximação,...). O comando, no Geogebra, que nos permite essa representação é “Sequência [\langle variável, expressão \rangle , \langle variável \rangle , \langle valor inicial \rangle , \langle valor final \rangle ”

1.1 Para cada um dos itens abaixo, use o comando acima para analisar o comportamento das sequências. Você pode aumentar os valores finais para visualizar melhor o que acontece com os termos da sequência.

1.2 Em seguida, escreva, para cada item, o que você observou sobre os termos da sequência.

a) $a_n = \sqrt{n}$

b) $b_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}$

c) $c_n = \frac{n-1}{n}$

d) $d_n = \frac{1}{n}$

e) $e_n = n^2$

f) $f_n = n$

Tal conjunto de atividades visa a exploração, mediante representação gráfica de pontos (x, y) no plano cartesiano, do comportamento de uma sequência numérica e o estabelecimento de critérios subjetivos para a análise da convergência. Espera-se que o aluno observe as representações gráficas e conclua que algumas das sequências apresentam termos que se aproximam de um valor específico, enquanto outras não apresentam esse comportamento. As sequências apresentadas nos itens b, c e d se aproximam dos números 0, 1 e 0, respectivamente, enquanto as demais sentenças apresentam termos cuja ordenada y sempre aumenta, sem aproximar-se de um número específico. Também é esperado que o aluno relacione o valor do n -ésimo termo da sequência ao valor da ordenada de (x, y) , enquanto que a abscissa x indica a posição desse número na sequência. Se tal relação for realizada convenientemente, acredita-se que a exploração das diferentes sequências mediante a conversão do registro algébrico para o registro gráfico facilite a construção do conceito de convergência de números reais.

Neste caso em especial, são fornecidas as expressões algébricas das sequências, cujo comportamento deve ser analisado por meio do registro gráfico e descrito por meio do registro em língua natural. Isto é, a representação gráfica funciona como uma representação intermediária para a conversão requerida.

Cabe destacar que a variação proposta por meio das diferentes expressões algébricas caracteriza os procedimentos metodológicos necessários para a proposta cognitiva de conversão segundo Duval, que não é trivial, nem cognitivamente neutra. Essa operação cognitiva é caracterizada por procedimentos específicos e precisa ser coordenada pelo sujeito aprendente (aluno), como afirmam Brandt e Moretti (2005, p.206):

A operação de conversão, por sua vez, não é nem trivial, nem cognitivamente neutra. A operação de conversão coloca tanto a questão do papel da semiósis no funcionamento do pensamento quanto o das condições de uma diferenciação entre representante e representado. A complexidade da conversão de representações só pode ser compreendida desde que se veja os sistemas semióticos em sua estreita relação com as representações ou mais exatamente ao par (conhecimento, representação).

4.1.2 Análise *a posteriori*

Participaram da resolução desses itens 13 alunos. Os alunos, por livre vontade, dividiram-se em duplas para fazer a tarefa, mesmo que cada um fizesse o seu. Na

aplicação, pelo menos nove dos 13 alunos tiveram dificuldades no uso do comando do Geogebra, o que não era esperado, já que, imaginava-se, o comando era apresentado de forma simples e os alunos haviam afirmado terem conseguido manuseá-lo. Em geral, os alunos desprezavam o comando dado, não percebiam quais eram os elementos e perguntavam o que deveriam escrever e em que local. Outra dificuldade foi a de reconhecer onde deveriam existir os parênteses nas expressões. Depois de algumas tentativas, uma aluna perguntou “ah, eu tenho que fazer igual a calculadora?”, o que pode significar que ela não entendeu o motivo pelo qual os sinais estavam ali colocados.

De um modo geral, os alunos perceberam que algumas sequências se aproximavam de um valor enquanto outras não. Atribuímos isto ao trabalho em grupo que realizaram. Durante a resolução da questão, houve muitas discussões em todas as equipes para chegar a um consenso, a fim de verificar se as sequências se aproximavam ou não de um número. Vale comentar que o registro gráfico das sequências colaborou intensamente para que os alunos percebessem o comportamento das mesmas, já que isso não foi possível mediante apenas a observação dos pares ordenados listados na janela de álgebra do Geogebra.

Não ficou claro para os alunos que a abscissa do par ordenado representava a ordem do termo da sequência e que o valor da ordenada representava o termo, ainda que esta informação estivesse no enunciado. Esse fato indica que a redação necessita de melhorias. Mas não apenas isto. Talvez esse problema seja resolvido se as sequências estiverem associadas às funções, isto é, se houver um encaminhando que conduza o aluno a perceber a relação existente entre estes dois assuntos.

Ao analisar o comportamento das sequências, houve muitas respostas como: “tende ao infinito”, “tende ao zero”, porém, essas afirmações não tinham sujeitos. Os alunos não se arriscavam a dizer quem tendia ao zero, ou ao 1, ou ao infinito. Algumas expressões foram: “tende a zero no eixo x” (isto para a sequência d_n); “tende ao infinito no eixo y” (para a sequência e_n). Isto provavelmente se deve ao fato de os alunos não compreenderem o significado atribuído ao símbolo de par ordenado que estava em uso.

Essa dificuldade pode ser explicada pelo fenômeno da não congruência, já que um ponto do plano é representado pelo par ordenado (x, y) , em que a abscissa x corresponde à ordem do termo da sequência, mas também ao valor atribuído ao n na sentença matemática que representa o termo geral da sequência, ou seja, não há univocidade semântica.

Para a sequência b_n , a aluna Daia descreveu o comportamento da seguinte forma: “os pontos no começo estão distantes do eixo x e desordenados, mas com o aumento dos números (referia-se ao valor atribuído à variável) eles se organizam em linha reta em cima do eixo x ”. Caroline descreveu: “até o 15 ocorre uma variação maior, e a partir do 15 pouca variação ocorre, permanecendo constante”.

Já para a sequência e_n , Daia relatou “os pontos crescem formando uma meia parábola”. Note que a dificuldade, neste caso, pode advir da não congruência entre as representações algébrica e gráfica, ocorrida por não haver univocidade semântica, pois uma mesma expressão algébrica ($e_n = n^2$) remete a duas figuras: uma sequência de pontos em \mathbb{R}^2 e o lugar geométrico dos pontos que caracterizam uma parábola.

O aluno Gabriel descreveu o comportamento da sequência b_n da seguinte forma: *“Inicialmente dando os valores 10 e 100 para a variável final notava-se que o gráfico apresentava oscilação e quando foi determinado o valor 1000 o gráfico parecia contínuo, mas ao aplicar o comando do Geogebra para copiar para a linha de comandos⁵⁵ notou-se uma oscilação bem pequena”*. Essa atuação do aluno nos indica a possibilidade da utilização conjunta de dois tipos de registros para a compreensão do comportamento, conforme propõe Duval (2006; 2011; 2012). Além disso, percebemos uma confusão, já citada em outros trabalhos como os de Cury e Cassol (2004), entre o sentido das palavras contínuo e constante. Pela expressão “oscilação bem pequena” usada pelo aluno, que apontou a variação da ordenada do ponto, em sala de aula, podemos deduzir que ele se referiu ao gráfico parecer ser constante.

A partir da discussão em grupos, foi possível perceber as variáveis visuais gráficas (aproximação ou não de um determinado valor à medida que se aumentava o número de pontos exibidos) correspondentes à convergência de uma sequência. No entanto, os alunos tiveram dificuldades em escrever esta observação na língua natural, pois não encontravam palavras que representassem sua percepção gráfica.

Talvez essa dificuldade dos alunos seja devido ao fato de que, para perceber a convergência das sequências, era preciso ler o gráfico heurísticamente, ou seja, observar o comportamento dos pontos traçados, se havia ou não a aproximação a algum valor específico para a ordenada à medida que o valor numérico da abscissa aumentava. Como apontam os trabalhos de Duval (2011; 2006), o ensino de matemática ainda tem tido uma abordagem pontual do registro gráfico, dificultando a análise e interpretação

⁵⁵ Foi sugerido que o aluno copiasse os dados para a linha de comando a fim de facilitar a observação de todos os termos (pares ordenados) da sequência e comparar numericamente a variação dos termos.

gráfica em outros contextos que não o do traçado da linha correspondente a uma função de 1° ou 2° graus.

Outra dificuldade mostrada pelos participantes é a não distinção entre as palavras expressão e variável. Quando questionados, no início da questão, sobre o que ocuparia o lugar das palavras “expressão” e “variável”, apenas três alunos responderam corretamente. A aluna Caroline chegou a marcar no papel qual era a expressão. Dificuldades semelhantes são apontadas no estudo de Matos (2007) e Matos e Ponte (2008). Infere-se que os registros em língua natural referentes aos conceitos de expressão funcional e variável não estão bem ancorados em situações fundamentais anteriormente experimentadas, ainda que esse grupo seja de alunos do primeiro ano da graduação. Uma sugestão para que esta dificuldade seja sanada é a colocação de exemplos específicos no enunciado fornecido aos alunos. Tal dificuldade nos leva a inferir que as atividades exploratórias propostas são importantes para a conceituação de variável e expressão funcional.

Apesar disto, cabe destacar que as palavras “expressão” e “variável” são apresentadas aos alunos ainda no Ensino Fundamental e são amplamente utilizadas no Ensino Médio. Como os sujeitos participantes desta pesquisa estão no Ensino Superior, mas não distinguem as referidas palavras, faz sentido pensar que a álgebra não tem sido compreendida na educação escolar. Uma maior aproximação da Matemática com a língua natural, isto é, o uso da língua natural como uma das representações, a primeira, talvez, dos objetos matemáticos, pode contribuir nesse sentido. Para tanto, é necessária uma adequação nos cursos de formação de professores, em termos de exploração de vários registros de representação de um mesmo objeto.

Por outro lado, cabe pensar que as palavras “expressão” e “variável” são usadas no cotidiano das pessoas e, muitas vezes, com outro significado. Essa significação pode confundir o aluno. Entretanto, é importante que o professor tente esclarecer o significado dado aos significantes no contexto da Matemática.

No geral, durante a aplicação percebeu-se:

- Dificuldade dos alunos em escreverem o que haviam comentado e discutido com os colegas a respeito das sequências – isto nos indica a necessidade de mais atividades em sala de aula para que os alunos possam fazer a conversão da linguagem matemática para a língua natural, e vice-versa;
- Falta de compreensão da importância dos sinais de parênteses nas expressões algébricas e sua relação com as prioridades de operação. Aparentemente, a

colocação ou não de parênteses não fazia diferença para pelo menos 1/3 dos presentes, bem como a utilização da nomenclatura utilizada: par ordenado, variável, expressão ou sequência. Tal comportamento sugere que deva existir uma maior exploração destes sinais gráficos nos níveis introdutórios da álgebra (6º ano do ensino fundamental), e uma discussão mais aprofundada sobre os termos (registros em língua materna) usados na Matemática. Vale comentar que Ferraz e Gitirana (2007) também detectaram esta dificuldade na compreensão dos termos em sua pesquisa. Aparentemente, apenas o professor utiliza discurso no qual os registros em língua natural são utilizados, seria importante que os alunos também discursassem;

- Os participantes, inicialmente, consideravam-se incapazes de emitir respostas acertadas com respeito ao discurso sobre Matemática. Com o decorrer das atividades, que incluíam discussões por parte das duplas, os alunos começaram a emitir suas opiniões com mais segurança. Ao final, pediam ajuda apenas para verificar se o que haviam escrito como resposta nas questões estava correto. Este fato pode indicar a falta de autonomia para resolver os problemas propostos e discutir sobre a Matemática. Ou, ainda, indicar que a prática de aula tradicional está muito impregnada nos estudantes, que produzem a escrita, mas não efetivam discursos na prática tradicional;
- Houve a necessidade de ter o professor ao lado, às vezes apenas por segurança. Com muita frequência, a professora-pesquisadora foi chamada pelos grupos para prestar auxílio, seja para acompanhar a análise que os alunos realizavam, seja para observar e questionar as anotações. Neste último caso, as dúvidas eram sanadas após a produção no papel, o que serviu para análise das respostas;
- 12, entre os 13 participantes, utilizaram dois tipos de registros, o gráfico e a língua natural. Recorriam ao registro numérico, apresentado na janela de álgebra, apenas para confirmação das observações quando estas geravam dúvidas na equipe. O outro participante, apesar de ter feito a avaliação do comportamento das sequências no plano cartesiano, dedicou uma atenção maior aos números apresentados na janela de álgebra. Este dado é contrário ao resultado das pesquisas de Gonzales-Martin e Camacho (2004; s/d) e Camacho e Depool (2003), para as quais os alunos deram preferência à representação algébrica em detrimento da gráfica. Tal diferença pode ser devido à forma pela qual esta sequência didática foi apresentada, pois o enunciado já propunha a

análise do comportamento da sequência a partir de um gráfico. De acordo com Gonzales-Martin e Camacho (2004), a atitude docente face aos gráficos interfere na atitude discente em relação a eles. Entretanto, é preciso atentar-se ao fato de que a escrita utilizada no *software* Geogebra não é igual ao da notação usual da Matemática. Para este caso, foi preciso realizar uma conversão com o uso de parênteses e sintaxe que era desconhecida dos alunos.

Em relação à tipologia das situações adidáticas ocorridas nesta atividade, podemos considerar os momentos conforme indicado no Quadro 9:

Situação adidática	O que caracteriza a situação adidática - Questão 1 A
Ação	Os grupos leram e interpretaram o enunciado; discutiram como usar o comando dado.
Formulação	Os alunos criaram estratégias para observar o comportamento e discutiram semelhanças e diferenças entre as sequências apresentadas e seus comportamentos; registraram as anotações em língua natural.
Validação	Os alunos verificaram se os apontamentos indicados eram verdadeiros com outras sequências para teste e discutiram essas conjecturas com os demais grupos; realizaram o registro em língua natural.
Institucionalização	Explicação e distinção dos termos “expressão”, “variável”, “par ordenado”, “abscissa”, “comportamento”.

Quadro 9: Caracterização da situação adidática - análise *a posteriori* da questão 1A

4.2 A tarefa 2 e as análises *a priori* e *a posteriori*

4.2.1 Análise *a priori*

O enunciado da tarefa 2 é:

2. Você consegue associar suas observações sobre as sequências do exercício 1 com o conceito de limite, estudado no Cálculo I, e as respectivas notações? Se positivo, escreva-as.

Tal enunciado pretende estabelecer relações entre o comportamento observado de uma sequência numérica e a utilização formal de signos utilizados na Análise Matemática. Para as sequências convergentes, os alunos devem escrever $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ onde L é o número para o qual os termos da sequência se aproximam; para aquelas nas quais os termos sempre aumentam, os alunos devem escrever $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$. No entanto, para que eles utilizem esses significantes, é preciso que dominem o significado de cada uma das partes das expressões, isto é, do “lim”, do “ $n \rightarrow \infty$ ” e do L . É provável

que poucos alunos escrevam corretamente com esses significantes. Espera-se a associação do termo convergência ao de aproximação. Se isso ocorrer, teremos indicações da construção dos conceitos relativos ao campo conceitual do “infinito”. Esta questão pode ser caracterizada por uma situação de ação-formulação, pois a partir dos experimentos, o aluno tenta associar o observado ao registro formal daquele conhecimento.

Nesta atividade, os alunos devem converter o registro gráfico da convergência, também descrito em língua natural, num registro algébrico. O reconhecimento do uso e conceito de limites é fundamental para a compreensão do objeto “Integral”, como destaca Alves (2011)⁵⁶. Essa questão faz referência aos processos de enunciação, que, neste caso, designa o comportamento das sequências, bem como, ao processo de objetivação, ambos citados por Duval, em que uma ação passa do nível do não consciente ao consciente. Isto significa que a designação correta para a convergência atesta a compreensão do significado da notação de limites utilizada, ou seja, a ação se constitui em nível consciente e não meramente uma reprodução do que foi mostrado pelo professor. Neste último caso, a ação está associada ao nível não consciente, o aluno não compreende o motivo pelo qual a notação é usada. A capacidade de escrever a convergência usando a notação correta significa que o aluno já internalizou este conceito e está pronto para avançar na construção do seu conhecimento.

4.2.2 Análise *a posteriori*

Nesta questão, três alunos deram uma explicação para a associação:

- Álvaro: “substituindo os valores é possível conhecer o gráfico e perceber para quais valores a sequência ou equação tende”;
- Gabriel: “Algumas observações feitas nas funções acima podem ser associadas ao conceito de limite, pois uma característica comum de limites e que foi encontrado nesses gráficos são diferenças mínimas de valores por isso o nome limite”;

⁵⁶ Alves (2011) estuda a adequação das categorias intuitivas (intuição afirmativa, intuição conjectural, intuição antecipatória) às fases de ensino previstas pela proposta metodológica chamada Sequência Fedathi (tomada de posição, maturação, solução e prova) para o Cálculo a Várias Variáveis. Para tanto, identifica e discute entraves e obstáculos referentes à transição interna do Cálculo de Uma Variável ao de Várias Variáveis. Um dos apontamentos do autor é de que “a aprendizagem deficitária da noção de *limite* pode comprometer [...] a aprendizagem de *integral*” (p.50).

- Débora: “todas as funções observadas pode-se fazer uma associação com limite, pois todas estão tendendo a algum lugar, mas não consigo descrever as notações”.

Nenhum aluno conseguiu estabelecer correspondência entre o que haviam observado nas sequências e as notações da teoria de limites estudada no Cálculo I, isto é, nenhum aluno escreveu a convergência das sequências usando a notação de limites. Convém destacar que todos haviam estudado este assunto e, com exceção de um aluno reprovado que não estava cursando disciplinas da área de Cálculo, todos os demais haviam estudado este conceito cerca de 3 meses antes da realização das atividades. Porém, com o uso do registro na língua natural foi possível “definir” ou estabelecer critérios e explicar a convergência, o que corrobora a pesquisa de Dall’anese (2006, p.28), que sustenta que “a linguagem que efetivamente participa da produção de conhecimentos matemáticos na sala de aula (contexto) é, preferencialmente, a linguagem natural ou linguagem materna”.

Como a maioria dos alunos haviam tido contato com a simbologia, no curso regimental, cerca de 3 meses antes do minicurso, mas não conseguiram designar a convergência das sequências por meio do registro algébrico, isto nos induz a pensar que os alunos ainda possuíam (ou possuem) deficiências no domínio ou compreensão do conceito de limite.

Também não houve associação explícita entre os termos convergência e aproximação, o que pode estar relacionado à dificuldade de compreensão do significado de tendência ou aproximação citada por Melo (2002). Os alunos usaram termos da teoria de limites como “tende a”, analisaram graficamente a aproximação, mas não citaram a convergência.

Como não houve escrita do registro algébrico do comportamento das sequências convergentes, pode-se inferir que os processos de enunciação e objetivação não foram devidamente ancorados nestes alunos. Talvez isso tenha ocorrido pela não congruência das representações de convergência em língua natural e algébrica, que já foi analisada na seção 1.2.3 e que é retomada na seção 4.3.2.

Da observação dos participantes na resolução desta questão, percebeu-se que é necessário mais cuidado ao introduzir o assunto limite com a análise do comportamento da função por meio de representação tabular. É preciso garantir que o aluno tenha compreendido a definição formal de limite, e não apenas suas regras para cálculo. Isto

nos leva a pensar que atividades exploratórias em que os comportamentos das funções sejam analisados com posterior conversão para a escrita simbólica e a escrita em língua natural, colaboram para a melhor compreensão da teoria, especialmente para a compreensão do registro algébrico.

O Quadro 10 mostra a configuração das situações após resolução da questão 2:

Situação adidática	O que caracteriza a situação adidática - Questão 2 A
Ação	Leitura e interpretação do enunciado; retomada do conteúdo de CDI.
Formulação	Discussão de como escrever o comportamento observado em linguagem simbólica.
Validação	Não houve, mas sim a comparação da escrita simbólica elaborada com os conceitos apresentados no Cálculo I, por parte da pesquisadora.
Institucionalização	Não houve institucionalização, mas sim a retomada da notação formal para a convergência, por parte da ministrante

Quadro 10: Caracterização da situação adidática da questão 2 A

4.3 A tarefa 3 e as análises *a priori* e *a posteriori*

4.3.1 Análise *a priori*

O enunciado da tarefa 3 é:

3. Considere a seguinte ‘definição’ intuitiva de Convergência: *Dizemos que uma sequência numérica converge para um número L se os termos da sequência ficam cada vez mais próximos do número real L .*

Agora considere as sequências dadas no exercício 1. Depois de realizar as atividades no Geogebra, você diria que elas convergem? Se positivo, qual seria o possível número L ?

Complete a tabela, a partir da sua observação.

Sequência	Converge?	Valor de L ?
$a_n = \sqrt{n}$		
$b_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}$		
$c_n = \frac{n-1}{n}$		
$d_n = \frac{1}{n}$		
$e_n = n^2$		
$f_n = n$		

A tarefa 3 faz com que o estudante construa uma faceta do conceito de convergência de forma intuitiva, em que associa convergência com proximidade. Pretende, ainda, que o aluno associe o comportamento numérico de uma sequência à

nomenclatura formal dada a esse comportamento, ou seja, pretende-se transitar entre dois sistemas semióticos. Espera-se que, progressivamente, o aluno construa um campo de situações associado ao conceito que se quer atingir (convergência), mesmo que não tenha sido trabalhado formalmente. Espera-se que o aluno complete a tabela fornecida nesse exercício da seguinte maneira:

Sequência	Converge?	Valor de L?
$a_n = \sqrt{n}$	Não	
$b_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}$	Sim	0
$c_n = \frac{n-1}{n}$	Sim	1
$d_n = \frac{1}{n}$	Sim	0
$e_n = n^2$	Não	
$f_n = n$	Não	

Esta é uma atividade que busca associar o registro de um conceito, ainda que meramente intuitivo, em língua materna ao seu registro numérico, usando o registro gráfico como apoio à interpretação e análise do que é solicitado.

4.3.2 Análise *a posteriori*

Nesta questão, houve um fato interessante. Todas as equipes perguntaram o significado da palavra “converge” e discutiram o significado entre si. Uma delas chegou a pesquisar no dicionário da Internet e explicou: “é quando se aproxima, se mantém constante”. Porém, não entenderam o significado de “se os termos da sequência ficam cada vez mais próximos do número real L”, o que indica, mais uma vez, a falta de compreensão do significado das coordenadas dos pares ordenados usados na tarefa 1.

Apenas uma das seis equipes, sendo 5 duplas e um trio, conseguiu preencher a tabela sem precisar de ajuda na compreensão da definição intuitiva. As demais equipes preencheram corretamente os dados solicitados, porém, apenas após terem sido estimulados a perceber se os valores numéricos dos termos da sequência se tornavam cada vez mais próximos de algum número. Neste momento, todas as equipes

conseguiram associar esse valor de convergência ao número limite, isto é, fazer correspondências entre a existência de um limite e ter uma sequência convergente.

Um episódio que mostra que o termo “infinito” ainda traz controvérsias aconteceu quando uma das alunas (Débora) perguntou: “estas sequências (apontando para as não convergentes corretamente assinaladas) estão se aproximando do infinito, então elas convergem? (...) Posso escrever que o número L é o infinito?”. Houve um pequeno diálogo entre a professora (P) e a aluna (D):

P: Por que a dúvida?

D: é porque todos os outros casos deram um número.

P: O infinito é um número?

D: Não, é uma ideia.

P: E então? Você pode ou não escrever que a sequência converge para o infinito?

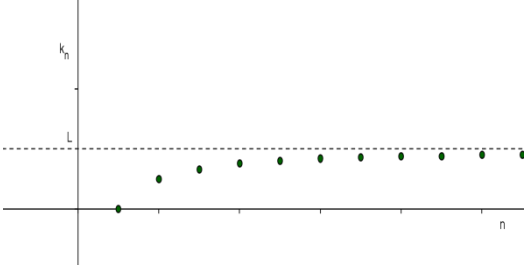
D: Não, ele não é real.

Note que no final do diálogo transcrito acima, a aluna não afirma que o infinito não é um número real. Ela apenas afirma que ele não é real. Aqui, ainda cabe questionar se a palavra real, usada por ela, refere-se ao conjunto dos números reais ou algo que não faz parte da realidade.

Uma possibilidade para o melhor entendimento e incentivo ao discurso matemático era estimular, naquele momento, as equipes a conversarem sobre uma definição para tal e escreverem um critério de convergência usando o registro algébrico. Isto poderia facilitar a compreensão da definição formal, ao mesmo tempo em que o professor pode perceber as dificuldades de conceitos e símbolos que os alunos ainda têm.

A articulação dos registros visual e discursivo passa pela codificação das conexões locais, isto é, pela identificação das variáveis visuais do gráfico que correspondem às variáveis semânticas. Da mesma forma, a articulação dos registros discursivo e algébrico requer a correspondência de unidades semânticas e unidades simbólicas (DUVAL, 2006). Para tanto, é indispensável que o aluno seja estimulado a pensar globalmente acerca da atividade que lhe é proposta e procurar analisar as consequências que uma mudança ocorrida num determinado registro acarreta ao outro registro.

Do ponto de vista das Representações Semióticas, considere as unidades significantes para os registros em Língua Natural, Gráfico e Algébrico como apresentadas no Quadro 11, referente ao conceito de limite.

Tipo de Registro	Unidades Significantes	Combinações admissíveis das unidades significantes
Língua Natural	<p>(unidades semânticas)</p> <p>Número Tende a Abscissa Ordenada Se aproxima de Infinito Sequência X Convergente</p>	<p>quando a abscissa tende ao infinito, a ordenada k_n se aproxima do número L.</p>
Gráfico	<p>(unidades visuais)</p> <p>Assíntota horizontal Comportamento da ordenada (tendência do valor da ordenada) Comportamento da abscissa (tendência do valor da abscissa)</p>	 <p>(considerou-se, como exemplo, a sequência $k_n = \frac{Ln-1}{n}$)</p>
Algebrico	<p>(unidades simbólicas)</p> <p>Lim a_n Número L n (variável) \rightarrow ∞</p>	$\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = L$

Quadro 11: Unidades Significantes para os registros associados ao conceito de limite.

A afirmação “quando a abscissa tende ao infinito, a ordenada k_n se aproxima do número L”, não é semanticamente congruente ao registro algebrico $\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = L$ (lida como k_n se aproxima de L quando n tende ao infinito⁵⁷), pois há uma inversão na ordem das unidades significantes correspondentes, o que aumenta o custo da operação cognitiva realizada pelo aluno. A mesma não congruência acontece se a expressão citada for lida como “o limite de k_n é L quando n tende ao infinito”. Contudo, pode-se perceber que a primeira forma de leitura da expressão algebrica

⁵⁷ A leitura da expressão algebrica já é uma conversão entre o registro algebrico e o da língua natural.

apresenta uma combinação das unidades semânticas que se aproxima mais da representação gráfica, enquanto a segunda, tem maior aproximação em relação a representação algébrica.

A segunda forma de leitura pode trazer consigo outros obstáculos, pois, além da inversão, contém uma igualdade implícita (é L). Tal igualdade é, na notação de limite, indistinta da igualdade aritmética trabalhada na escola desde os anos iniciais, mas ela é uma nova igualdade que tem o significado de aproximação, de tendência, conceitos que usam outros verbos para se consolidarem. Ou seja, o mesmo significante, o signo “=”, deve receber outra significação no estudo do cálculo. É esse o ponto no qual se passa de um conceito de infinito potencial a um conceito de infinito atual ou atingido, dominado pelos matemáticos mediante manipulação de signos como: épsilons e deltas.

No entanto, a afirmação “quando a abscissa tende ao infinito, a ordenada k_n se aproxima do número L ”, é semanticamente congruente à afirmação “ $n \rightarrow \infty \Rightarrow k_n \rightarrow L$ ”, por atender aos critérios de congruência.

Em particular, na ‘definição intuitiva’ dada, “uma sequência numérica converge para um número L se os termos da sequência ficam cada vez mais próximos do número real L ”, não há congruência semântica entre os registros de representação algébrica e em língua natural, haja vista que os critérios de correspondência semântica das unidades significantes e univocidade semântica terminal não são satisfeitos, já que à expressão “termos da sequência”, que pode ser considerada uma unidade significativa para representação em língua natural, para a definição intuitiva em análise, correspondem as unidades significantes n , k_n , (n, k_n) do registro na representação simbólica (numérica).

No Quadro 12 apresenta-se a configuração da situação adidática para esta questão 3:

Situação adidática	O que caracteriza a situação adidática - Questão 3 A
Ação	Leitura e interpretação do enunciado; discussão dos possíveis valores de L e se o “infinito” é ou não um número real.
Formulação	Discussão dos alunos em relação ao comportamento e nomenclatura: converge ou diverge; definição de um critério para o número L .
Validação	Teste da aproximação da sequência ao número L , usando os registros numérico e gráfico, por meio da verificação experimental.
Institucionalização	A caracterização da sequência como convergente/divergente

Quadro 12: Caracterização da situação adidática da questão 3A

4.4 A tarefa 4 e as análises *a priori* e *a posteriori*

4.4.1 Análise *a priori*

A tarefa 4 explora a representação gráfica das sequências na reta real.

4. No Geogebra, faça o seguinte: digite $k=1$ e tecla Enter. Para cada uma das sequências do exercício 3, faça:
 - a) Digite o comando Sequência[expressão, 0), n , 1, k]
 - b) Clique com o botão direito no campo k e escolha Propriedades. Escolha $\text{min}=0$, $\text{max}=100$, $\text{Incremento}=1$ e $\text{Largura}=200$. Feche a janela de Propriedades.
 - c) Clique sobre o campo k e utilize as setas do teclado para alterar os valores de k . (Quando o campo está ativado pode-se usar o teclado). Quando $k=0$, não vemos nenhum ponto da sequência. Quando teclamos na seta para a direita k passa a valer 1 e vemos o termo a_1 (primeiro termo da sequência), quando apertamos novamente a seta para a direita temos $k=2$ e vemos o segundo termo a_2 . Clicando repetidamente na seta para a direita podemos ver o aparecimento dos pontos da sequência marcados no eixo Ox .
 - d) Observe o comportamento dos termos que aparecem no gráfico, e responda:
 - a. Existe diferença de comportamento entre as sequências que você assinalou como convergentes e as não convergentes? Se sim, qual(is)? Explique.
 - b. Baseado nesse experimento, como você descreveria um procedimento para saber se uma sequência converge ou não? Descreva.

Espera-se que o aluno comente que, nas sequências convergentes, cada vez que aumenta o índice n , mais próximos de um determinado número fixo estão os seus valores. Neste caso, ainda, o aluno deve argumentar que haverá uma aglutinação de “pontinhos”, e que isso não acontece nas sequências divergentes. Espera-se que os alunos estabeleçam como procedimento para a percepção de convergência a observação do fato dos seus termos estarem cada vez mais próximos de um determinado número real, a partir de certo índice.

4.4.2 Análise *a posteriori*

Os resultados obtidos nesta questão foram como o esperado. Apesar de não haver menção explícita ao índice, os termos “tende a”, “se aproxima de”, indicam que a ideia desse índice está presente nas respostas dos alunos. Isto indica que a correspondência entre a aproximação e o limite está sendo elaborada por eles, o que pode minimizar as dificuldades citadas por Melo (2002).

No item a) houve alguns destaques:

- Claison: “o comportamento da sequência quando convergente encontra-se uma incógnita limite x ou y e divergente tendendo ao infinito”;
- Caroline: referindo-se às sequências não convergentes: “Não é convergente porque se afasta do zero”; referindo-se às convergentes: “É convergente pois se aproxima do 0” (no caso da terceira, substituiu o zero por 1);
- Marcos: “nas retas não convergentes os pontos se afastam cada vez mais. Já nas retas convergentes os pontos se aproximam cada vez mais do limite”

Alguns procedimentos para o item b foram (transcritos dos protocolos entregue pelos alunos):

- Denise: “É convergente quando se aproxima de algum ponto”;
- Claison: “conta com a intuição em alguns casos. O procedimento se dá a observação do comportamento da sequência, onde se vê a tendência dos pontos, se for para o infinito diverge e à um limite converge. Dedução.”;
- Bruno: “para convergir a sequência mostra um determinado número aproximando-se dele, quando não converge a sequência não mostra um único número e sim infinitos números”;
- Caroline: “uma sequência converge se tende ao zero, ou se aproxima de algum ponto, e não é convergente quando tende ao infinito” . Neste caso, a aluna havia considerado apenas a tendência ao zero para a sequência convergente, quando questionada sobre os resultados observados, percebeu que a terceira tendia ao 1, por isso resolveu considerar ‘ou se aproxima de algum ponto’, deixando implícito que o ‘algum ponto’ referia-se a um número real;
- Camila: “através do limite, aplicando os valores na função, se o limite for um valor único é convergente, se o limite for um valor que você não sabe como o infinito, não converge”;
- Desiée: “converge se se aproximarem de um ponto comum, chamado L ”

Aqui, notou-se a importância de tratamentos diferentes para um mesmo problema. No Quadro 13 são apresentados dois tipos de tratamento, descritos nas colunas, em diversos registros, descritos nas linhas. Ao observar em \mathbb{R} o comportamento das sequências, os alunos perceberam aproximações e fizeram

associação com o tema limites de uma maneira mais natural do que em \mathbb{R}^2 , o que indica a necessidade de inversão na ordem das atividades.

No Quadro 13, o tratamento em \mathbb{R} é, na verdade, um tratamento em $\mathbb{R} \times \{0\}$, devido ao *software*. Consideramos como sendo um tratamento em \mathbb{R} devido à localização dos pontos sobre o eixo horizontal. Se a atividade tivesse sido feita, inicialmente, com calculadora, lápis e papel, em que os alunos tivessem que realizar as operações, para depois marcar os valores obtidos para os termos na reta real \mathbb{R} , aí sim seria um tratamento em \mathbb{R} . Nesse caso, numa segunda etapa os alunos poderiam converter esses registros, usando o software, para tratá-los em $\mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$.

Registro dos tratamentos da convergência de $c_n = \frac{n-1}{n}$	Tratamento em \mathbb{R}	Tratamento em \mathbb{R}^2
Gráfico	Figura 13	Figura 14
Numérico (para $n = 100$)	$\{(0, 0), (0.5, 0), (0.66667, 0), (0.75, 0), (0.8, 0), (0.83333, 0), (0.85714, 0), (0.875, 0), (0.88889, 0), (0.9, 0), \dots, (0.9898, 0), (0.9899, 0), (0.99, 0)\}$	$\{(1, 0), (2, 0.5), (3, 0.66667), (4, 0.75), (5, 0.8), (6, 0.83333), \dots, (98, 0.9898), (99, 0.9899), (100, 0.99)\}$
Algébrico	$\left\{\left(\frac{n-1}{n}, 0\right); n \in \mathbb{N}^*\right\}$	$\left\{\left(n, \frac{n-1}{n}\right); n \in \mathbb{N}^*\right\}$
Língua Natural	Os pontos se aproximam de um determinado valor no eixo x.	Os pontos se aproximam de uma reta horizontal

Quadro 13: Diferentes tratamentos em diferentes registros para a convergência da sequência

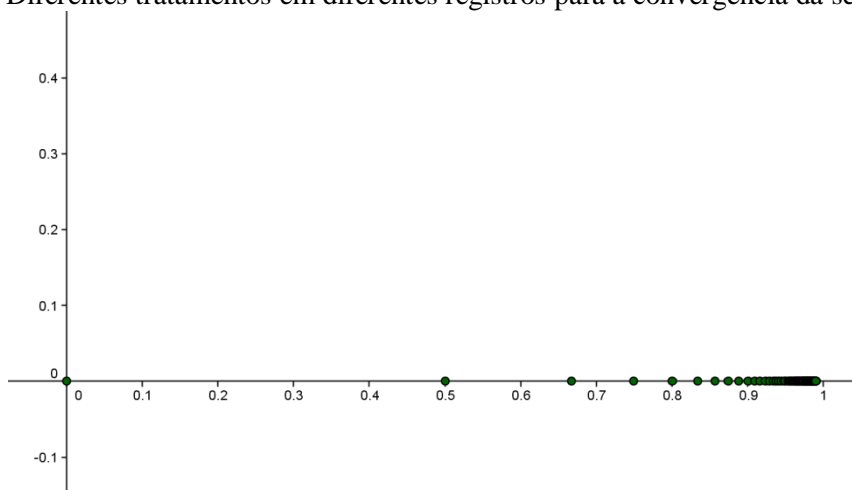


Figura 13: Tratamento em \mathbb{R} da convergência da Sequência c_n

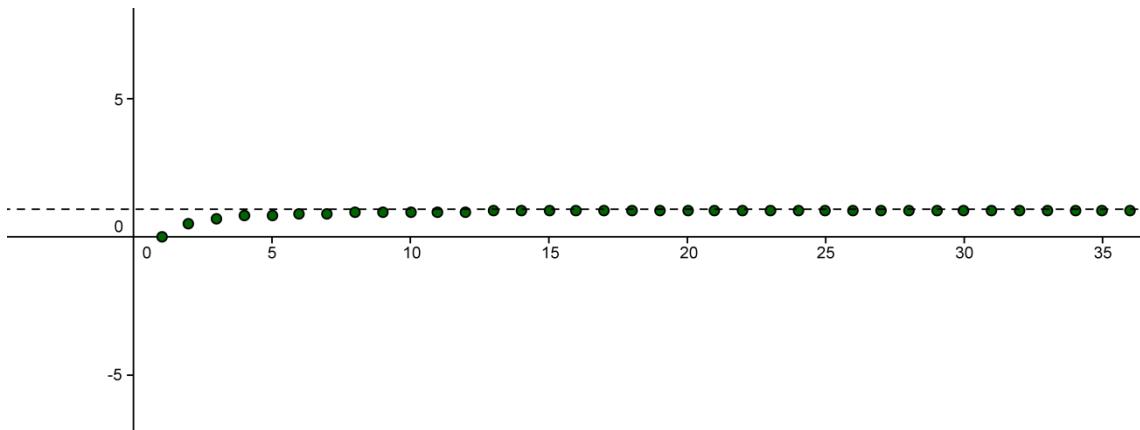


Figura 14: Tratamento em R^2 da convergência da sequência c_n

Da aplicação observou-se que:

- De início, os alunos não entenderam o significado dos “pontinhos” sobre o eixo x , e muitos recorreram à primeira tarefa para comparar os comportamentos. Houve a necessidade de experimentar todas as sequências propostas, comparar com os resultados anotados das questões anteriores para compreenderem que a convergência implicava numa aproximação cada vez maior dos termos da sequência a um determinado número, enquanto na divergência havia um afastamento tratado como uma “tendência ao infinito”. Isto reforça a necessidade de mais de um tratamento da tarefa para possibilitar a compreensão, pelo aluno, do assunto estudado;
- Ainda foi percebida dificuldade de relacionar os registros algébricos (signos matemáticos) com os registros em língua natural;
- É importante considerar, na formulação das atividades, sequências cujos limites sejam diferentes, para não levar o aluno a pensar que, por exemplo, para uma sequência ser convergente seus termos têm que se aproximar do zero, como afirmado por Caroline.

O Quadro 14 reflete a caracterização desta questão.

Situação adidática	O que caracteriza a situação adidática - Questão 4 A
Ação	Leitura e interpretação do enunciado; discussão do comando; análise da classificação convergente-divergente e comportamento da sequência; discussão sobre o par ordenado (expressão, 0) e seu significado.
Formulação	Estabelecimento de critérios para convergência a partir do comportamento gráfico dos pontos da sequência.
Validação	Validação do critério intuitivo de convergência estabelecido.
Institucionalização	A ordenada 0 (zero) no par ordenado e seu significado; o registro numérico das coordenadas dos termos da sequência.

Quadro 14: Caracterização da situação adidática da questão 4A

4.5 A tarefa 5 e as análises *a priori* e *a posteriori*

4.5.1 Análise *a priori*

Após a tarefa 4, que explora a representação da sequência na reta numérica, propõe-se a tarefa 5, que explora a representação em \mathbb{R}^2 .

5. Para as sequências b_n e d_n do exercício 1, faça (anote os dados numa tabela):

- No Geogebra, use o comando “Sequência[(n, expressão), n, 1, valor final]” para mostrar os pares ordenados da sequência analisada como convergente. O *valor final* pode ser mudado sempre que necessário, para isso basta clicar duas vezes sobre a linha de comando dessa sequência e alterar o valor mostrado na janela.
- Trace retas horizontais usando, no Geogebra, o comando “ $y = 0.5$ ” e “ $y = -0.5$ ”.
- Descubra um valor n_0 a partir do qual os pares ordenados fiquem dentro da faixa delimitada pelas retas horizontais traçadas. Qual é esse n_0 . Anote os dados da faixa e n_0 numa tabela.
- Diminua o valor 0.5 para 0.3 e trace as retas horizontais $y = 0.3$ e $y = -0.3$ e repita o procedimento c) para esta faixa.
- Diminua de 0.3 para 0.1 e trace as retas horizontais $y = 0.1$ e $y = -0.1$ e repita o procedimento c) para esta faixa.
- É sempre possível encontrar um n_0 independente da amplitude da faixa tomada? Justifique.
- Você assinalou essas sequências, no exercício 3, como convergentes ou divergentes?
- E se a sequência considerada não for convergente, o que acontece ao realizar o procedimento c)? Explique.
- Que semelhanças e/ou diferenças você percebe entre o que foi feito neste exercício e o exercício 4? Comente.

Observação: Talvez seja preciso tomar a ferramenta “mover” e utilizá-la para “arrastar” o semi-eixo Ox positivo para comprimi-lo. Essa técnica permite que você modifique a escala dos eixos do plano cartesiano. Para conseguir isso você deve estar com a ferramenta “mover” ativada, clicar exatamente sobre qualquer ponto do semi-eixo Ox positivo e arrastá-lo para a esquerda. Caso você queira ampliar a escala do eixo Ox deve arrastar algum ponto do semi-eixo positivo para a direita.

A possibilidade de se trabalhar com a representação de pontos no plano cartesiano fornece outra situação que se soma às necessárias para a constituição do campo do conceito de convergência. Na representação unidimensional, o sistema semiótico envolvido apoia-se na significação numérica – aritmética, enquanto que no sistema bidimensional (\mathbb{R}^2) trabalha-se com um sistema semiótico que envolve o conceito de função, já que a disposição de pontos no plano cartesiano exige a compreensão de que a ordenada é a imagem da abscissa.

Portanto, espera-se que os alunos percebam que os pares ordenados apresentados graficamente carregam em sua representação tanto o índice do elemento da sequência quanto o valor desse termo. Este exercício também visa preparar o aluno, intuitivamente, para a definição de convergência. Uma dificuldade que pode surgir aqui é a questão de distinguir a posição e o valor do termo, ou seja, entender o significado da abscissa e da ordenada do ponto, isso pode não aparecer num primeiro momento. Espera-se que os alunos montem uma tabela com os valores de n e amplitude da faixa da seguinte forma:

Faixa	$[-0.5;0.5]$	$[-0.3;0.3]$	$[-0.1;0.1]$
Valor de n para b_n	2	4	8
Valor de n para d_n	2	4	8

Como os valores de n para os dois casos será o mesmo, até seria possível que os alunos deduzissem que sempre se manteria o mesmo valor de n , mas à medida que a amplitude do intervalo diminua, o valor de n deverá aumentar e diferir.

Para as sequências não convergentes, espera-se que apareçam comentários não muito consistentes, como por exemplo, que digam que os pontos estão crescendo cada vez mais e que as faixas deveriam ficar maiores e não menores.

4.5.2 Análise *a posteriori*

Os alunos tiveram dificuldade em compreender, pelo menos na primeira vez, quem era o n_0 solicitado. No entanto, ao realizarem leitura coletiva do enunciado, o valor de n_0 foi determinado sem maiores transtornos, provavelmente, devido à ênfase nos termos: “a partir do qual”, “fiquem dentro da faixa”. Porém, montar a tabela sem um modelo pré-estabelecido não foi tarefa fácil. O questionamento proferido inúmeras

vezes foi: *Professora, como a senhora quer essa tabela?* Houve dificuldade em montar uma tabela em que aparecessem os valores da faixa e n_0 para as duas sequências. Tal dificuldade não era aguardada, já que a montagem de tabelas é trabalhada na escola desde o 4º ano do Ensino Fundamental. Por outro lado, isto pode representar a passividade do aluno frente às situações que envolvem sua aprendizagem, o que depende, em parte, da maneira pela qual eles foram expostos às situações de ensino.

Em relação à montagem e interpretação de tabelas, Flores e Moretti (2005) destacam a não simplicidade desta tarefa, devido, geralmente, à não compreensão da funcionalidade representacional. Sustentam que as representações gráficas, incluindo as tabelas, preenchem as quatro funções cognitivas do pensamento: comunicação, tratamento, objetivação e identificação. Em especial, os autores comentam que “a simplicidade de acesso às informações, a homogeneidade visual e a forma de organização de dados, só são aparentes” (idem, p.5). Além disso, os autores afirmam que

ler uma tabela, um diagrama não é tarefa tão imediata. A leitura exige por parte do leitor certa intimidade, e também domínio, do modo de representação utilizado. Ler, interpretar, analisar e julgar, ou organizar dados em gráficos e tabelas significa, antes de tudo, dominar o próprio funcionamento representacional (FLORES e MORETTI, 2005, p.2).

Geralmente esta complexidade no objeto “tabela” é desprezada no ensino. Para Flores e Moretti (2005, p.11):

Particularmente, no ensino, privilegia-se muito mais a tarefa de leitura e identificação de dados retirados de representações gráficas para fins de comunicação em detrimento de outras atividades, tais como a própria construção destas representações. No caso das tabelas, vimos que elas não são representações autônomas, como aliás todas as representações que privilegiam a visualização. Isto quer dizer que elas se articulam de maneira explícita, ou implícita, com representações num outro registro. Esta articulação, que diz respeito a interação entre a tabela e o enunciado verbal do problema, ou a escritura algébrica, é essencial já que será essa possibilidade que comandará a maneira de ler uma tabela. É a conversão entre os registros que possibilitará uma leitura global das representações gráficas.

Voltando à análise da tarefa 5, de modo geral, os alunos afirmaram que a sequência convergente fica dentro da faixa, e a divergente fica sempre “para fora”. A explicação de Claison é: “se a sequência for divergente a amplitude da faixa, fica impossível de ser definida, ou se possível consideração de a amplitude da faixa tender ao mais e menos infinito”. Com esta afirmação, percebe-se que ainda há confusão no que seja o limite graficamente, pois, neste caso, em sala, o aluno mostrava o gráfico

indicando o ‘menos infinito’ a que fez menção, como sendo a parte negativa do eixo x , e não em relação à amplitude da faixa.

O tratamento da convergência de uma sequência em \mathbb{R} , dado na tarefa 4, e em \mathbb{R}^2 , da tarefa 5, permitiu que os alunos analisassem a convergência sob dois sistemas semióticos. A respeito das semelhanças e diferenças entre os exercícios 4 e 5, o aluno Marcos afirma “Semelhança: Todos os pontos convergentes tendem a um mesmo número. Diferença: No exercício 4 os pontos tendem a um mesmo número, já no 5, eles são espremidos numa faixa”. Débora foi mais clara na sua exposição (Figura 15):

i. No exercício 4, quando são convergentes os pontos aparecem sempre próximos, e os divergentes são sempre se afastando. No exercício 5 quando são convergentes independente da amplitude da faixa é possível encontrar um no, quando é convergente é possível um único no para a faixa $y: 0,5$

Figura 15: Distinção dos critérios de convergência dos exercícios 4 e 5 (Débora)

Novamente, após a utilização de dois tratamentos distintos, os alunos perceberam as diferenças, mas nem todos compreenderam o motivo pelo qual as representações gráficas eram diferentes, o que pode indicar a necessidade de mais atividades que explorem esse tipo de tratamento e da abordagem global de que trata Duval (2011, 2012, 2006) acerca das representações gráficas.

No Quadro 15 é apresentada a caracterização desta questão.

Situação adidática	O que caracteriza a situação adidática - Questão 5 A
Ação	Leitura e interpretação do enunciado; discussão do comando; análise da classificação convergente-divergente e comportamento da sequência; discussão da diferença de registro gráfico entre esse exercício e o anterior; interpretação do significado da faixa entre as retas paralelas em relação à convergência.
Formulação	Estabelecimento de critérios para convergência a partir do comportamento gráfico dos pontos da sequência; comparação com o critério estabelecido para o caso anterior.
Validação	Confronto do critério intuitivo de convergência estabelecido nesta questão em relação ao anterior; comparação de sequências convergentes pelos dois critérios.
Institucionalização	Uma sequência converge se seus termos estão cada vez mais próximos de um número real.

Quadro 15: Caracterização da situação adidática da questão 5A

4.6 A tarefa 6 e as análises *a priori* e *a posteriori*

4.6.1 Análise *a priori*

A tarefa 6 investiga a percepção do aluno para o fato de que as faixas foram tomadas em torno do valor para o qual a sequência converge.

6. As retas cujas equações são da forma “ $y = \text{número}$ ” e “ $y = - \text{número}$ ”, do exercício 5, servem para mostrar que os termos de uma sequência convergente podem se tornar tão próximos quanto se queira de um determinado valor.
 - a. Analise as faixas entre as retas que foram desenhadas nos itens b), d), e e) daquele exercício. Qual o valor central da faixa? Onde esse valor aparece (veja seu exercício 3)?
 - b. Considere a sequência c_n do exercício 1. Usando sua observação no item 6.a, estabeleça as faixas correspondentes aos itens b), d), e e) do exercício 5, para a sequência c_n .

Ele deverá ser capaz de criar as faixas $[0.5;1.5]$, $[0.7;1.3]$ e $[0.9;1.1]$. Esse exercício exige a compreensão do significado da ordenada do ponto mostrado no plano cartesiano.

4.6.2 Análise *a posteriori*

Aqui houve confusão em relação ao significado da expressão “valor central da faixa”. Após o aparecimento de tal dificuldade, concorda-se que a expressão pode sugerir ao aluno a procura de um valor “central” na direção horizontal. Esclarecido isto, os alunos tiveram facilidade em associar esse número ao limite da sequência, a partir da análise da tabela montada na tarefa 3. Para estabelecer as faixas respectivas para a sequência c_n apenas quatro alunas, Fernanda, Daia, Leticia e Denise, tiveram dificuldades e pediram ajuda à professora. Destaca-se a importância da certificação de que a linguagem está clara no enunciado proposto ao aluno.

Este exercício pode não ter sido compreendido facilmente pela não congruência semântica que ele apresenta. Da forma como está apresentado, é necessário que o aluno associe à expressão “estabeleça as faixas correspondentes aos itens b), d), e e) do exercício 5” à construção de uma faixa do tipo $y = \varepsilon$ e $y = -\varepsilon$, para $\varepsilon = 0.5; 0.3; 0.1$, em que o valor de y é o valor limite da sequência. Esta informação deve estar associada à expressão “Usando sua observação no item 6.a”). Além disso, ele deve observar que a sequência em estudo mudou.

Em relação à TSD, a caracterização desta questão é mostrada no Quadro 16.

Situação adidática	O que caracteriza a situação adidática - Questão 6 A
Ação	Leitura e interpretação do enunciado; discussão e análise das faixas, valor central e correlação desse valor central aos elementos obtidos em análises anteriores.
Formulação	Critério de ligação entre o valor central da faixa e o valor limite da sequência.
Validação	Estabelecimento da faixa de convergência para a sequência c_n , segundo critérios formulados.
Institucionalização	Valor central da faixa; média aritmética.

Quadro 16: Caracterização da situação adidática da questão 6A

4.7 A tarefa 7 e as análises *a priori* e *a posteriori*

4.7.1 Análise *a priori*

A tarefa 7 pretende investigar o quanto uma definição matemática pode ser incompreendida pelo aluno.

7. Considere a seguinte definição:

Definição: A sequência $\{a_n\}$ **converge** para o número L se para todo número positivo ε existe um número inteiro N tal que para todo n , $n > N \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$. Se esse número L não existe, dizemos que $\{a_n\}$ **diverge**.

Observe os dados que você anotou nos exercícios 3 e 4.

- Para cada sequência assinalada como convergente, a quem você pode associar as letras L , ε e N ? Justifique.
- Como você explicaria, a um colega, o significado das letras L , ε e N ? Escreva sua explicação.

Após a realização da tarefa 6, espera-se que os alunos tenham percebido a convergência e a noção de aproximação de um ponto como requisito para tal. No entanto, existe a possibilidade da ocorrência de dificuldades para relacionar as observações anotadas pelos acadêmicos com os elementos presentes na definição apresentada.

4.7.2 Análise *a posteriori*

Nenhum aluno conseguiu, de imediato, associar a definição apresentada neste exercício com a exploração dos exercícios anteriores, mesmo que tenham conseguido criar as faixas dos exercícios 5 e 6 e tenham compreendido a noção de convergência, pelo menos por meio dos registros gráfico e língua natural. Foi necessário reler a definição várias vezes. Ao final, a professora teve que explicar o significado dos símbolos constantes na definição, e tentar induzí-los a perceber que os elementos ali

introduzidos já estavam presentes nos exercícios anteriores, mas com outras nomenclaturas. Este procedimento foi realizado em todos os grupos, já que cada um deles chegou a este ponto em momentos diferentes.

Os casos particulares estudados anteriormente não foram suficientes, em número, para que se fizesse a generalização e se registrasse os comportamentos convergentes com os signos apropriados. Seria necessário mais um ou dois exercícios diferentes em que esta definição fosse explorada em termos mais práticos, ou ao menos uma ênfase maior no significado dos elementos que a compõem, como, por exemplo, $|a_n - L|$, $|a_n - L| < \varepsilon$, a_n , L , N , ε . Aqui, é possível afirmar que houve duas dificuldades: a da generalização de eventos observados e a da conversão da representação do registro em língua natural para a representação algébrica.

O aluno Bruno descreveu a associação entre as ‘letras’ que aparecem na definição com as tarefas que vinha desenvolvendo assim: “ L = limite, onde os valores se aproximam; ε = amplitude, tamanho das faixas; N = primeiro número que entra dentro dessa amplitude”.

A análise das resoluções e discussões dos alunos indicou a facilidade destes em comentar e explicar o que acontecia em cada atividade por meio da língua natural, o que nos faz indicar a necessidade de explorar mais esta forma de registro antes da forma analítica/algébrica dos fatos matemáticos. Percebeu-se uma não-familiarização, e uma consequente rejeição e aversão, em relação aos símbolos matemáticos que se tornam obstáculos didáticos para o ensino de conceitos matemáticos.

O aluno Bruno, por exemplo, foi capaz de generalizar as situações vivenciadas, mas não conseguiu converter a representação em língua natural para a algébrica das suas conclusões. Em parte, isso se deve à não congruência entre as representações “ a_n se aproxima de L ” e “ $|a_n - L| < \varepsilon$ ”, como pode ser observado no Quadro 17.

Análise da congruência semântica das representações nos registros língua natural (RLN) e algébrico (RA) dadas por “ a_n se aproxima de L ” e “ $ a_n - L < \varepsilon$ ”, respectivamente.						
Unidades Significantes para RLN	Unidades Significantes para RA	Segmentação comparativa	Critérios de Congruência			Conclusão
			CS	US	OR	
a_n	a_n	Simples	Sim	Sim	Não	Não congruente
Aproxima	, -, <, ε	Combinada	Sim	Não	Não	
L	L	Simples	Sim	Sim	Não	

Quadro 17: Análise de Congruência RLN-->RA

O Quadro 18 apresenta a tipologia da questão:

Situação adidática	O que caracteriza a situação adidática - Questão 7 A
Ação	Leitura e interpretação do enunciado; comparação dos elementos apresentados com termos e notações usados em exercícios anteriores.
Formulação	Estabelecimento de relações entre os elementos da definição e os usados nos exercícios anteriores; preenchimento da tabela.
Validação	Verificação das hipóteses formuladas e a explicação do significado das referidas letras.
Institucionalização	Apresentação formal da definição de convergência, e os signos e significados da notação apresentada.

Quadro 18: Caracterização da situação adidática da questão 7A

4.8 A tarefa 8 e as análises *a priori* e *a posteriori*

4.8.1 Análise *a priori*

A tarefa 8 compara as representações numérica e gráfica de uma sequência.

8- Considere a sequência definida por $b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

- Abra um arquivo no vxMaxima. Digite no campo de Entrada a definição do termo geral da sequência, “ $f(n) := (-1.0)^{(n+1)/n}$ ”, e aperte Enter. A expressão funcional do termo geral estará registrada. Cuidado para que seja escrito “1.0” no numerador da expressão. Isso facilitará o trabalho com valores decimais.
- Verifique o valor do termo de índice 50. Para fazer isso digite no campo de Entrada “ $f(50)$ ” e aperte Enter, você deverá ver o valor -0.02 na tela.
- Use o wxMaxima e procure valores de n tais que $f(n)$ esteja entre -0.0001 e 0.0001. Em outras palavras, encontre n tal que o valor absoluto de $f(n)$ seja menor que 0.0001. (Dica: Você pode utilizar a expressão $\text{abs}(f(n))$ para calcular o valor absoluto de $f(n)$ se quiser).
- É possível encontrar um n tal que $f(n)$ esteja entre -10^{-7} e 10^{-7} ? Qual é esse valor? E entre -10^{-12} e 10^{-12} ? Qual é esse valor?
- Comente sobre a facilidade e/ou dificuldade para encontrar os valores de n solicitados nos itens c e d.

- f) Agora, abra o Geogebra e faça o seguinte:
- i. Escreva no campo de entrada do Geogebra a expressão $e=1$ e aperte ENTER.
 - ii. Mostre na tela a reta de equação $y=+e$.
 - iii. Mostre na tela a reta de equação $y=-e$.
 - iv. Clique com o botão direito sobre o campo “e” mostrado na coluna algébrica e escolha “Exibir”. Aparecerá um controle deslizante para alterar o valor do número “e”.
 - v. Clique com o botão direito no campo “e” mostrado na coluna algébrica. Escolha Propriedades. Modifique as propriedades para $\text{min} = 0$, $\text{max} = 1$, $\text{Incremento} = 0.01$ e $\text{Largura} = 200$. Feche a janela.
 - vi. Arraste o controle de “e” todo para a direita. Você é capaz de determinar n a partir do qual b_n está na faixa determinada por $+e$ e $-e$?
 - vii. Diminua e para ficar $e = 0.5$. Existe n a partir do qual os termos da sequência ficam entre os valores numéricos $-e$ e $+e$?
 - viii. E se diminuirmos e para $e = 0.4$? E se diminuirmos para $e = 0.2$? E se diminuirmos para $e = 0.1$?
 - ix. E se diminuirmos e para $e = 0.01$?
 - x. Você consegue encontrar valor de n a partir do qual os termos da sequência se situam entre os valores $-e$ e $+e$, se $e = 10^{-4}$, $e = 10^{-7}$, $e = 10^{-12}$? Se sim, descreva o procedimento utilizado.
- g) Compare os resultados estimados no item f) com os valores calculados nos itens c) e d). São os mesmos? Estão próximos?
- h) Em qual programa foi mais fácil encontrar os valores de n solicitados? Justifique.
- i) Do seu ponto de vista, o uso dos dois softwares, simultaneamente, pode facilitar o entendimento e resolução das questões solicitadas? Justifique.

Espera-se que os alunos percebam que estão realizando as mesmas atividades, mas com o uso de diferentes representações (sistemas semióticos distintos), e que possam usar o Geogebra para estimar um valor inicial para n e comprovar isso com o uso do sistema semiótico aritmético mostrado no wxMaxima. Os valores que os alunos deverão encontrar para os itens c) e d) no wxMaxima constam na tabela a seguir:

Faixa	$[-0.0001; 0.0001]$	$[-10^{-7}; 10^{-7}]$	$[-10^{-12}; 10^{-12}]$
Valor de n para b_n	10000	10^7	10^{12}

Na realização do item d) os alunos poderão encontrar dificuldades advindas da manipulação das potências de 10. Existe a possibilidade dos alunos não associarem tal representação com a representação de números decimais. O trabalho com potências de 10 é necessário devido à dificuldade de determinação de valores muito pequenos no Geogebra. Essa dificuldade engloba a demora nos cálculos e a pouca visualização dos pontos da faixa requerida, o que exige aproximações visuais muito fortes (“zoom” muito grande). Provavelmente os alunos dirão que não conseguem encontrar valores de n no Geogebra, enquanto que no wxMaxima, isso será possível.

4.8.2 Análise *a posteriori*

Apenas 11 alunos resolveram esta atividade. As dificuldades esperadas em relação à potência de 10 aconteceram de fato. Sete alunos associaram inicialmente o sinal negativo do expoente ao sinal negativo do suposto número escrito na forma decimal, como, por exemplo, $10^{-3} = -0,3$. Quando estes perceberam que as soluções comentadas estavam divergindo, ou que colegas estavam com a mesma dúvida, tiveram que usar a calculadora para determinar o valor correto das potências de 10. Ainda assim, alguns se mostravam bastante surpresos ao visualizarem o valor retornado para a potência solicitada, por exemplo, $10^{-3} = 0,001$. Ao serem questionados acerca do resultado da calculadora, os alunos surpresos refaziam os cálculos e perguntavam: “mas não tinha que aparecer o 3?”

Em relação às dificuldades nos conteúdos chamados de Matemática Básica, objeto de desapontamento de muitos professores do nível superior, já em 1957 D’Ambrósio (2011) sugeria uma reestruturação do currículo ginásial, que hoje é concernente ao Ensino Fundamental II. Sua intenção era proporcionar uma unidade maior na Matemática escolar e permitir um contato mais natural e intuitivo com a álgebra, incluindo aí as operações com os números, a fim de tornar menos maçante e inútil o ensino da disciplina. Entre as sugestões, o autor aponta os jogos e passatempos como despertadores da atenção e interesse do aluno e que podem ajudar a evidenciar o sentido do sistema de numeração atual, além de possibilitar relação com outros conceitos como o de polinômios. Afirma o autor que “a decomposição de um número, em unidades, dezenas, etc., e a introdução de potências de 10 conduz facilmente à noção de polinômio [...]” (D’AMBROSIO, 2011, p.222). Ao que parece, as sugestões não foram postas em prática, com isso, a dificuldade em compreender tais conceitos permanece.

Ainda em relação aos números, Loureiro (2004) assegura que os algoritmos para as operações elementares (adição, subtração, multiplicação e divisão) ensinados na escola (atualmente, no Ensino Fundamental I) não seguem a tendência natural de raciocínio das crianças, são complicados e sem sentido, o que prejudica a aprendizagem. A autora propõe o uso de calculadoras e enfoque no cálculo mental e problemas desafiantes e interessantes, que sejam “capazes de estimular os alunos para o gosto por resolver problemas, por pensar, por conhecer e dominar os números” (LOUREIRO,

2004, p.23). Acredito que esta metodologia aplicada às potências de 10 é capaz de minimizar essas dificuldades.

Como era esperado, o Geogebra foi usado apenas para os maiores valores de ε . Também chamou a atenção o fato de nenhum aluno ter usado o comando $abs(f(n))$, o que pode indicar o desconhecimento do significado de valor absoluto. A exploração deste termo pode tornar mais compreensível a simbologia usada na definição apresentada na tarefa 7.

Aparentemente, as explorações pretendidas foram praticadas pelos estudantes. Entretanto, pode ser realizada uma pesquisa futura por meio de atividades com módulos, épsilons e deltas, antes de propor trabalhos com o registro algébrico da definição de convergência.

Foi interessante notar que muitas vezes os alunos verificavam o resultado obtido por um *software* no outro. Por exemplo, calculavam no wxMaxima um determinado valor que estivesse numa faixa, em seguida, utilizavam o Geogebra para verificar se aquele ponto realmente estava na faixa. Além disso, por várias vezes os alunos confrontaram os valores obtidos pelo wxMaxima aos pares ordenados da sequência, apresentados no Geogebra. Marcos fez o seguinte comentário a respeito dos *softwares*: “o Geogebra é mais didático, mas não é tão bom com números muito pequenos, podendo-se usar o wxMaxima para isso”.

Uma das dificuldades apontadas pela aluna Daia, em relação ao uso do Geogebra, é que para valores de ε pequenos, como por exemplo 0,01, as retas estabelecidas como faixa ficam muito próximas ao eixo x, sendo preciso usar o zoom várias vezes. Nas palavras dela, “a linha se mantém em cima do eixo x”.

A tarefa 8 agrega, essencialmente, as situações adidáticas de ação-formulação e validação, pois ao mesmo tempo em que o aluno explora, ele pensa nas possibilidades de resolução e as testa. Veja o Quadro 19.

Situação adidática	O que caracteriza a situação adidática - Questão 8 A
Ação	Leitura e interpretação do enunciado; discussão dos comandos; observação da escrita simbólica fornecida pelo wxMaxima; Diferenciação das potências de 10; análise do comportamento da sequência dentro da faixa requerida; analogias entre o registro numérico e algébrico do wxMaxima e o registro gráfico do Geogebra.
Formulação	Elaboração de estratégias numéricas e gráficas para a convergência de uma sequência.
Validação	Verificação da convergência mostrada de forma numérica na forma gráfica e vice-versa.
Institucionalização	As potências de 10. O uso de parênteses.

Quadro 19: Caracterização da situação adidática da questão 8A

4.9 Os exercícios 9 e 10 e as análises *a priori* e *a posteriori*

4.9.1 Análise *a priori*

As tarefas 9 e 10 buscam ampliar a observação da definição de convergência para quando o limite da sequência é um ponto diferente de zero, o que, a princípio, pode favorecer o fortalecimento da compreensão da definição, ancorando-a por meio de situações diversificadas.

9 - Considere a sequência $g_n = \frac{2n}{n+1}$.

- Use o comando “Sequência [<(variável, expressão)>, <variável>, <valor inicial>, <valor final>]” para analisar a convergência da sequência.
- Identifique, se for o caso, o número L para o qual a sequência converge.
- Tome $\varepsilon = 0.5$ e construa, no Geogebra, as retas $y = L + \varepsilon$ e $y = L - \varepsilon$. (Use o comando: “e=0.5”, “y=L+e” e “y=L-e”. Aqui, L é o número que você estimou no item b)
- Descubra um valor de n a partir do qual todos os pares ordenados estejam dentro da faixa delimitadas pelas retas horizontais $y = L + \varepsilon$ e $y = L - \varepsilon$.
- Anote, numa tabela, esse valor de n e o valor de ε .
- Diminua o valor de ε para 0.1 e encontre n tal qual descrito no item d). Anote os valores de n e ε na tabela do item e). (*Clique sobre o comando do “e” e altere o seu valor, as retas mudarão automaticamente*)
- Repita o procedimento f) para $\varepsilon = 0.01$ e $\varepsilon = 0.001$
- Escreva suas observações e conclusões.
- Releia a definição de convergência. Qual o papel do ε . Quem é o L ?
- Baseado nesse experimento, o que você diz sobre a convergência ou divergência da sequência? O que é preciso observar pra saber se uma sequência converge ou diverge?

10 - Usando a mesma sequência $g_n = \frac{2n}{n+1}$ do exercício 9, vá para o *software* wxMaxima e abra um arquivo novo.

- Digite no campo de Entrada a definição do termo geral da sequência, “f(n) := (2.0)*n/(n+1)”, e aperte Enter. A expressão funcional do termo geral

estará registrada. Cuidado para que seja escrito “2.0” no numerador da expressão. Isso facilitará o trabalho com valores decimais.

b) Verifique o valor do termo de índice 50. Para fazer isso digite no campo de Entrada “f(50)” e aperte Enter, você deverá ver o valor 1.96078431372549 na tela.

c) Considere $L = 2$ (número de convergência que você achou no item b) do exercício 6) e $\varepsilon = 0.5$. Use o método da tentativa e erro para encontrar um valor n tal que $f(n) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$, isto é, encontre um número n cuja imagem $f(n)$ esteja no intervalo (1.5; 2.5). Anote os valores de ε e n numa tabela.

d) Use $\varepsilon = 0.1$ e encontre n tal que $f(n) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. Anote ε e n na tabela criada em c).

e) Use $\varepsilon = 0.01$ e encontre n tal que $f(n) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. Anote ε e n na tabela criada em c).

f) Use $\varepsilon = 0.001$ e encontre n tal que $f(n) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. Anote ε e n na tabela criada em c).

g) Use $\varepsilon = 0.0001$ e encontre n tal que $f(n) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. Anote ε e n na tabela criada em c).

h) Use $\varepsilon = 10^{-8}$ e encontre n tal que $f(n) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. Anote ε e n na tabela criada em c).

i) Use $\varepsilon = 10^{-12}$ e encontre n tal que $f(n) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. Anote ε e n na tabela criada em c).

j) É sempre possível encontrar um n tal que $f(n) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$? Justifique.

k) Compare os valores de n calculados neste exercício com os obtidos no exercício anterior. O que você pode dizer a respeito deles? Em qual modo, gráfico ou numérico, no Geogebra ou no wxMaxima, foi mais fácil de determiná-los? Comente.

A intenção de se propor a resolução das mesmas questões em dois *softwares* está na possibilidade de utilizarem-se dois sistemas semióticos distintos. Espera-se que a conversão de representações de um sistema para outro possa auxiliar a construção do conceito de convergência. Os valores de n para os ε solicitados deverão ser:

$n \setminus \varepsilon$	0.5	0.1	0.01	0.001	0.0001	10^{-8}	10^{-12}
Geogebra	3	24	198	1010			
wxMaxima	3	20	199	1999	19999	$10^{-8}-1$	$10^{-12}-1$

Vale lembrar que os resultados da pesquisa de Almeida e Viseu (2002) sugerem “a importância de uma prática de ensino/aprendizagem de conceitos de Cálculo que integrem simultaneamente as abordagens gráficas e analíticas de forma a evidenciar significados e relações” (p.217). A utilização dos dois *softwares* permite, a nosso ver, tal integração.

4.9.2 Análise *a posteriori*

O comando dado no item 1-c, da tarefa 9, não foi entendido por sete alunos, que fizeram as retas limites das faixas usando o valor de e dado, diferente das instruções

estabelecidas, como por exemplo, usavam o comando “ $y = 1 + 0.5$ ” para traçar a reta. O valor de n solicitado no item d confundiu os alunos, porque os exercícios anteriores referiam-se a este valor chamando-o de n_0 . Um aluno chegou a comentar: “mas aqui tem a mesma letra que lá na fórmula da sequência”. Isto pode configurar a não compreensão do significado das coordenadas dos pares ordenados inseridos no comando do Geogebra e de que a abscissa do par ordenado, neste caso, representava a posição do ponto, enquanto a ordenada representava o valor do termo.

Dificuldade como essa, merece atenção na reformulação da sequência. Acreditamos que a manipulação de sequências numéricas exija a concatenação entre o registro algébrico, a percepção temporal quando se admite que o índice dos termos está associado à passagem do tempo e à associação do índice com a posição da abscissa. Esses tratamentos e conversões merecem ser trabalhados com mais atividades que estimulem tais procedimentos. Contudo, é preciso atentar-se para a forma de fazer esse trabalho. É preciso fazer com que o estudante perceba que as atividades não são iguais, caso contrário, ele se sente desestimulado. As tarefas precisam despertar, nele, a vontade de vencer novos desafios. Nessa acepção, Duval (2003) sugere considerar as variações de enunciados que conservam o mesmo tipo de resolução para o problema.

A aluna Daia associou ε e L da tarefa 9 como sendo “distância do limite” e “ponto de convergência do limite”, respectivamente. No geral, os alunos associaram o valor de ε ao tamanho da faixa e L , ao limite. Isto parece indicar que uma definição escrita na forma matemática pode ser compreendida pelos alunos, desde que haja o devido tratamento. E mais, parece indicar a incoerência presente nos livros de Cálculo que apresentam a definição considerando apenas o que o aluno deveria ser capaz de compreender naquele momento de estudo.

A convergência foi explicada, em língua natural, pelo aluno Álvaro: “uma sequência é convergente quando diminuimos o valor do ε e ainda sim achamos um valor de N ”.

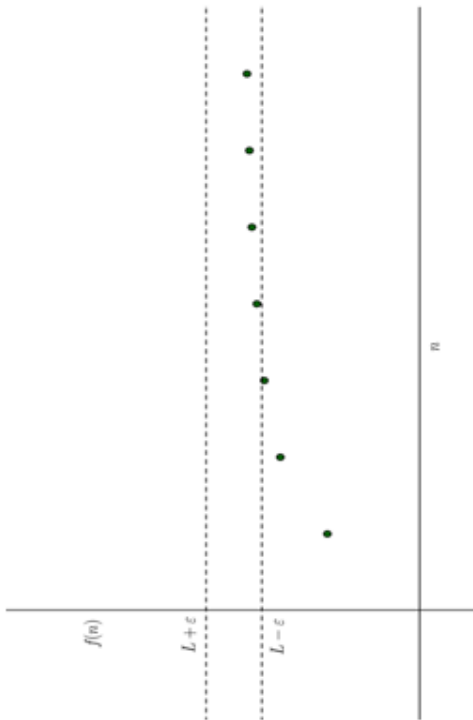
A análise das atitudes discentes durante a resolução desse exercício permitiu perceber a não compreensão da escrita matemática. Na tarefa 9 foi solicitado “um valor de n a partir do qual todos os pares ordenados estejam dentro da faixa delimitada pelas retas horizontais $y = L + \varepsilon$ e $y = L - \varepsilon$ ”. Esse exercício foi realizado pelos alunos sem muitas dificuldades na solução da questão. O único problema foi usar o controle deslizante para criar as retas. No entanto, quando questão equivalente fora dada na

tarefa 10, “encontre um valor n tal que $f(n) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ ”, por meio de uma linguagem matemática mais formal, os alunos não conseguiram entender o que deveriam fazer para encontrar o tal valor. Muitos calcularam o valor da função para o valor de ε dado.

Neste ponto, estes alunos recorreram ao Geogebra para compreenderem o resultado obtido. Notamos que este foi um recurso recorrente: os valores obtidos no wxMaxima eram “confirmados” na visualização gráfica do Geogebra. Alguns alunos, além de fazerem isso, ainda observavam as coordenadas dos pontos da sequência mostrados na janela de álgebra do Geogebra para relacioná-los aos valores calculados no wxMaxima, como já comentado anteriormente. Isso mostrou a importância do uso de mais de uma representação semiótica para a compreensão.

A dificuldade detectada para determinar o valor n tal que $f(n) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$, pode estar associada à abordagem gráfica usualmente utilizada no ensino: a pontual. Geralmente, são esboçados gráficos de funções a partir da atribuição de valores numéricos à variável x , situada sobre o eixo horizontal, e a partir da qual é determinado um valor numérico para a variável y , que está no eixo vertical, sem maiores análises. Esta forma de agir inviabiliza, em muitos casos, a coordenação desse registro pelo indivíduo, o que dificulta a atividade de conversão de representação. Normalmente não são requeridos exercícios, muitas vezes, nem exemplos, em que se exige pensar no modo contrário: do gráfico para a álgebra, ou para a língua natural, ou para números, o que contribuiria para a referida coordenação.

Para que o aluno associe a expressão “ n tal que $f(n) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ ” ao procedimento gráfico de traçar retas horizontais, como se pretendeu, é preciso que o aluno consiga passar pela codificação das informações, isto é, ele deve explicitar as conexões locais entre o gráfico apresentado e o que é requerido no enunciado. Mas esta tarefa não é fácil. No Quadro 20 são apresentadas as codificações requeridas para essa conversão. Além de não congruências, algumas vezes a dificuldade advém do próprio sistema de ensino. Observemos:

Representação Gráfica para uma sequência	Codificações necessárias para a resolução do problema (isto é, responder a atividade)	Dificuldades causadas pelo ensino
	<ol style="list-style-type: none"> 1. No eixo horizontal está a variável n e no eixo vertical está a variável $f(n)$ (isto é admitir $n = x$ e $f(n) = y$) 2. $f(n)$ representa o valor numérico do termo que ocupa a posição n. 3. Cada ponto do gráfico possui duas coordenadas, uma no eixo horizontal, outra no eixo vertical, isto é, cada ponto é da forma $(n, f(n))$ 4. As retas horizontais, de equações $y = L + \varepsilon$ e $y = L - \varepsilon$ determinam uma faixa horizontal, de amplitude vertical 5. Se um ponto está dentro da faixa, então $f(n) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ 6. Se $f(n) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$, posso determinar o valor de n correspondente ao $f(n)$ 7. A partir do termo que tem esta posição n, todos os pontos estarão dentro da faixa. 8. Este valor n é o número que responde ao enunciado 	<p>Mudança de nome: Geralmente, no eixo horizontal está a variável x e no eixo vertical está a variável y.</p> <p>Tipo de Abordagem gráfica: normalmente não se interpreta o gráfico globalmente para compreender o significado das coordenadas, tampouco sua representação algébrica. Além disso, não é congruente a conversão Registro Gráfico X Registro Algébrico.</p> <p>Não congruência: a faixa é visualizada na horizontal, mas seus valores devem ser observados na vertical.</p> <p>Não há univocidade semântica.</p> <p>Não congruência: é preciso observar valores no eixo vertical mas é um valor na horizontal que responde ao enunciado.</p>

Quadro 20: Codificação necessária para a conversão de um registro algébrico para um numérico

Neste processo, apesar das dificuldades, da repetição de atividades, as conversas efetivadas pelos alunos foram importantes para dar sentido aos pares ordenados mostrados pelo Geogebra, para as diferentes sequências. A linguagem usada pelos alunos e entre alunos é mais acessível. Esse diálogo pode transmitir com clareza a idéia do saber visado sem sobrecarregar o discurso com termos técnicos, o que geralmente acontece no discurso do professor, mesmo que ele cuide para usar uma linguagem simples e clara.

Disto infere-se que o diálogo entre alunos pode e deve ser usado como aliado docente para a efetivação da aprendizagem discente. E esta alternativa tem sido deixada de lado em aulas de Cálculo, talvez pelo pouco tempo disponível para a disciplina, ou por acomodação do professor, ou, ainda, porque o professor não sabe como fazer isto!

Aqui pode também ter havido confusão na nomenclatura $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$, pois os livros de ensino médio têm trazido a notação por colchetes, e não a que usa os parênteses, para representar um intervalo aberto. As notações adotadas para intervalos, as trocas, explicitamente percebidas como $]a, b[$ por (a, b) , são pontos que merecem ser estudados futuramente, uma vez que muitos alunos, especialmente do Ensino Médio, momento em que estas notações são inseridas no ensino da Matemática, não compreendem claramente o porquê de um intervalo estar aberto ou fechado, de um ponto pertencer ou não ao intervalo. Talvez isso se dê em razão da significação atribuída, pelo aluno, aos números reais e à confusão que existe em sua mente, entre estes e os números naturais, perceptíveis no seu dia-a-dia.

Observe a representação dos intervalos e valor de n anotados pela aluna Daia, na Figura 16:

$$\begin{aligned}
 & d) \quad \epsilon = 0,1 \\
 & \quad \{2 - 0,1 = 1,9\}; \{2 + 0,1 = 2,1\} \rightarrow f(20) \\
 & e) \quad \epsilon = 0,01 \\
 & \quad \{2 - 0,01 = 1,99\}; \{2 + 0,01 = 2,01\} \rightarrow f(200) \\
 & f) \quad \epsilon = 0,001 \\
 & \quad \{2 - 0,001 = 1,999\}; \{2 + 0,001 = 2,001\} \rightarrow f(2000) \\
 & g) \quad \epsilon = 0,0001 \\
 & \quad \{2 - 0,0001 = 1,9999\}; \{2 + 0,0001 = 2,0001\} \rightarrow f(20000) \\
 & h) \quad \epsilon = 10^{-8} \\
 & \quad 0,00000001 = 1,99999999 / 2,00000001 \\
 & \quad \rightarrow (200000000)
 \end{aligned}$$

Figura 16: anotação de ϵ e n requeridos na tarefa 10 - aluna Daia

O registro apresentado na Figura 16 indica que, para esta aluna, não há diferença entre os sinais de parênteses e chaves.

O Quadro 21 apresenta a caracterização das questões 9 e 10, em relação à TSD.

Situação adidática	O que caracteriza a situação adidática - Questão 9-10 A
Ação	Leitura e interpretação do enunciado; discussão dos comandos; observação da escrita simbólica fornecida pelo wxMaxima; distinção das potências de 10; análise do comportamento da sequência dentro da faixa requerida; relação entre a faixa da tarefa 9 e a escrita simbólica da faixa, da tarefa 10; analogias entre o registro numérico e algébrico do wxMaxima e o registro gráfico do Geogebra; detecção do valor limite da sequência pelos métodos numérico e gráfico.
Formulação	Elaboração de estratégias numéricas e gráficas para a convergência de uma sequência.
Validação	Verificação da convergência mostrada de forma numérica na forma gráfica e vice-versa; comparação com critérios de convergência anteriormente elaborados.
Institucionalização	A notação simbólica para a faixa, usando a noção de par ordenado.

Quadro 21: Caracterização da situação adidática das questões 9-10A

4.10 A tarefa 11 e as análises *a priori* e *a posteriori*

4.10.1 Análise *a priori*

A tarefa 11 reforça a situação de que a convergência é uma aproximação numérica. Espera-se que os alunos construam relações que indiquem que uma sequência convergente deve ter seus termos cada vez mais próximos do possível “número limite”.

11 - Considere a sequência $h_n = \frac{2n}{2n+3}$.

- a) Analise a convergência da sequência h_n e, se convergente, determine o número para o qual ela converge.
- b) Sendo L o número para a qual h_n converge, use o método da tentativa e erro para encontrar um valor n tal que $f(n) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$, para os casos abaixo estipulados. Anote os valores de ε e n numa tabela. Use o software wxMaxima ou o Geogebra, o que preferir.
 - i. $\varepsilon = 10^{-1}$
 - ii. $\varepsilon = 10^{-3}$
 - iii. $\varepsilon = 10^{-7}$
 - iv. $\varepsilon = 10^{-10}$
- c) É sempre possível encontrar um n tal que $f(n) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$? Justifique.

Nesse ponto da investigação, possibilitamos ao aluno escolher qual sistema de representação lhe agrada mais. A possibilidade de utilização de dois *softwares* com diferentes representações é possível, com eficiência, apenas para valores iniciais de épsilon. À medida que a ordem de grandeza diminuir, a escolha dos estudantes deverá recair sobre o wxMaxima, já que o poder de cálculo deste é maior que o do Geogebra.

Esta atividade pode ser considerada como tendo uma função de objetivação, pois exige que o aluno tenha compreendido que a convergência implica na existência de um limite e reconheça as propriedades para tal existência numa função racional, como é o caso.

4.10.2 Análise *a posteriori*

Neste exercício, os alunos usaram o Geogebra para analisar a convergência, que fizeram por meio do critério intuitivo que os pontos da sequência deveriam formar uma reta horizontal, a partir de um determinado valor, e o wxMaxima para calcular os valores de n solicitados no item b. Novamente, precisaram de auxílio para montar a tabela. Ainda assim, todos os alunos perceberam que o limite da sequência apresentada era 1.

Em relação à possibilidade de sempre encontrar um n tal que $f(n) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$, de que trata o item c, todos os alunos afirmaram, depois de realizado o item b, em outras palavras, que “sim, pois a expressão é convergente” (Álvaro).

Outro fato que chamou a atenção foi a dificuldade de alguns alunos associar a escrita “ n tal que $f(n) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ ” à faixa usada na tarefa 9, mesmo já tendo sido usada tal expressão. Inferimos que a conversão do registro algébrico para o registro gráfico na direção “vertical” tenha sido mais difícil, já que o mais habitual é a conversão do registro algébrico com a disposição de números reais na direção do eixo x (horizontal).

O Quadro 22 mostra a caracterização da questão 11.

Situação adidática	O que caracteriza a situação adidática - Questão 11 A
Ação	Leitura e interpretação do enunciado; discussão dos comandos; observação da escrita simbólica fornecida pelo wxMaxima; distinção e operação com as potências de 10; análise do comportamento da sequência dentro da faixa requerida; relação entre a faixa da tarefa 9 e a escrita simbólica da faixa, da tarefa 10; analogias entre o registro numérico e algébrico do wxMaxima e o registro gráfico do Geogebra; detecção do valor limite da sequência pelos métodos numérico e gráfico.
Formulação	Elaboração de estratégias numéricas e gráficas para a convergência de uma sequência.
Validação	Verificação da convergência mostrada de forma numérica na forma gráfica e vice-versa; Comparação com critérios de convergência anteriormente elaborados.
Institucionalização	Operação com números decimais. A interpretação do valor retornado nas calculadoras científicas.

Quadro 22: Caracterização da situação adidática das questões 11A

4.11 A tarefa 12 e as análises *a priori* e *a posteriori*

4.11.1 Análise *a priori*

A tarefa 12 instiga o aluno a relacionar as observações dos experimentos com a escrita formal, tendo por base a nomenclatura apresentada na definição.

12 - Considere a definição: Se $\{a_n\}$ **converge** para o número L , escrevemos $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$, ou simplesmente $a_n \rightarrow L$, e chamamos L de **limite** da sequência.

- Para as sequências classificadas como convergentes no exercício 3, escreva a convergência da mesma maneira que a apresentada no enunciado desse exercício.
- Compare essa escrita matemática com a que foi elaborada por você no exercício 2. Há semelhanças? Comente.

- c) Qual a dificuldade sentida na elaboração da escrita no exercício 2.
- d) Na sua opinião, o que fica mais fácil de compreender: o seu modo de escrever ou o “modo oficial”? Por quê?

Espera-se que os alunos tenham construído diferentes situações que lhes forneçam possibilidades de compreender o conceito de convergência e sua relação com a teoria de limites. Acredita-se que, ao chegarem a esse ponto, possam representar a convergência com o uso de signos formais do sistema algébrico sem grandes dificuldades.

4.11.2 Análise a posteriori

Ao contrário do esperado, alguns alunos ainda tiveram que ler e reler a definição várias vezes para entender o significado das notações, porém, depois disso, quase todos escreveram sem dificuldades a convergência na notação de limites (Figura 17), mesmo que com alguns ‘desacertos’, como é possível perceber pela Figura 18.

$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ = NOTAÇAS Limite
 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 1$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0$

Figura 17: Representação de convergência de um aluno

$b_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n} \rightarrow b_n \rightarrow L \rightarrow b_n \Rightarrow 0$
 $c_n = \frac{n-1}{n} \rightarrow c_n \rightarrow L \rightarrow c_n = 1$
 $d_n = \frac{1}{n} \rightarrow d_n \rightarrow L \rightarrow d_n = 0$

Figura 18: Notação de convergência de uma das alunas participantes do curso

A escrita apresentada na Figura 18 nos permite deduzir que a aluna confunde o significado de ‘tender a’ e o ‘limite é’. Isso indica que o professor deve tomar muito cuidado com os termos usados em sala de aula, bem como, deve assegurar-se da compreensão dos alunos sobre os termos matemáticos usados para explicar um conceito ou definição.

Neste sentido, ressalta-se a dificuldade apontada pelo aluno Álvaro para a elaboração da escrita matemática num exercício anterior: “transformar o pensamento (linguagem comum) em linguagem matemática”. Isto pode ser minimizado se, desde os anos iniciais da escolarização, os professores relacionarem os diversos registros de representação semiótica à linguagem matemática, tendo em conta o nível de abstração característico de cada fase escolar, ou seja, levando-se em conta os possíveis obstáculos ontogenéticos (BROUSSEAU, 1976).

Na comparação com a tarefa 2, os participantes afirmaram não saber o conceito de limite para escrever o observado nas sequências com o uso da notação requerida. Todos afirmaram que o modo pessoal é mais fácil de ser compreendido que o modo formal. Cabe ao professor propor a utilização de ambos os registros, já que o primeiro pode estar carregado de vícios que poderão se tornar obstáculos para aprendizagens futuras e estar distante do modo “correto”. Alguns alunos alegaram ser mais fácil a escrita matemática por causa da “certeza” da resposta. No entanto, quando questionados a respeito das discussões entre os grupos antes da escrita “formal”, se era mais fácil ou não de compreender, os participantes foram unânimes em dizer que a comunicação em língua natural é mais compreensível. Em relação a este assunto, o aluno Álvaro comenta “a linguagem comum, pois se associada a linguagem matemática fica mais fácil de compreender”.

Mais uma vez há indicativo de que a conversão de registros de representação semiótica traz significativos aportes na aprendizagem, especialmente quando se considera a língua natural como um dos registros. Ficou evidente, neste minicurso, a necessidade de compreensão do conceito matemático via língua natural.

O Quadro 23 indica a tipologia da questão 12.

Situação adidática	O que caracteriza a situação adidática - Questão 12 A
Ação	Escrita simbólica da convergência das sequências; comparação da escrita feita na tarefa 2 com a apresentada.
Formulação	Elaboração de Estratégias de escrita da convergência; reconhecimento dos signos formais.
Validação	Confronto entre a estratégia e a definição apresentada no enunciado da questão.
Institucionalização	Representação simbólica para a convergência

Quadro 23: Caracterização da situação adidática da questão 12A

4.12 A tarefa 13 e as análises *a priori* e *a posteriori*

4.12.1 Análise *a priori*

A tarefa 13 investiga se os alunos foram capazes de encontrar alguma estratégia para criar uma sequência convergente.

13 - Crie uma sequência convergente, e represente essa convergência por meio da notação apresentada no exercício 12. Justifique.

Existe a possibilidade dos alunos relacionarem sequências convergentes com aquelas que são definidas por quocientes, e escreverem sequências com termo geral dado na forma de quocientes de expressões aritmético-algébricas. Como eles já estudaram o assunto “limites” em disciplina regimental anterior, há a possibilidade de alguns deles escreverem sequências a partir da observação do comportamento dos termos de maior grau desse quociente.

4.12.2 Análise *a posteriori*

De início os alunos se espantaram por terem que criar uma sequência convergente, mas, passado o choque inicial, começaram a testar algumas opções no Geogebra. Como era esperado, a maior parte dos alunos montou sequências com termo geral na forma de quocientes e recorreram à análise das sequências anteriores para observar um padrão. Alguns alunos perceberam que, para estes casos, deveria ser observado o termo de maior grau da expressão, pois sempre que o grau do polinômio do numerador era maior que o grau do polinômio do denominador a sequência criada não era convergente. Um exemplo de resposta está apresentado na Figura 19, que também

revela a importância de mais tarefas em que a expressão matemática deve ser convertida para a língua natural e vice-versa, como já apontavam os trabalhos de Dall'anese (2006), Mariani (2006) e Adu-Gyanfi, Bossé e Faulconer (2010).

$f(n): \frac{n^{-1}}{2}$
 $\lim_{n \rightarrow 0} f_n = 0$

O numerador sempre será menor que o denominador e qto mais aumenta o valor de n , mais próximo da se aproxima do limite que é zero

Figura 19: Resposta da pergunta 13, do aluno Álvaro

A compreensão da convergência e de sua representação algébrica é importante para a compreensão dos elementos componentes da definição de integral definida e acreditamos que fazem parte do seu campo conceitual.

Dos diálogos entre os alunos, foi percebido que a relação do grau do polinômio com a convergência foi associada às regras para cálculo de limites no infinito: experimentando fórmulas para criar sequências convergentes os alunos atribuíram sentido ao cálculo de limites no infinito.

Ou seja, aqui se percebe uma oportunidade de apresentar questões análogas a essa quando o conteúdo “limite no infinito” é trabalhado em sala de aula, pois, pelo que foi possível perceber, por mais detalhadamente que esse assunto tenha sido trabalhado, esses alunos não conseguiram perceber a aplicabilidade daquela teoria.

A classificação tipológica desta questão está apresentada no Quadro 24.

Situação adidática	O que caracteriza a situação adidática - Questão 13 A
Ação	Discussão e criação de uma sequência convergente.
Formulação	Elaboração de estratégias para compor a convergência de sequências.
Validação	Verificação experimental do critério de convergência estabelecido para sequências convergentes.
Institucionalização	Limites no infinito e os critérios de convergência.

Quadro 24: Caracterização da situação adidática da questão 13A

4.13 A tarefa 14 e as análises *a priori* e *a posteriori*

4.13.1 Análise *a priori*

A tarefa 14, nesta etapa, é apenas uma provocação.

14 - Pense em uma nova sequência s_n em que cada termo é a soma do n -ésimo termo da sequência, com os termos anteriores (exemplo: para a sequência a_n , do exercício 1, $s_1 = 1$, $s_2 = 1 + \sqrt{2}$, $s_3 = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$, e assim por diante).

- i. Você acredita que essa sequência (das somas) possa ser convergente? Explique.
- ii. Teste sua conjectura com as sequências dadas no exercício 1. Escreva suas conclusões.

Acredita-se que os alunos possam dizer que as somas nunca convergem, uma vez, ao adicionar sempre uma quantidade a um número, a tendência é sempre obter um número maior, portanto, as somas não devem convergir. A intenção de tal enunciado é iniciar os estudantes na investigação de “somas infinitas”, situação associada ao campo do conceito de integral de Riemann.

4.13.2 Análise *a posteriori*

A resposta unânime foi de acordo com o esperado: todos afirmaram, com diversas palavras, que não é possível acrescentar sempre “alguma coisa” em um número e essa soma ainda ser convergente. No entanto, parece ter havido um direcionamento em relação ao exemplo apresentado, mesmo tendo sido solicitada a análise das demais sequências. Talvez, se uma sequência convergente tivesse sido apresentada, a resposta teria sido diferente.

A dificuldade em acreditar na possibilidade de somas infinitas serem convergentes, aqui relatada, também é exposta no trabalho de Contreras e Ordoñez (2006), no qual esta questão é citada como sendo um obstáculo epistemológico (BROUSSEAU, 1976). Apesar disto, não parece haver muita preocupação com o tratamento dado às somas infinitas que convergem, nos livros-textos descritos na seção 2, o que contribui para a incompreensão dos conceitos que são baseados nesta noção.

A questão 14 pode ser caracterizada como mostra o Quadro 25.

Situação adidática	O que caracteriza a situação adidática - Questão 14 A
Ação	Discussão de convergência de somas de termos de sequência.
Formulação	Elaboração de critério de convergência de soma.
Validação	Verificação experimental do critério nas sequências da tarefa 1.
Institucionalização	Nomenclatura para soma de termos de uma sequência.

Quadro 25: Caracterização da situação adidática da questão 14A

4.14 Os exercícios 15 e 16 e as análises *a priori* e *a posteriori*

4.14.1 Análise *a priori*

A tarefa 15, que pode ser caracterizado como uma situação de formulação, permite analisar o quanto os alunos relacionaram os conceitos trabalhados nesta etapa.

15 - Se você tivesse que dizer a alguém um critério para analisar a possível convergência de uma sequência o que você diria? Escreva sua resposta.

Espera-se que ao completarem as tarefas anteriores, as situações exploradas permitam a consolidação de um campo de conceitos afetos ao conceito de integral de Riemann, por isso faz-se a proposta enunciada na tarefa 16.

16 - Elabore um mapa conceitual (use o software *cmap tools*) em que constem os assuntos contemplados nesta primeira parte e suas relações. Entregue este mapa.

Um possível mapa que envolve conceitos trabalhados nas atividades descritas está na Figura 20. Entende-se que devam aparecer ligações entre os conceitos de sequência, convergência e divergência, necessariamente, além das relações entre os conceitos de convergência, limite e valores finais. Como um mapa conceitual é individual e mutável devido às experiências pessoais com situações estudadas, torna-se difícil propor, *a priori*, mais que as informações aqui descritas.

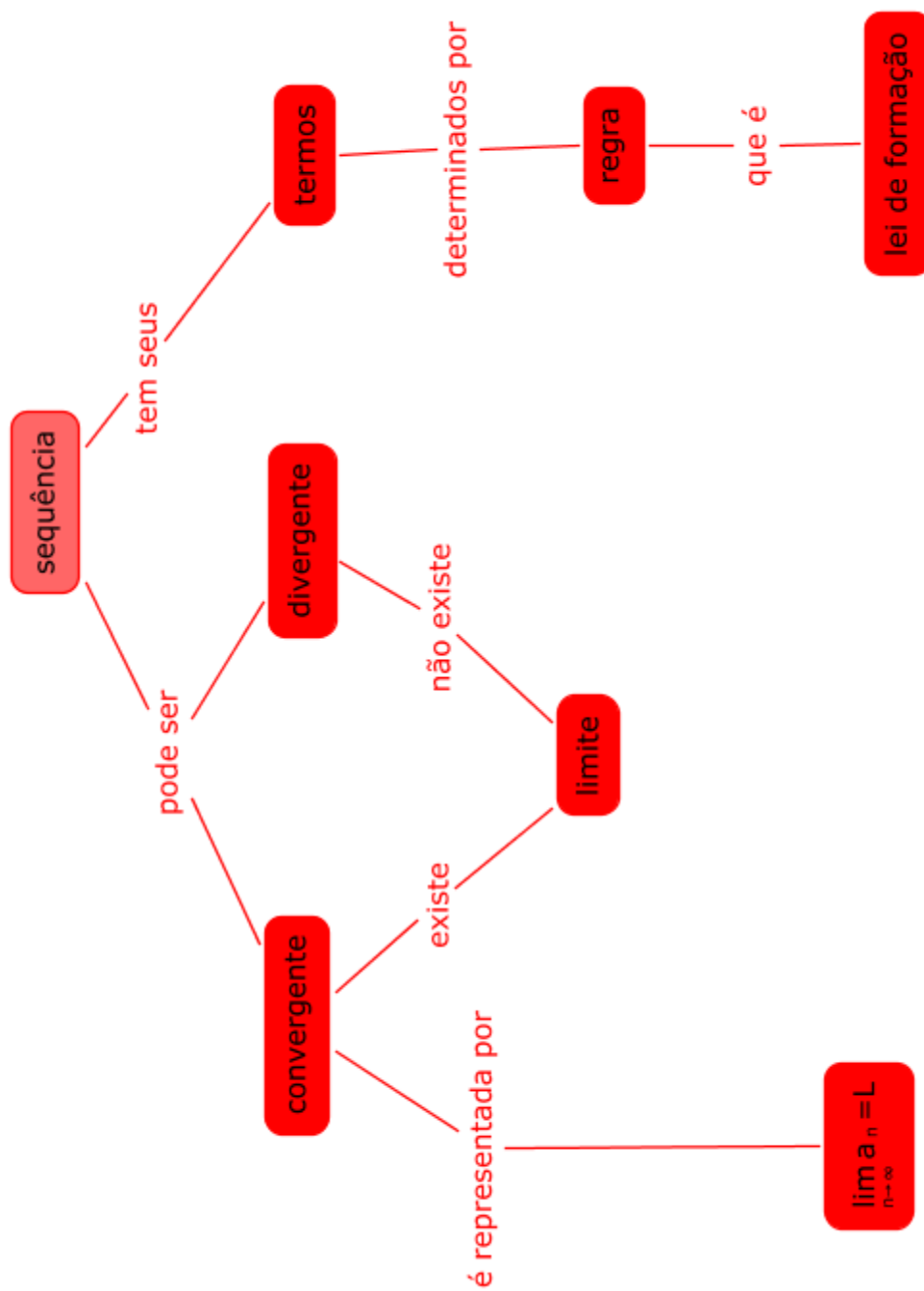
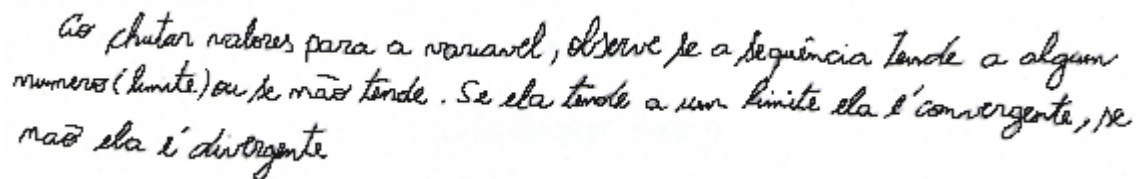


Figura 20: Estimativa de mapa conceitual para os conceitos associados à parte A

4.14.2 Análise a posteriori

Para a tarefa 15 todos os alunos apresentaram a existência do limite como critério de convergência. Vejamos um exemplo na Figura 21:



As chutar valores para a variável, observe se a sequência tende a algum número (limite) ou se não tende. Se ela tende a um limite ela é convergente, se não ela é divergente.

Figura 21: Critério de convergência de sequência do aluno Álvaro

Em relação ao mapa conceitual, esperava-se que estes contivessem informações sobre o comportamento das sequências, além dos conceitos de convergência e divergência. De modo geral, os mapas apresentaram estes últimos conceitos, mas com ligações que devem ser desconstruídas. Voltaremos a esta discussão na seção 4.16.

4.15 Análise Didática das Atividades

As atividades propostas para esta parte inicial objetivaram a construção ou reforço do conceito de convergência de uma sequência numérica, fundamental para o entendimento da integral definida como um limite de uma soma infinita. Para tanto, as atividades foram pensadas como tarefas de compreensão (DUVAL, 2009), que envolvem as duas transformações de representação: tratamento e conversão.

Nas atividades, foi planejado levar o aluno à assimilação gradativa deste conceito, cuidando para que cada questão pudesse ser considerada uma situação de ação, formulação, validação ou institucionalização, como preconizadas pela TSD. O Quadro 26 aponta os enfoques usados para a compreensão do conceito de convergência nas atividades desta parte A.

Foco da Convergência da sequência numérica:	Tipo de Representação utilizado	Questões de referência
Aproximação a um determinado valor (limitante)	Gráfica	1,3,4,5
Aproximação a um valor, por meio de uma faixa	Gráfica Algébrica	6,8,9 7,10,11
Definição	Língua Natural Algébrica	3 7
Notação	Algébrica Língua Natural	2, 12 3
Convergência de uma série	Língua natural	14
Critérios de Convergência	Língua Natural Algébrica	3, 5, 9, 13, 15 7, 12

Quadro 26: Enfoque da Convergência de Sequência Numérica

A intenção era fazer com que os alunos transitassem entre os registros da língua natural, simbólico (algébrico e numérico) e gráfico, sendo este último, usado como apoio⁵⁸ às interpretações dos enunciados e dos tratamentos e/ou conversões requeridas. Em praticamente todas as atividades, o gráfico contribuía na visualização global⁵⁹ da figura, pois era necessário analisar o comportamento da sequência como um todo para concluir sobre sua convergência e, posteriormente, redigir uma resposta, seja usando a representação discursiva, seja usando a representação algébrica.

A maior parte das questões pedia para que os alunos justificassem suas escolhas ou conclusões, o que foi feito sempre usando a língua natural. Acreditamos que a produção de uma resposta faz o aluno refletir sobre os elementos envolvidos na sua resolução que o fizeram chegar a uma determinada conclusão, e isso passa, necessariamente, pela observação e análise do objeto representado. Duval (2006, p.155-156) afirma que “as tarefas de simples reconhecimento que consistem em eleger entre várias respostas possíveis são mais fáceis que as de produção que pedem que se elabore uma resposta”⁶⁰ (tradução nossa). Embora Duval (2006) reconheça a importância das tarefas de reconhecimento, o autor expõe a contribuição das tarefas de produção para a interpretação dos dados obtidos na resolução de problemas.

Além disso, a Teoria das Situações Didáticas estabelece a comunicação com um interlocutor como fator de interação fundamental nas situações didáticas de formulação.

⁵⁸ Segundo Duval (2006), na justificativa de uma conversão entre dois registros, normalmente são usados conceitos que são mobilizados por um terceiro registro. Neste caso, o terceiro registro foi o gráfico.

⁵⁹ Visualização global aqui é entendida como a que proporciona uma interpretação discursiva da figura (DUVAL, 2012), isto é, não se vê apenas a forma apresentada, mas sim o que ela representa diante do enunciado proposto.

⁶⁰ No original: “las tareas de simple reconocimiento que consisten en elegir entre varias respuestas posibles son más fáciles que las producción que piden que se elabore la respuesta”.

O Quadro 27 identifica os tratamentos e conversões requeridas nas atividades propostas. Nele, os números representam a questão em que a referida conversão é requerida.

Registro de Saída	Registro de Chegada		
	Língua Natural	Algébrico/Numérico	Gráfico
Língua Natural	1,11,14,15	2,3,13	1,13
Algébrico/numérico	1,7,8,10,15	7,8,10,11,12	1,11
Gráfico	4,5,8,9,15	6,8	

Quadro 27: Tratamentos e Conversões requeridas nas atividades da parte A

A classificação dos registros de saída e chegada foi feita levando-se em conta o que era pedido no enunciado. Na questão 1, por exemplo, a informação sobre a sequência foi dada na língua natural, sendo que no item 1.2 o aluno deveria escrever sua observação acerca do comportamento da sequência também em língua natural, isto foi interpretado como sendo um tratamento no registro em língua natural. Neste item ainda, os termos gerais estavam escritos algebricamente e requeriam uma análise, que deveria ser sintetizada em língua natural. Isso foi considerado uma conversão do registro algébrico para o de língua natural. Já o item 1.1 pedia para analisar graficamente o comportamento das sequências cujo termo geral foi apresentado em linguagem algébrica. Isso foi considerado uma conversão do registro algébrico para o gráfico. É importante ressaltar que, praticamente, todas as atividades usaram a representação gráfica como apoio à compreensão necessária à escrita da resposta solicitada. No quadro 27, foi considerada a conversão para o registro gráfico apenas quando ela era diretamente solicitada.

A sequência didática, apoiada no uso de recurso computacional, no caso, os *softwares* Geogebra e wxMaxima, e na diversidade de registros, permitiu a identificação de alguns pontos importantes, externos ao contexto puramente matemático das aulas de Cálculo, e que podem afetar a aprendizagem dos alunos, quais sejam: 1) os termos utilizados pelo professor devem ser familiares aos alunos; 2) é preciso maior autonomia do aluno na resolução de problemas e na sua comunicação.

Em relação ao primeiro ponto, deve-se destacar a dificuldade mostrada pelos alunos na distinção das palavras “expressão” e “variável”, logo no início das atividades, bem como a pesquisa da palavra “converge” na questão 3.

A exata compreensão do termo é importante especialmente quando se trata de realizar operações de conversão. Duval (2006) alerta, por exemplo, que numa conversão da representação discursiva para a algébrica⁶¹, num primeiro momento, as letras de uma equação representam números. Em seguida, no tratamento algébrico para a resolução da questão proposta, esta visão é rompida, priorizando-se a operação a ser realizada. Essa ruptura é causa de confusão, segundo o autor.

Neste ponto, ainda deve ser considerada a questão de pré-requisitos. Alguns conceitos como par ordenado, variável, função, precisam ser revisados antes da resolução destas atividades. Aliás, em vários momentos, as palavras usadas nas definições causaram dificuldades em sua compreensão. Isto indica um maior cuidado com o uso das palavras em uma definição. A princípio, pelo menos com os colaboradores da pesquisa, parece ser este um fator crucial para começar o entendimento. A distinção entre os termos expressão e variável, função e sequência, por exemplo, precisa ser melhor trabalhada, não apenas nesta sequência didática, mas também nas aulas de Matemática, especialmente em nível Fundamental e Médio.

Muitas das dificuldades dos alunos podem ser atribuídas a conceitos e definições de conteúdos já trabalhados na Educação Básica, especialmente quanto à representação analítica das situações matemáticas. Em relação a isso, Nasser (2007, s/p) afirma:

No Ensino Médio, em geral, os alunos são acostumados a resolver mecanicamente os exercícios, decorando regras e macetes, não sendo estimulados a raciocinar. No início do curso superior, se deparam com exigências que não estão prontos para enfrentar, pois não tiveram oportunidade de desenvolver habilidades de argumentação.

Para reverter esta situação, é importante a mudança metodológica docente já nos anos iniciais. Como medida paliativa para alunos de cursos superiores, é possível que a introdução de atividades exploratórias para a compreensão dos conceitos de par ordenado e função, ênfase no registro gráfico e conversão de registro, por exemplo, possam colaborar na ancoragem de conceitos. Esta postura contempla, em nosso ponto de vista, as sugestões de Cury (2000) e Nascimento (2000), que propõem, em outras palavras, a revisão intuitiva de conceitos de CDI.

A afirmação de Nasser (2007) é importante para refletirmos a urgência de modificação da postura docente⁶², pois retrata uma atitude discente não condizente com

⁶¹ Trata-se de converter “Juan es 3 años mayor que Pedro. Juntos tienen 23 años de edad. Qué edad tienen?” para a equação “ $N = x + (x + D)$ ” (DUVAL, 2006, p. 146,147).

⁶² mas não apenas dela, já que o professor está submetido às regras do sistema educacional. Não entraremos nesta discussão.

os fenômenos de interpretação global, por exemplo, apontados como essenciais ao acesso aos objetos matemáticos.

A indicação da pesquisa dos termos usados nas definições pode trazer efeitos benéficos. Por exemplo, um dos retornos da pesquisa da palavra “par ordenado” foi um artigo em que aparece o trecho seguinte:

(...) Surgia a Lógica moderna, na qual uma proposição é formada por uma expressão relacional, isto é, uma função, e um par ordenado de expressões-sujeito. Por exemplo: no enunciado ‘João é pai de Pedro’, há a expressão relacional ‘é o pai de’ e o **par ordenado {João, Pedro}**. Isso significa que existe, entre os dois objetos, João e Pedro, a relação ‘ser pai de’ (...) (D’AGORD, 2006, p.243 – negrito nosso).

A finalidade do artigo não interessa à nossa pesquisa, porém a utilização da expressão **par ordenado** seguida por dois nomes entre chaves e não entre parênteses – como é usado na matemática, pode trazer confusão ao aluno ao se deparar com uma situação como essa. Com a pesquisa, problemas assim podem aparecer em sala de aula, e o professor terá a oportunidade de atribuir significação aos significantes e aos signos na Matemática, além, é claro, de o aluno perceber outras situações em que o par ordenado é usado e, assim, compreendê-lo melhor.

Já para a palavra **parênteses**, encontra-se, também, um artigo (FIAD e BARROS, 2003) que discute a relação deles com a reescrita. As autoras argumentam: “(...) o fato de o aluno usar parênteses para intercalar suas rasuras no texto é muitas vezes interpretado como um mero isolamento do que não serve ao texto, como uma forma de separar o que será retirado na reescrita (...)” (p. 1209). Mais adiante, as autoras continuam: “(...) Mas é importante não perder de vista que essa confiança de que o uso de parênteses anula algo, pode ser um indício da sobrevivência na escola de um discurso que associa as intercalações em geral ao supérfluo, ao desnecessário, ao irrelevante (...)” (p.1211).

Estas duas últimas citações são exemplos das diferentes significações que uma mesma palavra ou signo pode ter. O professor de matemática deve ter ciência disso. O aluno vem para a escola com suas representações sociais, que podem interferir na maneira como ele age em sala de aula e em relação ao seu conhecimento. Tal discussão não é objeto desta tese, contudo, é importante enfatizar a necessidade para maior clareza dos significados dos termos usados nas definições matemáticas.

Nesse sentido, Brousseau (2003) chama a atenção para o fato de que essa dualidade das palavras pode se tornar um obstáculo didático. Comentando sobre sua pesquisa na estatística, o autor afirma:

encontramos também uma dificuldade na dualidade linguística da determinação de objetos e classes: por nomes próprios ou propriedades, para listas de nomes ou propriedades de conjuntos etc. Esta dualidade de linguagem fornece uma espécie de equivalência linguística e 'lógica' entre um elemento, um elemento genérico e a classe a que ele pertence. As mesmas palavras se referem a objetos e classes, a funções e suas imagens, etc. O abuso, denunciado mais firmemente em matemática, é em todo lugar bastante inofensivo, exceto quando a passagem do objeto ao seu representante ou o inverso são problemáticas⁶³ (BROUSSEAU, 2005, p.183 – tradução nossa).

Outro ponto a ser analisado é a autonomia discente para escrever suas conclusões ou conjecturas a respeito das observações realizadas. Acreditamos que, ao deparar-se com a tarefa de traduzir sua compreensão a respeito de um determinado conceito em um texto que possa ser compreendido por outras pessoas, o aluno irá refletir melhor sobre os aspectos observados e escrever sobre o que realmente considerou importante na sua análise. Isto pode ser fonte de informação para o docente acerca de possíveis compreensões errôneas dos conceitos estudados.

Ainda, se o aluno é estimulado a sugerir uma notação matemática para representar o conteúdo que se quer transmitir, ele pode aceitar melhor as notações convencionalmente estabelecidas, ou, pelo menos, compreender a sua necessidade.

4.16 Análise Didática dos Mapas Conceituais

Como já mencionado, esta parte A foi composta de atividades que visavam a construção do conceito de convergência numérica. Pretendia-se acompanhar essa construção mediante observação das relações apresentadas nos Mapas Conceituais (MC) elaborados pelos alunos, sendo que seis mapas foram analisados. Esperava-se que eles contivessem informações sobre os critérios de convergência como, por exemplo, a

⁶³ No original: nous trouvons aussi une difficulté liée à la dualité des moyens linguistiques de la détermination des objets et des classes: par des noms propres ou par des propriétés, par des listes de noms ou par des propriétés d'ensembles etc. Cette dualité de langage établit une sorte d'équivalence linguistique et 'logique' entre un élément, un élément générique et la classe qu'il parcourt. Les mêmes mots désignent les objets et les classes, les fonctions et leurs images etc. L'abus, dénoncé mais fermement maintenu en mathématiques, est partout assez anodin sauf quand le passage de l'ensemble à son représentant ou l'inverse sont problématiques.

existência do limite quando considerados infinitos termos da sequência explorada, bem como sua notação algébrica.

Como a maioria dos alunos ainda não conhecia Mapas Conceituais, para esta primeira confecção foi pedido que um voluntário apresentasse seu trabalho. A intenção na proposição desse procedimento era que servisse de base para a discussão dos demais mapas elaborados. Apesar de ter sido solicitado que fosse feito de forma individual, como os alunos estavam agrupados, a construção coletiva foi inevitável.

A dupla Marcos/Álvaro optou por mostrar o mapa construído por eles para a discussão inicial. É o que está apresentado na Figura 22. A Figura 23 representa o mapa final da parte A, reelaborado após discussão com todos os participantes presentes.

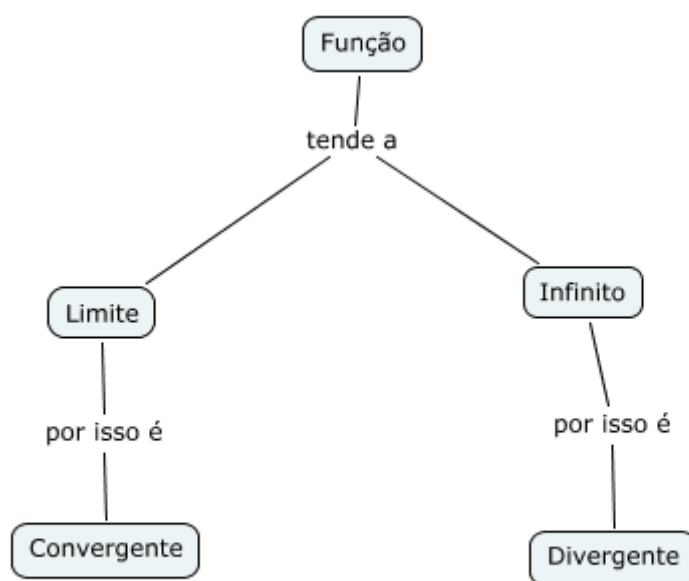


Figura 22: Mapa de Marcos/Alvaro antes da discussão coletiva

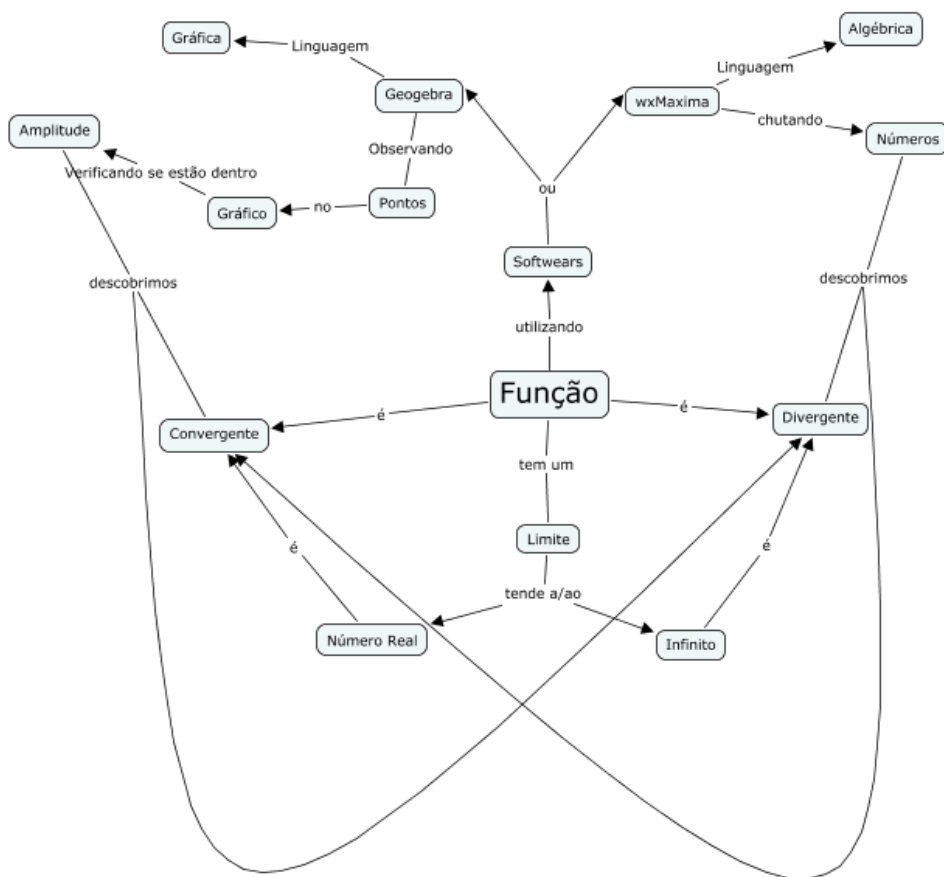


Figura 23: Mapa Conceitual da parte A, elaborado por Marcos/Alvaro após discussão coletiva

A discussão para elaboração de um mapa inicial aconteceu na sala de aula do minicurso, e foi bastante proveitosa, haja vista a compreensão dos conceitos que foram inseridos e seus significados. A diferença na apresentação dos mapas está evidente na comparação entre Figura 22 e Figura 23. Percebeu-se que os alunos tinham outros conceitos a serem acrescentados. Segundo comentários deles mesmos durante a exposição, não sabiam como acrescentá-los, no entanto, o aproveitamento presente nesta versão, foi resultado das intervenções dos demais alunos.

Sobre isso, Débora comenta: “discutindo com outras pessoas é possível olhar conceitos e frases de ligação que poderiam ser utilizados no próprio mapa ou no do colega”. Álvaro complementa “sempre tem alguém que pensa algo diferente, algo que você não havia pensado e usei isso para melhorar meu mapa”. Cabe ressaltar que a validade das discussões coletivas já foi afirmada por Ribeiro (2010), que considera que uma metodologia de ensino baseada no trabalho em grupo mostra-se “eficiente, integradora, motivadora e capaz de deixar os alunos mais confiantes” (p.303). Entendemos que tal resultado foi corroborado nesta pesquisa.

Toda a turma participou das discussões do tema, mesmo que alguns alunos tivessem vindo para aula sem o mapa elaborado. As Figuras 24, 25, 26, 27 e 28 mostram os demais Mapas Conceituais, entregues logo após a discussão.

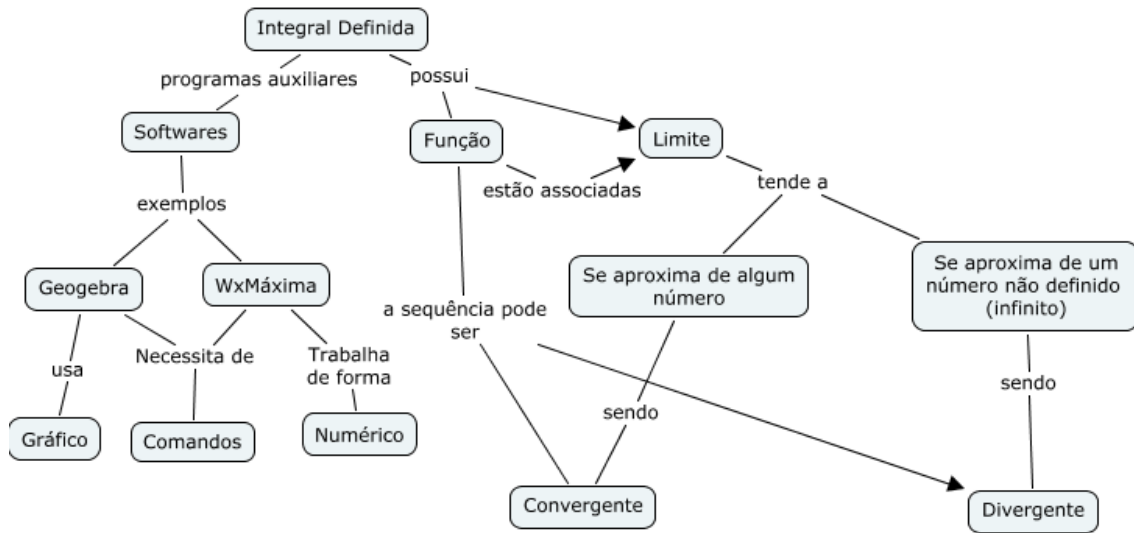


Figura 24: Mapa Conceitual relativo à parte A de Bruno/Camila

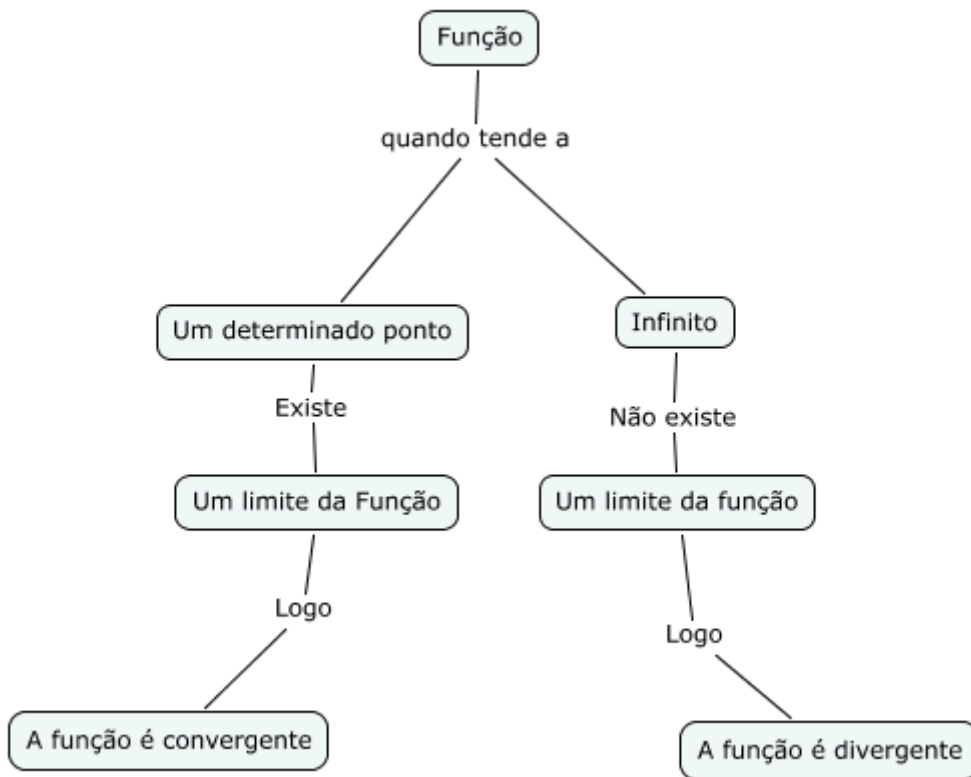


Figura 25: Mapa Conceitual da parte A da aluna Débora

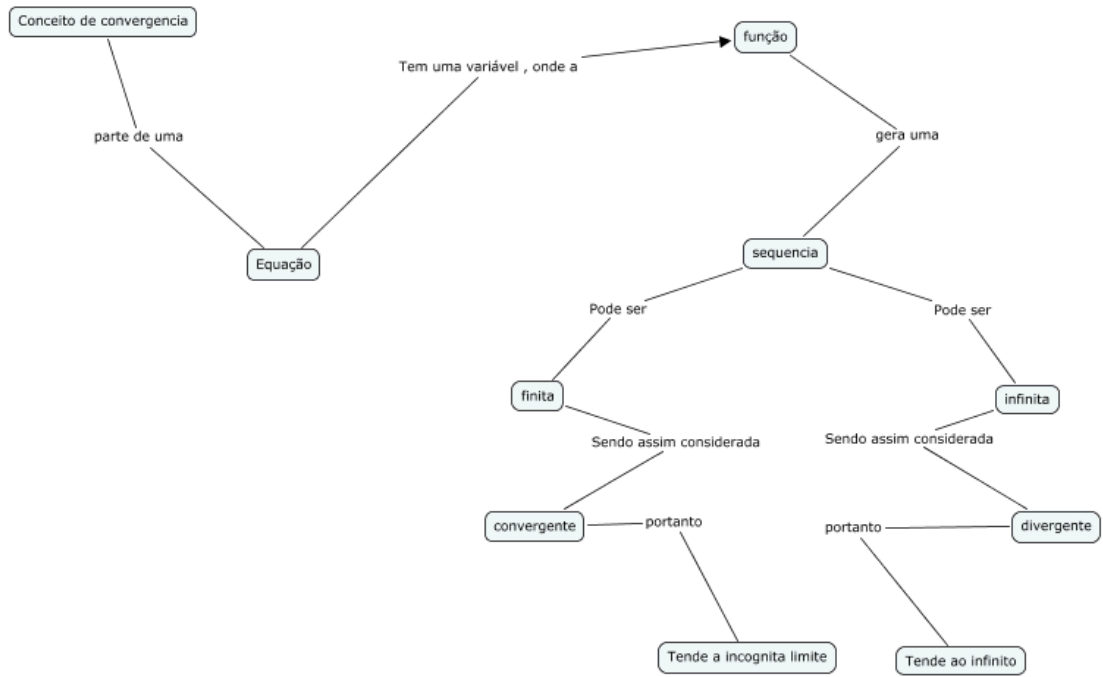


Figura 26: Mapa Conceitual elaborado pelo aluno Claison depois da discussão em sala

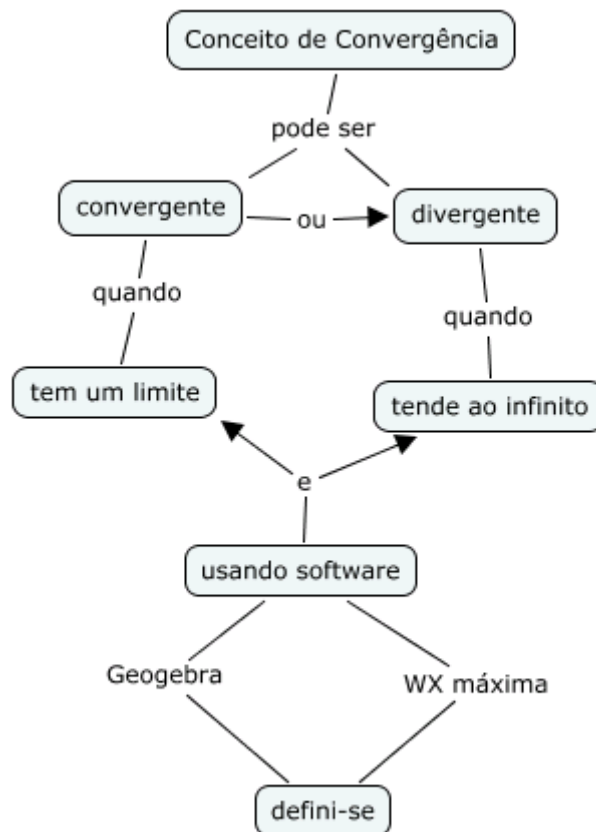


Figura 27: Mapa Conceitual da aluna Bia

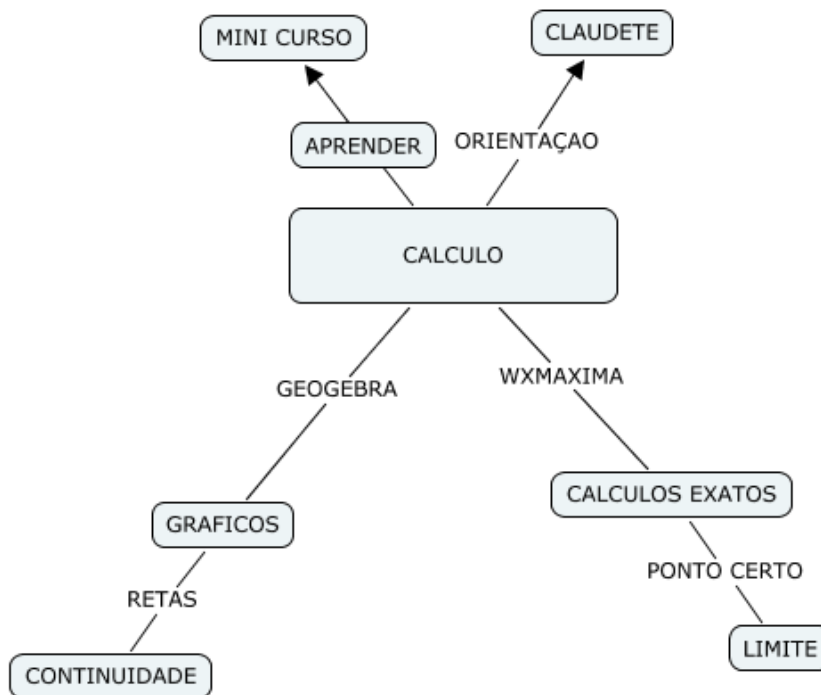


Figura 28: Mapa Conceitual parte A de Daia/Caroline

A análise dos mapas elaborados nos permite reconhecer um dos pontos esperados, ou seja, a convergência de uma sequência numérica associada à existência do limite quando n tendia ao infinito. Permite-nos, também, apontar possíveis distorções que devem ser verificadas.

Dos seis mapas analisados, a convergência associada à existência do limite aparece em cinco deles. Na Figura 29 são apresentados recortes das figuras 23 a 27 identificando essa relação.

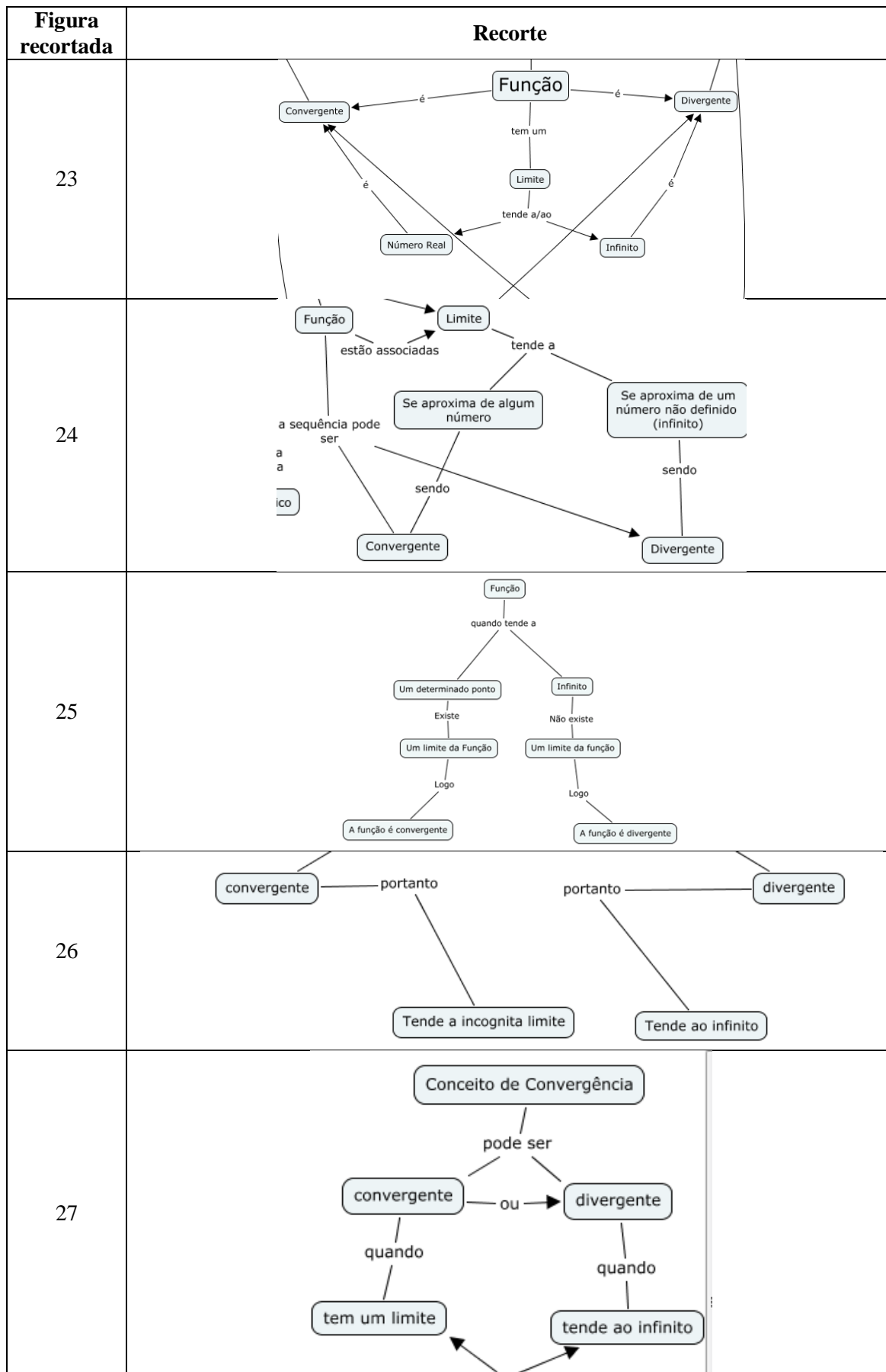
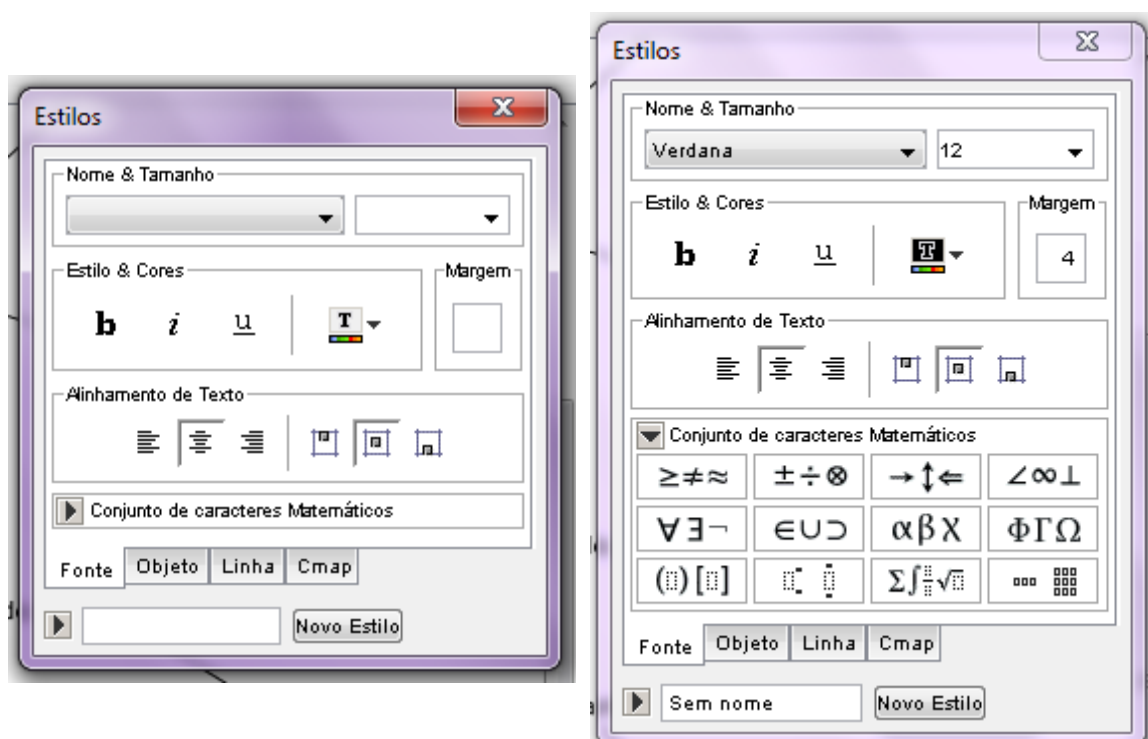


Figura 29: associação convergência X existência do limite observada nos MC dos alunos

Apesar dos MC retratarem a relação esperada, nenhum deles apresentou a notação algébrica para tal convergência. Isso pode ser devido ao desconhecimento da funcionalidade do *software* Cmap Tools, mesmo que tal opção tenha sido apresentada aos alunos no primeiro dia de curso⁶⁴, ou à dificuldade com relação à representação algébrica. No primeiro caso, usualmente o *software* abre uma janela de estilos em que os caracteres matemáticos não ficam visíveis (veja Figura 30 (a)), porém, ao clicar sobre a seta, os mesmos tornam-se acessíveis (veja Figura 30(b)). Para usá-los, basta clicar sobre eles, estando o cursor no lugar que se deseja escrevê-lo. Talvez fosse necessário um maior tempo de adaptação ao *software* para que o aluno pudesse usar satisfatoriamente essa funcionalidade.



(a)

(b)

Figura 30: Acesso aos caracteres matemáticos no *Cmap Tools*

Diferente do que havia sido previsto, os mapas conceituais elaborados não evidenciam que o comportamento de sequências é inferido a partir da análise dos “termos finais”, nem que os termos são determinados por uma regra específica. Ou seja, a análise dos mapas conceituais discentes permite detectar pontos que podem ainda não terem sido assimilados pelo aluno. Diante disso, em sala de aula, o professor pode

⁶⁴ Isso nos indica que, mesmo com a explicação do professor, o aluno apenas vai saber usar/fazer, em outras palavras, aprender, quando puser em prática o que foi dito pelo professor.

propor outras atividades que visem essa assimilação. Uma análise mais atenta indica que o professor deve retomar o assunto e esclarecer alguns pontos.

Um destes pontos refere-se ao fato que os alunos usaram a palavra “*função*” no lugar de “*sequência*”. A sequência numérica é um caso particular de uma função, assim, não é errada a substituição. Porém, como normalmente a palavra função, no âmbito do Cálculo I, é usada para aquelas cujo domínio é um subconjunto não discreto de \mathbb{R} , e a abordagem gráfica utilizada geralmente é a pontual, segundo a concepção da TRRS, pode haver confusão em relação ao traçado gráfico de outras funções. Isto pode tornar-se um obstáculo didático para aprendizagem de objetos matemáticos que necessitem desses conceitos. É importante o esclarecimento e o reforço do que seja o domínio de uma função e as implicações gráficas disso.

Brousseau (2000-2001) pontua que a identificação dos erros dos alunos é essencial para que o professor escolha uma resposta didática adequada. Há erros cuja correção apenas distrai e toma tempo. Há outros, no entanto, para os quais a correção é indispensável e possui diferenças consideráveis no tempo necessário para efetivá-la eficazmente. Estas são variáveis essenciais para o sucesso do processo de ensino.

O sentido atribuído pelo aluno à palavra função não é objeto de estudo desta tese, mas convém ressaltar que, por meio da observação dos Mapas Conceituais, é possível verificar que pode haver confusão entre os termos em questão e isto pode ser trabalhado pelo professor.

Oliveira (1997) estudou como o conceito de função é apresentado nos livros didáticos e quais as concepções de alunos e professores sobre ele, e concluiu:

[...] verificamos que os alunos, em geral, confundem atributos do conceito com os exemplos de função, incluem a noção de continuidade a este conceito, definem função como uma equação, não compreendem funções dadas por mais de uma expressão algébrica, fazem confusão entre função constante e contínua, entendem que a existência de uma expressão algébrica ou gráfico é suficiente para afirmar que estes representam uma função (OLIVEIRA, 1997, p.125).

Diante do exposto pela autora, pode ser que a confusão entre os termos função e sequência constatada nesta pesquisa, deve-se à existência da expressão algébrica como termo geral da sequência. Ainda em relação às dificuldades quanto ao conceito de função, a referida autora expõe:

Além disso, vimos que o ‘jogo de quadros’ e a mudança de registro de representação, no caso do estudo das funções, são feitos de maneira inadequada, tanto nos livros didáticos, [...], o que reflete na atuação dos professores em sala de aula. E ainda, no processo ensino-aprendizagem do

conceito de função, não é levado em consideração o aspecto qualitativo da mesma, nem os obstáculos ligados ao conceito (OLIVEIRA, 1997, p.125).

Há várias pesquisas sobre o tema função. O trabalho de Oliveira (1997), já citado, propôs uma sequência didática em que se exige a conversão de registros de representação a fim de proporcionar melhor compreensão do conceito de função; Chaves e Carvalho (2004) estudaram o tema com o intuito de construir este conceito, apresentando uma sequência didática em que se parte do significado do termo função no cotidiano; Magalhães (2009), que mostra a contribuição do *software* Geogebra, aliado à outro ambiente informático desenvolvido, para o desenvolvimento de estratégias de metacognição⁶⁵ importantes para a ação investigativa do tema. Nessa pesquisa, a mobilização destas estratégias foi observada por meio dos mapas conceituais.

A análise do MC apresentado na Figura 26, indica que há *confusões*, para o aluno, em relação à convergência. Um recorte da Figura 26 está mostrado na Figura 31.

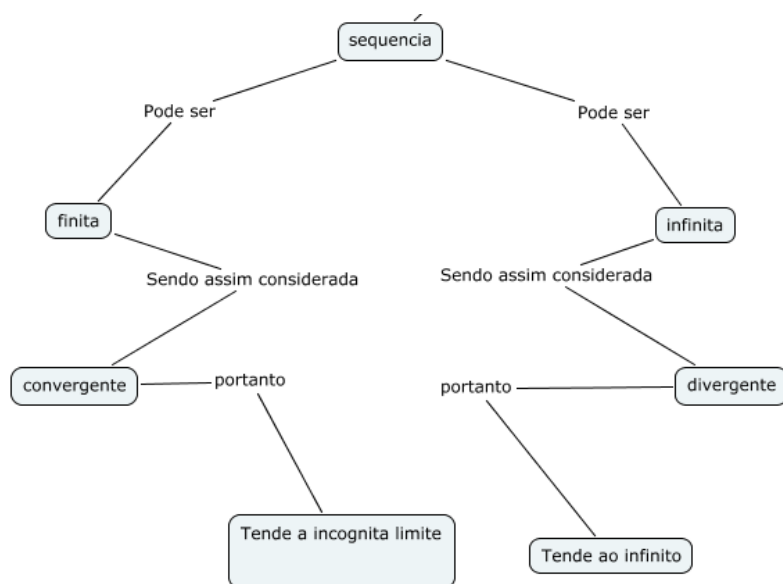


Figura 31: Confusão em relação à convergência

Notemos que o aluno representou a convergência associada ao fato da sequência ser finita, sendo que as sequências infinitas, ficaram associadas à divergência. Esta associação para a convergência contraria as atividades realizadas, já que sempre era

⁶⁵ Metacognição “é entendida como o conhecimento que o indivíduo tem de seu próprio processo cognitivo” (MAGALHAES, 2009, p.56). Magalhães considera as seguintes quatro estratégias de metacognição: 1) Experiência Metacognitiva (é um tipo de esforço intelectual que faz com que o sujeito tenha noção que não domina algo que quer compreender); 2) Conhecimento Metacognitivo (revela o conhecimento do sujeito sobre seu próprio funcionamento cognitivo); 3) Julgamento Metacognitivo (está associado a ações que revelam a necessidade de aperfeiçoar a aprendizagem); 4) Decisão Metacognitiva (está associada à capacidade de fazer ajustes baseado no julgamento metacognitivo).

pedido para aumentar a quantidade de termos e verificar a aproximação. Entretanto, este aluno usou corretamente a notação de limite para representá-la, o que induziria a inferir que ele compreendeu o conceito em estudo. Neste caso, é preciso verificar diretamente com o aluno o que ele quis representar nesse diagrama, para conhecer se a dificuldade está no entendimento do conceito ou no modo de designar essa compreensão.

De toda forma, esta informação é importante para o professor acompanhar a construção do conceito de integral definida. A confusão deve ser esclarecida para não acarretar incompreensões futuras. O diálogo com o estudante é uma forma de esclarecer esta questão.

O Mapa apresentado na Figura 28, da dupla Daia/Caroline, requer atenção. O Mapa não contém **frases** de ligação, mas **palavras**, aparentemente desconexas.

Uma possibilidade, é de que o grupo o tenha elaborado apenas como uma tarefa que tinha que ser entregue, e, portanto, não “perdeu tempo” pensando nos conceitos-chave e suas ligações (esta equipe não estava presente quando houve a discussão do mapa, que acarretou mudanças nos MC dos alunos presentes).

Outra possibilidade é de que o grupo não compreendeu o objetivo da atividade e, neste caso, uma orientação particular torna-se necessária, devido às inconsistências apresentadas. Mesmo assim, há duas informações que podem ser causadoras de obstáculos na aprendizagem destas alunas: elas estão mostradas na Figura 32 (a) e (b).

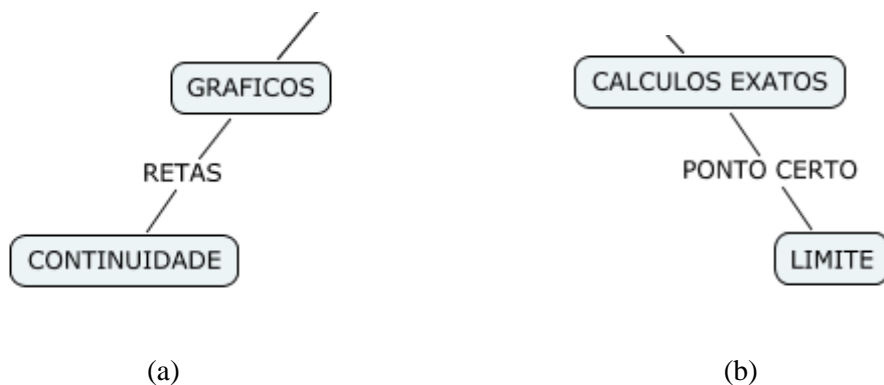


Figura 32: informações desconexas no MC de Daia/Caroline

Do que fora observado em sala de aula durante a aplicação do minicurso, infere-se que, na Figura 32(a), o conceito “Continuidade” está sendo usado como “convergente”, mesmo que sejam palavras que designam conceitos muito diferentes e que nenhum gráfico elaborado tenha sido de uma função contínua (no sentido do traçado do gráfico ser uma linha contínua), haja vista que o conjunto domínio das

sequências testadas era discreto. Porém, essa troca traz consequências sérias para outros assuntos, e, em particular, para o estudo do conceito de integral definida.

Uma possível interpretação do que foi exposto pelas alunas neste recorte é que, quando observamos a representação gráfica de uma sequência, se houver uma reta horizontal da qual os termos da sequência tornam-se cada vez mais próximos, a sequência será convergente. No entanto, não é isso que está escrito.

Contudo, esta é uma oportunidade que o professor tem de conhecer as dificuldades particulares dos alunos e orientá-los em direção à aquisição do conhecimento pretendido. Quando a falha na aprendizagem é percebida ainda no início do estudo, é possível corrigi-las sem maiores danos.

A Figura 32(b) destaca a ligação (“ponto certo”) estabelecida entre os conceitos “Cálculos Exatos” e “Limite”. Deve ser investigado o sentido dado pelas alunas a esta ligação, pois embora digamos que o limite de uma função num determinado ponto, se existir, é um número, este limite representa uma aproximação, não é exato. Ao que parece, as alunas estão assumindo o limite como um valor exato, ainda mais, inteiro. Será que elas aceitariam um número irracional como a constante de Euler e como um limite?

Outro ponto importante que pode ser analisado pelo professor é a *gravação dos passos*, um recurso do *software* Cmap Tools. O aluno Bruno gravou apenas alguns passos, mas a comparação entre o inicial e o final indica que algumas assimilações foram feitas. Observe as Figuras 33 e 34. Elas representam uma sequência de passos usados na elaboração do Mapa.

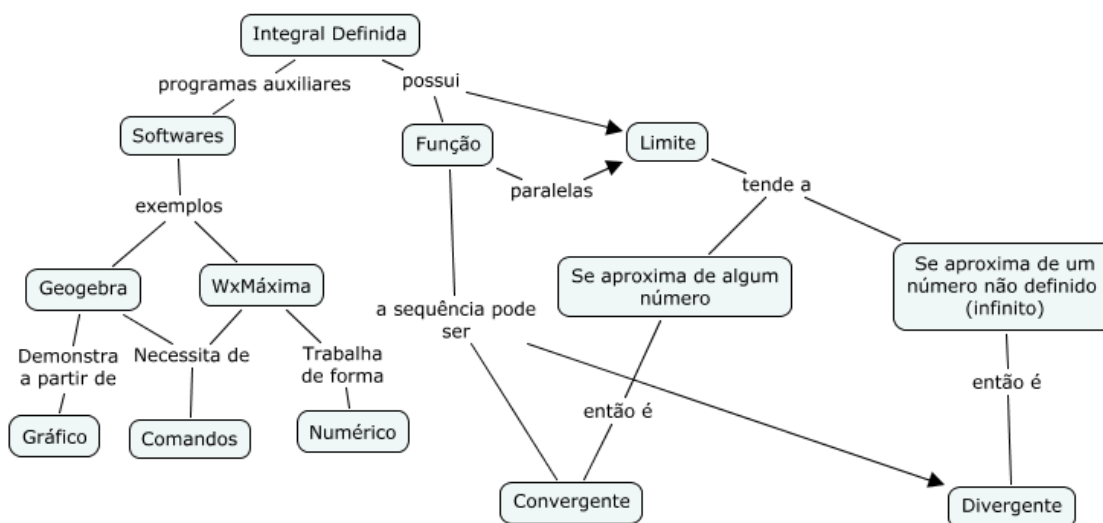


Figura 33: Mapa inicial da parte A (após discussão) do aluno Bruno

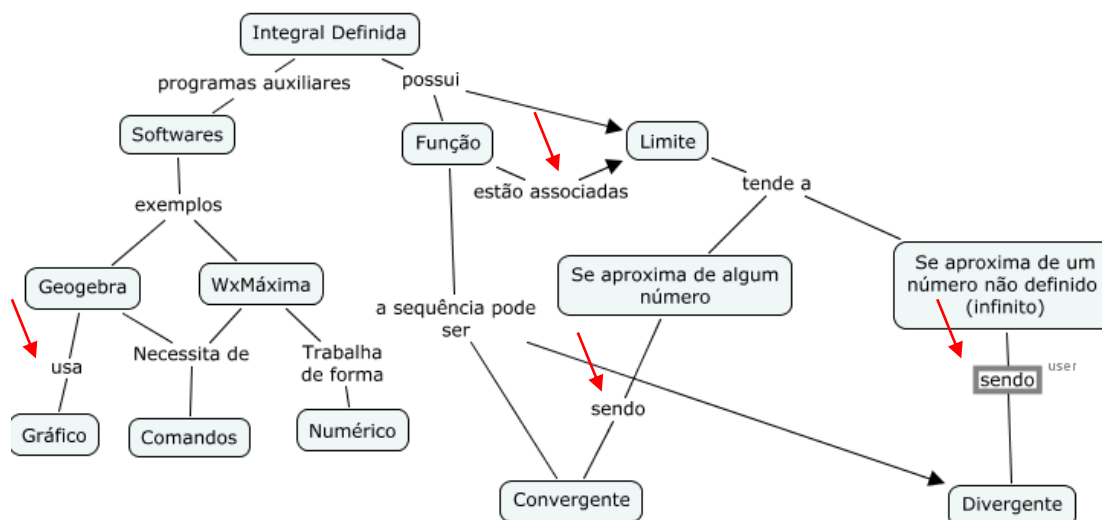


Figura 34: Mapa final da parte A (após discussão) do aluno Bruno

A alteração na frase de ligação entre os conceitos “função” e “limite” pode indicar uma não compreensão do significado de “paralelas” ou ainda que o aluno não sabe definir bem qual a relação que se está a fazer entre estes conceitos, e isto pode ser objeto de investigação docente para proporcionar aprendizagem do conteúdo em questão.

Aqui se percebe, novamente, a confusão associada ao infinito, representada pelo conceito “se aproxima de um número não definido (infinito)”. O conceito descrito pelo aluno faz pensar que este considera o infinito como um número, e, sendo assim, isto pode causar transtornos quando da análise da convergência de sequência. Como diferenciar uma sequência convergente de uma divergente se ambas se aproximam de um número? Esta implicação precisa de uma investigação mais apurada. Infelizmente, com a concentração do minicurso isso não foi possível de ser feito.

Bertolucci (2009) investigou a concepção de infinito em adolescentes e adultos com idades entre 13 e 73 anos e estabeleceu três categorias para esta noção: 1) Existência inconcebível; 2) Existência pouco previsível; 3) Infinito como uma representação de algo que não tem fim. Na pesquisa, partiu-se de situações manipuláveis, como recortar quadrados em uma folha dada, para tentar conhecer o pensamento do aluno em relação ao infinito. Tal classificação pode atestar a dificuldade do aluno, assim como de alguns professores, em compreender o significado do termo, amplamente utilizado nas aulas de CDI.

A referida autora afirma que “para a construção da noção de infinito matemático, o sujeito deve apoiar seu raciocínio em abstrações reflexionantes realizadas no plano do possível [...], ele deve trabalhar com noções que não existem no mundo real e sim no mundo das possibilidades” (id., p.89). Esse aspecto foi contemplado na nossa sequência didática, porém ainda se faz necessária maior diversidade de atividades para ancorar este conceito de infinito, essencial para a compreensão do conceito de integral definida.

Bessa Junior (2011) retrata, em sua pesquisa, que o “infinito” é tratado nos livros didáticos de Matemática desde o 4º ano do Ensino Fundamental, normalmente associado aos conjuntos numéricos. No Ensino Médio, ele expõe que a noção é tratada quando da apresentação dos conceitos de PA (Progressão Aritmética) e PG (Progressão Geométrica). No entanto, sua análise parece indicar que não tem havido preocupação dos autores de livros em **construir** esta noção no aluno. Bessa Junior (2011, p.37) destaca

Concluindo a análise da abordagem do infinito nos livros didáticos do ensino básico, encerramos o ensino fundamental, certos de que, apesar de a abordagem feita pelos autores não ser tão profunda, pois, basicamente, fazem-na pelos conjuntos numéricos, é decisiva para uma futura compreensão do tema infinito pelos alunos ao ingressarem no ensino médio.

Esse autor critica os cursos de Análise Real que não dão um enfoque compreensível ao tema e pontua:

Escolhendo o tema "infinito" pelo caminho da cardinalidade, acreditamos ter suavizado temas como conjuntos infinitos e conjuntos ilimitados, a contagem ou enumeração das frações. Também foram utilizadas funções e suas características de injetividade, sobrejetividade e bijetividade, com o intuito de demonstrar teoremas que envolvam cardinalidade de conjuntos infinitos. Acreditamos que conseguimos aqui clarear um pouco a ideia de infinitos cada vez "maiores", sempre apoiados em textos que permitam, de certa forma, uma compreensão melhor do assunto. (BESSA JUNIOR, 2011, p.98).

Independente do caminho, é fato que grande parte dos alunos que estão ingressando no Ensino Superior não tem claro o significado do infinito.

As questões sobre confusões ou exclusões percebidas nos Mapas, as apontadas nesta análise e outras, podem ser resolvidas com a apresentação, ao aluno, de uma lista de conceitos que devem aparecer nos Mapas Conceituais, como sugerem Basque, Pudelko e Legros (2003). Neste caso, os alunos, provavelmente, vão atentar-se para tais conceitos e buscar compreendê-los e distinguí-los.

Em relação à contribuição dos mapas conceituais para os professores, Jaramillo (2001, p.6) afirma: “(...) ajudam a determinar as rotas que devem seguir para organizar os significados e negociá-los com os alunos; ajudam a assinalar as concepções

equivocadas que os alunos possam ter”. Um exemplo de investigação possível a partir das informações constantes no Mapa é o significado do termo “infinito”, já comentado.

Em relação às implicações constantes nas frases de ligação nos Mapas Conceituais, estas podem ser consideradas, em geral, como locais, conforme a metodologia de Dutra, Fagundes e Cañas (2004), pois apresentam resultados de observação direta acerca dos conceitos em exploração.

Em síntese, os Mapas Conceituais elaborados para a parte A indicaram a presença do conceito visado (convergência), já que este foi citado em cinco dos seis Mapas apresentados. No entanto, sua análise indicou alguns pontos que devem ser retomados pelo professor a fim de otimizar a aprendizagem dos alunos, a saber:

- Reforçar a notação algébrica para a convergência, que não foi contemplada nos MC (talvez por desconhecimento do *software*);
- Distinguir os termos convergência e continuidade;
- Esclarecer que a convergência está associada a existência do limite no infinito, e não à finitude da sequência;
- Incentivar que os alunos escrevam suas conclusões e as discutam com seus colegas.

Pesquisas como a de Ribeiro (2010) indicam a importância do diálogo nas aulas de CDI. Esta pesquisa, até o momento, consegue indícios de que o trabalho com mapas conceituais e com atividades exploratórias em ambiente computacional podem estimular o diálogo como deseja Ribeiro (2010). Nossa pesquisa, após a análise da parte A, já indica que, com planejamento, se pode ir muito além da aula tradicional, com tempo dedicado à exposição do professor e com listas de exercícios. Conforme aponta Mometti (2007), mediante grupos de estudo e/ou pesquisa, é possível implementar sequências como a aqui apresentada.

Seção 5 - Análise *a priori* e *a Posteriori* das Atividades Propostas na Parte B

As atividades propostas na **parte B** visam trabalhar a significação dos registros utilizados na notação de somatória envolvida na definição da integral de Riemann. Propõem-se várias atividades para que o aluno vivencie situações que podem ser adequadamente “ancoradas” para se constituir o campo do conceito de somatória e de somatória infinita.

Tais atividades são classificadas como atividades de formação (DUVAL, 2009), e visam produzir representações que possam evocar o objeto somatória.

A sequência didática contemplada na parte B está apresentada no apêndice C. A seguir, apresentamos as análises *a priori* e *a posteriori* de cada questão ou grupo de questões.

5.1 Os exercícios 1 e 2 e as análises *a priori* e *a posteriori*:

5.1.1 Análise *a priori*

Inicialmente é apresentada uma descrição da utilização dos símbolos a fim de que os alunos percebam a utilização formal que envolve a mobilização dos registros utilizados. Espera-se que tal tratamento “ingênuo” permita a aquisição de habilidades de manipulação necessárias para a constituição do campo de situações do conceito de somatória e do conceito de integral de Riemann.

Os exercícios 1 e 2 visam identificar se a descrição realizada foi suficiente para que o aluno perceba o seu uso.

1. Desenvolva as expressões seguintes:

a) $\spadesuit_{k=1}^5 (3k - 5)$

b) $\heartsuit_{m=2}^5 (m^2)$

c) $\sum_{i=1}^4 (2i)$

2. Agora, estão apresentados os desenvolvimentos das expressões, sua tarefa é escrevê-las no modo conciso.

a. $(3 \cdot 5 + 7) \circ (3 \cdot 6 + 7) \circ (3 \cdot 7 + 7) \circ (3 \cdot 8 + 7) \circ (3 \cdot 9 + 7) \circ (3 \cdot 10 + 7)$

b. $1 \# \frac{1}{2} \# \frac{1}{3} \# \frac{1}{4} \# \dots \# \frac{1}{10}$

$$c. \left(\frac{2+1}{2-1}\right)^2 \blacksquare \left(\frac{3+1}{3-1}\right)^3 \blacksquare \left(\frac{4+1}{4-1}\right)^4 \blacksquare \left(\frac{5+1}{5-1}\right)^5 \blacksquare \dots \blacksquare \left(\frac{10000+1}{10000-1}\right)^{10000}$$

Espera-se que os discentes sejam capazes de escrever:

$$1.a) \spadesuit_{k=1}^5 (3k - 5) = (3.1 - 5) \spadesuit (3.2 - 5) \spadesuit (3.3 - 5) \spadesuit (3.4 - 5) \spadesuit (3.5 - 5)$$

$$1.b) \heartsuit_{m=2} (m^2) = (2^2) \heartsuit (3^2) \heartsuit (4^2) \heartsuit (5^2)$$

$$1.c) \sum_{i=1}^4 (2i) = (2.1) \boxtimes (2.2) \boxtimes (2.3) \boxtimes (2.4)$$

$$2.a) \circ_{i=5}^{10} (3i + 7)$$

$$b) \#_{i=1}^{10} \left(\frac{1}{i}\right)$$

$$c) \blacksquare_{n=2}^{10000} \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n$$

Aguarda-se que não existam maiores dificuldades na realização de tais tarefas.

5.1.2 Análise *a posteriori*

Apenas duas dos dez alunos que resolveram a questão não tiveram êxito, principalmente na questão 2. Observe a resolução de Caroline (Figura 35).

Outro exemplo:

Para desenvolver a expressão $\bigcap_{i=5}^7 [i, 10]$ devemos fazer:

$$\bigcap_{i=5}^7 [i, 10] = [5, 10] \cap [6, 10] \cap [7, 10]$$

Agora é com você!

1. Desenvolva as expressões seguintes:

a) $\clubsuit_{k=1}^5 (3k-5) \quad \left(\sum_{k=1}^5 (3k-5) = (3 \cdot 1 - 5) + (3 \cdot 2 - 5) + (3 \cdot 3 - 5) + (3 \cdot 4 - 5) \right)$

b) $\heartsuit_{m=2}^5 (m^2) \quad \left(C_{m=2}^5 (m^2) = (1^2)C(1^3)C(1^4)C(1^5) \right)$

c) $\sum_{i=1}^4 (2i) \quad \left(\sum_{\lambda=1}^4 (2\lambda) = ((2 \cdot 1) + (2 \cdot 2) + (2 \cdot 3) + (2 \cdot 4) + (2 \cdot 5)) \right)$

2. Agora, estão apresentados os desenvolvimentos das expressões, sua tarefa é escrevê-las no modo conciso.

a) $(3 \cdot 5 + 7) \circ (3 \cdot 6 + 7) \circ (3 \cdot 7 + 7) \circ (3 \cdot 8 + 7) \circ (3 \cdot 9 + 7) \circ (3 \cdot 10 + 7)$

b) $1 \# \frac{1}{2} \# \frac{1}{3} \# \frac{1}{4} \# \dots \# \frac{1}{10}$

c) $\left(\frac{2+1}{2-1}\right)^2 \# \left(\frac{3+1}{3-1}\right)^3 \# \left(\frac{4+1}{4-1}\right)^4 \# \left(\frac{5+1}{5-1}\right)^5 \# \dots \# \left(\frac{10000+1}{10000-1}\right)^{10000}$

a) $\sum_{k=5}^{10} (3k+7)$ / b) $\#_2^{10}$ / c) $\left(\frac{2+1}{2-1}\right)^{10000}$

Figura 35: Resolução das questões 1 e 2 – parte B da aluna Caroline

Na questão 1, letra b, é provável que a aluna tenha confundido-se com a variável, já que acertou os outros itens. Já na tarefa 2, houve maior dificuldade na obtenção do termo geral, o que indica deficiências na busca pelos padrões existentes na Matemática, acarretando dificuldades em todo o entendimento do CDI, já que é normal ver esta disciplina sendo trabalhada com um forte apelo à abstração. A representação usada pela aluna pode também indicar que a explicação sobre o uso destes signos ainda precisa ser melhorada, isto é, não está clara para todos os alunos.

Mesmo que essas tarefas apenas indiquem as regras de tratamento dos registros, vale a pena perceber que, para tanto, há uma conversão de representação do registro algébrico para a representação no registro numérico, e esta operação cognitiva é mais difícil para o aluno. No Quadro 28 apresenta-se a análise da não-congruência na conversão da representação algébrica “ $\sum_{i=1}^3 i^2$ ” para a representação $1^2 + 2^2 + 3^2$.

Tarefa: Analisar a congruência conversão da representação algébrica “ $\sum_{i=1}^3 i^2$ ” para a representação $1^2 + 2^2 + 3^2$					
Unidade Significante do Registro de Saída (algébrico)	Unidade Significante do Registro de Chegada (numérico)	Critérios de Congruência			Conclusão
		CS	US	OR	
\sum	+	Sim	Sim	Não	Não Congruente
i^2	$1^2, 2^2, 3^2$	Sim	Não	Não	
i	1, 2, 3	Sim	Não	Sim	

Quadro 28: Análise de Congruência da conversão envolvida no desenvolvimento do somatório

As tarefas 1 e 2 podem ser caracterizadas, pela TSD, como indicado no Quadro 29.

Situação adidática	O que caracteriza a situação adidática - Questão 1-2B
Ação	Discutiro uso de signos.
Formulação	Estabelecimento de critérios para uso dos sinais.
Validação	Não houve, mas foi feita a comparação entre as escritas dos grupos.
Institucionalização	Significado da notação apresentada.

Quadro 29: Caracterização da situação adidática das questões 1-2B

5.2 Os exercícios 3 e 4 e as análises *a priori* e *a posteriori*

5.2.1 Análise *a priori*

Os exercícios 3 e 4 possibilitam ao aluno a percepção do significado associado ao tratamento formal das representações nesse sistema semiótico. A utilização de uma situação ligada a uma distância percorrida por uma bola foi pensada para que o aluno consiga realizar “ancoragens” entre conceitos e representações semióticas.

3. Joga-se uma bola de uma altura de 12 metros. Cada vez que ela atinge o solo, ela sobe alcançando uma distância que é metade da distância percorrida na queda.
 - a) Calcule a distância total percorrida pela bola, desde o momento em que ela foi solta, até o momento em que ela deixa de quicar no chão.
 - b) Explique como você calculou a distância no item a).
 - c) É possível escrever uma fórmula, no modo conciso, que determine essa distância? Se sim, escreva. Se não, justifique.
 - d) Qual a dificuldade de escrever a fórmula no modo conciso?

4. Se a bola do exercício 3 subir alcançando uma distância que é igual a $\frac{1}{3}$ da distância percorrida na queda, o que muda na sua expressão? E se for $\frac{1}{4}$? E se for r , com $r < 1$? Justifique suas respostas.

Na tarefa 3, espera-se que os alunos calculem, sem grandes dificuldades, o seguinte valor:

$$12 + 2.6 + 2.3 + 2.1,5 + 2.0,75 + 2.0,375 + 2.0,1875 + 2.0,09375 + \dots = 35,8\text{m} \quad (1)$$

Embora seja relativamente fácil o cálculo da distância solicitada, acredita-se que poucos conseguirão escrever uma fórmula no modo conciso. Existe a possibilidade de que alguns alunos pensem nos termos dessa adição como termos de uma progressão geométrica (PG) de razão $\frac{1}{2}$, o que lhes permitirá calcular a soma dos infinitos termos. Existe a opção de que os alunos tenham certa dificuldade para considerar uma quantidade infinita de rebatidas da bola, talvez eles pensem que após algumas quicadas a bola vai parar, então não haveria infinitos termos para serem adicionados.

Supondo a utilização da PG: A soma dada em (1) será:

$$12 + 2 \cdot \frac{6}{1 - \frac{1}{2}} = 12 + 2 \cdot 12 = 36$$

A partir disso, é possível que poucos alunos cheguem a escrever que a distância percorrida é igual a $d + 2 \cdot \frac{d}{2} = 3d$.

A tarefa 4 seria resolvida da mesma maneira, tanto para razão $\frac{1}{3}$ quanto para razão $\frac{1}{4}$. As possíveis distâncias e fórmulas que seriam dadas pelos alunos são:

$$\text{Razão } \frac{1}{3}: 24\text{m e } d + 2 \cdot \frac{d}{3} = 2d$$

$$\text{Razão } \frac{1}{4}: 20\text{m e } d + 2 \cdot \frac{d}{4} = d + \frac{2d}{3} = \frac{5d}{3}$$

$$\text{Razão } r: 12 + 2 \frac{12}{1-r}$$

Também existe a possibilidade de poucos alunos escreverem d no lugar de 12.

5.2.2 Análise *a posteriori*

Apenas dois grupos de alunos calcularam a distância aproximada de 36 m para a tarefa 3. Ao contrário do planejado, nenhum aluno lembrou da PG. Alguns como o grupo Daia/Caroline fizeram a soma indicada no texto, mas se perderam na divisão por 2, mesmo tendo a calculadora à disposição. Veja a solução na Figura 36.

a) 25,18 metros

b) Passo a passo, etc: $12 - 6 - 3 - 1,5 - 0,75 - 0,37 - 0,18 - 0,09 - 0,4 - 0,2 - 0,1 - 0,05 \dots$

c) $\sum_{k=0}^{\infty} d^{25} (k+1)$

d) A dificuldade é entender o que se pede.

Figura 36: Resolução do grupo Daia/Caroline para a questão 3.

Infere-se, da observação da Figura 36, que as alunas não tinham noção do que designava a fórmula apresentada no item c, pois também na tarefa 4 o grupo respondeu que nada mudaria na expressão se a distância alcançada pela bola, ao quicar no chão, se alterasse. Além disso, percebeu-se ausência de reflexão sobre os cálculos realizados no passo b, já que, ao que parece, as alunas apenas consideraram os números não-nulos para fazerem a divisão por 2. Isto nos faz refletir se os alunos sabem mesmo o significado de um zero à esquerda seguido por uma vírgula. Se esta noção é falha, como se pretende ensinar a diferenciar e integrar funções?

Como era previsto, poucos discentes conseguiram escrever uma fórmula que permitisse calcular essa distância, tanto para a tarefa 3 quanto para a 4. A tentativa de Bruno/Camila para as fórmulas estão apresentadas nas Figuras 37 e 38.

b) Percebi que se colocar o primeiro número da sequência multiplicando o 2 e divide-lo pela distância inicial chegaremos ao resultado

c) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{18}{2^i}$

d) Por em forma de equação os dados que o exercício oferece

Figura 37: Resolução da tarefa 3 (Bruno/Camila)

O numerador que passa a ser 16 e o denominador que é 3 ao invés de 2 e a distância percorrida que passa ser 24 metros. Se for $\frac{1}{4}$: $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{30}{4^i}$. Se for r

$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{12 + \frac{1}{r}}{r \cdot i}$ Fazendo os cálculos percebe que a distância percorrida do instante que ela foi lançada até seu retorno do primeiro salto é a metade do

5. Você joga uma bola de uma altura de h metros sobre uma superfície plana. Cada vez que a bola numera- atinge a superfície depois de cair de uma distância h , ela rebate a uma distância rh , onde r é dos usado positivo, mas menor do que 1. Encontre uma fórmula que dê a distância vertical total percorrida na fórmula pela bola pulando para cima e para baixo

Figura 38: Resolução da tarefa 4 (Camila/Bruno)

Em ambas as resoluções, esta equipe percebeu a necessidade de somar infinitos termos, porém não soube fazer essa representação algébrica. Mais uma vez alunos afirmam a dificuldade de algebrizar uma determinada situação.

Vale ressaltar que esta conversão da representação no registro em língua natural para a representação no registro algébrico não é nada fácil, já que normalmente não há univocidade semântica nem tampouco, mantém-se a ordem em ambas representações (DUVAL, 2006), como já comentado na seção 4.

As tarefas podem ser classificadas, segundo a TSD, como o indicado no Quadro 30.

Situação adidática	O que caracteriza a situação adidática - Questão 3-4B
Ação	Resolução de problemas que envolvem a somatória; observação de padrão.
Formulação	Estratégia de escrita de uma fórmula para representar o padrão.
Validação	Desenvolvimento da escrita simbólica.
Institucionalização	A generalização da fórmula para o termo geral da sequência.

Quadro 30: Caracterização da situação adidática das questões 3-4B

5.3 A tarefa 5 e as análises *a priori* e *a posteriori*

5.3.1 Análise *a priori*

A tarefa 5 foi pensada para que o aluno realize generalizações, já que essa é a “alma” da construção matemática.

5. Você joga uma bola de uma altura de h metros sobre uma superfície plana. Cada vez que a bola atinge a superfície depois de cair de uma distância h , ela rebate a uma distância rh , onde r é positivo, mas menor do que 1. Encontre uma fórmula que dê a distância vertical total percorrida pela bola pulando para cima e para baixo.

A substituição de algarismos por letras seria muito importante na constituição de situações importantes no campo do conceito de somatória infinita. Espera-se que os alunos construam ancoragens entre a utilização da fórmula da soma de uma progressão geométrica, sua escrita formal sucinta, sua escrita formal estendida e a significação dos registros semióticos envolvidos.

Na tarefa 5, a resposta correta é (s é a distância total)::

$$s = h + 2hr + 2hr^2 + 2hr^3 + \dots$$

$$s = h + 2h(r + r^2 + r^3 + \dots)$$

$$s = h + \frac{2hr}{1-r}$$

$$s = h \left(\frac{1+r}{1-r} \right).$$

Acredita-se que poucos alunos atingirão tal nível de controle dos signos.

5.3.2 Análise *a posteriori*

De fato, poucos alunos conseguiram entender o significado do enunciado, muito menos escrever a fórmula geral. Houve várias tentativas, porém, sem sucesso.

Nota-se que ainda persiste a concepção de que, escrever no modo matemático, é tarefa “de outro mundo”. Até o momento, pelas atitudes observadas durante a realização das atividades, percebe-se que o aluno tem a noção intuitiva do conteúdo que se pretende ensinar, inclusive sabe explicar a razão pela qual as coisas acontecem ou são, no entanto, parece haver um obstáculo didático muito grande em relação a essa escrita matemática. O problema poderia ser minimizado se, desde as séries iniciais, o aluno fosse estimulado a escrever em códigos, usando a escrita matemática, e convertendo esse registro para a língua natural e vice-versa.

Das atividades 3 a 5, este grupo de alunos apresentou dificuldades em transpor uma situação que, a princípio, pode ser resolvida intuitivamente, em uma forma mais formal, que seja adequada a outros valores. Isto traz transtornos para a aprendizagem do CDI.

A dificuldade de transformar uma expressão lingüística numa expressão algébrica, como é o caso das questões 3 a 5, está principalmente no fato de que esta conversão não é congruente, por não haver univocidade, nem manter a ordem das operações. Observemos que o último fator que é enunciado é “... dê a distância vertical...” é o primeiro aspecto sobre o qual refletir ao começar a transformação de representação.

Algumas das tentativas de formalização do enunciado estão mostradas nas Figuras 39 e 40:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{h + rh}{n} \left| \begin{array}{l} -h \\ rh \end{array} \right.$$

Figura 39: Formalização do aluno Bruno para a questão 5

$$\sum_{c=hr}^0 (R \cdot h), \text{ onde } R = \frac{3}{4}$$

Figura 40: Formalização do aluno Claison para a questão 5

Essa tarefa indica que o sentido de conversão que vai da língua natural para o registro algébrico é mais difícil. Assim como o tratamento que vai da notação extensa para a concisa, mostrou-se mais difícil que o tratamento que expande a notação.

Para a questão 5, o Quadro 31 indica a caracterização.

Situação adidática	O que caracteriza a situação adidática - Questão 5B
Ação	Discussão e entendimento do enunciado; resolução algébrica da questão.
Formulação	Discussão do procedimento para estabelecimento de fórmula para representar a solução pedida.
Validação	O desenvolvimento e a interpretação da fórmula criada. Comparação com os demais grupos.
Institucionalização	Generalização de uma fórmula.

Quadro 31: Caracterização da situação adidática da questão 5B

5.4 A tarefa 6 e as análises *a priori* e *a posteriori*

5.4.1 Análise *a priori*

A tarefa 6 obriga o aluno a pensar no padrão dos termos envolvidos na adição.

6. Alguns símbolos matemáticos são usados para representar algumas operações entre termos de uma sequência. Observe:
 - a) se for utilizado o signo \prod , isso terá o significado de uma multiplicação (Produtória);
 - b) se for utilizado o signo \cap , isso significa que deverá ser calculada a interseção,
 - c) se for utilizado o signo \sum , isso significa que deverá ser calculada a adição (Somatória), e assim por diante.

Considere a notação:

$$\sum_{k=m}^n f(k)$$

em que m e n são os limites inferior e superior do somatório (m e n representam os valores inicial e final de k , respectivamente); a letra k é chamada de índice do somatório, $f(k)$ representa a expressão geral que envolve k .

Usando essa notação, escreva a soma realizada por você nos exercícios 3 e 4.

Acredita-se que surjam registros como os seguintes:

- Para a tarefa 3: $S_n = 12 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k}{2}$.
- Para a tarefa 4: $S_n = 12 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k}{2}$, $S_n = 12 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k}{3}$ e $S_n = 12 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k}{r-1}$, para as razões $1/3$, $1/4$ e r , respectivamente. Pensa-se na possibilidade de generalização a fim de estipular o denominador: Os alunos poderiam pensar da seguinte maneira: para $1/3$ o denominador torna-se 2, para $1/4$ torna-se 3, para r , tem que tornar-se uma unidade a menos, ou seja, tem-se que tirar 1, então $r - 1$.

5.4.2 Análise a posteriori

Este exercício foi feito apenas pelos alunos Bruno/Camila e Álvaro, que já haviam usado esta notação quando resolveram as questões 3 e 4, apenas transcrevendo-as. Nas Figuras 41 e 42 estão apresentadas as referidas fórmulas.

Handwritten formulas for tasks 3 and 4:

$$3. \sum_{i=1}^{\infty} \frac{18}{2i} \quad 4. \sum_{i=1}^{\infty} \frac{16}{3i} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{30}{4i} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{12 + \frac{1}{r}}{r \cdot i}$$

Figura 41: Fórmulas da equipe Bruno/Camila para as atividades 3 e 4

Handwritten formulas for tasks 3 and 4:

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(i) \frac{18}{2i} \quad \sum_{k=1}^{\infty} f(i) \frac{30}{4i} \quad \sum_{k=1}^{\infty} f(i) \frac{12 + \frac{1}{r}}{r \cdot i}$$

Figura 42: Fórmulas do Álvaro para as atividades 3 e 4

É possível inferir que estes alunos tenham compreendido como tratar as representações, porém ainda falta-lhes consistência para a fórmula que representa a situação apresentada.

Como a obtenção de fórmulas tem se mostrado uma grande dificuldade, uma possibilidade para reverter esse quadro é estabelecer atividades em que o termo geral seja mais simples e possam ser facilmente percebidos, aumentando-se o grau de dificuldade progressivamente.

Esta questão pode ser caracterizada como indicado no Quadro 32.

Situação adidática	O que caracteriza a situação adidática - Questão 6B
Ação	Discussão da redação dos exercícios 3 e 4 na forma concisa.
Formulação	Estratégia para determinação do termo geral da sequência dos exercícios 3 e 4.
Validação	Comparação e discussão das fórmulas com os demais grupos
Institucionalização	A notação sigma.

Quadro 32: Caracterização da situação adidática da questão 6B

5.5 A tarefa 7 e as análises *a priori* e *a posteriori*

5.5.1 Análise *a priori*

Acredita-se que a tarefa 7 será facilmente resolvida pelos alunos.

7. Nos itens seguintes, escreva a soma correspondente à expressão (isto, desenvolva a expressão), e calcule seu valor:

- $\sum_{k=4}^8 k^3$
- $\sum_{k=1}^5 2k$
- $\sum_{k=0}^5 (2k + 1)$
- $\sum_{j=1}^4 (3j + 1)$
- $\sum_{k=1}^5 (2^k)$

Admite-se a facilidade de resolução dessa tarefa uma vez que a manipulação de signos associados ao conceito de somatória finita já seria feita desde o Ensino Médio. A colocação de tal enunciado tem o interesse de reforçar a identificação entre o registro conciso e o registro expandido. Possíveis redações para tal tarefa são:

- $\sum_{k=4}^8 k^3 = 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3 = 1260$
- $\sum_{k=1}^5 2k = 2.1 + 2.2 + 2.3 + 2.4 + 2.5 = 30$
- $\sum_{k=0}^5 (2k + 1) = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36$
- $\sum_{j=1}^4 (3j + 1) = 4 + 7 + 10 + 13 = 34$
- $\sum_{k=1}^5 (2^k) = 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 62$

5.5.2 Análise a posteriori

De fato, constatou-se que os alunos fizeram sem dificuldades, todavia, chamou-nos a atenção algumas notações usadas pelos alunos, por não terem substituído o símbolo do somatório (Σ) pelo sinal de mais (+), como era esperado.

O tratamento dos registros, da maneira com que foram enunciados, levou alunos a realizarem a tarefa sem fazer a substituição de um significante por outro. Isso faz aflorar a discussão a respeito dos registros algébricos utilizados nas aulas de CDI. Não ficou claro para alguns alunos que o significante “símbolo de somatória” tem um significado que é o da adição de parcelas. Em outra área, por exemplo, a Teoria dos Conjuntos, o significante “símbolo de união” da notação concisa é o mesmo significante que é utilizado na notação estendida.

A aluna Camila (Figura 43), por exemplo, usou o símbolo \Rightarrow para indicar a soma das parcelas, mas manteve este símbolo quando apresentou o resultado final. Já a aluna Caroline deixou o símbolo de somatório para indicar a soma dos termos, porém usou o sinal de igualdade para se referir à soma total (Figura 44):

a) $\sum_{k=4}^8 k^3 \Rightarrow 64 \Rightarrow 125 \Rightarrow 216 \Rightarrow 343 \Rightarrow 512 \Rightarrow 1260 //$
 b) $\sum_{k=1}^5 2k \Rightarrow 2 \Rightarrow 4 \Rightarrow 6 \Rightarrow 8 \Rightarrow 10 \Rightarrow 30 //$
 c) $\sum_{k=0}^5 (2k+1) \Rightarrow 1 \Rightarrow 3 \Rightarrow 5 \Rightarrow 7 \Rightarrow 9 \Rightarrow 11 \Rightarrow 36 //$
 d) $\sum_{j=1}^4 (3j+1) \Rightarrow 4 \Rightarrow 7 \Rightarrow 10 \Rightarrow 13 \Rightarrow 34 //$
 e) $\sum_{k=1}^5 (2^k) \Rightarrow 2 \Rightarrow 4 \Rightarrow 8 \Rightarrow 16 \Rightarrow 32 \Rightarrow 62 //$

Figura 43: Representação de Camila

e calcule seu valor:
 a) $\sum_{k=4}^8 k^3 = 4^3 \sum ; 5^3 \sum ; 6^3 \sum ; 7^3 \sum ; 8^3 = 512$
 b) $\sum_{k=1}^5 2k = 2 \cdot 1 \sum ; 2 \cdot 2 \sum ; 2 \cdot 3 \sum ; 2 \cdot 4 \sum ; 2 \cdot 5 \sum = 25 //$
 c) $\sum_{k=0}^5 (2k+1) = (2 \cdot 0 + 1) \sum (2 \cdot 1 + 1) \sum (2 \cdot 2 + 1) \sum (2 \cdot 3 + 1) \sum (2 \cdot 4 + 1) \sum (2 \cdot 5 + 1) = //$
 d) $\sum_{j=1}^4 (3j+1) = (3 \cdot 1 + 1) \sum (3 \cdot 2 + 1) \sum (3 \cdot 3 + 1) \sum (3 \cdot 4 + 1) = 13$
 e) $\sum_{k=1}^5 (2^k) = (2^1) \sum (2^2) \sum (2^3) \sum (2^4) \sum (2^5) = 32$

Figura 44: Representação de Caroline

As representações analisadas indicam que houve a compreensão do significado do registro, mas é necessário praticar mais o tratamento entre a forma concisa e a estendida. Talvez, mostrar alguns exemplos resolvidos auxilie esse processo.

O Quadro 33 retrata a classificação tipológica da questão 7, parte B.

Situação adidática	Atividade que caracteriza a situação adidática - Questão 7B
Ação	Expansão da forma concisa.
Formulação	Relação entre a forma concisa e a expandida.
Validação	Comparação entre as respostas dos grupos.
Institucionalização	A substituição numérica e a notação sigma.

Quadro 33: Caracterização da situação adidática da questão 7B

5.6 A tarefa 8 e as análises *a priori* e *a posteriori*

5.6.1 Análise *a priori*

A tarefa 8 foi pensado para exigir a descoberta de padrões nos termos que pertencem à adição.

8. Use a notação de somatório para representar a soma dada:
- $(-3)^3 + (-2)^3 + (-1)^3 + (0)^3 + (1)^3$
 - $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24}$
 - $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$
 - $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8$
 - $2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 + 2x_6 + 2x_7$

Essa tarefa poderá gerar algum desconforto, pois a descoberta de padrões tem um grau de dificuldade maior que a passagem da notação de somatória para a notação estendida. Provavelmente, os itens b e d serão os que mais exigirão um grau maior de abstração e observação. As respostas deverão ser:

- $(-3)^3 + (-2)^3 + (-1)^3 + (0)^3 + (1)^3 = \sum_{k=-3}^1 k^3$
- $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} = \sum_{k=-1}^3 \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{3} \cdot \sum_{k=-1}^3 \left(\frac{1}{2}\right)^k$
- $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \sum_{k=1}^6 \frac{1}{k}$
- $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 = \sum_{k=1}^8 (-1)^k \cdot (-k)$
- $2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 + 2x_6 + 2x_7 = \sum_{k=1}^7 2x_k$

5.6.2 Análise *a posteriori*

Como era esperado, os itens *b* e *d* causaram grandes desconfortos e muitas discussões em sala de aula. O item *b* não foi resolvido pelos alunos, assim, a pesquisadora teve que explicar como descobrir a fórmula para diminuir a tensão e nervosismo gerado pelo impasse da não resolução. No item *d*, a intervenção foi menor. O item *e* foi o mais facilmente resolvido pelos alunos.

Nesse ponto, notou-se o desestímulo do aluno quando ele não consegue avançar nas resoluções, o que indicou a necessidade do professor ter à disposição mais atividades e exemplos, com grau de dificuldade variado, tanto para aqueles aluno que têm maior facilidade quanto para aqueles com maior dificuldade, no intento de permitir o avanço e interesse de ambos, pelo estudo da Matemática.

Em parte, a tarefa exigiu uma postura investigativa do aluno em relação à identificação de padrões, o que normalmente é atribuído ao matemático. Entretanto, perceber tais padrões é importante para compreender os elementos componentes do conceito de integral definida. Além disso, nesse processo foram usados, basicamente, tratamentos no registro numérico, mesmo com a necessidade de mudança de representação nesse registro, como indicam as flechas 1 e 2 na Figura 45.

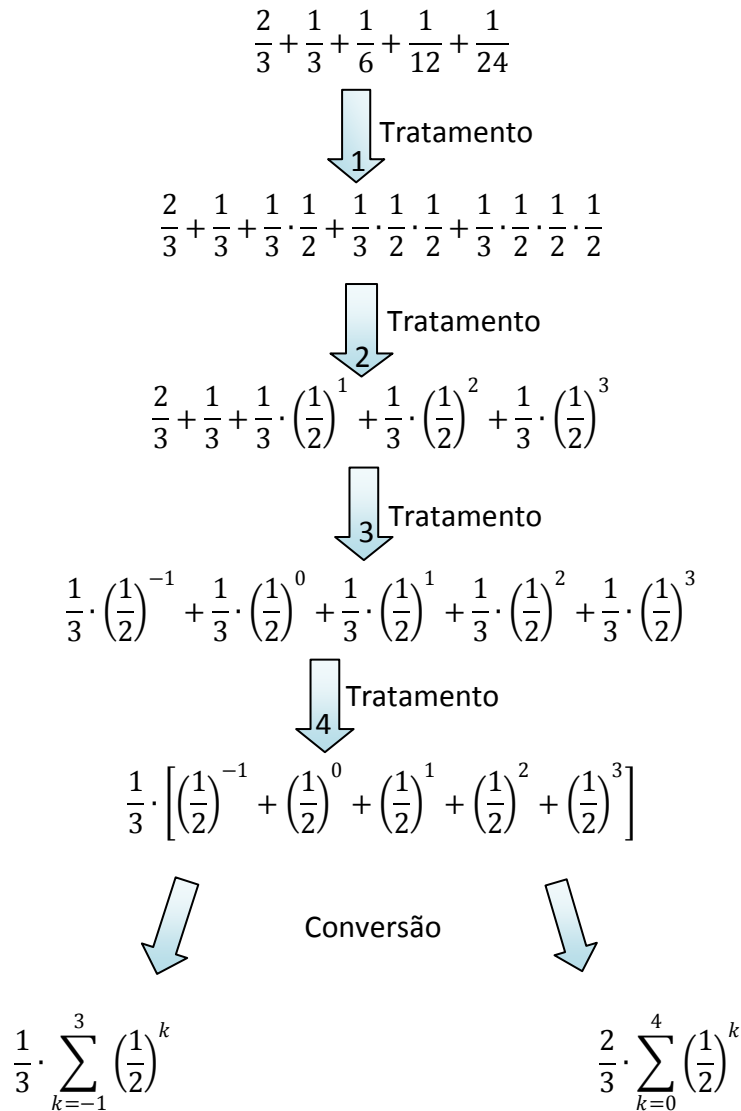


Figura 45: Tratamentos e conversão usados na atividade 8-b.

Veja no Quadro 34 a classificação desta questão em relação à TSD.

Situação adidática	Atividade que caracteriza a situação adidática - Questão 8B
Ação	Redução da expressão à forma concisa. Discussão do padrão dos termos da sequência.
Formulação	Escrita do termo geral da sequência.
Validação	Comparação das expressões para termo geral.
Institucionalização	A potência $(-1)^k$ e seu papel.

Quadro 34: Caracterização da situação adidática da questão 8B

5.7 As tarefas 9 a 11 e as análises *a priori* e *a posteriori*

5.7.1 Análise *a priori*

A tarefa 9 visa estimular a compreensão dos signos envolvidos na definição da integral de Riemann, e pode ser caracterizado como uma situação de validação, já que, provavelmente, os alunos terão que elaborar conjecturas a respeito desta simbologia.

9. Usando o raciocínio anterior, desenvolva a expressão:

$$\sum_{i=k}^n F(i)$$

Os alunos deverão escrever:

$$\sum_{i=k}^n F(i) = F(k) + F(k+1) + \dots + F(n)$$

Esse exercício é proposto para que os estudantes realizem uma manipulação meramente formal com os signos utilizados na definição da integral de Riemann.

A tarefa 10 sintetiza, a partir da visão do aluno, as situações em que se pode usar o símbolo de somatório. Esta situação pode ser classificada como de formulação. Espera-se que os alunos escrevam situações semelhantes às que foram exploradas nas atividades propostas na parte B.

10. Considerando as atividades desenvolvidas até agora, pense (e escreva) uma frase que expresse as situações em que o símbolo sigma (somatório) é usado.

Na atividade 11, é solicitado ao aluno que refaça o mapa conceitual apresentado ao final das atividades da parte A. Espera-se que modificações e ligações cruzadas apareçam depois dos estudos realizados na parte B. Um exemplo de mapa conceitual que pode ser elaborado é apresentado na Figura 46. Nela, a parte em vermelho representa o mapa previsto para a parte A, enquanto que em azul está a previsão do que poderia ser acrescentado a partir das atividades da parte B.

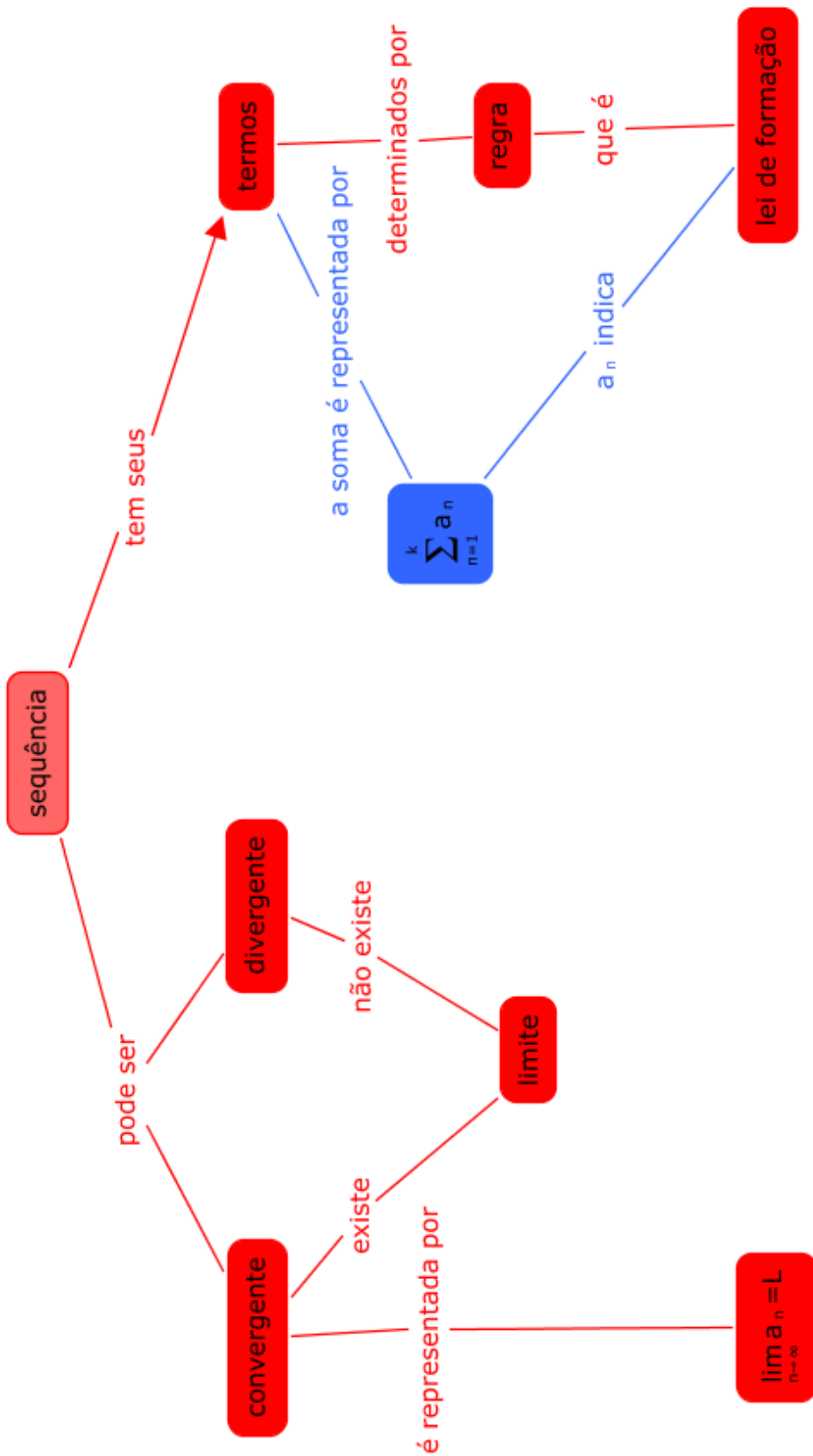


Figura 46: Estimativa para o mapa conceitual do final da parte B das atividades propostas

A expectativa é de que os alunos desenvolvam ligações que envolvam os conceitos de séries, sequências e convergência. Acredita-se que aparecerão campos com as notações utilizadas nos estudos realizados.

5.7.2 Análise a posteriori

Na tarefa 9, nenhum dos alunos conseguiu desenvolver corretamente a fórmula. Alguns alunos, como mostrados nas Figuras 47 e 48, associaram a quantidade de termos com a ordem do alfabeto.

$$\textcircled{9} \sum_{i=K}^m f(i) = \Delta f(K) + f(L) + f(m) + f(m)$$

Figura 47: Desenvolvimento dado por Bruno à fórmula do somatório

OK $\sum_{i=K}^m f(K)$

10. Considerando as atividades de as situações em que o símbolo

11. Diante de todos os experimer parte A e verifique se há alg versão.

9 - (K) + (L) + (m) + (n)

Figura 48: Desenvolvimento do somatório dado por Claison

Em relação a tarefa 10, os alunos associaram o símbolo às somas, como dito por Álvaro: “o sigma é usado quando queremos somar facilmente, somas muito grande ou até somas infinitas”.

Para a tarefa 11, ao contrário do esperado, nenhum dos alunos acrescentou informações ao mapa. Tal fato indicou que essas atividades ficaram desconectadas do assunto, isto é, os alunos não perceberam ligação entre o que fizeram na parte B com a convergência que exploraram na parte A, nem ao menos associaram a notação apresentada com a questão sobre a convergência de somas.

A não alteração do mapa conceitual traz uma informação relevante ao professor: o aluno não relaciona o que está estudando com o que estudou anteriormente. Isso indica que deve haver uma readaptação das aulas no sentido de fazer o aluno perceber o conteúdo que se quer ensinar. Neste caso, verificou-se que os alunos realizaram apenas mais exercícios sem sentido.

O Quadro 35 indica a caracterização na TSD das questões 9 e 10 da parte B.

Situação adidática	O que caracteriza a situação adidática - Questões 9-10B
Ação	Expansão da forma concisa da notação sigma; manipulação do signo; discussão de aplicabilidade do conceito.
Formulação	Estratégia de uso do somatório.
Validação	Elaboração de problema que o somatório seja a solução, segundo a estratégia adotada.
Institucionalização	Somas que podem ser escritas usando a notação sigma; a notação de somatório.

Quadro 35: Caracterização da situação adidática das questões 9-10B

5.8 Análise Didática das atividades

As atividades propostas são atividades que Duval (2009) classifica como de formação de representação num sistema semiótico, neste caso, o registro algébrico. Elas visam o reconhecimento e aplicação da notação de somatória, chamada de forma concisa. Reconhecer as situações em que o símbolo de somatório é aplicado, juntamente com a compreensão da notação de limites, objeto de estudo da parte A, é importante para representar algebricamente a soma de infinitas áreas de retângulos, que poderá facilitar a compreensão do conceito de integral definida.

De acordo com Duval (2009), as atividades de formação aliadas às atividades de tratamento formam as tarefas de produção de uma representação semiótica, que evocam o objeto de estudo, neste caso, a notação somatória. Quando são inseridas atividades de conversão, este conjunto forma as chamadas tarefas de compreensão. São estas últimas que permitem diferenciar um objeto de sua representação. O Quadro 36 indica a atividade cognitiva (formação, tratamento e conversão) referente a cada um dos objetivos particulares da parte B.

Objetivo	Questão relativa	Atividade Cognitiva
Conhecer a notação	Introdução e 6 1,2	Formação Tratamento
Reconhecer a notação	1,2,6,7,8	Tratamento
Aplicar a notação	3,4,5,9 10	Conversão Tratamento

Quadro 36: Atividades Cognitivas das questões da parte B

As atividades de formação buscaram apresentar a notação e esclarecer as condições para seu uso. Enquanto o tratamento permitiu uma algoritmização da expressão, seja passando da escrita concisa para o seu desenvolvimento, ou vice-versa. O tratamento dado à questão 1a, por exemplo, é:

$$\clubsuit_{k=1}^5 (3k - 5) = (3.1 - 5) \clubsuit (3.2 - 5) \clubsuit (3.3 - 5) \clubsuit (3.4 - 5) \clubsuit (3.5 - 5)$$

Já na questão 3, por exemplo, a atividade cognitiva é de conversão do registro em língua natural para o registro simbólico, algébrico e numérico, podendo passar pelo registro icônico, como denota a Figura 49.

Na Figura 49, as flechas pontilhadas em vermelho indicam representações que podem ser usadas como apoio à conversão requerida, enquanto as demais, representam as conversões para os registros numérico e algébrico.

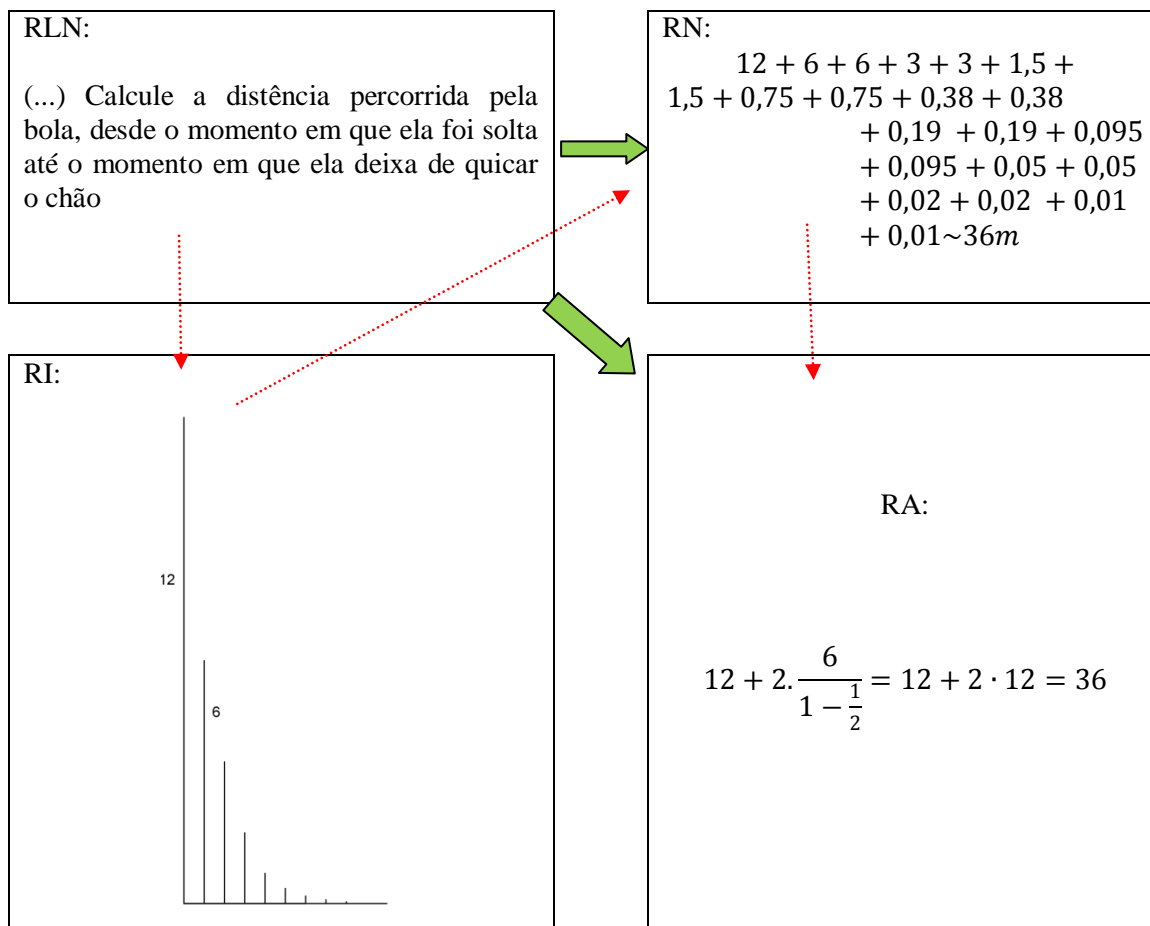


Figura 49: Mudança de registros na questão 3-B

Na resolução das atividades, os participantes demonstraram dificuldade para estabelecer padrões quando apresentadas as sequências numéricas, especialmente quando este padrão não estava tão evidente, como na tarefa 8-b, ou quando a sequência continha termos com sinais alternados, como na tarefa 8-d.

Santos e Oliveira (2008, p.1) defendem que a exploração do reconhecimento de padrões e regularidades “ajuda a desenvolver nos alunos capacidades relacionadas com o pensamento algébrico, favorecendo o estabelecimento de relações e apelando à generalização.”

No mesmo sentido, Moura (2007, p.16) afirma:

A procura de padrões na Matemática está associada à descoberta, à busca de relações para explicar o que é observado e o encadeamento lógico do raciocínio matemático. Esse trabalho favorece a construção da álgebra de forma contextualizada e significativa para o aluno, permitindo que estabeleça as devidas conexões entre os conceitos matemáticos aproveitando ao máximo as relações existentes entre eles. Essas explorações estão centradas em modelos físicos, dados, organização de tabelas, gráficos e em outras representações que os alunos possam utilizar.

Santos e Oliveira (2008) apresentam e discutem os resultados de um estudo sobre a evolução da capacidade de generalizar padrões em alunos de 5º ano de escolarização em Portugal. O estudo consistiu em aplicar atividades⁶⁶ “que integram padrões de cunho numérico, geométrico ou pictórico, e envolvem processos de raciocínio matemático, tais como analisar, argumentar, conjecturar, testar e generalizar” (ibidem, p.2). As autoras comentam que, de início, os alunos prestavam pouca atenção às diferentes partes do padrão e às mudanças que ocorriam entre figuras e que, aos poucos, foram adotando estratégias próprias, intencionais e formais, estabelecendo relação direta entre as variáveis dependente e independente.

Alguns aspectos apontados neste estudo que contribuíram para o avanço do pensamento algébrico dos alunos foram: a descrição oral das mudanças entre as figuras; a necessidade de alargarem o seu raciocínio para termos distantes; e a necessidade de expressar o seu raciocínio sob a forma de linguagem matemática.

Mesmo sendo a pesquisa de Santos e Oliveira (2008) voltada para a formação do pensamento algébrico em crianças, seus resultados devem ser considerados porque, como apontou a revisão de literatura na seção 2, parte dos problemas de aprendizagem na disciplina de Cálculo I se deve à falta de conhecimentos relativos à Educação Básica, seja por falta de interesse do aluno, seja por falha na metodologia docente.

Além disso, note que alguns aspectos mencionados como fatores de contribuição ao desenvolvimento do pensamento algébrico estão associados à diversidade de registros de representação semiótica⁶⁷: a descrição oral e a expressão sob a forma de linguagem matemática, isso sem contar que a percepção das mudanças entre figuras requer um olhar mais atento à imagem.

Em geral, como já mencionado, observou-se, na sequência didática da parte B, certa dificuldade dos alunos em usar ou desenvolver uma expressão que envolve o símbolo de somatório, o que pode ser observado na questão 9. Além disso, os alunos estabelecem padrões para as sequências, de modo a escrever uma expressão algébrica relacionada aos dados, como pode ser observado nas questões 3 e 4. Isto indica que esta parte B precisa ser reformulada para atingir seu objetivo. A pesquisa de Santos e Oliveira (2008) nos dão indícios de como tratar da notação de somatório de forma que isto se torne mais espontâneo para o aluno e proporcione o aprendizado esperado.

⁶⁶ As atividades não foram citadas no artigo.

⁶⁷ Os referidos autores não fizeram referência à Teoria de Registro de Representação Semiótica neste estudo.

5.9 Análise Didática dos Mapas Conceituais da parte B

Os alunos não apresentaram Mapas Conceituais ao final da parte B. Quais análises podem ser realizadas, então?

É preciso retomar o papel dos Mapas Conceituais nesta pesquisa: ser instrumento para a informação docente sobre a aprendizagem discente. Pressupomos que o aluno deveria compreender e utilizar o símbolo sigma (Σ) para sintetizar um “somatório de coisas”, no caso, um somatório de infinitas áreas de retângulos. Acredita-se que as atividades propostas pudessem levá-lo a essa compreensão, no entanto, isto não aconteceu satisfatoriamente.

Diante disto, o professor toma conhecimento, imediatamente, que um pré-requisito importante para a construção do conceito de integral definida não foi atingido. É preciso retomar esse assunto e propor novas atividades. Não adianta continuar o processo de construção do conceito de integral definida, porque o aluno provavelmente não será capaz de efetuar transformações de maneira satisfatória com os registros de somatória necessários à construção do conceito de integral de Riemann. Isso pode prejudicar o desenvolvimento de outras partes da sequência.

Algumas razões podem ser deduzidas:

- Os cursistas não perceberam relação entre as partes A e B, logo, não poderiam fazer acréscimos ao Mapa da parte A.
- Embora os alunos tenham percebido o uso do registro na forma concisa (notação sigma) para representar somas, conforme exposto na análise *a posteriori* da questão 9, as atividades não foram suficientes para que os alunos percebessem a possibilidade de seu uso para representar convergências de soma. Isto pode ter se constituído pelo fato de que, para os participantes do minicurso, não é possível que uma soma de infinitos termos seja limitada, como exposto na análise *a posteriori* da tarefa 14 da parte A.
- Escrever somas usando a notação sigma requer o reconhecimento de padrões nas sequências, transformações da representação estendida para a concisa, o que se apresentou mais difícil, e nisto, os alunos tiveram dificuldade. Pode ser possível que os alunos estivessem querendo fugir de uma situação constrangedora: a de reconhecer que não foi capaz, ou que teve dificuldade, de perceber uma relação entre os termos.

De toda forma, não complementar o MC indica um caminho docente a seguir: propor novas situações aos alunos.

O Mapa Conceitual permite que o professor acompanhe a aprendizagem dos alunos e a avaliação da sua metodologia. Esse estudo fez com que as atividades específicas para o reconhecimento da notação sigma fossem remanejadas e reprogramadas. A reformulação apresentada na seção 10 tenta tornar as atividades mais entrosadas ao contexto do conceito de integral definida.

No minicurso esse remanejamento não foi feito devido à concentração de sua carga horária. De um dia para o outro não era possível analisar as dificuldades, alterar e/ou propor novas tarefas para aplicar aos alunos. No entanto, consideramos relevante essa reformulação da sequência didática para, pelo menos, diminuir as dificuldades percebidas. Por isso, apresentamos a reformulação na seção 10. Nada garante que, ao aplicá-la, outros problemas sejam encontrados e alterações tenham que ser feitas. Mas é esse o processo para garantir uma ação docente eficaz para a aprendizagem discente.

Seção 6 - Análise *a priori* e *a posteriori* das Atividades Propostas na Parte C

As tarefas preparadas para as partes A e B propuseram situações com intento de fazer com que os alunos transitassem entre registros semióticos em língua natural, simbólicos (aritméticos e algébricos) e gráfico. Foi concedida uma atenção maior à compreensão da significação dos registros de escrita matemática. As próximas atividades propõem o trabalho com somas parciais, o interesse maior é promover situações nas quais os alunos construam o conceito de integral de Riemann como uma soma de áreas. Mais especificamente, a parte C tem por objetivo calcular somas finita e infinita, usar a notação de limite para convergência de séries.

6.1 A tarefa 1 e as análises *a priori* e *a posteriori*

6.1.1 Análise *a priori*

A tarefa 1 visa retomar as notações já apresentadas.

- 1 a) Analise o comportamento dos termos da expressão $\frac{1}{x}$ quando x assume valores cada vez maiores.
- b) Usando a simbologia matemática, de que forma você poderia descrever o comportamento da sequência $\frac{1}{x}$?

Pretende-se verificar a assimilação das notações formais anteriormente utilizadas. Admite-se que se houve assimilação e compreensão, facilmente os alunos dirão que os termos da sequência diminuirão e se tornarão próximos de zero, escreverão $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$. Espera-se que seja essa a resposta da maioria dos alunos.

Neste exercício requer-se uma conversão do registro em língua natural (dado pelo enunciado da questão no item a) para o registro algébrico (dado pela escrita formal, usando a notação de limites, do comportamento da sequência). Para tanto, o aluno provavelmente usará a representação gráfica da sequência como apoio. As unidades significantes nestes diferentes registros podem ser observadas na Figura 50.


Unidade Significante Registro de Saída (RLN)	Unidade Significante do “Registro Intermediário” (RG)	Unidade Significante Registro de Chegada (RA)
Aproximação a um ponto		$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$

Figura 50: Unidades Significantes para a conversão RLN -->RA da tarefa 1

6.1.2 Análise *a posteriori*

Neste exercício, apenas as cursistas Caroline e Daia não escreveram corretamente a notação, indicando que os termos da sequência diminuíam à medida que a ordem dos termos aumentava. As alunas usaram a notação $\sum_{x=1}^0 \left(\frac{1}{x}\right)$ para descreverem o comportamento da sequência. Isto pode ser interpretado como uma não assimilação das notações matemáticas nos seus respectivos contextos. Mesmo assim, vislumbra-se, em sala de aula, a oportunidade de o docente propor mais tarefas para estas alunas, a fim de proporcionar a ancoragem destes conceitos, que são importantes para as demais atividades desta sequência.

Em relação à caracterização da situação adidática, ela é tal qual indicado no Quadro 37.

Situação adidática	O que caracteriza a situação adidática - Questão 1C
Ação	Discussão do comportamento da função; análise e registro do comportamento da sequência.
Formulação	Registro simbólico adequado do comportamento da função.
Validação	Confronto com as notações dos exercícios anteriores e discussão nos grupos.
Institucionalização	O registro algébrico da convergência da sequência.

Quadro 37: Caracterização da situação adidática da questão 1C

6.2 A tarefa 2 e as análises *a priori* e *a posteriori*

6.2.1 Análise *a priori*

A tarefa 2 instiga o aluno a perceber a necessidade de escrever fórmulas para representar os termos de uma sequência a fim de facilitar outros cálculos. Esta situação pode ser caracterizada como sendo de ação-formulação, dentro da TSD, e uma tarefa de produção (engloba a formação e o tratamento) na TRRS.

2. Considere a soma dos termos da sequência cujos termos iniciais são: $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \dots$ (esta soma infinita é chamada série infinita).

- Qual a soma dos oito primeiros termos? Como podemos escrever, matematicamente, esse resultado? Você pode usar, no Geogebra, o comando “soma(Sequência[<Expressão>, <Variável>, <Valor Inicial>, <Valor Final>]”, claro que para isso, você deverá encontrar a expressão geral dos termos da sequência.
- Qual a soma dos 20 primeiros termos? Como podemos escrever, matematicamente, esse resultado?
- Qual a soma dos 100 primeiros termos? Como podemos escrever, matematicamente, esse resultado?
- Que método você usou para calcular as somas pedidas nos itens a, b e c? Descreva-o.
- É possível somar todos os infinitos termos? Se sim, o que você pode dizer a respeito dessa soma? Escreva sua análise.
- Em símbolos, como você escreveria sua análise do item e?
- Que significado geométrico você atribui à série desse exercício?

Acredita-se que os alunos irão demorar muito tempo para escrever a expressão que fornece os termos da sequência, que é: $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k$. Talvez possam escrever a primeira fração fora da notação de somatória, e nesse caso ter-se-ia:

$$S_n = \frac{2}{3} + \sum_{k=0}^n \frac{1}{3 \cdot 2^k}$$

É possível ainda que alguns alunos tentem escrever a soma mediante a adição de todos os termos mesmo, sem encontrar uma expressão genérica, que é o objetivo do item d. Neste caso, os alunos terão dois possíveis tratamentos para obter a soma dos oito primeiros termos (Figura 51), por exemplo:

Tratamento 1	Tratamento 2
$\frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \frac{1}{48} + \frac{1}{96} + \frac{1}{192}$	$\frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \frac{1}{48} + \frac{1}{96} + \frac{1}{192}$
$\frac{3}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \frac{1}{48} + \frac{1}{96} + \frac{1}{192}$	0,667 + 0,333 + 0,167 + 0,083 + 0,042
$\frac{192}{192} + \frac{32}{192} + \frac{16}{192} + \frac{8}{192} + \frac{4}{192} + \frac{2}{192} + \frac{1}{192}$	+ 0,021 + 0,010 + 0,005
$\frac{255}{192}$	1,328

Figura 51: Dois Tratamentos para a soma de termos de uma sequência

Na Figura 51 observa-se que o registro numérico foi mantido, mas a representação foi alterada. No tratamento 1, os números estão representados na forma fracionária, ou seja, representação fracionária. Sua soma obedece as regras de soma de frações. Para o tratamento 2, os números estão representados na forma decimal e sua soma obedece as regras da soma de decimais.

De uma ou outra forma, os alunos deverão encontrar, respectivamente para os itens a, b e c:

$$S(8) = \sum_{k=0}^7 \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1.328125,$$

$$S(20) = \sum_{k=0}^{19} \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1.3333320618 \text{ e}$$

$$S(100) = \sum_{k=0}^{99} \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1.3333333333.$$

O item e) é proposto para investigar o pensamento do aluno acerca da adição de infinitos termos. Espera-se que os alunos digam que é possível realizar essa adição, mas que esta soma sempre aumentará. Esta é uma situação na qual a manipulação dos signos deve ocorrer mediante uma verificação numérica que a sustente. Neste caso, podem surgir dúvidas como: “se, depois de um determinado tempo, estivermos adicionando números tão pequenos que podem ser desprezíveis, a soma de infinitos termos não poderia ser reduzida a uma soma finita?” É importante lembrar que a maior parte dos alunos que participarão deste experimento ainda não terá estudado sobre séries nas aulas de Cálculo, haja vista que este assunto é trabalhado, na UTFPR, apenas no Cálculo 2.

6.2.2 Análise *a posteriori*

Os alunos demoraram um tempo para perceber que esta sequência já havia sido apresentada anteriormente. Depois disto, voltaram à parte B a fim de encontrar a fórmula para o termo geral e usar o comando indicado no intento de obter a soma de termos pelo Geogebra.

Antes de determinarem a fórmula para o termo geral, alguns alunos escreveram os oito e os vinte termos da sequência, e somaram-nos, usando a calculadora. Algumas dúvidas em relação à soma de frações surgiram, como por exemplo: como fazer?; quem é o mínimo?; posso por a fração direto na calculadora?; que tecla se usa para por a fração?. No entanto, foram deixadas de lado assim que perceberam que não precisariam de tais informações para obter a soma pelo Geogebra.

Kalinke (2009) observou em sua pesquisa que os alunos resolvem melhor as operações com frações quando estão usando lápis e papel, mas, neste caso, mesmo tendo estes instrumentos à disposição, os alunos preferiram atribuir esta tarefa ao aplicativo. Contudo, esse procedimento não agrega conhecimento sobre as frações ao aluno. Ao trabalhar esse assunto no Ensino Fundamental, talvez fosse interessante

pensar no uso de algum recurso computacional que mostrasse todos os passos do desenvolvimento de uma tal operação, aliado a jogos e outras estratégias mais divertidas e interessantes aos discentes.

Ao calcular a soma com o *software*, percebeu-se certo desconforto dos alunos em relação ao valor da soma que não se alterava. Isso ocorreu porque todos os alunos estavam usando o Geogebra com a visualização de 2 casas decimais. Quando se mudava o valor final para 20 ou 100 termos o valor mostrado permanecia o mesmo. Muitos acharam que o computador havia travado. Foi-lhes solicitado que alterassem as casas decimais para 10 e refizessem o valor das somas parciais. Neste ponto, notou-se um fator interessante: os alunos já haviam entendido como usar a ferramenta “controle deslizante”, e inseriram essa variável no comando dado para facilitar o acompanhamento do valor da soma. Dessa forma, eles perceberam que a soma parcial mudava muito pouco em relação à soma anterior, mas isto não era perceptível com a utilização de apenas duas casas decimais como referência.

Para este exercício, o cálculo da soma no *software* facilitou muito a análise do seu comportamento, uma vez que estes alunos não admitiram, na parte A, a possibilidade de uma sequência dada pela soma de termos ser convergente. Tal atividade corrobora a afirmação de Barroso *et al* (2008) sobre a possibilidade de uma exploração mais abrangente dos conceitos e relações envolvidas, quando se usa um recurso computacional. O importante não foi a execução das somas com frações, mas sim a análise do comportamento de tais somas quando o número de termos aumentava.

Os alunos, diante do experimento no *software*, concordaram com a possibilidade da adição de infinitos termos. A resposta de Álvaro sintetiza os comentários dos alunos:

“Por mais que aumente o valor, será possível somar, utilizando o Geogebra facilita pois só será necessário colocar a função soma do programa e depois colocar a expressão matemática (após isso é só colocar o valor inicial e final que significa que número eu quero que seja somado”.

A notação $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1,33$ foi a usada pela maior parte dos alunos para representar que a soma de termos seria limitada. Um dos alunos fez uma pequena modificação nesta representação:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^x \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^i = 1,33$$

o que indica uma compreensão parcial da notação a ser usada nas atividades posteriores.

De modo geral os alunos não atribuíram significado geométrico à série em questão, porém, houve duas tentativas. Vejamos:

- Bruno: “A distribuição de renda do governo onde retiram uma grande quantia pra ele e divide o resto (desprezível) para sociedade”.
- Álvaro: “você pode utilizar esse tipo de raciocínio para calcular área (uma área foi dividida em partes e você quer saber o valor da área total)”.

No Quadro 38 está a caracterização das situações adidáticas desta questão.

Situação adidática	O que caracteriza a situação adidática - Questão 2C
Ação	Discussão de procedimentos e possibilidades de cálculo de somas parciais. Aplicação do comando para soma parcial. Discussão de aplicações geométricas do problema.
Formulação	Discussão sobre a convergência de somas parciais.
Validação	Confronto com as conclusões dos demais grupos.
Institucionalização	A escrita do termo geral.

Quadro 38: Caracterização da situação adidática da questão 2C

6.3 A tarefa 3 e as análises *a priori* e *a posteriori*

6.3.1 Análise *a priori*

A tarefa 3 volta a investigar, mediante representações gráficas e numéricas, por meio dos *softwares* Geogebra e wxMaxima, a sequência $\frac{1}{n}$, só que desta vez, com a consideração da soma dos n primeiros termos.

- 3 Considere a sequência $S_n = \frac{1}{n}$. Faça o seguinte:
- Abra um arquivo no Geogebra:
 - Escreva $b=1$ e tecla ENTER.
 - Clique com o botão direito sobre b , abra as propriedades – controle deslizante - de “ b ” e escolha $\text{min}=1$, $\text{max}=1000$, $\text{incremento} = 1$ e feche.
 - Mostre “ b ” na área de desenho (caso não apareça automaticamente, basta clicar sobre a bolinha que aparece antes da expressão $b = 1$ na janela de álgebra).
 - Crie a soma dos primeiros termos da sequência $1/n$ da seguinte maneira: Soma[Sequência[$1 / n$, n , 1, b]]. Aparecerá um número a que valerá provisoriamente 1.
 - Depois, crie um ponto posicionado na reta real identificada com o eixo Ox , escrevendo, na linha de comando: $\text{Result}=(a,0)$ (atenção: a letra a ser usada aqui é a que aparecerá na janela de álgebra no passo iv). Aparecerá o ponto “Result” que representa o valor numérico da soma do primeiro termo apenas. Ele estará em $(1,0)$ (vamos entendê-lo como o 1 real).
 - Clique sobre o campo “ b ” e utilize as setas do teclado para aumentar o valor de b . Quando você der apenas um toque na seta para a direita terá representado o valor da soma dos dois

- primeiros termos. Quando apertar a tecla novamente será mostrado o ponto que representa a soma dos 3 primeiros termos da sequência. E assim por diante. Investigue o comportamento das somas à medida que se aumenta o número de termos considerados. (“b” indica a quantidade de termos considerados).
- vii. Usando a simbologia já apresentada, expresse o valor da soma dos mil primeiros termos desta sequência.
 - viii. Enquanto você aumenta o valor de b, preste atenção na velocidade de crescimento da soma, observando o deslocamento do ponto (a,0) criado.
 - ix. À medida que aumentarmos o número de termos que estão sendo adicionados (valor de b), o valor calculado da soma aumentará também? Em sua opinião, existe um valor máximo para essa soma? Se sim, determine-o e argumente tal escolha. Se não, justifique.
 - x. Escreva sua conclusão a respeito do comportamento da soma dos termos da sequência – você pode alterar o valor máximo de b, se preferir, para analisar melhor o que se pede.
 - xi. O que é mais interessante de observar para concluir sobre o comportamento da soma parcial: o deslocamento do ponto sobre o eixo Ox ou o valor da soma? O que mais te chamou a atenção? Escreva.
- b) Agora, abra um arquivo no wxMaxima.
- i. Escreva o comando $S(k):=\text{sum}(1.0/n, n, 1, k)$.
 - ii. Observe a saída simbólica apresentada pelo software e compare com a que você escreveu no item vii do passo anterior. É a mesma? Se não, em que difere? Comente.
 - iii. Considerando o comando dado em b-i, o que significa, para você, a expressão $S(1000)$? Escreva.
 - iv. Com o comando do item b-i) você criou no wxMaxima uma função que calcula a k-ésima soma parcial (isto é, a soma dos k primeiros termos da sequência). Agora, confira o que foi feito no Geogebra e explore o valor das somas parciais para valores maiores. Anote o número de termos e a soma parcial obtida, nos seus experimentos.
 - v. Se você fosse escrever uma fórmula para representar a soma de infinitos termos desta sequência, como você faria? Escreva.
 - vi. Observando os resultados do item iv, você mantém suas conclusões do item a-ix e a-x? Se não, em que você mudaria? Escreva, argumentando sobre as modificações.
- c) Em que ambiente você preferiu fazer as experimentações: no Geogebra ou no wxMaxima? Justifique.

As tarefas pretendem levar o aluno a construir situações que constituam parte do campo do conceito de convergência de uma série numérica. O trabalho é proposto com dois sistemas semióticos disponibilizados nos *softwares* Geogebra e wxMaxima, um é o simbólico (aritmético-algébrico) e outro é gráfico e algébrico. Além disso, investiga-se a utilização da simbologia matemática para outros contextos. No Geogebra, a soma obtida para os mil primeiros termos deve ser:

$$\sum_{n=1}^{1000} \frac{1}{n} = 7.49$$

Imagina-se que os alunos dirão que para um n maior, a soma deverá atingir o 8, já que ela tem um comportamento crescente muito lento.

A investigação no wxMaxima permitirá que o aluno associe a soma parcial de n termos com o valor funcional para n . Da mesma forma, permite que o aluno transite entre a representação no sistema numérico e a representação no sistema gráfico, o que viabilizará melhor compreensão do que está em estudo.

Esta situação pode ser caracterizada como uma situação de ação-formulação-validação.

6.3.2 Análise *a posteriori*

Em relação à série apresentada, de modo geral, os alunos fizeram afirmações parecidas com a de Álvaro: “no começo ela aumenta rapidamente, porém conforme aumenta a velocidade diminui”, mas todos os respondentes afirmaram que a soma desses termos terá um valor máximo. O aluno Bruno afirma: “o número aumenta, porém irá chegar em um ponto que a sequência tende a aproximar sendo que quanto maior o denominador mais desprezível o valor é”. Já Claison diz: “quanto maior a soma dos termos, menor a variação na soma em a (que se refere à soma parcial). Não existe o valor máximo para soma, porém o valor em a estagnarà, pois a diferença é quase insignificante”. Quando questionado sobre esta última frase, o aluno indicou a mudança nas casas decimais observadas para deduzir a não existência do valor máximo, mas não pareceu considerar a opção de que a soma ultrapassasse o valor 8, por isso afirma que o valor “estagnarà”. Apenas os alunos Bruno e Álvaro registraram a soma: $\sum_{n=1}^{1000} \frac{1}{n} = 7.49$. Os demais não fizeram menção a esse valor.

O *software* wxMaxima trouxe importantes contribuições com relação à escrita e aos cuidados com os parênteses, já que mostra a escrita matemática (algébrica) do comando dado. Por apresentar o resultado mais rapidamente foi preferido pelos alunos. Contudo, Claison afirmou ter preferido usar os dois *softwares* simultaneamente, já que “um complementa o outro e dependendo do que for feito, é melhor usar um determinado programa”.

Outro ponto a destacar em relação a este *software* é o significado atribuído a um simples S(1000). Alguns alunos compreenderam que esta expressão indicava a soma dos mil primeiros termos da sequência, outros, no entanto, afirmaram que esta

representava que “o valor de k é 1000”. Isto indica a necessidade de maior prática com os registros simbólicos usados na matemática e com sua conversão na língua materna. Isso possibilitará a compreensão do que leem ou escrevem.

No decorrer da atividade, novamente, a diversificação de registros foi importante para a compreensão do aluno. Chamou-lhes a atenção, a soma ser mostrada graficamente no Geogebra, pois eles podiam, usando o controle deslizante, observar a velocidade de crescimento e o aumento no valor numérico calculado. Com tais recursos e com a interação na interface do *software* os alunos puderam vivenciar significações mais interessantes que as significações “estáticas” vivenciadas pelas transformações de registros no papel.

Apresenta-se, no Quadro 39, a caracterização da questão na TSD:

Situação adidática	O que caracteriza a situação adidática - Questão 3C
Ação	Manipulação dos comandos dados e a análise dos resultados produzidos.
Formulação	Discussão sobre a convergência e divergência de uma série.
Validação	Confronto com os demais grupos.
Institucionalização	Associação do valor funcional com a soma de n termos da sequência.

Quadro 39: Caracterização da situação adidática da questão 3C

6.4 A tarefa 4 e as análises *a priori* e *a posteriori*

6.4.1 Análise *a priori*

A tarefa 4 pretende acrescentar nova situação às da tarefa anterior.

- 4 Considere a sequência definida por $S_n = \frac{1}{n^2}$.
- Repita os procedimentos a) e b) do exercício anterior.
 - Qual a diferença observada nas somas parciais entre este exercício e o anterior? A que você atribuiria tais diferenças?
 - Expresse, simbolicamente, a conclusão obtida sobre a soma parcial de infinitos termos desta sequência.

Esta tarefa apresenta uma série em que a soma dos termos é convergente, contrariando o resultado da questão anterior, que apresentava uma série divergente. Espera-se que o aluno escreva $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1.645$ e conclua que esta é uma série convergente, mesmo que esta definição ainda não tenha sido trabalhada para séries.

6.4.2 Análise *a posteriori*

Esta série gerou um estranhamento nos alunos, que, a princípio, acreditaram que aconteceria o mesmo que a tarefa anterior. De início, os alunos usaram o wxMaxima para calcular as somas. Quando perceberam que os valores estavam próximos, mesmo quando mudavam a quantidade de termos somados, foram à visualização gráfica do Geogebra, usando o comando dado na tarefa 3, para observar o comportamento da soma e entender os resultados fornecidos pelo wxMaxima. Ou seja, buscaram outro registro para analisar. Neste ponto, deve-se destacar a contribuição da utilização de ambos os *softwares* para a compreensão da convergência desta série. O uso de *softwares* tem sido amplamente discutido e apontado como alternativa para o ensino do CDI, como exemplificam os trabalhos de Gonzales-Martin e Camacho (2004), Scucuglia (2007) e Richit *et al* (2011), entre outros.

De modo geral, os alunos compreenderam que a soma da tarefa 3 era infinita, enquanto a da tarefa 4, tinha um limite. Para isso, a observação do deslocamento do ponto sobre o eixo x foi fundamental, pois como afirma Álvaro: “o deslocamento do ponto Ox é mais fácil de observar”. A Figura 52 apresenta a tela do Geogebra, mostrando as sequências dos exercícios 3 e 4 e as respectivas somas parciais para 401 termos. Uma limitação do software é que, nesse aspecto, o aluno deveria acompanhar a soma por meio da sua representação numérica, já que para visualizar uma quantidade grande de pontos fica muito trabalhoso.

De acordo com os comentários dos alunos durante a aula, muitos deles compreenderam a convergência desta série, porém, apenas Álvaro e Débora registraram, efetivamente, essa compreensão, escrevendo: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1,64$. Álvaro justificou dizendo que “isso se deve ao n estar ao quadrado no exercício 4 e não estar no ex (3)”. Aliás, essa potência gerou questionamentos por parte de alguns, que perguntavam “mas só por que está ao quadrado vai mudar?”. Um dos alunos, Claison, registrou que “a quantidade de termos é menor para que o valor em a estagnasse”. Essa questão poderia ser mais bem explorada em sala de aula, por meio da observação de outras sequências cujo denominador tenha uma potência maior.

A utilização do wxMaxima permitiu que os alunos percebessem o incremento no valor da soma à medida que se aumentava a quantidade de termos somados, mais facilmente que no Geogebra. Isso se deve ao fato de que, no primeiro ambiente, ficava

registrado o valor numérico obtido para a soma, enquanto esse processo, no Geogebra, era mais demorado. A Figura 53 mostra o valor para possíveis somas parciais para as duas sequências, no wxMaxima.

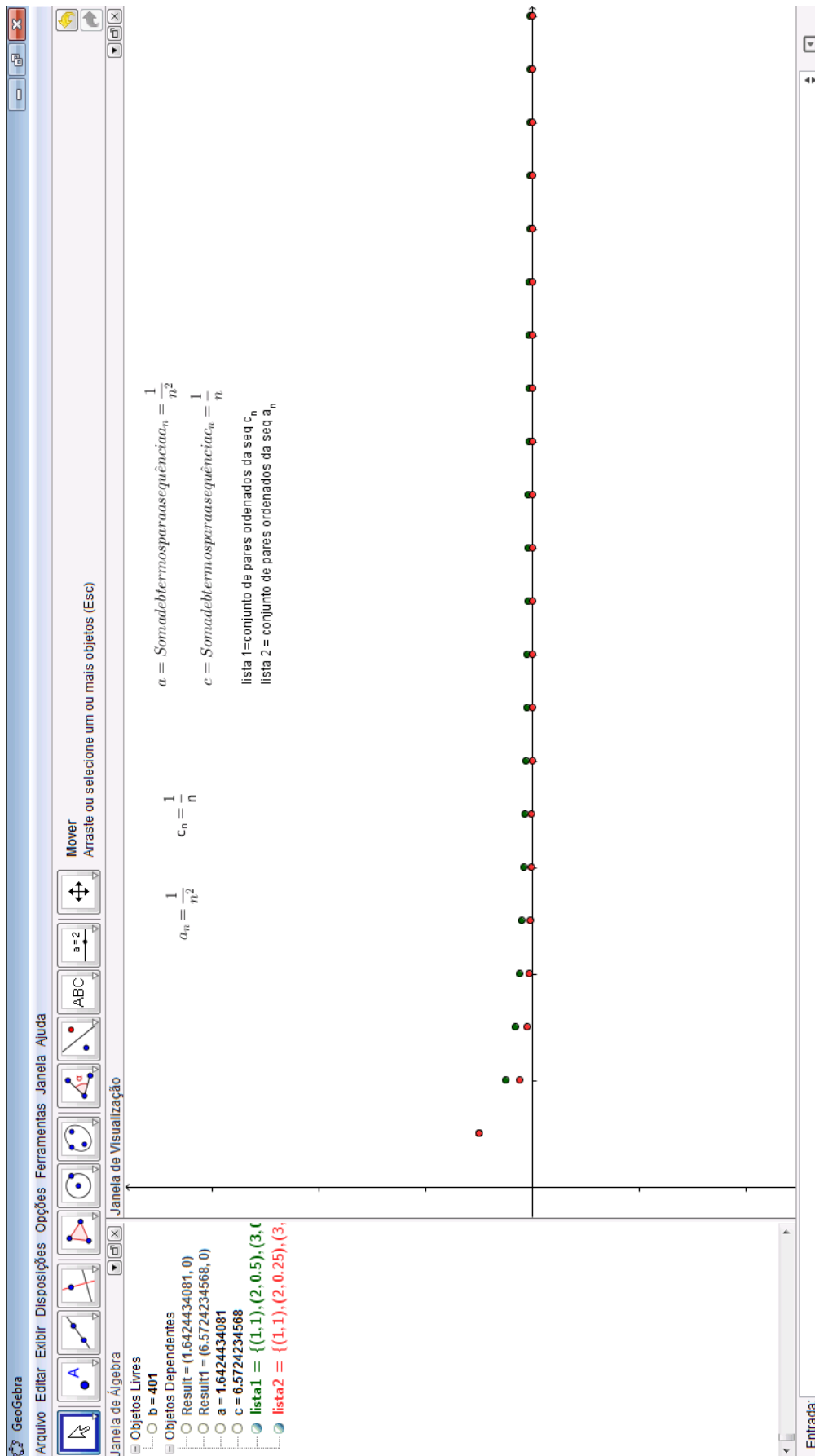


Figura 52: As seqüências dos exercícios 3 e 4 no Geogebra

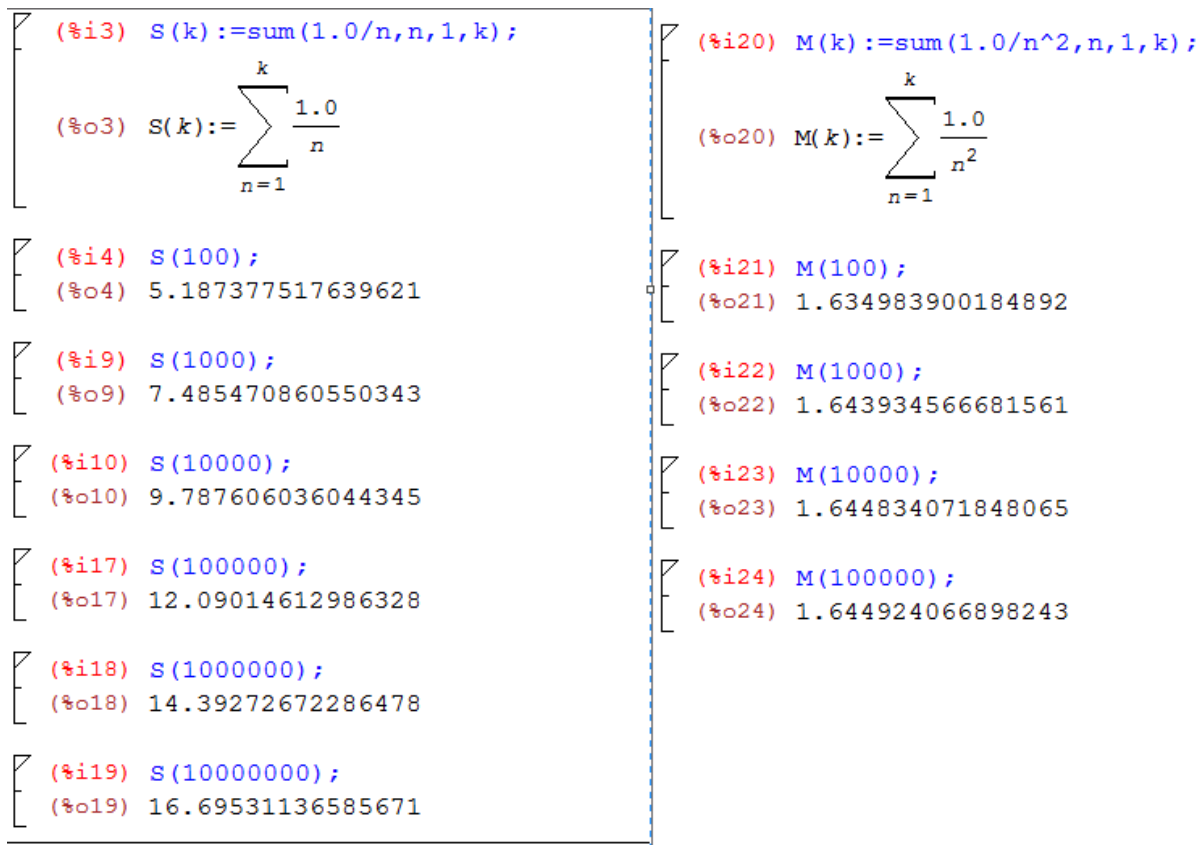


Figura 53: Somas parciais obtidas no wxMaxima

Observe no Quadro 40 a caracterização desta questão.

Situação adidática	O que caracteriza a situação adidática - Questão 4C
Ação	Manipulação dos comandos; discussão das diferenças em relação à tarefa anterior.
Formulação	Discussão sobre um critério para a convergência de uma série.
Validação	Confronto do critério com o dos demais colegas.
Institucionalização	Uma série pode convergir.

Quadro 40: Caracterização da situação adidática da questão 4C

6.5 As tarefas 5 e 6 e as análises *a priori* e *a posteriori*

6.5.1 Análise *a priori*

As atividades 5 e 6 ampliam o rol de discussão das séries, apresentam sequências em que os termos são alternados, ora positivos, ora negativos, e instigam o aluno a pensar em outras possibilidades.

- 5 - Considere a série cuja soma dos primeiros termos é: 1-
 $1+1-1+1-1+1\dots$
 a) Escreva uma fórmula que expresse a soma dada.
 b) Analise a soma. O que você pode dizer a respeito do seu valor? Escreva sua conclusão.

- c) Esta série é convergente? (se necessário, releia o significado de sequência convergente – exercícios 7 e 12 da parte A). Justifique.
- d) Como você explicaria a convergência de uma série (soma de termos de uma sequência)? Que critérios você usaria? Escreva sua explicação.
- e) Com suas palavras, defina uma série convergente.
- f) Em sua opinião, soma de termos de sequências alternadas (em que os termos mudam de sinal, um após o outro), pode ser convergente? Justifique.

6 - Considere a soma: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \dots$

- a) Encontre uma expressão matemática que forneça cada um dos termos da soma.
- b) Escreva a soma indicada de forma concisa (relembra o que foi feito na parte A, se necessário).
- c) Calcule a soma dos oito primeiros termos (S_8) dessa sequência (Se necessário, use os comandos dados no exercício 3). Escreva o resultado na forma concisa.
- d) À medida que se aumenta o número de termos somados, o que acontece com o valor da soma total?
- e) Baseado no item d, o que é possível afirmar sobre a convergência da série?
- f) Escreva sua conclusão sobre a série dada e expresse, na forma concisa, o valor da soma.

Para a série apresentada na tarefa 5, o valor resultante para a soma parcial será 0 ou 1, pois depende da quantidade de termos adicionados. Na experimentação numérica, é provável que os alunos atribuam apenas valores pares como 1000, 10000... e concluam que a soma vale zero (ou 1, dependendo de como montarem a fórmula). No Geogebra, podem observar melhor a soma parcial que oscilará entre o 0 e o 1. Isto é, para estes exemplos em particular, a exploração nos dois aplicativos vai contribuir para gerar maiores discussões e reflexões. Espera-se que isso reforce situações nas quais a transformação e a conversão entre diferentes sistemas semióticos se tornem importantes e possibilitem a construção de novos conhecimentos. Os alunos podem concluir que as séries oscilantes não convergem. Como este é mais um caso de uma série divergente, pede-se, a título de curiosidade, que o aluno escreva a sua definição de convergência de série. É esperado que ele utilize os moldes da definição de convergência de sequência.

A tarefa 6 mostra uma série oscilante que é convergente no intuito de contrapor o que se imagina que os alunos respondam na questão anterior. Novamente, com a exploração nos dois *softwares*, espera-se que os alunos concluam que a série apresentada na tarefa convirja para o número 0.6932, e escrevam:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 0.6932$$

Estas questões podem ser classificadas como de formulação-validação.

6.5.2 Análise a posteriori

Na tarefa 5, sem demora, os alunos Daia, Caroline e Claison afirmaram que a soma seria zero, enquanto Débora afirmou que a soma era 1. Os demais alunos, Marcos, Bruno, Álvaro e Camila, que responderam a essa questão, disseram depender da quantidade de termos somados. O registro de Álvaro está apresentado na Figura 54.

a) Se o número de elementos que vc for somar for par

$$\sum_{\text{par}} 1-1 = 0$$

Se o número de elementos que vc for somar for ímpar

$$\sum_{\text{ímpar}} = 1+1-1 = 1$$

Figura 54: Registro da expressão para a série alternada da tarefa 5 (Álvaro)

Quanto à convergência, os alunos que afirmaram haver um valor para esta soma (0 ou 1) classificaram-na como convergente, enquanto os alunos que perceberam diferentes valores resultantes para soma, dependentes do número de termos somados, classificaram-na como divergente. Isto indica a compreensão do conceito intuitivo de convergência associado à existência do limite.

Com relação ao critério de convergência para séries, os cursistas estabeleceram o seguinte:

- Débora: “quando uma série tem um valor máximo podemos dizer que a série é convergente” e também “uma série convergente é quando somando infinitos termos se mantém o mesmo resultado”.
- Bruno: “série convergente é a sequência no qual vem a tender a um único número”.
- Claison: “uma sequência convergente é o somatório da própria sequência que tem valor convergindo ou aproximando de um determinado ponto”.
- Caroline: “Uma série convergente é uma sequência que possui um limite”.

Mesmo com palavras diferentes, às vezes sem muito sentido ao tentar compreendê-las literalmente, percebe-se que a noção intuitiva do que seja uma série convergente foi alcançada pelos alunos que chegaram até esta questão. Esse é um

exemplo da construção da teia de relações do conceito mediante registro em língua natural.

Em sala de aula, a título de incentivo à escrita algébrica, o professor pode solicitar aos alunos, que escrevam seus critérios de convergência para séries em termos formais e apresentem e discutam com os colegas de classe. Na discussão, é provável que eles reforcem suas compreensões acerca de algumas notações.

Em relação à possibilidade de convergência para séries alternadas, os alunos que a classificaram como convergentes afirmaram que seria possível sim, e citaram a própria série como exemplo. Aqueles para os quais esta sequência era divergente, disseram que isso não seria possível, pois “sempre haverá dois números para a qual a própria converge”.

Para a tarefa 6, todos os alunos obtiveram aproximadamente 0,64 para a soma dos oito primeiros termos. Alguns deles usaram a calculadora para obter esse valor. Nem todos escreveram a soma para infinitos termos, porém, os que a apresentaram, citaram-na como 0,69 ou 0,7 e a classificaram como convergente. Apenas uma equipe, de Daia/Caroline, afirmou que “esta série não é convergente, pois não possui limite”, porém, não apresentou maiores detalhes sobre a razão pela qual chegou a essa conclusão.

Em síntese, estas questões são caracterizadas como mostrado no Quadro 41.

Situação adidática	O que caracteriza a situação adidática - Questões 5-6C
Ação	Discussão sobre as séries alternadas e sua convergência; escrita do termo geral.
Formulação	Hipóteses sobre a convergência de séries alternadas.
Validação	Confronto entre os resultados dos exercícios 5 e 6.
Institucionalização	A noção de Séries Alternadas.

Quadro 41: Caracterização da situação adidática das questões 5-6C

6.6 As tarefas 7 e 8 e as análises *a priori* e *a posteriori*

6.6.1 Análise *a priori*

A tarefa 7 tem por finalidade investigar a compreensão dos termos matemáticos pelos alunos. É uma questão que pode ser considerada, na TSD, como sendo de institucionalização do saber, pois apresenta a definição formal de convergência.

7 - Considere a seguinte definição de **Convergência ou Divergência de uma série infinita**: Uma série infinita $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ com uma soma parcial de ordem n , $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_n$ converge para a soma **S** se S é um

número finito tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ e, nesse caso, escrevemos $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S$. No caso em que $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ não existe dizemos que a série **diverge**.

- a) Compare-a com a definição escrita por você no exercício 5-e. São semelhantes? Comente.
- b) Ambas as definições (sua e a “formal”) têm o mesmo significado? Comente.
- c) Se você respondeu sim à questão anterior, qual delas pode ser melhor compreendida por outros alunos? Por quê?

Espera-se que, num contexto em que a experimentação vem antes da apresentação formal da definição, os alunos afirmem que a definição elaborada por eles é mais clara, mesmo que precise de complementações.

Para finalizar as tarefas desta parte, é solicitado que o mapa conceitual seja atualizado após a realização das mesmas.

8- Acrescente as relações desta parte C no seu mapa conceitual. Entregue-o.

A expectativa é de que os alunos complementem o mapa realizado por eles com mais ligações cruzadas e com a inserção de conceitos como os de série, termos alternados e soma parcial. Uma estimativa do que os alunos poderão acrescentar ao mapa já elaborado, é apresentada em verde na Figura 55. Nela, a parte em vermelho refere-se ao mapa planejado inicialmente, para a parte A, e em azul, os complementos relativos à parte B.

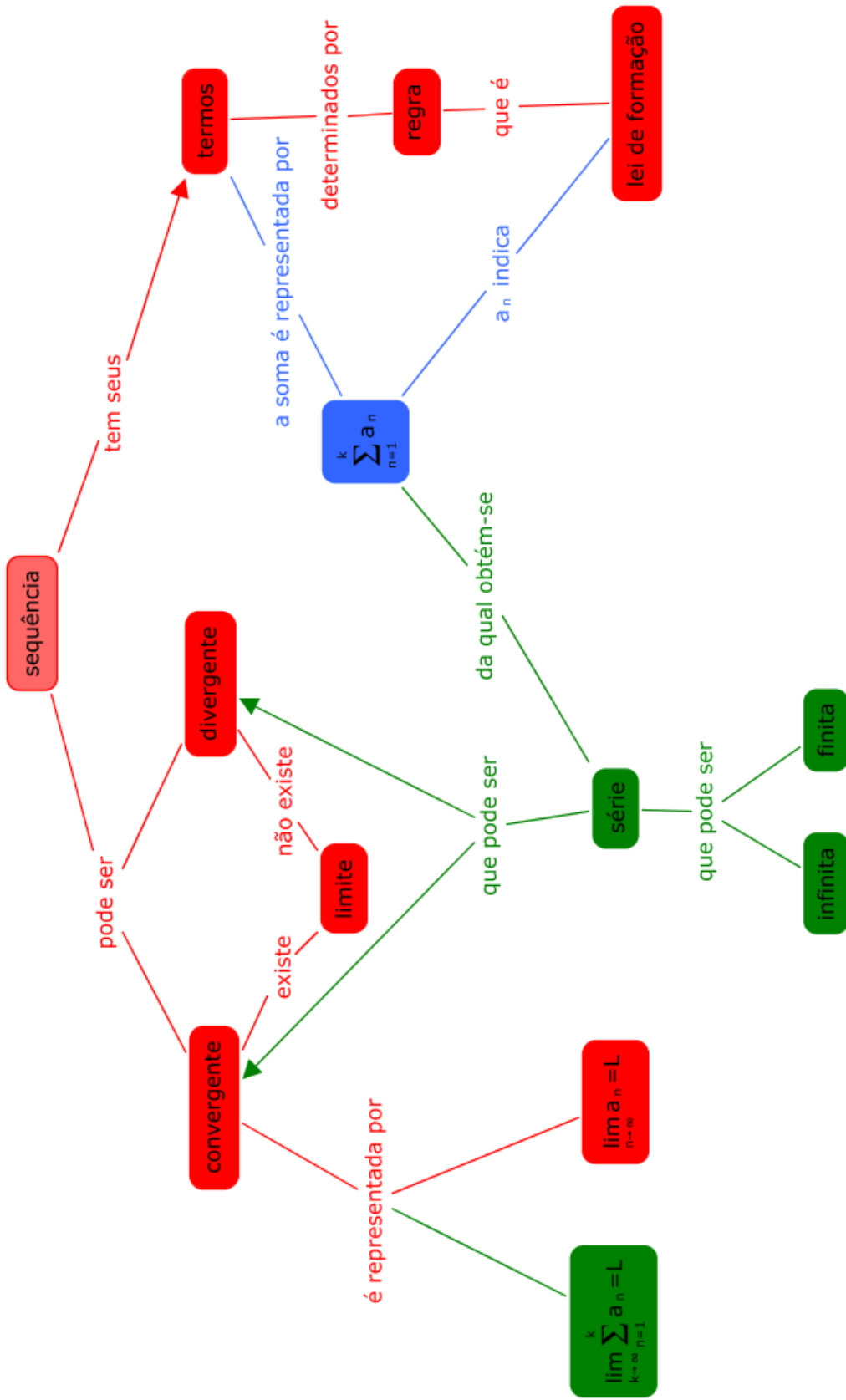


Figura 55: Mapa conceitual estimado para conceitos trabalhados até a parte C

6.6.2 Análise *a posteriori*

A questão 7 apresentou as mesmas dificuldades de compreensão que a definição de sequência convergente da parte A. Na comparação com a definição escrita pelos próprios alunos, todos afirmaram que a sua definição era mais compreensível, pois:

- Marcos: “Exige menos conhecimento prévio”;
- Débora: “Expliquei com palavras e acho bem mais compreensível que a definição formal”;
- Bruno : “Simplifica a forma”;
- Caroline: “Prefiro o meu jeito primeiro, para depois analisar as formas, facilita muito”;
- Álvaro: “Eu traduzi em palavras o que está escrito na forma matemática”.

Esses depoimentos atestam a eficiência da articulação de situações nas quais seja possível, em primeira instância, a utilização da representação em língua natural, para posterior conversão em registro algébrico. Solicitar que os alunos escrevam o significado de uma definição em língua natural, pode auxiliar na compreensão dos registros algébricos em outras situações.

A caracterização desta questão 7 encontra-se no Quadro 42.

Situação adidática	O que caracteriza a situação adidática - Questão 7C
Ação	Discussão e entendimento da definição dada; confronto com a definição oficial e a pessoal.
Formulação	As semelhanças entre as definições “formal” e “pessoal”.
Validação	Análise das semelhanças e diferenças entre as definições pessoal e formal.
Institucionalização	A definição formal de convergência de séries e suas notações.

Quadro 42: Caracterização da situação adidática da questão 7C

Já em relação ao mapa conceitual, o conceito de soma finita e infinita, convergente e divergente, apareceu nos mapas elaborados. Devido à quantidade de exercícios e o pouco tempo disponível para sua realização, muitos alunos optaram por fazer apenas o mapa final. Retornamos a esse assunto na “Análise Didática dos Mapas Conceituais”.

6.7 Análise Didática das Atividades

As atividades da parte C tiveram o objetivo de proporcionar situações para a discussão e compreensão do conceito de convergência de uma série, bem como, proporcionar rupturas à certeza dos alunos de que a soma de termos de uma sequência sempre aumenta indefinidamente, ou seja, “vai para o infinito”, como afirmado por eles na questão provocativa 14, da parte A.

Aqui, atividades exploratórias foram propostas em situações não contempladas na parte A, como o caso de sequências alternadas, para que pudessem ser analisadas. Esta proposição teve o intuito de levar o aluno a refletir sobre uma variedade maior das possibilidades de definição do termo geral de uma sequência. Acredita-se que esta diversidade de sequências colabora no discernimento dos critérios de convergência para séries.

Nesse sentido, a utilização dos dois *softwares* facilitou a aceitação de que há sequências cuja soma de infinitos termos converge. Para isso, a representação numérica usada pelo wxMaxima foi mais convincente, pois não deixava dúvida no valor obtido para a soma parcial, enquanto que observar o crescimento da soma parcial na representação gráfica do Geogebra era mais difícil, devido à velocidade de crescimento das somas parciais poder confundir o observador. É o caso da série infinita $\frac{1}{n}$. Ao seguir o comando dado na questão 3, e observar o deslocamento do valor obtido para a soma parcial, na representação gráfica, percebe-se um deslocamento muito lento, especialmente em torno do número de abscissa 7. Parece que existirá aproximação a um número. O valor mostrado no wxMaxima especificava claramente os números obtidos.

Nesta parte, foi intensificada a necessidade de o aluno argumentar ou justificar escolhas usando a língua natural, incentivando o desenvolvimento da habilidade de comunicação em Matemática. Além disso, a expressão em língua natural, seja na forma escrita, seja na forma oral, contribui para a atividade cognitiva de objetivação ligada a *semiósis*.

Em síntese, no geral, as questões propostas nesta parte da sequência didática mobilizaram as atividades cognitivas de formação e tratamento, que estabelecem requisitos mínimos para o cálculo de áreas da próxima etapa da sequência. O Quadro 43 apresenta alguns aspectos trabalhados nas questões componentes da parte C.

Ênfase na questão	N. da questão	Tipos de representação envolvidas	Atividade Cognitiva mobilizada
Usar a notação científica para convergência de sequências	1	Gráfica Algébrica	Conversão
Calcular somas finitas e infinitas	2,3,4,5,6	Numérico	Tratamento
Usar notação formal para série	2,3,4,5,6	Algébrico	Formação
Definir convergência de uma série	5,7	Língua Natural Algébrico	Formação
Usar notação formal para convergência de séries	4,5,6,7	Algébrica	Formação
Argumentar e/ou justificar escolhas	2,3,4,5,6	Língua Natural	Tarefa de compreensão
Estabelecer o termo geral da série	2,5,6	Algébrico	Conversão

Quadro 43: Aspectos relativos às questões da parte C

6.8 Análise Didática dos Mapas Conceituais da parte C

Como já afirmamos, o principal objetivo desta parte C era trabalhar a noção de convergência de uma série, representando-a por meio da notação de limites.

Espera-se que os MC elaborados contemplem dois conceitos fundamentais: série e convergência de uma série. A cada um destes conceitos podem aparecer outras informações como as apresentadas no Quadro 44.

Conceito-Chave	Possíveis Desdobramentos
Série	Soma de termos de uma sequência Finita ou infinita
Convergência da série	Soma limitada Existe limite

Quadro 44: Conceitos-Chave das atividades da parte C

Apenas duas duplas entregaram o MC desta parte, que estão apresentados nas Figura 56 e Figura 57, mais adiante. Relembramos que os alunos foram orientados a continuarem os MC elaborados para a parte A, a fim de percebermos a rede de relações estruturada pelo aluno. Os participantes também foram orientados a alterar as informações do MC se fosse necessário. Desta forma, uma análise parcial destes mapas já foi apresentada na parte A. Aqui discutimos apenas os conceitos visados para a parte C e parte B, já que naquela oportunidade, nenhum aluno alterou o mapa A.

Nesta etapa, ainda havia seis grupos distintos que frequentavam o curso, embora nem sempre todos os integrantes comparecessem. Apenas dois grupos fizeram alterações, o que indica que algo, na sequência, não saiu como o esperado, uma vez que os alunos não mobilizaram os conhecimentos necessários.

Um fator de cunho epistemológico, que foi percebido nas aulas, pode ter influenciado na atitude dos alunos pela não alteração dos Mapas Conceituais. Os alunos continuaram duvidando da possibilidade de uma soma infinita não ser infinita. Isto está associado à concepção de infinito de cada indivíduo e, como já discutido na parte A, à percepção que, ao se acrescentar alguma coisa, mesmo que uma quantidade desprezível, o valor total deve aumentar. Com esta concepção, é difícil admitir a convergência⁶⁸. Talvez um número maior de atividades, com maior diversidade e mais tempo para assimilação dessa possibilidade, possam ajudar na compreensão dessa questão.

Podemos observar no Mapa da Figura 56 a existência da palavra “soma” associada aos conceitos de “convergência” e “divergência”. Numa **análise superficial** no MC é possível constatar que:

1. A palavra “série” não aparece, mas ela é substituída (provavelmente) pela palavra “soma”, cuja ligação indica que ela pode ser finita ou infinita, que está de acordo com o realizado nas atividades;
2. Consta no MC que a soma pode tender a uma constante ou não, o que significa que ela pode ou não ter limite (ainda que estas palavras não tenham sido usadas pelos alunos no referido MC);
3. Aparece ligação entre o conceito “soma” e os conceitos “convergência” e “divergência”.

As três constatações estão associadas ao que era esperado como resultados da parte C. Esta análise superficial dos mapas nos induz a pensar que estes alunos assimilaram o conteúdo visado. No entanto, não podemos nos ater apenas a esses pontos da análise superficial. Há outros aspectos que merecem atenção, talvez mais do que os supracitados. Observemos:

1. O conceito “soma” não está ligado a outro conceito ou frase.
2. A convergência/divergência da soma está associada ao fato da soma ser finita/infinita e não ao fato de tender a uma constante ou não.

Em relação ao primeiro aspecto, é possível que os alunos não tenham associado os números que foram somados aos termos das sequências anteriores, mesmo que a

⁶⁸ Foi feito uma busca na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (<http://bdtd.ibict.br/>) com as palavras-chave (e combinações destas palavras): séries, convergência de série, ensino de séries, ensino de sequencias, e não obtivemos retorno de pesquisas publicadas que fizessem comentários fundamentados a respeito das dificuldades dos alunos neste conteúdo específico.

palavra “sequência” tenha sido escrita nos enunciados. Isto pode indicar falta de conexão com as etapas anteriores da sequência didática, mas pode também, indicar apenas que o aluno não sabia como representar esta ligação, haja vista que uma dupla apresentou esta dificuldade no primeiro mapa elaborado. Portanto, é preciso investigar melhor esta ausência de conexão.

No segundo aspecto, vale lembrar que a associação convergência/finito e divergência/infinito já apareceram nos primeiros mapas. É importante mostrar para o aluno que a convergência está associada à existência do limite e não ao fato da sequência ou série ser ou não finita. Neste momento, o professor ainda pode desconstruir uma ligação não adequada de conceitos.

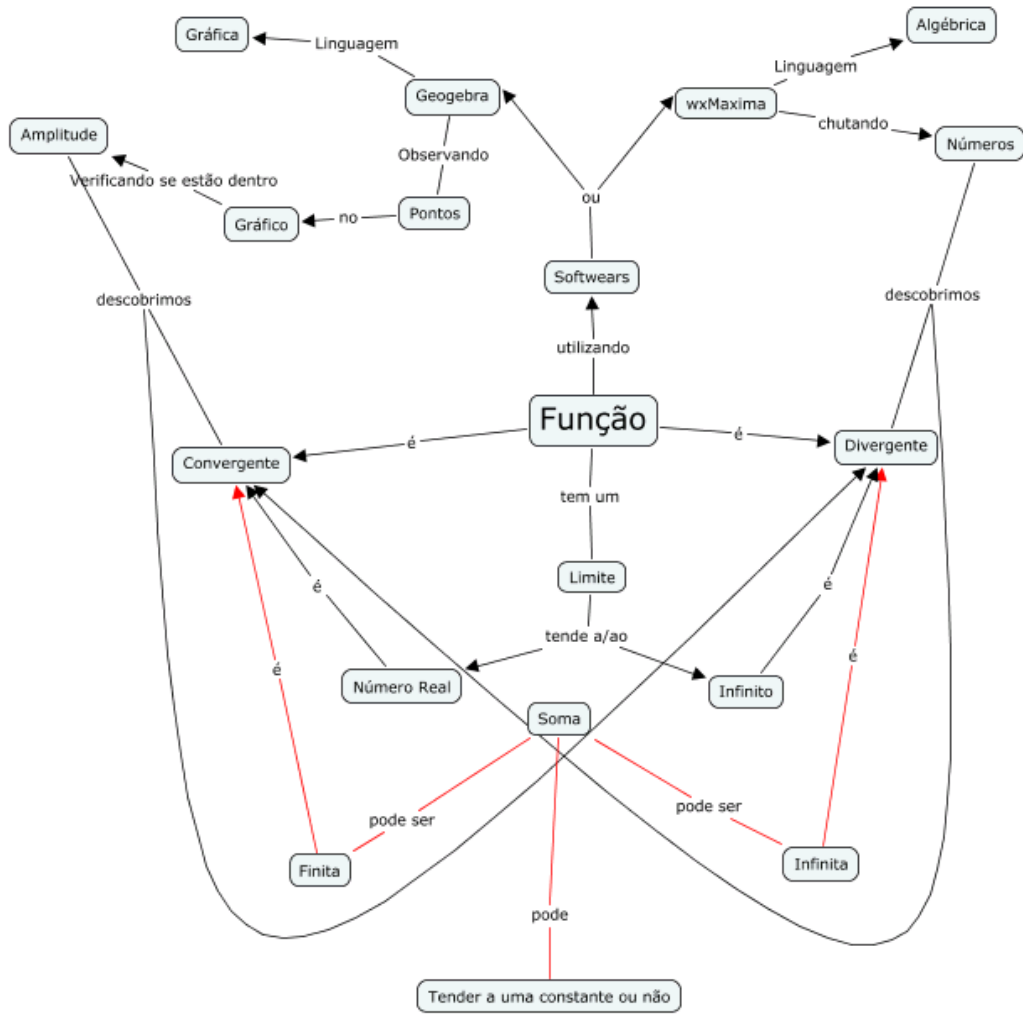


Figura 56: Mapa conceitual elaborado por Alvaro/Marcos após parte C

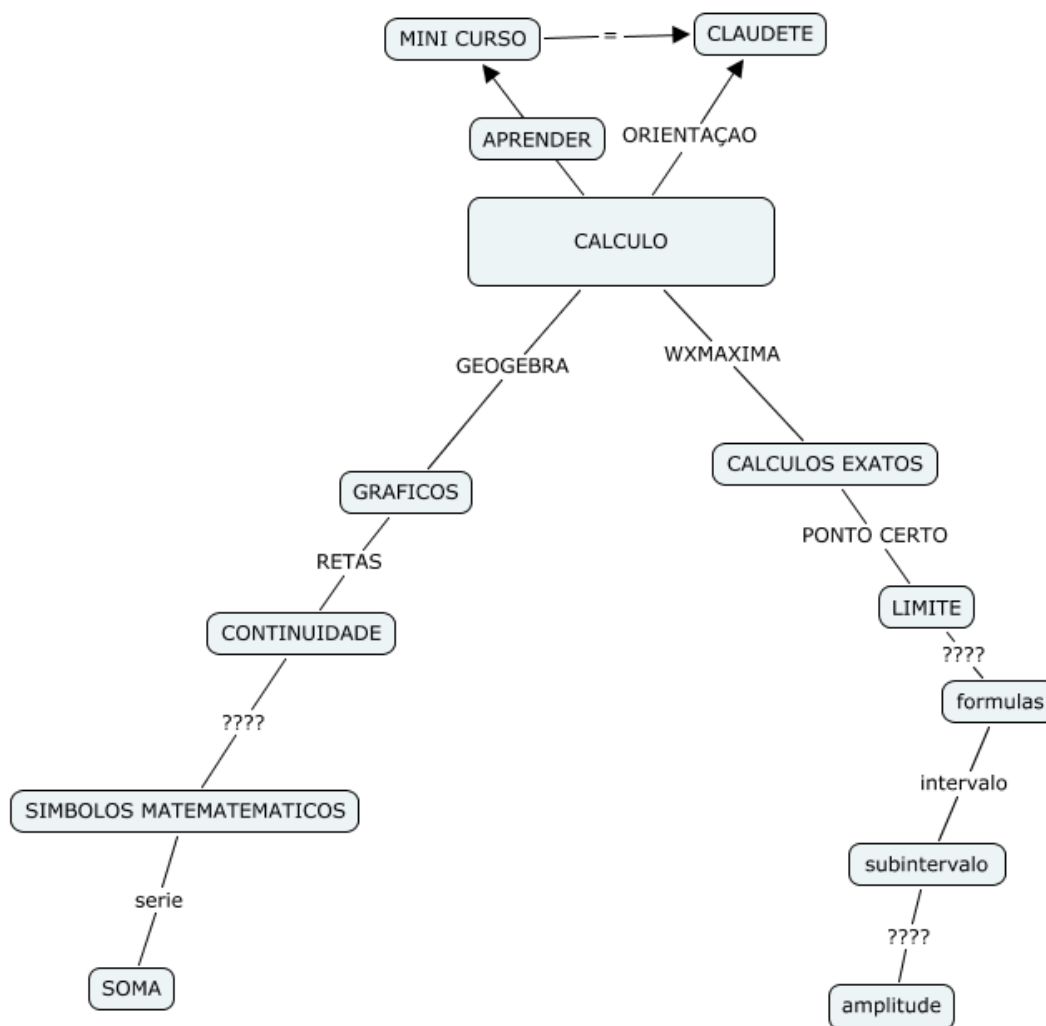


Figura 57: MC - parte C elaborado por Daia/Caroline

Na Figura 57 podemos perceber que os conceitos matemáticos visados continuam confusos para a dupla Daia e Caroline. Pela análise do Mapa é possível perceber que as alunas não reconhecem a relação entre tudo o que fizeram até o momento, assim, precisam de atenção.

O Mapa nos permite deduzir, ainda, a dificuldade com o registro simbólico usado na Matemática, devido aos pontos de interrogação como frases de ligação entre os conceitos de “continuidade”⁶⁹ e “símbolos matemáticos” e entre “limite” e “fórmulas”.

Note também que a palavra “série” está como uma frase de ligação entre os conceitos “símbolos matemáticos” e “soma”, atestando que é necessário uma definição mais formal do conceito de série.

⁶⁹ Este conceito já foi objeto de análise na parte A.

Diante do exposto, o professor pode promover um debate sobre as concepções de infinito, convergência, diferença entre série e sequência, de modo a dirimir falhas no entendimento destas noções tão importantes para as próximas etapas.

Até o momento, pela análise dos Mapas, é possível inferir que a convergência de série ainda não está ancorada, devido ao fato de envolver uma soma infinita, provavelmente, pois esta ideia contraria a lógica de que, acréscimos positivos, sempre aumentam o resultado final.

Seção 7 - Análises *a priori* e *a posteriori* das Atividades Propostas na Parte D

Para introduzir outros conceitos necessários à construção do conceito de integral definida segundo Riemann, foi planejada a parte D, onde contém tarefas que envolvem o cálculo de áreas.

Inicialmente, para determinar a área sob uma curva, pretendeu-se o uso dos conhecimentos da Geometria Plana, por meio do processo de modificação mereológica de que trata Duval (2012), e já comentado na seção 1.

Nesta parte D, pretende-se contribuir para o enfrentamento das dificuldades já citadas no trabalho de Contreras & Ordóñez (2006), que tratam da incompreensão por parte do aluno, de que, uma área, ou seja, um número finito, pode ser determinada por uma soma de infinitas áreas de retângulos. É importante comentar que esta incompreensão de somas infinitas que resultam num número, pode ter sido a causa de não confecção dos Mapas na parte C.

Assim, na etapa que se inicia, a intenção é fazer com que o aluno possa compreender a relação entre a área sob uma curva e $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i$.

As atividades elaboradas, para esta e a próxima etapa, tiveram por base as sequências elaboradas por Melo (2002), Ribeiro (2010), Barroso *et al* (2008), Camacho e Depool (2003), Rasslan e Tall (2002).

A seguir, apresentam-se as análises das atividades da parte D.

7.1 A tarefa 1 e as análises *a priori* e *a posteriori*

7.1.1 Análise *a priori*

A tarefa 1 visa fazer o aluno pensar sobre a possibilidade de significados para os cálculos que realiza.

1. Considere a soma $\sum_{k=0}^n 2k$. Para os valores de $n = 2,3,4,5$:
 - a) Escreva as parcelas que representam a somatória.
 - b) Calcule o valor da soma para cada n dado.
 - c) Qual será o comportamento da série se fizermos n crescer (aumentar de valor)?
 - d) Use sua imaginação: escreva um problema em que a somatória que você calculou no item a) seja a solução.

Os resultados pedidos para o item a) e b) devem ser:

$$n = 2, \sum_{k=0}^n 2k = 2.0 + 2.1 + 2.2 = 6$$

$$n = 3, \sum_{k=0}^n 2k = 2.0 + 2.1 + 2.2 + 2.3 = 12$$

$$n = 4, \sum_{k=0}^n 2k = 2.0 + 2.1 + 2.2 + 2.3 + 2.4 = 20$$

$$n = 5, \sum_{k=0}^n k = 2.0 + 2.1 + 2.2 + 2.3 + 2.4 + 2.5 = 30$$

Quando se pede que o aluno use sua imaginação para escrever um problema que a somatória seja a solução, espera-se que ele, inicialmente, lembre do cálculo de uma área e associe os seus resultados a essa área. No entanto, podem aparecer relações com compras, como por exemplo: o valor gasto na cantina, com a compra de salgados que custam R\$2,00, desde que comecei a frequentar o curso, foi o seguinte: “Na primeira semana, comprei apenas um salgado, na segunda, dois, três na terceira, e assim por diante. Ao todo, quanto já foi gasto por mim, em compras de salgados na cantina, após 2, 3, 4 ou 5 semanas?”. Espera-se que eles percebam que, à medida que n cresce, esta sequência torna-se divergente.

Esta questão é uma tarefa de produção, isto é, uma tarefa que, em relação à *semiôsis*, aborda as atividades cognitivas de formação e tratamento. Formação porque retoma a ideia de o símbolo de somatório designar uma soma de termos, e o tratamento é usado na obtenção do valor numérico para a soma.

7.1.2 Análise *a posteriori*

Todos os participantes perceberam a série como divergente, mas ainda houve problemas com o registro algébrico/numérico para os valores das somas parciais. Claison escreveu a soma adequadamente, mesmo sem ter escrito o termo geral e o termo para $k = 0$, mas não substituiu o símbolo sigma pelo sinal de soma, o que seria mais natural (Figura 58). No entanto, é possível que o aluno esteja considerando a orientação dada no início da parte B em que, para explicar como funciona a notação, foi repetido o mesmo ícone do enunciado, e não um sinal de operação. Em particular, para o ícone sigma, comentou-se que este indica uma soma, mas não houve exemplos em que isto foi realizado. Isto serve como um alerta aos docentes: não podemos apenas supor que o aluno entenda o que o professor quis dizer.

$$\begin{aligned}
 (a) \sum_{k=0}^{N=2} &= (2+1) \sum (2 \cdot 2) = (b) = 6 \\
 (a) \sum_{k=0}^{N=3} & \quad 2 \leq 2 \cdot 2 \quad 2 \cdot 3 \quad (b) = 12 \\
 (a) \sum_{k=0}^{N=4} &= (2+1) \sum (2 \cdot 2) \sum (2 \cdot 3) \sum (2 \cdot 4) \quad (b) = 20 \\
 (a) \sum_{k=0}^{N=5} &= (2+1) \sum (2 \cdot 2) \sum (2 \cdot 3) \sum (2 \cdot 4) \sum (2 \cdot 5) \quad (b) = 30
 \end{aligned}$$

Figura 58: Registro do desenvolvimento do somatório por Claison

Mas há outro aluno, Marcos, que não usou o termo geral da série no seu desenvolvimento (Figura 59), mas fez a substituição do ícone sigma pelo sinal operatório mais (+).

$$\begin{aligned}
 0 + 1 + 2 &= 3 \\
 0 + 1 + 2 + 3 &= 6 \\
 0 + 1 + 2 + 3 + 4 &= 10 \\
 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 &= 15
 \end{aligned}$$

Figura 59: Registro do desenvolvimento do somatório do Marcos

Quanto ao problema solicitado, ao contrário do esperado, nenhum aluno associou os cálculos realizados a uma soma de áreas. No entanto, houve duas sugestões, mas não foram explicadas pelos alunos:

- “Amplitude de uma onda” (Claison).
- “Um hospital precisa arrecadar uma quantia por mês o prefeito doa 2 reais a cada pessoa atendida. Quanto o hospital arrecada por mês recebendo uma quantia crescente ao longo dos dias?” (Bruno).

A compreensão e utilização adequada da notação, em Matemática, é fundamental uma vez que a maior parte dos livros didáticos ainda se restringem a ela.

Oportunizar os alunos a escreverem seus raciocínios, suas deduções, pode ser uma estratégia de percepção das dificuldades dos alunos. Contudo, se esta percepção acontecer durante o processo de ensino, não apenas no dia da prova, o professor pode intervir positivamente na aprendizagem do aluno, apontando-lhe os pontos que precisam de atenção e como é possível melhorá-los.

Considerando os pressupostos da TSD, a resolução desta questão envolve os momentos de ação, formulação, validação e institucionalização. Os três primeiros referem-se às ações e conjecturas elaboradas pelos alunos na obtenção das somas parciais e na elaboração da situação problema. O último está ligado ao conhecimento envolvido: o uso do somatório, e refere-se às explicações do professor enquanto detentor do conhecimento (naquele momento). A caracterização da questão encontra-se no Quadro 45.

Situação adidática	O que caracteriza a situação adidática - Questão 1D
Ação	Manipulação do signo; cálculo de somatório; expansão da forma concisa.
Formulação	Hipóteses de aplicabilidade da fórmula.
Validação	Possibilidade de solução do problema criado pela fórmula
Institucionalização	O uso da notação sigma.

Quadro 45: Caracterização da situação adidática da questão 1D

7.2 A tarefa 2 e as análises *a priori* e *a posteriori*

7.2.1 Análise *a priori*

A tarefa 2 busca mais uma vez fazer com que o aluno associe uma série à soma de áreas.

2. Considere a série $\sum_{k=0}^n k^2$.
 - a) Escreva a soma correspondente quando $n = 3$.
 - b) Que significado geométrico você pode dar para a soma calculada? Explique.

A tarefa apresenta, como termo geral, uma expressão que lembra a área de um quadrado. Para $n = 3$, espera-se obter $\sum_{k=0}^3 k^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$, e o significado atribuído à soma de áreas de quadrados de lados de comprimento 0, 1, 2 e 3.

7.2.2 Análise a posteriori

Todos os alunos calcularam o valor da soma pedida, porém ninguém atribuiu um significado geométrico a ela. Isto pode indicar a necessidade de um direcionamento maior das atividades para o cálculo de áreas, ou, ainda, podem não ter entendido o significado desta expressão. Cabe comentar que alguns alunos questionaram o seu significado.

O Quadro 46 indica a tipologia da questão, em relação a TSD.

Situação adidática	O que caracteriza a situação adidática - Questão 2D
Ação	Manipulação do signo; cálculo de somatório; expansão da forma concisa.
Formulação	Hipóteses de aplicabilidade da fórmula.
Validação	Não houve
Institucionalização	Não houve

Quadro 46: Caracterização da situação adidática da questão 2D

7.3 A tarefa 3 e as análises a priori e a posteriori

7.3.1 Análise a priori

A tarefa 3 direciona para o cálculo de área e às relações necessárias para a construção do conceito de integral definida.

3. Considere o intervalo $[2,4]$ e divida-o em 4 subintervalos de igual amplitude $\frac{1}{2}$. Considere:
 - A função $f(x) = x^2$, definida em $[2,4]$, e os pontos x_i que são os extremos esquerdos dos subintervalos;
 - O valor funcional de f em cada um desses quatro pontos x_i ($f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x_4)$);
 - A soma dos produtos $f(x_i) * (1/2)$
- a) Qual a relação entre as parcelas $f(x_i) * (1/2)$ dessa soma, a função considerada sobre o intervalo e áreas de retângulos? Explique.
- b) Use o papel milimetrado e desenhe a situação.
- c) Se o intervalo fosse dividido em 10 partes iguais, qual seria a amplitude de cada subintervalo?
- d) Se o intervalo fosse dividido em 20 partes iguais, qual seria a amplitude de cada subintervalo?
- e) Observando suas respostas aos itens c e d, como você relaciona a amplitude do subintervalo com o comprimento do intervalo e ao número de partes? É possível escrever simbolicamente a amplitude de cada intervalo? Se sim, escreva.
- f) Pense e descreva um método que permita calcular a área sob a curva $f(x) = x^2$ (isto é, da região que vai do eixo Ox até o gráfico da função) no intervalo $[2,4]$.

Espera-se que os alunos compreendam a parcela $f(x_i) \cdot \frac{1}{2}$ como a área de retângulos justapostos, em que a medida da base é $\frac{1}{2}$ e $f(x_i)$ é a altura do retângulo i . Nessa preparação para as atividades posteriores, espera-se que: escrevam que o tamanho do comprimento de cada subintervalo seja $\frac{\Delta x}{n}$, aonde Δx é o comprimento do intervalo e n é o número de partes em que o intervalo fora dividido; que descrevam, como método de cálculo de área, a divisão da região em retângulos e que considerem a área sob a curva como a soma da área dos retângulos considerados. Essas relações trabalham conjuntamente dois sistemas semióticos e incitam os alunos a transformarem signos de um sistema para outro. Ressalte-se que Richit *et al* (2011) sugerem que o uso de mais de um sistema de representação facilita a compreensão do conceito pelo aluno.

Com o procedimento descrito, o aluno é levado a usar a modificação mereológica, do todo em partes homogêneas, para o cálculo da área. Com isso, pretende-se que ele use as informações sobre como calcular a área de um retângulo para estimar a área de uma figura que não se encaixa naquelas para as quais se tem uma fórmula na Geometria Plana. Este processo pode ser dificultoso para o aluno, já que considera o cálculo de um limite no infinito, pois à medida que a largura do retângulo diminui, mais retângulos são necessários para cobrir toda a figura inicial.

7.3.2 Análise *a posteriori*

Apenas 7 alunos resolveram esta parte.

Neste exercício, uma das primeiras dificuldades foi calcular o valor da função para os extremos esquerdos. Eles apresentaram alguma dificuldade para perceberem que o produto $f(x_i) \cdot \frac{1}{2}$ representava a área de um retângulo, mesmo ao assinalarem, não facilmente, os pontos no papel milimetrado. Houve dúvidas, ainda, quanto a: usar a escala do papel milimetrado (Figura 60); marcar os pontos no gráfico; e demarcar a região solicitada no item f. Em virtude de tais dificuldades, os alunos passaram a usar o Geogebra para fazer os gráficos e observar a região solicitada.

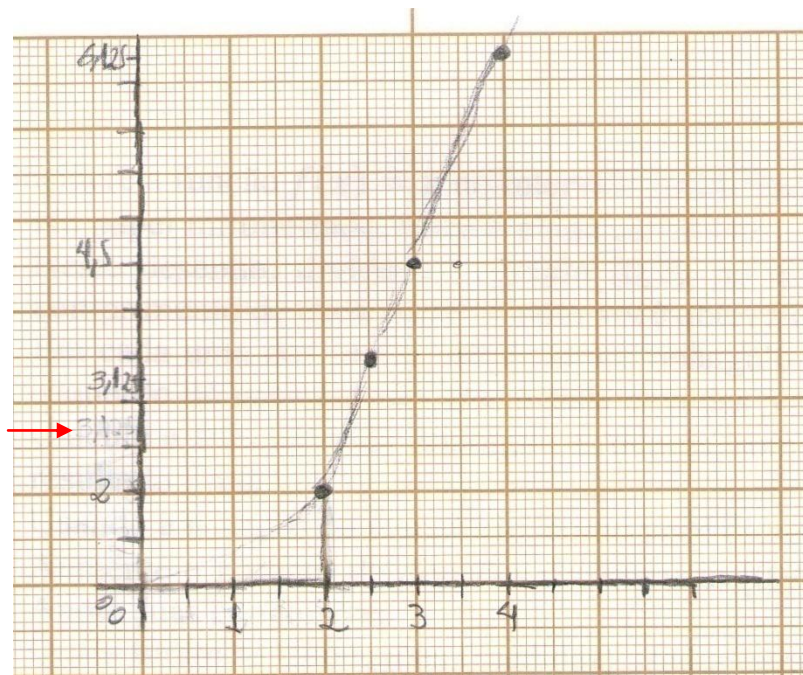


Figura 60: Gráfico da função $f(x) = x^2$ em $[2;4]$ de Álvaro

Notemos, na Figura 60, que o aluno havia marcado ‘corretamente’ o valor 3,125 no eixo vertical, mas apagou. Este é outro ponto no qual o docente deve estar atento em sala de aula, pois a falta de escala no gráfico pode prejudicar completamente a interpretação dos dados ali representados. Mesmo que a abordagem gráfica no ensino seja a pontual, como afirma Duval (2011), a escala dentro de cada eixo é requerida e tem que ser considerada.

Os alunos calcularam a amplitude de cada subintervalo quando lhes foi fornecido o número de partes, porém, apenas uma pessoa, a aluna Débora, a escreveu sob a forma algébrica $\left(\frac{b-a}{n}\right)$. Caroline e Daia também fizeram, porém, induzidas por questionamentos da pesquisadora, as quais remetiam ao processo usado para determinar as amplitudes dos itens c e d.

Especificamente neste caso demonstrou-se a importância da elaboração de perguntas para que o aluno reflita sobre suas ações e seu conhecimento. O papel das perguntas, no desenvolvimento de uma aula de matemática, foi o tema de uma conferência proferida por Luis Menezes (MENEZES, 1999), no Encontro Nacional de Professores de Matemática em Portimão-Portugal. Para o autor, em sala de aula é o professor que detém o poder sobre o discurso. A linguagem deste discurso implica no

modo de comunicação existente no ambiente da sala de aula. Nas aulas de matemática, essa comunicação implica na relação que o aluno terá com a disciplina⁷⁰.

Nesta etapa da sequência didática, notou-se certa dificuldade em converter o registro numérico para o algébrico ou língua natural, mesmo que este último tenha sido preferido ao anterior. A maior parte dos alunos escreveu, na língua natural, como determinar a amplitude, mas de forma confusa. Vejamos alguns exemplos:

- Bruno: “A amplitude de um intervalo é dado pelo o ‘número dividido’ sobre o comprimento do intervalo é igual. Comprimento do intervalo é igual número de partes depende de quanto for dividido”.
- Marcos: “Amplitude = n. de partes ÷ total”.

Esta dificuldade específica pode ser devido à significação atribuída à palavra amplitude. Além disso, a mesma palavra *amplitude* correspondia ao intervalo $[a, b]$ e à partição $[a_i, b_i]$, acarretando a não univocidade semântica e causando a não congruência entre as representações numérica e em língua natural.

Em relação ao cálculo da área, no início da tarefa os alunos fizeram a divisão da figura em retângulos, conforme o enunciado (veja Figura 61). Todavia, ao descreverem um procedimento para o cálculo da área sob a curva, os procedimentos variaram. Daia e Caroline usaram a divisão da região em 10 retângulos (vide Figura 62); Claison escreveu “dividiria em partes (amplitude igual por maior partes possíveis) para uma melhor precisão”; já os demais alunos deixaram como procedimento a palavra “trapézio”, talvez, na tentativa de informar que faria a aproximação da área usando a fórmula de área do trapézio.

Essa forma de proceder da maior parte dos alunos foi diferente do que havia sido planejado, inclusive do método usado nos livros didáticos analisados (vide seção 2) para a explicação do conceito de soma de Riemman.

⁷⁰ O referido autor exemplifica a postura de alunos em duas aulas metodologicamente diferentes: uma em que o professor pergunta e responde e outra em que o professor pergunta e espera a resposta do aluno e, diante dela, ainda apresenta outras questões. Na leitura do artigo, percebe-se claramente que os alunos do segundo professor desenvolvem raciocínios mais elaborados que os alunos do primeiro professor, que se limitam a reproduzir o exposto.



Figura 61: Decomposição de uma área em retângulos (Daia)

$$B - A/n$$

$$\sum_{k=0}^{10} x^2 \rightarrow \sum_{k=0}^{10} 0^2 \cdot 0,2 + \sum_{k=1}^{10} 1^2 \cdot 0,2 \dots \sum_{k=10}^{50} 10^2 \cdot 0,2 =$$

Figura 62: Procedimento para calcular área sob o gráfico (Daia/Caroline)

Observar o gráfico e imaginar um trapézio está associado à leitura que se faz da imagem em relação à forma, ou seja, à apreensão perceptiva da forma da figura (DUVAL, 2012). Para atingir o objetivo de estabelecer um procedimento “simples” para calcular a área sob uma figura como planejamos, usando a regra do retângulo, é preciso uma atitude mais controlada, visando esta generalização pretendida, o que Duval (2012) chama de interpretação discursiva. Para isto, parece fazer necessária uma indicação mais direta do procedimento a ser seguido. Resta analisar se esta indicação atenderá as necessidades cognitivas dos alunos.

7.4 A tarefa 4 e as análises *a priori* e *a posteriori*

7.4.1 Análise *a priori*

A tarefa 4 reforça os conceitos de amplitude do subintervalo e força o cálculo de área sob a curva, no intervalo pedido.

4. Considere o intervalo $[0,2]$ e divida-o em 4 subintervalos de igual amplitude $\frac{1}{2}$. Considere:
 - A função $f(x) = x^3$, definida em $[0,2]$, e os pontos x_i que são os extremos esquerdos dos subintervalos;
 - O valor funcional de f em cada um desses quatro pontos x_i ($f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x_4)$);
 - A soma dos produtos $f(x_i) * (1/2)$
- a) Qual a relação entre as parcelas $f(x_i) * (1/2)$ dessa soma, a função considerada sobre o intervalo e áreas de retângulos? Explique.
- b) Use o papel milimetrado e desenhe a situação.
- c) Pense na situação em que o intervalo $[0,2]$ fosse dividido em n partes iguais, qual seria a amplitude de cada subintervalo? Escreva-a.
- d) Use o método que você descreveu no item f do exercício anterior e calcule a área sob a curva $f(x) = x^3$, no intervalo $[0,2]$. Qual foi a área?
- e) Escreva uma fórmula matemática que permita calcular essa área sob a curva $f(x) = x^3$, no intervalo $[0,2]$.

Até essa tarefa, os alunos ainda estariam trabalhando com o papel e lápis, o que pode facilitar a aceitação do uso do *software* no passo seguinte. Os alunos deverão concluir que a área sob a curva, no intervalo dado, é aproximadamente 4. É esperado que os alunos escrevam a fórmula para a área como sendo aproximações da fórmula: $\sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x_i$. Pode ser que, a princípio, os alunos escrevam no lugar de Δx_i o valor dele para um dado valor de i . Novamente, podemos caracterizar essa situação como de formulação.

7.4.2 Análise *a posteriori*

Os alunos consideraram este exercício como o anterior e nem todos o fizeram. Alguns deles usaram o Geogebra para obter o gráfico, observaram o formato da região que deveriam calcular a área, e a obtiveram por meio da fórmula da área do triângulo.

Nos exercícios 3 e 4, os alunos priorizaram o uso das fórmulas para cálculo de áreas do trapézio e triângulo, e não em retângulo. Assim, para usar o método que se pretende usar para obter a construção do conceito de integral definida, é preciso direcioná-los ao cálculo de área por meio da área de retângulos.

Ao contrário do esperado, a maior parte dos alunos descartou o papel milimetrado e usou o Geogebra para obter os gráficos. Esta atitude deve estar

relacionada à facilidade de obter o que se pede usando o *software*, mas pode também omitir uma dificuldade de trabalhar com escalas, por exemplo, de ter que saber um pouco mais sobre funções, entre outras coisas.

No Quadro 47 está a caracterização em relação a situação adidática das questões 3 e 4.

Situação adidática	O que caracteriza a situação adidática - Questão 3-4D
Ação	Leitura e compreensão do enunciado; discussão dos termos desconhecidos; desenho no papel milimetrado; cálculo da área.
Formulação	Significado atribuído ao produto $f(x_i) \cdot \frac{1}{2}$; fórmula para cálculo da área sob a curva.
Validação	Confronto das respostas com os demais grupos.
Institucionalização	

Quadro 47: Caracterização da situação adidática da questão 3-4D

7.5 As tarefas 5 a 11 e as análises *a priori* e *a posteriori*

7.5.1 Análise *a priori*

As tarefas 5, 6 e 7, caracterizadas como de ação, reforçam os conceitos trabalhados nas atividades 3 e 4 e inserem o *software* Geogebra para facilitar o entendimento do uso do limite da função quando a base do retângulo, dimensão que deve estar associada a amplitude do subintervalo, for muito próxima de zero.

5. Considere a função $f(x) = x$ no intervalo $[0,2]$. Faça:
 - a) No papel milimetrado, trace o plano cartesiano e esboce o gráfico da função $f(x)$.
 - b) Neste desenho, divida o intervalo $[0,2]$, no eixo horizontal, em 5 partes iguais. Qual o comprimento de cada parte? Como você obteve-o? Explique.
 - c) Em cada uma das partes, desenhe um retângulo em que a altura seja a imagem do extremo esquerdo do subintervalo, que é cada uma das partes.
 - d) Calcule a área de cada retângulo e, depois, some-as, escrevendo todas as parcelas antes do resultado final.
 - e) Usando a notação de somatório, como você escreveria essa soma do item d?
 - f) Aumente o número de divisões do intervalo $[0,2]$ para 10 partes e responda os itens c, d, e. Anote suas conclusões.
 - g) Quais foram as dimensões (medidas) usadas para obter a área de cada retângulo? É possível relacioná-las com o tamanho do intervalo tomado e à função? Se sim, qual é a relação? Explique.
 - h) É possível escrever sua explicação ao item anterior de forma mais genérica? Se sim, escreva-a.
 - i) O que você escreveu no item h) faz com que sua escrita do item e) mude? Se sim, escreva a nova forma da escrita.
 - j) Na sua opinião, o que aconteceria se o número de divisões fosse aumentado para 20, 100 ou 1000? Explique.
 - k) Como você escreveria, simbolicamente, sua conclusão do item g?
 - l) Abra um arquivo do Geogebra e faça o seguinte:

- i. Faça o gráfico da função dada no intervalo pedido. Use o comando Função[<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>]
 - ii. Digite $b=1$ e tecla enter. Mostre b como controle deslizante (basta clicar no botão que aparece à esquerda de b , caso não apareça automaticamente). Clique com o botão direito sobre b e vá em propriedades: $\text{min}=1$, $\text{Max}=10000$ e $\text{incremento}=1$.
 - iii. Use o comando “SomaDeRiemannInferior[<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>, b]” para que o aplicativo desenhe retângulos, como os feitos por você no papel milimetrado (item c). Use o b como sendo 5. Compare com o desenho feito por você. Ficou da mesma forma? Foi obtido o mesmo valor para a soma das áreas do retângulo (note que aparece na janela de álgebra do Geogebra uma expressão do tipo $a = 1.6$ - que denota a área total dos retângulos)? Se não, explique as diferenças.
 - iv. No comando anterior, aumente o número de retângulos para 10 (basta mudar o valor de b no controle deslizante). Compare com os seus resultados. Comente as diferenças, se houver.
 - v. Vá aumentando o valor de b e observe o que acontece com os retângulos desenhados e o valor da área. A área se aproxima de algum valor específico? Se sim, qual? Explique o que acontece com os retângulos e a área.
 - vi. Até qual valor de b foi possível enxergar os retângulos? Que justificativa você dá para o “sumiço” dos retângulos?
 - vii. Calcule a área sob a curva $f(x) = x$, no intervalo $[0; 2]$, usando alguma fórmula da geometria plana. Deu o mesmo resultado que o obtido no item v?
6. Considere a função $f(x) = x^2$ no intervalo de $[1,3]$.
 - a) Repita os procedimentos descritos no exercício 3, inclusive redigindo as respostas pedidas.
 - b) Escreva suas conclusões a respeito da área sob a curva $f(x)$ no intervalo dado, enfatizando a escrita da área na forma simbólica.
 7. Considere a função $f(x) = x^2 + 1$ no intervalo $[-2,2]$.
 - a) Repita os procedimentos descritos no exercício 3, inclusive redigindo as respostas pedidas.
 - b) Escreva suas conclusões a respeito da área sob a curva $f(x)$ no intervalo dado, enfatizando a escrita da área na forma simbólica.

A intenção de tais tarefas exploradas com *softwares* é incitar a experimentação antes da apresentação de definições. Num momento em que o aluno pode ser considerado uma simbiose homem-máquina, é natural utilizar-se de experimentações no sistema semiótico gráfico e no aritmético mediante a utilização de *softwares* e microcomputadores. Espera-se que após as simulações pedidas nestes exercícios, os alunos sejam capazes de afirmar algo como $\text{Área} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i$, que é o solicitado nas atividades 8 e 9, caracterizadas como sendo situação de formulação.

8. Considerando as atividades dos exercícios 4,5, 6 e 7, o que você pode concluir a respeito do cálculo da área sob o gráfico de uma função, num intervalo dado? Explique.
9. Usando a escrita concisa (simbólica) como você pode representar a área sob uma curva, num intervalo dado? Escreva.

A tarefa 10 deixa livre para que o aluno pesquise situações ainda não exploradas nas atividades pedidas.

10. Elabore e resolva uma questão que seja relativa a alguma situação que tenha surgido como dúvida, em relação ao cálculo de área. Explique a dúvida surgida e como o problema proposto ajudou-o a resolver.

É de se esperar que o aluno pense em como seria se as funções estivessem parte acima e parte abaixo do eixo x , por exemplo. Esta é uma questão de validação.

O Mapa Conceitual pedido na tarefa 11 deve ter acrescentado informações sobre o cálculo de áreas, e pode ser como o que é mostrado na Figura 63, onde a parte em laranja representa possíveis acréscimos relativos à parte D da sequência didática.

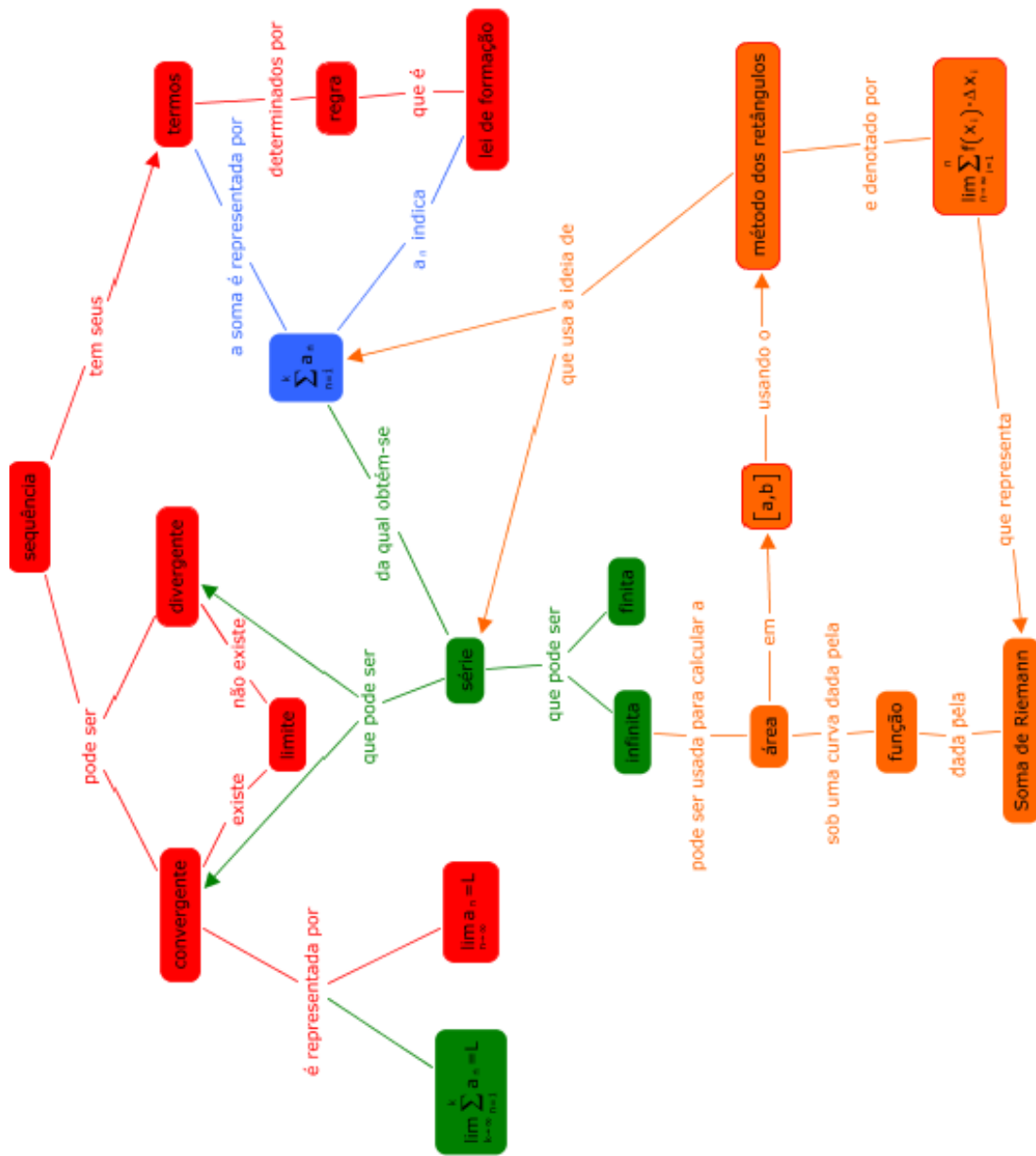


Figura 63: Estimativa do mapa conceitual referente à parte D:

7.5.2 Análise a posteriori

De modo geral, os alunos perceberam que, à medida que se divide um intervalo em maior quantidade de partes, cada uma dessas partes se torna menor, e a soma das áreas de todos os retângulos, obtida como “amplitude vezes altura (que é a função)” (frase do aluno Bruno), aproxima-se, cada vez mais, da área sob a curva no intervalo dado. Claison sintetizou os experimentos com cálculo de áreas da seguinte maneira: “quanto menor for o valor do intervalo, maior a precisão no cálculo da área”. Porém, destaca-se a importância da representação gráfica para esta percepção.

Na tarefa 5, a aluna Débora comentou sobre a quantidade de retângulos necessários para cobrir a toda a área. Esta participante, em especial, usou muito da experimentação computacional para a interpretação dos dados relativos às áreas calculadas e, principalmente, em como e porque deveria registrar estas observações. A descrição das observações da aluna está na Figura 64.

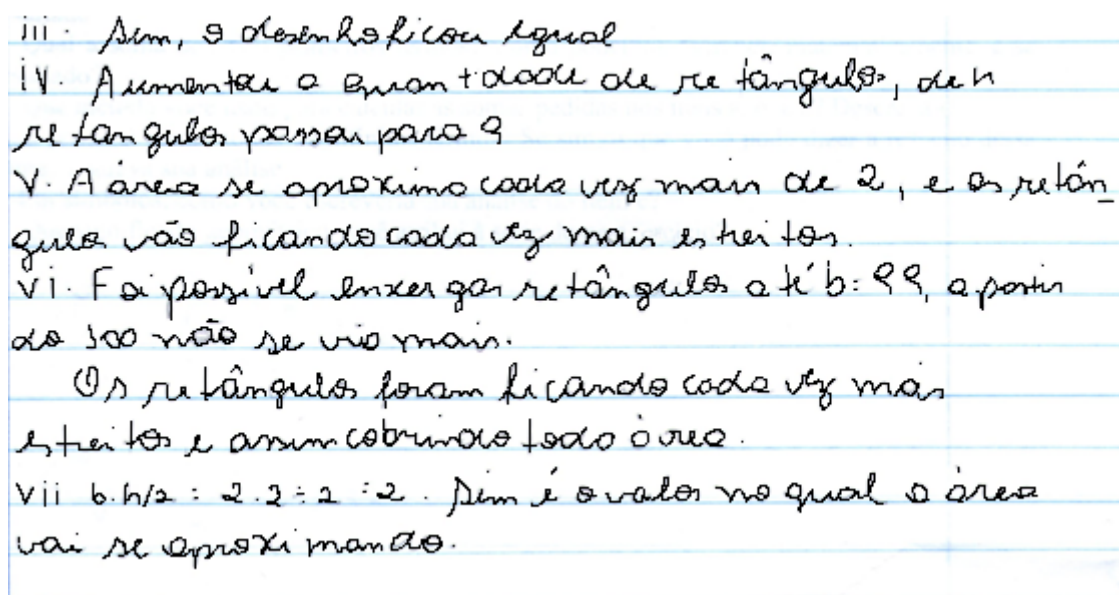


Figura 64: Observações sobre a divisão da área em retângulos

Um fato curioso apresentado pelo aluno Claison, foi a associação identificada na tarefa 10. Ele foi o único aluno que escreveu algum comentário nesta questão: “só imagino que a amplitude só seria altura de uma oscilação ou onda”⁷¹. Este aluno fez pesquisas na *internet* durante a resolução das tarefas.

⁷¹ Este aluno já havia feito referência a essa amplitude como exemplo do significado geométrico da série dada na tarefa 1 desta parte.

Para compreender tal associação, é necessário buscar ilustrações na *Internet* que possam esclarecer o comentário do aluno. Uma das ilustrações está na Figura 65:

- **Amplitude (A)** – corresponde à distância da ordenada (Y), em módulo, entre a parte mais alta (crista) ou a parte mais baixa (vale) e o ponto médio (0).

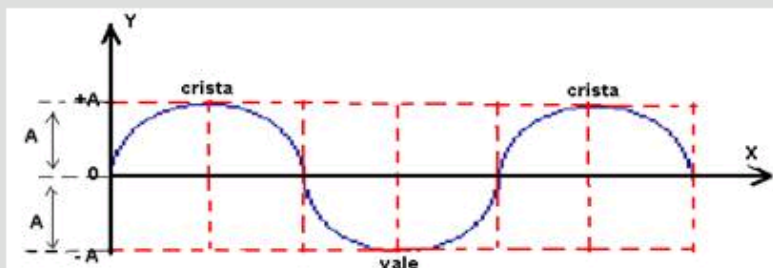


Figura 65: Amplitude na física
 Fonte: <http://www.fisicaevestibular.com.br/ondas2.htm>

A Figura 65 nos remete a um dos exercícios da parte A em que foi solicitado que os alunos construíssem faixas para analisar a convergência de uma sequência. As faixas desenhadas naquela oportunidade podem ter sido associadas às linhas horizontais (em vermelho) desta figura. O fato de, a amplitude na Física e na largura da faixa estar graficamente na vertical, pode ter confundido o aluno no momento em que se passou a chamar de amplitude, uma distância que, graficamente, se percebe na horizontal (amplitude do intervalo). Esse fato indica o cuidado que se deve ter com as palavras usadas.

Não houve acréscimos no mapa conceitual.

No Quadro 48 está a caracterização destas questões em relação a situação adidática.

Situação adidática	O que caracteriza a situação adidática - Questões 5-10D
Ação	Leitura e interpretação dos enunciados; manipulação dos comandos; discussão de critérios para cálculo de áreas sob uma curva.
Formulação	Elaboração de hipótese sobre convergência de série e cálculo de área sob curva.
Validação	Discussão das hipóteses elaboradas com os demais membros do grupo.
Institucionalização	Cálculo de área sob uma curva.

Quadro 48: Caracterização da situação adidática das questões 5-10D

7.6 Análise Didática das Atividades

As atividades contempladas na parte D pretendiam fazer com que o aluno associasse o cálculo da área sob uma curva a uma soma de áreas. As atividades foram direcionadas para o cálculo da área da região por meio da subdivisão em retângulos, mesmo que isso não fosse dito diretamente no enunciado. Esta estratégia foi usada para tentar fazer com que os alunos percebessem que, desta forma, teriam um método para calcular a área sob qualquer curva. Pensou-se que as atividades conduzidas até então capacitariam o aluno a perceber a área como um limite da soma das áreas de infinitos retângulos, que é a soma de Riemann.

Os alunos compreenderam que, quanto mais retângulos fossem considerados, “mais a área ficaria pintada” (expressão dos alunos para exprimir que a área da região seria mais bem estimada pela soma das áreas dos retângulos). Contudo, percebeu-se que, se não houvesse a indicação do procedimento, os alunos fariam por aproximações das figuras planas já conhecidas, como triângulos e trapézios.

Ao serem questionados sobre como algoritmizar, computacionalmente, esse processo, já que as partes das figuras não eram homogêneas, eles afirmaram que teriam que olhar cada figura e ver o que se encaixava, e que deveria ter um outro jeito, mas não sabiam qual.

Notou-se ainda que pouquíssimos participantes do minicurso interessaram-se em escrever uma fórmula devido a dificuldade em estabelecer as relações para formalizar esta escrita. As atividades foram realizadas pelos alunos no sentido de explorar as possibilidades do *software* ao mudar a função. Esta exploração desencadeou discussões nos grupos em relação ao valor mínimo da quantidade de retângulos a serem tomados para o cálculo da área. Daí deduz-se que o processo de calcular a área por um limite no infinito reduziu-se a uma soma finita de termos.

Talvez uma mudança na forma de propor as questões 8 e 9 pudesse fazer o aluno refletir melhor e fazer uma proposta. No Quadro 49 é apresentada uma proposta mais condizente com o que se esperava que o aluno fizesse, já que direciona a ótica da conclusão solicitada na questão 8 e propõe a escrita de uma “fórmula”, linguagem mais comum para os alunos, e não “usando a escrita concisa”. A palavra concisa pode causar dúvidas.

Redação Atual	Proposta de redação
<p>8. Considerando as atividades dos exercícios 4,5, 6 e 7, o que você pode concluir a respeito do cálculo da área sob o gráfico de uma função, num intervalo dado? Explique.</p> <p>9. Usando a escrita concisa (simbólica) como você pode representar a área sob uma curva, num intervalo dado? Escreva.</p>	<p>Analise os procedimentos realizados para o cálculo de uma área sob um gráfico (exercícios 4 a 7).</p> <p>a) Usando a língua portuguesa, descreva-o detalhadamente.</p> <p>b) Escreva uma fórmula para o cálculo de uma área, que esteja de acordo com a sua descrição no item a.</p>

Quadro 49: Mudança proposta no enunciado das questões 8 e 9D

O comando usado no Geogebra para a soma de Riemann confundiu os alunos. Eles demoraram a perceber que o comando “`somadeRiemannSuperior`” superestimava a área, isto é, calculava-a por excesso, enquanto que o comando “`somadeRiemannInferior`” subestimava-a, ou seja, calculava-a por falta. Além disso, também não notaram que à medida que se aumentava a quantidade de retângulos, os dois comandos tendiam ao mesmo valor limite, considerado como área da região.

É importante citar, ainda, que devido a concentração do minicurso⁷², neste ponto, os alunos já estavam cansados e, conseqüentemente, iam diminuindo o interesse pela resolução das atividades.

7.7 Análise Didática dos Mapas Conceituais da parte D

Esperava-se que os alunos acrescentassem informações relativas ao cálculo da área sob uma curva, associando-o à soma de Riemann, porém, isso não aconteceu. Além do cansaço já citado, pode ser que os alunos quisessem esperar a última parte para ver como associar todos os conceitos, já que o limite no infinito havia sido substituído por uma soma finita de um número grande de termos.

⁷² A parte D foi finalizada já na sexta noite do curso, que foi realizado das 19 às 23 horas. A concentração foi devido a greve nas universidades federais da qual a UTFPR-CM participou.

Seção 8 - Análise *a priori* e *a posteriori* das Atividades Propostas na Parte E

Com as atividades apresentadas até o momento, esperava-se que os alunos já tivessem condições de usar as notações de limite e somatório e que tivessem entendido que, a área sob o gráfico de uma função, pode ser calculada aliando-se as fórmulas da geometria plana com os conceitos de CDI, em especial estes já citados. Nesta etapa, pretendeu-se relacionar o cálculo de área por meio do limite da soma de n retângulos com o conceito de integral definida. Em nossa concepção, as atividades abaixo propiciam esta compreensão. Antes, vale ressaltar que as tarefas 6 e 7 sofreram apenas pequenas adaptações em relação à situação proposta por Barroso *et al* (2008).

8.1 A tarefa 1 e as análises *a priori* e *a posteriori*

8.1.1 Análise *a priori*

A tarefa 1 busca apresentar uma situação real de cálculo de área de uma região, e, ao mesmo tempo, mostrar a utilidade das funções. Para calcular a área por meio das Somas de Riemann é preciso determinar uma função cujo gráfico represente a margem do lago. Uma das funções interpoladoras para cada uma das margens do lago é apresentada no Quadro 50:

Função margem superior	$f(x) = 0.0000432685x^9 - 0.0014178813x^8 + 0.0176404811x^7$ $- 0.095437033x^6 + 0.1009017876x^5 + 1.2272339697x^4$ $- 5.5885799613x^3 + 8.8352902997x^2$ $- 4.3389719475x + 2.5813471116$
Função margem inferior	$g(x) = -0.0000519868x^8 + 0.0013667168x^7 - 0.010750781x^6$ $- 0.007630456x^5 + 0.5263644491x^4 - 2.7414873417x^3$ $+ 5.4181025984x^2 - 3.0830121905x + 0.4919272296$

Quadro 50: funções interpoladoras para as margens do lago

Seguindo os procedimentos estabelecidos, a área sob a curva $f(x)$ no intervalo $[0,7.8]$, tanto na soma superior quanto inferior é: $21.20u.a$ enquanto que a área sob a curva $g(x)$, no mesmo intervalo, é: $8.78u.a$. A partir da análise da imagem, o aluno deverá intuir que a área da região do lago que está sendo calculada será a diferença entre essas áreas sob as curvas f e g .

8.1.2 Análise *a posteriori*

Inicialmente vale comentar que os alunos ficaram animados por resolverem um problema que estivesse associado à realidade.

Novamente percebeu-se a falta de conceitos referentes à função para que o encaminhamento da resolução desta questão fosse mais tranquilo. A informação de que os pontos que demarcavam as margens deveriam ser marcados como pertencentes ao gráfico de uma função não representou nada aos alunos, que, de início, marcaram pontos cujo desenho não atendia esse requisito. Talvez isso seja devido ao fato do enunciado evocar conceitos que não estavam sendo diretamente utilizados no decorrer de toda a sequência didática. Além disso, também pode ser devido ao usual distanciamento entre a forma de pensar dentro e fora da matemática, a que faz alusão Duval (2006), já que a questão remete a um problema real.

Após ter sido esclarecida a informação de que os pontos deveriam pertencer ao gráfico de uma função, a exploração das funções polinomiais que se ajustavam aos dados foi motivo de animação. Os alunos pareciam nunca ter percebido que, a mudança de um grau na função polinomial, pode alterar o seu traçado. Fizeram inúmeras variações, o que reforça, mais uma vez, a postura de Barroso *et al* (2008) em relação à contribuição dos *softwares* para a exploração mais abrangente de conceitos. A função que melhor representava a margem do lago foi escolhida pela melhor aproximação visual entre o traçado da função e a margem. Uma das opções pode ser observada na Figura 66. Vale comentar que nesse processo de busca da melhor aproximação, a opção “controle deslizante”, do Geogebra, foi muito útil, pois permitiu que o aluno centrasse sua atenção neste quesito, sem se preocupar em ficar clicando em vários lugares para alterar o grau da função.

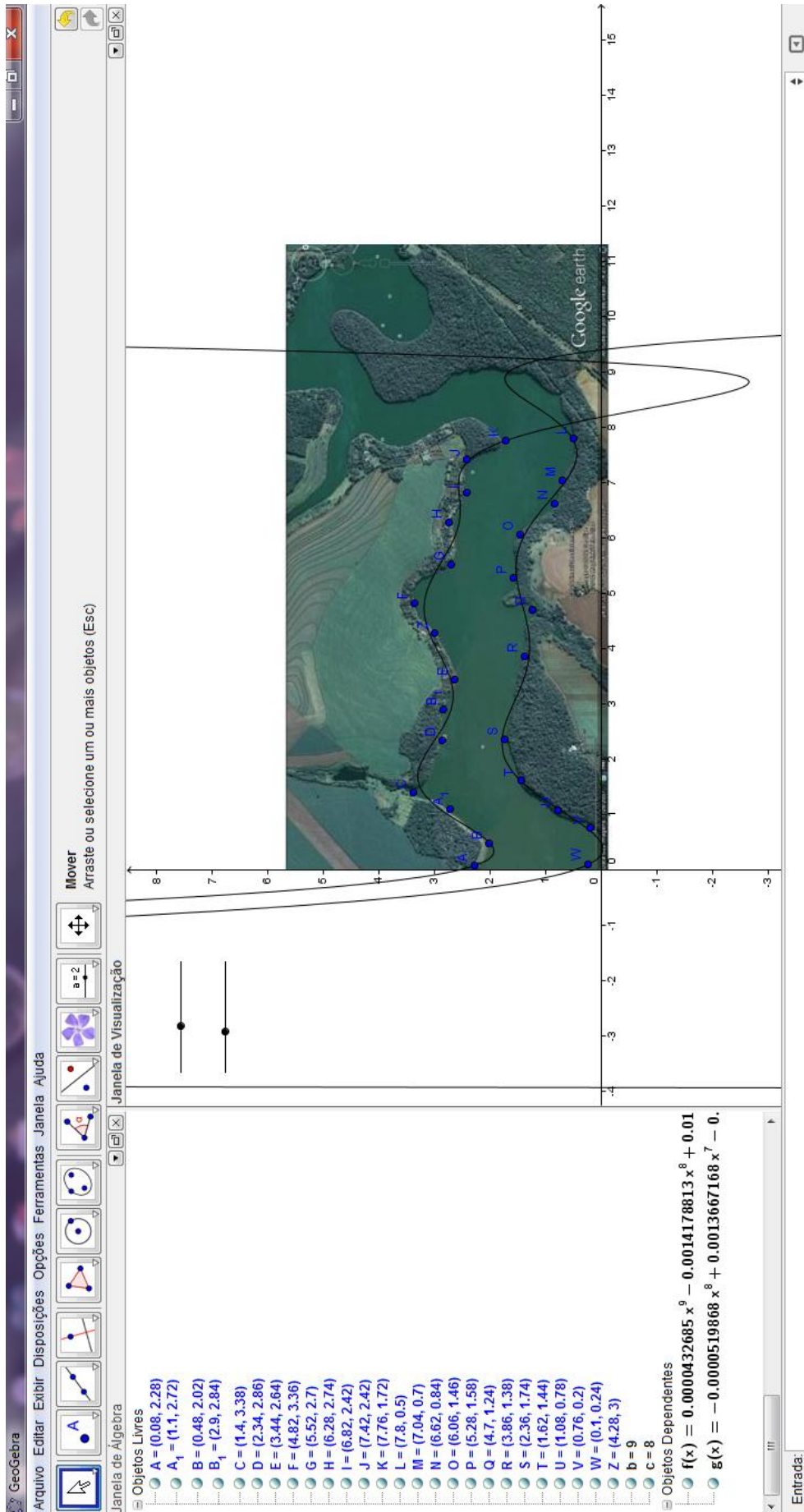


Figura 66: Tela do Geogebra mostrando as funções interpoladoras

Antes de continuar, cabe destaque à avaliação de Álvaro sobre a utilização desta mídia: “alguns conceitos ficam mais claros de se observar com a utilização dos *softwares* (por ser menos trabalhoso você acaba testando mais coisas)”. Isso corrobora o apontamento de Campuzano e Figueroa (2011), de que os aplicativos permitem análises mais profundas sobre o tema em estudo.

Ao seguirem as instruções em relação aos comandos de Soma de Riemann Superior e inferior, de modo geral, os alunos perceberam que tanto uma quanto a outra se aproximavam do mesmo valor quando o número de retângulos era muito alto. “Quanto maior o número de retângulos, maior a precisão e o valor da área superior iguala com a inferior”, concluiu o aluno Claison. Apesar disso, houve alunos que associaram o comando *soma superior* com a função da parte superior do lago e o comando *soma inferior* com a parte inferior do lago, mesmo percebendo que, ao usar o comando, formavam-se retângulos internos, ou circunscritos, à região.

O aluno Álvaro sintetizou a observação acerca do comportamento das dimensões do retângulo afirmando que: “quanto menor a área do retângulo, mais deles serem necessários para calcular a área e mais perto do real vai ficar o cálculo”.

Ao observarem o registro gráfico do Geogebra (Figura 67), os alunos responderam intuitivamente e rapidamente que a área do lago deveria ser a “área de cima” menos a “área de baixo”, mas confundiram-se quando puseram o comando para a função $f(x) - g(x)$, pois o *software* considera esta uma terceira função. Os alunos esperavam que fosse mostrada a área do lago, mas não foi isto que aconteceu. A imagem mostrada está na Figura 68.

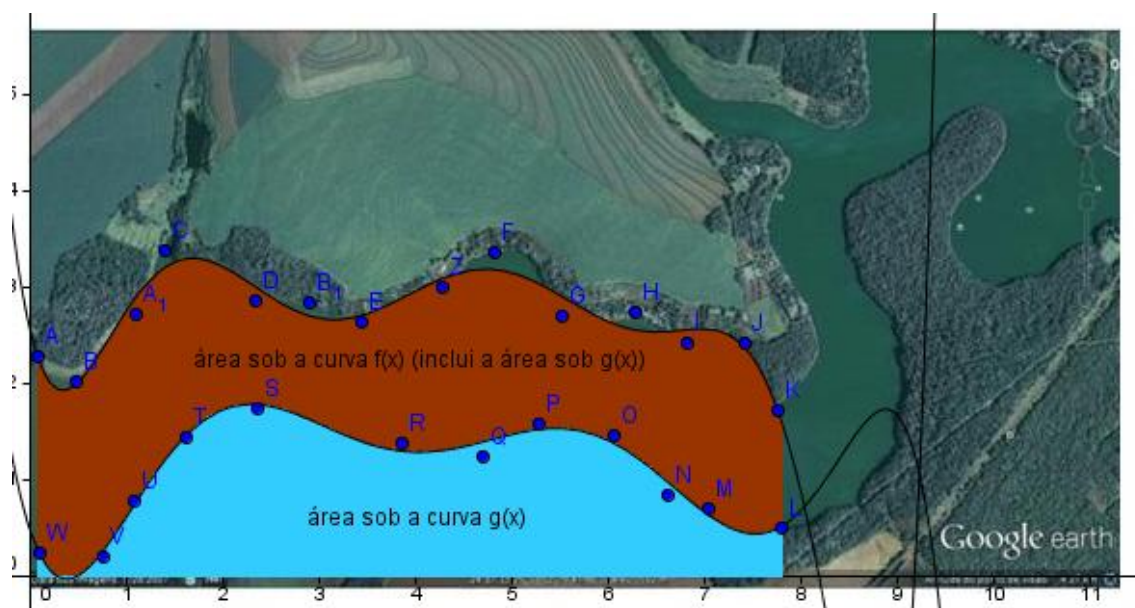


Figura 67: áreas sob as curvas mostradas no Geogebra

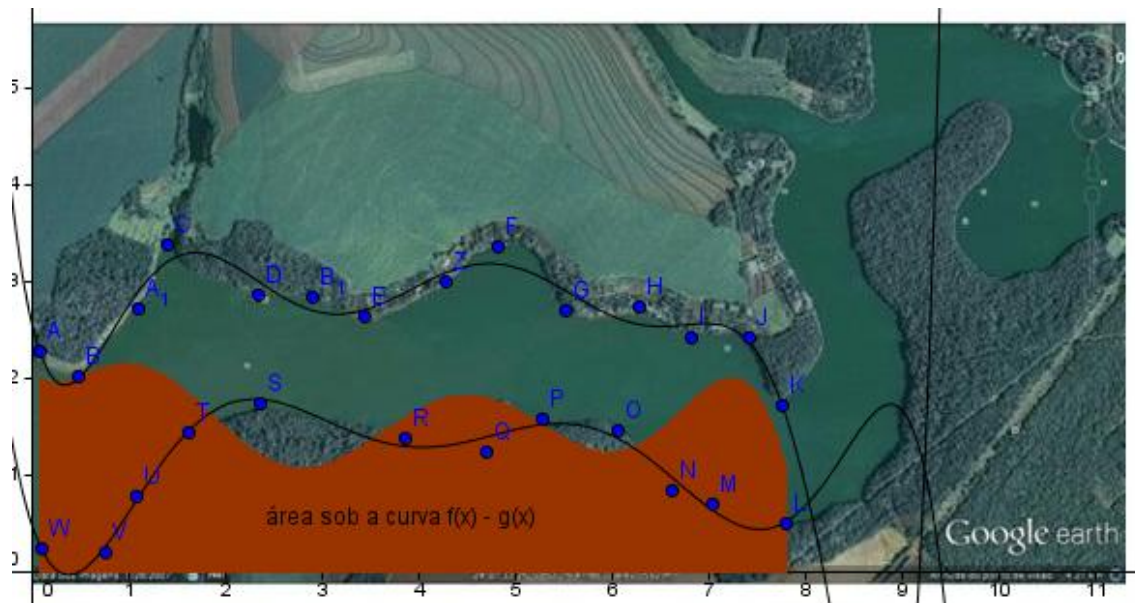


Figura 68: Área mostrada pela Soma de Riemann para $f(x)-g(x)$

Apenas dois alunos que estavam trabalhando juntos, Bruno e Álvaro, conseguiram, com um pouco de ajuda, escrever que a área sob a curva era “ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{x=0}^n \Delta x \cdot f(x)$ ”. Em palavras, eles descreveram todo o processo, indicaram que haviam entendido o conceito de série e limite, mas não conseguiam associar sua compreensão à escrita matemática. Conforme descreviam, a pesquisadora os induzia a perceber a notação matemática de cada uma das partes. Foi interessante notar a alegria dos alunos ao perceberem que haviam conseguido produzir a fórmula.

Esta dificuldade é devido ao fato de que, a transformação de uma expressão linguística em uma equação, neste caso, em uma representação algébrica, esconde dois requisitos específicos: um deles é o uso de menos símbolos que objetos para se referir ao objeto, mobilizando uma operação aritmética e explicitando uma relação que traduza o significado da frase mediante uma equação, o que significa que não há a mesma segmentação semântica dos dados na língua natural e na expressão algébrica; outro ponto é que, nas expressões algébricas, os símbolos operacionais prevalecem sobre os símbolos que representam os números, promovendo uma ruptura entre as representações dos números (DUVAL, 2006).

Esta última frase pode ser melhor compreendida por meio do exemplo: “Juan tem 3 anos a mais que Pedro. Juntos têm 23 anos de idade. Que idade eles têm?” (DUVAL, 2006, p.146). A conversão da representação em língua natural para a algébrica requer dividir um número dado em dois números, com uma diferença dada, isto é: $N = x + (x + D)$. O tratamento necessário para resolver esta equação implica

em fazer $N = (x + x) + D$, isto é, ocorre a ruptura da representação do número $x + D$ face à prioridade da operação de adição. Por vezes, estas transformações se dão implícita e continuamente, aumentando o esforço cognitivo discente.

Apesar destas dificuldades, um dos cursistas trabalhava num projeto para o qual ele deveria estimar uma área que deveria ser reflorestada. Ele usou o procedimento descrito nessa atividade para o seu cálculo, considerou, inclusive, a escala dada no Google Earth, que não foi citada neste exercício.

Nesta questão, em particular, o aluno deveria mobilizar vários conhecimentos para resolver o problema que era o de estimar uma determinada área, dentre os quais estão os conteúdos matemáticos de função e interpolação, além, é claro, de interpretar globalmente a questão dada para poder imaginar um processo de resolução, mesmo que instruções sobre os procedimentos a serem seguidos tenham sido dadas. O aluno deveria se questionar: por que fazê-lo dessa maneira? Atividade como essa, geralmente traz mais dificuldades para o aluno, uma vez que esse procedimento não é corriqueiro nas aulas de matemática, ou seja, fazer o aluno refletir sobre como resolver um problema mediante os conhecimentos adquiridos. É o que tem mostrado a experiência da pesquisadora como docente em nível de Educação Básica e Superior, bem como, na formação de docentes.

No Quadro 51 está a caracterização deste exercício em relação à situação adidática.

Situação adidática	O que caracteriza a situação adidática - Questão 1E
Ação	Leitura e interpretação do enunciado; discussão sobre as variações das dimensões dos retângulos e as funções das margens; manipulação dos comandos.
Formulação	Como determinar a área do lago; discussão sobre as diferenças e/ou semelhanças dos comandos para soma de Riemann superior e inferior; escrita simbólica da área do lago.
Validação	calcular a área do lago por meio da diferença de áreas.
Institucionalização	Não houve, mas houve a explicação e Pesquisa sobre função e a regressão polinomial; grau de polinômio.

Quadro 51: Caracterização da situação adidática da questão 1E

8.2 A tarefa 2 e as análises *a priori* e *a posteriori*

8.2.1 Análise *a priori*

A tarefa 2 verifica a compreensão do cálculo de área como o limite de uma soma.

2. Desenhe a parábola de equação $y = x^2$ no papel milimetrado.
 - a) Analise e descreva um procedimento para calcular a área sob a parábola, no intervalo $[0,4]$.
 - b) Calcule a referida área usando esse procedimento.
 - c) Avalie a “qualidade” desse número resultante como área, isto é, analise se o valor estabelecido como área realmente pode representá-la sem muita diferença do valor real. Justifique.
 - d) Que notação matemática pode ser usada para escrever a área calculada no item c?
 - e) O procedimento descrito por você foi o mesmo usado no geogebra no exercício anterior? Se não, qual deles é mais fácil de ser usado? E entendido? Comente.
 - f) Use o Geogebra para calcular a área pedida. Explícite e justifique os comandos usados.

Diante de todas as atividades realizadas, mesmo no papel milimetrado, é de se esperar que os alunos dividam a área em retângulos com base de até 5 mm e calculem a área sob a curva como sendo a soma das áreas desse retângulo. Contudo, alguns alunos poderão, para este caso em especial, tentar usar a fórmula da área de um triângulo ou trapézio, para serem mais rápidos no cálculo. Em ambos os casos, o valor para a área deverá ser próximo de 21 mm^2 . No entanto, os alunos que usarem mais de um formato para o cálculo solicitado terão dificuldades para escrever a notação matemática para o cálculo realizado, pela não padronização da figura geométrica. Daí, é possível que eles percebam que, ao usar retângulos ou trapézios, obtém-se facilidade na escrita simbólica formal.

8.2.2 Análise a posteriori

Realizaram essas atividades os alunos: Bruno, Alvaro, Claison, Debora, Marcos, Daia e Caroline.

Os alunos fizeram a representação gráfica no papel milimetrado, mas buscaram o auxílio do Geogebra para calcular a área sob a curva. Claison afirmou que ao usar o papel milimetrado poderia “contar os milímetros”, mas “depende do tamanho da área. Se a área for grande é melhor usar o Geogebra”.

Débora também deixou escrito seu procedimento para o cálculo da área, como mostra a Figura 69. Aqui, percebe-se que ainda não há o completo entendimento da notação sigma, pois a aluna indicou 4 como limite superior, sendo que este era o limite superior do intervalo em que a área deveria ser calculada, além disso, foram usados 8 retângulos. Esta confusão poderá dificultar o entendimento da escrita com o uso do

limite, pois não se estabelecerá relação entre o índice do somatório e o valor de n usado em tal notação.

b. $\sum_{k=0}^4 \frac{x^2}{n}$, onde n é o nº de subintervalos

c. $\sum_{k=0}^4 \frac{x^2}{n} = \frac{0^2}{8} + \frac{0,5^2}{8} + \frac{1^2}{8} + \frac{1,5^2}{8} + \frac{2^2}{8} + \frac{2,5^2}{8} + \frac{3^2}{8} + \frac{3,5^2}{8} = 6,375$

Para o cálculo da área no geogebra utilizou-se a soma de Riemann inferior, e o resultado foi $a = 21,1$

Figura 69: Cálculo da área pelo método dos retângulos (Débora)

Com exceção de Bruno e Álvaro, todos os outros alunos calcularam a área, aproximadamente $21mm^2$, usando a soma de Riemann. Alguns utilizaram a soma inferior, e outros, a soma superior. Bruno e Álvaro já usaram o comando “Integral[<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>]”, e indicaram a associação desse comando com a fórmula de limite escrita por eles para o cálculo da área, como pode ser observado na Figura 70. Nela, os alunos indicam quem são ‘função’, ‘valor inicial’ e ‘valor final’.

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{x=0}^n f(x) \cdot \Delta x$

e) Sim

f) Integral [$f(x)$, 0, 4]

→ função

↳ período

Figura 70: Comando usado por Bruno/Álvaro para o cálculo da área

No Quadro 52 está a caracterização da questão.

Situação adidática	O que caracteriza a situação adidática - Questão 2E
Ação	Leitura e compreensão do enunciado; discussão do procedimento para cálculo da área.
Formulação	Discussão sobre o melhor procedimento para calcular a área sob a curva.
Validação	Comparação da área calculada pelo método particular e pelo Geogebra.
Institucionalização	A notação sigma, somas de Riemann superior e inferior.

Quadro 52: Caracterização da situação adidática da questão 2E

8.3 A tarefa 3 e as análises *a priori* e *a posteriori*

8.3.1 Análise *a priori*

Na tarefa 3 é dada uma tarefa em que o aluno fica livre para escolher a maneira de calcular a área.

3. Encontre uma aproximação da área da região R sob o gráfico de $f(x) = x^3 + 1$ no intervalo $[0,3]$ e analise a “qualidade” da sua aproximação de área. Em seguida, escreva-a matematicamente e descreva o método de cálculo da área.

A ideia é que os alunos percebam a necessidade de criar um método algoritmizável para o cálculo de áreas. Esse procedimento é facilitado ao se usar uma mesma figura, como o retângulo, por exemplo. Espera-se que os alunos percebam a dificuldade de fazer um algoritmo quando, primeiro, se conhece o formato da região para, depois, decidir sobre qual, ou quais, forma(s) estudada(s) na geometria plana usar para o cálculo da área. Como fazer com que um computador perceba essa forma?

Espera-se que o aluno, prontamente, use o *software* para o cálculo, o que demonstra que ele já entendeu o processo para determinação de área, pelo menos com o uso do computador. A confiança no desempenho da “máquina” mostrará a considerada simbiose homem-máquina.

8.3.2 Análise *a posteriori*

Como esperado, todos os alunos usaram o Geogebra para o cálculo da área, alguns usaram o comando “soma de Riemann” e outros usaram o comando “integral”. Aqui, observa-se que, o fato da dupla, Álvaro e Bruno, ter “descoberto” o comando que calcula a área de uma maneira mais hábil, fez com que eles disseminassem a informação entre os demais colegas, que se interessaram em saber como funcionava esse comando.

Isto aponta as contribuições do diálogo quando da realização das atividades nas aulas de matemática, como já citado na seção 2.

No Quadro 53 está a caracterização da questão.

Situação adidática	O que caracteriza a situação adidática - Questão 3E
Ação	Cálculo da área pelo geogebra.
Formulação	Discussão sobre o melhor método para cálculo da área.
Validação	Não houve.
Institucionalização	Não houve

Quadro 53: Caracterização da situação adidática da questão 3E

8.4 A tarefa 4 e as análises *a priori* e *a posteriori*

8.4.1 Análise *a priori*

A tarefa 4 apenas reforça os conceitos e relações dos exercícios 2 e 3.

4. Para cada um dos itens seguintes (i, ii, iii, e iv), faça: (mas só passe ao item seguinte após realizar o item anterior)
 - a) Use uma fórmula apropriada da geometria plana para estimar a área entre o gráfico de f e o eixo x , no intervalo dado.
 - b) Faça aproximações A_1, A_2, \dots, A_{10} da área exata, onde A_n é a aproximação que resulta na divisão do intervalo em n subintervalos iguais e construindo um retângulo em cada subintervalo, cuja altura é a coordenada y da curva $y = f(x)$ no extremo direito. Nota: no Geogebra você pode fazer isso usando o comando SomaDeRiemannSuperior[<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>, <Número de Retângulos>]
 - c) Analise o comportamento da área da função dada, a partir do momento em que o número de retângulos aumenta. (Extrapole o número de retângulos e observe). O que você observa? Explique.
 - d) Compare os resultados obtidos nos itens a e c. O que você observa? Os valores ficaram próximos? Descreva.
 - e) O procedimento descrito no item b é chamado de método dos retângulos. Compare esse método com o criado por você nos exercícios 2 e 3.
 - e.1. Qual deles é mais fácil de ser utilizado, por quê?
 - e.2. Qual deles é mais fácil de ser padronizado, por quê?
- i. $f(x) = x$; $[0,1]$
- ii. $f(x) = 4 - 2x$; $[0,2]$
- iii. $f(x) = 6x + 2$; $[0,2]$
- iv. $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$; $[0,1]$

Espera-se que os alunos consigam determinar o que se pede sem dificuldades, o que indicaria a constituição de um campo de situações adequado na formação do conceito de integral de Riemann. Esta é uma situação de ação.

8.4.2 Análise a posteriori

Todos os alunos fizeram sem dificuldades a tarefa, e usaram, para as funções dos itens i e ii, a fórmula para cálculo de área de triângulo; para a função iii, a área do trapézio; e para a iv, $\frac{1}{4}$ da área de um círculo, como indica a Figura 71. Os resultados foram confirmados pelo uso do Geogebra. Apenas o aluno Marcos indicou o método geométrico como sendo mais fácil para o cálculo da área, mas com a ressalva de que “o método do *software* porque é mais preciso”, indicando que a padronização deve ser tal como indicado pelo *software*.

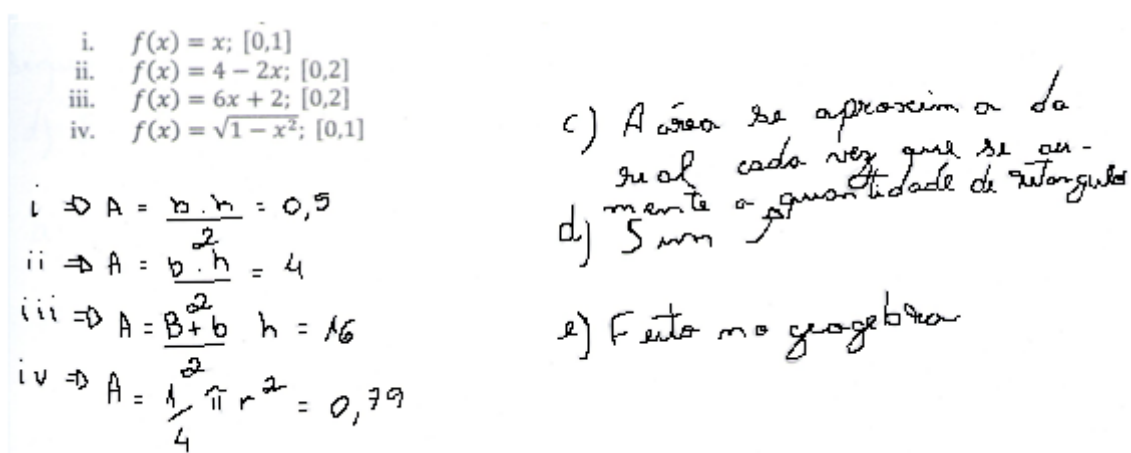


Figura 71: Cálculo de área sob as curvas (Bruno)

No Quadro 54 está a caracterização da questão.

Situação adidática	O que caracteriza a situação adidática - Questão 4E
Ação	Cálculo das áreas.
Formulação	Discussão sobre a necessidade de métodos, além dos fornecidos pela geometria plana, para cálculo de áreas, em particular sobre o método dos retângulos.
Validação	Análise das diferenças de área usando o método da geometria plana e o método dos retângulos.
Institucionalização	Pesquisa de Áreas de figuras planas.

Quadro 54: Caracterização da situação adidática da questão 4E

8.5 A tarefa 5 e as análises a priori e a posteriori

8.5.1 Análise a priori

Já na tarefa 5, momento da institucionalização do saber, define-se a Integral Definida como um limite de soma de áreas de retângulos e investiga-se a interpretação do conceito face o já experimentado.

5. Considere a seguinte definição:

“A *Integral Definida*: Seja f definida em $[a, b]$. Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x$ existe para todas as escolhas de pontos representativos x_1, x_2, \dots, x_n nos n subintervalos de $[a, b]$ de igual comprimento $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, então este limite é chamado de **Integral Definida de f de a até b** e é denotado por $\int_a^b f(x) dx$. Assim,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x_i \quad (1)$$

O número a é o extremo inferior de integração, e o número b é o extremo superior de integração.”

- Como você interpreta a definição acima? O que ela diz para você? Explique.
- A expressão que aparece à direita em (1) tem sido usada para representar o quê?
- Qual o significado que você atribui ao limite que aparece na definição?
- É possível escrever sua observação do item c, exercício 4, usando a notação $\int_a^b f(x) dx$? Se sim, escreva-a. Se não, justifique.
- É possível escrever sua observação do item c usando a notação sigma (usando o somatório)? Se sim, escreva-a. Se não, justifique.
- No Geogebra, a Integral Definida é calculada mediante o comando: “Integral[<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>]”. Experimente usar este comando para as funções do exercício 4. Compare com os resultados que você havia encontrado e comente.
- No wxMaxima, a Integral Definida é calculada pelo comando: “integrate(função,variável,x inicial,x final)”. Use-o com as funções do exercício 4. Compare os resultados com os obtidos por você no exercício 4 e no item 5-f. Comente.

Espera-se que os alunos percebam a Integral Definida apenas como uma notação mais simplificada do limite da série, porém compreendam o seu significado, e possam escrever, com propriedade, as seguintes notações, mesmo sem conhecer um método rápido para calcular integrais:

$$\int_0^1 x dx = \frac{1}{2} ; \quad \int_0^2 (4 - 2x) dx = 4 ; \quad \int_0^2 (6x + 2) dx = 16 ; \quad \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx = 0,785$$

Para conferir o entendimento, o aluno é convidado a experimentar os comandos para Integral Definida tanto no Geogebra como no wxMaxima.

8.5.2 Análise *a posteriori*

Em relação aos itens a, b e c, que pediam o significado da definição, bem como dos elementos que a compõem, os alunos mostraram terem compreendido o significado, mesmo que tenham tido dificuldade em expressar essa compreensão em palavras. Algumas das respostas dos alunos estão transcritas:

- “a) integral nada mais é que a somatória de uma função convergente de período definido no qual b é o final desse período e o a é o começo. b) o limite da somatória de uma função com certo período. c) o limite demonstra que a somatória é infinita, porém a área depende do número finito que a sequência pede” (Bruno e Álvaro).
- “a) a integral seria a soma de infinitas áreas de retângulos e os extremos é o intervalo que se procura. b) a integral é igual a somatória da área sob o gráfico até o n . c) é a soma total da área” (Marcos)
- “a) a Integral Definida é o limite da soma de uma sequência dentro de uma área. b) para calcular uma área definida dentro de um intervalo. c) porque quanto mais vai aumentando o n . de retângulos, a soma da área converge para um valor” (Débora).

Vale destacar que a aluna Débora, que está cursando Cálculo I pela segunda vez exclamou, ao ler a definição apresentada neste exercício, “nossa professora, porque isso não é mostrado quando a gente estuda integral?”. Desse comentário, percebe-se que a sequência didática elaborada, mesmo que vários pontos necessitam de melhoria, atendeu ao objetivo proposto, que era a construção, e conseqüente compreensão, do conceito de Integral Definida.

No Quadro 55 está a caracterização da questão.

Situação adidática	O que caracteriza a situação adidática - Questão 5E
Ação	Análise e discussão dos significados atribuídos à Integral Definida; manipulação e interpretação dos comandos indicados; exploração de outros comandos.
Formulação	Discussão sobre as semelhanças entre os comandos ‘soma de Riemann’ e ‘integral’.
Validação	Comparação do Cálculo das áreas usando os comandos de soma e integral.
Institucionalização	Definição de Integral Definida.

Quadro 55: Caracterização da situação adidática da questão 5E

8.6 As tarefas 6 a 9 e as análises *a priori* e *a posteriori*

8.6.1 Analise *a priori*

Na tarefa 6, o aluno é estimulado a usar um *software* para lhe auxiliar.

6. Para a função $f(x) = x^2 + 1$:
 - a) Faça o seu gráfico no intervalo $[0,4]$;

- b) Calcule suas somas superiores e suas somas inferiores no intervalo $[0,4]$, para $n=4, 8, 16, 32, 64, 128, 1024$.
- c) Escreva os resultados em forma de sequência: s_n para as somas inferiores e S_n para as superiores;
- d) Intuitivamente, percebe-se que $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ existem e são iguais. Qual interpretação geométrica você atribuiria a esse valor comum?
- e) Encontre um valor aproximado para $\int_0^4 f(x)dx$. Qual a interpretação que você atribui a essa integral?

O trabalho com somas parciais associadas a áreas de retângulos reforçará a constituição do conceito de integral de Riemann.

Na tarefa 7 propõe-se o trabalho com uma soma associada a um sinal negativo.

- 7. Repita os itens do exercício anterior para $f(x) = x^2 - 9$ no intervalo $[0,3]$. Destaque a região correspondente entre o eixo x e o gráfico de $f(x)$. Além disso, responda:
 - a) Porque os retângulos de S_n estão no interior da região e não *circunscritos*, como no caso anterior?
 - b) Qual a área aproximada da região em destaque?
 - c) Porque S_n e s_n são negativas?
 - d) Qual a relação entre a área e a integral?
 - e) Usando a notação de integral como você escreve a área sob o gráfico da função $f(x) = x^2 - 9$ no intervalo $[0,3]$.

A proposta da tarefa 7 é aumentar o rol de situações associadas ao conceito investigado. Espera-se que, nesse momento, os alunos sejam capazes de compreender que não é a área de cada retângulo que é negativa, mas sim que a “altura” associada a cada retângulo possui um sinal negativo devido ao seu posicionamento no plano cartesiano.

As questões 7 e 8 representam situações de formulação.

Na tarefa 8 propõe-se uma tarefa associada a uma situação vivenciada no dia-a-dia.

- 8. A imagem seguinte é do Ginásio de Esportes Belin Carolo, cedido pela Prefeitura Municipal para implantação da instituição que é hoje a UTFPR.



- a) Pense e descreva um método que calcule a área da cobertura do ginásio a partir da foto mostrada.
- b) Como você poderia usar seus conhecimentos de Integral Definida para calcular essa área? O que seria necessário? Como obter? Explique.

- c) Use a Integral Definida e calcule a área da cobertura do Ginásio de Esportes.

Essa é uma tarefa que possui uma significação importante, ela foi pensada para ampliar o campo do conceito integral de Riemann, fornecendo a possibilidade de uma aplicação ao mundo sensível. Para sua realização o estudante deverá utilizar a imagem no Geogebra e mediante interpolação polinomial descobrir a integral desejada. Esta situação é de validação dos conhecimentos apresentados.

A última tarefa permite ao aluno que complete o mapa conceitual. Espera-se que conceitos como soma parcial, somatória, área, integral e limite tenham ligações entre eles. Um possível mapa conceitual é apresentado na Figura 72, em que a parte em rosa representa os possíveis acréscimos relativos à parte E.

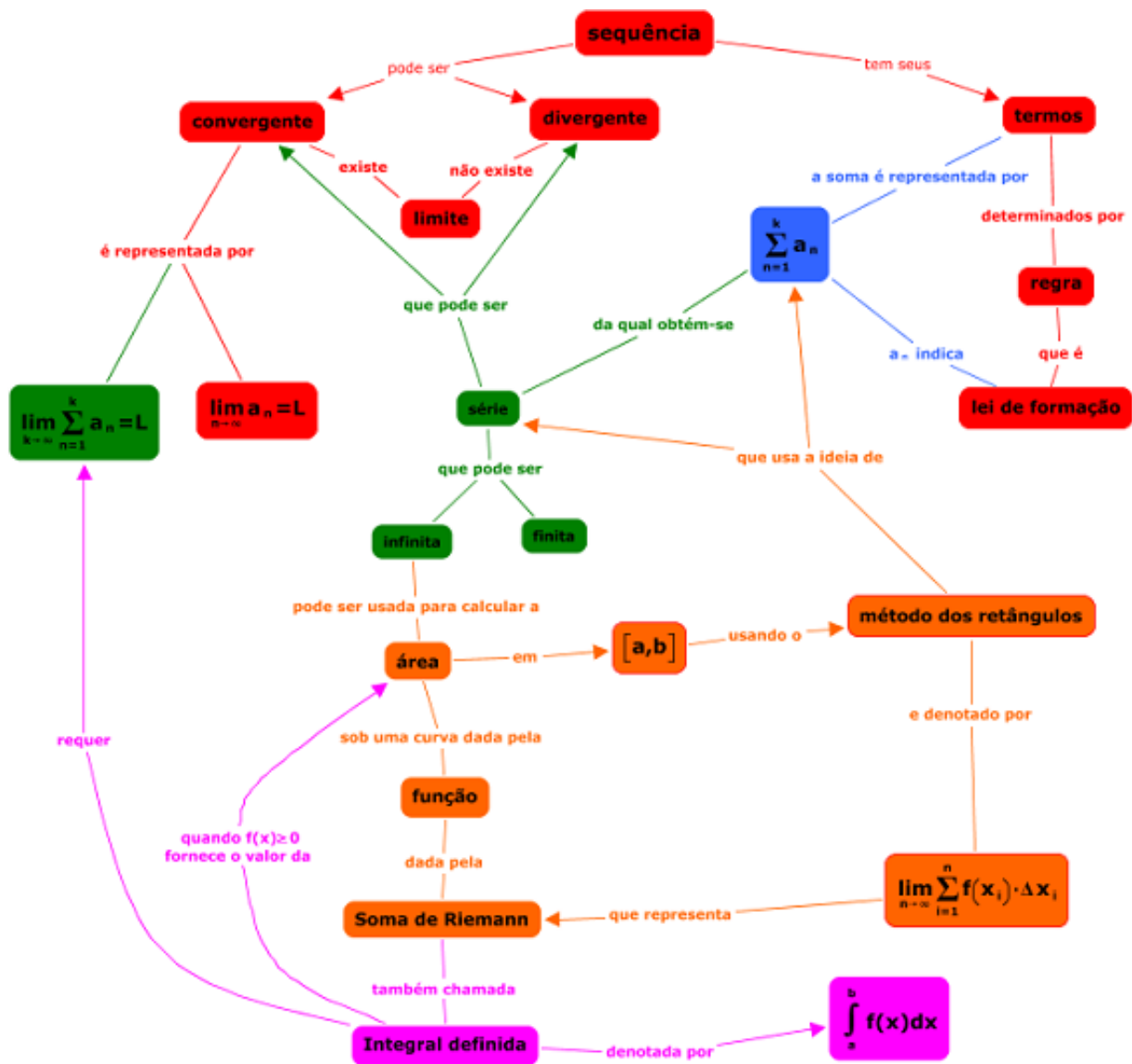


Figura 72: Estimativa de mapa conceitual elaborado para a parte E

8.6.2 Análise a posteriori

Para a tarefa 6, os alunos relataram que as somas superiores e inferiores tendem ao mesmo valor à medida que o número de retângulos aumenta, e que esse valor seria a estimativa da integral. Na Figura 73 apresentam-se os dados de Débora que a permitiram concluir sobre a tendência das somas superior e inferior e o valor da integral. A Figura 74 mostra a escrita do aluno Bruno para o valor da integral.

$n=4, a=18$	$a=34$
$n=8, a=21,5$	$a=29,5$
$n=16, a=23,38$	$a=27,37$
$n=32, a=24,34$	$a=26,34$
$n=64, a=24,84$	$a=25,84$
$n=128, a=25,08$	$a=25,58$
$n=1024, a=25,3$	$a=25,36$
↑	↑
Soma inferior	Soma Superior

d. Ambas calculam a área dos retângulos, que assim obtêm o valor das áreas, por isso as duas dão o mesmo valor.

$$d. \int_0^4 f(x) dx = 25$$

Figura 73: Valores para as somas superior e inferior (Débora)

$$\int_0^4 f(x) dx = 25 \rightarrow \text{O valor da área}$$

Figura 74: Interpretação da integral definida (Bruno)

Para a tarefa 7 os alunos: afirmaram que as somas eram negativas porque a função, no intervalo pedido, era negativa, mas a área deveria ser positiva; relacionaram a integral definida como um método de calcular áreas, ou que dá o valor da área.

Na tarefa 8, os alunos descreveram o mesmo método da tarefa 1, parte E, para o cálculo da área. Nem todos tiveram tempo para fazê-lo. Os alunos Álvaro e Bruno relataram “seria necessária uma função que contorne essa cobertura e um período

(tamanho do comprimento dessa cobertura). Delimitamos a área da cobertura do ginásio por uma função de grau 2 no Geogebra, após subtraí”. A Figura 75 mostra a resolução apresentada após esse comentário.

$$T_1 = \frac{4,22 \cdot 2,36}{2} = 4,98$$

$$T_2 = \frac{2,78 \cdot 4,26}{2} = 5,92$$

$$A_{TOTAL} = 23,6 - 10,9 = 12,7$$

$$\begin{array}{r} 4,98 \\ + 5,92 \\ \hline 10,9 \end{array}$$

Cálculo da área sob a curva, obtida pelo Geogebra.

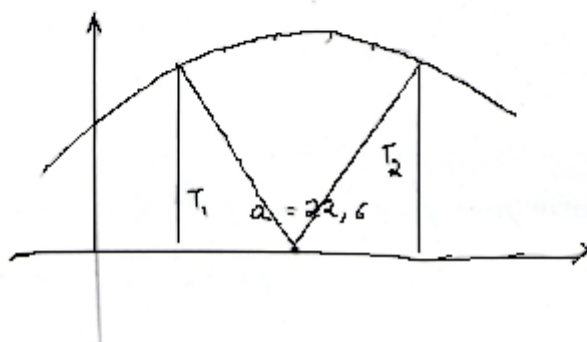


Figura 75: Cálculo da área da cobertura do ginásio por Álvaro/Bruno

No Quadro 56 está a caracterização das questões 6 a 8.

Situação adidática	O que caracteriza a situação adidática - Questões 6-8E
Ação	Leitura e interpretação dos enunciados; determinação das sequências de somas superiores e inferiores e a sua relação com a integral; discussão sobre a área do ginásio.
Formulação	Discussão sobre como calcular a área do ginásio; conjecturas sobre o sinal das somas superior e inferior.
Validação	Confronto com os resultados ou procedimentos obtidos pelos outros grupos
Institucionalização	Relação entre o valor da área, somas de Riemann e integral definida

Quadro 56: Caracterização da situação adidática das questões 6-8E

Em relação aos mapas conceituais, de certa forma os conceitos de soma parcial, limites, convergência e integral apareceram nos mapas finais com ligações um pouco diferentes do esperado. Maiores detalhes estão na seção 8.8.

8.7 Análise Didática das Atividades

As atividades da parte E pretendiam que o aluno compreendesse a integral definida como um limite de uma série convergente, e foram centradas em tarefas de compreensão, pois envolviam as atividades cognitivas de formação, tratamento e de conversão.

Um exemplo está dado na questão 7. Inicialmente, o aluno deve compreender o enunciado da questão. Após isso, converter a representação do enunciado em língua natural com informações algébricas, para uma representação gráfica, como, por exemplo, no item a, cujo gráfico é apresentado na Figura 76. A partir disso, o aluno deve fazer uma interpretação icônica da imagem para associá-la ao triângulo retângulo (ou ao quadrado), estudado na geometria plana. Finalmente, calcular a área da figura, usando o conhecimento sobre o cálculo de área de triângulo (ou quadrado), e retornar um valor numérico, no caso, *8 u. a.*

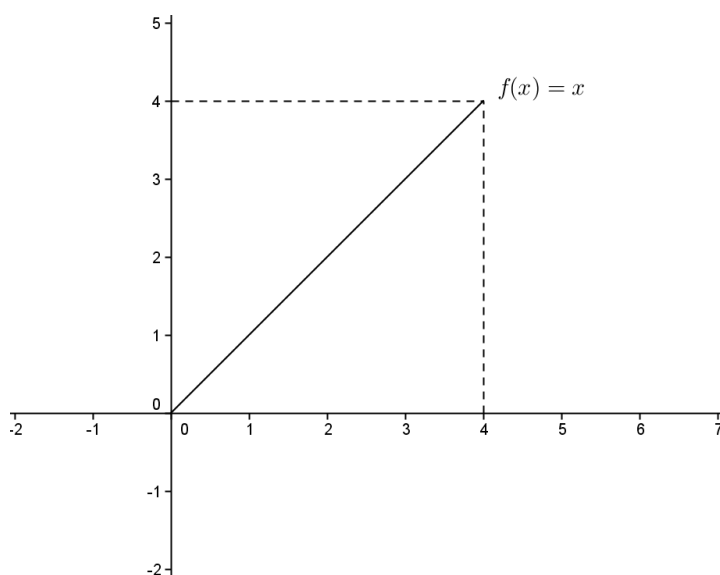


Figura 76: Conversão RLN para RG requerida na questão 4E

Para atender o segundo ponto da questão, o aluno precisa perceber que esta área também pode ser calculada de outras formas, por meio da subdivisão da figura inicial em retângulos, por exemplo. Quando o aluno não está acostumado a fazer investigações

nas aulas de Matemática, esta tarefa torna-se inútil, haja vista que o aluno já calculou o que estava sendo pedido: a área da região. Contudo, esta exploração pode ajudar na compreensão de procedimentos para o cálculo de áreas de regiões curvilíneas. A Figura 77 mostra o cálculo da área desta região mediante soma de áreas de n retângulos.

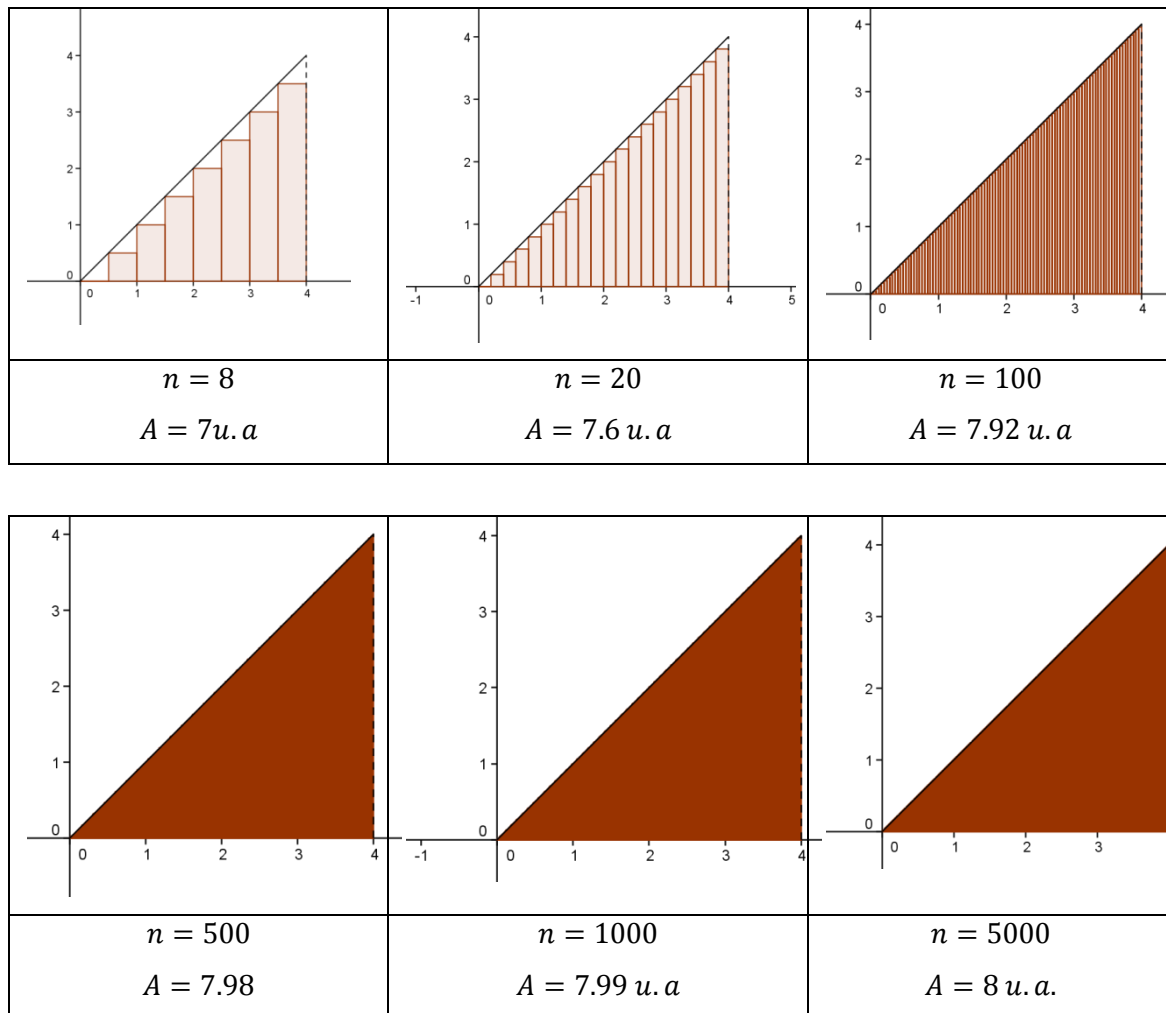
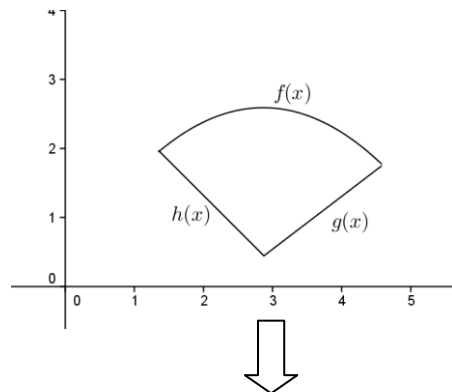


Figura 77: Área calculada por meio da decomposição em retângulos

O procedimento mostrado na Figura 77, além de ampliar o leque de possíveis soluções para um problema, permite que o professor explore a noção de limite com o aluno, o significado da notação de somatória, o estabelecimento de padrões, entre outros aspectos. Isto é, esse processo permite a exploração gráfica, não apenas quanto à sua forma, mas também, de um modo mais amplo, extraindo as propriedades geométricas e estabelecendo outras relações associadas à imagem em questão.

Nas questões 1 e 8, o aluno deveria compreender o enunciado em língua natural com informações gráficas e, a partir disso, determinar a área. Nestes casos, foi necessária a **conversão** da representação icônica em representação gráfica e algébrica, conforme mostrado na Figura 78 (isso aconteceu ao se determinar uma função para

representar as margens do lago ou as bordas do ginásio), onde foi efetuado um determinado **tratamento** para o cálculo de área. Na Figura 79 são mostrados dois possíveis tratamentos.



$$f(x) = -0.27836x^2 + 1.598343x + 0.290576$$

$$g(x) = 0.764706x - 1.762353$$

$$h(x) = -1x + 3.32$$

Figura 78: Conversões na questão 8E

Algébrico	Computacional (comando <code>IntegralEntre</code>)
$A = \frac{\alpha \pi r^2}{360}$ <p>Com $\alpha = 97,6^\circ$ e $r = 2.14$</p> $A = \frac{97.6 \cdot \pi \cdot 2.14^2}{360}$ $A = 3,90$	<p>$A_1 = 1.78$ $A_2 = 2.08$</p> <p>$\text{Área}_{\text{Total}} = 3.86$</p>

Figura 79: Alguns tratamentos possíveis para o Cálculo de áreas

As atividades desenvolvidas nesta parte E colaboraram para que os alunos compreendessem o papel das funções matemáticas no nosso dia a dia, mesmo que seu principal objetivo tenha sido associar a integral definida ao limite de uma série convergente.

Este fato indica a necessidade de trabalhar o CDI mais associado aos seus possíveis usos fora do contexto da Matemática, claro que sem deixar de lado o conhecimento matemático necessário para que esta utilização seja de forma eficiente e eficaz.

Quanto à expressão

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x_i$$

observe que ela está carregada de significação, o que pode dificultar a compreensão do aluno, pois ela envolve a convergência de uma série e o tratamento com o “infinito”, por mais que se busque simplificar a expressão, isto só será bem aceito a partir do momento que o aluno entender o que está sendo simplificado.

8.8 Análise Didática dos Mapas Conceituais

Esperava-se que, ao final do minicurso, os alunos tivessem incluído em seus mapas, as informações pertinentes às sequências, séries, convergência, existência do limite, área, soma de Riemann e integral definida, sendo estes três últimos relativos às atividades realizadas nas partes D e E. Na parte D, porém, os alunos não fizeram acréscimos no MC. As Figura 80, Figura 81, Figura 82 e Figura 83 mostram os mapas conceituais dos alunos que foram até o final do minicurso e os entregaram.

No Quadro 57 estão indicados quais dos conceitos supracitados aparecem nos MC finais. Num primeiro momento, apenas a existência do conceito no MC será observada, posteriormente as relações estabelecidas entre eles serão analisadas.

Conceitos Esperados	Mapas dos Alunos			
	Débora Figura 80	Claison Figura 81	Bruno Figura 82	Alvaro-Marcos Figura 83
Sequência (função)		X	X	(função)
Série (somatória)			X	X
Convergência e Divergência	X	X	X	X
Existência de limite	X	X	X	X
Área	X	X		X
Soma de Riemann (uma somatória)		X		X
Integral Definida	X	X	X	X

Quadro 57: Os Conceitos Esperados e os Mapas

Nota: as palavras entre parênteses foram usadas pelos alunos com o sentido do conceito esperado.

Numa análise superficial constata-se que os conceitos-chave esperados fizeram-se presentes nos MC entregues, mesmo que estes não tenham sido contemplados no momento planejado, como é o caso da Soma de Riemann, que não foi citada na parte D. Nesta perspectiva, o MC permite concluir que os alunos detectaram os conceitos-chave associados à integral de Riemann.

Mas os MC fornecem outras informações bastante relevantes para a aprendizagem do CDI. Um conceito não é nada sozinho. Sempre tem uma rede de ligações subjacentes a dele. As ligações evidenciam como os conceitos estão incorporados na estrutura cognitiva dos alunos.

As ligações efetuadas entre os quatro primeiros conceitos acima citados, já foram discutidas nas suas respectivas partes: A, B e C. Centraremos a análise sobre os três últimos conceitos.

O conceito **Área** aparece na Figura 80 fazendo referência ao método dos retângulos (Soma de Riemann), especificamente, à quantidade de retângulos requeridos para se “cobrir toda a área”. Esta observação indica um possível obstáculo didático para a construção da noção do limite no infinito, haja vista que, no protocolo da aluna, constam no máximo 1024 retângulos para determinar uma área, o que pode ser observado na tarefa 6E. A mesma aluna comentou, na tarefa 5D, que “foi possível enxergar retângulos até $b = 99$, a partir de 100 não se via mais”. Não é nosso objetivo investigar as concepções dos alunos acerca dos conceitos, mas sim, avaliar as contribuições dos Mapas para o acompanhamento da construção dos conceitos requeridos, e, neste caso, é possível perceber inconsistências.

Note que, na Figura 77, foram necessários 5000 retângulos para que a área da região fornecesse, pelo comando soma de Riemann, o mesmo resultado que pela área do triângulo. Porém com 500 retângulos, a área já se mostrava completamente preenchida. Se o aluno apenas se restringir ao que é mostrado na imagem, ele pode não compreender diferenças como a que existe entre os valores da área calculada, via fórmula da geometria plana, e soma de Riemann, neste caso.

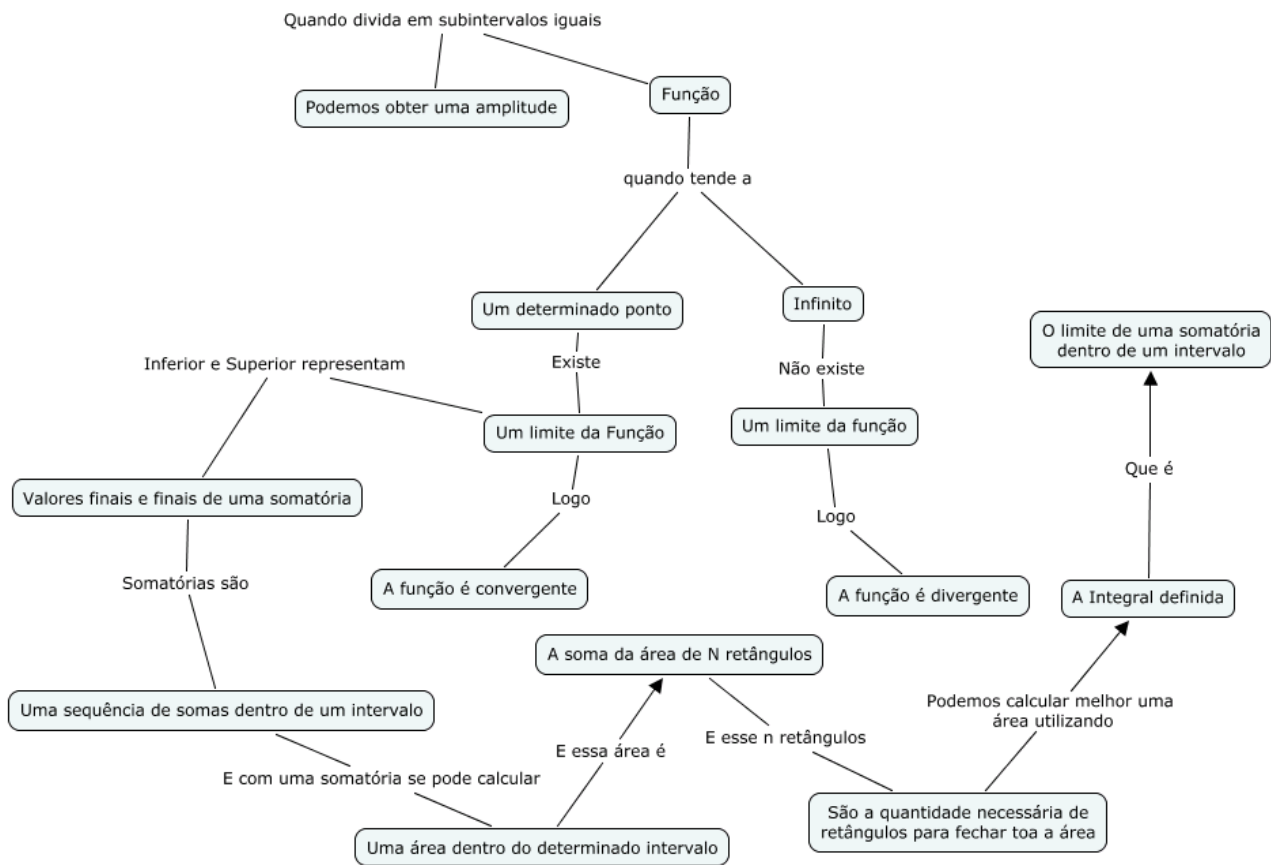


Figura 80: Mapa Conceitual da sequência didática de Débora

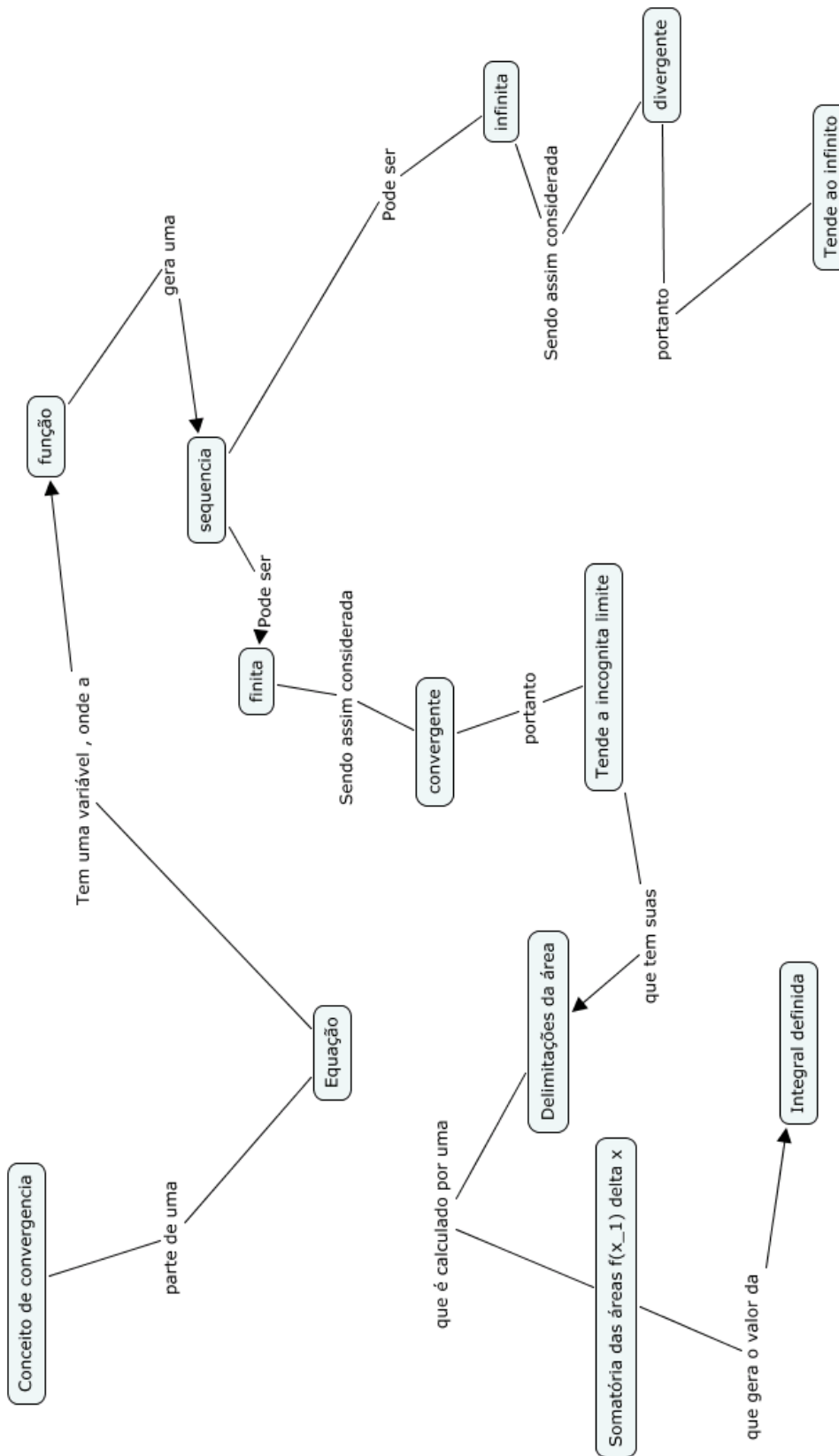


Figura 81: Mapa Conceitual da sequência didática de Claison

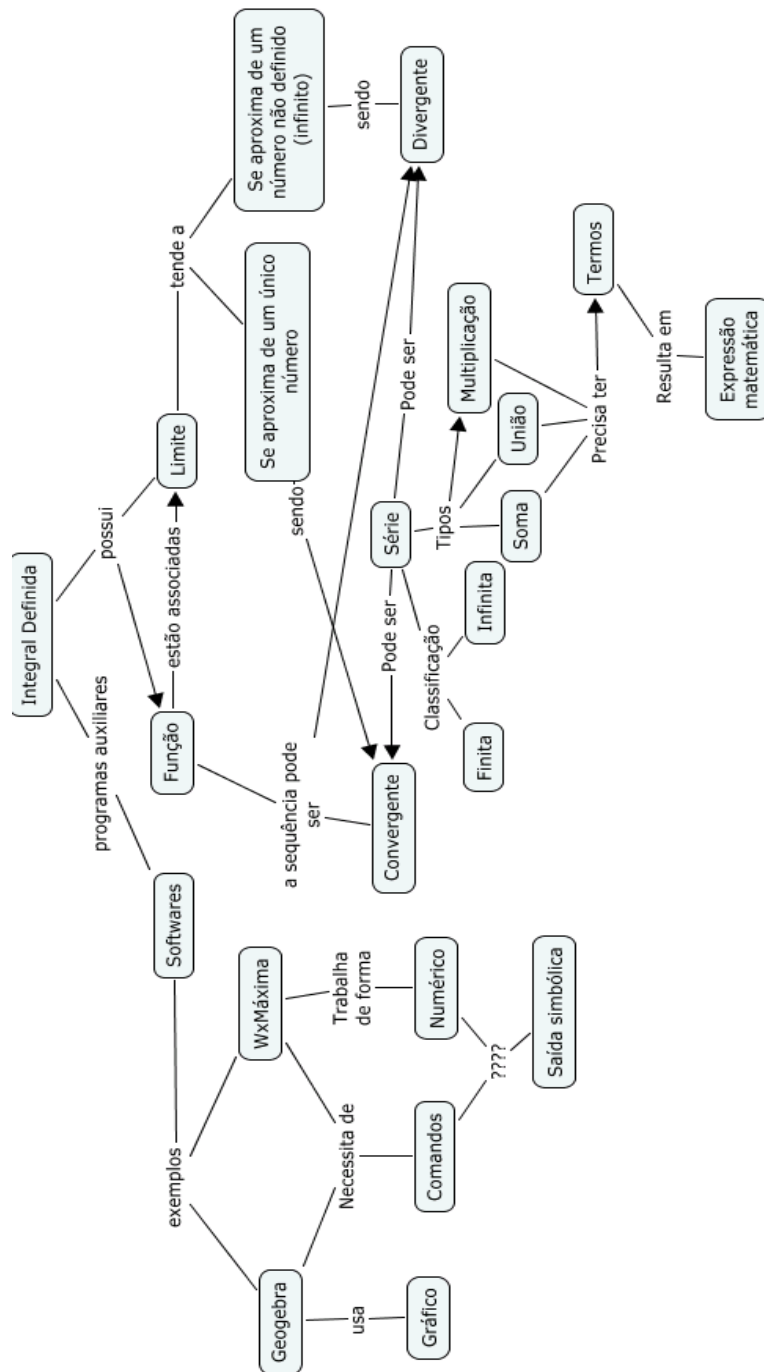


Figura 82: Mapa Conceitual da Sequência Didática de Bruno

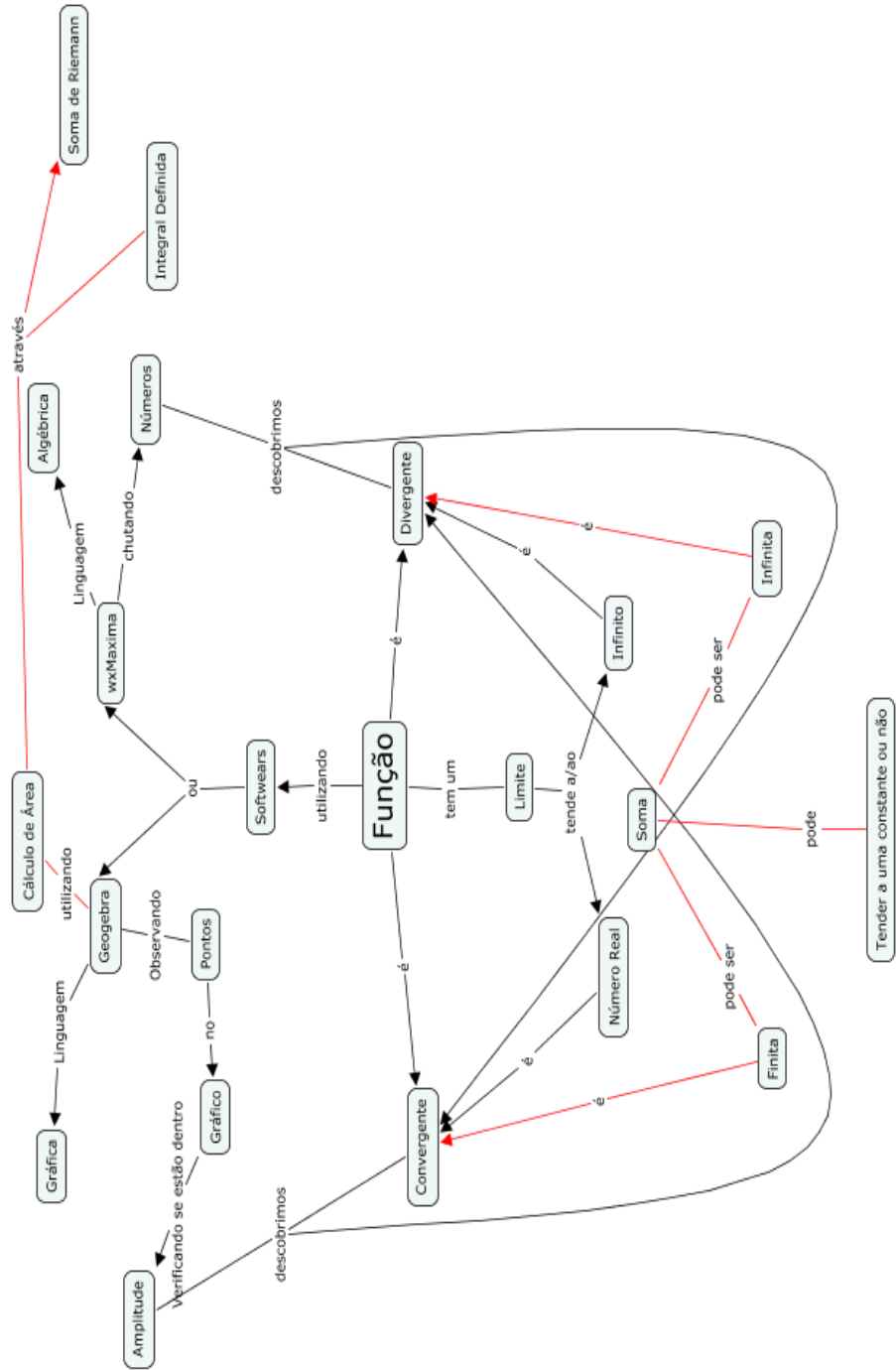


Figura 83: Mapa Conceitual da Sequência Didática de Álvaro e Marcos

O cálculo de uma área por meio da Soma de Riemann só não apareceu no Mapa de Bruno (Figura 82). Ainda assim, é preciso cuidar para que o aluno não tenha a impressão que é possível calcular a soma de Riemann para todas as funções.

A análise dos Mapas ainda permite perceber a dificuldade dos alunos em expressar suas considerações. Considere, por exemplo, o excerto da Figura 80, mostrado na Figura 84. Débora escreve que é possível “calcular melhor uma área utilizando a integral definida, que é o limite de uma somatória dentro de um intervalo”. A aluna pode ter pretendido dizer que a integral definida considera o limite no infinito calculado pelas somas de Riemann, mas com a vantagem de usar apenas um único comando, isto é, não é preciso ficar aumentando o número de retângulos; está subentendido que integral definida e limite no infinito de uma série convergente definem o mesmo objeto, e são apenas representações diferentes. Porém, a redação deixa dúvidas.

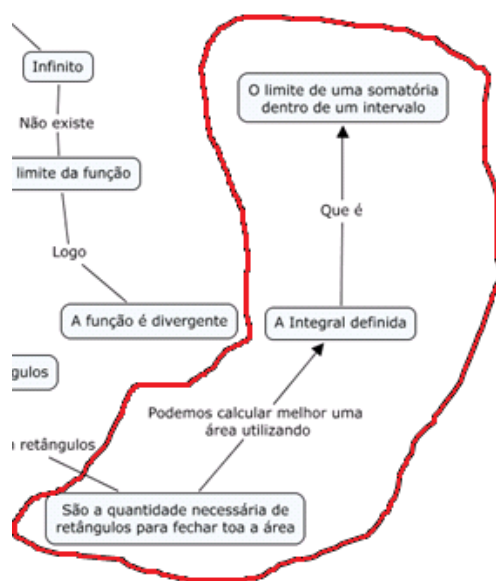


Figura 84: Excerto - relações da integral definida (Débora)

Ainda, na Figura 83 (observe excerto assinalado na Figura 85) deve-se notar que não há ligação entre os conceitos Soma de Riemann e Integral Definida, o que pode indicar que esta relação não está suficientemente apoiada, isto é, não basta definir a integral definida como Soma de Riemann. É preciso que o aluno perceba e compreenda o que está exposto na definição. Como esta relação também não aparece no Mapa da Figura 82, é preciso rever este ponto.

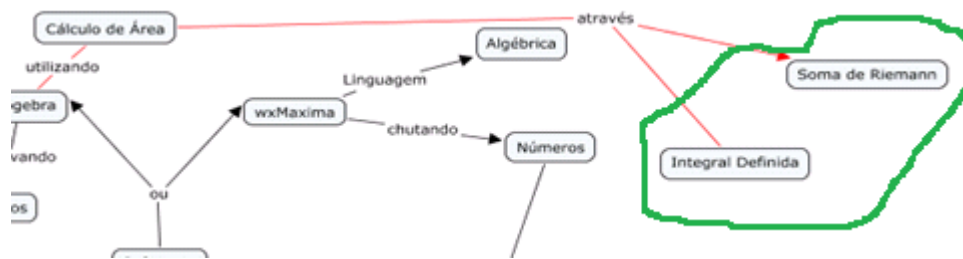


Figura 85: Excerto do MC Bruno/Alvaro - integral definida X soma de Riemann

As observações das Figura 80, Figura 81, Figura 82 e Figura 83, mostram que, mesmo que alguns alunos não tenham colocado tantos detalhes e ligações cruzadas, eles conseguiram perceber os principais conceitos envolvidos. Contudo, ainda há falhas nas ligações entre esses conceitos, portanto, devem ser trabalhadas. Uma reordenação das atividades pode ser mais útil para perceber a profundidade em que os conceitos foram assimilados.

As análises dos Mapas das partes A, C e E indicam a possibilidade do seu uso enquanto instrumento de acompanhamento da aprendizagem efetiva do aluno, bem como das construções que estão sendo elaboradas. A partir de então, o professor pode promover aprimoramentos ou desconstruções, indicando pesquisas ou inserindo novas atividades.

Apesar desta possibilidade, destaca-se a importância de o aluno estar empenhado na reflexão sobre o seu desenvolvimento cognitivo nas atividades e na construção deste instrumento, como uma representação do conhecimento que vem sendo elaborado mentalmente. Sem isso, a elaboração do Mapa torna-se apenas mais um trabalho a fazer.

Outro fator que deve se destacar é que, quanto maior a diversidade de atividades exploratórias de um determinado conceito, mais ligações podem aparecer nos Mapas, sobretudo se houver tempo para reflexões e pesquisas em meio às construções de Mapas. A sequência apresentada pode ser usada em sala de aula durante o curso de CDI como propulsora de outras situações a serem exploradas pelos docentes e discentes.

Seção 9 – Síntese das Análises dos Resultados

Esta seção tem por objetivo sintetizar as análises efetuadas nas seções 4 a 8, e destacar os pontos relevantes, bem como, responder às questões de pesquisa. A síntese acontecerá em duas partes: inicialmente, na seção 9.1, são discutidos os resultados da sequência didática em termos de aprendizagem autônoma discente; em seguida, a análise se constitui em relação ao papel do professor em um meio que se propõe a fornecer condições para que esta aprendizagem aconteça; é também discutida a postura docente na seção 9.2; a contribuição dos mapas conceituais para a conceitualização da Integral de Riemann é discutida na seção 9.3.

9.1 A sequência didática X aprendizagem autônoma

Nesta tese, pretendeu-se propor uma sequência didática em que o aluno fosse conduzido ao estudo e discussão de aspectos matemáticos, associados ao conceito de integral definida, de forma mais espontânea e freqüente que nas aulas tradicionais de Cálculo.

A sequência didática planejada tinha por objetivo, levar o aluno a compreender o conceito de Integral Definida a partir da compreensão, tanto intuitiva como conceitual, de conceitos que, aqui, foram considerados pré-requisitos para tal: as noções e notações de convergência, somatório e cálculo de áreas irregulares por meio do método dos retângulos, usando o comando soma de Riemann. Para tanto, foram fornecidas situações em que se procurou variar a representação, usando ao menos duas representações de um mesmo objeto, como indicado por Duval, além de conter uma dificuldade progressiva, para a qual se levou em conta a experiência docente da pesquisadora. A necessidade da reflexão a respeito das atividades resolvidas foi dada pela elaboração de Mapas Conceituais envolvendo o assunto e pelo trabalho em grupo.

Contudo, percebeu-se que alguns conceitos só apareceram nos mapas quando terminadas todas as atividades, e que houve dificuldades de designação das conclusões pessoais em uma representação algébrica. Sugere-se uma reordenação e a inserção de outras tarefas para melhorar esses fatores.

Em relação à parte A, notou-se, a partir dos diálogos entre alunos, observados durante a aplicação, a utilização de alguns conhecimentos que merecem ser mais bem tratados ou desconstruídos, a fim de não causar obstáculos nos estudos posteriores. São eles:

- para uma sequência ser convergente, os termos têm que se aproximar cada vez mais do zero.
- toda sequência em que os termos ficam cada vez mais próximos converge para algum número.
- sempre que uma sequência for decrescente ela converge.

Ao que parece, a concepção de infinito dos alunos participantes do minicurso, é o de infinito potencial: aquele tomado como um número muito grande. Esta forma de conceber o infinito, considerado um obstáculo epistemológico, acaba por se tornar também um obstáculo didático para a compreensão do conceito de convergência, pois, intuitivamente, a convergência está associada à proximidade com algum número. Se o infinito é um número grande para vários aprendizes, por que uma sequência que tende ao infinito não pode ser convergente?

É difícil desconstruir conceitos e concepções já consolidadas pela compreensão dos estudantes num curto período de tempo, como a duração do minicurso em que foi aplicada a sequência didática, pois é necessário promover mais reflexões, análises, testes. Por isso, pode-se, em alguns casos, persistir a confusão em relação à convergência.

Aparentemente, a sequência elaborada ainda precisa de melhorias para que os alunos percebam a ligação entre as várias partes. Por exemplo, na parte B, ao que parece, os alunos não a relacionaram com a parte A, tampouco, perceberam que na parte D usava-se os conhecimentos da parte B. A ordem proposta para a sequência didática demonstrou apresentar um obstáculo microdidático.

Algumas dificuldades tais como operações com frações, potências, etc. ficaram mascaradas pelo uso dos *softwares*, já que, na maior parte dos casos, bastava saber como usar o comando fornecido e analisar o resultado obtido para dar prosseguimento às atividades. Para o objetivo dessa tese, as tarefas poderiam ser resolvidas mediante uso dos *softwares*.

Esse detalhe alerta para o cuidado que se deve ter com o uso computacional em aulas de Matemática. Os aplicativos são importantes por viabilizar uma infinidade de

explorações e extrapolações de um conteúdo, num tempo muito menor que usando apenas lápis e papel. Entretanto, deve-se cuidar para que conceitos e operações elementares sejam de domínio dos estudantes. Isto, especialmente em nível de Educação Básica.

Oferecer atividades em que haja confronto entre os resultados fornecidos por um *software* matemático e entre o que foi desenvolvido pelo aluno pode ser uma alternativa interessante. No Cálculo I, por exemplo, o *software* Maple oferece a solução de um problema passo-a-passo, o que pode permitir que o aluno faça, por si só, esse confronto, como por exemplo, a resolução de uma equação, cálculo de uma derivada ou integral. Porém, é possível que o discente apenas transcreva estes passos, o que não lhe trará todas as vantagens da descoberta dos seus próprios erros. Infelizmente, essa solução passo-a-passo não está disponível no Geogebra.

Nesta linha de pensamento, um fator de forte influência no aprendizado, é a postura do aluno frente aos desafios lançados pelo professor. O aluno pode aceitar o desafio, e agir, ou, simplesmente, reclamar e ficar esperando uma resposta. No primeiro caso, é provável que este aluno consiga resolver todas as atividades, ou pelo menos, encontrar indícios de caminhos a serem percorridos, e aproveitar esse percurso como aprendizagem relevante, além de usufruir dos benefícios desta busca. Já no segundo, é provável que, independente do nível de dificuldade das atividades, o aluno não obtenha êxito na sua resolução e continuará esperando pelas respostas do professor.

Na realização das atividades, percebeu-se a contribuição do uso dos *softwares* para o entendimento das situações apresentadas. No entanto, é preciso atentar-se para algumas dificuldades que podem ficar mascaradas sob o uso do computador, como por exemplo: somar frações, operar com as potências de 10, compreender o significado de um par ordenado, entre tantas outras. Estas pequenas dúvidas podem dificultar a formalização de conceitos em momento posterior.

Nesse aspecto, recomenda-se cautela no uso de recurso computacional nas aulas de CDI, a fim de que não sejam suprimidas dificuldades que se tornarão obstáculos mais adiante. Contudo, é oportuno enfatizar a necessidade do graduando já chegar ao Ensino Superior com tais noções devidamente consolidadas.

Merece destaque, ainda, a dificuldade discente para escrever, na forma algébrica, as observações faladas. É sabido que, para muitos alunos, escrever uma informação usando a língua natural é muito penoso, talvez tanto quanto escrever sobre a Matemática, em linguagem matemática. Apesar disso, notou-se maior facilidade em

escrever as observações usando a língua portuguesa que usando a representação algébrica. Aliás, a conversão língua portuguesa X linguagem algébrica foi muito complicada.

Os vários trabalhos publicados de Duval já chamam atenção para a incongruência das representações em língua natural e algébrica. Entretanto, é importante enfatizar a necessidade dos professores trabalharem mais com este tipo de conversão, desde o Ensino Fundamental, a fim de facilitar a compreensão dos conceitos matemáticos, bem como, a familiaridade com os escritos formais da Matemática.

Segundo comentário de um dos cursistas, quando o aluno escreve a definição com suas próprias palavras, ele usa uma linguagem mais simples, mais compreensível, por isso fica mais fácil entender o que ela (a definição) quer dizer, ainda que o mais correto esteja na definição formal. Além disso, ao ter que explicar sua forma de entender uma definição ou um conceito, ele acaba aprendendo mais.

Isto reforça o fato de que, a representação em língua natural, como já apontado em pesquisas citadas nesta tese, é um forte aliado na compreensão matemática. Entretanto, esta metodologia ainda é carente de exploração docente.

Inserir a transcrição de textos dados em língua natural para a linguagem algébrica, e vice-versa, nas aulas de Matemática de todos os níveis de ensino, parece trazer inúmeras vantagens para a compreensão matemática dos alunos. Além disso, possibilita rever a indicação de que a matemática escolar é difícil e distante da realidade.

Percebe-se que o uso das representações gráficas reforçam o interesse e a análise dos conceitos estudados, mas que esta abordagem deve acontecer de modo global, não apenas pontual.

Entende-se que a sequência elaborada facilitou tanto a compreensão da correspondência entre o limite a aproximação numérica, devido a utilização da notação de limites para a representação de convergências, como o conceito de integral definida associada ao limite. Isso representa um avanço nas pesquisas educacionais neste item, especificamente. No entanto, há muito a ser aprofundado.

De maneira geral, a análise das cinco partes da sequência didática montada e implementada permite destacar alguns pontos relevantes:

- Há dificuldade em expressar as percepções sobre os experimentos em registros algébricos formais, assim como, em compreender as notações usadas nas definições, fato detectado especialmente no primeiro MC

elaborado. Havia muito conteúdo a ser expresso, porém, os alunos não sabiam como fazê-lo. Em situações semelhantes, o professor pode proporcionar maior discussão entre os alunos em algumas atividades, estimulando-os a exporem e argumentarem suas considerações. Ao mesmo tempo, o professor pode enfatizar a representação algébrica de algumas conclusões dos alunos, por exemplo, ao afirmarem que os termos de uma determinada sequência se aproximam do número k quando se aumenta a quantidade de termos, o professor pode mostrar como se registra esse processo algebricamente.

- É preciso mais enfoque em atividades nas quais os alunos tenham que observar e estabelecer um padrão para determinada sequência ou fenômeno. Isto ajuda na capacidade de abstração do aluno e prepara-o para a compreensão de conceitos do CDI, que requerem um nível maior de abstração.
- É preciso certificar-se que alunos e professor atribuam a mesma significação aos termos matemáticos em uso, como é o caso da palavra “amplitude”, discutida na seção 7.
- A notação somatória carece de maiores esclarecimentos. Houve a associação entre o símbolo e a soma de termos, mas a representação algébrica não ficou clara. Tampouco, houve associação entre o símbolo e uma soma de termos de uma sequência, que fora nomeado como série, talvez pela própria significação atribuída ao termo série;
- Associação entre os termos *função* e *sequência* engendra compreensão como sinônimos. Embora as sequências sejam casos particulares das funções, é preciso cuidar para que as funções reais de variáveis reais não sejam apenas vistas como sequências cujo domínio é um conjunto discreto.
- Há confusão entre os termos contínua e convergente.
- Os alunos, a princípio, não admitem a possibilidade de uma série ser convergente, já que não é natural a adição de infinitos termos convergir para um número real. Este fato contraria a observação física de que, ao crescer uma quantidade positiva em algo, obtem-se um valor cada vez maior, mesmo que essa quantidade seja muito pequena. Vale lembrar que Contreras e Ordoñez (2006) consideram essa convergência como um

obstáculo epistemológico, e Amadei (2005) retoma a dificuldade de aceitação do infinito por grandes matemáticos, desde os tempos de Arquimedes.

Mesmo com as dificuldades citadas, percebeu-se grande envolvimento dos cursistas na realização das atividades na maior parte do tempo, o que, de certa forma, foi surpreendente, haja vista o momento em que o minicurso foi aplicado (vide detalhes na seção 3). Em parte, isto se deve à característica das atividades, por serem desafiadoras, especialmente por permitirem que cada aluno avançasse segundo seu ritmo.

Durante o minicurso, alguns alunos trocaram de grupo. Alguns demonstraram sentir-se prejudicados pela “lentidão” do companheiro, outros parecem ter percebido que havia colegas com as mesmas dificuldades, mas com mais facilidade de entender as explicações, e com disponibilidade para ensinar, o que o qualificava para ser seu novo companheiro de equipe.

A maior parte dos cursistas havia sido reprovada em Cálculo. Geralmente, uma justificativa para tal é que o estudante não se dedica. Entretanto, no minicurso, muitos destes alunos demonstraram interesse e participaram ativamente na resolução das questões na maior parte do tempo.

9.2 A metodologia docente X Consequências para o professor

Em relação à metodologia docente, Mometti (2007) indica a contribuição da atividade reflexiva e coletiva para a melhoria da aprendizagem discente. Contudo, há outras questões percebidas durante a aplicação destas atividades, que merecem destaque quanto a isto, como por exemplo: o uso de atividades em grupo via mídia computacional, associada à resolução de problemas que podem estar relacionados ao seu uso profissional, como foi o caso do cálculo da área de um lago, e o acompanhamento da aprendizagem do aluno por meio dos Mapas Conceituais elaborados por eles.

Uma das dificuldades apresentadas pelos alunos foi concernente ao processo de escrita da Matemática, quer seja usando a representação em língua natural, quer seja usando a representação algébrica, que pode tornar-se um obstáculo ontogenético para a aprendizagem. Isto pode ocorrer em razão da pouca exploração desta escrita nas aulas

de Matemática, desde a Educação Básica. Percebeu-se, no entanto, que, em grupos, os alunos sentiam-se mais confiantes em expressar suas opiniões. Além disso, tiveram a necessidade e a oportunidade de argumentar sobre seus posicionamentos. Pelo que se percebe, esta também não é uma metodologia usualmente adotada pelos docentes, seja de Ensino Superior, seja da Educação Básica.

É preciso estar atento com a metodologia adotada em sala de aula. Desse modo, o professor possui um importante papel para que seu aluno obtenha sucesso na aprendizagem, uma vez que ele precisa contemplar uma adequação do conhecimento a ser adquirido em situações adidáticas, além de prever possíveis obstáculos a serem superados. No caso da utilização de sequências didáticas, ele deve analisar, cuidadosamente, a possível ordem das tarefas a fim de atingir os objetivos planejados.

Assumir os pressupostos da TSD significa aceitar assumir mais trabalho em prol da aprendizagem do estudante. O professor tem a tarefa de acompanhar o desenvolvimento do aluno, interagindo quando necessário, para que ele se torne autônomo. Assim, não cabe a ele dar respostas prontas, mas, fazer o aluno refletir sobre seu processo de aquisição do conhecimento. Cabe alguns questionamentos em relação a isso: os professores de Cálculo estão querendo assumir tal postura? Eles têm condições para essa adoção? Isto é possível, considerando as grades dos cursos de CDI? Os cursos de licenciatura em matemática têm incentivado este tipo de postura em sala de aula?

Diante do que fora observado em toda a aplicação da sequência didática, o que o docente pode fazer durante o curso de CDI? Eis algumas sugestões:

1. Diferenciar os termos sequência, função, série, e destacar as semelhanças e diferenças entre os dois primeiros e situando o terceiro em relação a estes;
2. Esclarecer a relação entre o limite ser finito, isto é, ser um número real, e a sequência ser finita;
3. Cuidar para que os alunos tenham conhecimento do significado dos termos que estão sendo usados nas definições, bem como, o seu significado no contexto em que está inserido;
4. Proporcionar momentos de discussão coletiva, mesmo que em pequenos grupos, seja em sala de aula, seja em atividades extraclasse, em que os alunos exponham suas observações e apresentem suas argumentações;
5. Propor a elaboração de Mapas Conceituais e discuti-los, coletivamente, oportunizando a chance de refazê-los após esse momento.

É possível evidenciar, ainda, alguns outros aspectos relevantes, que são específicos da metodologia docente. São eles:

- ❖ Planejar cuidadosamente as aulas, a fim de que o aluno tenha um papel mais ativo na compreensão dos conceitos;
- ❖ Promover debates entre os estudantes acerca do conteúdo em estudo;
- ❖ Acompanhar o desenvolvimento cognitivo do estudante, em relação ao objetivo que se deseja alcançar;
- ❖ Esclarecer e retomar pontos percebidos como duvidosos ou mal elaborados;
- ❖ Incentivar a pesquisa e a exploração aprofundada dos conteúdos trabalhados em sala de aula.

Delineia-se, a partir deste estudo, que a metodologia para o ensino de Cálculo deve ser mais dinâmica, voltada para a participação efetiva do aluno. Ele deve ser conduzido a construir seu próprio raciocínio para compreender o conhecimento matemático, historicamente construído, e a partir de então, aprofundar-se no que for de seu interesse.

9.3 Os Mapas Conceituais X aprendizagem X postura do professor

Nesta tese, investigou-se o seguinte problema: em que medida os Mapas Conceituais contribuem para acompanhar o desenvolvimento da conceitualização da Integral de Riemann?

Nossa hipótese de trabalho era de que os Mapas Conceituais poderiam ser uma alternativa eficaz para acompanhar um conceito em estudo.

Nesta pesquisa, os Mapas Conceituais mostraram-se ser um forte instrumento para o professor perceber se está, ou não, atingindo seus objetivos educacionais, como indicaram as análises didáticas dos Mapas apresentadas nas seções 4 a 8. No entanto, ele deve vir acompanhado de uma sequência didática cuidadosamente elaborada e frequentemente reavaliada. Nesta pesquisa, ficou notória a colaboração dos Mapas Conceituais para identificar pontos que não foram assimilados pelos alunos, bem como, possíveis obstáculos didáticos.

Ao que parece, a elaboração do Mapa Conceitual está intimamente associada às tarefas apresentadas aos alunos. Nesta série de atividades, procurou-se propor questões

que contemplassem os estágios de ação, formulação, validação e institucionalização preconizados pela TSD, que visavam “(...) possibilitar ao aluno o máximo de independência para que ele possa desenvolver autenticamente seus próprios mecanismos de resolução do problema, através de suas elaborações de conceitos.” (FREITAS, 2010, p.91).

O professor pode acompanhar o desenvolvimento intelectual do aluno, no seu curso regimental, por meio do confronto do que foi observado nos Mapas Conceituais elaborados conforme os objetivos da disciplina.

Como discutido nas seções 4.16, 6.8 e 8.8, a análise dos mapas conceituais elaborados pelos alunos, permitiu identificar conceitos mal compreendidos, como por exemplo, a associação da convergência de uma sequência com o fato dela ser finita; a confusão entre os termos *sequência* e *função* e entre *continuidade* e *convergência*; a não associação entre os conceitos Integral Definida e Soma de Riemann, entre outros.

Uma das questões que se propôs responder foi “É possível observar a construção da conceitualização da Integral de Riemann por meio de Mapas Conceituais?”. A resposta é SIM, é possível.

A análise dos mapas indicou, por exemplo, a não compreensão da notação sigma, essencial para o entendimento da representação algébrica da soma de Riemann. Indicou, ainda, a dificuldade de representar a convergência de uma sequência ou série por meio da notação de limites. Tais dificuldades tornam-se obstáculos didáticos em momentos posteriores nas aulas de CDI, e devem ser retomados e esclarecidos tão logo sejam constatados. No minicurso, em virtude de sua excentricidade, não foi possível fazer esta devolução a contento, pois algumas dúvidas necessitavam de mais atividades para serem sanadas.

A segunda questão intermediária proposta foi: “A elaboração de Mapas Conceituais facilita o entendimento e construção do conceito em tela?” Esta questão pode ser respondida pelos depoimentos dos alunos sobre a contribuição da elaboração dos mapas para a melhor compreensão do tema em estudo, transcritos dos protocolos finais dos cursistas:

- “pra elaborar um mapa foi preciso olhar todo conteúdo e entender as relações entre as partes” (Débora);
- “com o mapa visualiza-se todo o processo passo a passo” (Claison);
- “O uso de mapas conceituais deixa mais claro o que depende do que (as relações que cada conceito tem entre si)” (Álvaro).

Em relação à contribuição dos Mapas no acompanhamento da construção do conceito de Integral Definida, cabe reafirmar alguns pontos, já citados nas respectivas análises didáticas das partes A, B, C, D e E e que foram apresentadas nos Mapas, que merecem atenção do professor:

- A convergência apareceu associada à existência do limite, porém em alguns casos o limite esteve associado à finitude das sequências. É preciso esclarecer e/ou investigar esta ligação, que, a princípio, não admite a existência do limite para sequências infinitas, e isto inviabiliza a compreensão da soma de Riemann.
- Sequências e Funções foram termos usados como sinônimos. Mas as funções são geralmente tratadas como contínuas na educação escolar, pelo menos em um determinado intervalo, apresentando como domínio um intervalo real, enquanto as sequências tem domínio discreto. As séries são somas de termos. Porém, como somar os termos de uma função cujo domínio é um intervalo real? Quem são estes termos?
- A integral definida apareceu associada ao cálculo de área e ao limite de uma somatória, mas não, necessariamente, esteve associada à Soma de Riemann. É justamente essa associação que é necessária para o uso da integral definida em outros contextos como, por exemplo, no cálculo de volumes.

Em síntese, podemos identificar as seguintes contribuições da utilização de Mapas Conceituais para acompanhar o desenvolvimento da conceitualização da Integral de Riemann para funções de uma variável real:

- ❖ Permite identificar conceitos e relações que não foram compreendidos satisfatoriamente, mas que podem tornar-se obstáculos didáticos para a aprendizagem;
- ❖ Permite identificar concepções que podem ser tornar obstáculos ontogenéticos, como a concepção de infinito;
- ❖ Permite avaliar se os conceitos considerados chave pelo professor estão, também, sendo percebidos como tal pelos alunos. Em nosso caso, o somatório foi considerado um conceito chave que não foi percebido pelos alunos;
- ❖ Permite avaliar o planejamento docente, tendo em vista os objetivos de ensino;

- ❖ Proporciona autoavaliação docente no sentido de confrontar seu método de ensino com os objetivos educacionais.

Mesmo com o cuidado na elaboração das atividades, notou-se a existência de alguns pontos merecedores de atenção. Diante disso, optou-se por reformular a proposta das atividades para a construção do conceito de Integral de Riemann, procurando-se levar em consideração as dificuldades dos alunos identificadas nesta experimentação. Esta proposta é apresentada na próxima seção.

Seção 10 – Nova Proposta de Abordagem para a Construção do Conceito de Integral Definida

Esta seção tem por objetivo apresentar a reformulação da sequência didática inicial proposta para a construção do conceito de integral definida. Foram levadas em consideração as dificuldades detectadas e comentadas nas análises *a posteriori*, das seções anteriores (de 4 a 8).

Como já citado, a deficiência de compreensão em conceitos como o de função, par ordenado, variável⁷³ e expressão, bem como a semelhança entre alguns exercícios acarretaram prejuízos na compreensão das tarefas propostas. Assim, nesta reformulação, acrescentam-se os conceitos citados, e são reestruturadas as questões propostas inicialmente.

A parte de função foi inserida por ter sido percebida a dificuldade dos alunos compreenderem a relação funcional entre os índices da sequência e os respectivos valores. Também foram inseridas tarefas em que era necessário escrever o padrão das sequências, a fim de estimular a atenção discente para os padrões, o que será importante para perceber o processo de construção do conceito de Integral Definida.

Na aplicação, também percebeu-se confusão entre os termos função e sequência: ora os alunos usavam um, ora outro, como sinônimos. A partir de um experimento prático, pretende-se que os alunos percebam as diferenças entre tais termos e também entre estes e variável ou expressão.

Pretende-se que, quando o aluno chegar a tarefa 14, caso o professor opte por sua utilização na íntegra, ele já tenha reconhecido o objeto matemático função em suas diferentes representações semióticas, e possa aceitar as sequências como uma função especial, com domínio discreto, mesmo que isso não seja comentado durante as atividades. Estas atividades (1 a 14) estão inseridas como uma revisão de assuntos referentes ao conteúdo de função, à determinação de padrões, e à definição formal de uma sequência e aqui constam do que chamamos de “Parte Introdutória”

Os números sequenciais nas atividades dão a ideia de continuidade na ação discente. Esperamos que os conceitos essenciais para compreensão da Integral Definida

⁷³ Dificuldades com a álgebra e os inúmeros sentidos atribuídos a esta palavra são tratados em Matos (2007).

tenham sido inseridos numa perspectiva mais natural, o que pode facilitar a associação dos diversos conceitos em jogo.

Na tentativa de reduzir os problemas com os significados dos termos, nesta proposta são apresentadas as definições de um dicionário da Língua Portuguesa, para os conceitos que houve menor facilidade de compreensão durante a aplicação. Pretende-se que isto colabore na discussão e entendimento matemático dos referidos termos.

A elaboração de tabelas, que foi uma dificuldade observada nos alunos, foi substituída pelo preenchimento de um modelo. Isto, para que o aluno possa ser conduzido à interpretação e análise dos dados em questão, sem ater-se em questões menores e desviar-se do foco principal, que é a construção do conceito de Integral Definida.

Na busca de expressões matemáticas para os padrões dos termos da sequência, optou-se por apresentar aqueles perceptíveis com mais facilidade, a fim de manter os alunos vinculados aos conceitos que estão sendo considerados como sendo do campo conceitual de Integral Definida.

Há ainda dificuldades apontadas na aplicação que não estão sendo consideradas nesta reformulação como, por exemplo, as potências de 10, as operações com frações, a representação de dados em tabelas, os símbolos matemáticos, entre outras. Isto porque entende-se que estas questões, embora importantes, não estão diretamente ligadas ao escopo deste trabalho, já que grande parte delas pode ser omitida pelo uso dos *softwares*, sem prejudicar a compreensão dos resultados a serem analisados.

Acerca da utilização desta sequência em sala de aula, penso que não cabe apenas ao momento do estudo da Integral Definida, e que esta deve ser “dividida” ao longo do semestre letivo, à medida que os assuntos forem sendo trabalhados, pois ela destaca, a meu ver, o foco necessário durante o curso para que o aluno compreenda o conceito de Integral Definida. Desta forma, como já destacado nas seções 4 a 8, outros conceitos também poderão ser melhor entendidos. Nesta perspectiva, a sequência didática ainda não foi aplicada.

Nesta nova proposta, manteve-se a elaboração de Mapas Conceituais em pontos considerados estratégicos, cuja observação do professor, permite conhecer antecipadamente, os conceitos e relações ainda não assimilados ou mal elaborados, o que possibilita a ação docente imediata. No entanto, a atual proposta não está subdividida como a anterior. Aqui as atividades estão numeradas de forma sequencial.

Vale comentar que as atividades da parte introdutória da sequência didática foram alteradas após o exame de qualificação deste trabalho, devido às sugestões da banca examinadora. Seguindo as sugestões, as atividades foram testadas com os alunos do primeiro período do curso superior de Engenharia Ambiental da UTFPR-CM, durante o segundo semestre de 2012⁷⁴, nas aulas de Cálculo I. De acordo com a avaliação da turma, a atividade foi revisada e adaptada. Desse modo, a segunda revisão é a que está contemplada nesta reformulação.

Inicialmente, propõe-se a utilização de material manipulável⁷⁵ (vide Figura 86 (a),(b), (c), (d), (e), (f)), para trabalhar o conceito de função (FERREIRA, GODOI e BARROS, 2010; CARGNIN *et al*, 2011).

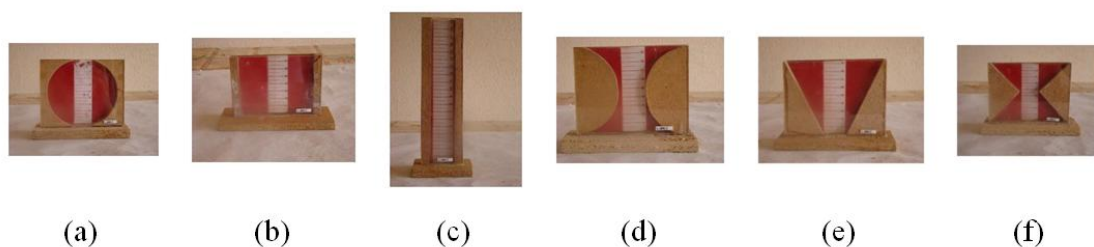


Figura 86: Materiais manipuláveis - recipientes

A sequência ora proposta não está fechada. A partir dos seus fundamentos, o professor pode e deve elaborar outras questões para dirimir as dúvidas que surgirem nas suas aulas.

PARTE INTRODUTÓRIA I – o conceito de função:

O objetivo desta parte introdutória é revisar alguns pontos passíveis de confusão para os alunos, bem como, fazê-lo refletir sobre o processo de desenvolvimento dos conceitos e notações matemáticos.

1. Esta é uma atividade exploratória. Tem por objetivo refletir sobre o que representam os gráficos e como podemos descrevê-los. Para facilitar a discussão, divide-se a turma em pequenos grupos, de 4 ou 5 alunos, e distribui um conjunto de

⁷⁴ Este semestre letivo teve início em 03 de dezembro de 2012, devido à greve na UTFPR, já citada. Os alunos fizeram estas atividades como uma atividade supervisionada durante os meses de janeiro e fevereiro de 2013.

⁷⁵ Este material é confeccionado em madeira mdf, com 10 cm de altura e 1 cm de espessura. Contém uma fita métrica (em centímetros) colada ao fundo. Na frente, os materiais são fechados com vidro, a fim de facilitar a visualização da medida da altura. No apêndice G apresentam-se fotos maiores, que permitem melhor visualização dos mesmos.

seis materiais diferentes a cada grupo (mostrados na Figura 86)). **Tarefa:** observar o formato do recipiente e imaginar que uma areia muito fina o esteja enchendo.

- a. Esboçar um gráfico (sem valores) que represente o comportamento da altura da areia no recipiente à medida que se vai enchendo o recipiente (*para cada recipiente estime um possível gráfico*).
- b. Descreva, usando a língua natural (isto é, a língua portuguesa), o comportamento da altura da areia no recipiente, que você representou graficamente.

Observação: os alunos podem preencher a seguinte tabela de dados, que está na página seguinte.

2. Experienciando:

2.1 Encha completamente a tampa medida com a areia;

2.2 Despeje o conteúdo da tampa medida no recipiente;

2.3 Nivele a areia no recipiente;

2.4 Na tabela de dados, anote os dados da quantidade de tampa medida e a altura da areia.

2.5 Repita os procedimentos 2.1 a 2.4 até o completo enchimento do recipiente.

3. Neste experimento, podem ser observadas algumas **variáveis**. Segundo o dicionário de matemática⁷⁶, escrito por Joshuah Soares, variável é “magnitude que no transcurso do cálculo matemático pode tomar valores distintos”. Eugênio Brito⁷⁷ define variável como “letra usada para representar um elemento qualquer não especificado, de um conjunto numérico” (p.318).

Em algumas situações, as variáveis existentes têm entre si uma relação de dependência: o valor de uma variável depende do valor atribuído à outra variável. Neste caso, chamamos a primeira de **variável dependente** e a segunda de **variável independente**.







Tarefa: Identifique, neste experimento, as variáveis dependente e independente. Justifique sua escolha.

⁷⁶ [http://books.google.com.br/books?hl=pt-](http://books.google.com.br/books?hl=pt-BR&id=PQqFAR6c3awC&q=vari%C3%A1vel#v=snippet&q=vari%C3%A1vel&f=false)

BR&id=PQqFAR6c3awC&q=vari%C3%A1vel#v=snippet&q=vari%C3%A1vel&f=false

⁷⁷ BRITO, E.O. **Dicionário de Matemática**. Porto Alegre: Editora Globo, 1972.

Tabela de Dados do experimento

Recipiente	Formas de Representação				
	Esboço inicial do gráfico	Descrição pela língua natural	Tabela (Dados obtidos)	Gráfico (pelo Software)	Alébrica (função obtida no Software)
					
					
					
					
					
					

4. Definição de **função**: “se uma variável y é relacionada à variável x , de modo que, sempre que um valor é dado a x , existe uma regra segundo a qual um único valor de y é determinado, então y é dito uma função da variável independente x ”.

Observação: No dicionário Michaelis⁷⁸ on-line, função, no sentido da matemática, é apresentada como “Grandeza relacionada a outra(s), de tal modo que a cada valor atribuído a esta(s), corresponde um valor daquela”. Para cada área do conhecimento (matemática, física, química, sociologia,...) esta palavra (função) pode designar coisas diferentes. Portanto, deve-se estar atento ao contexto em que está sendo utilizada.

Tarefa: Você acredita que o experimento realizado representa uma **função**? Justifique.

5. Para dizer que uma variável dependente y está associada a uma variável independente x por meio de uma função f , **escrevemos: $y = f(x)$** , e lemos “ y é igual a f de x ” ou “ y é uma função de x ” ou “ y é o valor funcional de x ”. Quando escrevemos $f(3) = 4$, estamos dizendo que o 4 está associado ao 3 por meio da função f , ou ainda, que a imagem do 3, pela função f , é o 4. Neste caso, a variável independente está assumindo o valor 3, enquanto a variável dependente está assumindo (de acordo com a função estabelecida) o valor 4.

Uma função, no sentido matemático, ou seja, tal qual é descrito na questão 4, pode ser **representada** de várias maneiras, entre elas: em **gráficos** – quando a relação é mostrada no plano cartesiano (\mathbb{R}^2) (como você fez na questão 1a) – cada ponto do plano corresponde a um *par ordenado*⁷⁹ como (x, y) ; na **língua natural** – quando você usa a linguagem coloquial para explicar a relação entre as variáveis (como você fez na questão 1b); em **tabelas** – quando você representa os valores de uma variável em relação aos da outra, normalmente escrito na forma de *par ordenado* (como você fez na questão 2); ou em **forma algébrica** – quando se usa expressões para designar a relação entre as variáveis (como você vai fazer em seguida). Já que você já sabe das formas de representação de uma função, e tem os

⁷⁸ No endereço: <http://michaelis.uol.com.br/moderno/portugues/index.php?lingua=portugues-portugues&palavra=fun%E7%E3o>

⁷⁹ Par que designa as coordenadas cartesianas de um ponto (...) obedecendo-se sempre a mesma ordem das coordenadas, primeiro a abscissa, depois a ordenada (BRITO, 1972, p.177).

dados das suas variáveis dependente e independente, pode representá-los, usando um destes modos, para isso, basta continuar as atividades.

Tarefa: a) Represente, graficamente, no *software* Geogebra, os dados obtidos no experimento e compare o formato do desenho gerado pelos pontos assinalados ao esboço feito por você na questão 1. (Cole-os na tabela de dados, se possível). Ficou semelhante? Comente.

Observação: Para fazer esse gráfico usando o *software* Geogebra: a) Use o comando 1 da lista de comandos do Geogebra (vide anexo) para inserir os pontos anotados na sua tabela de dados. b) Para cada tipo de recipiente faça um gráfico. Salve-os em arquivos diferentes.

b) Encontre a expressão algébrica das funções que associa as variáveis dependente e independente no seu experimento, para cada recipiente. Cole-as na tabela de dados, se possível. (Isto é, represente algebricamente a relação que existe entre as variáveis).

Observação: Para isso, em cada arquivo salvo na tarefa 5a, use o comando 3 da lista de comandos do Geogebra.

c) Observe as funções devolvidas pelo Geogebra na tarefa 5b, em especial, observe as letras que aparecem na expressão algébrica. O que elas representam?

6. **Para Refletir:** Sua tabela de dados está completa. Analise todas as informações obtidas sobre cada um dos recipientes e veja se há alguma inconsistência entre elas. Se sim, relate-a e apresente uma possível justificativa para ela.
7. Suponha que você deva explicar a um amigo o que é uma função, no sentido matemático. O que você diria a ele? Escreva!
8. **Para pesquisar:** Uma função pode ser classificada de várias formas: polinomial, exponencial, logarítmica, trigonométrica, de várias sentenças, modular, entre outras. Isso depende do comportamento dos dados em análise. Pesquise os principais tipos de função, quais as características que as identificam, e como reconhecê-las graficamente, algebricamente ou numericamente.

PARTE INTRODUTÓRIA II – A determinação de padrões e Sequências.

9. (Adaptada de MATOS (2007, p.217-218)) O preço de cada litro de gasolina vai se alterando ao longo do ano, de acordo com a situação econômica. Durante o mês de agosto de 2012, o preço médio da gasolina, em Campo Mourão-PR, foi de R\$ 2,69/litro. Estima-se que esse valor se mantenha para o mês de setembro/2012. O Sr. Claudinei resolveu estimar quanto gastaria, em média, durante o mês de setembro. Vamos ajudá-lo?
- 9.1 O preço total a pagar depende do número de litros de gasolina adquiridos. Elabore uma tabela que traduza, em alguns casos concretos, a relação entre as duas variáveis.
- 9.2 Para este exemplo, quem é a variável dependente? E a independente? Escreva.
- 9.3 Represente graficamente a relação entre o número de litros de gasolina adquiridos e o preço total a pagar pelo Sr. Claudinei.
- 9.4 Quanto pagaria o Sr. Claudinei pelo combustível, se adquirisse 1200 litros durante o mês de setembro? Justifique.
- 9.5 Encontre uma expressão geral que permita calcular o preço total a pagar por qualquer número de litros de gasolina, nesta situação (*Você pode usar o comando 3 do Geogebra, mas cuidado com o domínio da função*).
- 9.6 Quantos litros de gasolina o Sr. Claudinei teria adquirido durante o mês se o valor total a pagar tivesse sido de R\$ 3.537,35? Explique o seu raciocínio.
10. (Adaptada de Matos (2007, p.219)) O Sr. Pedro encontra-se numa situação semelhante à do Sr. Claudinei, mas possui um vale-desconto de R\$ 20,00, fornecido por uma cadeia de lojas onde é cliente.
- 10.1 O preço total a pagar, após o desconto, depende do número de litros de gasolina adquiridos. Elabore uma tabela que ilustre, em alguns casos concretos, a relação entre as duas grandezas.
- 10.2 O que acontece quando dividimos o preço total a pagar, após o desconto, pelo número de litros adquiridos, em cada um dos casos?
- 10.3 Represente graficamente a relação entre o número de litros de gasolina adquiridos e o preço total a pagar pelo Sr. Pedro, após o desconto. Que significado tem, na realidade, o valor que você marcou correspondendo a zero litros adquiridos? A que conclusões você pode chegar?
- 10.4 Quanto pagaria, com este desconto, o Sr. Pedro, se adquirisse 1200 litros de combustível durante o mês de setembro/2012?

10.5 Encontre uma expressão geral que permita calcular o preço total a pagar por qualquer número de litros de gasolina, nesta situação.

11. (adaptado de MATOS, 2007, p.215-216) Observe as sequências representadas por meio dos gráficos seguintes. Escreva uma expressão geral que permita calcular o valor da variável dependente em função do valor atribuído à variável independente, para cada um dos gráficos apresentados. *(Para isso, você pode usar o comando 3 do Geogebra).*

Figura 1

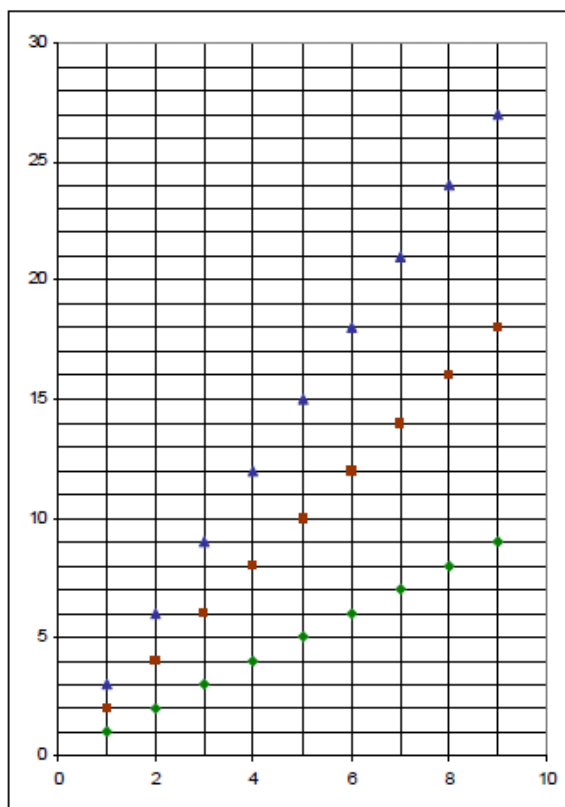
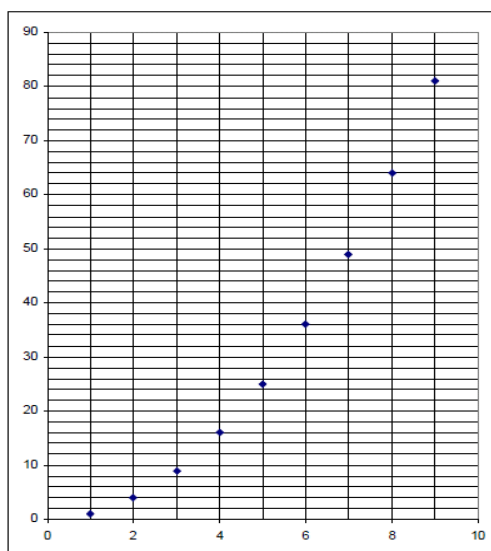


Figura 2



12. **Definição de sequência**⁸⁰: Uma função que associa números naturais $1, 2, \dots, n$ a números reais é denominada **sequência** ou **sucesão**.

É usual indicar uma sequência apenas pelo seu conjunto imagem, colocando-o entre parênteses. Por exemplo: a sequência (1930, 1934, 1938, ... , 2002) é a sequência dos anos em que ocorreram campeonatos mundiais de futebol. Fica subentendido que 1930 é a imagem do 1, 1934 é a imagem do 2, etc. Por isso, 1930 é chamado de primeiro termo da sequência (aqui, o “1930” é o *termo* da sequência e “primeiro” indica a **ordem** (representada pelo número “1”), 1934 é o segundo termo, e assim por diante.

Numa sequência qualquer, costuma-se indicar o primeiro termo por a_1 , o segundo termo por a_2 , e assim por diante. Dessa forma, uma sequência de n termos é indicada por: $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$. Há situações em que a sequência é infinita, e a representaremos por (a_1, a_2, a_3, \dots) . [Normalmente usamos a expressão $\{a_n\}$ para indicar a sequência cujo termo geral é a_n]

Tarefa:(Adaptada de Matos (2007, p. 212)). Observe as sequências seguintes:

12.1 Complete os espaços em branco de acordo com o padrão correspondente:

- a) $(1, 2, 3, \dots, 5, 6, 7, \dots)$
- b) $(2, 4, 6, \dots, 10, 12, 14, \dots)$
- c) $(1, 3, 5, \dots, \dots, 11, 13, \dots)$
- d) $(1, 4, 9, \dots, \dots, \dots, 49, \dots)$
- e) $(5, 25, 125, 625, \dots)$
- f) $(1, 8, 27, \dots, 125, \dots)$

12.2 Transcreva cada uma das sequências apresentadas em 12.1 para as tabelas seguintes, indicando corretamente quem são os termos e qual sua ordem. Depois escreva, na coluna sombreada, a regra geral que permite calcular qualquer termo (um termo de ordem n) da sequência (ou seja, sua lei de formação).

⁸⁰ Texto extraído de IEZZI, G. et al **Matemática**. Volume Único. 4ª Ed. São Paulo: Atual Editora, 2007, p. 132.

a)

Ordem									n
Termo									

b)

Ordem									n
Termo									

c)

Ordem									n
Termo									

d)

Ordem									n
Termo									

e)

Ordem									n
Termo									

f)

Ordem									n
Termo									

13. (Adaptada de Matos, 2007, p. 213-214) Nas figuras seguintes estão representados vários números figurados. Para cada uma destas sequências:

13.1 Represente as próximas três figuras;

13.2 Escreva uma sequência de números que possa estar associada a cada sequência de figuras.

13.3 Descreva a lei de formação de cada uma dessas sequências numéricas.

13.4 Escreva uma expressão geral que associe a posição (ordem) do termo e seu valor, para cada uma das figuras apresentadas.

Números triangulares



Números quadrados



14. (IEZZI, 2007, p.138) Em uma cidade, 1200 famílias carentes inscreveram-se em, um programa social desenvolvido pela prefeitura. Por não haver a verba total imediata necessária para implementar o programa, decidiu-se atender 180 famílias no primeiro mês e, em cada mês subsequente, 15 famílias a menos que o número correspondente às famílias assistidas no mês anterior.
- 14.1 Quantas famílias foram atendidas nos três primeiros meses do programa? E ao final de 1 ano? Descreva o procedimento realizado por você.
- 14.2 Você conhece alguma maneira mais sucinta para escrever a soma realizada por você no item 14.1? Se sim, escreva.

SEQUÊNCIA DIDÁTICA

15. Você sabe como escrever informações matemáticas na forma concisa? Veja:

Ao se deparar com um símbolo como o seguinte: $\sum_{i=3}^5 (2+i)$ você deve, por convenção, fazer o seguinte: Escreve-se a expressão $(2+i)$ substituindo-se o i pelo primeiro número que aparece na parte inferior da notação, neste caso o 3. Escreve-se o signo “S” que aparece na notação. Escreve-se a expressão substituindo-se o i pelo próximo número natural. Escreve-se o signo “S”. E assim se procede até que se escreva a expressão $(2+i)$ substituindo-se o “ i ” pelo número que aparece na parte superior da notação. Para este exemplo, teremos, então:

$$\sum_{i=3}^5 (2+i) = (2+3) S (2+4) S (2+5)$$

(Isso é meramente “FORMAL”, uma notação e suas regras de escrita, sua “sintaxe”, não se preocupe em obter um resultado a partir do que está escrito. O

que está à esquerda do sinal de igual é a escrita da expressão no modo *conciso*, e o que está à direita da expressão é o *desenvolvimento da expressão*).

Outro exemplo:

Para desenvolver a expressão $\bigcap_{i=5}^7 [i, 10]$ devemos fazer:

$$\bigcap_{i=5}^7 [i, 10] = [5, 10] \cap [6, 10] \cap [7, 10]$$

Veja se você compreendeu o raciocínio, desenvolvendo as expressões seguintes:

a) $\clubsuit_{k=1}^5 (3k - 5)$

b) $\heartsuit_{m=2}^5 (m^2)$

c) $\sum_{i=1}^4 (2i)$

16. Agora, estão apresentados os desenvolvimentos das expressões, sua tarefa é escrevê-las no modo conciso.

a) $(3 \cdot 5 + 7) \circ (3 \cdot 6 + 7) \circ (3 \cdot 7 + 7) \circ (3 \cdot 8 + 7) \circ (3 \cdot 9 + 7) \circ (3 \cdot 10 + 7)$

b) $1 \# \frac{1}{2} \# \frac{1}{3} \# \frac{1}{4} \# \dots \# \frac{1}{10}$

c) $\left(\frac{2+1}{2-1}\right)^2 \blacksquare \left(\frac{3+1}{3-1}\right)^3 \blacksquare \left(\frac{4+1}{4-1}\right)^4 \blacksquare \left(\frac{5+1}{5-1}\right)^5 \blacksquare \dots \blacksquare \left(\frac{10000+1}{10000-1}\right)^{10000}$

17. Alguns símbolos matemáticos são usados para representar algumas operações entre termos de uma sequência. Observe:

a) se for utilizado o signo Π , isso terá o significado de uma multiplicação (Produtória). Por exemplo:

$$\prod_{k=1}^3 k^2 = (1^2) \cdot (2^2) \cdot (3^2) = (1) \cdot (4) \cdot (9) = 36$$

(Note que o símbolo Π foi substituído pelo símbolo da operação que ele indica: o signo de multiplicação (\cdot))

b) se for utilizado o signo \cap , isso significa que deverá ser calculada a interseção.

c) se for utilizado o **signo** Σ , isso significa que deverá ser calculada a **adição** (Somatória), e assim por diante. Veja o exemplo:

$$\sum_{k=1}^3 k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 1 + 4 + 9 = 13$$

(observe que o símbolo Σ foi substituído pelo símbolo da operação que ele indica: o signo de adição(+))

Agora, considere a notação:

$$\sum_{k=m}^n f(k)$$

Nesta notação, m e n são os limites inferior e superior do somatório (m e n representam os valores inicial e final de k , respectivamente; ou seja, **são números inteiros**); a letra k é chamada de índice do somatório; $f(k)$ é o valor funcional de k .

Observações:

- 1) m e n **não estão** relacionados segundo a ordem do alfabeto, apenas representam a ordem de dois termos quaisquer da sequência.
- 2) Usamos este símbolo para indicar uma soma de termos de uma sequência.

Tarefa: Usando que foi explicado sobre o signo Σ , desenvolva a expressão:

$$\sum_{i=k}^n F(i)$$

18. Nos itens seguintes, escreva a soma correspondente à expressão (isto é, desenvolva a expressão), e calcule seu valor:

- a) $\sum_{k=4}^8 k^3$
- b) $\sum_{k=1}^5 2k$
- c) $\sum_{k=0}^5 (2k + 1)$
- d) $\sum_{j=1}^4 (3j + 1)$
- e) $\sum_{k=1}^5 (2^k)$

19. Use a notação de somatório para representar a soma dada (isto é, escreva a expressão dada na forma concisa):

- a) $(-3)^3 + (-2)^3 + (-1)^3 + (0)^3 + (1)^3$
- b) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$

c) $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8$

d) $2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 + 2x_6 + 2x_7$

20. (IEZZI, 2007, p.139) Considere um triângulo equilátero T_1 de lado ℓ cm. Prolongando-se em 1 cm cada lado de T_1 obtém-se o triângulo T_2 . Prolongando-se 1 cm cada lado de T_2 , obtém-se o triângulo T_3 , e assim por sucessivamente, até construirmos o triângulo T_{12} .

20.1 Determine ℓ , sabendo que a soma dos perímetros dos doze triângulos assim construídos é 342 cm.

20.2 Descreva o processo usado para calcular a soma dos perímetros em 20.1

20.3 Usando a notação de somatório, escreva a soma realizada em 20.1.

21. Analise o comportamento de cada uma das sequências cujos termos gerais são apresentados a seguir. Use, para tanto, o comando 4 da lista de comandos do Geogebra (salve um arquivo para cada sequência – você precisará voltar a elas mais tarde). Tente descobrir se as sequências aproximam-se de algum número (se sim, determine-o).

a) $a_n = \sqrt{n}$

b) $b_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}$

c) $c_n = \frac{n-1}{n}$

d) $d_n = \frac{1}{n}$

e) $e_n = n^2$

f) $f_n = n$

21.1 Em seguida, escreva, para cada sequência dada, o que você observou sobre comportamento (maneira de comportar, procedimento⁸¹) dos termos da sequência.

21.2 Em sua opinião, o que representam as coordenadas dos pontos mostrados no Geogebra?

21.3 Para este tipo especial de função, quem são as variáveis dependente e independente? Escreva.

⁸¹ Uma das definições do dicionário Michaelis on-line para *comportamento*. Disponível em <http://michaelis.uol.com.br/moderno/portugues/index.php?lingua=portugues-portugues&palavra=comportamento>

22. A notação de limites serve também para descrever de forma sucinta o comportamento de uma sequência. Use-a para representar os comportamentos das sequências descritos no item 21.1.
23. Considere a seguinte ‘definição’ intuitiva de Convergência: *Dizemos que uma sequência numérica converge para um número L se os termos da sequência ficam cada vez mais próximos do número real L .*

Agora considere novamente as sequências dadas na questão 21. Depois de realizar as atividades no Geogebra, você diria que elas convergem? Se sim, qual seria o possível número L ? Complete a tabela, a partir da sua observação.

Sequência	Converge?	Valor de L ?
$a_n = \sqrt{n}$		
$b_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}$		
$c_n = \frac{n-1}{n}$		
$d_n = \frac{1}{n}$		
$e_n = n^2$		
$f_n = n$		

24. Observe novamente o comportamento dos termos das sequências da atividade 21, mas agora usando o comando 5, da lista de comandos. Com base nas suas observações, responda:
- 24.1 Existe diferença de comportamento entre as sequências que você assinalou como convergentes e as não convergentes? Se sim, qual(is)? Explique.
- 24.2 Compare a maneira pela qual você afirmou ser a sequência convergente (ou divergente) nos exercícios 21 e 24.1. O que há de semelhante? Explique.
- 24.3 Baseado nesse experimento, como você descreveria um procedimento para saber se uma sequência converge ou não? Descreva.
25. Tente escrever o procedimento descrito por você na tarefa 24.3 de modo mais formal, isto é, usando a representação algébrica.
26. Considere as representações gráficas das sequências b_n e d_n da tarefa 21, dadas pelo comando 4 da lista de comandos.

- 26.1 Trace retas horizontais usando, no Geogebra, o comando “ $y = 0.5$ ” e “ $y = -0.5$ ”. Descubra um valor n_0 a partir do qual os pares ordenados (que representam os pontos no plano cartesiano) fiquem dentro da faixa delimitada pelas retas horizontais traçadas. Anote estes dados da faixa e n_0 na tabela abaixo.
- 26.2 Diminua o valor 0.5 para 0.3 e trace as retas horizontais $y = 0.3$ e $y = -0.3$. Descubra o valor n_0 tal qual pedido no item anterior. Anote-o na tabela.
- 26.3 Diminua de 0.3 para 0.1 e trace as retas horizontais $y = 0.1$ e $y = -0.1$. Descubra o valor n_0 e anote-o na tabela.
- 26.4 Procedendo desta forma, é sempre possível encontrar um n_0 independente da amplitude⁸² da faixa tomada? Justifique.

Faixa	Valor de n_0	
	b_n	d_n
$[-0.5; 0.5]$		
$[-0.3; 0.3]$		
$[-0.1; 0.1]$		

- 26.5 Na tarefa 23 você assinalou essas sequências (b_n e d_n) como convergentes ou divergentes?
- 26.6 Caso a sequência considerada não seja convergente, o que deve acontecer com as faixas usadas neste exercício? Explique.
- 26.7 Que semelhanças e/ou diferenças você percebe entre o que foi feito nesta atividade e as atividades 21 e 24? Comente.

27. As retas cujas equações são da forma “ $y = \text{número}$ ” e “ $y = -\text{número}$ ”, da tarefa 26, servem para mostrar que os termos de uma sequência convergente podem se tornar tão próximos quanto se queira de um determinado valor. Nesta sequência

⁸² Segundo o Michaelis (disponível em <http://michaelis.uol.com.br/moderno/portugues/>)

amplitude am.pli.tu.de

sf (lat amplitudine) **1** Estado do que é amplo. **2** Extensão, vastidão; amplidão. **3** *Geom* Distância angular. **4** **Distância entre os extremos de uma variação periódica:** *Amplitude da temperatura.* **5** *Fís* Distância entre uma das extremidades da oscilação de um movimento vibratório ou oscilatório e o ponto de equilíbrio ou normal, por exemplo, da oscilação de uma corrente alternada, de uma onda de rádio, de uma onda sonora ou de um pêndulo; o maior valor de uma elongação. **6** *Astr* Arco do horizonte, interceptado entre o ponto magnético oeste ou leste e o centro do Sol ou outro corpo celeste ao nascer ou pôr-se; amplitude magnética. **7** O céu, o espaço. *A. magnética:* o mesmo que *amplitude*, acepção 5. *A. interquartil:* amplitude quartil. *A. quartil, Estat:* amplitude de um intervalo quartil numa distribuição de frequências ou de probabilidades; amplitude interquartil.

de atividades, este valor é o número L para a qual uma sequência converge. Assim, as referidas retas devem ser montadas tomando por base a expressão “ $y = L \pm$ número”. Normalmente, adotamos para este número um valor próximo de zero, e geralmente o denotamos por ε , de modo que escrevemos que as retas devem ter expressões da forma $y = L \pm \varepsilon$.

- a. Considere a sequência c_n da questão 21. Escreva as respectivas faixas de amplitude 1, 0.6 e 0.2. Indique também o valor de n_0 (número a partir do qual todos os termos da sequência estão dentro da faixa), como indicado na tabela:

Amplitude	Faixa (intervalo)	n_0
1		
0.6		
0.2		

28. Considere a seguinte definição:

Definição: A sequência $\{a_n\}$ **converge** para o número L se para todo número positivo ε existe um número inteiro N tal que para todo n , $n > N \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$. Se esse número L não existe, dizemos que $\{a_n\}$ **diverge**.

- a) Discuta com seus colegas ou reflita sobre o significado das expressões que aparecem na definição apresentada neste exercício ($N, L, a_n, |a_n - L|, |a_n - L| < \varepsilon$), procurando associá-los às atividades desenvolvidas até agora. Redija suas conclusões.
- b) Observe os dados anotados nas atividades 21 a 24. Para cada sequência assinalada como convergente, a quem você pode associar as letras L , ε e N ? Justifique.

Sequência	Converge?	L	ε	N
$a_n = \sqrt{n}$				
$b_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}$				
$c_n = \frac{n-1}{n}$				
$d_n = \frac{1}{n}$				
$e_n = n^2$				
$f_n = n$				

c) Como você explicaria, a um colega, o significado das letras L , ε e N ? Escreva sua explicação.

29. Considere a sequência definida por $b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

a) Abra um arquivo no wxMaxima. Digite no campo de Entrada a definição do termo geral da sequência, “ $f(n) := (-1.0)^{(n+1)/n}$ ”, e aperte Enter. A expressão funcional do termo geral será registrada. (*Cuidado para que seja escrito “1.0” no numerador da expressão. Isso facilitará o trabalho com valores decimais.*)

b) Verifique o valor do termo de índice 50. (*Para fazer isso digite no campo de Entrada “ $f(50)$ ” e aperte (Shift) Enter, você deverá ver o valor -0.02 na tela.*)

c) Use o wxMaxima e procure valores de n tais que $f(n)$ esteja entre -0.0001 e 0.0001 . Em outras palavras, encontre n tal que o valor absoluto de $f(n)$ seja menor que 0.0001 . (*Você pode utilizar o comando $abs(f(n))$ para calcular o valor absoluto de $f(n)$ se quiser.*)

d) É possível encontrar um n tal que $f(n)$ esteja entre -10^{-7} e 10^{-7} ? Qual é esse valor? E entre -10^{-12} e 10^{-12} ? Qual é esse valor?

e) Comente sobre a facilidade e/ou dificuldade para encontrar os valores de n solicitados nos itens c e d.

f) Agora, com o Geogebra, você consegue encontrar valor de n a partir do qual os termos da sequência se situam entre os valores $-e$ e $+e$, para qualquer valor de e ? Comente.

g) Do seu ponto de vista, o uso dos dois *softwares*, simultaneamente, pode facilitar o entendimento e resolução das questões solicitadas? Justifique.

30. Considere a sequência $g_n = \frac{2n}{n+1}$.

a) Analise a convergência da sequência (*use o comando 4, da lista de comandos do Geogebra*) e identifique, se for o caso, o número L para o qual a sequência converge.

b) Descubra um valor de n a partir do qual todos os pares ordenados estejam dentro da faixa delimitadas pelas retas horizontais $y = L + \varepsilon$ e $y = L - \varepsilon$, para valores de ε sendo 0.5, 0.1, 0.01 e 0.001. (*Use o comando 7, se necessário*). Anote os dados na tabela seguinte:

ε	$L - \varepsilon$	$L + \varepsilon$	n
0.5			
0.1			
0.01			
0.001			

- c) Releia a definição de convergência (exercício 28). Qual o papel do ε . Quem é o L ?
- d) Baseado nesse experimento, o que você diz sobre a convergência ou divergência da sequência? O que é preciso observar pra saber se uma sequência converge ou diverge?

31. Usando esta mesma sequência $g_n = \frac{2n}{n+1}$, vá para o *software* wxMaxima e abra um arquivo novo.

- a) Digite no campo de Entrada a definição do termo geral da sequência, “f(n) := (2.0)*n/(n+1)”, e aperte (shift) Enter.
- b) Use o método da tentativa e erro para encontrar um valor n tal que $f(n) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$, para os valores de ε da tabela seguinte. Anote os valores de n :

ε	$L - \varepsilon$	$L + \varepsilon$	n
0.5			
0.1			
0.01			
0.001			
10^{-8}			
10^{-12}			

- c) É sempre possível encontrar um n tal que $f(n) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$? Justifique.

32. Considere a sequência $h_n = \frac{2n}{2n+3}$.

1. Analise a convergência da sequência h_n e, se convergente, determine o número para o qual ela converge.

2. Sendo L o número para a qual h_n converge, use o método da tentativa e erro para encontrar um valor n tal que $f(n) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$, para os casos abaixo estipulados. Anote os valores de ε e n numa tabela. Use o *software* wxMaxima ou o Geogebra. O que preferir.
1. $\varepsilon = 10^{-1}$
 2. $\varepsilon = 10^{-3}$
 3. $\varepsilon = 10^{-7}$
 4. $\varepsilon = 10^{-10}$
3. É sempre possível encontrar um n tal que $f(n) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$? Justifique.
33. Considere a **definição**: Se $\{a_n\}$ **converge** para o número L , escrevemos $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$, ou simplesmente $a_n \rightarrow L$, e chamamos L de **limite** da sequência.
- Observação: Segundo o dicionário de português on-line Michaelis⁸³, a palavra convergir tem os seguintes significados:*
con.ver.gir
(baixo-lat convergere) vti 1 Dirigir-se, tender para um ponto comum: As pregas da sala convergiam na cintura (ou para a cintura). vti 2 Concorrer, afluir ao mesmo lugar: Grande parte da população converge diariamente aos cinemas. Os mais diversos boatos convergiam de todos os pontos do país. Todos os olhares convergiam para aquele ponto. Os comentários convergiam todos sobre o momentoso caso. vtd 3 Concentrar: "Converge o teu poder: na mão aduna as fúrias infernais" (Porto Alegre, ap Laudelino Freire). (Conjugação: muda o e da raiz em i, na primeira pessoa do singular do presente do indicativo e em todo o presente do subjuntivo: convirjo, convirja etc.) 1. Tender para o mesmo ponto. 2. Concorrer, tender para o mesmo fim.
- a) Para as sequências classificadas como convergentes na tarefa 21, escreva a convergência segundo a notação apresentada no enunciado desse exercício.
 - b) Compare essa escrita matemática com a que foi elaborada por você na questão 22. É a mesma? Comente.
34. Crie uma sequência convergente, e represente essa convergência por meio da notação apresentada na questão 33.
35. Pense em uma nova sequência s_n em que cada termo é a soma do n -ésimo termo da sequência, com os termos anteriores (exemplo: para a sequência d_n , da questão 21, $s_1 = 1$, $s_2 = 1 + \frac{1}{2}$, $s_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$, e assim por diante).

⁸³ <http://michaelis.uol.com.br/moderno/portugues/index.php?lingua=portugues-portugues&palavra=convergir>

- i. Você acredita que essa sequência (das somas) possa ser convergente? Explique.
- ii. Teste sua conjectura com as sequências dadas na tarefa 21. Escreva suas conclusões.

36. Usando o que você estudou sobre somatório, como você escreveria a soma dos termos da sequência mencionada na questão 35? Escreva-a.

37. Se você tivesse que dizer a alguém um critério para analisar a convergência, ou não, de uma sequência o que você diria? Escreva sua resposta.

38. Elabore um Mapa Conceitual que mostre as relações que você percebeu entre os conceitos usados até o momento. (Antes, porém, você deve pensar sobre quais conceitos estiveram envolvidos nas atividades resolvidas)

39. **Definição de série**⁸⁴: Se $\{a_n\}$ é uma sequência, então a soma infinita

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

é uma **série (infinita)**. Cada número a_i é um termo da série. a_n é um termo genérico de ordem n . A soma de uma quantidade finita de termos é chamada de **Soma Parcial**, e é usado o signo S_n para designar a soma dos n primeiros termos da sequência, isto é, $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, ..., $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

40. Considere a série cujos termos iniciais são:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \dots$$

- a) Determine a soma dos oito primeiros termos e escreva o resultado usando a notação de somatório (*Você pode usar o comando 6 da lista de comandos do Geogebra*).
- b) Determine a soma dos vinte primeiros termos e escreva o resultado usando a notação de somatório (ou seja, a escrita na forma concisa).
- c) Determine a soma dos mil primeiros termos e escreva o resultado usando a notação de somatório.
- d) É possível somar os infinitos termos desta série? Se sim, o que você pode dizer a respeito dessa soma? Escreva.

⁸⁴ Texto extraído de <http://www.somatematica.com.br/superior/series/series.php> em 07/09/12, com adaptações.

- e) Em símbolos (isto é, usando a notação na forma concisa), como você escreveria sua análise do item d)?
- f) Desafio: Procure pensar em alguma situação que envolva a geometria (aquela estudada na Educação Básica) que pode ser resolvida com esta série. Descreva a situação e sua solução.

41. Considere a sequência $S_n = \frac{1}{n}$. Faça o seguinte:

- a) Abra um arquivo no Geogebra:
 - i. Use o comando Σ para inserir a soma de termos da sequência (aparecerá um número a que valerá provisoriamente 1).
 - ii. Depois, crie um ponto posicionado na reta real identificada com o eixo Ox, escrevendo, na linha de comando: `Result=(a,0)` (*atenção: a letra a ser usada aqui é a que aparecerá na janela de álgebra no passo i*). Aparecerá o ponto “Result” que representa o valor numérico da soma do primeiro termo apenas. Ele estará em (1,0) (*vamos entendê-lo como o 1 real*).
 - iii. Usando a notação de somatório, expresse o valor da soma dos mil primeiros termos desta sequência.
 - iv. Enquanto você aumenta o valor de b , preste atenção na velocidade de crescimento da soma, observando o deslocamento do ponto $(a,0)$ criado.
 - v. À medida que aumentarmos o número de termos que estão sendo adicionados (valor de b), o valor calculado da soma aumentará também? Em sua opinião, existe um valor máximo para essa soma? Se sim, determine-o e argumente tal escolha. Se não, justifique.
 - vi. Escreva sua conclusão a respeito do comportamento da soma dos termos desta sequência.
 - vii. O que é mais interessante de observar para concluir sobre o comportamento da soma parcial: o deslocamento do ponto sobre o eixo Ox ou o valor da soma? O que mais te chamou a atenção? Escreva.
- b) Agora, abra um arquivo no wxMaxima.
 - i. Escreva o comando $S(k) := \text{sum}(1.0/n, n, 1, k)$.
 - ii. Observe o registro algébrico apresentado pelo *software*.

- iii. Considerando o comando dado em b-i, o que significa, para você, a expressão $S(1000)$? Escreva.
- iv. Com o comando do item b-i) você criou no wxMaxima uma função que calcula a k-ésima soma parcial (*isto é, a soma dos k primeiros termos da sequência*). Agora, confira o que foi feito no Geogebra e explore o valor das somas parciais para valores maiores. Anote o número de termos e a soma parcial obtida nos seus experimentos na tabela abaixo (*pode usar mais linhas, se necessário*):

Valor atribuído a n	Soma parcial obtida

- v. Se você fosse escrever uma fórmula para representar a soma de infinitos termos desta sequência, como você faria? Escreva.
- vi. Observando os resultados do item b-iv, você mantém suas conclusões do item a-v? Se não, em que você mudaria? Escreva, argumentando sobre as modificações.
- c) Em que ambiente você preferiu fazer as experimentações: no Geogebra ou no wxMaxima? Justifique.

42. Considere a sequência definida por $S_n = \frac{1}{n^2}$.

- a. Usando os *softwares* Geogebra ou wxMaxima analise o comportamento das somas parciais de S_n (*se necessário, use os comandos da questão 41*).
- b. Qual a diferença observada nas somas parciais entre esta atividade e a 41? A que você atribuiria tais diferenças?
- c. Expresse, simbolicamente (*isto é, usando a notação matemática adequada*), a conclusão obtida sobre a soma parcial de infinitos termos desta sequência.

43. Considere a série cuja soma dos primeiros termos é: $1-1+1-1+1-1+1\dots$

- a) O que você pode afirmar a respeito do valor desta soma? Relate.
- b) É possível escrever uma fórmula que expresse a soma dada? Se sim, escreva.
- c) O que você pode afirmar sobre a convergência desta série? Justifique.

d) Como você explicaria a convergência de uma série (soma de termos de uma sequência) a um amigo? Que critérios você usaria? Escreva sua explicação.

44. Com suas palavras, defina uma série convergente.

45. Em sua opinião, soma de termos de sequências alternadas (em que os termos mudam de sinal, um após o outro), pode ser convergente? Justifique.

46. Considere a soma: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \dots$

- Encontre uma expressão matemática que forneça cada um dos termos da soma.
- Escreva a soma indicada de forma concisa (*usando a notação de somatório*)
- Calcule a soma dos oito primeiros termos (S_8) dessa sequência (*Se necessário, use o comando 6*). Escreva o resultado na forma concisa.
- À medida que se aumenta o número de termos somados, o que acontece com o valor da soma total?
- Baseado no item d, o que é possível afirmar sobre a convergência dessa série?
- Escreva sua conclusão sobre a série dada e expresse, na forma concisa, o valor da soma.

47. Considere a seguinte definição de **Convergência ou Divergência de uma série infinita**: Uma série infinita

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

com uma soma parcial de ordem n ,

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

converge para a soma S se S é um número finito tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$$

e, nesse caso, escrevemos

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S$$

No caso em que $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ não existe dizemos que a série **diverge**.

- a) Como você interpreta esta definição? Explique.
- b) Compare-a com a definição escrita por você na questão 44. São semelhantes? Explique.
- c) Ambas as definições (sua e a “formal”) têm o mesmo significado? Justifique.
- d) Se você respondeu sim à questão anterior, qual delas pode ser melhor compreendida por outros alunos? Por quê?

48. **Elabore um Mapa Conceitual em que apareçam os conceitos percebidos por você até esta etapa da sequência didática.**

49. Considere a série $\sum_{k=0}^n 2k$. Para os valores de $n = 2,3,4,5$:

- a) Escreva as parcelas (soma de termos) que representam a somatória e calcule o valor da soma total:

Valor de n	Parcelas	Soma total
2		
3		
4		
5		

- b) Qual será o comportamento da série se fizermos n crescer (aumentar de valor)? Vai divergir ou convergir? Justifique.
- c) Use sua imaginação: escreva um problema em que a somatória que você calculou no item a) seja a solução.

50. Considere a série $\sum_{k=0}^n k^2$.

- a) Escreva a soma correspondente quando $n = 3$.
- b) Pense no cálculo de áreas da geometria plana. De acordo com seus estudos, que significado geométrico você pode dar para a soma calculada? Explique.

51. Falando de áreas, você sabe como calcular a área sob uma curva? Experimente calcular a área sob o gráfico da parábola que representa a função $f(x) = x^2$, no **intervalo** $[2,4]$. Descreva o procedimento utilizado para calcular esse valor.

Algumas informações sobre intervalos...

O dicionário on-line Michaelis dá as seguintes definições para intervalo⁸⁵: *sm (lat intervallu) 1 Distância em tempo ou espaço entre duas referências. 2 Mús Distância ou altura entre duas notas musicais. 3 Distância que separa dois fatos no tempo. 4 Espaço de tempo entre duas épocas, entre dois fatos, entre as partes de um espetáculo etc. 5 Intercadência. 6 Cosm A quarta dimensão, concebida, na teoria de Einstein, como a percepção simultânea das posições do mesmo objeto em lugares diversos e tempos sucessivos. 7 Med Intermitência. 8 Mil Espaço entre dois homens consecutivos da mesma fileira. I. de classe, Sociol: espaço intermediário entre os limites superiores e inferiores de uma classe, segundo determinados dados quantitativos. I. de classe, Inform: faixa de valores que podem estar contidos em uma classe, acepção 13. I. direto, Mús: aquele que se harmoniza com o som fundamental que o produz. I. lúcido: tempo em que os loucos e os delirantes mostram uso da razão. I. tático, Mil: espaço que isola uns dos outros os grupos principais de uma linha de batalha.*

Já no web dicionário Aurélio⁸⁶ consta as seguintes definições: 1. Distância que (no tempo ou no espaço) medeia entre duas coisas. 2. Intermitência. 3. Entreato.

Na matemática, usamos a palavra intervalo (ou intervalo real) para representar subconjuntos do conjunto dos números reais que são representados por desigualdades, por exemplo, os números reais maiores que 3. Estes subconjuntos podem ser representados na reta real (usando o desenho), ou por colchetes (onde se indica o início e o fim de cada subconjunto, usando o colchete fechado para representar que o extremo está incluído no subconjunto e colchete aberto ou parênteses para representar que o extremo está excluído do conjunto) ou ainda por desigualdades (onde se escreve o subconjunto usando a notação de chaves específica para conjuntos). Por exemplo, quando queremos representar o subconjunto dos números reais maiores que 2 e menores ou igual a 5, escrevemos: $]2, 5] = \{x \in \mathbb{R} | 2 < x \leq 5\}$. Note que o colchete aberto corresponde ao sinal de menor (poderia também ser maior, conforme o extremo excluído do intervalo) enquanto o colchete fechado corresponde ao sinal de menor ou igual (poderia ser maior ou igual, desde que o extremo incluído fosse o esquerdo). No desenho, estes signos correspondem à bola aberta ou fechada, respectivamente.



52. Para calcular área sob uma curva, existe um método conhecido por “método dos retângulos”, em que uma determinada região é dividida em retângulos e a área da região é aproximada pela soma das áreas destes retângulos. Vamos entender esse procedimento? Considere o intervalo $[2,4]$ (no plano cartesiano, considere este intervalo sobre o eixo horizontal). Inicialmente, divida-o em 4 subintervalos de igual amplitude $\frac{1}{2}$. Além disso, considere:

- A função $f(x) = x^2$, definida em $[2,4]$, e os pontos x_i que são os extremos esquerdos dos subintervalos;

⁸⁵ <http://michaelis.uol.com.br/moderno/portugues/index.php?lingua=portugues-portugues&palavra=intervalo> Acesso em 08/09/2012.

⁸⁶ <http://www.webdicionario.com/intervalo>

- O valor funcional de f em cada um desses quatro pontos x_i (isto é, se x_1, x_2, x_3 e x_4 são os extremos esquerdos, $f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x_4)$ são os respectivos valores funcionais);
 - A soma dos produtos $f(x_i) * (1/2)$ para $i = 1, 2, 3, 4$.
- a) Neste contexto, que interpretação você dá para o produto $f(x_i) * (1/2)$? Explique. (Se necessário, use um papel milimetrado para representar a situação).
- b) Dividindo o intervalo $[2, 4]$ em 4 partes iguais, cada subintervalo fica com amplitude $\frac{1}{2}$. Supondo que o intervalo $[2, 4]$ fosse dividido em 10 partes iguais, qual seria a amplitude de cada subintervalo? E se fosse dividido em 20 partes iguais, qual seria a amplitude de cada subintervalo? Preencha a tabela seguinte.

Subdivisões do intervalo $[2, 4]$ em n partes iguais	
n	Amplitude
4	$\frac{1}{2}$
10	
20	
n	

- c) Considerando que a área sob a curva é a soma das áreas dos retângulos, use os comandos 9 e 10 para calcular a área sob a curva, no intervalo dado, para os casos especificados na tabela seguinte. Quem são as dimensões dos retângulos desenhados? Para representar a função no intervalo dado, use o comando 8.

Quantidade de retângulos (subintervalos)	Área sob a curva obtida por meio do comando 9	Área sob a curva obtida por meio do comando 10
4		
10		
20		
50		
100		
500		
1000		

- d) Em que diferem os comandos 9 e 10? Explique.
- e) Comente sobre os valores obtidos para a área sob a curva à medida que se aumenta o número de retângulos, ou seja, à medida que se aumenta o número de subdivisões do intervalo dado.
- f) Pense no modo como você calculou as amplitudes dos subintervalos no item *b* e escreva uma fórmula para a amplitude de um intervalo qualquer $[a, b]$ em n partes iguais.
- g) Usando a notação de convergência de sequência, represente a convergência da amplitude dos subintervalos, à medida que se aumenta o número de divisões do intervalo dado.
- h) Use a notação de limites para representar que a área sob a curva, no intervalo dado, é a soma das áreas dos infinitos retângulos desenhados.
- i) Você pensaria em outro método para calcular a área pedida neste exercício? Se sim, explique-o. Neste seu método, é possível criar um algoritmo para aplicá-lo?

53. Para a função $f(x) = x^2 + 1$:

- a) Faça o seu gráfico no intervalo $[0, 4]$;
- b) Calcule suas somas superiores e suas somas inferiores no intervalo $[0, 4]$, para $n=4, 8, 16, 32, 64, 128, 1024$.
- c) Escreva os resultados em forma de sequência: s_n para as somas inferiores e S_n para as superiores;
- d) O que você pode dizer sobre os valores de $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$?
- e) Se $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$, que interpretação geométrica pode ser atribuída a esse valor comum?

54. Calcule a área sob a curva $f(x) = x$ no intervalo $[1, 4]$:

- a) Usando os comandos 9 e 10.
- b) Usando uma fórmula adequada da geometria plana.
- c) Compare e comente os resultados obtidos nos itens *a* e *b*.

55. Calcule a área sob a curva $f(x) = x^3$ no intervalo $[0, 2]$.

- a) Descreva o procedimento utilizado e o valor obtido para a área.
- b) Usando o que foi visto até agora, escreva uma fórmula matemática que indica calcular essa área sob a curva $f(x) = x^3$, no intervalo $[0, 2]$.

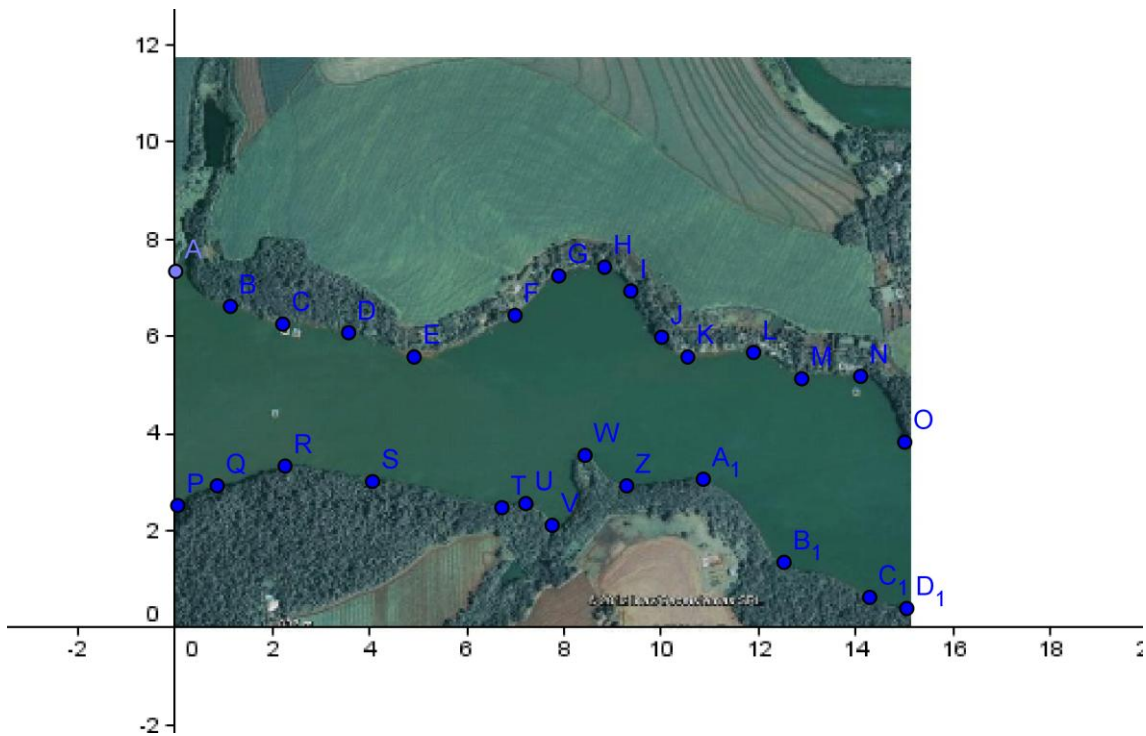
56. Considere a função $f(x) = x^2 + 1$ no intervalo $[-2,2]$.
- Usando os comandos 9 e 10, calcule a área sob o gráfico de $f(x)$ no intervalo dado.
 - Escreva suas conclusões a respeito do valor dessa área, enfatizando a escrita da área na forma simbólica.
57. Analise os **procedimentos** realizados para o cálculo de uma área sob um gráfico (questões 52 a 56).
- Usando a língua portuguesa, descreva-o detalhadamente.
 - Escreva uma fórmula para o cálculo de uma área, que esteja de acordo com a sua descrição no item a.
58. Desafio: Elabore e resolva uma questão que seja relativa a alguma situação que tenha surgido como dúvida, em relação ao cálculo de área. Explique a dúvida surgida e como o problema proposto ajudou-o a resolver.
- 59. Elabore um Mapa Conceitual com os conceitos que lhe foram apresentados (e outros que considerar necessários) durante esta sequência didática.**
60. A figura abaixo representa parte do Parque Estadual Lago Azul, na Usina Mourão, em Campo Mourão – PR.



Fonte: Google Earth

- Insira-a num arquivo novo do Geogebra, como imagem de fundo (use o comando 11).

- b) Selecione o ícone “Ponto” e marque pontos sobre as margens do lago, de modo que estes pontos representem bem essa margem. Pense nestes pontos como pertencentes ao gráfico de duas funções: uma função com a parte superior do lago e outra com a parte inferior. (*Quando você clicar no lugar onde estará o ponto, na janela de visualização, as coordenadas dele aparecerão na janela de álgebra*) – você deverá encontrar algo do tipo:



- c) Usando o comando 3, encontre uma função polinomial que se adeque à margem superior do lago, isto é, o traçado do gráfico do polinômio deve estar próximo da linha que representa a margem do lago.
- d) Calcule a área sob a curva, dentro do intervalo de interpolação (isto é, use como valor inicial a abscissa do primeiro ponto marcado na margem superior e como valor final a abscissa do último ponto marcado na margem superior), por meio dos comandos 9 e 10. Avalie se o valor obtido para a área a representa bem.
- e) Usando as notações apresentadas, escreva uma fórmula que descreva esta área calculada.
- f) Considerando a sua figura, a área calculada já representa a área do lago? Se não, o que, em sua opinião, deve ser feito para calcular a área deste trecho do lago?
- g) Considerando a função encontrada para a margem superior do lago, aplique o comando 12 e compare o resultado fornecido com a área calculada em *d*.

Comente sobre as diferenças e/ou semelhanças. Que correspondências podem ser feitas entre o comando Soma de Riemann e Integral? Explique.

- h) Repita os procedimentos c e d para os pontos que delimitam a margem inferior do lago.
- i) Teste, para a função da margem inferior, se os valores obtidos para a área, por meio dos comandos 9, 10 e 12, são iguais (*considere os mesmos valores inicial e final*). Comente.
- j) Com os dados já calculados, já é possível calcular a área do lago? Se sim, calcule-a. Se não, escreva o que ainda falta.
- k) Aumentar a quantidade de retângulos considerados na estimativa da área (pelos comandos 9 e 10) influencia no seu valor? Como? Explique.
- l) Se denotarmos a base de cada um dos retângulos por Δx e a altura por $f(x)$, usando o que já foi visto até o momento, que fórmula você escreveria para a área total sob uma curva? Escreva-a.

61. Considere, ainda, os dados da questão 60.

- a) Se for substituído nos comandos 9 e 10 a <função> que representa a margem superior (suponha $f(x)$) ou inferior (suponha $g(x)$) do lago, pela diferença entre estas duas funções, isto é, $f(x) - g(x)$, mantendo o mesmo intervalo para a interpolação, você obtém algum valor próximo ao valor calculado, naquele exercício, para a área do lago? Explique.
- b) A região mostrada pelo *software* ao final da resolução do item 61.a coincide com a parte do lago cuja área foi calculada? Se não, que explicação você pode dar para isso?
- c) Aplique o comando 13 e compare o resultado gráfico e numérico com o obtido no item 61.a. Comente as diferenças.
- d) Que relações podem ser estabelecidas entre os comandos Soma de Riemann e Integral, para este caso?

62. Teste sua compreensão: Encontre uma boa aproximação da área da região R sob o gráfico de $f(x) = x^3 + 1$ no intervalo $[0,3]$. Em seguida, escreva-a matematicamente e descreva o método de cálculo da área.

63. Considere a seguinte definição:

“A *integral definida*: Seja f definida em $[a, b]$. Se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x_i$$

existe para todas as escolhas de pontos representativos x_1, x_2, \dots, x_n nos n subintervalos de $[a, b]$ de igual comprimento $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, então este limite é chamado de **integral definida de f de a até b** e é denotado por

$$\int_a^b f(x) dx$$

Assim,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x_i \quad (1)$$

O número a é o extremo inferior de integração, e o número b é o extremo superior de integração.”

- Como você interpreta a definição acima? O que ela diz para você? Explique.
- A expressão que aparece à direita em (1) tem sido usada, na sequência didática, para representar o quê?
- Qual o significado que você atribui ao limite que aparece na definição?
- No wxMaxima, a integral definida é calculada pelo comando: “integrate(função,variável,x inicial,x final)”. Use-o com as funções da questão 60. Compare os resultados com os obtidos por você naquele exercício. Comente.

64. Para a função $f(x) = x^2 + 1$, encontre um valor aproximado para $\int_0^4 f(x) dx$. Qual a interpretação que você atribui a essa integral?

65. Seja a função $f(x) = x^2 - 9$ no intervalo $[0, 3]$. Sejam S_n e s_n as sequências das somas superiores e inferiores, respectivamente, no intervalo dado.

- Porque os retângulos de S_n estão no interior da região e não *circunscritos*, como no caso anterior? (você pode usar o comando 9)
- Qual a área aproximada da região em destaque?
- Porque S_n e s_n são negativas?

- d) Qual a relação entre a área e a integral?
- e) Usando a notação de integral como você escreve a área sob o gráfico da função $f(x) = x^2 - 9$ no intervalo $[0,3]$.

66. A imagem seguinte é do Ginásio de Esportes Belin Carolo, local cedido pela Prefeitura Municipal de Campo Mourão para implantação da instituição, que é, hoje, a UTFPR-CM.



- a) Pense e descreva um método que calcule a área da cobertura do ginásio a partir da foto mostrada.
 - b) Como você poderia usar seus conhecimentos de integral definida para calcular essa área? O que seria necessário? Como obtê-la? Explique.
 - c) Use a integral definida e calcule a área da cobertura do Ginásio de Esportes.
67. **Elabore um Mapa Conceitual em que apareçam os conceitos: limite, convergência, sequência, função, área, retângulos, soma de Riemann, Integral Definida.**

10.1 Análise *a priori* das atividades componentes da parte introdutória

A análise será centrada apenas nas atividades que compõem a parte introdutória, novas no contexto desta tese. As demais já foram analisadas em seções anteriores e as modificações sugeridas no enunciado de alguma delas também já foram exploradas. Sendo assim, considero irrelevante refazê-las.

As atividades constantes na parte introdutória visam minimizar as dificuldades analisadas na aplicação da sequência didática proposta inicialmente, e discutidas nas seções de 4 a 8, em relação a conceitos referentes à teoria de funções, como variável, expressão, e o próprio conceito de função, e com respeito à determinação de padrões. Para tanto, priorizou-se atividades que exigiam a operação cognitiva de conversão. Além disso, buscou-se o enquadramento das tarefas em relação às situações de ação e formulação de que trata a TSD, a fim de que o aluno, tendo um papel ativo no desenvolvimento das atividades, caminhasse em direção ao conhecimento sistematizado.

Pretende-se que, trabalhando com material manipulável, o aluno possa dar significação aos conceitos de variável dependente e independente, expressão, função e sequência. É esperado que no experimento, ele associe a quantidade de areia (número de copos-medida) à variável independente, e a altura da areia no recipiente, à variável dependente.

É possível, ainda, que o aluno inclua a velocidade de crescimento da altura da areia como variável. Isso pode fazer com que o aluno esboce o gráfico da relação entre as variáveis (altura X número de copos) como uma linha horizontal, pensando na velocidade constante.

Em relação à descrição do comportamento da altura da areia em língua natural, é provável que o aluno faça afirmações do tipo “a altura vai crescer lentamente no início, depois aumenta a velocidade, e volta a diminuir”. Para este tipo de afirmação, o gráfico esboçado, antes de iniciar o experimento, deve ter uma inclinação menor, passar para uma maior inclinação, e então, diminuir. Esse comportamento deve estar retratado no gráfico elaborado com os dados do experimento.

Esse tipo de atividade pode ser classificado como uma tarefa de compreensão. Os alunos deverão fazer a conversão do registro em língua natural para o registro gráfico, o que é nada fácil, especialmente se o aluno não realizar rotineiramente

atividades como essa. Dessa forma, tarefas de compreensão são necessárias para o reconhecimento dos objetos matemáticos.


A similaridade entre a descrição do comportamento da altura da areia por meio da língua natural, o esboço do gráfico antes e depois do experimento, requeridos nessas atividades, podem indicar a compreensão do papel do gráfico como representante da função a ele associada, assim como, a adequada interpretação.

Escrever a expressão algébrica da função representada graficamente, e descrita verbalmente, pode permitir ao aluno, a compreensão da possibilidade de várias representações para um mesmo objeto, sem, no entanto, mudar o objeto. Sendo assim, espera-se que, partindo da complementaridade de informações proporcionadas pelas conversões requeridas nas atividades, o aluno consiga o acesso ao objeto função.

As figuras seguintes (Figura 87, Figura 89, Figura 91, Figura 93, Figura 95, Figura 97) mostram algumas possíveis conversões a partir dos dados que podem ser obtidos no experimento, de acordo com o formato do recipiente, com suas representações nas formas: numérica (em tabelas), gráfica e algébrica⁸⁷. Para compreender melhor as possibilidades de funções para os mesmos dados, também são apresentadas as telas do Geogebra com as respectivas outras funções (Figura 88, Figura 90, Figura 92, Figura 94, Figura 96, Figura 98). Nesse caso, configura-se, uma vez mais, a possibilidade de uma exploração mais profunda acerca de um mesmo objeto matemático proporcionado pelo uso do aplicativo Geogebra. Um dos comandos que, provavelmente, os alunos explorarão, especialmente se forem incentivados, é o da “regressão logística”, pelo fato de ele retornar uma função exponencial cujo gráfico é um tanto diferente do que, usualmente, é trabalhado no Ensino Médio e na disciplina de CDI. Além disso, seu uso fica a critério de disciplinas mais específicas dos cursos de Engenharia.

A parte introdutória I insiste no uso da representação em língua natural como um importante meio para compreender e converter as representações algébrica e gráfica. Segundo a Teoria de Registro de Representação Semiótica de Duval, é preciso ter domínio sobre as representações, ou seja, coordenar registros, para poder convertê-las mais facilmente.

⁸⁷ Na representação algébrica optou-se por escrever, no quadro, apenas uma das várias possibilidades.

				FORMAS DE REPRESENTAÇÃO		ALGÉBRICA
TABELA						
n. de copos-medida	Altura da areia					
1	1					
2	1,4					
3	1,9					
4	2,4					
5	2,8					
6	3,3					
7	3,7					
8	4,3					
9	4,7					
10	5,1					
11	5,6					
12	6,2					
13	6,6					
14	7,2					
15	7,8					
16	8,8					
17	9,5					

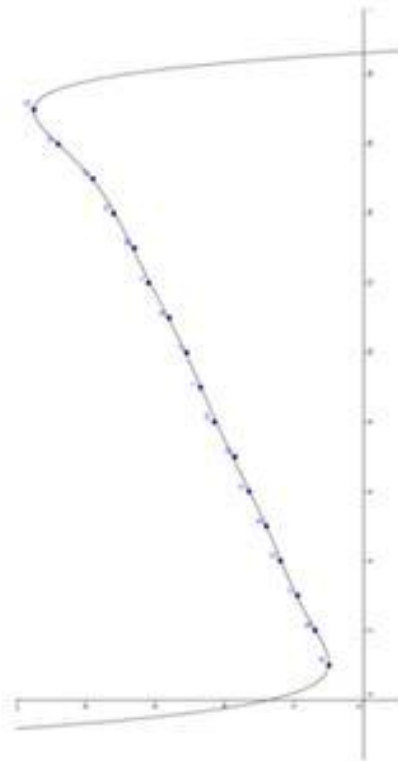


Figura 87: Representações Numérica, Gráfica e Algébrica dos dados do recipiente circular

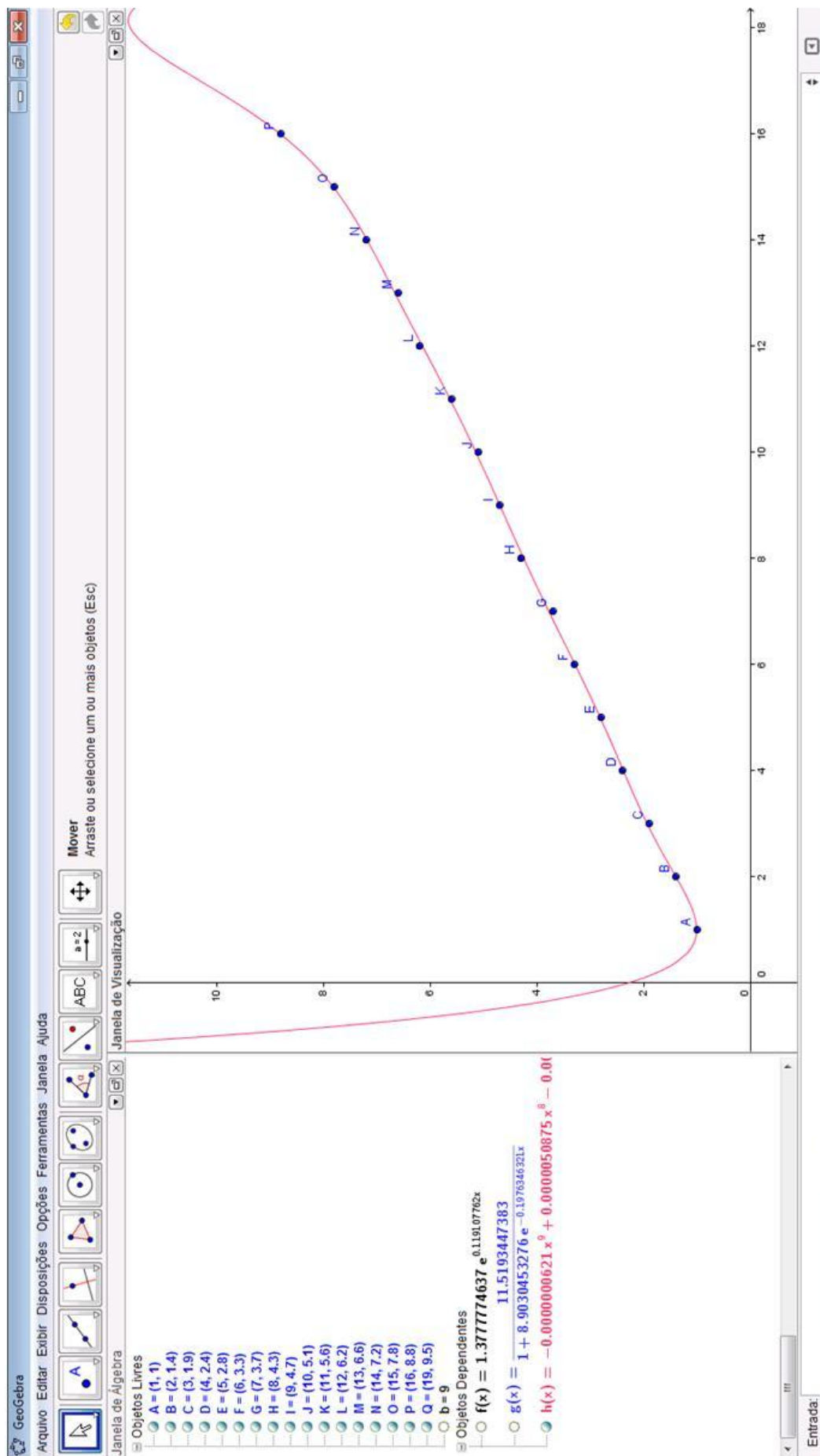


Figura 88: Tela do Geogebra com dados do recipiente circular

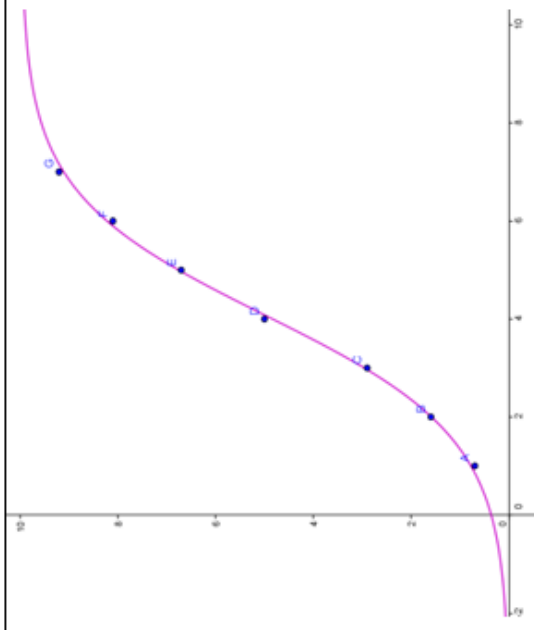
		FORMAS DE REPRESENTAÇÃO		ALGÉBRICA
TABELA				$e(x) = \frac{9.97}{1 + 26.35e^{-0.8x}}$
n. de copos-medida	Altura da areia			
1	0.7			
2	1.6			
3	2.9			
4	5.0			
5	6.7			
6	8.1			
7	9.2			



Figura 89: Representações Numérica, Gráfica e Algébrica para os dados do recipiente semi-circular

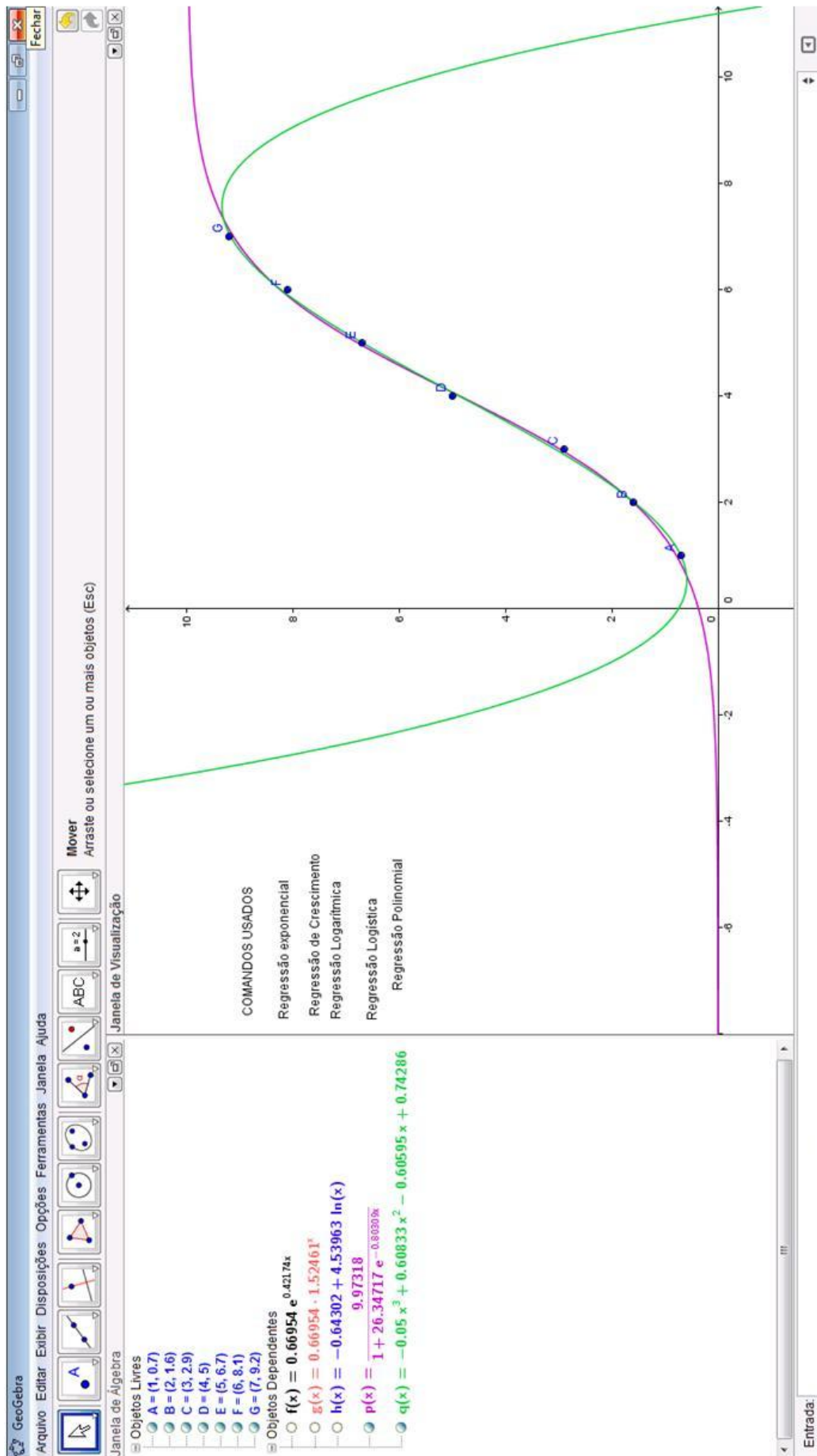


Figura 90: Tela do Geogebra com dados do recipiente semi-circular

TABELA		FORMAS DE REPRESENTAÇÃO	ALGÉBRICA
n. de copos-medida	Altura da areia		
1	1.8		$p(x) = 1.05 \times 10^{-7}x^8 - 3.9 \times 10^{-5}x^7 + 1.05 \times 10^{-2}x^6 - 1.5 \times 10^{-2}x^3 + 1.27 \times 10^{-1}x^4 - 0.62x^2 + 1.69x^2 - 1.34x + 1.96$
2	2.7		
3	3.5		
4	4.5		
5	5.0		
6	5.6		
7	6.3		
8	6.7		
9	7.2		
10	7.6		
11	8.2		
12	8.7		
13	9.2		

Figura 91: Representações Numérica, Gráfica e Algébrica para os dados do recipiente trapezoidal

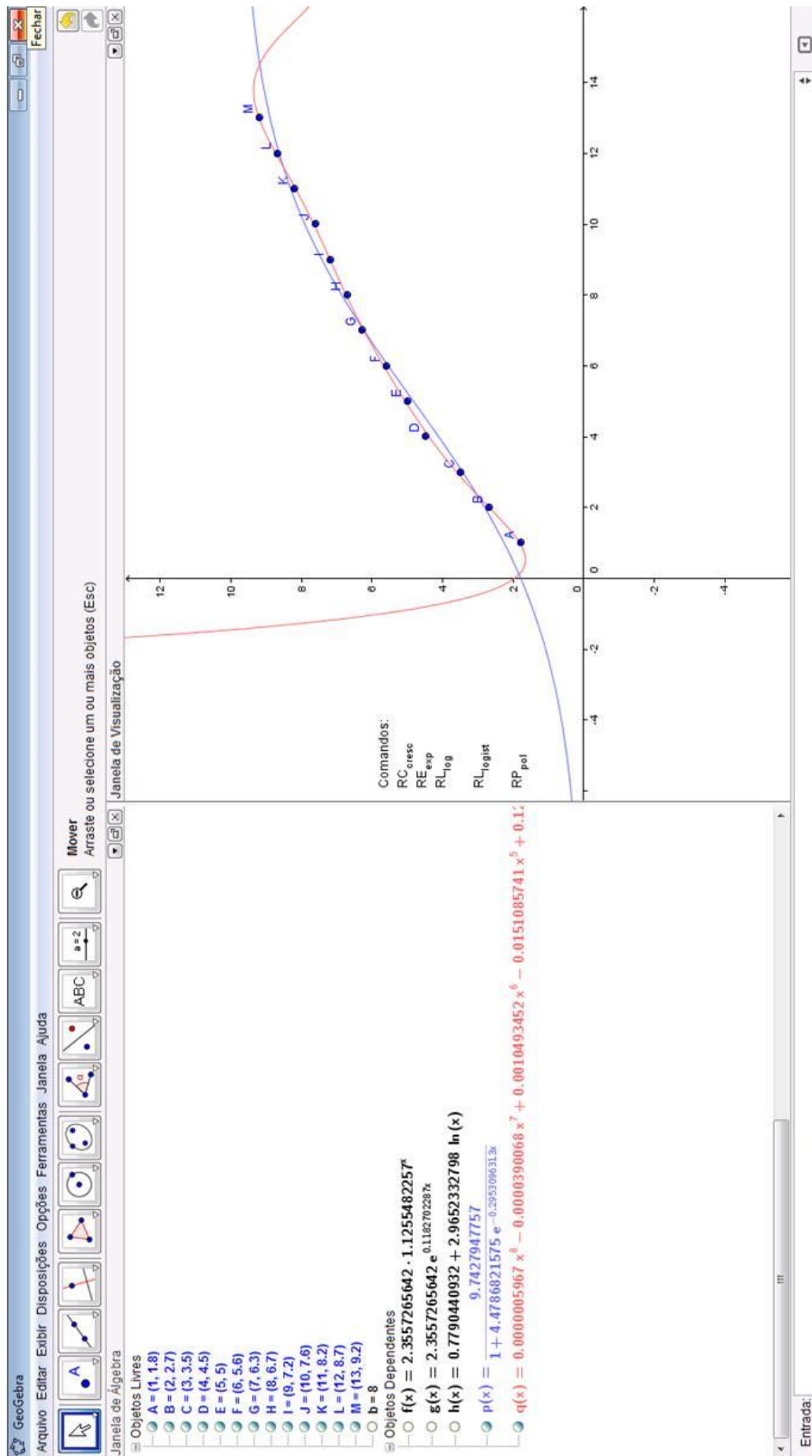


Figura 92: Tela do Geogebra com dados do recipiente trapezoidal


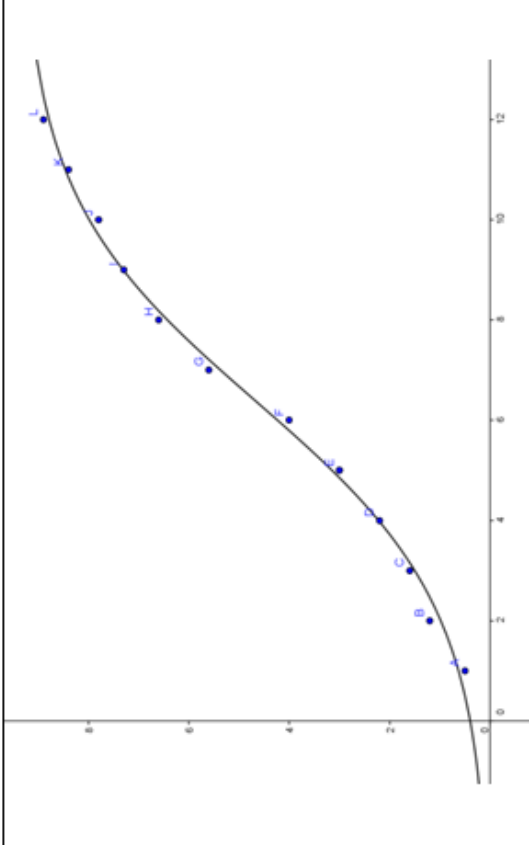
			
FORMAS DE REPRESENTAÇÃO			
TABELA		GRÁFICA	
n. de copos-medida	Altura da areia		
1	0.5		
2	1.2		
3	1.6		
4	2.2		
5	3		
6	4		
7	5.6		
8	6.6		
9	7.3		
10	7.8		
11	8.4		
12	8.9		
		ALGÉBRICA	
		$f(x) = \frac{9.35}{1 + 22.67e^{-0.49x}}$	

Figura 93: Representações Numérica, Gráfica e Algébrica para os dados do recipiente ampulheta

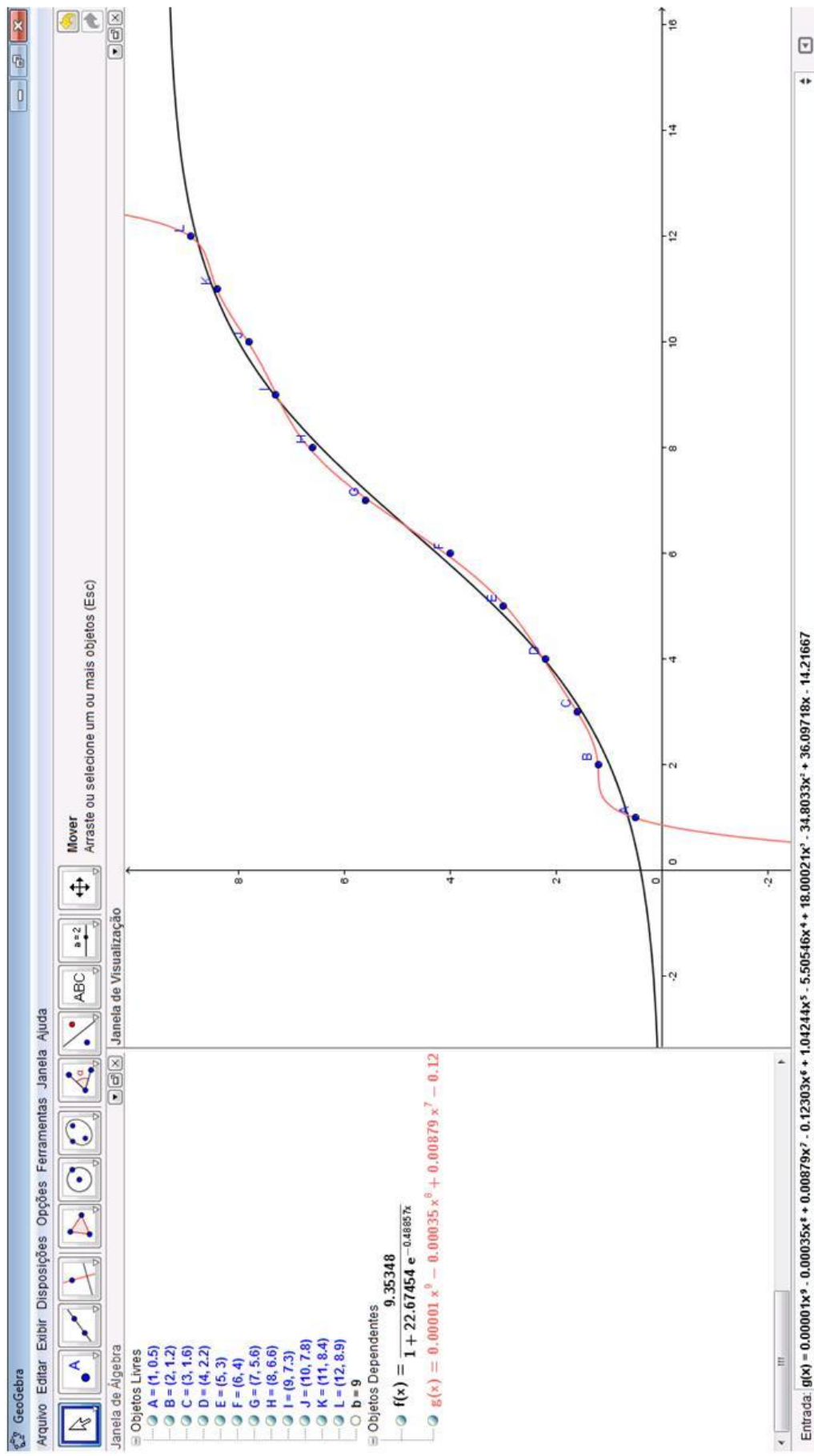


Figura 94: Tela do Geogebra com dados do recipiente ampolheta

TABELA		GRÁFICA	ALGÉBRICA
n. de copos-areia medida	Altura da areia		
1	0.8		$f(x) = 0,65x + 0,37$
2	1.8		
3	2.4		
4	3		
5	3.6		
6	4.4		
7	4.9		
8	5.5		
9	6.3		
10	6.8		
11	7.5		

Figura 95: Representações Numérica, Gráfica e Algébrica para os dados do recipiente

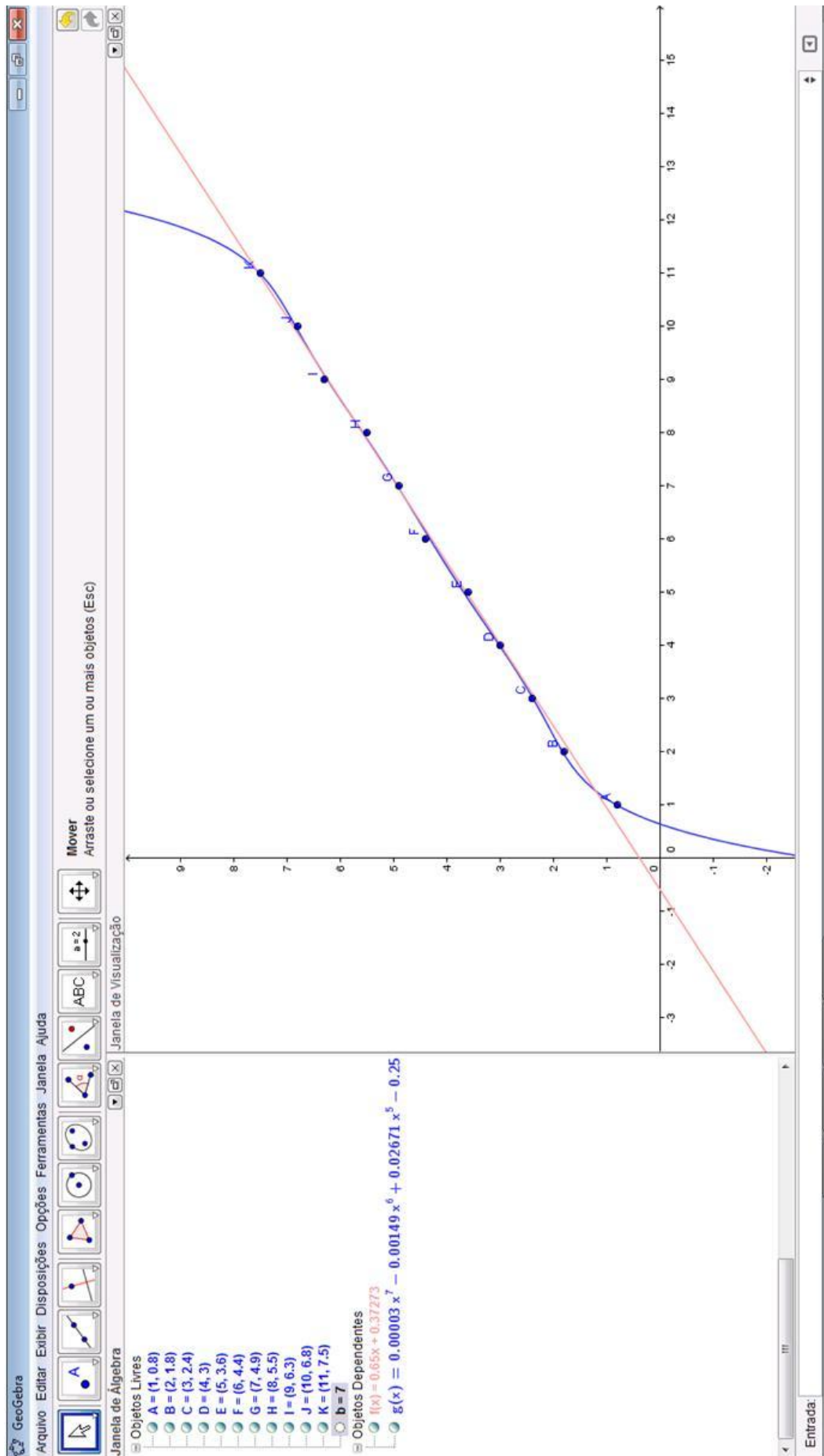


Figura 96: Tela do Geogebra com dados do recipiente retangular

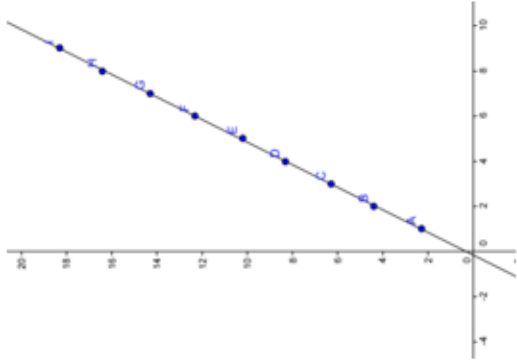
FORMAS DE REPRESENTAÇÃO	
TABELA	GRÁFICA
n. de copos-medida	Altura da areia
1	2.3
2	4.4
3	6.3
4	8.3
5	10.2
6	12.3
7	14.3
8	16.4
9	18.3
ALGÉBRICA	 $f(x) = 2x + 0.31$

Figura 97: Representações Numérica, Gráfica e Algébrica para os dados do recipiente retangular alto

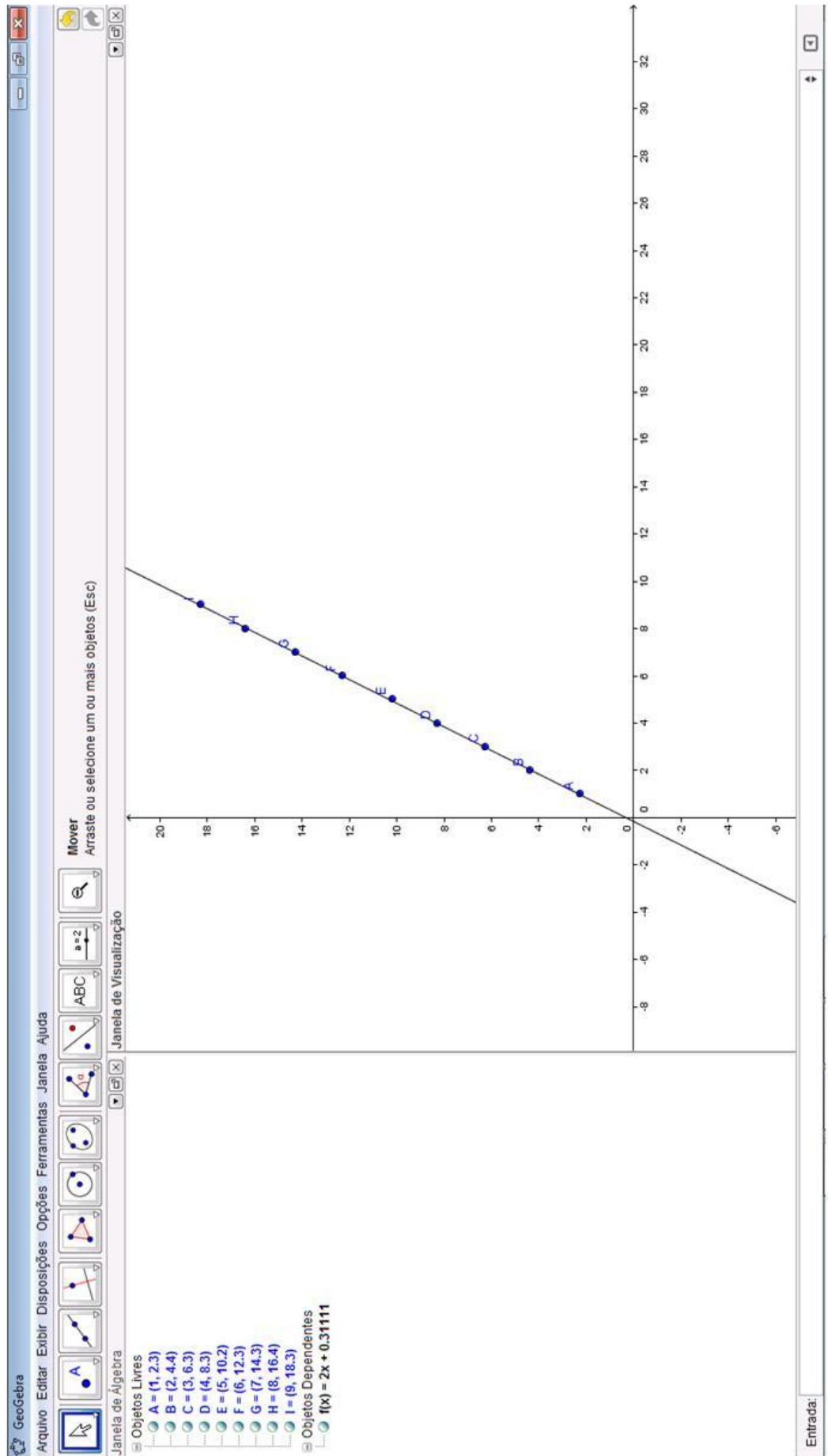


Figura 98: Tela do Geogebra com dados do recipiente retangular alto

As sequências exploradas na parte introdutória II, que inclui as questões de 9 a 14, objetivam estimular o aluno a observar as regularidades nos fenômenos matemáticos e transitar entre as várias representações.

As questões 9 e 10 foram propostas para que os alunos percebam a aplicabilidade das funções nos eventos cotidianos. É possível afirmar que os alunos apreciaram as questões da sequência didática inicial, que envolvia uma atividade relacionada a uma prática real, que nesse caso, foi o cálculo da área de um lago na cidade de Campo Mourão.

Na questão 9, a resolução consiste na conversão da representação em língua natural (RLN), que está num tipo de registro multifuncional, para as representações numérica (RN), gráfica (RG) e algébrica (RA), cujos registros são monofuncionais. A natureza do tipo de registro pode contribuir na dificuldade para realização da conversão. O Quadro 58 indica as conversões requeridas nesta questão. Neste caso, em particular, a representação numérica pode servir como representação intermediária tanto na conversão RLN para RG quanto na RLN para RA. Percebe-se que a transição RN para RG ou RN para RA, são, ainda, conversões em que o registro de saída é o numérico e o registro de chegada, é o gráfico e algébrico, respectivamente.

Em cada uma destas passagens, o nível de dificuldade é diferente, uma vez que depende da coordenação que o estudante tem em cada tipo de registro.

Enunciado (registro língua natural- registro de saída)

9. O preço de cada litro de gasolina vai se alterando ao longo do ano, de acordo com a situação econômica. Durante o mês de agosto de 2012, o preço médio da gasolina, em Campo Mourão-PR, foi de R\$ 2,69/litro. Estima-se que esse valor se mantenha para o mês de setembro/2012. O Sr. Claudinei resolveu estimar quanto gastaria, em média, durante o mês de setembro. Vamos ajudá-lo?

9.1 O preço total a pagar depende do número de litros de gasolina adquiridos. Elabore uma tabela que traduza, em alguns casos concretos, a relação entre as duas variáveis.

9.2 Para este exemplo, quem é a variável dependente? E a independente? Escreva.

9.3 Represente graficamente a relação entre o número de litros de gasolina adquiridos e o preço total a pagar pelo Sr Claudinei.

9.4 Quanto pagaria o Sr Claudinei pelo combustível, se adquirisse 1200 litros durante o mês de setembro? Justifique.

9.5 Encontre uma expressão geral que permita calcular o preço total a pagar por qualquer número de litros de gasolina, nesta situação

**REGISTRO DE CHEGADA**

NUMÉRICO		GRÁFICO	ALGÉBRICO
Litros	Preço		$y = 2,69x$
1	2,69		
2	5,38		
⋮	⋮		
10	26,90		
1200	3.228,00		

Quadro 58: Conversões requeridas na questão 9

A questão 10 é similar à 9, porém tem uma informação adicional. O consumidor possui um cartão desconto de R\$ 20,00, o que faz com que o preço a pagar seja zero para um consumo de até 7,43 litros. Pretende-se que o aluno perceba que este crédito extra, produz uma alteração na representação algébrica anterior para $y = 2,69x - 20$, e uma translação para baixo no gráfico mostrado no Quadro 58.

Na questão 11 são requeridas conversões do registro gráfico para registro algébrico, usando a representação numérica como intermediária neste processo. Esta

conversão pode não ser facilmente realizada pelo aluno, já que não é congruente, pois, no plano cartesiano, um ponto requer duas coordenadas no registro numérico e cuja relação carece de duas variáveis no registro algébrico, isto é, não há univocidade entre as unidades significativas dos dois registros.

Como exemplo, a Figura 99 indica as conversões requeridas na figura 2 da questão 11. As linhas pontilhadas indicam um possível caminho para a realização da conversão da representação no registro gráfico para a representação no registro algébrico.

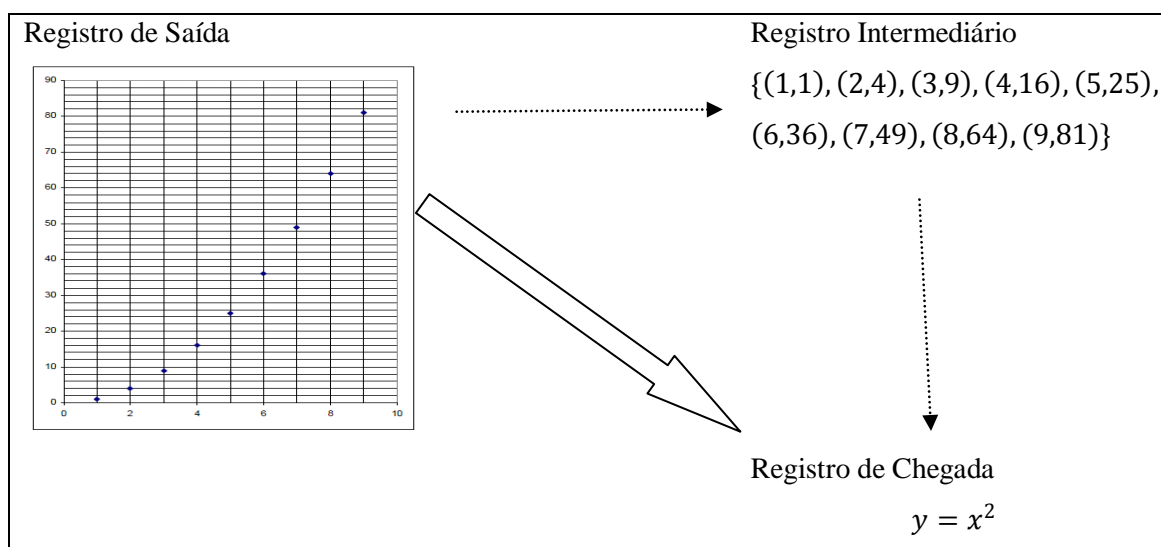


Figura 99: Exemplo de Conversão de Representação na questão 11.

A questão 12 requer a conversão da representação numérica para a representação algébrica, na descoberta dos padrões nas sequências dadas. Essa conversão nem sempre é congruente, como indicado no Quadro 59, o que aumenta o custo cognitivo para o aluno.

Converter (5, 25, 125, 625, ...) em $a_n = 5^n$						
Unidade Significante Registro de Saída (numérico)	Unidade Significante Registro de Chegada (algébrico)	Segmentação comparativa	Critérios de Congruência			Conclusão
			CS	US	OR	
Número: 5,25,125...	5^n	Combinada	Sim	Não	Sim	Não congruente
(...,...,)	$a_n =$	Combinada	Sim	Não	Sim	

Quadro 59: Exemplo de análise de congruência na questão 12

Na questão 13, requer-se a conversão da representação icônica/figural para a algébrica, que pode usar as representações em língua natural ou numérica como representações intermediárias. Além da conversão, a atividade exige um tratamento na representação figural, pois solicita que o estudante desenhe mais algumas figuras, seguindo o padrão percebido. O tratamento figural e a conversão da representação figural para a numérica e da numérica para a algébrica estão apresentados na Figura 100.

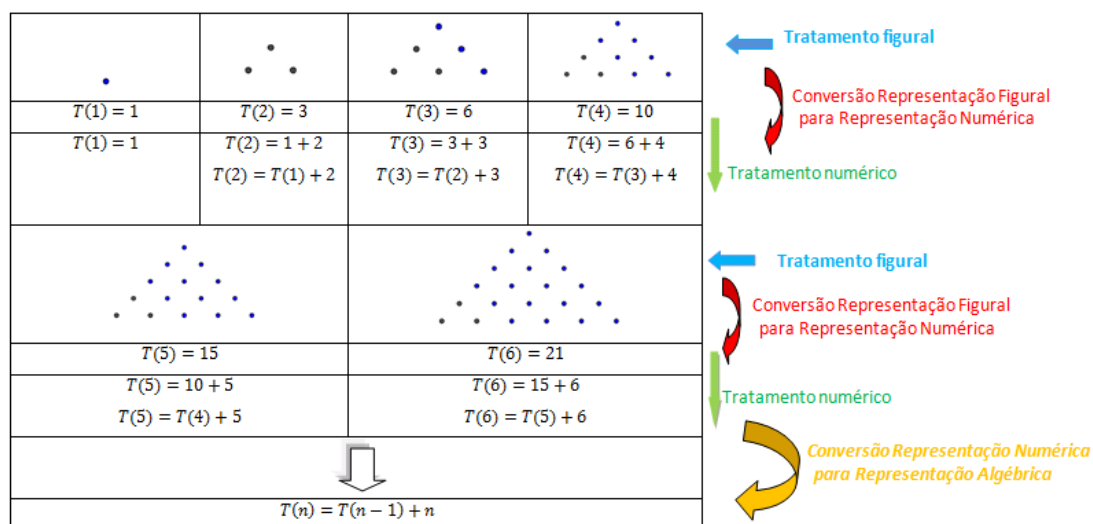


Figura 100: Tratamento e conversão para os números triangulares da questão 13

A questão 14 é uma provocação que pretende chamar a atenção para a notação do somatório, que é tratada na sequência didática. Mesmo assim, a atividade requer a conversão da representação língua natural para a numérica, com o tratamento numérico para a soma.

Como já mencionado no início desta análise *a priori*, as demais questões da sequência didática reformulada, por já terem sido analisadas em seções anteriores, não serão neste momento. A intenção é que, a parte introdutória aqui analisada, retome alguns conceitos mínimos fundamentais para a compreensão do conceito de integral definida. Também vale reafirmar que esta parte pretende, também, auxiliar o professor no trabalho direcionado à autonomia discente, sem, no entanto, subestimar o papel docente frente à busca do conhecimento pelo discente, como já reiterado na síntese realizada sobre a Teoria das Situações Didáticas.

Atualmente, a viabilidade da parte da sequência didática reformulada, a partir da questão 15, está sendo avaliada nas aulas de CDI ministradas pela pesquisadora. No entanto, os resultados e outras possíveis reformulações não constam nesta tese.

Conclusão

Esta tese teve por objetivos identificar as contribuições da utilização de Mapas Conceituais para acompanhar o processo de conceitualização da Integral de Riemann para funções de uma variável real, bem como, identificar a contribuição da teoria de registros de representação semiótica, aliada à teoria das situações didáticas para a conceitualização da Integral Definida. Para tanto, foi elaborada uma sequência didática que abordou alguns pré-requisitos necessários à compreensão da Integral de Riemann, referida, em todo o texto, de Integral Definida. Foram assim considerados os conteúdos: notação de limites e de somatório e o cálculo aproximado de áreas pela Soma de Riemann. Considerou-se, ainda, que, o estudante enquanto sujeito ativo, em todos os momentos, como preconizado pela Teoria das Situações Didáticas, exercia um papel preponderante em sua aprendizagem. Além disso, foi levado em consideração o aspecto cognitivo da construção de conceitos matemáticos. Para tanto, foram utilizadas, na proposição da sequência, tarefas que exigiam o tratamento e conversão de representações nos e entre os registros algébrico, em língua natural e o gráfico, conforme indica a Teoria dos Registros de Representação Semiótica.

Ao final, é possível apontar as seguintes contribuições dos Mapas Conceituais para o acompanhamento da aprendizagem discente, em relação ao conceito de Integral Definida:

1. Os Mapas Conceituais permitem visualizar os conceitos não compreendidos satisfatoriamente (ou mal elaborados).

Nas análises didáticas dos Mapas Conceituais (seções 4.16, 5.9, 6.8, 8.8), foram discutidas inconsistências conceituais e falhas inerentes à aprendizagem, que puderam ser percebidas pela simples observação do diagrama.

Como exemplo, na seção 4.16, foi observado que havia alunos que: associaram a convergência de uma sequência ao fato dela ser finita; confundiram o sentido das palavras convergência e contínua; usaram os termos função e sequência como sinônimos. Estes mal entendidos podem ocasionar obstáculos didáticos para as aulas de Cálculo. Um aluno pode deduzir, por exemplo, que toda função contínua tem um limite, já que as palavras contínua e convergente foram confundidas, e ser convergente implica, necessariamente, em ter um limite.

Na seção 5.9, observou-se que os alunos não acrescentaram ligações nem conceitos nos Mapas Conceituais. Entretanto, as atividades envolveram o conceito de somatória de termos de uma sequência, o que é relevante para a compreensão do conceito de integral definida. Isto pode indicar que os alunos não perceberam conexão com a parte A, que tratou da convergência de sequências. Com isso, como foi solicitado o complemento do mapa, acrescentando os conceitos trabalhados na seção, eles não conseguiram fazê-lo. Ou ainda, a não inclusão da somatória nos mapas, pode indicar que as atividades ficaram meramente em nível mecânico, e não foram assimiladas pelos discentes.

Mesmo com a possibilidade de escrever fórmulas matemáticas no *software Cmap Tools*, os alunos não representaram a convergência de sequências usando a notação de limites, o que indica dificuldade para realizar tal representação na prática, ou seja, conversão da língua natural para a representação algébrica.

2. Os Mapas Conceituais permitem identificar concepções que podem se tornar obstáculos ontogenéticos.

No mapa conceitual, o conceito “sequência convergente” mostra uma relação com o conceito “ser finito”, o que indica a concepção de infinito: algo finito, porém grande. Tais conceitos e esta conexão disposta no mapa refletem a dificuldade histórica no manejo do “infinito”. O infinito visto como algo finito e inalcançável não é mais aplicado no desenvolvimento da Matemática. Esta concepção ainda apareceu em outro mapa, em que se afirmava que “a soma de Riemann é a quantidade de retângulos necessários para fechar toda a área”. Essa concepção de infinito potencial pode atrapalhar a compreensão do conceito de integral definida.

3. Os Mapas Conceituais permitem confrontar os conceitos-chave de professor e aluno.

Isto foi identificado nas seções 5.9 e 7.7, em que os conceitos série e soma de Riemann não foram contemplados nos mapas nos momentos esperados pela pesquisadora. Na prática, em sala de aula, isso pode prejudicar o planejamento docente subsequente, uma vez que o professor pode planejar atividades que necessitem de

conceitos anteriores, mas que ainda não foram compreendidos, efetivamente, pelo aluno.

4. Os Mapas Conceituais permitem avaliar o planejamento docente, tendo em vista os objetivos e metodologia de ensino.

Novamente, este apontamento surgiu na seção 5.9 e foi reiterado na seção 7.7. Pretendeu-se que, ao finalizar as resoluções das atividades apresentadas na seção 5 (parte B da sequência), os alunos tivessem compreendido o uso da notação sigma, para que esta notação pudesse ser usada espontaneamente na parte C da sequência. Porém, isto não aconteceu de forma satisfatória.

Na seção 7, pretendeu-se que o aluno compreendesse a soma de Riemann como um método capaz de determinar uma área por meio da aproximação da soma de áreas de retângulos, para compreender, mais facilmente, o conceito de Integral Definida. Contudo, as atividades parecem não ter proporcionado tal abstração. Na prática em sala de aula, o professor pode oferecer mais tarefas com esta finalidade.

Em relação à metodologia de ensino, na seção 4.16 foi possível perceber a vantagem de usar o diálogo entre alunos como aprimoramento da aprendizagem, haja vista, as alterações percebidas nos mapas conceituais analisados.

O público-alvo desta pesquisa foi alunos de graduação. Esse fator não diminuiu as dificuldades percebidas. A primeira delas, foi a não leitura dos comandos, talvez pelo próprio modo como os exercícios têm sido tratados na educação escolar, muitas vezes sem sentido e sem requerer o raciocínio e observação do aluno. Percebeu-se também que:

- As janelas de álgebra e gráfica do Geogebra, assim como, os resultados do wxMaxima, foram determinantes para a compreensão do conceito;
- Persistem dificuldades em conteúdos tratados no Ensino Fundamental, como a elaboração de tabelas e operações com frações e potências de 10;
- A complexidade em algebrizar situações e estabelecer padrões, por parte dos alunos.

Em relação à contribuição das teorias de Registro de Representação Semiótica (TRRS) e das Situações Didáticas (TSD) para a conceitualização da integral definida, foi possível fazer os seguintes apontamentos:

1. A TSD estimula o docente a atribuir maior autonomia ao estudante, mesmo que isso o impeça de dar respostas prontas;
2. A TSD permite aulas mais dinâmicas, mais centradas no conteúdo que se pretende ensinar, justamente por atribuir ao aluno maior responsabilidade perante sua aquisição de conhecimento;
3. A TSD incentiva o discente a investigar de maneira mais aprofundada os assuntos em estudo;
4. A TRRS possibilita que o aluno visualize várias características de um mesmo objeto, por meio das diversas representações, e confronte-as para ter acesso aos objetos matemáticos.
5. A utilização do registro de representação em língua natural contribui para que o aluno expresse a significação atribuída ao que está em estudo e, ao mesmo tempo, permite que o professor descubra se professor e aluno atribuem o mesmo significado para os significantes.

Além do que já foi citado, há outros apontamentos que podem ser dados como conclusão, advindos dos protocolos discentes:

1. **O estudante de Cálculo 1 precisa explorar para aprender:** pouco adianta o professor expor o conteúdo se não proporcionar atividades em que os alunos investiguem aquele assunto de forma autônoma.

É o caso em que o aluno deveria usar a notação de limite para representar a convergência de uma sequência (tarefa 2 da parte A): nenhum aluno conseguiu fazê-lo, nem ao menos esboçar uma representação, mesmo que todos já tivessem estudado o tema. O mesmo vale para a tarefa 13 – parte A, que solicitava criar uma sequência convergente. De início nenhum aluno conseguiu associar que a convergência de uma sequência requeria a existência de um limite no infinito.

2. **Urge a aproximação entre as pesquisas acadêmicas e a sua utilização em sala de aula:** Nem sempre o professor se dispõe a pesquisar atividades que possam fazer os alunos pensarem um pouco mais, tornarem-se mais ativos frente à sua aprendizagem, porque isso requer tempo. Na maioria das vezes, o elevado número de aulas não permite que o professor seja, também, um pesquisador.

É importante sintetizar as pesquisas existentes para os diversos conteúdos da matemática que, individualmente, apresentaram inúmeros benefícios, mas que nem sempre chegam à sala de aula porque, geralmente, o professor não dispõe de muito tempo para esta busca, compreensão e síntese de informações. Esta é uma sugestão para futuras pesquisas.

3. É tempo do professor de Cálculo rever sua metodologia e inserir, mesmo que aos poucos, o diálogo e a investigação nas aulas, envolvendo todos os alunos.

Na aplicação das atividades percebeu-se que muitos alunos sentiam-se motivados pelo fato de estarem conversando sobre as atividades com alguém que, a princípio, era considerado do mesmo nível de conhecimento. Esta possibilidade fazia com que os alunos sentissem maior autoconfiança ao tentar aprender: cada um a seu tempo, e sempre.

4. É importante estimular o estudante a usar o registro em língua natural para demonstrar seu conhecimento matemático.

Pela aplicação percebeu-se grande dificuldade em escrever, usando a língua natural, a língua portuguesa, os resultados das suas observações matemáticas. Acreditamos que isso se deve à insegurança ou falta de hábito. Outras muitas vezes, os alunos sabiam como escrever o que estavam pensando, mas não sabiam escrevê-lo com a representação algébrica.

5. A diversidade de registros contribui para a aprendizagem em Cálculo, por consolidar a distinção entre o objeto matemático em estudo e a sua representação.

Este apontamento foi claramente percebido quando os alunos usaram o *software* Geogebra para “ver” a partir de qual termo uma sequência estava inteiramente contida em uma faixa. Testaram isso no *software* wxMaxima cuja representação é

essencialmente numérica/algébrica, e voltaram para o Geogebra para visualizar graficamente e observar os pares ordenados na janela de álgebra.

A definição de convergência apresentada na tarefa 7-A foi difícil de ser compreendida, mas a convergência percebida graficamente, foi fácil, assim como foi fácil enunciar, em língua natural, um critério de convergência próprio. O uso simultâneo de vários registros pode proporcionar a ancoragem necessária para a aprendizagem dos conceitos de Cálculo.

Cabe ressaltar que a diversidade de registros já está contemplada nas orientações para o ensino da Matemática em nível médio. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) para o Ensino Médio apresentam três competências como metas a serem desenvolvidas na área de Ciências da Natureza, área a qual a Matemática pertence. São elas: Representação e Comunicação, Investigação e Compreensão, Contextualização Sócio-cultural.

Para exemplificar, em relação à Representação e Comunicação na Matemática, os PCNs sugerem:

- Ler e interpretar dados ou informações apresentados em diferentes linguagens e representações, como tabelas, gráficos, esquemas, diagramas, árvores de possibilidades, fórmulas, equações ou representações geométricas.
- Traduzir uma situação dada em determinada linguagem para outra; por exemplo, transformar situações dadas em linguagem discursiva em esquemas, tabelas, gráficos, desenhos, fórmulas ou equações matemáticas e vice-versa, assim como transformar as linguagens mais específicas umas nas outras, como tabelas em gráficos ou equações.
- Selecionar diferentes formas para representar um dado ou conjunto de dados e informações, reconhecendo as vantagens e limites de cada uma delas; por exemplo, escolher entre uma equação, uma tabela ou um gráfico para representar uma dada variação ao longo do tempo, como a distribuição do consumo de energia elétrica em uma residência ou a classificação de equipes em um campeonato esportivo (BRASIL, 2002, p.111)

Indica-se, então, ações nos cursos de formação de professores de Matemática: que vincule os objetos matemáticos às suas diversas representações; que as conversões de registros sejam trabalhadas com mais eloquência, a fim de impulsionar os futuros professores a atuarem deste modo.

6. É preciso certificar-se que o aluno atribui a mesma significação que o professor aos termos técnicos.

Ao solicitar que os alunos escrevessem sobre a convergência, em especial quando a palavra “converge” apareceu numa definição intuitiva da parte A, alguns alunos procuraram o dicionário para compreendê-la. Caso o professor adote a postura de esclarecer todos os termos, isto pode ajudar na aprendizagem do conceito, já que, inúmeras palavras usadas no contexto da Matemática, possuem outras significações em outros contextos, como discutido na seção 4.15. Portanto, indica-se um tratamento mais detalhado dos principais termos matemáticos usados nas definições, com ênfase no entendimento desses, face ao que se quer definir, distinguindo-os de outros contextos, se for o caso.

7. O professor pode incentivar as produções de Mapas Conceituais para acompanhar a aprendizagem do seu aluno.

Criar os Mapas Conceituais não é fácil, exige trabalho, concentração, tempo, pesquisa, reflexão, atitudes que parecem estar cada vez mais escassas entre os jovens estudantes de Cálculo 1. Entretanto, esta tarefa, quando levada a sério, tem mostrado resultados animadores em termos de compreensão e diferenciação de conceitos. Acreditamos que vale a pena tentar!

Enfim, espera-se que os resultados alcançados nesta pesquisa possam contribuir com a Educação Matemática no sentido de avançar na compreensão das dificuldades para ensinar e aprender Cálculo, em especial, o conceito de Integral Definida, indicando uma alternativa capaz de ajudar o professor a avaliar a construção dos diversos conceitos em estudo.

Para os professores de Cálculo I, fica a proposta de uma sequência didática a ser utilizada para o conceito de Integral Definida, que pode ser usada tal como está, ou que pode ser alterada conforme a necessidade. A proposta final pode ser usada como uma sequência fechada ou subdividida ao longo do semestre letivo, a critério docente. Nesta perspectiva, ainda não foi aplicada, mas é o que a pesquisadora pretende executar em suas aulas de Cálculo I, nos próximos semestres.

Durante a pesquisa foram observados pontos que merecem atenção e aqui ficam como sugestão para trabalhos futuros, quais sejam:

1. Perceber quais os resultados obtidos na compreensão da definição formal de convergência (atividade 7-A) quando se trabalha, antes da apresentação da definição, os termos que nela aparecem, baseados na conversão de representações. Isto pode minimizar as dificuldades para aceitação da escrita algébrica.
2. Sintetizar as várias pesquisas para os vários assuntos do Cálculo I (funções, limites, derivadas e integral) de modo a produzir uma sequência didática que possa ser usada pelos professores de Cálculo I. Isto contribuirá para tornar as aulas mais dinâmicas, com maior participação discente.
3. Baseado na teoria dos Campos Conceituais, sugere-se verificar os conceitos-em-ação e teoremas-em-ação produzidos pelos alunos quando da resolução da sequência ora proposta. Isto pode contribuir para uma melhor adequação da proposta pedagógica para o ensino de “Integral Definida”.

Referências

- ADU-GYAMFI, K.; BOSSÉ, M. J.; FAULCONER, J. Assessing Understanding Through Reading and Writing in Mathematics. In: **International Journal for Mathematics Teaching and Learning**. November, 19th, 2010. Disponível em <http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/adugyamfi.pdf> Acesso em 20 jan. 2012.
- AHUMADA, W. E. Mapas Conceituais como instrumento para investigar a estrutura cognitiva em Física. **Dissertação** de Mestrado. Instituto de Física da UFRGS, 1983.
- ALMEIDA, C.; VISEU, F. Interpretação Gráfica das Derivadas de uma função por professores estagiários de Matemática. In: **Revista Portuguesa de Educação**. V.15, n.1, 2002, pp. 193-219. Disponível em <http://redalyc.uaemex.mx/src/inicio/ArtPdfRed.jsp?iCve=37415110> Acesso em 16 abr. 2011.
- ALVES, F.R.V. Aplicação da Sequência Fedathi no ensino intuitivo do Cálculo a Várias Variáveis. **Tese** (doutorado). Universidade Federal do Ceará, Faculdade de Educação, Programa de Pós-Graduação em Educação Brasileira, Fortaleza, 2011. Disponível em www.repositorio.ufc.br:8080/ri/bitstream/123456789/3166/1/2011_Tese_%20FRVALVES.pdf Acesso em 12 jan. 2013.
- AMADEI, F.L. O infinito: um obstáculo no estudo da Matemática. **Dissertação**. (Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo – SP, 2005. Disponível em www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/flavio_luiz_amadei.pdf Acesso em 16 fev. 2013.
- ANDRADE FILHO, B.M.; CARDOSO, M.C. Os registros de representação semiótica: aplicação no estudo das integrais indefinidas. **Anais do IV Simpósio sobre Formação de Professores**. Universidade do Sul de Santa Catarina, Tubarão – SC, 2012. Disponível em http://linguagem.unisul.br/paginas/ensino/pos/linguagem/simfop/artigos_IV%20sfp/_Bazilicio_Andrade.pdf Acesso em 25 jan. 2012.
- ANTON, Howard. **Cálculo: um novo horizonte**. 6ª Ed. Volume 1. Porto Alegre: Bookman, 2000.
- ARAÚJO, A. M. T.; MENEZES, C. S.; CURY, D. Um Ambiente Integrado para Apoiar a Avaliação da Aprendizagem Baseado em Mapas Conceituais. **Anais do Simpósio Brasileiro de Informática na Educação**, 2002. Disponível em <http://ceie-sbc.educacao.ws/pub/index.php/sbie/article/view/164/150> Acesso em 25 jan. 2012.
- ARAÚJO, N. R. S. *et al.* Mapas Conceituais como Estratégia de Avaliação. In: **Ciências Exatas e Tecnológicas**, Londrina, v.28, n.1, p.47-54. 2007.
- ARTIGUE, M. Didactical Design in Mathematics Education. In: WINSLOW, C. (Ed). **Nordic Research in Mathematics Education**. Proceedings from NORMA08, Copenhagen, Dinamarca, 2009b, pp.7-16.

ARTIGUE, M. Ingénierie didactique. In: BRUN, J. (org) **Didactique des Mathématiques**. Lousanne, Paris: 1996, p.243-274. Disponível em www.kleio.ch/HEP_VS/hepvsvideo/8_ingenierie_didactique_artigue.pdf Acesso em 18 jun. 2010.

ARTIGUE, M. Ingeniere Didactique: quel rôle dans la recherche didactique aujourd'hui? **Les dossiers des Sciences de l'Education**, 8, pp.59-72, 2002.

ARTIGUE, M. Ingeniería Didáctica. In: ARTIGUE, M.; DOUADY, R.; MORENO, L.; GÓMEZ, P. (Ed). **Ingeniería didáctica en educación matemática**, pp. 33-59, 1995. Disponível em http://ava.ead.ftc.br/conteudo/circuito1/pos_graduacao/Curso-Educacao_matematica_com_novas_tecnologias/04-didatica_da_matematica/engenharia_didatica.pdf Acesso em 18 jun. 2010.

ARTIGUE, M. L'Ingénierie Didactique comme thème d'étude. In: MARGOLINAS, C. *et al* (coord.). **En Amont et en aval des ingénieries didactiques**. XV^e école d'été de didactique dès mathématiques. Clermont-Ferrand: La Pensée Sauvage éditions, 2009, pp.15-26.

ARTIGUE, M. L'Ingenierie Didactique: Un essai de Synthese. In: MARGOLINAS, C. *et al* (coord.). **En Amont et en aval des ingénieries didactiques**. XV^e école d'été de didactique dès mathématiques. Clermont-Ferrand: La Pensée Sauvage éditions, 2009a, pp. 225-237.

ARTIGUE, M. La notion d'ingénierie didactique, um concept à refonder. In: MARGOLINAS, C. *et al* (coord.). **En Amont et en aval des ingénieries didactiques**. XV^e école d'été de didactique dès mathématiques. Clermont-Ferrand: La Pensée Sauvage éditions, 2009c.

ÁVILA, Geraldo. **Cálculo das funções de uma variável**. V.1, 7^a Ed. Rio de Janeiro: LTC, 2003.

BALACHEFF, N.; MARGOLINAS, C. Modèle de Connaissances pour le Calcul de Situations Didactiques. In: MERCIER, A.; MARGOLINAS, C. (ed). **Balises pour La Didactique des mathématiques**. France: La Pensée Sauvage, 2005, pp.75-106.

BARBOSA, M. L.; ALVES, Á. S.; JESUS, J. C. O.; BURNHAM, T. F. Mapas Conceituais na Avaliação da Aprendizagem Significativa. **Anais**. XVI Simpósio Nacional de Ensino de Física. 2005. Disponível em <http://www.sbf1.sbfisica.org.br/eventos/snef/xvi/sys/resumos/T0028-2.pdf> Acesso em 25 jan. 2012.

BARROSO, N. M. C. *et al*. Uma sequência de ensino para a introdução do conceito de integral de Riemann. **Anais IX ENEM**, 2008. Disponível em www.sbem.com.br/files/ix_enem/Comunicacao_Cientifica/Trabalhos/CC23187786391T.doc Acesso em 24 jan. 2012.

BARUFI, M. C. B. A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral. **Tese** (doutorado). Programa de Pós-Graduação em Educação. Faculdade de Educação. Universidade de São Paulo, São Paulo, 1999. Disponível em <http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48133/tde-06022004-105356/pt-br.php> Acesso em 10 mai.2012.

BASQUE, J.; PUDELKO, B.; LEGROS, D. Une expérience de construction de cartes conceptuelles dans un contexte de téléapprentissage universitaire. **Environnements Informatiques pour l'Apprentissage Humain**, Strasbourg, 2003. Disponível em <http://telearn.archives-ouvertes.fr/docs/00/19/06/74/PDF/basque4.pdf> Acesso em 20 nov. 2012.

BELTRÃO, M. E. P. Ensino de Cálculo pela modelagem matemática e aplicações – Teoria e Prática. **Tese** (doutorado). Programa de pós-Graduação em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009. <http://www.dominiopublico.gov.br/download/texto/cp101274.pdf> Acesso em 20 mar. 2011.

BERTOLUCCI, C.C. Noções de infinito matemático em adolescentes e adultos. **Dissertação** (mestrado). Programa de Pós-Graduação em Educação. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2009. Disponível em <http://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/16180/000698134.pdf?sequence=1> Acesso em 05 out. 2012.

BESSA JUNIOR, F.A. Uma abordagem do infinito no caminho da cardinalidade: um estudo endereçado aos professores de matemática do ensino básico. **Dissertação** (Mestrado Profissional). Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora-MG, 2011. Disponível em <http://www.ufjf.br/mestradoedumat/files/2011/10/Dissertacao-Bessa.pdf> Acesso em 04 out. 2012.

BESSOT, A. L'Ingenierie Didactique au Coeur de la Théorie des Situations. In: MARGOLINAS, C. *et al* (coord). Em amont et en aval des Ingénieries Didactiques. (XV^e école d'éte de didactique des mathématiques). **Recherches en didactique des mathématiques**. Clermont-Ferrand (Puy-de-Dôme): La Pensée Sauvage, 2009.

BLOCH, I. Quelques Apports de la Theorie des Situations a la Didactique des Mathematiques dans L'enseignement Secondaire et Superieur: Contribution à l'étude et à l'évolution de quelques concepts issus de la théorie des situations didactiques en didactique des mathématiques. **Thèse**. Université Paris 7 – Dennis Diderot. France, 2005. Disponível em http://hal.inria.fr/docs/00/06/60/42/PDF/Bloch_HDR.pdf Acesso em 13 jul 2012

BRANDT, C.F.; MORETTI, M.T. O papel dos registros de representação na compreensão do sistema de numeração decimal. **Educação Matemática Pesquisa**. São Paulo, 7(2), pp. 201-227, 2005. Disponível em <http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/4701/3269> Acesso em 16 fev. 2013.

BRASIL. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. **Orientações para as diretrizes curriculares dos cursos de graduação** (parecer n. 776/97). Conselho Nacional de Educação. 1997. Disponível em <http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/CES0776.pdf> Acesso em 13 jan. 2012.

BRASIL. Ministério da Educação. **PCN+ Ensino Médio: Orientações Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília: MEC/Semtec, 2002. Disponível em <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf> Acesso em 30 jan. 2013.

BRITO, E.O. **Dicionário de Matemática**. Porto Alegre: Editora Globo, 1972

- BROUSSEAU, G. Education et Didactique des mathématiques. **Educación matemática**. 2000, 12(1), pp.5-39. Disponível em hal.archives-ouvertes.fr/hal-00466260/fr/ Acesso em 15 fev. 2013.
- BROUSSEAU, G. **La Theorie des Situations Didactiques**. Cours donné lors de l'attribution à Guy Brousseau du titre de Docteur Honoris Causa de l'Université de Montréal. 1997 Disponível em http://math.unipa.it/~grim/brousseau_montreal_03.pdf ou em <http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2011/06/MONTREAL-archives-GB1.pdf> Acesso em 20 ago. 2012.
- BROUSSEAU, G. Le contrat didactique: le milieu. **Recherches en Didactique de Mathématiques**, 9(3), 1988, pp. 309-336. Disponível em http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/68/60/12/PDF/contrat_didactique_le_milieu.pdf Acesso em 16 fev. 2013.
- BROUSSEAU, G. Les erreurs des élèves en mathématiques: étude dans le cadre de La théorie des situations didactiques. **Petit x**, n.57, pp. 5-30, 2000-2001. Disponível em http://www-irem.ujf-grenoble.fr/revues/revue_x/fic/57/57x1.pdf Acesso em 16 fev. 2013.
- BROUSSEAU, G. Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. In J. Vanhamme & W. Vanhamme (Eds.), **La problématique et l'enseignement des mathématiques**. Comptes rendus de la XXVIIIe rencontre organisée par la Commission Internationale pour l'Etude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques, pp. 101-117, 1976. Louvain la Neuve Disponível em http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/55/02/56/PDF/Brousseau_1976_obstacles_et_problemes.pdf Acesso em 16 ago. 2012.
- BROUSSEAU, G. Situations Fondamentales et Processus Génétiques de la Statistique. In: MERCIER, A.; MARGOLINAS, C. (ed). **Balises pour La Didactique des mathématiques**. France: La Pensée Sauvage, 2003, pp.165-194.
- BROUSSEAU, G. **Théorie des Situations Didactiques**. La Pensée Sauvage, 1998.
- BROUSSEAU, G. Theorization des phénomènes d'enseignement des Mathématiques. **Thèse**. L'Université de Bordeaux I, 1986. Disponível em <http://tel.archives-ouvertes.fr/docs/00/50/92/25/PDF/TheseetAnnexesGBA.pdf> Acesso em 12 fev. 2012.
- BROUSSEAU, G. **Introdução ao estudo da teoria das situações didáticas**: conteúdos e métodos de ensino. Tradução de Camila Bogéa. São Paulo: Ática, 2008.
- BURAK, D.; BRANDT, C.F. Modelagem Matemática e Representação Semiótica: contribuições para o desenvolvimento do pensamento algébrico. **Zetetiké – FE – Unicamp** – v.18, n.33, jan/jun 2010, pp. 63-102. Disponível em www.fe.unicamp.br/revista/index.php/zetetike/article/view/2800/2464 Acesso em 03 ago.2013.
- CAMACHO, M.; DEPOOL, R. R.. Using *Derive* to Understand the Concepto Definitive Integral. **International Journal for Mathematics Teaching and Learning**, December, 2003, pp. 1-16. Disponível em <http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/matiascamacho.pdf> Acesso em 24 jan. 2012.

CAMPOS, E.F. Ingeniería Didáctica. **Cuadernos De Investigación Y Formación En Educación Matemática** , 2006, Año 1, Número 2 . Disponível em <http://cimm.ucr.ac.cr/cuadernos/cuaderno2/Cuadernos%202%20c%205.pdf> Acesso em 06 jul. 2010.

CAMPUZANO, J.C.P; FIGUEROA, A.R. Un análisis del uso de La tecnología para El cálculo de primitivas. **Números** – Revista de Didactica de las Matemáticas , v.77, julho de 2011,p.85-98. Disponível em http://www.sinewton.org/numeros/numeros/77/Articulos_04.pdf Acesso em 24 mai. 2012.

CAÑADA, L.O.; FUENTE, A.C. de la. El análisis de manuales em La Enseñanza de La Integral Definida. Séptimo Simposio de La Sociedad Española de investigación en Educación Matemática. **Anais**. 2003, p.277-288. Disponível em <http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2258670> Acesso em 24 mai. 2012.

CAÑAS, A. J., HILL, G., CARFF, R., SURI, N., LOTT, J., ESKRIDGE, T., ARROYO, M., CARVAJAL, R (2004).Cmaptools: a knowledge modeling and sharing environment. Concept Maps: Theory, Methodology, Technology 2004. **FirstInternationalConferenceonConceptMapping**, Pamplona, Espanha.

CARGNIN, C.; BARROS, R.M.O. O uso de Mapas Conceituais em aulas de Cálculo. In: II Jornada Brasileira do Grupo Euro Latino Americano. **Anais...** Ponta Grossa-Pr, 2012.

CARGNIN F., C.; SANCHES, D.G.R.; SANTOS, M.B.R.; GERETTI, L.V. O ensino de funções com o apoio de materiais manipuláveis. **Anais** da XIII Conferência Interamericanade Educação Matemática (CIAEM), Recife –PE, Brasil, 2011. Disponível em http://www.cimm.ucr.ac.cr/ocs/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/viewFile/2478/20 Acesso em 10 jan. 2012.

CARNEIRO, V. C. G. Engenharia didática: um referencial para ação investigativa e para formação de professores de matemática. **Zetetiké**. FE-Unicamp, v.13, n.23, jan/jun 2005, p.87-120.

CASTRO, M. R.; BOLITE FRANT, J. Argumentação e Educação Matemática.**Boletim GEPEM** – Rio de Janeiro, n.40, p.53-80, ago.2002.

CHAVES, M.I.A.; CARVALHO, H.C.Formalização do Conceito de Função no Ensino Médio: uma sequência de ensino-aprendizagem. **Anais...** VIII Encontro Nacional de Educação Matemática. Recife, Universidade Federal de Pernambuco, 2004. Disponível em <http://ufpa.br/npadc/gemm/documentos/docs/Formalizacao%20Conceito%20Funcao%200Ensino%20Medio.pdf> Acesso em 16 ago. 2012.

COLOMBO, J.A.A; FLORES, C.R.; MORETTI, M.T. Registros de representação semiótica nas pesquisas brasileiras em Educação Matemática: pontuando tendências. **ZETETIKÉ** – Cempem – FE – Unicamp – v. 16 – n. 29 – jan./jun. – 2008, pp. 41-72. Disponível em <http://www.fae.unicamp.br/revista/index.php/zetetike1/article/view/2397> Acesso em 20 jun.2012.

COMITI, C., GRENIER, D., MARGOLINAS, C. Niveaux de connaissances en jeu lors d'interactions en situation de classe et modélisation de phénomènes didactiques. In G. Arzac, J. Gréa, D. Grenier & A. Tiberghien (Eds.), **Différents types de savoirs et leur articulation** (pp. 92-113). Grenoble La Pensée Sauvage, 1995. Disponível em http://halshs.archives-ouvertes.fr/docs/00/42/10/07/PDF/1995_Comiti_Grenier_Margolinas.pdf Acesso em 23 jul. 2012.

CONTRERAS, A.; ORDÓÑEZ, L. Complejidad Ontosemiótica de un texto sobre la introducción a la integral definida. **Relime**. V.9, n.1, março de 2006, pp.65-84. Disponível em http://dialnet.unirioja.es/servlet/fichero_articulo?codigo=2096734&orden=73165 Acesso em 24 mai. 2012.

COSTA, I. M.; SALVADOR, J. A. Ensino de cálculo diferencial e integral:experiências no DM – UFSCar. VII EPEM. **Anais**. USP-SP, junho de 2004. Disponível em http://www.sbempaulista.org.br/epem/anais/grupos_trabalho/gdt04-Ivo&Jose.doc Acesso em 10 abr. 2011.

COURANT, R. **Cálculo Diferencial e Integral**. v.1. 1ª ed. (4ª reimpressão). Porto Alegre: Globo, 1965.

CUNHA, M.J.S., FERNANDES, E., OMAR, C. T. ; SILVA, N. V. Avaliação de Aprendizagem Significativa Usando Mapas Conceituais num Ambiente Cooperativo. Diversidade e Integração: Desafios para a Telemática na Educação, **XV Simpósio Brasileiro de Informática na Educação**, Manaus, Brasil, 2004.

CURY, H. N. Estilos de Aprendizagem de Estudantes de Engenharia. In: XXVIII Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia, 2000, Ouro Preto, **Anais**.CD-Rom. Disponível em <http://www.unibarretos.edu.br/v3/faculdade/imagens/nucleo-apoio-docente/ESTILOS%20DE%20APRENDIZAGEM%20ALUNOS%20ENG.pdf> Acesso em 10 mar. 2012.

CURY, H.N.; CASSOL, M. Análise de Erros em Cálculo: uma Pesquisa para Embasar Mudanças. **Acta Scientiae**. Canoas-RS. V.6, n.1, p.27-36, jan/jun 2004. Disponível em <http://www.ulbra.br/actascientiae/edicoesanteriores/Acta%20Scientiae%20v6%20n1%202004.pdf#page=26> Acesso em 10 mar. 2012.

D'AGORD, M. A negação lógica e a lógica do sujeito. **Ágora**, Rio de Janeiro, v.IX, n.2, jul/dez 2006, pp. 241-258. Disponível em <http://www.scielo.br/pdf/%0D/agora/v9n2/a06v9n2.pdf> Acesso em 24 ago. 2012.

D'AMBROSIO, U. Considerações sôbre o ensino atual da matemática. **Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática**, 2011, Ano 6, n.7, pp.219-224, Costa Rica. Disponível em <http://www.cimm.ucr.ac.cr/ojs/index.php/CIFEM/article/view/665/654> Acesso em 29 set. 2012.

DALL'ANESE, C. Argumentos e Metáforas conceituais para a taxa de variação. 2006. 131p. **Tese** (Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de

- São Paulo- PUCSP, São Paulo, 2006. Disponível em http://www.pucsp.br/pos/edmat/do/tese/claudio_dallanese.pdf Acesso em 21 abr. 2011.
- DALTO, J.O.; PAZUCH, V. O Conceito de Integral Definida como Área. **Anais da XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática**. Recife – Brasil, 2011. Disponível em http://cimm.ucr.ac.cr/ocs/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/viewFile/1501/1126 Acesso em 25 jan. 2012.
- DAMM, R.F. Registros de Representação. In: MACHADO, S.D.A.(org). **Educação Matemática: Uma (nova) introdução**. São Paulo: Educ, 2010, p.167-188.
- DELORME, F.; DELESTRE, N. PÉCUCHE, J.P. Évaluer l'apprenant à l'aide de cartes conceptuelles. **Technologies de l'Information et de la Connaissance dans l'Enseignement Supérieur et l'Industrie**, Compiègne : France, 2004. Disponível em http://edutice.archives-ouvertes.fr/docs/00/02/74/77/PDF/Delorme_Delettre_Pecuchet.pdf Acesso em 18 nov. 2012.
- DELORME, F.; DELESTRE, N. PÉCUCHE, J.P. Une analyse automatique de cartes conceptuelles por modéliser l'apprenant. **Environnements Informatiques pour l'Apprentissage Humain**, Montpellier, 2005, pp.455-460. Disponível em <http://telearn.archives-ouvertes.fr/docs/00/03/19/06/PDF/ac21.pdf> . Acesso em 18 nov.2012.
- DUTRA, Í. M. Mapas Conceituais no acompanhamento do processo de conceituação. **Tese (Doutorado)**. Centro de Pós-Graduação em Informática na Educação. UFRGS. 2006. Disponível em http://www6.ufrgs.br/leadcap/tese_italo Acesso em 10 ago. 2011.
- DUTRA, Í. M.; FAGUNDES, L.C.; CAÑAS, A. J. Uma proposta de uso dos mapas conceituais para um paradigma construtivista da formação de professores à distância. **Anais. X WIE**, 2004. Disponível em http://www.nuted.ufrgs.br/oficinas/criacao/mapas_prof.pdf Acesso em 25 jan. 2012.
- DUVAL, R. Abordagem Cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência. Trad. Mércles T. Moretti. **Revemat: R.Eletr. de Edu. Mat.** Florianópolis (SC), 7(1), pp.118-138, 2012.
- DUVAL, R. Basic Issues for Research in Mathematics Education. In:CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 24, 2000, Hiroshima. **Proceedings of the 24th PME**. Hiroshima: Department of Mathematics Education Hiroshima University, 2000. p. 55-69.
- DUVAL, R. Décrire, visualiser ou raisonner: Quels “apprentisages premiers” de l’activité mathématique? **Annales de didactique et sciences cognitives**. 2003, v.8, pp.13-62. Irem de Strasbourg.
- DUVAL, R. Entrer dans la maniere mathematique de penser... pour l’Algebre, et la developper. **Séminaire**. Uniban – Universidade Bandeirante de São Paulo, 2010.

- DUVAL, R. Gráficos e equações: articulação de dois registros. Trad.: Méricles T. Moretti. **Revemat: R.Eletr. de Edu. Mat.** Florianópolis (SC), 6(2), pp.96-112, 2011.
- DUVAL, R. **Semiósis e Pensamento Humano:** Registros semióticos e aprendizagens intelectuais. (fascículo I). Tradução de Lenio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.
- DUVAL, R. Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. **La Gaceta de La RSME**, v.9.1, 2006, pp.143-168.
- DUVAL, R. **Ver e ensinar Matemática de outra forma:** entrar no modo matemático de pensar: os registros de representação semiótica/organização Tania Campos. 1.ed. São Paulo: PROEM, 2011.
- FERRAZ, A. G.; GITIRANA, V. Uma análise do esboço de gráficos de função em livros textos de cálculo diferencial e integral. Enem. **Anais**. 2007. Disponível em http://www.sbem.com.br/files/ix_enem/Comunicacao_Cientifica/Trabalhos/CC11973595591T.doc Acesso em 11 abr. 2011.
- FERREIRA, C.C.; SANCHES, D.G.R.; BARROS, R.M. O ensino das funções com apoio de materiais manipuláveis. **Anais do V Congresso Internacional de Ensino da Matemática (CIEM)**. Universidade Luterana do Brasil, Canoas, RS, 2010.
- FERREIRA, P. E. A. Análise da produção escrita de professores da Educação Básica em questões não-rotineiras de matemática. 2009. 166f. **Dissertação** (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2009.
- FIAD, R.S.; BARROS, J.S. O papel da intercalação na reescrita. In: **Anais do 5º Encontro do Celsul**, Curitiba-PR, 2003, pp. 1207-1214. Disponível em <http://www.celsul.org.br/Encontros/05/pdf/169.pdf> Acesso em 24 ago. 2012.
- FLORES, C.R. Registros de Representação Semiótica em Matemática: história, epistemologia, aprendizagem. **BOLEMA**, v.19, n.26, 2006, Unesp De Rio Claro. Disponível em <http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/1853/161> Acesso em 21 jul. 2012.
- FLORES, C.R.; MORETTI, M.T. A articulação de registros semióticos para a aprendizagem: analisando a congruência semântica na Matemática e na Física. **Perspectivas da Educação Matemática**, Campo Grande, MS, v.1, n.1, p.25-40, jan/jun, s/d. Disponível em http://www.ced.ufsc.br/claudiaflores/PESQUISA/textos_publicados/A_ARTICULACA_O_DE_REGISTROS_SEMIOTICOS_PARA_A_APRENDIZAGEM.pdf Acesso em 24 out. 2012.
- FLORES, C.R.; MORETTI, M.T. O funcionamento cognitivo e semiótico das representações gráficas: ponto de análise para a aprendizagem matemática. 28ª **Reunião Anual da ANPED**. (Grupo de Trabalho: Educação Matemática – 19). Caxambu-MG, 2005. Disponível em <http://www.anped.org.br/reunioes/28/textos/gt19/gt19736int.pdf> Acesso em 26 out. 2012.

- FORTES, L. O. Utilizando Blogs como Ferramenta de Suporte a Aprendizagem de Matemática no Ensino Superior. **Dissertação** de mestrado. Faculdade de Física, Pós-Graduação em Educação em Ciência e Matemática, PUCRS, Porto Alegre, 2009. http://tede.pucrs.br/tde_busca/arquivo.php?codArquivo=1967 Acesso em 19 mar. 2011.
- FREITAS, J. L. M. de. Teoria das Situações Didáticas. In: MACHADO, S. D. A. (org). **Educação Matemática: uma (nova) introdução**. 3ª Ed. São Paulo: EDUC, 2010, p.78-111.
- FRESCKI, F. B.; PIGATTO, P. Dificuldades na Aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral na Educação Tecnológica: proposta de um Curso de Nivelamento. In: I Simpósio Nacional de Ensino de Ciência e Tecnologia. **Anais**. Ponta Grossa: UTFPR, 2009.
- FRID, S. Three approaches to undergraduate calculus instruction: Their nature. **Mathematics Education**, 1994, 4, 69-100.
- GIMENES, C. M. **Matemática Financeira com HP 12c e Excel**, PLT. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006.
- GODINO, J.D. Origen y aportaciones de la perspectiva ontosemiótica de investigación en Didáctica de la Matemática. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), **Investigación en Educación Matemática XVI** (pp. 49 - 68). Jaén: SEIEM, 2012. Disponível em http://www.ugr.es/~jgodino/eos/origen_EOS_Baeza_2012.pdf Acesso em 30 jul. 2013
- GONZÁLES-MARTIN, A. S.; CAMACHO, M. Legitimization of the Graphic Register in Problem Solving at the Undergraduate Level: The Case of the Improper Integral. **Proceedings**. 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2004, v.2, pp.479-486. Disponível em http://www.emis.de/proceedings/PME28/RR/RR228_Gonzalez-Martin.pdf Acesso em 23 jan. 2012.
- GONZÁLES-MARTIN, A. S.; CAMACHO, M. **The Improper Integral**: na Exploratory study with first year University Students. s/d. Disponível em <http://www.math.uoc.gr/~ictm2/Proceedings/pap374.pdf> Acesso em 23 jan. 2012.
- GONZALES-MARTIN, A.S. La generalización de La integral definida desde las perspectivas numérica, gráfica y simbólica utilizando entornos informáticos: Problemas de enseñanza y de aprendizaje. **Tesis Doctorales**, 2005. Universidad de La Laguna. Disponível em <ftp://tesis.bbt.ull.es/ccppytec/cp257.pdf> Acesso em 20 jun. 2012
- GRAVEMEIJER, K.P.E. What makes mathematics so difficult, and what can we do about it? In: SANTOS, L.; CARNAVARRO, A.P.; BROCARD, J. **Educação Matemática: Caminhos e encruzilhadas**. Lisboa: APM, 2005. p.83-101.
- HENRIQUES, A. L'Enseignement et l'Apprentissage des Integrales Multiples: analyse didactique integrant l'usage du logiciel Maple. **Thèse** (L'Université Joseph Fourier – École doctorale “Mathématiques, Sciences et Technologies de l'information, Informatique”). Grenoble – Alpes. 2006. Disponível em <http://tel.archives-ouvertes.fr/> Acesso em 09 mar. 2011.

- HSIA, Yuk Wah. A utilização do livro didático pelo aluno ao estudar integral. **Dissertação**. Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2006. Disponível em http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/yuk_wah_hsia.pdf Acesso em 23 jan. 2012.
- HUGHES-HALLET, D; GLEASON, A.M.; McCALLUM, W.G. *et al.* **Cálculo de uma variável**. 3a ed. Trad. Rafael José Iorio Júnior. Rio de Janeiro: LTC Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 2004.
- IEZZI, G. ; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D.; PÉRIGO, R. **Matemática**. Volume único. 4ªed. São Paulo: Atual, 2007.
- JARAMILLO, D. Ensinar e Aprender Matemática Através dos Mapas Conceituais. **Anais...** - VII Encontro Nacional de Educação Matemática, 2001. Disponível em <http://www.sbem.com.br/files/enemVII.zip> - oficina 48. Acesso em 16 set. 2012.
- KALINKE, M. A. A mudança da linguagem matemática para a linguagem *web* e as suas implicações na interpretação de problemas matemáticos. 2009. 205p. **Tese** (Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo- PUCSP, São Paulo, 2009. Disponível em http://www.pucsp.br/pos/edmat/do/tese/marco_aurelio_kalinke.pdf Acesso em 21 abr. 2011.
- KARRER, M. Articulação entre Álgebra Linear e Geometria: um estudo sobre as transformações lineares na perspectiva dos registros de representação semiótica. **Tese** (doutorado). Programa de Estudos pós-graduados em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2006, 372p. Disponível em http://www.sapientia.pucsp.br//tde_busca/arquivo.php?codArquivo=2945 Acesso em 20 jul. 2012.
- KÖCHE, J.C. **Fundamentos de Metodologia Científica**. Rio de Janeiro: Vozes, 2002.
- KUSNIAK, A. La Théorie des Situations Didactiques de Brousseau. **L'OUVERT**, n. 110, 2004, pp.17-33. Disponível em http://irem.u-strasbg.fr/php/articles/110_Kuzniak.pdf Acesso em 20 ago. 2012.
- LEITHOLD, L. **O cálculo com geometria analítica**. 3ª Ed. Vol.1. Tradução de Cyro de Carvalho Patarra. São Paulo: Harbra, 1994.
- LOUREIRO, C. Em defesa da utilização da calculadora: algoritmos com sentido numérico. **Educação e Matemática**, n.77, março/abril 2004, pp. 22-29. Disponível em <http://www.esv.ipv.pt/mat1ciclo/2007%202008/gestao%20sala%20de%20aula/Em%20defesa%20da%20calculadora.pdf> Acesso em 30 set. 2012.
- MACHADO, N.J. Sobre Livros Didáticos-, quatro pontos. **Em aberto**, Brasília, ano 16, n.69, jan./mar. 1996. Disponível em <http://www.emaberto.inep.gov.br/index.php/emaberto/article/viewFile/1036/938> Acesso em 09 set. 2012.
- MAGALHÃES, A. R. Mapas conceituais digitais como Estratégia para o desenvolvimento da Metacognição no Estudo de Funções. 2009. 263p. **Tese** (Doutorado

em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo- PUCSP, São Paulo, 2009. Disponível em http://www.pucsp.br/pos/edmat/do/tese/andre_ricardo_magalhaes.pdf Acesso em 21 abr. 2011.

MARGOLINAS, C. Le milieu et le contrat, concepts pour la construction et l'analyse de situations d'enseignement. In: Noirfalise, R. (Eds) **Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques**, conférence, Actes de l'Université d'Eté, La Rochelle, Juillet 1998, ed. IREM Clermont-Ferrand, pp. 3-16. Disponível em http://halshs.archives-ouvertes.fr/docs/00/42/18/45/PDF/1998_La_Rochelle.pdf Acesso em 16 fev. 2013.

MARIANI, R. C. P. Transição da Educação Básica para o Ensino Superior: A coordenação de registros de representação e os conhecimentos mobilizados pelos alunos no curso de Cálculo. 2006. 233p. **Tese** (doutorado em educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo- PUCSP, São Paulo, 2009. Disponível em http://www.pucsp.br/pos/edmat/do/tese/rita_cassia_pistoia_mariani.pdf Acesso em 22 abr. 2011.

MARTINS, C.T.K. Uma Engenharia Didática para explorar o aspecto de processo dinâmico presente nos algoritmos. **Educação Matemática Pesquisa**, v.12, n.2, 2010. Disponível <http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/3522/0> Acesso em 13 set. 2012.

MASSART, V.; FREYENS, A.; GIET, D. Evaluation préliminaire de l'impact d'un dispositif d'apprentissage à la résolution de problèmes complexes (ARPC). **Pédagogie Médicale**, 2008, v.9, n.3, pp.141-156. Disponível em http://www.pedagogie-medicale.org/index.php?option=com_article&access=standard&Itemid=129&url=/articles/pmed/abs/2008/03/pmed20089p141/pmed20089p141.html Acesso em 18 nov. 2012.

MATOS, A. Explorando relações funcionais no 8º ano: um estudo sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico. **Dissertação** de Mestrado. Universidade de Lisboa – Faculdade de Ciências, 2007. Disponível em http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/1228/1/18906_ULFC086635_TM.pdf Acesso em 29 ago. 2012.

MATOS, A.; PONTE, J.P. O estudo de relações funcionais e o desenvolvimento do conceito de variável em alunos do 8º ano. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**. v.11, n.002, 2008, pp.195-231. Disponível em <http://redalyc.uaemex.mx/pdf/335/33511203.pdf> Acesso em 29 ago.2012.

MELO, J. M. R. Conceito de Integral: uma proposta computacional para seu ensino e aprendizagem. **Dissertação**. (Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2002. Disponível em http://www4.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/jose_manuel_melo.pdf Acesso em 14 jan.2012.

MENEGOLA, A. M. Mapas Conceituais como Instrumento de Estudo na Matemática. 2006.101p. **Dissertação**. (Programa de Pós-Graduação em Ciência e Matemática). Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2006.

MENEZES, L. Matemática, Linguagem e Comunicação. Anais do ProfMat99 - Encontro Nacional de Professores de Matemática, Portimão, Portugal, 1999. Disponível em http://www.ipv.pt/millennium/20_ect3.htm Acesso em 02 fev. 2013.

MOMETTI, A. L. Reflexões sobre a prática: argumentos e metáforas no discurso de um grupo de professores de cálculo. **Tese** (doutorado). PUC-SP.2007. Disponível em <http://www.dominiopublico.gov.br/download/texto/cp029619.pdf> Acesso 20 mar. 2011

MOREIRA, M. A. **Mapas conceituais como instrumentos para promover a diferenciação conceitual progressiva e a reconciliação integrativa**. São Paulo: Ciência e Cultura, 1980.

MOREIRA, M. A. Mapas conceituais e Aprendizagem Significativa. **Cadernos de Aplicação**. 1997. Disponível em <http://www.ic.uff.br/~rosangela/SiteEninedAtual/artigo.pdf>, Acesso em 25 jan. 2012.

MOREIRA, M. A. **Novas estratégias de ensino e aprendizagem**: Os mapas conceituais e o Vê epistemológico. Lisboa: Plátano Edições Técnicas, 1993.

MOREIRA, M. A. O mapa conceitual como instrumento de avaliação de aprendizagem. s/d. Disponível em: <http://www.fcc.org.br/pesquisa/publicacoes/es/artigos/69.pdf> Acesso em 24 jan. 2012

MORETTI, M. T. O papel dos registros de representação na aprendizagem de matemática. **Contrapontos**. Ano 2, n.6, p.423-437, Itajaí, set/dez 2002. Disponível em <http://www6.univali.br/seer/index.php/rc/article/viewFile/180/152>. Acesso em 20 jul.12.

MOURA, M.A.L. Investigando Padrões em PA e PG. **Anais** do IX Encontro Nacional de Educação Matemática. Belo Horizonte-MG, 2007. Disponível em www.sbem.com.br/files/ix_enem/Minicurso/Trabalhos/MC37297120634T.doc Acesso em 30 jan. 2013.

NASCIMENTO, J. L. Uma abordagem para o estudo de limites com uso de pré-conceitos do cálculo diferencial e integral I. COBENGE. **Anais...** 2001. <http://www.pp.ufu.br/Cobenge2001/trabalhos/MTE082.pdf>

NASCIMENTO, J. L. Uma proposta metodológica para a disciplina de Cálculo I. VI Encontro de Educação em Engenharia. **Anais...** 2000. Disponível em <http://www.pp.ufu.br/trabalhos/04.PDF> Acesso em 10/04/2011.

NASSER, L. Ajudando a Superar Obstáculos na Aprendizagem de Cálculo. **Anais...** IX Encontro Nacional Educação Matemática, 2007. Disponível em www.sbem.com.br/files/ix_enem/Mesa/Artigo%20Lilian%20MR13.doc Acesso em 16 ago. 2012.

NOVAK, J. D.; CAÑAS, A.J. **The Theory Underlying Concept Maps and How to Construct and Use Them**, Technical Report IHMC CmapTools 2006-01 Rev 01-2008, FloridaInstitute for Human and Machine Cognition, 2008, available at: <http://cmap.ihmc.us/Publications/ResearchPapers/TheoryUnderlyingConceptMaps.pdf> Acesso em 20 fev. 2013.

O'CONNOR, J.J.; ROBERTSON, E.F. Henri Léon Lebesgue. **The MacTutor History of Mathematics archive**. Disponível em <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Lebesgue.html>, 2004. Acesso em 08/04/2012.

O'CONNOR, J.J.; ROBERTSON, E.F. Georg Friedrich Bernhard Riemann. **The MacTutor History of Mathematics archive**. Disponível em <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Riemann.html>, 1998. Acesso em 08/04/2012.

OLGIN, C.A.; GROENWALD, C.L.O. Engenharia Didática: uma experiência com o tema Criptografia. **JIEEM – Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, v. 4, n.2, 2011. Disponível em <http://periodicos.uniban.br/index.php/JIEEM/article/view/214/189> Acesso em 13/09/12

OLIVEIRA, A. H. A noção de integral no contexto das concepções operacional e estrutural. **Dissertação**. Programa de pós-graduação em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2004. Disponível em http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/aguinaldo_herculino.pdf Acesso em 24/01/12.

OLIVEIRA, N. Conceito de Função: uma abordagem do processo ensino-aprendizagem. **Dissertação** (Pós-Graduação em Ensino da Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 1997. Disponível em http://200.189.113.123/diaadia/diadia/arquivos/File/conteudo/artigos_teses/MATEMATICA/Oliveira.pdf Acesso em 16 ago.2012.

ORTON, A. Student's understanding of integration. **Educational Studies in Mathematics**, 14 (1), pp.1-18, 1983

PEDROSO, C. M.; KRUECHACKER, J. E. Análise de Alternativas para recuperação de Fundamentos de Matemática no ensino de cálculo em cursos de engenharia. In: COBENGE, **Anais**. Recife-PE, 2009. Disponível em <http://www.eletrica.ufpr.br/pedroso/Artigos/Cobenge2009-Final.pdf> Acesso em 19/03/2011

PISKUNOV, N. **Cálculo Diferencial e Integral**. 6ª ed. Moscou-URSS: Editorial Mir, 1983.

RASSLAN, S.; TALL, D. Definitions and Images for the Definitive Integral Concept. **26th PME**, 2002. Disponível em <http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2002h-pme26-rasslan.pdf> Acesso em 24/01/12.

REZENDE, W.M. O Ensino de Cálculo: Dificuldades de Natureza Epistemológicas. **Tese** (doutorado). Programa de Pós-Graduação em Educação. Universidade de São Paulo – Faculdade de Educação, 2003.

RIBEIRO, M. V. O ensino do Conceito de Integral, em sala de aula, com recursos da história da matemática e da resolução de problemas. **Dissertação**. Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. UNESP, Rio Claro, 2010. Disponível em http://www.athena.biblioteca.unesp.br/exlibris/bd/brc/33004137031P7/2010/ribeiro_mv_me_rcla.pdf Acesso em 23/01/2012.

RICHIT, A. *et al.* Possibilidades Didático-Pedagógicas do Software Geogebra no Estudo do Conceito de Integral. In: XIII CIAEM-IACME. **Anais**. Recife, 26 a 30 de junho de 2011. Disponível em http://cimm.ucr.ac.cr/ocs/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/viewFile/2022/130 Acesso em 08/01/2012.

ROSA, S. B. A integração do instrumento ao campo da engenharia didática: o caso do perspectógrafo. **Tese** (doutorado). Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção. Universidade Federal de Santa Catarina, 1998. Disponível em <http://www.tede.ufsc.br/teses/PEPS0723-T.pdf> Acesso em 13 set. 2012.

SANTOS, M.; OLIVEIRA, H. Generalização de Padrões: um estudo no 5º ano de escolaridade. Em: Luego, R. *et al* (Eds.) , **Investigación en educación matemática XII** (pp. 461-476). Badajoz: Sociedad Española de Investigación em Educación Matemática, 2008. Disponível em <http://funes.uniandes.edu.co/1213/> Acesso em 30 jan. 2013.

SANTOS, R. M.; BORGES NETO, H. **Avaliação do Desempenho no Processo de Ensino-Aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral I** (O Caso da UFC). Disponível em <http://www.multimeios.ufc.br/arquivos/pc/artigos/artigo-avaliacao-do-desempenho-no-processo-de-ensino-aprendizagem.pdf> Acesso em 10/09/09.

SANTOS, S.C. A produção matemática em um ambiente virtual de aprendizagem: o caso da geometria euclidiana espacial. **Dissertação** de mestrado (Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2006, 145p.

SCHNEIDER, M. Des objets mentaux “aire” et “volume” au calcul des primitives. **Tesis de doctorado**, Universidad Católica de Lovaina, Bélgica, 1988.

SCUCUGLIA, R. Investigando o teorema fundamental do cálculo com calculadoras gráficas. **Enem. Anais**. 2007. Disponível em http://www.sbem.com.br/files/ix_enem/Comunicacao_Cientifica/Trabalhos/CC22057969843T.doc

SERHAN, D .Using Concept Maps to Assess the Effect of Graphing Calculators Use on Students' Concept Images of the Derivative at a Point.In: **International Journal for Mathematics Teaching and Learning**. October, 8th, 2009. <http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/serhan2.pdf> Acesso em 06 abr. 2011

SILVA, A. C. A noção de integral em livros didáticos e os registros de representação semiótica. **Dissertação** (mestrado). Programa de Estudos Pós-graduados da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. 2004. 157p. Disponível em http://www.sapientia.pucsp.br//tde_busca/arquivo.php?codArquivo=5065 Acesso em 20 jul.2012

SILVA, J. A.M. **Educação Matemática e Exclusão Social**: tratamento diferenciado para realidades desiguais. Brasília: Plano Editora, 2002.

SILVA, S. V.*et al.* Ambiente Colaborativo de Aprendizagem – Um estudo de caso baseado no curso de Engenharia de Produção dos Institutos Superiores de Educação (ISECENSA). XIII SIMPEP. **Anais**. Bauru, SP, 6 a 8 de novembro de 2006.

SOARES DE MELLO, J.C.C.B; SOARES DE MELLO, M.H.C. **Integração entre o ensino de cálculo e o de pesquisa operacional**. Disponível em www.producao.uff.br/conteudo/rpep/.../relpesq_303_10.doc Acesso em 07 abr. 2011.

SOUZA, N A. de. Avaliando o mapa conceitual como instrumento avaliativo. Disponível em <http://www.anped.org.br/reunioes/31ra/1trabalho/GT04-4751--Int.pdf> Acesso em 24 jan. 2012.

STEWART, J. **Cálculo**. V. 1. 4ª edição. São Paulo: Editora Pioneira Thomson Learning, 2002.

STRUIK, D. J. **A concise history of mathematics**. (Fourth revised Edition). New York: Dover Publications, Inc, 1987.

SUTHERLAND, R. **Ensino Eficaz de Matemática**. Tradução Adriano Moraes Migliavaca. Porto Alegre: Artmed, 2009.

TAN, S.T. **Matemática Aplicada à Administração e Economia**. Tradução Edson de Faria. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2001.

TAVARES, R. Construindo Mapas Conceituais. **Ciências & Cognição** – Revista interdisciplinar de estudos da cognição, v.12, p.72-85,2007. Disponível em <http://cienciasecognicao.tempsite.ws/revista/index.php/cec/article/view/641/423>. Acesso em 17 abr. 2012.

TRIVIÑOS, A.N.S. **Introdução à pesquisa em ciências sociais: a pesquisa qualitativa em educação**. São Paulo: Atlas, 1987.

VAZ, I. C. Os conceitos de Limite, Derivada e Integral em livros didáticos de Cálculo e na perspectiva de professores de matemática e de disciplinas específicas dos cursos de engenharia. **Dissertação** (mestrado). Programa de Pós-Graduação em Educação Tecnológica. Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, 2010. Disponível em www2.et.cefetmg.br/galerias/arquivos_download/Dissertacoes/Ieda_do_Carmo.pdf Acesso em 25 jan. 2013.

Apêndice A - A descrição do conteúdo Integral Definida em Livros-Textos de Cálculo

Descreve-se, aqui, o procedimento metodológico adotado por alguns livros-textos adotados, para o conteúdo Integral Definida. O objetivo é conhecer como é o tratamento do tema nestes livros, para embasar a sequência didática para a construção do conceito de Integral Definida, segundo Riemann.

1 LEITHOLD, L. O cálculo com geometria analítica. 3ª Ed. Vol.1. Tradução de Cyro de Carvalho Patarra. São Paulo: Harbra, 1994.

O livro possui 11 capítulos. No primeiro, os assuntos abordados são concernentes a Números Reais, Funções e Gráficos, cujo enfoque é direcionado ao que será necessário aos capítulos posteriores.

Limites e Continuidade (definição, teoremas e cálculos) é o assunto do Capítulo 2.

No capítulo 3 estuda-se a Derivada: definição, regras, derivabilidade e continuidade, derivação implícita, taxas relacionadas e derivadas sucessivas.

O capítulo 4 trata das aplicações das Derivadas para a construção de gráficos e a diferencial.

O capítulo 5 é dedicado à Integração e Integral Definida. São apresentadas algumas técnicas de antidiferenciação, conceito e propriedades da Integral Definida, Teoremas Fundamentais do Cálculo e Valor Médio para Integrais, área de uma região plana e Integração Numérica.

O autor inicia o capítulo de integração apenas com o comentário que esta é a operação inversa da diferenciação e define a função antiderivada. Após dois exemplos, inicia-se a demonstração dos teoremas da Integral Indefinida e apresentam-se, em alguns casos, a aplicação dos teoremas nos cálculos de Integrais. Ao fim da seção, há 54 exercícios.

Na seção seguinte, é apresentado o método da substituição, sem, no entanto, mencionar esse nome. É focada a integração da função composta. A regra da cadeia para a antidiferenciação é demonstrada como teorema. São dados exemplos de utilização do teorema e exercícios (68). Uma seção sobre “equações diferenciais e o movimento retilíneo” começa a esboçar a utilidade da integração.

Antes de falar sobre Integral Definida, o autor apresenta uma seção sobre “Área”, onde a notação somatório é introduzida e a teoria relativa é demonstrada. Após definir a *medida* da área, o autor supõe uma função contínua, e calcula a área sob a curva, a partir da divisão do intervalo $[a, b]$ em n partes iguais. O autor comenta que quando n cresce, o valor da soma das medidas das áreas dos retângulos diferem entre si por uma quantidade arbitrariamente pequena. Segundo um teorema do cálculo avançado, que não é apresentado, essa soma tende a um limite. Logo em seguida, é apresentada a definição formal de área de uma região limitada pela curva $y = f(x)$ e pelas retas $x = a$ e $x = b$, que utiliza limite no infinito. São dados exemplos de utilização da definição e exercícios.

A seção “Integral Definida” é iniciada mediante retomada da seção anterior e definição de novos termos, como partição e norma, os quais são necessários quando não se toma os intervalos igualmente espaçados, como feito na seção “área”. A soma obtida com quaisquer subintervalos é agora nomeada como soma de Riemann. Um exemplo ilustra a exposição, que é seguida pela definição de função integrável:

Definição: Seja f uma função cujo domínio inclui o intervalo fechado $[a, b]$. Então, f será **integrável** em $[a, b]$ se existir um número L satisfazendo a seguinte condição: para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que toda partição Δ para a qual $\|\Delta\| < \delta$, com ξ_i no intervalo fechado $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$, temos $|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta_i x - L| < \varepsilon$. Nessas condições, escrevemos $\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta_i x = L$ (p.325).

Após uma breve explanação sobre essa definição, a Integral Definida é apresentada como o limite da definição acima. É demonstrado um teorema que afirma que, se f for contínua, ela é integrável e, em seguida, apresenta-se uma definição sobre a equivalência entre a área de uma região e a Integral Definida, como segue:

Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e $f(x) \geq 0$ para todo x em $[a, b]$. Seja R a região limitada pela curva $y = f(x)$, pelo eixo x e pelas retas $x = a$ e $x = b$. Então, a medida A da área da região R é dada por $A = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta_i x \Leftrightarrow A = \int_a^b f(x)dx$ (p.328).

Seguem alguns exemplos, exercícios, e o restante da teoria sobre integração, como propriedades da Integral Definida, o teorema do valor médio para integrais, os teoremas fundamentais do cálculo, área entre curvas e Integração Numérica.

As aplicações da Integral Definida para determinação de volumes, comprimento de arco, Centro de Massa, Trabalho e Pressão Líquida são tratadas no capítulo seis.

Os capítulos 7 e 8 são dedicados às Funções Exponencial e Logarítmica, e Trigonométricas, respectivamente.

As técnicas de integração (por partes, por substituição trigonométrica, potências de funções trigonométricas e funções racionais) são tratadas no capítulo 9.

O capítulo 10 aborda as Seções Cônicas e as Coordenadas Polares. As formas indeterminadas, integrais impróprias e Fórmula de Taylor são apresentadas no capítulo 11.

2. ÁVILA, Geraldo. Cálculo das funções de uma variável. V.1, 7ª Ed. Rio de Janeiro: LTC, 2003.

O livro é subdividido em onze capítulos, sendo os dois primeiros capítulos de revisão. São eles: Cap. 1: Números Reais e Coordenadas na reta – números reais, intervalos, equações e inequações, valor absoluto; Cap. 2: Equações e Gráficos – coordenadas no plano, equação da reta e da circunferência, distância e perpendicularismo de retas.

O capítulo 3 apresenta aspectos gerais sobre as funções e gráficos (o que a caracteriza, domínio, imagem, gráfico, translação de gráficos), a parábola e a hipérbole. Ao final, apresenta notas históricas sobre o conceito de função e as seções cônicas.

O título do 4 quatro é “Derivadas e Limites”. O declive de uma reta tangente é apresentado como um limite. É discutida a definição de continuidade de uma função num ponto e são apresentados os limites laterais, infinitos e no infinito com alguns exemplos em que a obriedade do limite é assumida. A seguir, a declividade da reta tangente é nomeada como derivada da função f e são apresentadas aplicações na Cinemática.

No capítulo 5, são apresentadas as regras de derivação e funções implícitas; as derivadas das funções trigonométricas são tratadas no capítulo seis; as funções exponenciais e logarítmicas e taxas de variação são assuntos do capítulo sete.

Nos capítulos 8 e 9 são estudadas as aplicações das derivadas para esboço e análise de gráficos e problemas de Máximos e Mínimos.

No capítulo 10 estuda-se a Integração, com a determinação de primitivas, o conceito de Integral (Integral Definida e Indefinida e suas propriedades e regras para cálculo), integrais impróprias. Há uma seção específica para a Integral de Riemann, em que se apresentam aplicações em Trabalho e Energia, Velocidade, Movimento em Queda Livre.

A apresentação do Cálculo Integral é iniciada com a definição e exemplos das funções “Primitivas”. O autor, após considerar alguns resultados teóricos apresentados em seções anteriores do livro, relata que “a primitiva mais geral é da forma $G(x) = F(x) + C$, onde C é uma constante” (p.237) e conclui a seção com mais um exemplo para encontrar a primitiva, seguido de 40 exercícios com esta finalidade.

Na seção seguinte, trata-se do conceito de Integral. No início da seção faz-se um relato sobre as suas origens históricas, e ao final, é apresentada a notação de Integral Definida. Para ilustrar, alguns trechos são transcritos a seguir:

Vamos considerar o problema de calcular a área da figura delimitada pela curva $y = f(x)$, as laterais $x = a$ e $x = b$, e pelo eixo dos x (Fig. 10.1). Os matemáticos do século XVII interpretaram essa área como soma de uma infinidade de retângulos verticais, que podemos descrever assim: em cada ponto x há um retângulo de altura $f(x)$ e base infinitamente pequena, indicada por dx (Fig. 10.2), de sorte que a área desse retângulo é dada pelo produto $f(x) \cdot dx$, que é também uma quantidade infinitamente pequena [...] A noção de retângulos infinitesimais permite visualizar a área da figura como a soma infinita de todos os retângulos (...). (p.239)

O tópico é finalizado com a menção de: se $a < b$, então a integral de b até a é definida como o oposto da integral de a até b , e que a integral num intervalo de extremos iguais é tomada como zero.

Em seguida, há comentários sobre as funções integráveis e é discutido o caso em que o integrando é negativo. São apresentadas as propriedades de aditividade, multiplicação por escalar e aditividade por intervalos da integral e o Teorema Fundamental do Cálculo.

A seção seguinte tem como título “Integral Definida e Integral Indefinida”. O autor nomeia a primitiva mais geral como Integral Indefinida, e justifica o nome pela indeterminação da constante C nas primitivas. Afirma que, quando a integral é calculada sobre um intervalo, ela é chamada de Integral Definida, já que se definem os limites de integração. Com base nesta exposição, são mostrados alguns exemplos de cálculo de Integrais Definidas: um exemplo teórico, sem ilustração gráfica $\left(\int_{-5}^{-1} \frac{dx}{x}\right)$ e outros três exemplos para calcular área entre curvas. Em seguida, há 36 exercícios. Nenhum deles, porém, é apresentado na forma gráfica.

A noção de integral é estendida com o estudo das funções com salto e desigualdades, e das integrais impróprias, permeados por exercícios.

A seção 10.5 trata especificamente da Integral de Riemann, onde se justifica que o entendimento da Integral como área sob o gráfico de uma função é limitado, contudo,

ela é necessária para lidar com outras situações nas quais a ideia de área não aparece, como por exemplo, nos conceitos de trabalho e energia. Dito isto, faz-se a apresentação do conceito de integral como limite de uma soma, a partir da “tentativa de precisar a ideia de área” (p.256).

Para isto, toma-se um intervalo $[a, b]$ dividido em n partes iguais de comprimento $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Em cada partição é tomado um ponto arbitrário ξ_i e formam-se n retângulos de base Δx e altura $f(\xi_i)$. A soma das áreas destes retângulos é escrita sob duas formas:

$$S_n = f(\xi_1) \cdot \Delta x + f(\xi_2) \cdot \Delta x + \dots + f(\xi_n) \cdot \Delta x$$

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x$$

O autor sugere que a sequência infinita destas somas S_n tende a um limite, que é a área sob a curva (apoiar isso com uma ilustração gráfica), e que “o limite assim obtido é chamado de *integral de f no intervalo $[a, b]$* , a qual é indicada com o símbolo $\int_a^b f(x)dx$ ” (p.258). Logo em seguida, o autor escreve: “Portanto, por definição, $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x$ ”.

Em seguida, indica-se o nome das somas usadas como somas de Riemann, e a integral, como integral de Riemann. Nas observações, o autor verifica que não há necessidade de se tomar subintervalos de mesma amplitude; que a definição apresentada nesta última parte é apenas numérica e não depende da área; e que a existência do limite das somas é equivalente a verificar se a função é integrável. A seção é finalizada com a apresentação de aplicações sobre trabalho e energia, movimento em queda livre, velocidade de escape, seguidos por nove exercícios relativos a estas aplicações.

No final do capítulo são apresentadas notas históricas sobre Arquimedes e a área do círculo e do segmento de parábola, e sobre Riemann. O estudo das integrais encerra-se no capítulo seguinte, que trata sobre os métodos de integração.

3. ANTON, Howard. Cálculo: um novo horizonte. 6ª Ed. Volume 1. Porto Alegre: Bookman, 2000.

O livro é dividido em nove capítulos. Na introdução apresentam-se as origens históricas do Cálculo.

No capítulo 1 são estudadas as famílias de funções e seus gráficos, como fazê-los numa calculadora ou sistema algébrico computacional, as funções como modelos matemáticos e equações paramétricas.

O capítulo 2 ensina a teoria de limites: visão intuitiva, técnicas para calcular, definição formal, continuidade. A derivada, retas tangentes e taxas de variação, técnicas de diferenciação e aproximação linear local e diferenciais, é o assunto do capítulo três, que é concluído com uma sessão de situações-problemas da robótica como aplicação das derivadas.

O capítulo 4 é dedicado às funções logarítmica e exponencial, diferenciação implícita, taxas relacionadas, formas indeterminadas e regra de L'Hôpital.

Nos capítulos 5 e 6 são apresentadas as aplicações de derivadas para a análise de funções (crescimento, decrescimento, concavidade), determinação de máximos e mínimos absolutos e aplicações, movimento retilíneo, teoremas de Rolle e Valor Médio.

O capítulo 7 trata da Integração. São estudados a integral indefinida, integração por substituição, a notação sigma, Integral Definida, teorema fundamental do Cálculo e a função logarítmica do ponto de vista da integral. Neste capítulo, o autor inicia o assunto de integração expondo, com apoio da história da matemática, o problema de calcular área de regiões planas com contornos curvilíneos, e apresenta os métodos do retângulo e da antiderivada para o cálculo de áreas.

No método do retângulo, a área sob uma curva $f(x)$ em um intervalo $[a, b]$ é subdividida em n retângulos de base $\frac{b-a}{n}$ e altura $f(c_i)$. A área sob a curva $f(x) = x^2$ no intervalo $[0,1]$ é calculada com a ajuda de computador (o livro não apresenta detalhes), fazendo n crescer, usando a fórmula de área de retângulo. Os dados de n (foram usados os valores: 4, 10, 100, 10000 e 100000) e A_n são tabelados e o valor limite para o qual a área tende à medida que n cresce é analisado. O autor leva o aluno a concluir que a área sob a curva é esse limite, apenas com a argumentação.

Em seguida, usando a definição de derivada e a continuidade da função, o autor mostra que $A'(x) = f(x)$, isto é, “que a derivada da função área $A(x)$ é a função cujo gráfico constitui o limite superior da região” (p.381). Esse fato é ilustrado com o exemplo $f(x) = x^2$ e o intervalo $[0,1]$. Intuitivamente, o autor leva o aluno a perceber que $A(x) = \frac{1}{3}x^3$ e que no intervalo $[0,1]$ a área é $A(1) = \frac{1}{3}$, que é o valor para o qual tendia a área no método do retângulo.

Após isso, o autor conceitua antiderivada, introduz as regras básicas de derivação, bem como as propriedades, o uso da integral nas equações diferenciais, e o método de integração por substituição, e apresenta os exercícios.

Há uma seção específica para a notação sigma, explicitando a forma de uso e propriedades, seguida por exercícios.

No tópico de Integral Definida, o autor inicia formalizando a área de uma região sob uma curva a partir do método de retângulo e escreve $A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x$, em que x_k é um ponto do subintervalo $[x_k, x_{k+1}]$. Após trabalhar a aproximação da área pelo método dos retângulos e concluir que a aproximação pelo extremo esquerdo do retângulo superestima a área, que a aproximação pelo extremo direito do retângulo subestima a área e que a aproximação pelo ponto médio da base do retângulo tem a melhor aproximação para a área sob a curva, o autor define a Integral Definida como o limite citado, isto é:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x$$

Depois de alguns exemplos, o autor trabalha especificamente com a integral de Riemann, diferenciando-a em relação à anterior pela não necessidade de divisão do intervalo $[a, b]$ em partes iguais. Após definir a **partição** do intervalo $[a, b]$ como o conjunto de todos os subintervalos de $[a, b]$ e o **tamanho da malha da partição** como sendo o maior comprimento dos subintervalos gerados, denotado por $\max \Delta x_k$, o autor define a integral de Riemann por:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x_k$$

a partir dessa definição, o autor estabelece as propriedades da Integral Definida, o teorema fundamental do cálculo, o teorema do valor médio para integrais, aplicações das Integrais Definidas no movimento retilíneo e a função logarítmica do ponto de vista da integral.

O capítulo 8 mostra aplicações da Integral Definida na Geometria, na Ciência e na Engenharia, calculando áreas, volumes, comprimento de curva, Trabalho, Pressão e Força de um fluido.

O capítulo 9 apresenta os métodos de integração por partes, integrais trigonométricas, integração por substituição trigonométrica, integração por frações

parciais, integração numérica e integrais impróprias. Há uma seção específica para o uso de tabelas de Integrais e Sistemas Algébricos Computacionais.

4. TAN, S.T. Matemática Aplicada à Administração e Economia. Tradução Edson de Faria. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2001.

O livro tem 8 capítulos. Em meio à teoria são apresentados exemplos voltados à área de administração e economia. No primeiro capítulo, é feita uma revisão de álgebra, o sistema de coordenadas cartesianas e as retas.

No segundo, são estudadas as funções e seus gráficos e as funções como modelos matemáticos, os limites (noção intuitiva, cálculo, formas indeterminadas, no infinito, limites laterais e continuidade), a derivada em um ponto (apresentada depois da definição de inclinação da reta tangente e taxas de variação média e instantânea).

No capítulo 3, são estudadas as regras de diferenciação, funções marginais em economia, derivadas sucessivas, diferenciação implícita, taxas relacionadas e diferenciais.

As aplicações da derivada para esboço de curvas e problemas de otimização são estudados no capítulo 4.

O capítulo 5 é dedicado às funções exponenciais e logarítmicas, suas derivadas e aplicações como modelos matemáticos.

No capítulo 6, as seções são: antiderivadas e regras de integração, integração por substituição, área e integral definida, o teorema fundamental do cálculo, o cálculo de integrais definidas, área entre duas curvas, aplicações da integral definida em Negócios e Economia.

O autor inicia o capítulo sobre integração revendo um exemplo do capítulo de derivadas, em que a partir da posição de um trem é calculada a sua velocidade. A pergunta instigante ao capítulo atual é: conhecida a velocidade, é possível calcular sua posição? Para isso o autor afirma ser necessária a noção de antiderivada de uma função e a define, mostrando, intuitivamente, o método de calcular antiderivadas.

O autor induz o aluno a perceber que as antiderivadas de uma mesma função diferem entre si apenas por uma constante, e escreve isso como teorema, sem, no entanto, demonstrá-lo. Esse resultado é mostrado graficamente para duas funções distintas.

O livro traz uma seção “Explorando com Tecnologia”, em que os alunos são convidados a explorarem o conceito de antiderivada, retas tangentes e declividades, numa calculadora gráfica.

Em seguida, o autor diz que o processo de calcular antiderivadas é chamado de integração ou antidiferenciação, e explica os significados dos símbolos que aparecem na escrita $\int f(x) dx = F(x) + C$.

Considerando que a integral é a operação inversa da derivada, o autor usa apenas o processo de derivar para mostrar algumas regras básicas de integração, para integrais indefinidas, quais sejam: 1) de uma constante; 2) de uma função potência; 3) de um múltiplo constante de uma função; 4) regra da soma; 5) da função exponencial e 6) da função $f(x) = \frac{1}{x}$. Cada uma das regras é mostrada com exemplos de funções para se calcular a antiderivada.

Segue uma seção sobre equações diferenciais, cujo objetivo é determinar a função quando se conhece sua derivada. Ou seja, o autor está mostrando ferramentas para que o aluno resolva o problema do início do capítulo, contudo, o problema não é resolvido. É apresentado, como aplicação, um problema referente a uma taxa de crescimento conhecida e que se pretende determinar a circulação de uma revista num período determinado. São apresentados “Teste de conhecimento”, três no total, sendo um deles para usar a calculadora gráfica, e sessenta exercícios sobre antiderivadas, Integral Definida, declividade da reta tangente e problemas envolvendo as equações diferenciais.

A seção seguinte diz respeito ao método de integração por substituição. Apenas é explicado como e porque (relação com a composição de funções) funciona, a partir de um exemplo. É descrito um roteiro para aplicação do método, que é detalhado em outro exemplo. São apresentadas questões para serem discutidas em grupo, seguidas por situações práticas, problemas, em que o método da substituição pode ser usado. Há outra seção “explorando com tecnologia” seguida de mais exercícios, no total de quarenta e seis.

A seção 6.3 trata da área e da Integral Definida. O autor expõe dois gráficos sobre a produção de petróleo (anos versus milhões de barris por ano) em uma certa região e argumenta que o consumo total de petróleo é a área sob o gráfico. Um deles apresenta uma função constante, outro não. Para esse outro: como é calculada essa área? É o que pergunta o autor.

Usando o método do retângulo (sem citar nomes), o autor calcula a área da figura $f(x) = x^2$ no intervalo $[0,1]$, subdividindo-o em quatro subintervalos de mesmo comprimento. A área sob o gráfico, no intervalo indicado, é calculada como a soma das áreas dos retângulos de base $\frac{1}{4}$ e altura sendo os valores da função nos pontos médios de cada retângulo. É apresentada uma tabela com 4, 8, 16, 32, 64, 100 e 200 subdivisões (retângulos). O autor chama a atenção para a convergência da aproximação da área na tabela e sugere que este valor possa ser usado como a área desejada. Outro exemplo é dado, porém, desta vez, os valores da função são tomados no extremo esquerdo de cada um dos retângulos criados. Novamente é montada uma tabela para 4, 10, 100, 1000, 10000, 50000 e 100000 retângulos e a convergência da área é estabelecida como a área sob o gráfico. Nos dois casos, não se faz menção sobre como a área foi calculada para uma quantidade tão grande de retângulos.

Na observação dos dois exemplos, é estabelecido um “caso geral” para o cálculo da área. Como a soma de Riemann é o foco dessa pesquisa, segue, na íntegra, o texto que trata desse tema, neste livro, na página 403.

Dividamos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de igual comprimento $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Em seguida, tomemos n pontos arbitrários x_1, x_2, \dots, x_n , chamados de *pontos representativos* pertencentes ao primeiro, segundo, ... e n -ésimo subintervalos, respectivamente. Então, aproximando a área A da região R pelos n retângulos de largura Δx e alturas $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$, de modo que as áreas dos retângulos são $f(x_1)\Delta x, f(x_2)\Delta x, \dots, f(x_n)\Delta x$, temos:

$$A \approx f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \dots + f(x_n)\Delta x$$

A soma do lado direito desta expressão é chamada de uma **soma de Riemann**, em homenagem ao matemático alemão Bernhard Riemann. Como os exemplos anteriores parecem sugerir, a soma de Riemann deve convergir para um único número quando n se torna arbitrariamente grande. Definimos este número como sendo a área A da região R .

Definição: A área sob o gráfico de uma função: Seja f uma função contínua não-negativa em $[a, b]$. Então, a área da região sob o gráfico de f é

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} [f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)]\Delta x$$

onde x_1, x_2, \dots, x_n são pontos arbitrários pertencentes aos n subintervalos de $[a, b]$ de igual comprimento $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.

A Integral Definida, passo seguinte, é explicada para funções que não necessariamente são não-negativas. Após a menção de algumas aplicações, é apresentada a seguinte definição:

Definição: A Integral Definida: Seja f definida em $[a, b]$. Se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \dots + f(x_n)\Delta x]$$

Existe para todas as escolhas de pontos representativos x_1, x_2, \dots, x_n nos n subintervalos de $[a, b]$ de igual comprimento $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, então este limite é chamado de **Integral Definida de f de a até b** e é denotado por $\int_a^b f(x) dx$.

Assim,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} [f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \dots + f(x_n)\Delta x]$$

O número a é o extremo inferior de integração, e o número b é o extremo superior de integração (p.404).

Na sequência, são apresentadas algumas observações sobre o significado da integral (área sob uma curva), sua relação com a derivada (remete a um momento posterior) e sobre o fato da Integral Definida ser um número.

Também é apresentado um teorema (sem demonstração) sobre as condições de integrabilidade de uma função. (Teorema: Seja f contínua em $[a, b]$. Então, f é integrável em $[a, b]$; ou seja, a Integral Definida $\int_a^b f(x) dx$ existe).

A interpretação geométrica da Integral Definida de funções não-negativas é apresentada como sendo a área sob a curva. É proposta uma discussão em grupo para explicar o porquê da área sob o gráfico de uma função não-positiva ser $-\int_a^b f(x) dx$. A discussão é estendida para o caso em que as funções são parcialmente positivas e parcialmente negativas.

Em seguida, há um teste de conhecimento e mais treze exercícios sobre o conteúdo desenvolvido.

Ao discutir sobre a dificuldade em encontrar as áreas, o autor tenta motivar o aluno a fazê-lo de um modo mais prático, e apresenta o Teorema Fundamental do Cálculo para isso.

O Teorema Fundamental do Cálculo: seja f contínua em $[a, b]$. Então, $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ onde F é uma antiderivada qualquer de f ; isto é $F'(x) = f(x)$ (p.409)

São dados exemplos onde são calculadas as áreas de algumas funções usando esse procedimento. É proposta uma discussão em grupo a respeito da função $f(x) = \frac{1}{x^2}$: esta função é positiva para todo x em $[-1, 1]$ para a qual ela está definida. No entanto, usando formalmente o teorema fundamental do cálculo para calcular $\int_{-1}^1 f(x) dx$, o resultado é -2 . Pedem-se para explicar a aparente contradição.

A validade do teorema fundamental do cálculo é discutida numa outra seção, logo após serem apresentados problemas envolvendo o cálculo das integrais definidas. Seguem exercícios em que, algumas vezes, a calculadora gráfica é requerida.

O autor encerra o capítulo apresentando propriedades da Integral Definida, o método da substituição, área entre curvas e aplicações dela na Economia, sempre entremeando a teoria por exercícios.

No capítulo 7, são estudadas a integração por partes, usando a tabela de integrais, a integração numérica, integrais impróprias e aplicações de probabilidade ao cálculo.

O capítulo 8 trata do cálculo de várias variáveis: funções de várias variáveis, derivadas parciais, máximos e mínimos, método dos mínimos quadrados, multiplicadores de Lagrange e Integrais Duplas.

5. STEWART, J. Cálculo. V. 1. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2002.

O volume 1 é dividido em 8 capítulos. Na apresentação do livro são mostrados problemas que são resolvidos a partir da teoria de limites, como motivação ao estudo do Cálculo Diferencial e Integral.

No primeiro capítulo, Funções e Modelos, são apresentadas as formas de representação de uma função, operações e características (simetria, crescimento, por exemplo), funções definidas por partes, sempre com situações-problemas para que as respectivas funções sejam encontradas. Os modelos matemáticos são definidos como “descrição matemática (...) de um fenômeno do mundo real (...)”. (p. 24). Nesta seção, são tratadas as funções polinomiais, com destaque ao modelo linear, as funções racionais, algébricas, trigonométricas, exponenciais, logarítmicas e transcendentais. No final do capítulo, há uma seção, com princípios e exemplos de como resolver problemas.

O capítulo 2, Limites e Derivadas, inicia apresentando problemas a serem resolvidos com o uso da teoria de limites, e, a partir disso, desenvolve-se a teoria de limites e continuidade de uma função, com muitas representações gráficas. São apresentadas algumas taxas de variação (média e instantânea), como a tangente e a velocidade. Define-se derivada e sua interpretação como inclinação da reta tangente e a derivada como função.

O capítulo 3 apresenta as regras de diferenciação, com aplicações das taxas de variação nas ciências naturais, diferenciação implícita, derivadas sucessivas, funções hiperbólicas, taxas relacionadas e diferenciais (relacionando-a a aproximações lineares).

O capítulo 4, aplicações da diferenciação, apresenta a teoria sobre máximos e mínimos, como usar a derivada para conhecer a forma gráfica de uma função, formas indeterminadas e regra de L'Hôpital. É apresentado um roteiro para esboço de curvas, usando a teoria estudada. Há uma seção sobre problemas de otimização. O capítulo é encerrado com uma seção que trata das antiderivadas, com algumas aplicações.

O capítulo 5 trata das Integrais. O cálculo de áreas e distâncias é usado para definir a Integral Definida, a qual é descrita mais detalhadamente nos próximos parágrafos. Neste tópico, é apresentado seu cálculo e propriedades, bem como, Teorema Fundamental do Cálculo. A diferenciação e a integração são tratadas como processos inversos. Há seções sobre Integrais Indefinidas e variação total, o método da substituição e o logaritmo como integral.

O autor inicia o capítulo tentando estabelecer conexões entre o cálculo diferencial e o integral, e a importância das integrais para a solução de problemas diversificados como “volumes, comprimentos de curvas, previsões populacionais, saída de sangue do coração, força sobre um dique, trabalho, [...]” (p.367).

A primeira seção trata de “Áreas e Distâncias”. A chamada inicial é para o fato de que, ao tentar encontrar áreas ou distâncias percorridas, usa-se um mesmo limite especial (sem mencionar, porém, que limite é esse e sem fazer maiores comentários).

Para regiões com lados retos, a área é definida como aprendido na geometria plana, como por exemplo, a área de um retângulo é o produto do comprimento pela largura. No entanto, para regiões curvas, o cálculo dessa área parte da ideia intuitiva e há a necessidade de uma definição exata de área.

É tomado como exemplo o cálculo da área sob a curva $y = x^2$ de 0 até 1. Esse intervalo é dividido em 4 partes iguais e a área sob a curva é calculada pela aproximação da área dos retângulos de base $\frac{1}{4}$ e altura $f(x_i)$ em que x_i é o extremo direito de cada subintervalo. Dessa forma, conclui-se que a área pretendida A deve ser tal que $A < 0,46875$. O mesmo cálculo é feito tomando-se $f(x_i)$ em que x_i é o extremo esquerdo de cada subintervalo. Usando a representação gráfica, o autor conjectura que $0,21875 < A < 0,46875$. O procedimento é repetido para 8 retângulos. É mostrada uma tabela contendo o número de retângulos ($n = 10, 20, 30, 50, 100, 1000$) com suas respectivas áreas obtidas pelas somas das áreas dos retângulos internos e externos. É sugerido que, quando se aumenta a quantidade de retângulos, diminui-se a faixa de variação da área sob a curva, sendo a média aritmética uma boa estimativa para tal quando $n = 1000$.

Na tentativa de encadear um raciocínio matemático mais acurado, pede-se que seja mostrado que o $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \frac{1}{3}$ em que R_n é a soma das áreas dos retângulos externos. O autor informa que cada retângulo tem largura de $\frac{1}{n}$ e as alturas são os valores funcionais nos pontos $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \dots, \frac{n}{n}$, isto é, as alturas são $\left(\frac{1}{n}\right)^2, \left(\frac{2}{n}\right)^2, \dots, \left(\frac{n}{n}\right)^2$. Assim,

$$R_n = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \dots + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{n}{n}\right)^2$$

$$R_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n^2} \cdot (1^2 + 2^2 + \dots + n^2)$$

$$R_n = \frac{1}{n^3} \cdot (1^2 + 2^2 + \dots + n^2)$$

Nesse momento, o aluno é direcionado a um apêndice do livro que trata da notação de somatório, e onde é mostrado que a soma dos quadrados dos n primeiros inteiros positivos é $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Reescrevendo R_n tem-se:

$$R_n = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Após simplificações,

$$R_n = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

Calculando o limite solicitado,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6} \frac{(n+1)(2n+1)}{n^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \frac{1}{6} (1)(2) = \frac{1}{3}$$

Numa observação complementar, o autor chama atenção para o fato de estar, neste momento, calculando o limite de uma sequência R_n , que é estudado mais detalhadamente no volume 2 do livro, mas que estes limites são calculados da mesma forma que os limites no infinito.

Foi percebido um aspecto comum em muitas coleções de Cálculo: a colocação dos estudos referentes a sequências e séries no segundo volume da coleção.

Novamente usando a representação gráfica, o autor conjectura que “à medida que aumentamos n , tanto L_n (sommas aproximantes inferiores) como R_n (sommas

aproximantes superiores), tornam-se aproximações cada vez melhores da área de S (p.370). E define a área A da região S como sendo o limite das somas das áreas dos retângulos aproximantes, isto é:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \lim_{n \rightarrow \infty} L_n = \frac{1}{3}$$

Em seguida, o autor aplica a ideia desenvolvida nos exemplos para regiões S mais gerais, usando o modo intuitivo. Começa subdividindo S em n faixas S_1, S_2, \dots, S_n de igual largura. A largura do intervalo $[a, b]$ é $b - a$, assim, a largura de cada faixa é $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Essas faixas dividem o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$, onde $x_0 = a$ e $x_n = b$. Os extremos direitos dos subintervalos são: $x_1 = a + \Delta x$, $x_2 = a + 2\Delta x$, ..., $x_i = a + i\Delta x$, ... Na i -ésima faixa de S o retângulo aproximado tem dimensões Δx e $f(x_i)$, cuja área é $f(x_i) \cdot \Delta x$. Intuitivamente, a área aproximada de S é a soma das áreas desses retângulos, isto é,

$$R_n = f(x_1) \cdot \Delta x + f(x_2) \cdot \Delta x + \dots + f(x_n) \cdot \Delta x$$

Retomando a conjectura que ao aumentar o número de retângulos aumenta-se a aproximação da área, o autor define (p.372):

Definição: A área da região S que está sob o gráfico de uma função contínua f é o limite das somas das áreas dos retângulos aproximantes:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_1) \cdot \Delta x + f(x_2) \cdot \Delta x + \dots + f(x_n) \cdot \Delta x)$$

Em seguida, o autor comenta que pode ser provado que o limite dessa definição sempre existe, uma vez que se está assumindo f contínua, porém, ele não demonstra. Ele também comenta que se pode provar que o mesmo valor pode ser obtido usando-se os extremos esquerdos dos intervalos.

Para generalizar a ideia, o autor toma a altura do i -ésimo retângulo como sendo o valor de f em qualquer x_i^* (denominando-os de pontos amostrais) no i -ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, e escreve como uma fórmula mais geral para a área de S :

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_1^*) \cdot \Delta x + f(x_2^*) \cdot \Delta x + \dots + f(x_n^*) \cdot \Delta x)$$

Para escrever somas de muitos termos de maneira mais compacta, o autor comenta o uso da notação somatória e escreve:

$$\sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x = f(x_1) \cdot \Delta x + f(x_2) \cdot \Delta x + \dots + f(x_n) \cdot \Delta x$$

Porém, a fórmula para A não é reescrita usando tal notação.

Com a ideia de cálculo de área de uma região por meio da soma de áreas de retângulos aproximantes, o autor apresenta alguns exemplos e começa a desenvolver o

“problema da distância”, intensificando a notação somatória para representar soma de muitos termos. A seguir, são apresentados vinte e quatro tarefas relativos aos tópicos abordados sobre área e distância.

Após essa exploração intuitiva, e relacionando os limites encontrados na seção anterior com outros, que aparecem ao longo dos capítulos, o autor define, na pág. 378:

Definição de Integral Definida: Se f é uma função contínua definida por $a \leq x \leq b$, dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de comprimentos iguais $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Seja $x_0 (= a), x_1, x_2, \dots, x_n (= b)$ os extremos desses subintervalos e vamos escolher os pontos amostrais $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ nesses subintervalos de tal forma que x_i^* está no i -ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Então, a Integral Definida de f é

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \cdot \Delta x$$

Seguem-se algumas notas explicativas dos elementos que compõem os símbolos apresentados. Em uma destas notas, o autor chama o somatório apresentado na definição acima de **soma de Riemann**. Nesta mesma nota, o autor comenta que se f é positiva, então a soma de Riemann pode ser interpretada como uma soma de área de retângulos aproximantes.

Por meio de um exemplo, o autor deduz que, se f assumir valores positivos e negativos num determinado intervalo, então a Integral Definida representará a diferença entre essas áreas (na região positiva e negativa do plano cartesiano em questão).

São apresentados exemplos de limites de somatórios para serem escritos como integrais definidas. O cálculo das integrais é feito por meio do somatório. Novamente o aluno é convidado a estudar o apêndice que trata desse assunto. Algumas integrais são calculadas, sempre mostrando o gráfico resultante. Numa seção específica o autor comenta que x_i^* pode ser tomado como o ponto médio do i -ésimo intervalo, e apresenta um exemplo.

Novamente usando a representação gráfica e a intuição, o autor apresenta as propriedades da Integral Definida juntamente com exemplos e mais sessenta e cinco tarefas. Segue o teorema fundamental do cálculo parte 1 e parte 2, a relação entre Integral Definida e derivada. Só então são tratadas as integrais indefinidas e expostas as regras de integração. Após os exercícios, é apresentado, ao final do capítulo, o método de substituição e o logaritmo como uma integral. Há outros capítulos que tratam do assunto de integração.

O capítulo 6 trata das aplicações de Integração, para cálculos de áreas e volumes, Trabalho e valor médio de uma função.

O capítulo 7 apresenta as Técnicas de Integração (por partes, trigonométricas, substituição trigonométrica, de funções racionais por frações parciais) e estratégias de integração. Há ainda seções sobre a integração usando Sistemas Algébricos Computacionais, integração aproximada e integrais impróprias.

O capítulo 8 encerra o livro trazendo mais aplicações de integração: comprimento de arco, área de uma superfície de revolução, aplicações à física, engenharia, economia, biologia, probabilidade e valores médios.

Ao final, o livro traz oito apêndices (A – Intervalos, desigualdades e Valores Absolutos, B – Coordenadas Geométricas e Retas, C- Gráficos das Equações de Segundo Grau, D – trigonometria, E – Notação Somatória, F – Prova dos Teoremas, G – Números Complexos, H – Respostas dos exercícios de números ímpares).

6. HUGHES-HALLETT, D; GLEASON, A.M.; McCALLUM, W.G. et al. Cálculo de uma variável. 3a ed. Trad. Rafael José Iorio Júnior. Rio de Janeiro: LTC Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 2004.

O livro é dividido em 11 capítulos, sendo que no final de cada um deles há uma seção “Projeto para o capítulo” em que se propõem atividades “reais”⁸⁸ para serem resolvidas. No primeiro capítulo, “uma biblioteca de funções”, trata das funções e sua variação, especificamente a linear e a exponencial, usando situações-problema. O alongamento e deslocamento de funções são tratados como uma composição de funções. São apresentadas as funções logarítmicas, trigonométricas, potências, polinomiais e racionais. Em meio ao conteúdo, é trabalhado o comportamento das funções no infinito. O capítulo é encerrado com uma introdução à continuidade de funções, sem, no entanto, abordar a teoria de limites, especificamente.

No capítulo 2, “Conceito Chave: A Derivada”, os autores usam o cálculo de uma velocidade instantânea para introduzir o conceito de limite. A notação e definição são dadas em meio a explorações de situações-problema. Usando a ideia de taxa de variação média e instantânea, define-se a derivada de uma função num ponto. A função derivada, interpretação e aplicações para o cálculo de máximos e mínimos são tratadas em seguida. O capítulo termina com uma seção sobre continuidade e diferenciabilidade.

⁸⁸ Aqui entendida como atividades que fazem referência a aspectos que podem ser vivenciados no cotidiano, como, por exemplo, determinar a medida e distância entre aceiros para evitar a propagação de incêndios em uma floresta.

No capítulo 3 são tratadas as regras de diferenciação, taxas relacionadas, funções implícitas, aproximação linear, a regra de L'Hôpital. O uso das derivadas para o esboço de gráficos, a otimização e a modelagem, famílias de curvas, aplicações à marginalidade, funções hiperbólicas e teoremas sobre continuidade e diferenciabilidade são tratados no capítulo 4.

O capítulo 5, “Conceito Chave: A Integral Definida”, introduz o conceito de integral definida a partir de um exemplo teórico, seguido por possíveis interpretações, aplicações e teoremas para tal conceito.

Os autores começam o assunto a partir de exemplo teórico sobre como medir a distância percorrida por um automóvel, quando conhecida a sua velocidade. É realizada uma aproximação “por falta” e uma “por excesso”. Os autores induzem o aluno a pensar que para saber mais precisamente a distância percorrida, é preciso conhecer a velocidade em intervalos menores. Após um exemplo em que os dados de velocidade estão dados em intervalos menores, o autor calcula genericamente a distância percorrida num determinado intervalo, fazendo partições regulares de comprimento $\Delta t = \frac{b-a}{n}$, onde Δt representa a variação em t e $a \leq t \leq b$.

Os autores afirmam que a velocidade no primeiro instante pode ser aproximada por $f(t_0)$, de modo que a distância percorrida é, aproximadamente, $f(t_0)\Delta t$. No subintervalo i a distância percorrida é aproximada por $f(t_i)\Delta t$. Desse modo, o autor conclui que para $a \leq t \leq b$ a distância total percorrida é aproximadamente:

$$f(t_0)\Delta t + f(t_1)\Delta t + \dots + f(t_{n-1})\Delta t \quad (1)$$

Os autores nomeiam a soma (1) como “soma à esquerda” e “soma à direita” quando o valor da velocidade usado é o da extremidade direita, de cada intervalo tomado. São apresentados dois gráficos com as somas nominadas, sendo que a soma à esquerda é uma estimativa por baixo e a soma à direita uma estimativa por cima. A precisão de tal estimativa depende de quão perto estão as duas somas (à esquerda e à direita), e para funções que são crescentes (ou decrescentes) em um intervalo $[a, b]$, tem-se:

$$\left| \begin{array}{l} \text{diferença entre} \\ \text{as estimativas por} \\ \text{cima e por baixo} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{l} \text{diferença entre} \\ f(a) \text{ e } f(b) \end{array} \right| \cdot \Delta t = |f(b) - f(a)| \cdot \Delta t$$

Após a interpretação gráfica dessa diferença, os autores concluem que, tornando o intervalo de tempo Δt suficientemente pequeno, a diferença entre as estimativas por cima e por baixo podem ser tão pequenas quanto se queira.

Voltando ao exemplo, os autores fazem n aumentar para que as estimativas supracitadas sejam diminuídas (caso da soma à direita) ou aumentadas (caso da soma à esquerda), aproximando-se da distância exata. Ou seja,

Distância total percorrida entre $t = a$ e $t = b$ é:

$$d_{total} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\text{soma à esquerda}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f(t_0)\Delta t + f(t_1)\Delta t + \dots + f(t_{n-1})\Delta t)$$

$$d_{total} = \text{Área sob a curva } f(t) \text{ de } t = a \text{ até } t = b$$

Da mesma forma, os autores escrevem:

$$d_{total} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\text{soma à direita}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f(t_1)\Delta t + \dots + f(t_{n-1})\Delta t + f(t_n)\Delta t)$$

$$d_{total} = \text{Área sob a curva } f(t) \text{ de } t = a \text{ até } t = b$$

Quando a função $f(t)$ é contínua, os limites da soma à direita e à esquerda são, ambos, iguais à distância total percorrida. Os autores terminam a seção informando que esse método de calcular a distância, por meio do limite de uma soma, funciona, mesmo que a velocidade não seja crescente ou decrescente, ao longo de todo intervalo. Seguem-se exercícios no mesmo estilo que o exemplo trabalhado no texto.

A seção seguinte já é sobre a Integral Definida. Os autores constroem as somas à esquerda e direita para funções quaisquer f , contínuas para $a \leq t \leq b$, dividindo $[a, b]$ em n subintervalos de mesmo comprimento $\Delta t = \frac{b-a}{n}$. Em seguida, as somas obtidas são escritas usando a notação de somatório, justificando a necessidade de uma escrita mais compacta. Dessa forma,

$$\text{Soma à direita} = \sum_{i=1}^n f(t_i)\Delta t = f(t_1)\Delta t + \dots + f(t_{n-1})\Delta t + f(t_n)\Delta t$$

$$\text{Soma à esquerda} = \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)\Delta t = f(t_0)\Delta t + \dots + f(t_{n-2})\Delta t + f(t_{n-1})\Delta t$$

É explicado que o símbolo \sum significa que é preciso somar parcelas do tipo $f(t_i)\Delta t$ e que o significado de “ $i = 1$ ”, embaixo do somatório, é que deve começar em $i = 1$ e parar quando $i = n$ (significado do n).

A Integral Definida é tomada então como o limite das somas à direita e esquerda, já que, para funções contínuas, esses limites existem e são iguais. A definição dada é a que segue:

Suponha que f é contínua para $a \leq t \leq b$. A **Integral Definida** de f de a até b , denotada por $\int_a^b f(t)dt$ é o limite das somas à esquerda e à direita, formada com n subintervalos dividindo $[a, b]$, quando n torna-se arbitrariamente grande. Em outras palavras,

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{n \rightarrow \infty} (\text{Soma à esquerda}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)\Delta t \right)$$

e

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{n \rightarrow \infty} (\text{Soma à direita}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^n f(t_i)\Delta t \right)$$

Cada uma dessas somas é chamada de uma soma de Riemann, f é chamada de integrando, e a e b são os limites de integração.

Após isso, há uma breve exposição sobre os índices do somatório e da integral.

Os autores exemplificam o cálculo de integrais definidas como somas de áreas de retângulos, chamando atenção para as aproximações numéricas obtidas quando n é pequeno. Os exemplos são:

Exemplo 1: calcular as somas à direita e à esquerda com $n=2$ e $n=10$ para $\int_1^2 \frac{1}{t} dt$.

Como os valores dessas somas comparam com o valor exato da integral?

Exemplo 2: Use as somas à esquerda e à direita com $n=250$ para estimar o valor de $\int_1^2 \frac{1}{t} dt$.

A Integral Definida como área é tratada a partir da conjectura que quando f é positiva e $a < b$: Área debaixo do gráfico de f entre a e $b = \int_a^b f(x) dx$. Da mesma forma, os autores trabalham com as propriedades de somas positivas quando $f > 0$ e soma negativa quando $f < 0$.

Antes de outros trinta e sete exercícios, são definidas “Somas de Riemann mais gerais”, que não requerem intervalos espaçados igualmente e que permitem que a função possa ser calculada em qualquer ponto do subintervalo. Portanto, uma soma de Riemann geral tem a forma:

$$\sum_{i=1}^n \left(\begin{array}{l} \text{valor de } f \text{ em algum ponto} \\ \text{do } i - \text{ésimo intervalo} \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{l} \text{comprimento do} \\ i - \text{ésimo intervalo} \end{array} \right)$$

Em seguida, há aplicações e teoremas, intermediados por exercícios para a Integral Definida.

No capítulo 6, “Construindo Primitivas”, as primitivas são tratadas sob os pontos de vista gráfico, numérico e analítico. Há ainda seções sobre equações diferenciais e de movimento.

O capítulo 7 trata da integração por substituição e apresenta uma tabela de integrais, além do método das frações parciais, substituição trigonométrica (mostrando, inclusive, como completar quadrados para usar uma substituição trigonométrica), regras para aproximação de integrais definidas e integrais impróprias.

No capítulo 8 a Integral Definida é usada para o cálculo de áreas, volumes, comprimento, densidade e centro de massa. Ainda apresenta seções de aplicações à Física e Economia, funções de distribuição, probabilidade.

O assunto “Séries” é apresentado no capítulo 9. As seções são: série geométrica, convergência de sequências e séries, teste de convergência e séries de potência.

O capítulo 10 traz as aproximações de funções pelo polinômio de Taylor, séries de Taylor e séries de Fourier. No capítulo onze são estudadas as equações diferenciais de primeira e segunda ordem, com aplicações.

Apêndice B - Lista de Tarefas da Parte A da Sequência Didática

PARTE A – Objetivo: Construir o conceito de convergência de uma sequência numérica.

1. Com o software Geogebra é possível mostrar, no plano cartesiano, pontos de coordenadas (x,y) que descrevem graficamente o comportamento de uma sequência. A abscissa x simplesmente indica o índice dos termos da sequência (primeiro termo, $x = 1$; segundo termo, $x = 2$, e assim por diante), enquanto que a ordenada y mostra a grandeza numérica do termo de índice x (y é o valor obtido quando substituímos x por um número na fórmula do termo geral da sequência, e representa a distância vertical do ponto de coordenadas (x,y) ao eixo Ox). Com essa representação gráfica, é possível analisar o comportamento da sequência (saber onde cresce, decresce, aproximação,...). O comando, no Geogebra, que nos permite essa representação é “Sequência [\langle variável, expressão \rangle], \langle variável \rangle , \langle valor inicial \rangle , \langle valor final \rangle ”
 - 1.1 Para cada um dos itens abaixo, use o comando acima para analisar o comportamento das sequências. Você pode aumentar os valores finais para visualizar melhor o que acontece com os termos da sequência.
 - 1.2 Em seguida, escreva, para cada item, o que você observou sobre os termos da sequência.

- a) $a_n = \sqrt{n}$
- b) $b_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}$
- c) $c_n = \frac{n-1}{n}$
- d) $d_n = \frac{1}{n}$
- e) $e_n = n^2$
- f) $f_n = n$

2. Você consegue associar suas observações sobre as sequências do exercício 1 com o conceito de limite, estudado no Cálculo I, e as respectivas notações? Se a resposta for positiva, escreva-as.
3. Considere a seguinte ‘definição’ intuitiva de Convergência: *Dizemos que uma sequência numérica converge para um número L se os termos da sequência ficam cada vez mais próximos do número real L .*

Agora considere as sequências dadas no exercício 1. Depois de realizar as atividades no Geogebra, você diria que elas convergem? Se positiva, qual seria o possível número L ?

Complete a tabela, a partir da sua observação.

Sequência	Converge?	Valor de L ?
$a_n = \sqrt{n}$		
$b_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}$		

$c_n = \frac{n-1}{n}$		
$d_n = \frac{1}{n}$		
$e_n = n^2$		
$f_n = n$		

4. No Geogebra, faça o seguinte: digite $k=1$ e tecele Enter. Para cada uma das sequências do exercício 3, faça:
- Digite o comando Sequência[(expressão, 0), n, 1, k];
 - Clique com o botão direito no campo k e escolha Propriedades. Escolha $min = 0$, $max = 100$, $Incremento = 1$ e $Largura = 200$. Feche a janela de Propriedades;
 - Clique sobre o campo k e utilize as setas do teclado para alterar os valores de k. (Quando o campo está ativado pode-se usar o teclado). Quando $k = 0$, não vemos nenhum ponto da sequência. Quando teclamos na seta para a direita, k passa a valer 1 e vemos o termo a_1 (primeiro termo da sequência). Quando apertamos novamente a seta para a direita temos $k = 2$ e vemos o segundo termo a_2 . Clicando repetidamente na seta para a direita podemos ver o aparecimento dos pontos da sequência marcados no eixo Ox;
 - Observe o comportamento dos termos que aparecem no gráfico, e responda:
 - Existe diferença de comportamento entre as sequências que você assinalou como convergentes e as não convergentes? Se positivo, qual(is)? Explique.
 - Baseado nesse experimento, como você descreveria um procedimento para saber se uma sequência converge ou não? Descreva.
5. Para as sequências b_n e d_n do exercício 1, faça (anote os dados numa tabela):
- No Geogebra, use o comando “Sequência[(n, expressão), n, 1, valor final]” para mostrar os pares ordenados da sequência analisada como convergente. O *valor final* pode ser mudado sempre que necessário, para isso basta clicar duas vezes sobre a linha de comando dessa sequência e alterar o valor mostrado na janela.
 - Trace retas horizontais usando, no Geogebra, o comando “ $y = 0.5$ ” e “ $y = -0.5$ ”.
 - Descubra um valor n_0 a partir do qual os pares ordenados fiquem dentro da faixa delimitada pelas retas horizontais traçadas. Qual é esse n_0 . Anote os dados da faixa e n_0 numa tabela.
 - Diminua o valor 0.5 para 0.3 e trace as retas horizontais $y = 0.3$ e $y = -0.3$ e repita o procedimento c) para esta faixa.
 - Diminua de 0.3 para 0.1 e trace as retas horizontais $y = 0.1$ e $y = -0.1$ e repita o procedimento c) para esta faixa.
 - É sempre possível encontrar um n_0 independente da amplitude da faixa tomada? Justifique.
 - Você assinalou essas sequências, na tarefa 3, como convergentes ou divergentes?
 - E se a sequência considerada não for convergente, o que acontece ao realizar o procedimento c)? Explique.

- i) Que semelhanças e/ou diferenças você percebe entre o que foi feito neste exercício e o exercício 4? Comente.

Observação: Talvez seja preciso tomar a ferramenta “mover” e utilizá-la para “arrastar” o semi-eixo Ox positivo para comprimi-lo. Essa técnica permite que você modifique a escala dos eixos do plano cartesiano. Para conseguir isso você deve estar com a ferramenta “mover” ativada, clicar exatamente sobre qualquer ponto do semi-eixo Ox positivo e arrastá-lo para a esquerda. Caso você queira ampliar a escala do eixo Ox deve arrastar algum ponto do semi-eixo positivo para a direita.

6. As retas cujas equações são da forma “ $y = \text{número}$ ” e “ $y = - \text{número}$ ”, do exercício 5, servem para mostrar que os termos de uma sequência convergente podem se tornar tão próximos quanto se queira de um determinado valor.
- Analise as faixas entre as retas que foram desenhadas nos itens b, d, e e) daquele exercício. Qual o valor central da faixa? Onde esse valor aparece? (consulte o exercício 3).
 - Considere a sequência c_n do exercício 1. Usando sua observação no item 6.a, estabeleça as faixas correspondentes aos itens b), d), e e) do exercício 5 para a sequência c_n .

7. Considere a seguinte definição:

Definição: A sequência $\{a_n\}$ **converge** para o número L se para todo número positivo ε existe um número inteiro N tal que para todo n , $n > N \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$. Se esse número L não existe, dizemos que $\{a_n\}$ **diverge**.

Observe os dados que você anotou nos exercícios 3 e 4.

- Para cada sequência assinalada como convergente, a que você pode associar as letras L , ε e N ? Justifique.
- Como você explicaria, a um colega, o significado das letras L , ε e N ? Escreva sua explicação.

8. Considere a sequência definida por $b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

- Abra um arquivo no wxMaxima. Digite no campo de Entrada a definição do termo geral da sequência, “ $f(n) := (-1.0)^{(n+1)/n}$ ”, e aperte Enter. A expressão funcional do termo geral estará registrada. Cuidado para que seja escrito “1.0” no numerador da expressão. Isso facilitará o trabalho com valores decimais.
- Verifique o valor do termo de índice 50. Para fazer isso digite no campo de Entrada “ $f(50)$ ” e aperte Enter, você deverá ver o valor -0.02 na tela.
- Use o wxMaxima e procure valores de n tais que $f(n)$ esteja entre -0.0001 e 0.0001 . Em outras palavras, encontre n tal que o valor absoluto de $f(n)$ seja menor que 0.0001 . (Dica: Você pode utilizar a expressão $\text{abs}(f(n))$ para calcular o valor absoluto de $f(n)$ se quiser).
- É possível encontrar um n tal que $f(n)$ esteja entre -10^{-7} e 10^{-7} ? Qual é esse valor? E entre -10^{-12} e 10^{-12} ? Qual é esse valor?
- Comente sobre a facilidade e/ou dificuldade para encontrar os valores de n solicitados nos itens c e d.
- Agora, abra o Geogebra e faça o seguinte:
 - Escreva no campo de entrada do Geogebra a expressão $e = 1$ e aperte ENTER.
 - Mostre na tela a reta de equação $y = +e$.

- iii. Mostre na tela a reta de equação $y = -e$.
 - iv. Clique com o botão direito sobre o campo “e” mostrado na coluna algébrica e escolha “Exibir”. Aparecerá um controle deslizante para alterar o valor do número “e”.
 - v. Clique com o botão direito no campo “e” mostrado na coluna algébrica. Escolha Propriedades. Modifique as propriedades para $min = 0$, $max = 1$, $Incremento = 0.01$ e $Largura = 200$. Feche a janela.
 - vi. Arraste o controle de “e” todo para a direita. Você é capaz de determinar n a partir do qual b_n está na faixa determinada por $+e$ e $-e$?
 - vii. Diminua e para ficar $e = 0.5$. Existe n a partir do qual os termos da sequência ficam entre os valores numéricos $-e$ e $+e$?
 - viii. E se diminuirmos e para $e = 0.4$? E se diminuirmos para $e = 0.2$? E se diminuirmos para $e = 0.1$?
 - ix. E se diminuirmos e para $e = 0.01$?
 - x. Você consegue encontrar valor de n a partir do qual os termos da sequência se situam entre os valores $-e$ e $+e$, se $e = 10^{-4}$, $e = 10^{-7}$, $e = 10^{-12}$? Se sim, descreva o procedimento utilizado.
- g) Compare os resultados estimados no item f) com os valores calculados nos itens c) e d). São os mesmos? Estão próximos? Comente.
- h) Em qual programa foi mais fácil encontrar os valores de n solicitados? Justifique.
- i) Do seu ponto de vista, o uso dos dois *softwares*, simultaneamente, pode facilitar o entendimento e resolução das questões solicitadas? Justifique.

9. Considere a sequência $g_n = \frac{2n}{n+1}$.

- a) Use o comando “Sequência [<(variável, expressão)>, <variável>, <valor inicial>, <valor final>]” para analisar a convergência da sequência.
- b) Identifique, se for o caso, o número L para o qual a sequência converge.
- c) Tome $\varepsilon = 0.5$ e construa, no Geogebra, as retas $y = L + \varepsilon$ e $y = L - \varepsilon$. (Use o comando: “ $e = 0.5$ ”, “ $y = L + e$ ” e “ $y = L - e$ ”. Aqui, L é o número que você estimou no item b)
- d) Descubra um valor de n a partir do qual todos os pares ordenados estejam dentro da faixa delimitadas pelas retas horizontais $y = L + \varepsilon$ e $y = L - \varepsilon$.
- e) Anote, numa tabela, esse valor de n e o valor de ε .
- f) Diminua o valor de ε para 0.1 e encontre n tal qual descrito no item d). Anote os valores de n e ε na tabela do item e). (*Clique sobre o comando do “e” e altere o seu valor, as retas mudarão automaticamente*)
- g) Repita o procedimento f) para $\varepsilon = 0.01$ e $\varepsilon = 0.001$
- h) Escreva suas observações e conclusões.
- i) Releia a definição de convergência. Qual o papel do ε . Quem é o L ?
- j) Baseado nesse experimento, o que você diz sobre a convergência ou divergência da sequência? O que é preciso observar pra saber se uma sequência converge ou diverge?

10. Usando a mesma sequência $g_n = \frac{2n}{n+1}$ do exercício 9, vá para o software wxMaxima e abra um arquivo novo.

- a) Digite no campo de Entrada a definição do termo geral da sequência, “ $f(n) := (2.0)*n/(n+1)$ ”, e aperte Enter. A expressão funcional do termo geral estará registrada. Cuidado para que seja escrito “2.0” no numerador da expressão. Isso facilitará o trabalho com valores decimais.

- b) Verifique o valor do termo de índice 50. Para fazer isso digite no campo de Entrada “f(50)” e aperte Enter, você deverá ver o valor 1.96078431372549 na tela.
- c) Considere $L = 2$ (número de convergência que você achou no item b) do exercício 6) e $\varepsilon = 0.5$. Use o método da tentativa e erro para encontrar um valor n tal que $f(n) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$, isto é, encontre um número n cuja imagem $f(n)$ esteja no intervalo $(1.5; 2.5)$. Anote os valores de ε e n numa tabela.
- d) Use $\varepsilon = 0.1$ e encontre n tal que $f(n) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. Anote ε e n na tabela criada em c).
- e) Use $\varepsilon = 0.01$ e encontre n tal que $f(n) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. Anote ε e n na tabela criada em c).
- f) Use $\varepsilon = 0.001$ e encontre n tal que $f(n) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. Anote ε e n na tabela criada em c).
- g) Use $\varepsilon = 0.0001$ e encontre n tal que $f(n) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. Anote ε e n na tabela criada em c).
- h) Use $\varepsilon = 10^{-8}$ e encontre n tal que $f(n) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. Anote ε e n na tabela criada em c).
- i) Use $\varepsilon = 10^{-12}$ e encontre n tal que $f(n) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. Anote ε e n na tabela criada em c).
- j) É sempre possível encontrar um n tal que $f(n) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$? Justifique.
- k) Compare os valores de n calculados neste exercício com os obtidos no exercício anterior. O que você pode dizer a respeito deles? Em qual modo, gráfico ou numérico, no Geogebra ou no wxMaxima, foi mais fácil de determiná-los? Comente.

11. Considere a sequência $h_n = \frac{2n}{2n+3}$.

- a) Analise a convergência da sequência h_n e, se convergente, determine o número para o qual ela converge.
- b) Sendo L o número para a qual h_n converge, use o método da tentativa e erro para encontrar um valor n tal que $f(n) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$, para os casos abaixo estipulados. Anote os valores de ε e n numa tabela. Use o software wxMaxima ou o Geogebra, o que preferir.
 1. $\varepsilon = 10^{-1}$
 2. $\varepsilon = 10^{-3}$
 3. $\varepsilon = 10^{-7}$
 4. $\varepsilon = 10^{-10}$
- c) É sempre possível encontrar um n tal que $f(n) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$? Justifique.

12. Considere a definição: Se $\{a_n\}$ **converge** para o número L , escrevemos $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$, ou simplesmente $a_n \rightarrow L$, e chamamos L de **limite** da sequência.

- a) Para as sequências classificadas como convergentes no exercício 3, escreva a convergência da mesma maneira que a apresentada no enunciado desse exercício.
- b) Compare essa escrita matemática com a que foi elaborada por você no exercício 2. Há semelhanças? Comente.
- c) Qual a dificuldade sentida na elaboração da escrita no exercício 2.
- d) Na sua opinião, o que fica mais fácil de compreender: o seu modo de escrever ou o “modo oficial”? Por quê?

- 13.** Crie uma sequência convergente, e represente essa convergência por meio da notação apresentada no exercício 12. Justifique.
- 14.** Pense em uma nova sequência s_n em que cada termo é a soma do n -ésimo termo da sequência, com os termos anteriores (exemplo: para a sequência a_n , do exercício 1, $s_1 = 1$, $s_2 = 1 + \sqrt{2}$, $s_3 = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$, e assim por diante).
- ii. Você acredita que essa sequência (das somas) possa ser convergente? Explique.
 - iii. Teste sua conjectura com as sequências dadas no exercício 1. Escreva suas conclusões.
- 15.** Se você tivesse que dizer a alguém um critério para analisar a convergência, ou não, de uma sequência o que você diria? Escreva sua resposta.
- 16.** Elabore um mapa conceitual (use o *software Cmap tools*) em que constem os assuntos contemplados nesta primeira parte e suas relações. Entregue este mapa.

Apêndice C - Atividades Componentes da parte B da Sequência Didática

Parte B – Objetivo: Conhecer, reconhecer e aplicar a notação somatória.

Saudação inicial: Caro aluno: Nessa parte inicial do curso, vamos aprender como podemos escrever informações matemáticas de forma concisa. Para entender como isso acontece, você terá que seguir as seguintes instruções:

- i. Ao se deparar com um símbolo como o seguinte: $\sum_{i=3}^5 (2+i)$ você deve, por convenção, fazer o seguinte: Escreve-se a expressão $(2+i)$ substituindo-se o i pelo primeiro número que aparece na parte inferior da notação, neste caso o 3. Escreve-se o signo “S” que aparece na notação. Escreve-se a expressão substituindo-se o i pelo próximo número natural. Escreve-se o signo “S”. E assim se procede até que se escreva a expressão $(2+i)$ substituindo-se o “ i ” pelo número que aparece na parte superior da notação. Para este exemplo, teremos, então:

$$\sum_{i=3}^5 (2+i) = (2+3)S(2+4)S(2+5)$$

(Isso é meramente “FORMAL”, uma notação e suas regras de escrita, sua “sintaxe”, não se preocupe em obter um resultado a partir do que está escrito. O que está à esquerda do sinal de igual é a escrita da expressão no modo *conciso*, e o que está à direita da expressão é o *desenvolvimento da expressão*).

Outro exemplo:

Para desenvolver a expressão $\bigcap_{i=5}^7 [i, 10]$ devemos fazer:

$$\bigcap_{i=5}^7 [i, 10] = [5, 10] \cap [6, 10] \cap [7, 10]$$

Agora é com você!

1. Desenvolva as expressões seguintes:

a) $\clubsuit_{k=1}^5 (3k - 5)$

b) $\heartsuit_{m=2}^5 (m^2)$

c) $\sum_{i=1}^4 (2i)$

2. Agora, estão apresentados os desenvolvimentos das expressões, sua tarefa é escrevê-las no modo conciso.

a) $(3 \cdot 5 + 7)$ $(3 \cdot 6 + 7)$ $(3 \cdot 7 + 7)$ $(3 \cdot 8 + 7)$ $(3 \cdot 9 + 7)$ $(3 \cdot 10 + 7)$

b) $1 \# \frac{1}{2} \# \frac{1}{3} \# \frac{1}{4} \# \dots \# \frac{1}{10}$

$$c) \left(\frac{2+1}{2-1}\right)^2 \blacksquare \left(\frac{3+1}{3-1}\right)^3 \blacksquare \left(\frac{4+1}{4-1}\right)^4 \blacksquare \left(\frac{5+1}{5-1}\right)^5 \blacksquare \dots \blacksquare \left(\frac{10000+1}{10000-1}\right)^{10000}$$

3. Joga-se uma bola de uma altura de 12 metros. Cada vez que ela atinge o solo, ela sobe alcançando uma distância que é metade da distância percorrida na queda.
- Calcule a distância total percorrida pela bola, desde o momento em que ela foi solta, até o momento em que ela deixa de quicar no chão.
 - Explique como você calculou a distância no item a).
 - É possível escrever uma fórmula, no modo conciso, que determine essa distância? Se sim, escreva. Se não, justifique.
 - Qual a dificuldade de escrever a fórmula no modo conciso?
4. Se a bola do exercício 3 subir alcançando uma distância que é igual a $\frac{1}{3}$ da distância percorrida na queda, o que muda na sua expressão? E se for $\frac{1}{4}$? E se for r , com $r < 1$? Justifique suas respostas.
5. Você joga uma bola de uma altura de h metros sobre uma superfície plana. Cada vez que a bola atinge a superfície depois de cair de uma distância h , ela rebate a uma distância rh , onde r é positivo, mas menor do que 1. Encontre uma fórmula que dê a distância vertical total percorrida pela bola pulando para cima e para baixo.
6. Alguns símbolos matemáticos são usados para representar algumas operações entre termos de uma sequência. Observe:
- se for utilizado o signo \prod , isso terá o significado de uma multiplicação (Produtória);
 - se for utilizado o signo \cap , isso significa que deverá ser calculada a interseção,
 - se for utilizado o signo \sum , isso significa que deverá ser calculada a adição (Somatória), e assim por diante.

Considere a notação:

$$\sum_{k=m}^n f(k)$$

em que m e n são os limites inferior e superior do somatório (m e n representam os valores inicial e final de k , respectivamente); a letra k é chamada de índice do somatório.

Usando essa notação, escreva a soma realizada por você nos exercícios 3 e 4.

7. Nos itens seguintes, escreva a soma correspondente à expressão (isto, desenvolva a expressão), e calcule seu valor:
- $\sum_{k=4}^8 k^3$
 - $\sum_{k=1}^5 2k$
 - $\sum_{k=0}^5 (2k + 1)$
 - $\sum_{j=1}^4 (3j + 1)$
 - $\sum_{k=1}^5 (2^k)$
8. Use a notação de somatório para representar a soma dada:
- $(-3)^3 + (-2)^3 + (-1)^3 + (0)^3 + (1)^3$

- b) $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24}$
c) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$
d) $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8$
e) $2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 + 2x_6 + 2x_7$

9. Usando o raciocínio anterior, desenvolva a expressão:

$$\sum_{i=k}^n F(i)$$

10. Considerando as atividades desenvolvidas até agora, pense (e escreva) uma frase que expresse as situações em que o símbolo sigma (somatório) é usado.
11. Diante de todos os experimentos realizados, analise o mapa conceitual elaborado no fim da parte A e verifique se há algo a ser acrescentado nele. Se sim, acrescente e entregue a nova versão.

Apêndice D - Atividades Componentes da parte C da Sequência Didática

PARTE C

1. a) Analise o comportamento dos termos da expressão $\frac{1}{x}$ quando x assume valores cada vez maiores.
b) Usando a simbologia matemática, de que forma você poderia descrever o comportamento da sequência $\frac{1}{x}$?

2. Considere a soma dos termos da sequência cujos termos iniciais são: $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \dots$ (esta soma infinita é chamada série infinita).

- a) Qual a soma dos oito primeiros termos? Como podemos escrever, matematicamente, esse resultado? Você pode usar, no Geogebra, o comando “soma(Sequência[<Expressão>, <Variável>, <Valor Inicial>, <Valor Final>])”, claro que para isso, você deverá encontrar a expressão geral dos termos da sequência.
b) Qual a soma dos 20 primeiros termos? Como podemos escrever, matematicamente, esse resultado?
c) Qual a soma dos 100 primeiros termos? Como podemos escrever, matematicamente, esse resultado?
d) Que método você usou para calcular as somas pedidas nos itens a, b e c? Descreva-o.
e) É possível somar todos os infinitos termos? Se sim, o que você pode dizer a respeito dessa soma? Escreva sua análise.
f) Em símbolos, como você escreveria sua análise do item e?
g) Que significado geométrico você atribui à série desse exercício?

3. Considere a sequência $S_n = \frac{1}{n}$. Faça o seguinte:

- a) Abra um arquivo no Geogebra:
i. Escreva $b=1$ e tecla ENTER.
ii. Clique com o botão direito sobre b , abra as propriedades – controle deslizante - de “ b ” e escolha $\text{min}=1$, $\text{max}=1000$, $\text{incremento} = 1$ e feche.
iii. Mostre “ b ” na área de desenho (caso não apareça automaticamente, basta clicar sobre a bolinha que aparece antes da expressão $b = 1$ na janela de álgebra).
iv. Crie a soma dos primeiros termos da sequência $1/n$ da seguinte maneira: Soma[Sequência[$1 / n$, n , 1 , b]]. Aparecerá um número a que valerá provisoriamente 1.
v. Depois, crie um ponto posicionado na reta real identificada com o eixo Ox , escrevendo, na linha de comando: Result=($a,0$) (atenção: a letra a a ser usada aqui é a que aparecerá na janela de álgebra no passo iv). Aparecerá o ponto “Result” que representa o valor numérico da soma do primeiro termo apenas. Ele estará em $(1,0)$ (vamos entendê-lo como o 1 real).
vi. Clique sobre o campo “ b ” e utilize as setas do teclado para aumentar o valor de b . Quando você der apenas um toque na seta para a direita terá representado o valor da soma dos dois primeiros termos. Quando apertar a tecla novamente será mostrado o ponto que representa a soma dos 3 primeiros termos da sequência. E assim por diante. Investigue o comportamento das

somas à medida que se aumenta o número de termos considerados. (“b” indica a quantidade de termos considerados).

- vii. Usando a simbologia já apresentada, expresse o valor da soma dos mil primeiros termos desta sequência.
 - viii. Enquanto você aumenta o valor de b, preste atenção na velocidade de crescimento da soma, observando o deslocamento do ponto (a,0) criado.
 - ix. À medida que aumentarmos o número de termos que estão sendo adicionados (valor de b), o valor calculado da soma aumentará também? Em sua opinião, existe um valor máximo para essa soma? Se sim, determine-o e argumente tal escolha. Se não, justifique.
 - x. Escreva sua conclusão a respeito do comportamento da soma dos termos da sequência – você pode alterar o valor máximo de b, se preferir, para analisar melhor o que se pede.
 - xi. O que é mais interessante de observar para concluir sobre o comportamento da soma parcial: o deslocamento do ponto sobre o eixo Ox ou o valor da soma? O que mais te chamou a atenção? Escreva.
- b) Agora, abra um arquivo no wxMaxima.
- i. Escreva o comando $S(k):=\text{sum}(1.0/n, n, 1, k)$.
 - ii. Observe a saída simbólica apresentada pelo software e compare com a que você escreveu no item vii do passo anterior. É a mesma? Se não, em que difere? Comente.
 - iii. Considerando o comando dado em b-i, o que significa, para você, a expressão $S(1000)$? Escreva.
 - iv. Com o comando do item b-i) você criou no wxMaxima uma função que calcula a k-ésima soma parcial (isto é, a soma dos k primeiros termos da sequência). Agora, confira o que foi feito no Geogebra e explore o valor das somas parciais para valores maiores. Anote o número de termos e a soma parcial obtida, nos seus experimentos.
 - v. Se você fosse escrever uma fórmula para representar a soma de infinitos termos desta sequência, como você faria? Escreva.
 - vi. Observando os resultados do item iv, você mantém suas conclusões do item a-ix e a-x? Se não, em que você mudaria? Escreva, argumentando sobre as modificações.
- c) Em que ambiente você preferiu fazer as experimentações: no Geogebra ou no wxMaxima? Justifique.

4. Considere a sequência definida por $S_n = \frac{1}{n^2}$.

- a) Repita os procedimentos a) e b) do exercício anterior.
- b) Qual a diferença observada nas somas parciais entre este exercício e o anterior? A que você atribuiria tais diferenças?
- c) Expresse, simbolicamente, a conclusão obtida sobre a soma parcial de infinitos termos desta sequência.

5. Considere a série cuja soma dos primeiros termos é: $1-1+1-1+1-1+1\dots$

- a) Escreva uma fórmula que expresse a soma dada.
- b) Analise a soma. O que você pode dizer a respeito do seu valor? Escreva sua conclusão.

- c) Esta série é convergente? (se necessário, releia o significado de sequência convergente – exercícios 7 e 12 da parte A). Justifique.
- d) Como você explicaria a convergência de uma série (soma de termos de uma sequência)? Que critérios você usaria? Escreva sua explicação.
- e) Com suas palavras, defina uma série convergente.
- f) Em sua opinião, soma de termos de sequências alternadas (em que os termos mudam de sinal, um após o outro), pode ser convergente? Justifique.
- 6.** Considere a soma: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \dots$
- a) Encontre uma expressão matemática que forneça cada um dos termos da soma.
- b) Escreva a soma indicada de forma concisa (relembre o que foi feito na parte A, se necessário).
- c) Calcule a soma dos oito primeiros termos (S_8) dessa sequência (Se necessário, use os comandos dados no exercício 3). Escreva o resultado na forma concisa.
- d) À medida que se aumenta o número de termos somados, o que acontece com o valor da soma total?
- e) Baseado no item d, o que é possível afirmar sobre a convergência da série?
- f) Escreva sua conclusão sobre a série dada e expresse, na forma concisa, o valor da soma.
- 7.** Considere a seguinte definição de Convergência ou Divergência de uma série infinita: Uma série infinita $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ com uma soma parcial de ordem n , $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$ converge para a soma S se S é um número finito tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ e, nesse caso, escrevemos $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S$. No caso em que $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ não existe dizemos que a série diverge.
- a) Compare-a com a definição escrita por você no exercício 5-e. São semelhantes? Comente.
- b) Ambas as definições (sua e a “formal”) têm o mesmo significado? Comente.
- c) Se você respondeu sim à questão anterior, qual delas pode ser melhor compreendida por outros alunos? Por quê?
- 8.** Acrescente as relações desta parte C no seu mapa conceitual. Entregue-o.

Apêndice E - Atividades Componentes da parte D da Sequência Didática

Parte D

1. Considere a soma $\sum_{k=0}^n 2k$. Para os valores de $n = 2,3,4,5$:
 - a) Escreva as parcelas que representam a somatória.
 - b) Calcule o valor da soma para cada n dado.
 - c) Qual será o comportamento da soma se fizermos n crescer (aumentar de valor)?
 - d) Use sua imaginação: escreva um problema em que a somatória que você calculou no item a) seja a solução.
2. Considere a soma $\sum_{k=0}^n k^2$.
 - a) Escreva a soma correspondente quando $n = 3$.
 - b) Que significado geométrico você pode dar para a soma calculada? Explique.
3. Considere o intervalo $[2,4]$ e divida-o em 4 subintervalos de igual amplitude $\frac{1}{2}$. Considere:
 - A função $f(x) = x^2$, definida em $[2,4]$, e os pontos x_i que são os extremos esquerdos dos subintervalos;
 - O valor funcional de f em cada um desses quatro pontos x_i ($f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x_4)$);
 - A soma dos produtos $f(x_i) * (1/2)$
 - a) Qual a relação entre as parcelas $f(x_i) * (1/2)$ dessa soma, a função considerada sobre o intervalo e áreas de retângulos? Explique.
 - b) Use o papel milimetrado e desenhe a situação.
 - c) Se o intervalo fosse dividido em 10 partes iguais, qual seria a amplitude de cada subintervalo?
 - d) Se o intervalo fosse dividido em 20 partes iguais, qual seria a amplitude de cada subintervalo?
 - e) Observando suas respostas aos itens c e d, como você relaciona a amplitude do subintervalo com o comprimento do intervalo e ao número de partes? É possível escrever simbolicamente a amplitude de cada intervalo? Se sim, escreva.
 - f) Pense e descreva um método que permita calcular a área sob a curva $f(x) = x^2$ (isto é, da região que vai do eixo Ox até o gráfico da função) no intervalo $[2,4]$.
4. Considere o intervalo $[0,2]$ e divida-o em 4 subintervalos de igual amplitude $\frac{1}{2}$. Considere:
 - A função $f(x) = x^3$, definida em $[0,2]$, e os pontos x_i que são os extremos esquerdos dos subintervalos;
 - O valor funcional de f em cada um desses quatro pontos x_i ($f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x_4)$);
 - A soma dos produtos $f(x_i) * (1/2)$
 - a) Qual a relação entre as parcelas $f(x_i) * (1/2)$ dessa soma, a função considerada sobre o intervalo e áreas de retângulos? Explique.
 - b) Use o papel milimetrado e desenhe a situação.
 - c) Pense na situação em que o intervalo $[0,2]$ fosse dividido em n partes iguais, qual seria a amplitude de cada subintervalo? Escreva-a.

- d) Use o método que você descreveu no item f do exercício anterior e calcule a área sob a curva $f(x) = x^3$, no intervalo $[0,2]$. Qual foi a área?
- e) Escreva uma fórmula matemática que permita calcular essa área sob a curva $f(x) = x^3$, no intervalo $[0,2]$.
5. Considere a função $f(x) = x$ no intervalo $[0,2]$. Faça:
- No papel milimetrado, trace o plano cartesiano e esboce o gráfico da função $f(x)$.
 - Neste desenho, divida o intervalo $[0,2]$, no eixo horizontal, em 5 partes iguais. Qual o comprimento de cada parte? Como você obteve-o? Explique.
 - Em cada uma das partes, desenhe um retângulo em que a altura seja a imagem do extremo esquerdo do subintervalo, que é cada uma das partes.
 - Calcule a área de cada retângulo e, depois, some-as, escrevendo todas as parcelas antes do resultado final.
 - Usando a notação de somatório, como você escreveria essa soma do item d)?
 - Aumente o número de divisões do intervalo $[0,2]$ para 10 partes e responda os itens c, d, e. Anote suas conclusões.
 - Quais foram as dimensões (medidas) usadas para obter a área de cada retângulo? É possível relacioná-las com o tamanho do intervalo tomado e à função? Se sim, qual é a relação? Explique.
 - É possível escrever sua explicação ao item anterior de forma mais genérica? Se sim, escreva-a.
 - O que você escreveu no item h) faz com que sua escrita do item e) mude? Se sim, escreva a nova forma da escrita.
 - Na sua opinião, o que aconteceria se o número de divisões fosse aumentado para 20, 100 ou 1000? Explique.
 - Como você escreveria, simbolicamente, sua conclusão do item g)?
 - Abra um arquivo do Geogebra e faça o seguinte:
 - Faça o gráfico da função dada no intervalo pedido. Use o comando Função[<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>]
 - Digite $b=1$ e tecele enter. Mostre b como controle deslizante (basta clicar no botão que aparece à esquerda de b , caso não apareça automaticamente). Clique com o botão direito sobre b e vá em propriedades: $\min=1$, $\text{Max}=10000$ e $\text{incremento}=1$.
 - Use o comando “SomaDeRiemannInferior[<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>, b]” para que o aplicativo desenhe retângulos, como os feitos por você no papel milimetrado (item c). Use o b como sendo 5. Compare com o desenho feito por você. Ficou da mesma forma? Foi obtido o mesmo valor para a soma das áreas do retângulo (note que aparece na janela de álgebra do Geogebra uma expressão do tipo $a = 1.6$ - que denota a área total dos retângulos)? Se não, explique as diferenças.
 - No comando anterior, aumente o número de retângulos para 10 (basta mudar o valor de b no controle deslizante). Compare com os seus resultados. Comente as diferenças, se houver.
 - Vá aumentando o valor de b e observe o que acontece com os retângulos desenhados e o valor da área. A área se aproxima de algum valor específico? Se sim, qual? Explique o que acontece com os retângulos e a área.

- vi. Até qual valor de b foi possível enxergar os retângulos? Que justificativa você dá para o “sumiço” dos retângulos?
 - vii. Calcule a área sob a curva $f(x) = x$, no intervalo $[0; 2]$, usando alguma fórmula da geometria plana. Deu o mesmo resultado que o obtido no item v?
6. Considere a função $f(x) = x^2$ no intervalo de $[1,3]$.
- a) Repita os procedimentos descritos no exercício 3, inclusive redigindo as respostas pedidas.
 - b) Escreva suas conclusões a respeito da área sob a curva $f(x)$ no intervalo dado, enfatizando a escrita da área na forma simbólica.
7. Considere a função $f(x) = x^2 + 1$ no intervalo $[-2,2]$.
- a) Repita os procedimentos descritos no exercício 3, inclusive redigindo as respostas pedidas.
 - b) Escreva suas conclusões a respeito da área sob a curva $f(x)$ no intervalo dado, enfatizando a escrita da área na forma simbólica.
8. Considerando as atividades dos exercícios 4,5, 6 e 7, o que você pode concluir a respeito do cálculo da área sob o gráfico de uma função, num intervalo dado? Explique.
9. Usando a escrita concisa (simbólica) como você pode representar a área sob uma curva, num intervalo dado? Escreva.
10. Elabore e resolva uma questão que seja relativa a alguma situação que tenha surgido como dúvida, em relação ao cálculo de área. Explique a dúvida surgida e como o problema proposto ajudou-o a resolver.
11. Reveja o mapa conceitual elaborado para a parte C. Altere o que for necessário, inclusive acrescentando novos conceitos, e entregue novamente.

Apêndice F - Atividades Componentes da parte E da Sequência Didática

Parte E – Objetivo: Relacionar o cálculo de área por meio do limite da soma de n retângulos com o conceito de Integral Definida

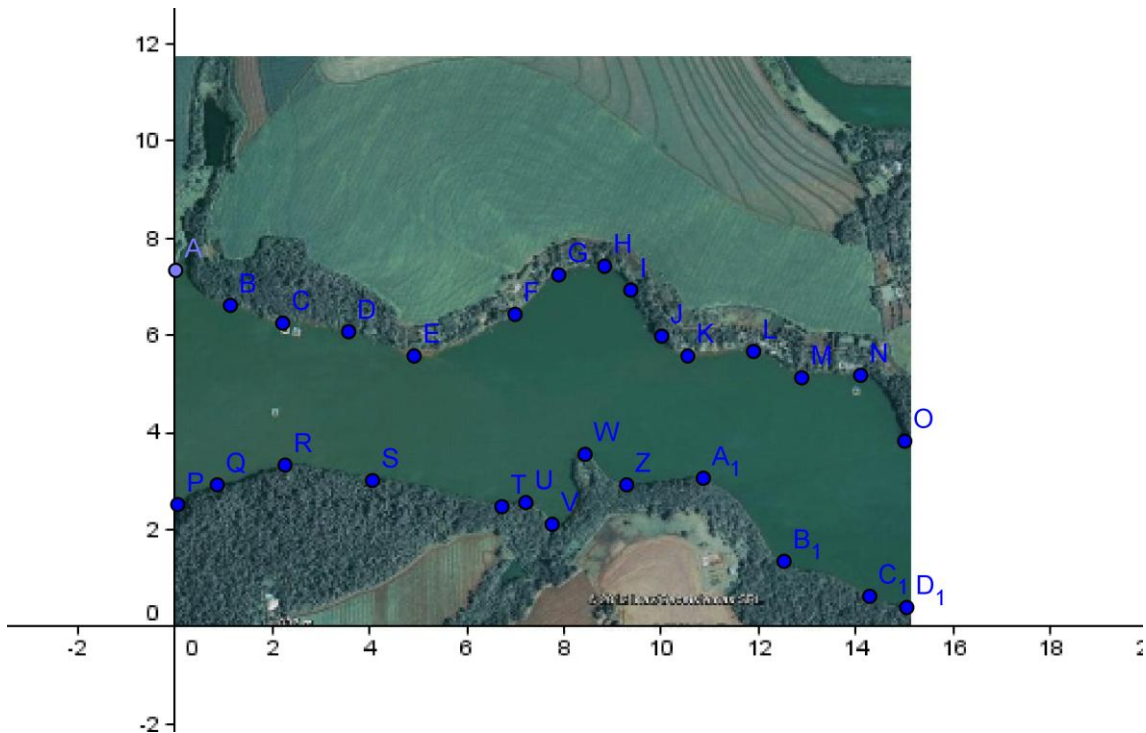
1. A figura abaixo representa parte do Parque Estadual Lago Azul, na Usina Mourão, em Campo Mourão – PR.



Fonte: Google Earth

Agora, siga as instruções:

- a) Salve-a no seu computador e, em seguida, insira-a no Geogebra (vá em Ferramentas – Objetos Especiais – Inserir Imagem : aparece um ícone “inserir imagem” na barra de ferramentas. Clique no triângulo que aparece no canto inferior direito do ícone e depois em algum lugar da área da janela de visualização. Vai abrir outra janela que pedirá pra abrir o arquivo onde está a figura. Arraste a imagem (clique antes no botão de seleção, aquele que tem uma seta) para coincidir o canto inferior esquerdo com a origem do sistema de eixos coordenados do Geogebra).
- b) Clique com o botão direito sobre a imagem, vá em “propriedades” e assinale a opção “imagem de fundo”.
- c) Selecione o ícone “Ponto” e marque pontos sobre as margens do lago, de modo que estes pontos representem bem essa margem. Pense nestes pontos como pertencentes ao gráfico de duas funções: uma função com a parte superior do lago e outra com a parte inferior. (Quando você clicar no lugar onde estará o ponto, na janela de visualização, as coordenadas dele aparecerão na janela de álgebra) – você deverá encontrar algo do tipo:



- d) Usando o comando: “RegressãoPolinomial[<Lista de Pontos>, <Grau>]” , encontre uma função polinomial que se adeque à margem superior do lago, isto é, o traçado do gráfico do polinômio deve estar próximo da linha que representa a margem do lago. (no comando, “Lista de Pontos” são os pontos marcados na margem superior do lago, e “grau” é o grau do polinômio desejado – vá testando valores para o grau pra ver o que melhor se adéqua – use a opção do controle deslizante e no lugar de “grau” use b, depois é só mudar o valor de b). Observação: se você tiver que escrever, por exemplo, o ponto D_1 no geogebra você deverá escrever D_1.
- e) Repita o procedimento d) para os pontos que delimitam a margem inferior do lago.
- f) Para cada uma das funções obtidas nos passos d) e e), faça:
- Calcule a área sob a curva, usando, no Geogebra, o comando: SomaDeRiemannInferior[<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>, <Número de Retângulos>] – observe a área sob a curva quando se altera o número de retângulos (comece com 10 retângulos, e depois aumente para 50, 100, 500 e 1000). Anote os resultados numa tabela. Descreva o que aconteceu com a área quando o número de retângulos foi aumentado. Que área foi calculada? De que modo? Que valor foi encontrado para a área? É possível aumentar ainda mais a quantidade de retângulos? Em que isso influencia no valor da área? *Obs.: no comando, você não precisa escrever a função toda, basta escrever o nome dado pelo programa, por exemplo, $f(x)$. Só tome cuidado com letras maiúsculas e minúsculas.*
 - Calcule a área sob a curva usando, no Geogebra, o comando: SomaDeRiemannSuperior[<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>, <Número de Retângulos>] – observe a área sob a curva quando se altera o número de retângulos (comece com 10 retângulos, e depois aumente para 50, 100, 500 e 1000). Anote os resultados numa tabela. Descreva o que aconteceu com a área quando o número de retângulos foi

aumentado. Que área foi calculada? De que modo? Que valor foi encontrado para a área? É possível aumentar ainda mais a quantidade de retângulos? Em que isso influencia no valor da área?

- g) Compare os resultados obtidos nos itens i) e ii) do procedimento f). O que acontece com eles? São próximos? Variam muito? Explique.
 - h) Em sua opinião, qual o método que os comandos dados em f) usam para calcular a área sob a curva? Detalhe-o.
 - i) Na geometria plana, como é calculada a área de um retângulo? Escreva.
 - j) Qual o comportamento, das dimensões dos retângulos criados no item f, que você pôde observar? Descreva.
 - k) O que aconteceu com a base do retângulo? E com a altura?
 - l) Se denotarmos a base de cada um dos retângulos por Δx e a altura por $f(x)$, usando o que já foi visto até o momento, que fórmula você escreveria para a área total sob a curva? Escreva-a.
 - m) Que valor você daria para a área do lago (da parte usada neste exercício)? Explique.
 - n) No Geogebra use os comandos dos itens i) e ii) de f, mas usando como função a diferença entre as funções dadas, isto é, $f(x) - g(x)$. Que valor você obteve? Foi semelhante ao obtido no item m. Que significado você atribui ao gráfico apresentado da área para este caso? Era o esperado? Comente.
2. Desenhe a parábola de equação $y = x^2$ no papel milimetrado.
- a) Analise e descreva um procedimento para calcular a área sob a parábola, no intervalo $[0,4]$.
 - b) Calcule a referida área usando esse procedimento.
 - c) Avalie a “qualidade” desse número resultante como área, isto é, analise se o valor estabelecido como área realmente pode representá-la sem muita diferença do valor real. Justifique.
 - d) Que notação matemática pode ser usada para escrever a área calculada no item c?
 - e) O procedimento descrito por você foi o mesmo usado no geogebra no exercício anterior? Se não, qual deles é mais fácil de ser usado? E entendido? Comente.
 - f) Use o Geogebra para calcular a área pedida. Explícite e justifique os comandos usados.
3. Encontre uma aproximação da área da região R sob o gráfico de $f(x) = x^3 + 1$ no intervalo $[0,3]$ e analise a “qualidade” da sua aproximação de área. Em seguida, escreva-a matematicamente e descreva o método de cálculo da área.
4. Para cada um dos itens seguintes, faça: (mas só passe ao item seguinte após realizar o item anterior)
- a) Use uma fórmula apropriada da geometria plana para estimar a área entre o gráfico de f e o eixo x , no intervalo dado.
 - b) Faça aproximações A_1, A_2, \dots, A_{10} da área exata, onde A_n é a aproximação que resulta na divisão do intervalo em n subintervalos iguais e construindo um retângulo em cada subintervalo, cuja altura é a coordenada y da curva $y = f(x)$ no extremo direito. Nota: no Geogebra você pode fazer isso usando o comando `SomaDeRiemannSuperior[<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>, <Número de Retângulos>]`

- c) Analise o comportamento da área da função dada, a partir do momento em que o número de retângulos aumenta. (Extrapole o número de retângulos e observe). O que você observa? Explique.
- d) Compare os resultados obtidos nos itens a e c. O que você observa? Os valores ficaram próximos? Descreva.
- e) O procedimento descrito no item b é chamado de método dos retângulos. Compare esse método com o criado por você nos exercícios 2 e 3.
 - e.1. Qual deles é mais fácil de ser utilizado, por quê?
 - e.2. Qual deles é mais fácil de ser padronizado, por quê?
- a) $f(x) = x$; $[0,1]$
- b) $f(x) = 4 - 2x$; $[0,2]$
- c) $f(x) = 6x + 2$; $[0,2]$
- d) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$; $[0,1]$

5. Considere a seguinte definição:

“A *Integral Definida*: Seja f definida em $[a, b]$. Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x$ existe para todas as escolhas de pontos representativos x_1, x_2, \dots, x_n nos n subintervalos de $[a, b]$ de igual comprimento $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, então este limite é chamado de **Integral**

Definida de f de a até b é denotado por $\int_a^b f(x) dx$. Assim,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x_i \quad (1)$$

O número a é o extremo inferior de integração, e o número b é o extremo superior de integração.”

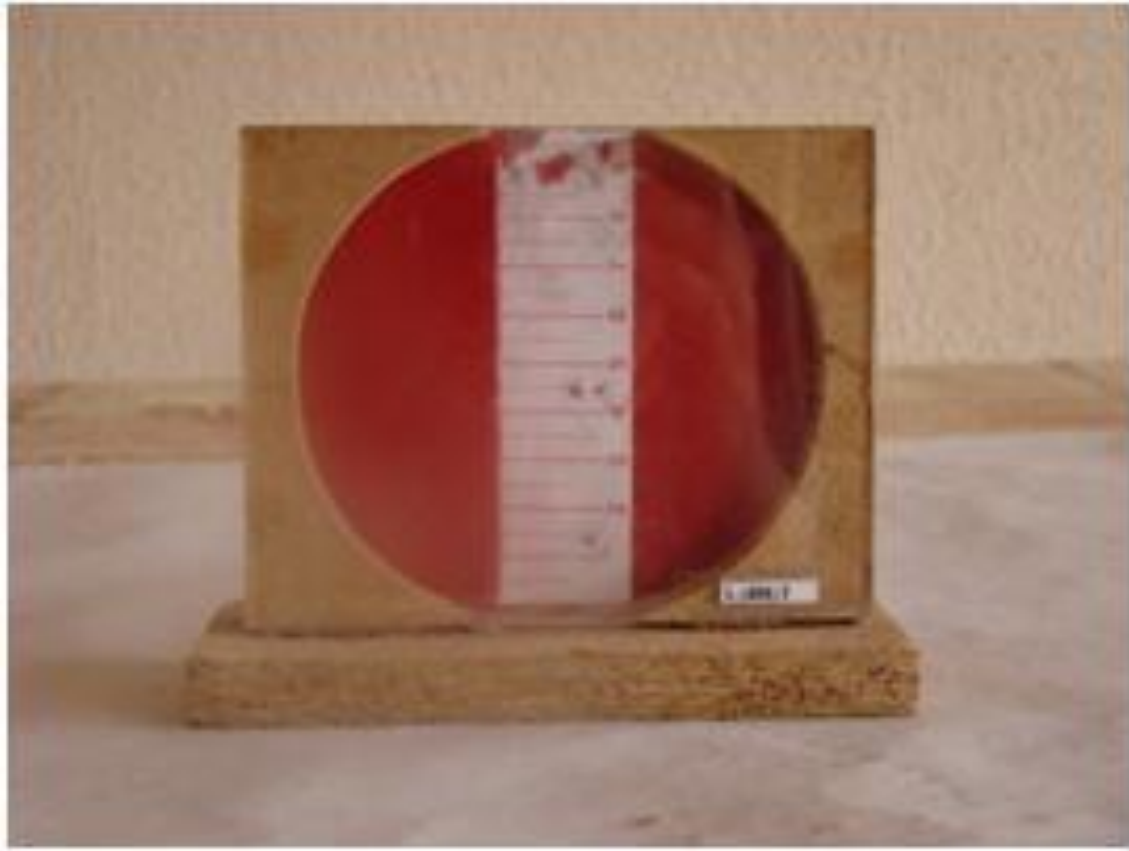
- a) Como você interpreta a definição acima? O que ela diz para você? Explique.
 - b) A expressão que aparece à direita em (1) tem sido usada para representar o quê?
 - c) Qual o significado que você atribui ao limite que aparece na definição?
 - d) É possível escrever sua observação do item c, exercício 4, usando a notação $\int_a^b f(x) dx$? Se sim, escreva-a. Se não, justifique.
 - e) É possível escrever sua observação do item c usando a notação sigma (usando o somatório)? Se sim, escreva-a. Se não, justifique.
 - f) No Geogebra, a Integral Definida é calculada mediante o comando: “Integral[<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>]”. Experimente usar este comando para as funções do exercício 4. Compare com os resultados que você havia encontrado e comente.
 - g) No wxMaxima, a Integral Definida é calculada pelo comando: “integrate(função,variável,x inicial,x final)”. Use-o com as funções do exercício 4. Compare os resultados com os obtidos por você no exercício 4 e no item 5-f. Comente.
6. Para a função $f(x) = x^2 + 1$:
- a) Faça o seu gráfico no intervalo $[0,4]$;
 - b) Calcule suas somas superiores e suas somas inferiores no intervalo $[0,4]$, para $n=4, 8, 16, 32, 64, 128, 1024$.

- c) Escreva os resultados em forma de sequência: s_n para as somas inferiores e S_n para as superiores;
- d) Intuitivamente, percebe-se que $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ existem e são iguais. Qual interpretação geométrica você atribuiria a esse valor comum?
- e) Encontre um valor aproximado para $\int_0^4 f(x) dx$. Qual a interpretação que você atribui a essa integral?
7. Repita os itens do exercício anterior para $f(x) = x^2 - 9$ no intervalo $[0,3]$. Destaque a região correspondente entre o eixo x e o gráfico de $f(x)$. Além disso, responda:
- Porque os retângulos de S_n estão no interior da região e não *circunscritos*, como no caso anterior?
 - Qual a área aproximada da região em destaque?
 - Porque S_n e s_n são negativas?
 - Qual a relação entre a área e a integral?
 - Usando a notação de integral como você escreve a área sob o gráfico da função $f(x) = x^2 - 9$ no intervalo $[0,3]$.
8. A imagem seguinte é do Ginásio de Esportes Belin Carolo, cedido pela Prefeitura Municipal para implantação da instituição que é hoje a UTFPR.



- Pense e descreva um método que calcule a área da cobertura do ginásio a partir da foto mostrada.
 - Como você poderia usar seus conhecimentos de Integral Definida para calcular essa área? O que seria necessário? Como obter? Explique.
 - Use a Integral Definida e calcule a área da cobertura do Ginásio de Esportes.
9. Reveja o mapa conceitual anterior e modifique o que for necessário. Acrescente os novos conceitos e entregue sua nova versão.

Apêndice G - Fotos do material manipulável

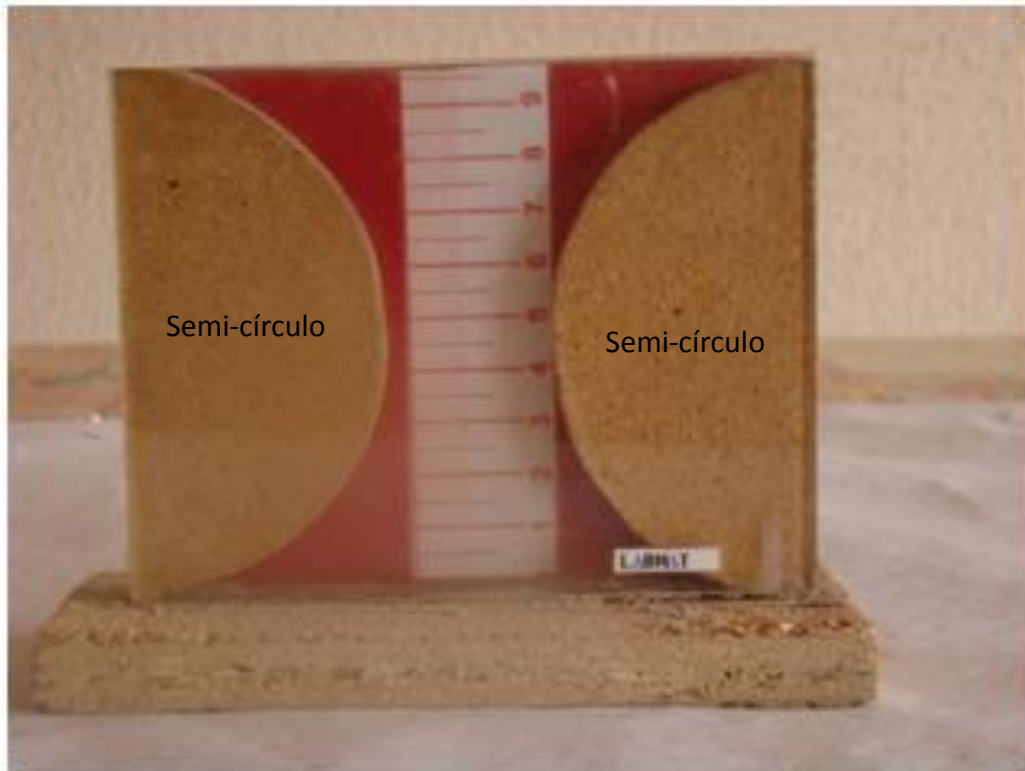


Material 1

*Descrição*⁸⁹: A parte de trás do material é uma madeira (fórmica vermelha) de espessura 2mm, comprimento e altura com 10cm. Há uma fita impressa em papel⁹⁰ com escala em centímetros colada verticalmente (bem ao centro) nesta fórmica, sendo que o zero está ao nível do “chão” do material. Sobre esta fórmica ainda é colada uma madeira de espessura 1 cm, na forma de *meia lua* (esta figura é obtida considerando-se um círculo inscrito em um quadrado, ao se retirar o círculo da madeira e dividir a parte restante em duas partes iguais, cada uma delas é uma das partes que foram coladas na borda deste material, deixando um buraco de 2 cm na parte superior, por onde é colocada a areia). Para evitar que a areia escorregue para fora do material, e ainda permitir que o mesmo fique em pé, esta estrutura é colada sobre uma madeira de dimensões 12 cm X 4 cm X 1cm.

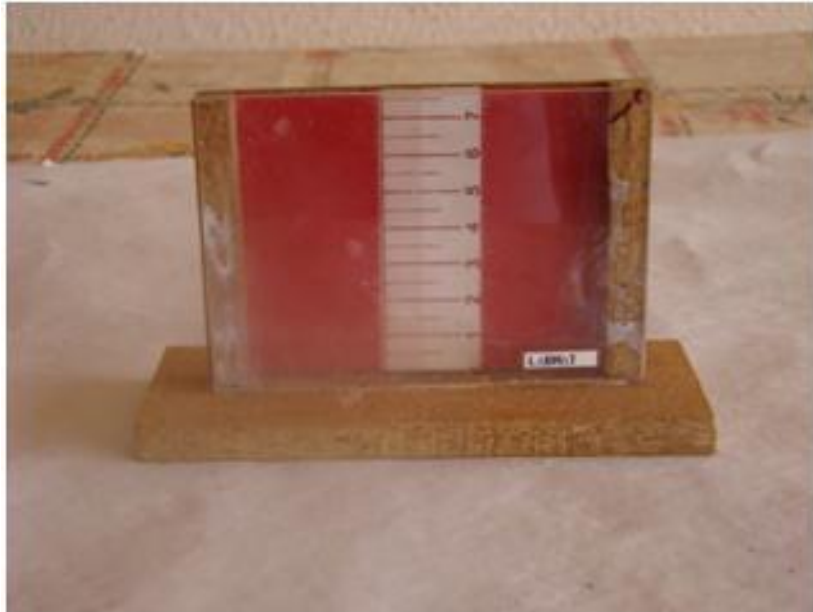
⁸⁹Todos os seis materiais aqui mostrados tem a mesma estrutura, só muda a parte interior, que é colada sobre o fundo.

⁹⁰No material desta foto a fita está rasurada na parte superior.



Material 2

Descrição: é montado da mesma maneira que o material 1. A parte colada sobre o fundo é o retirado da madeira para fazer o material 1.



Material 3



Material 4

Descrição: Estes materiais são formados do mesmo modo que os anteriores, com bordas sendo prismas retangulares de base quadrada de aresta 1 cm. A diferença entre eles está nas medidas da largura e altura, o 3 é mais largo e mais baixo, enquanto o material 4 é mais estreito e alto.



Material 5

Descrição: O fundo é uma fórmica vermelha, com frente em placa de vidro e fechado lateralmente por triângulos retângulos de altura igual a do material, obtidos pelo corte na diagonal de um retângulo.



Material 6

Descrição: a parte interna é obtida pela divisão de um quadrado de diagonal igual a altura do material manipulável em dois triângulos retângulos iguais (isto é, o corte é feito na diagonal).

Apêndice H - Comandos no Geogebra

Comando 1: Inserção de pontos.

Abra um arquivo novo. No campo de entrada, entre com os valores das coordenadas do ponto entre parênteses e separados por uma vírgula. Isto é, escreva os pares ordenados na forma (variável independente, variável dependente). Exemplo: para inserir o ponto A(2,4), escreva no campo de entrada: (2,4) tecler enter. Aparecerá, na janela de álgebra, o ponto A=(2,4).

Obs.: Caso você tenha que escrever o número 3,24 (três vírgula vinte e quatro), por exemplo, você deve escrever 3.24 (três ponto vinte e quatro).

Comando 2: controle deslizante.

Insira no campo de entrada: b=1, tecler enter. (aparecerá b=1 como objeto livre)

Certifique-se que a bolinha que aparece ao lado de b=1 esteja marcada (isso fará com que apareça um segmento de reta na janela gráfica, representando esta variável)

Clique com o botão direito sobre a expressão b=1, clique em propriedades > controle deslizante > mínimo = 0, máximo = 200, incremento: 1 > Fechar.

Observação:

- 1) é possível usar qualquer letra para o controle deslizante, não precisa ser b. Numa mesma tarefa pode aparecer mais de um controle deslizante, isso não trará problemas, desde que sejam nomeados com letras diferentes.
- 2) O incremento representa a variação desejada para esta variável. Há momentos em que esta variável assume valores muito próximos de zero, neste caso, para o incremento deve ser usado o valor 0.1; noutros casos, a variável assume valores inteiros (como é o caso dos graus dos polinômios), e o valor adequado para o incremento deve ser 1. Verifique o contexto (a finalidade) para o qual o controle deslizante será usado.

Comando 3: interpolação por pontos de uma função

Certifique-se que todos os pontos a serem usados na interpolação estejam inseridos no arquivo do Geogebra.

Use a interpolação Polinomial para obter uma função do tipo:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0.$$

Para isso, use o comando: RegressãoPolinomial[<Lista de Pontos>, <Grau>]

Observação 1: Neste comando,

- “Lista de Pontos” - representa as letras dadas aos pontos (as que aparecem na janela de álgebra), por exemplo: A,B,C,... – elas devem ser escritas tal qual aparecem na janela de álgebra, separados por uma vírgula. Se você tiver que escrever, por exemplo, o ponto D_1 , no Geogebra você deverá escrever D_1 .
- “Grau” – refere-se ao grau da função (maior expoente para a variável independente x).
- Neste comando, você pode usar o controle deslizante para facilitar encontrar o valor do grau adequado aos pontos. Para isso, basta colocar b no lugar de <Grau> - certifique-se que o controle tenha sido inserido como indicado no comando 2.

Observação 2: Para saber qual a melhor função polinomial interpoladora, observe a distância entre o traçado do gráfico feito pelo software e os pontos. Quanto mais próximos eles estiverem, melhor representará a função.

Para qualquer outro tipo de interpolação, basta substituir a palavra “Polinomial” do comando por “exponencial”, “logarítmica” ... conforme desejado.

Comando 4: Representação Gráfica de uma sequência em \mathbb{R}^2 (plano cartesiano).

Basta inserir as respectivas informações no comando: “Sequência [<(variável, expressão)>, <variável>, <valor inicial>, <valor final>]”.

Observações:

- Variável: letra usada para a variável independente – observe na fórmula do termo geral da sequência.
- Expressão: é a expressão algébrica que determina o termo geral da sequência (Tome cuidado com os parênteses).
- Valor inicial: é a ordem do 1º termo desejado (normalmente usa-se 1, por se querer a sequência desde o primeiro termo)
- Valor final: número de termos desejados. *Pode-se inserir o controle deslizante para observar a sequência aumentando-se o número de termos. Basta para isso,*

acrescentar “b=1” antes de iniciar o comando 4, e substituir o “valor final” do comando 4 por “b” (para mais informações veja o comando 2).

Comando 5: Representação Gráfica de uma sequência em \mathbb{R} (na reta)

- digite $k=1$ e tecle Enter.
- Digite o comando Sequência[(expressão, 0), n, 1, k]
- Clique com o botão direito no campo k e escolha Propriedades. Escolha min=0, max=100, Incremento=1 e Largura =200. Feche a janela de Propriedades.

Comando 6: Soma de termos de uma sequência

Comando: soma(Sequência[<Expressão>, <Variável>, <Valor Inicial>, <Valor Final>])

Observações:

Expressão = a expressão geral dos termos da sequência.

Valor Final: pode ser substituído pelo controle deslizante. Basta, antes de digitar o comando soma, escrever: $b = 1$ (propriedades: min=1, Max=1000, incremento = 1).

Depois, no comando soma, substitui-se o <Valor Final> por . Para alterar o valor de b, basta clicar sobre o desenho que aparece na janela gráfica (caso não apareça automaticamente, basta clicar sobre a bolinha que aparece antes da expressão $b = 1$ na janela de álgebra)

Comando 7: Construção das faixas (retas horizontais)

Use o comando: “ $e=0.5$ ”, “ $y=L+e$ ” e “ $y=L-e$ ” onde:

L = Limite da sequência.

e = valor que servirá como parâmetro para a amplitude da faixa (programe-o para min=0, Max=10, incremento = 0.1)

Comando 8: Gráfico de função num intervalo.

Comando: Função[<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>]

Comando 9: Área sob uma curva usando a Soma Superior de Riemann

- Digite $b = 1$ e tecle enter. Mostre b como controle deslizante (basta clicar no botão que aparece à esquerda de b, caso não apareça automaticamente).

Clique com o botão direito sobre b e vá em propriedades: $\text{min}=1$, $\text{Max}=10000$ e $\text{incremento}=1$.

- b) Digite o comando: “SomaDeRiemannInferior[<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>, b]” (aparecerá na janela de álgebra do Geogebra uma expressão do tipo $a = \text{valor}$ - que denota a área total dos retângulos que estão sendo considerados).

Obs.: no comando, você não precisa escrever a função toda, basta escrever o nome dado pelo programa, por exemplo, $f(x)$. Só tome cuidado com letras maiúsculas e minúsculas.

Comando 10: Área sob uma curva usando a Soma Inferior de Riemann

1. Digite $b = 1$ e tecle enter. Mostre b como controle deslizante (basta clicar no botão que aparece à esquerda de b , caso não apareça automaticamente). Clique com o botão direito sobre b e vá em propriedades: $\text{min}=1$, $\text{Max}=10000$ e $\text{incremento}=1$. *Faça isso apenas se você não tiver feito isso para o comando 9.*
2. Digite o comando: “SomaDeRiemannInferior[<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>, b]” (aparecerá na janela de álgebra do Geogebra uma expressão do tipo $a = \text{valor}$ - que denota a área total dos retângulos que estão sendo considerados).

Obs.: no comando, você não precisa escrever a função toda, basta escrever o nome dado pelo programa, por exemplo, $f(x)$. Só tome cuidado com letras maiúsculas e minúsculas.

Comando 11: inserir Imagem de fundo num arquivo do Geogebra.

1. Salve-a no seu computador ou mídia removível
2. Na barra de ferramentas do Geogebra siga o caminho: Ferramentas > Objetos Especiais > Inserir Imagem > clique em algum lugar da janela gráfica do Geogebra. Vai abrir outra janela que pedirá pra abrir o arquivo onde está a figura. Arraste a imagem (*clique, antes, no botão de seleção, aquele que tem uma seta*) para coincidir o canto inferior esquerdo com a origem do sistema de eixos coordenados do Geogebra.
3. Clique com o botão direito sobre a imagem, vá em “propriedades” e assinale a opção “imagem de fundo”.

Observação: pode ser que já esteja na barra de ferramentas do seu Geogebra o ícone



. Se sim, clique no triângulo que aparece no canto inferior direito do ícone e depois em algum lugar da área da janela de visualização. Aparecerá a janela que permitirá inserir o arquivo da figura desejada.

Nota: a figura deve estar em formato de figura (.jpeg ou outro).

Comando 12: Área sob uma curva usando a Integral Definida

Integral[<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>]

Comando 13: Área entre curvas usando a Integral Definida.

IntegralEntre[<Função>, <Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>]

Observação: Insira, primeiro, a função que, no intervalo considerado, possui gráfico acima do gráfico da outra.