

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO ACADÊMICO DE CONSTRUÇÃO CIVIL
CURSO DE ENGENHARIA CIVIL

ANA RAÍZA CISCOTO YOSHIOKA

**AVALIAÇÃO EXPERIMENTAL DA APLICAÇÃO DO MÉTODO DAS
DIFERENÇAS NAS CURVATURAS MODAIS PARA DETECÇÃO DE
DANOS EM PERFIS METÁLICOS**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

CAMPO MOURÃO

2016

ANA RAÍZA CISCOTO YOSHIOKA

**AVALIAÇÃO EXPERIMENTAL DA APLICAÇÃO DO MÉTODO DAS
DIFERENÇAS NAS CURVATURAS MODAIS PARA DETECÇÃO DE
DANOS EM PERFIS METÁLICOS**

Trabalho de Conclusão de Curso de graduação, apresentado à disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso 2, do curso superior de Engenharia Civil do Departamento Acadêmico de Construção Civil – da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Rodrigo Carreira

CAMPO MOURÃO

2016



Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Câmpus Campo Mourão
Diretoria de Graduação e Educação Profissional
Departamento Acadêmico de Construção Civil
Coordenação de Engenharia Civil



TERMO DE APROVAÇÃO

Trabalho de Conclusão de Curso

AVALIAÇÃO EXPERIMENTAL DA APLICAÇÃO DO MÉTODO DAS DIFERENÇAS NAS CURVATURAS MODAIS PARA DETECÇÃO DE DANOS EM PERFIS METÁLICOS

por

Ana Raíza Ciscoto Yoshioka

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi apresentado às 14h do dia 13 de Junho de 2016 como requisito parcial para a obtenção do título de ENGENHEIRA CIVIL, pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Após deliberação, a Banca Examinadora considerou o trabalho aprovado.

Prof. Dr. Ronaldo Rigobello

(UTFPR-CM)

Prof. Me. Jeferson Rafael Bueno

(UTFPR-CM)

Prof. Dr. Marcelo Rodrigo Carreira

(UTFPR-CM)

Orientador

Responsável pelo TCC: **Prof. Me. Valdomiro Lubachevski Kurta**

Coordenador do Curso de Engenharia Civil:

Prof. Dr. Marcelo Guelbert

A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do Curso.

DEDICATÓRIA

"A Olavo Yoshioka, meu pai e engenheiro civil, com quem pude perceber que a Engenharia não é feita apenas de cálculos e medidas, mas também de criatividade, improvisos e riqueza de detalhes."

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar e acima de tudo, agradeço a Deus por todas as bênçãos e proteção ao longo do meu caminhar.

A meus pais, Olavo e Madalena, pela força, fé e otimismo transmitidos em cada conselho e por todo o carinho, amor e compreensão. A eles, serei eternamente grata pela educação recebida e pelos valores ensinados. A minha irmã, Anara, grande companheira e amiga, por sempre andar ao meu lado, rir comigo nas boas horas e estender sua mão nos momentos difíceis. Aos demais familiares - tios, tias, primos, primas e avó - por todo o apoio e oração.

A meu orientador, Prof. Dr. Marcelo Rodrigo Carreira, exemplar como pessoa e admirável em sua vocação, pela amizade, pela colaboração e esforço na realização deste trabalho. Seus ensinamentos serão de grande importância e inspiração no decorrer de minha profissão. Que Deus possa lhe retribuir em muitas alegrias e bênçãos ao longo de sua vida.

Ao Prof. Dr. Adilandri Mércio Lobeiro, orientador de Iniciação Científica, com quem aprendi boa parte dos conceitos matemáticos aqui embasados, agradeço pelo incentivo, pela motivação e confiança.

À Prof. Msc Sara Coelho, pela recepção no início do curso, apresentando-me o quão fascinante é a Engenharia e suas aplicações e; à Prof. Msc. Viviane Colucci, por cooperar em meus estudos referentes às Séries de Fourier.

Aos professores Dr. Ronaldo Rigobello e Dr. Leandro Waidemam pelo auxílio nas atividades de estágio, juntamente aos demais professores do Departamento Acadêmico de Construção Civil (DACOC-CM), agradeço pelo conhecimento transmitido, por serem prestativos e por solucionar minhas dúvidas.

Aos meus queridos amigos: Ana Paula, Bruna Maia, Bruna Ayres, Daniel, Déborah, Gabriel, Haddan, Lucas, Rafael, Renan, Sheila e Taciane. Em todos esses anos de graduação, compartilhamos alegrias, bons momentos e muitos sorrisos. Obrigada a todos pela palavra amiga e por tornarem os dias mais bonitos. Guardá-los-ei em minha memória e em meu coração.

Aos colegas de curso e de iniciação científica que, direta ou indiretamente, contribuíram para minha formação, trocando experiências e aprendizados.

Também, aos demais envolvidos que, de alguma forma, ajudaram na realização deste sonho.

Quanta sorte tenho em encontrar pessoas de tão grande valor no meu caminho!

EPÍGRAFE

"Pois quando a sabedoria entrar no teu coração, e o conhecimento for agradável à tua alma,
O bom siso te guardará e a inteligência te conservará."
(Provérbios 2:10;11)

RESUMO

YOSHIOKA, A.R.C. **Avaliação Experimental da Aplicação do Método das Diferenças nas Curvaturas Modais para Detecção de Danos em Perfis Metálicos**. 2016. 73f. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Engenharia Civil) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Campo Mourão, 2016.

A Engenharia de Estruturas tem avançado em suas técnicas de dimensionamento e, principalmente, diagnóstico de patologias e vida útil de suas construções. Existem várias metodologias para verificar a estabilidade de uma estrutura e, dentro da Avaliação Não Destrutiva, é relevante citar a Detecção de Danos via Análise Modal. Considerando que a presença de fissuras nos materiais altera as propriedades elásticas (rigidez) e as propriedades dinâmicas (frequências naturais, amortecimentos e deslocamentos modais) o Método das Diferenças nas Curvaturas Modais tem sido amplamente discutido para a detecção desses danos nos elementos estruturais. Neste trabalho, é realizado um estudo de caso com vigas metálicas em suspensão livre-livre e inserção de danos em pontos pré-definidos, com o objetivo de investigar a viabilidade do método. Conhecidas as propriedades físico-geométricas dos perfis, foram calculadas as diferenças das curvaturas dos seis primeiros modos de flexão, numa faixa de frequência de 0 a 700 Hz. Foram analisadas também as variações entre as frequências naturais e amortecimentos das vigas intactas e danificadas. A interferência de ruídos nas medições foi significativa quando admitidos apenas três modos de vibrar. Concluiu-se que, com pelo menos 5 modos de flexão e, com medições com baixo nível de ruído, o método é eficiente na detecção e localização de um dano e de dois danos simultâneos.

Palavras-chave: Análise Modal Experimental, Avaliação Não Destrutiva, Curvaturas Modais, Detecção de Danos.

ABSTRACT

YOSHIOKA, A.R.C. **Experimental Evaluation of the Change in Modal Curvatures Method for Damage Detection in Steel Profiles.** 2016. 73f. Final Paper (Bachelor Degree) - Federal Technological University of Paraná (UTFPR), Campo Mourão, 2015.

The structural engineering has advanced in design techniques and, mainly, in pathologies diagnosis and lifespan of your buildings. There are several methodologies for verify stability of a structure and, within Non-Destructive Evaluation, it is relevant to mention the Damage Detection by Modal Analysis. Considering that cracks presence in materials modifies elastic properties (stiffness) and dynamic mechanical properties (natural frequencies, damping and modal displacements), the Changes in Modal Curvatures Method has been widely discussed for detection of these damages in structural elements. In this paper was performed a study case with steel profiles in free-free support condition and insertion of damages in predefined points, with the aim of to investigate method viability. By the physical-geometric properties of structural shapes, it was calculated the changes between curvatures of first six modes, in a frequency band from 0 to 700 Hz. It was analyzed also variance among natural frequencies and damping of intact beam and damaged beam. The interference of noises in measurements was meaningful when admitted only three mode shapes. As a final result, at least five mode shapes, and measurement of low noise level, the method is efficient in detection and location of one damage and two simultaneous damages.

Keywords: Experimental Modal Analysis, Non-Destructive Evaluation, Modal Curvatures, Damages Detection.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Modelo de 1 GDL ideal	16
Figura 2 – Movimento Harmônico Simples.	17
Figura 3 – Receptância $H(\omega)$	19
Figura 4 – Modelo de 2 GDL ideal	20
Figura 5 – Primeiro e segundo modos de vibração de uma viga biapoiada.	23
Figura 6 – Receptância H_{11} de um sistema de múltiplos graus de liberdade.....	25
Figura 7 – Viga sujeita a carregamento dinâmico	26
Figura 8 – Representação esquemática do sistema de excitação e medição..	29
Figura 9 – Diferentes Mecanismos de Excitação	30
Figura 10 – Modo de Corpo Rígido.....	34
Figura 11 – Perfis de aço-carbono adquiridos para os ensaios.....	37
Figura 12 – Seção transversal do tubo retangular de aço-carbono.	37
Figura 13 – Corte na seção transversal, ponto 7, em $0,3L$	38
Figura 14 – Posição dos danos.	39
Figura 15 - Configuração do Ensaio de Vibração Transversal.....	39
Figura 16 – Disposição dos equipamentos utilizados.....	40
Figura 17 – Martelo de impulso com ponta de plástico e contato de borracha, excitação no GDL 11 (meio do vão).	40
Figura 18 – Plataforma do software Impact e parâmetros para as medições.	41
Figura 19 – Deslocamentos dos três primeiros modos de flexão de uma viga em suspensão livre.....	42
Figura 20 – Curvaturas dos primeiros 6 modos de vibrar de uma viga intacta em suspensão.	43
Figura 21 – Esquema estático do ensaio de flexão.....	44
Figura 22 – Alteração do 1º e 2º Modos de Flexão de V1 para V1'	49
Figura 23 – Alteração do 3º e 4º Modos de Flexão de V1 para V1'	49
Figura 24 – Alteração do 5º e 6º Modos de Flexão de V1 para V1'	50
Figura 25 – Alteração dos 1º e 2º Modos de Flexão de V2 para V2'.....	50
Figura 26 – Alteração do 3º e 4º Modos de Flexão de V2 para V2'	51
Figura 27 – Alteração do 5º e 6º Modos de Flexão de V2 para V2'	51
Figura 28 – Alteração do 1º e 2º Modos de Flexão de V3 para V3'	52
Figura 29 – Alteração do 3º e 4º Modos de Flexão de V3 para V3'	52
Figura 30 – Alteração do 5º e 6º Modos de Flexão de V3 para V3'	53
Figura 31 – Diferença Relativa entre as Curvaturas Modais da Viga V1.	53
Figura 32 – Diferença Relativa entre as Curvaturas Modais da Viga V2.	54
Figura 33 – Diferença Relativa entre as Curvaturas Modais da Viga V3.	54
Figura 34 – Detecção de Dano em V1.....	55
Figura 35 – Detecção de Dano em V2.....	55
Figura 36 – Detecção de Dano em V3.....	56
Figura 37 – Localização de dano com apenas 5 modos, em V1'	57
Figura 38 – Localização de dano com apenas 4 modos, em V1'	57
Figura 39 – Localização de dano com apenas 3 modos, em V1'	57
Figura 40 – Localização de dano com apenas 5 modos, em V2'	58
Figura 41 – Localização de dano com apenas 4 modos, em V2'	58
Figura 42 – Localização de dano com apenas 3 modos, em V2'	58
Figura 43 – Localização de dano com apenas 5 modos, em V3'	59
Figura 44 – Localização de dano com apenas 4 modos, em V3'	59
Figura 45 – Localização de dano com apenas 3 modos, em V3'	59

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Propriedades físico-geométricas dos perfis utilizados.....	37
Tabela 2 – Redução de inércia nas seções transversais danificadas.....	38
Tabela 3 – Valores λL	45
Tabela 4 – Resultados do ensaio de flexão.....	46
Tabela 5 – Frequências Naturais Estimadas (Hz).....	46
Tabela 6 – Comparação entre as frequências da Viga V1 antes e após o dano.....	46
Tabela 7 – Comparação entre as frequências da Viga V2 antes e após o dano.....	47
Tabela 8 – Comparação entre as frequências da Viga V3 antes e após o dano.....	47
Tabela 9 – Comparação entre os amortecimentos da Viga V1 antes e após o dano	47
Tabela 10 – Comparação entre os amortecimentos da Viga V2 antes e após o dano	48
Tabela 11 – Comparação entre os amortecimentos da Viga V3 antes e após o dano	48
Tabela 12 – Frequências, Amortecimentos e Deslocamentos de V1 Íntegra para 6 modos analisados	63
Tabela 13 – Frequências, Amortecimentos e Deslocamentos de V1 Danificada para 6 modos analisados	63
Tabela 14 – Frequências, Amortecimentos e Deslocamentos de V2 Íntegra para 6 modos analisados	63
Tabela 15 – Frequências, Amortecimentos e Deslocamentos de V2 Danificada para 6 modos analisados	63
Tabela 16 – Frequências, Amortecimentos e Deslocamentos de V3 Íntegra para 6 modos analisados	63
Tabela 17 – Frequências, Amortecimentos e Deslocamentos de V3 Danificada para 6 modos analisados	63
Tabela 18 – Diferenças Absolutas e Relativas entre as Aproximações das Curvaturas das Vigas V1 e V1'	63
Tabela 19 – Multiplicação das Diferenças Relativas para Detecção e Localização de Dano, utilizando de 3 a 6 modos de vibrar (V1).	63
Tabela 20 – Diferenças Absolutas e Relativas entre as Aproximações das Curvaturas das Vigas V2 e V2'	63
Tabela 21 – Multiplicação das Diferenças Relativas para Detecção e Localização de Dano, utilizando de 3 a 6 modos de vibrar (V2).	63
Tabela 22 – Diferenças Absolutas e Relativas entre as Aproximações das Curvaturas das Vigas V3 e V3'	63
Tabela 23 – Multiplicação das Diferenças Relativas para Detecção e Localização de Danos, utilizando de 3 a 6 modos de vibrar (V3).	63

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	12
2 OBJETIVOS	13
2.1 OBJETIVO GERAL	13
2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS	13
3 JUSTIFICATIVA	14
4 REVISÃO DE LITERATURA	15
4.1 ANÁLISE MODAL TEÓRICA	16
4.1.1 Sistemas Discretos – 1 Grau de Liberdade	16
4.1.1.1 Vibração Livre.....	16
4.1.1.2 Receptância de um Sistema com Um Grau de Liberdade	18
4.1.2 Sistemas Discretos – Múltiplos Graus de Liberdade	19
4.1.2.1 Vibrações Livres Sem Amortecimento – Método Direto.....	21
4.1.2.2 Condições de Ortogonalidade	22
4.1.2.3 Vibrações Forçadas Sem Amortecimento – Método da Superposição Modal..	23
4.1.2.4 Vibrações Amortecidas – Amortecimento Proporcional de Rayleigh	24
4.1.2.5 Função de Resposta em Frequência	25
4.1.3 Sistemas Contínuos	26
4.1.3.1 Vibração Transversal de Vigas	26
4.2 ANÁLISE MODAL EXPERIMENTAL	27
4.2.1 Hipóteses Básicas	28
4.2.2 Configurações de Ensaio	28
4.2.3 Procedimentos de Ensaio	28
4.2.4 Mecanismo de Excitação.....	29
4.2.5 Mecanismo de Medição	30
4.2.5.1 Transdutores	31
4.2.5.2 Amplificadores/Condicionadores de Sinal.....	31
4.2.5.3 Processamento de Sinais Digitais por FFT (<i>Fast Fourier Transform</i>)	31
4.2.6 Função Coerência.....	32
4.2.7 Identificação dos Parâmetros Modais	33
4.2.8. Exemplos de Aplicação da Análise Modal Teórica e Experimental.....	34
5 MATERIAIS E MÉTODOS.....	37
5.1 MATERIAIS.....	37
5.2 MÉTODOS	38
5.2.1 Simulação Dos Danos	38
5.2.2 Ensaio de Vibração Transversal.....	39
5.2.3 Determinação Analítica dos Modos de Flexão	41
5.2.4 Determinação Experimental dos Modos de Flexão	42
5.2.5 Cálculo das Curvaturas Modais	42
5.2.6 Detecção e Localização dos Danos	43
5.2.7 Alteração nas Frequências Naturais	43
5.2.8 Ensaio de Flexão Estática.....	44
6 RESULTADOS E DISCUSSÕES.....	46

6.1 RESULTADOS	46
6.1.1 Ensaio de Flexão e Estimativa das Frequências Naturais	46
6.1.2 Alterações nas Frequências Naturais dos Perfis Ensaiaados	46
6.1.3 Alterações nos Amortecimentos Adimensionais dos Perfis Ensaiaados	47
6.1.4 Alterações nos modos de flexão.....	48
6.1.5 Detecção de Danos	53
6.2 DISCUSSÕES	56
6.2.1 Detecção e Localização de Danos com 3, 4 e 5 Modos	56
6.2.2 Sensibilidade do Método da Diferença das Curvaturas Modais	60
7 CONCLUSÕES.....	60
8 REFERÊNCIAS	62
APÊNDICE A.....	65
APÊNDICE B.....	69

1 INTRODUÇÃO

A Engenharia Estrutural tem sua formulação teórica oficial datada do início do século XVII, com os estudos de Galileu em seu livro “Duas Ciências” (1638). Antes disso, as construções eram realizadas empiricamente, como se podem observar as Pirâmides do Egito e os grandes templos da Roma e Grécia Antigas (MARTHA, 2010).

Uma estrutura pode ser entendida como um sistema voltado a atender às necessidades de seus usuários, garantindo o conforto, a segurança, a estética e o bom desempenho durante sua vida útil. Sendo assim, deve resistir a combinações tanto de ações normais, quanto de ações excepcionais como ventos, impactos e sismos (ABNT NBR 8681, 2003).

O aumento da capacidade de processamento dos computadores e os avanços nas técnicas de avaliação experimental tem facilitado a análise de estruturas danificadas – em consequência de falhas de projeto e/ou execução ou até mesmo pela utilização inadequada. No entanto, essa análise pode incluir tanto os efeitos estáticos, bem como os efeitos dinâmicos.

A integridade de uma estrutura pode ser verificada por meio de técnicas de Avaliação Não Destrutiva (AND). Empregando-se ensaios não destrutivos é possível verificar a integridade dos elementos estruturais, com o intuito de detectar, tratar e até mesmo prever danos prejudiciais ao uso da edificação.

Dentre as várias técnicas de AND, os ensaios dinâmicos têm se destacado na avaliação da integridade estrutural em função dos bons resultados alcançados com essas técnicas. Para tanto, utiliza-se a Análise Modal, com o objetivo de obter características como frequências naturais, modos de vibração, e amortecimentos modais.

O Método das Diferenças nas Curvaturas Modais, proposto por Pandey *et al.* (1991), consiste basicamente em uma comparação entre as curvaturas modais de um elemento estrutural íntegro com as curvaturas modais de um elemento estrutural danificado.

2 OBJETIVOS

2.1 OBJETIVO GERAL

Avaliar por meio de análise experimental a aplicação do método das Diferenças nas Curvaturas Modais para identificação e localização de danos em perfis metálicos.

2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Compreender a teoria de sistemas contínuos para análise de vibração transversal de vigas;
- Conhecer os princípios básicos da análise modal teórica e experimental de estruturas;
- Avaliar os resultados obtidos na aplicação do método da Diferença nas Curvaturas Modais para a localização de danos em vigas metálicas.

3 JUSTIFICATIVA

Os erros no projeto e execução, juntamente com a utilização inadequada (ações excessivas e/ou excepcionais não previstas) são as principais causas de danos severos nas estruturas, os quais podem comprometer seu desempenho e, nos casos mais graves, resultar na ruína.

Recorrendo-se às técnicas de Avaliação Não Destrutiva (AND) é possível identificar e localizar possíveis danos na estrutura sem interferir em sua utilização. As medições podem ser realizadas várias vezes, permitindo a determinação de um número maior de propriedades, se comparada à Avaliação Destrutiva e, embora haja algumas limitações, os ensaios são usualmente mais práticos e rápidos (CARREIRA, 2012).

Alguns métodos de AND envolvem os ensaios de vibração longitudinal ou de vibração transversal. Ambos recorrem às Funções de Resposta em Frequência (FRF's), responsáveis por associar a fonte de excitação (força) aos deslocamentos, velocidades e acelerações.

Para obter as FRF's e as propriedades físicas do material estudado neste trabalho, será realizada a avaliação experimental por meio do Ensaio de Vibração Transversal e as análises serão feitas utilizando o Método das Diferenças nas Curvaturas Modais, proposto por Pandey *et al* (1991). Este método visa identificar alterações nas curvaturas modais de um elemento estrutural danificado em comparação com as propriedades de um elemento íntegro, já que as mesmas FRF's apresentam mudanças significativas para a localização do dano.

Como, no Brasil, essa técnica é pouco conhecida, a proposta deste trabalho é divulgá-la, com a vantagem de ser economicamente viável e aplicável a elementos estruturais de edificações já em uso, mantendo sua estrutura intacta.

4 REVISÃO DE LITERATURA

Segundo Soeiro (2008), o conceito de vibração pode ser definido como qualquer movimento oscilatório variante no tempo. Então, para qualquer corpo que apresente um movimento oscilatório em torno de sua posição inicial, devem ser estudadas tanto as componentes de força e momentos induzidas pela ação externa, quanto as componentes de movimento (deslocamentos e suas derivadas).

Para Gatti e Ferrari (2003), a análise dinâmica dependerá de alguns fatores como: comportamento estrutural (linear ou não linear); natureza da força de excitação (determinística ou estocástica) e; a caracterização do sistema (discreto ou contínuo).

Rao (2011), define grau de liberdade (GDL) como o menor número de coordenadas independentes necessárias para determinar precisamente as posições de todas as partes móveis de um sistema mecânico num dado instante de tempo. Para os sistemas discretos, considera-se a divisão do material em massas concentradas e são finitos os graus de liberdade; já para os contínuos, a análise estende-se a todo o material e os graus de liberdade são infinitos.

A natureza da vibração divide-se em dois tipos: as vibrações livres e as forçadas. As vibrações livres ocorrem sem a ação de uma força externa, enquanto as vibrações forçadas são devidas às forças externas (THOMSON, 1978).

Para a verificação da integridade e desempenho das estruturas, pode ser empregada a Avaliação Não Destrutiva (AND). Huynh (2005) aponta que a AND é fundamentada no princípio de que o dano pode alterar mais facilmente as propriedades de rigidez e amortecimento dos corpos. Isso permite comparar as respostas estruturais antes e depois da ocorrência de tais danos. Tratando-se de elementos construtivos, os principais problemas são microfraturas e/ou microfissuras que geram perdas de material não tão significativas para provocar mudanças nos elementos da matriz de massa. Porém, os elementos da matriz de rigidez modal alteram-se expressivamente.

Os conceitos apresentados a seguir serão necessários para fundamentar a avaliação experimental e fornecem a base para estabelecer os parâmetros de ensaio e diagnosticar as respostas.

4.1 ANÁLISE MODAL TEÓRICA

4.1.1 Sistemas Discretos – 1 Grau de Liberdade

As propriedades físicas inerentes a qualquer sistema mecânico linearmente elástico são: massa, rigidez (ou o inverso, flexibilidade), dissipação de energia (amortecimento) (Figura 1).

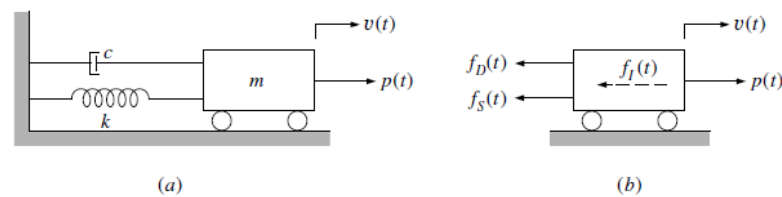


Figura 1 – Modelo de 1 GDL ideal: a) Componentes básicos; b) Forças envolvidas.

Fonte: Clough e Penzien (2003).

O único grau de liberdade da massa m é a translação na direção horizontal. A resistência elástica ao deslocamento é fornecida por uma mola de massa desprezível e rigidez k , enquanto o mecanismo de dissipação de energia é representado por um amortecedor com coeficiente de amortecimento viscoso c . Já $p(t)$, é um carregamento dinâmico externo. Portanto, a partir do equilíbrio dinâmico pode-se deduzir a equação geral do movimento para 1 GDL como mostra a seguir:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t) \quad (1)$$

4.1.1.1 Vibração Livre

Uma estrutura estará submetida a vibrações livres se suas oscilações, em torno de sua posição inicial, não dependerem de nenhuma excitação externa. Há dois tipos de vibração livre: as não amortecidas e as amortecidas.

As não amortecidas são governadas pela equação diferencial:

$$m\ddot{u} + ku = 0 \quad (2)$$

Resolvendo a equação (2), chega-se à solução homogênea:

$$u_h(t) = \sqrt{u_0^2 + \left(\frac{\dot{u}_0}{\omega_n}\right)^2} \text{sen}(\theta + \omega_n t), \quad (3)$$

Onde: $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ e $\theta = -\tan^{-1}\left(\frac{u_0 \omega_n}{\dot{u}_0}\right)$.

Plotando-se o deslocamento $u_h(t)$, conforme a equação (3), tem-se o gráfico:

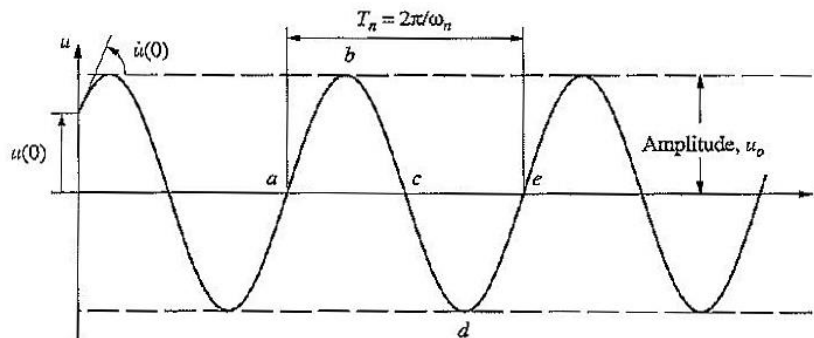


Figura 2 – Movimento Harmônico Simples.
Fonte: Chopra (2007).

Já as vibrações amortecidas, em Chopra (2007), apresentam-se de acordo com os valores do fator de amortecimento viscoso adimensional (ζ) e são descritas por:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0 \quad (4)$$

Por exemplo, estruturas de grande porte (pontes, barragens, portos e usinas nucleares) possuem seus amortecimentos adimensionais menores que 0,1 (CHOPRA, 2007). Ou seja, são frequentes os casos que apresentam $\xi < 1$, nos quais o amortecimento é considerado subcrítico e o equilíbrio é reestabelecido após várias oscilações, conforme a equação:

$$u(t) = e^{-\xi \omega_n t} \left[u_0 \cos \omega_D t + \frac{\dot{u}_0 + \xi \omega_D u_0}{\omega_D} \sin(\omega_D t) \right] \quad (5)$$

Sendo:

$$\omega_D = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2};$$

$$\xi = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2m\omega_n}.$$

4.1.1.2 Receptância de um Sistema com Um Grau de Liberdade

As vibrações forçadas ocorrem quando há solicitações externas. Se essas solicitações cessarem, o sistema entra em vibração livre (SOEIRO, 2008).

Há vários tipos de solicitações, porém algumas são mais relevantes para entender a resposta estrutural a quaisquer forças aplicadas: por exemplo, as harmônicas, periódicas, impulsivas e em resalto.

A força harmônica pode ser representada por funções como $p(t) = p_0 \text{sen}(\omega t)$ ou $p(t) = p_0 \text{cos}(\omega t)$. Porém, para a análise modal teórica, é interessante representar a força harmônica como:

$$p(t) = p_0 e^{i\omega t} \quad (6)$$

A resposta esperada ao carregamento da equação (6) é:

$$u(t) = X e^{i\omega t} \quad (7)$$

em que: X é a amplitude de deslocamento; $i = \sqrt{-1}$ e; ω = frequência da força de excitação.

Considerando $p(t)$ de (6) na Equação (1), encontra-se a resposta à solicitação harmônica de acordo com a solução particular de (7) e sua primeira e segunda derivadas, o que resulta:

$$u(t) = u_{est} \frac{1}{1 - \alpha^2 + i2\xi\alpha} e^{i\omega t} \quad (8)$$

Sendo:

$$u_{est} = \frac{p_0}{k};$$

$$X = \frac{u_{est}}{1 - \alpha^2 + i2\xi\alpha};$$

$$\alpha = \frac{\omega}{\omega_n}.$$

Dividindo-se a equação (8) pela equação (6) obtém-se flexibilidade dinâmica – ou receptância, $H(\omega)$ (equação 9).

$$H(\omega) = \frac{1}{k(1 - \alpha^2 + i2\xi\alpha)} \quad (9)$$

Cuja magnitude pode ser plotada conforme a Figura 3:

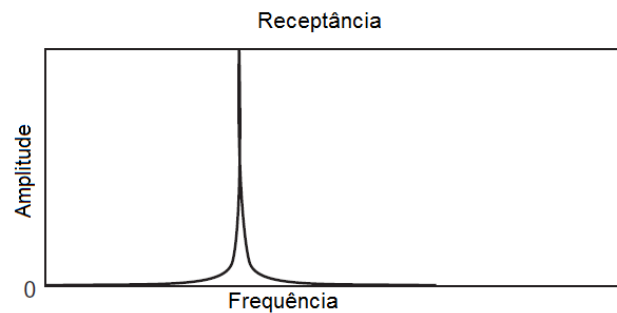


Figura 3 – Receptância $H(\omega)$.
Fonte: He e Fu (2001).

4.1.2 Sistemas Discretos – Múltiplos Graus de Liberdade

Os sistemas de 1 GDL são úteis para adquirir respostas aproximadas do deslocamento no ponto de maior amplitude modal de um elemento estrutural. Contudo, no caso de estruturas mais complexas, os resultados obtidos podem não fornecer a precisão desejada. Ao considerar o deslocamento de duas ou mais coordenadas, obtém-se sistemas com múltiplos graus de liberdade (nGDL).

O enfoque deste tópico será para os sistemas de dois graus de liberdade, pois seu tratamento matricial pode ser estendido a outros modelos mais complexos.

Na figura 4a, observa-se a atuação de duas forças, $f_1(t)$ e $f_2(t)$. O modelo possui duas massas, m_1 e m_2 , acopladas por uma mola de rigidez k_a e um amortecedor com amortecimento c_a . Cada massa também está fixa em sua extremidade por seus respectivos amortecedores e molas.

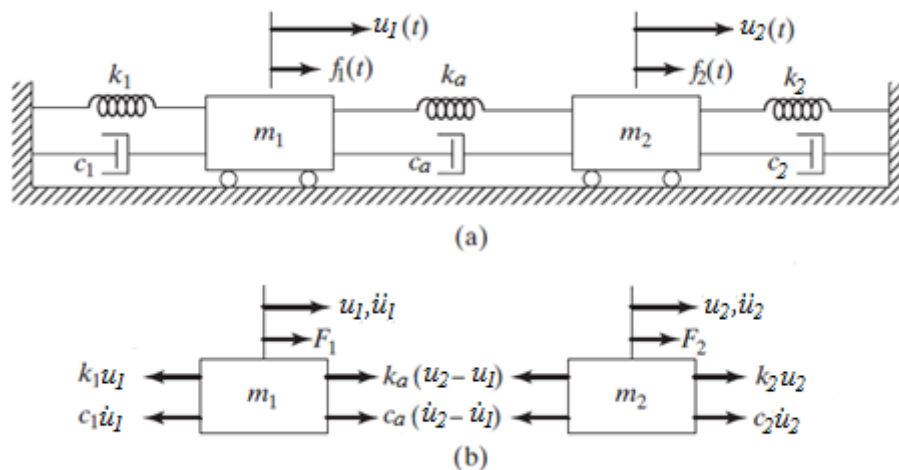


Figura 4 – Modelo de 2 GDL ideal: a) Componentes básicas; b) equilíbrio de forças.
Fonte: Adaptado de Rao (2011).

Assim, a equação do movimento baseia-se no equilíbrio dinâmico de forças (Figura 4b), que fornece:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_a & -c_a \\ -c_a & c_2 + c_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_a & -k_a \\ -k_a & k_2 + k_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{Bmatrix} \quad (10)$$

E sua forma reduzida apresenta-se:

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{f(t)\} \quad (11)$$

Sendo:

$[M]$ = matriz de massa;

$[C]$ = matriz de amortecimento;

$[K]$ = matriz de rigidez;

$\{\ddot{u}\}$ = vetor de acelerações;

$\{\dot{u}\}$ = vetor de velocidades;

$\{u\}$ = vetor de deslocamentos;

$\{f(t)\}$ = vetor de forças externas.

Como a matriz $[M]$ é diagonal, então sua transposta $[M]^T = [M]$. Embora também sejam iguais a suas respectivas transpostas, as matrizes $[C]$ e $[K]$ não são diagonais, já que o acoplamento entre as massas pelas componentes c_a e k_a causa a dependência entre os deslocamentos, dificultando a resolução.

4.1.2.1 Vibrações Livres Sem Amortecimento – Método Direto

Para o modelo mostrado na figura 4, as vibrações livres ocorrem quando as forças externas são nulas. Se as componentes de amortecimento forem desconsideradas, o equilíbrio é reestabelecido por:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_a & -k_a \\ -k_a & k_2 + k_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (12)$$

Ou ainda:

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} = \{0\} \quad (13)$$

Em sistemas de 1 GDL, a solução para este caso é:

$$u(t) = \phi \text{ sen}(\omega t + \theta) \quad (14)$$

Onde:

ϕ = amplitude de deslocamento;

ω = frequência natural;

θ = ângulo de fase.

Substituindo a equação (14) e sua derivada segunda em (13), obtém-se um sistema dependente dos deslocamentos e frequências naturais de cada modo. Ou seja:

$$[K - \omega_n^2 M]\{\phi\} = \{0\} \quad (15)$$

O problema de autovalores e autovetores (15) determina que, se $\{\phi\} \neq \{0\}$, então:

$$\begin{vmatrix} (k_1 + k_a) - m_1 \omega_n^2 & -k_a \\ -k_a & (k_2 + k_a) - m_2 \omega_n^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (16)$$

Com a resolução da equação (16), obtém-se dois valores de frequências naturais (ω_{n1} e ω_{n2}) que, substituídos em (15), retornam os autovetores $\{\phi\}$ de cada modo, os quais definem os modos de vibrar da estrutura. Assim sendo, tem-se os autovetores para o caso de 2 GDL:

$$\{\phi_1\} = \begin{Bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \end{Bmatrix} \text{ e } \{\phi_2\} = \begin{Bmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \end{Bmatrix} \quad (17)$$

As condições de ortogonalidade dos modos de vibração garantem a superposição, permitindo escrever a matriz modal:

$$[\phi] = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} \quad (18)$$

sendo que, para cada ϕ_{ij} , tem-se i como a posição de cada deslocamento; e j , o n -ésimo modo de vibrar.

Seguindo o formato da equação (14), o método direto é representado da seguinte maneira:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \text{sen}(\omega_{n1}t + \theta_1) \\ \text{sen}(\omega_{n2}t + \theta_2) \end{Bmatrix} \quad (19)$$

Na forma reduzida:

$$\{u\} = [\phi]\{q\} \quad (20)$$

As equações (19) e (20) definem a superposição dos modos, que permitem transformar as coordenadas de deslocamento do espaço modal para o espaço físico. Entretanto, o método direto é resultado de um sistema linear de ordem n (referente ao número de graus de liberdade), dificultando sua aplicação em situações onde há um grande número de GDLs.

4.1.2.2 Condições de Ortogonalidade

Em Clough e Penzien (2003), as condições de ortogonalidade entre os modos podem ser expressas pelo Teorema de Betti, o qual demonstra a reciprocidade dos trabalhos virtuais.

De acordo com a equação (15), pode-se reescrever, de modo semelhante:

$$k \widehat{v}_n = \omega_n^2 m \widehat{v}_n, \quad (21)$$

sendo que a parcela da direita corresponde à força inercial (f_i); e a da esquerda, a força elástica (f_s), possibilita a posterior análise da figura a seguir:

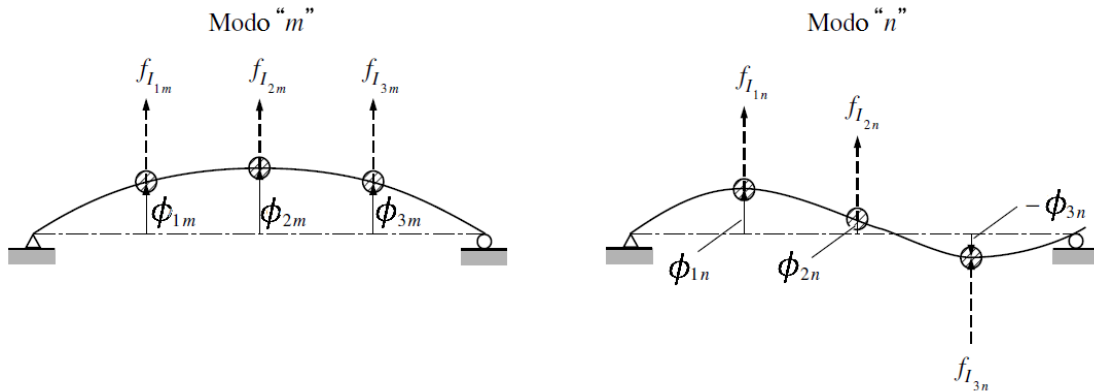


Figura 5 – Primeiro e segundo modos de vibração de uma viga biapoada.
Fonte: Adaptado de Clough e Penzien (2003).

Basicamente, os dois modos de vibração representam sistemas diferentes de carregamento com seus respectivos deslocamentos, permitindo a representação por:

$$-\{f_{Im}\}^T \{\phi_n\} = -\{f_{In}\}^T \{\phi_m\} \quad (22)$$

Ou seja, o trabalho das forças do modo “m” com os deslocamentos do estado “n” é igual ao trabalho das forças do estado “n” com os deslocamentos do estado “m”.

Desenvolvendo a Equação (22), conforme descrito em Clough e Penzien (2003), verifica-se a ortogonalidade dos modos tanto em relação à matriz de massa, quanto em relação à matriz de rigidez:

$$\phi_m^T \cdot [m] \cdot \phi_n = 0 \quad \text{e} \quad \phi_m^T \cdot [k] \cdot \phi_n = 0 \quad (23)$$

4.1.2.3 Vibrações Forçadas Sem Amortecimento – Método da Superposição Modal

Na análise de sistemas com múltiplos graus de liberdade, as condições de ortogonalidade das equações em (23) são bastante úteis para desacoplar o sistema em n -ésimos sistemas de apenas 1GDL, cada um correspondendo a uma resposta em seu modo de vibração.

Então, com a equação (20) e sua derivada segunda, substituídas em (13), tem-se:

$$[M][\phi]\{\ddot{q}\} + [K][\phi]\{q\} = \{f(t)\} \quad (24)$$

Pré-multiplicando (24) por $[\phi]^T$ e, considerando válidas as condições de ortogonalidade, obtém-se a equação do movimento no domínio modal:

$$[M_m]\{\ddot{q}\} + [K_m]\{q\} = \{f_m\} \quad (25)$$

Onde:

$$[M_m] = [\Phi]^T [M] [\Phi] \text{ (matriz de massa modal);}$$

$$[K_m] = [\Phi]^T [K] [\Phi] \text{ (matriz de rigidez modal);}$$

$$\{f_m\} = [\Phi]^T \{f(t)\} \text{ (vetor de carregamento modal).}$$

4.1.2.4 Vibrações Amortecidas – Amortecimento Proporcional de Rayleigh

Para expressar a equação (11) em termos modais, pode-se escrever o amortecimento em função das matrizes $[M]$ e $[K]$, denominado de amortecimento de Rayleigh. Assim:

$$[C] = a_0[M] + a_1[K] \quad (26)$$

Após algumas operações, encontra-se o fator de amortecimento adimensional:

$$\xi_n = \frac{a_0}{2\omega_n} + \frac{a_1\omega_n}{2} \quad (27)$$

cujos coeficientes a_0 e a_1 dependem dos amortecimentos adimensionais de dois modos diferentes.

Portanto:

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_0 \end{Bmatrix} = \frac{2\omega_j\omega_k}{\omega_k^2 - \omega_j^2} \begin{bmatrix} \omega_k & -\omega_j \\ -1/\omega_k & 1/\omega_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_j \\ \xi_k \end{Bmatrix}, \quad (28)$$

Retomando as condições de ortogonalidade e admitindo a Equação (11) no domínio modal com o amortecimento de (26), tem-se:

$$[M_m]\{\ddot{q}\} + a_0[M_m]\{\dot{q}\} + a_1[K_m]\{\dot{q}\} + [K_m]\{q\} = \{f_m\} \quad (29)$$

Observa-se que na equação (10) há o acoplamento dos sistemas, ou seja, a resposta é dada pela solução de um sistema linear de ordem igual ao número de graus de liberdade da

estrutura. Porém, na equação (29), os sistemas encontram-se desacoplados e obtém-se a resposta pela solução de n sistemas de 1 GDL.

4.1.2.5 Função de Resposta em Frequência

Assim como nos sistemas de 1 GDL, para os sistemas de nGDL considera-se $\{f_m\} = [\Phi]^T \{F\} e^{i\omega t}$ e a resposta é denotada por um vetor contendo os n deslocamentos modais:

$$\{u(t)\} = \{\phi\}[H(\omega)]e^{i\omega t} \quad (30)$$

Adotando os mesmos procedimentos das equações (6) a (9), a receptância para sistemas de nGDL é expressa matricialmente por:

$$[H(\omega)] = \sum_{j=1}^n \frac{\{\phi\}_j \{\phi\}_j^T}{k_{m,j} [(1 - \alpha_j)^2 + i2\xi_{m,j}\alpha_j]} \quad (31)$$

Sendo:

$$\alpha_j = \frac{\omega}{\omega_j};$$

$\xi_{m,j}$, $k_{m,j}$ e ω_j são, respectivamente, o amortecimento adimensional, a rigidez e a frequência natural, ambos do j -ésimo modo.

O gráfico a seguir mostra a contribuição de cada modo em linha tracejada e a FRF total em linha contínua:

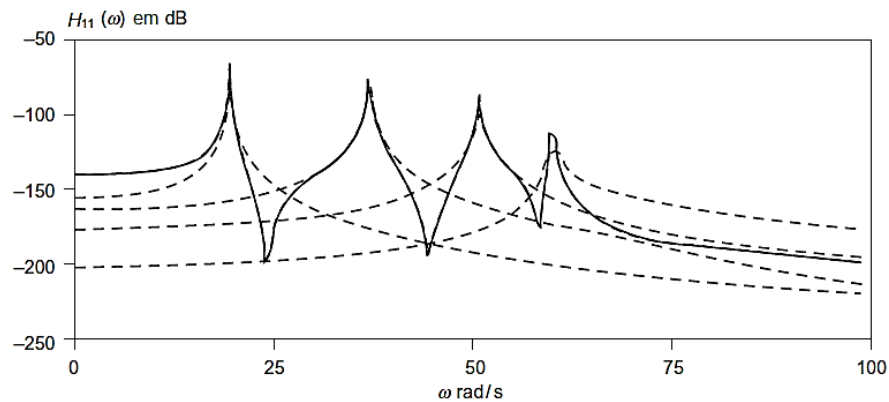


Figura 6 – Receptância H_{11} de um sistema de múltiplos graus de liberdade.
Fonte: He e Fu (2001).

4.1.3 Sistemas Contínuos

Nos sistemas discretos, as propriedades físicas do sistema – tais como massa, amortecimento e rigidez – são considerados em pontos específicos do elemento analisado. No entanto, as informações obtidas podem não ser tão satisfatórias e precisas quanto as obtidas num sistema contínuo. A distribuição contínua dessas propriedades assume que cada um dos infinitos números de pontos do sistema pode vibrar.

A modelagem de sistemas discretos é feita pelas equações diferenciais ordinárias, relativamente mais fáceis de resolver. Em contrapartida, os sistemas contínuos necessitam das equações diferenciais parciais, de solução mais trabalhosa. A escolha entre os dois modelos depende do objetivo da análise, sua influência no projeto e no tempo de avaliação computacional (RAO, 2011).

Os objetos sólidos são, em geral, feitos de materiais deformáveis e, embora sejam considerados como rígidos, sua modelagem conduz a informações sobre as características vibracionais. Elementos estruturais tais como as vigas, colunas e lajes são sistemas contínuos e são analisados conforme suas vinculações (KELLY, 2000).

4.1.3.1 Vibração Transversal de Vigas

A viga não uniforme (Figura 7a) possui as propriedades: rigidez $EI(x)$ e massa por unidade de comprimento $m(x)$, ambas dependentes da posição x ao longo do vão L . O carregamento $p(x,t)$ e o deslocamento transversal $u(x,t)$ são funções do tempo e também da posição. As condições de apoio para a viga são arbitrárias, mesmo que estejam representadas por apoios simples, para fins ilustrativos.

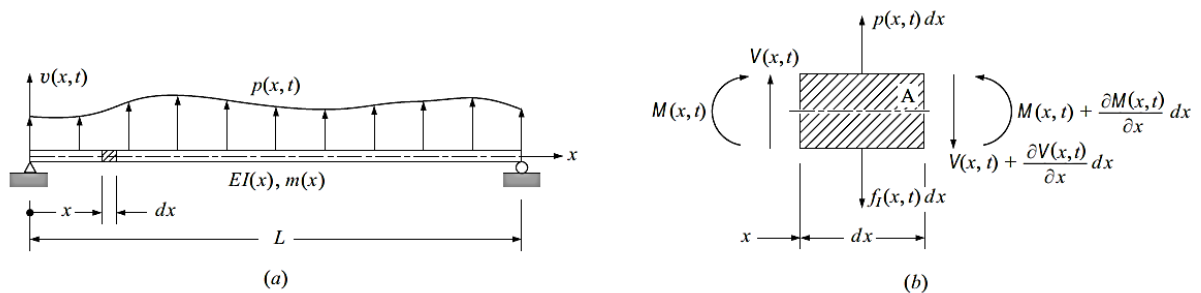


Figura 7 – Viga sujeita a carregamento dinâmico: (a) Propriedades e coordenadas; (b) resultante de forças atuantes no elemento infinitesimal.

Fonte: Clough e Penzien (2003).

Fazendo o equilíbrio dinâmico do elemento infinitesimal de comprimento dx e aplicando-se os conceitos de Resistência dos Materiais, pode-se obter a equação diferencial parcial para vibrações transversais da viga da Figura 7 (equação 32):

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI(x) \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} \right] + m(x) \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} = p(x, t) \quad (32)$$

A resposta do sistema pode ser obtida pelo Método de Separação de Variáveis. Para as vibrações livres, onde $p(x, t) = 0$, o deslocamento segue a expressão (CARREIRA, 2012):

$$v(x, t) = [C_1 \cos \omega t + C_2 \sen \omega t][C_3 \cos \lambda x + C_4 \sen \lambda x + C_5 \cosh \lambda x + C_6 \sinh \lambda x] \quad (33)$$

Onde:

C_1 a C_6 = constantes dependentes das condições iniciais (deslocamento e velocidade) e de contorno (vinculações de apoio);

ω = frequência natural de cada modo;

λ = autovalores diretamente relacionados às frequências naturais não amortecidas;

$$\lambda^4 = \frac{\omega^2 m}{EI}.$$

4.2 ANÁLISE MODAL EXPERIMENTAL

Nóbrega (1996) comenta que a análise modal experimental visa obter, por meio de técnicas experimentais, os parâmetros modais do sistema estudado: modos de vibração, frequências naturais e amortecimentos modais.

O processo de análise dos dados compara as curvas teóricas das FRF's do modelo às curvas experimentais, resultando em um conjunto de parâmetros modais. Para identificação desses parâmetros, utilizam-se algumas técnicas, que podem ser classificadas no domínio do tempo ou da frequência. As técnicas no domínio do tempo geralmente destinam-se a detectar a resposta quando a banda de frequências é larga e há um grande número de modos em análise; já as no domínio da frequência, detectam respostas em banda estreita e com número reduzido de modos verificados.

A configuração dos ensaios também é relevante: a escolha do número de dados de entrada e de saída dependem de fatores como a dificuldade de implementação computacional e processamento, abrangência do método e tamanho da estrutura (NÓBREGA, 1996).

4.1.1 Hipóteses Básicas

Segundo Gatti e Ferrari (2003) e Allemang e Brown (2002), na análise modal experimental, algumas hipóteses devem ser assumidas, de forma que a estrutura seja:

- a) linear e, então, vale o princípio da superposição dos efeitos, desde que a força de excitação se mantenha num intervalo de amplitude adequada;
- b) observável, contendo informações suficientes para determinar os sistemas dinâmicos;
- c) invariante no tempo, isto é, suas propriedades são constantes ao longo do tempo;
- d) obediente às relações de reciprocidade de Maxwell. Em outros termos, se todas as entradas são forças, as saídas serão os deslocamentos (ou velocidades ou acelerações). Assim, uma resposta medida no ponto b , devido a uma excitação em a , é a mesma resposta medida em a , devido a uma excitação em b . A consequência dessa hipótese é que as matrizes de funções de aceleração, mobilidade e receptância são simétricas.

4.1.2 Configurações de Ensaio

De acordo com Bilošová (2011), existem ao menos quatro configurações de ensaio:

- Uma entrada e uma saída (*Single Input-Single Output, SISO*);
- Uma entrada e múltiplas saídas (*Single Input-Multiple Output, SIMO*) – o número de saídas depende do número de canais que estão dispostos no analisador, ou seja, quantas respostas podem ser captadas simultaneamente. O princípio do processamento é o mesmo para o SISO, já que faz o uso da FRF (Equação 31).
- Múltiplas entradas e uma saída (*Multiple Input-Single Output, MISO*);
- Múltiplas entradas e múltiplas saídas (*Multiple Input-Multiple Output, MIMO*): é a configuração de ensaio que permite verificar estruturas de grande porte, pois não é possível obter a resposta de todos seus modos simultaneamente com apenas um excitador.

4.2.3 Procedimentos de Ensaio

Segundo Couto (1995), o procedimento de ensaio pode ser dividido em dois subsistemas: o de excitação e o de medição (Figura 8). O subsistema de excitação é composto, não necessariamente, por um gerador de sinal, um amplificador de potência e um excitador. Já o subsistema de medição é constituído por transdutores de força e de movimento para mensurar a excitação e a resposta da estrutura. Além disso, estão ligados a amplificadores e condicionadores de sinais, para que estes estejam adequados à aquisição e ao processamento pelo analisador.

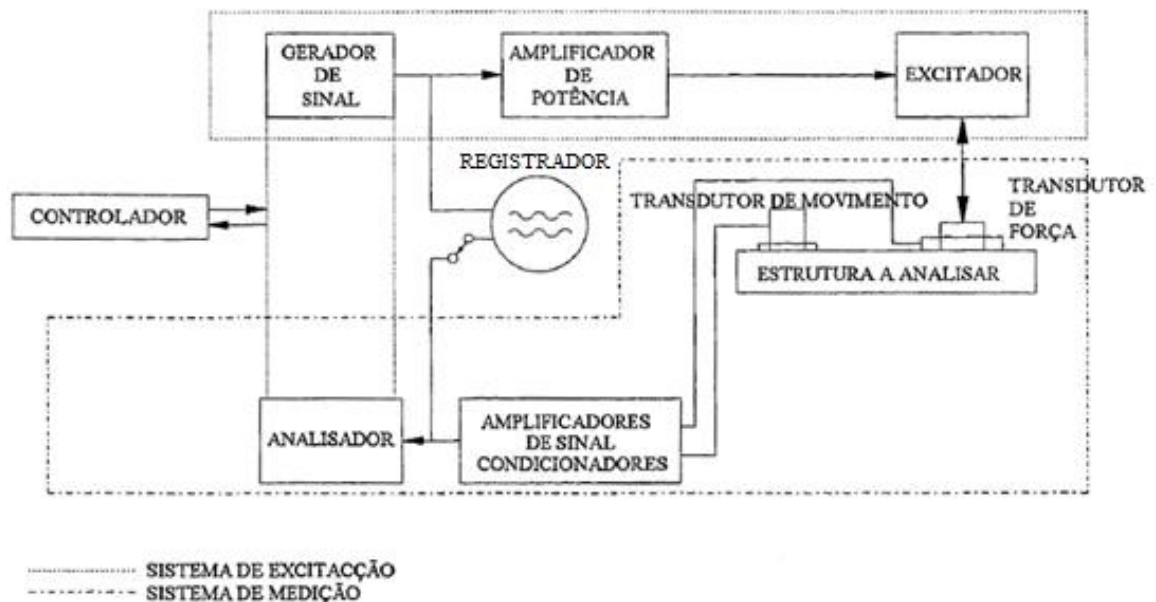


Figura 8 – Representação esquemática do sistema de excitação e medição.
 Fonte: Couto (1995).

4.2.4 Mecanismo de Excitação

Neste subsistema, há duas alternativas que podem ser aplicadas: os vibradores (ou *shakers*) e o martelo de impulso (Figura 9).

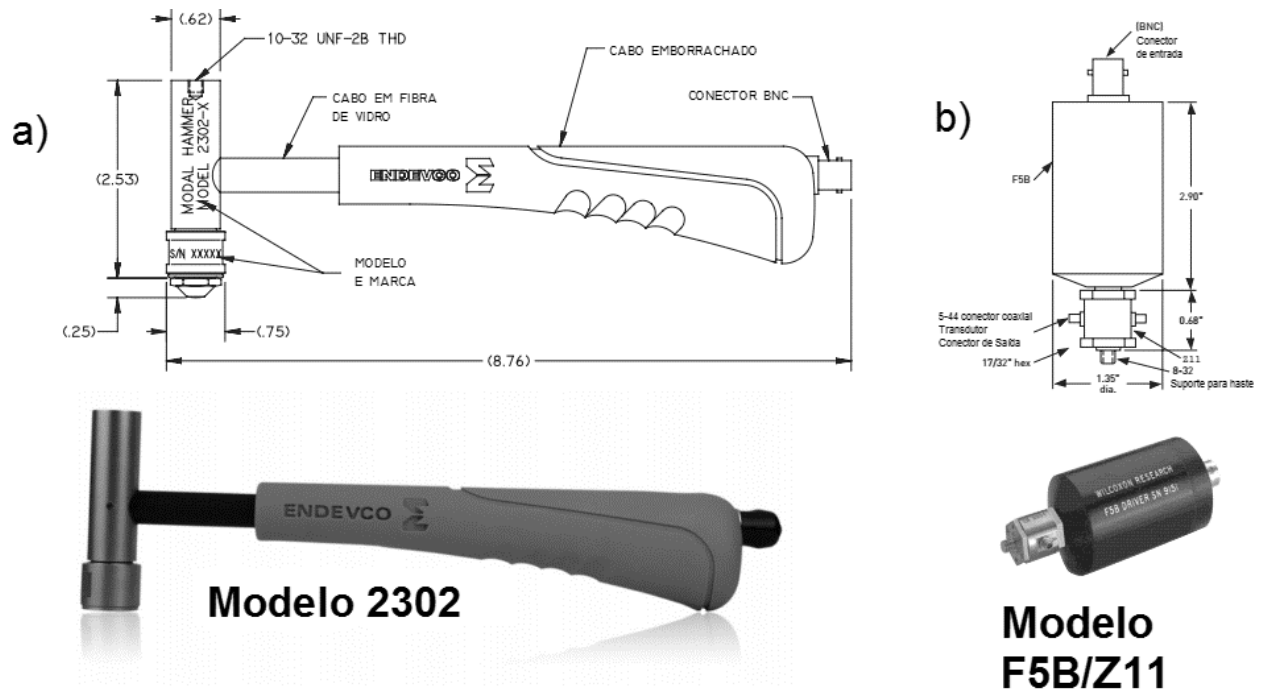


Figura 9 – Diferentes Mecanismos de Excitação: (a) Martelo de Impulso; (b) Vibrador (*shaker*).
Fonte: ENDEVCO (2015)

Os vibradores têm a vantagem de produzir forças elevadas a baixa frequências e os mais utilizados são os eletrohidráulicos, os eletromagnéticos e os eletromecânicos. No entanto, um bom nível de resposta depende da fixação desses vibradores, pois, se feita de forma incorreta, pode comprometer os resultados dos ensaios.

O martelo de impulso permite a aplicação de um impacto capaz de excitar uma larga banda de frequências. É constituído por um conjunto de "pontas" e "cabeças", com a inclusão do transdutor de forças para medir a excitação aplicada (COUTO, 1995).

4.2.5 Mecanismo de Medição

Este subsistema tem por finalidade medir a excitação e a resposta, além de transformá-las em sinais elétricos tratáveis. Seus principais componentes são os transdutores, amplificadores e condicionadores de sinal e o analisador, responsável pelo processamento de dados (COUTO, 1995).

4.2.5.1 Transdutores

Couto (1995) destaca que os transdutores são essenciais em todo ensaio dinâmico, pois permitem verificar as grandezas mecânicas relacionadas às forças aplicadas e ao movimento induzido. Assim, transformam a grandeza física advinda do movimento (aceleração, deslocamento ou velocidade) numa grandeza elétrica. São classificados em dois tipos: transdutores de força, para medir a excitação; e transdutores de movimento (deslocamento, velocidade ou aceleração), para medir a resposta.

Em geral, os transdutores de força escolhidos são os piezoelétricos, que atuam pela geração de um sinal elétrico proporcional a sua deformação.

Porém, para a escolha dos transdutores de movimento, deve-se observar a faixa de frequência de maior interesse contidas nos sinais captados. Por exemplo, as medições feitas em termos de deslocamentos dão atenção às componentes de baixa frequência, enquanto as medições em termos de acelerações (acelerômetros) expressam melhor as componentes de maior frequência.

Os acelerômetros são os mais empregados em função de seu tamanho, custo e por sua facilidade de integrar eletronicamente para obtenção dos deslocamentos. Ainda assim, deve-se ter atenção aos seguintes aspectos: ajuste de gama de frequência à gama esperada de grandezas a determinar; ajuste da sensibilidade do transdutor à amplitude desejada das propriedades a quantificar, evitando a ocorrência de cargas excessivas contaminadas por ruído; e sensibilidade a vibrações atuantes em outras direções fora de seu eixo axial (COUTO, 1995).

4.2.5.2 Amplificadores/Condicionadores de Sinal

Os amplificadores são circuitos eletrônicos que atuam na amplificação dos sinais e, conseqüentemente elevam a intensidade dos ruídos. Com isso, é necessária a implementação de filtros (analógicos ou digitais), cuja função é selecionar uma banda de frequências onde não há a interferência desses ruídos na resposta (CARREIRA, 2012).

4.2.5.3 Processamento de Sinais Digitais por FFT (*Fast Fourier Transform*)

Em Camargo e Ferreira (2012), uma alternativa eficiente para o processamento dos sinais tratados é implementar o algoritmo da Transformada Rápida de Fourier (ou *Fast Fourier*

Transform, FFT), que tem como base o cálculo da Transformada Discreta de Fourier (ou *Discrete Fourier Transform, DFT*).

Para funções contínuas, a Transformada de Fourier é da seguinte forma:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t} dt \quad (34)$$

Porém, sua aplicação torna-se difícil por meios computacionais, devido à continuidade das funções e a seus limites de integração infinitos. Conseqüentemente, são empregadas as funções discretizadas, ou seja, na forma de pontos igualmente espaçados. A Equação (35) demonstra a Transformada Discreta de Fourier (DFT):

$$F(\omega_m) = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} f(t_n) \cdot e^{-2\pi i \frac{mn}{N}}, m = 0, 1, \dots, (N-1) \quad (35)$$

Sendo:

$F(\omega_m)$, a função no domínio da frequência;

$f(t)$ e $f(t_n)$, funções no domínio do tempo;

$i = \sqrt{-1}$, unidade imaginária;

ω , frequência.

A finalidade da DFT é converter um sinal de N pontos no domínio do tempo em 2 sinais de $(N/2 + 1)$ pontos no domínio da frequência, de tal modo que o sinal de entrada (domínio do tempo) contém as amostras do sinal a ser decomposto e os de saída (domínio da frequência), contêm as amplitudes dos senos e cossenos (CAMARGO e FERREIRA, 2012).

4.2.6 Função Coerência

Bilošová (2011) define a função de coerência como o grau de linearidade entre duas variáveis. Seus valores estão num intervalo de 0,0 (zero) a 1,0 (um): 0,0 significa nenhuma relação entre a entrada A e a saída B , enquanto 1,0 significa uma relação linear perfeita. A Função Coerência entre os sinais de entrada e saída é mostrada na Equação (36):

$$\gamma^2(f) = \frac{|G_{AB}(f)|^2}{G_{AA}(f) \cdot G_{BB}(f)}, \text{ com } 0 \leq \gamma^2(f) \leq 1 \quad (36)$$

A mais importante aplicação para a função de coerência é a verificação das respostas comprometidas por ruído ou pela presença de não linearidades. A baixa coerência não significa necessariamente que o ensaio foi inválido, mas que o sinal pode ser melhorado a partir de médias para obter resultados válidos.

4.2.7 Identificação dos Parâmetros Modais

Allemang e Brown (2002) definem a identificação dos parâmetros modais como uma estimativa das frequências, vetores de amplitudes modais e amortecimentos. Soeiro (2001) complementa que, para a identificação desses parâmetros, são utilizados métodos tanto no domínio do tempo, quanto no domínio da frequência. Métodos no domínio do tempo fornecem melhores resultados quando há uma larga faixa de frequência ou um número grande de modos analisados. Por outro lado, os métodos no domínio da frequência são mais precisos em situações em que a faixa de frequência de interesse é limitada e o número de modos é relativamente menor.

Ainda em Soeiro (2001), esses métodos podem ser divididos em diretos e indiretos. Os diretos baseiam-se no modelo espacial, isto é, sobre a equação matricial de equilíbrio dinâmico. Já os indiretos dependem do modelo modal, de acordo com as frequências naturais, razões de amortecimento e constantes modais.

Alguns métodos destacam-se na análise das FRFs: amplitude de pico, ajuste do círculo, mínimos quadrados, mínimos quadrados melhorado e exponencial complexa.

No entanto o mais simples é o Método da Amplitude de Pico (*peak picking*), que registra as frequências advindas dos picos da curva de magnitude da resposta, os quais fornecem as razões de amortecimentos e as formas modais em vários pontos da estrutura.

Para a identificação dos parâmetros modais, podem-se aplicar técnicas numéricas para separar as contribuições dos modos de vibração individuais das FRFs medidas (ALLEMANG e BROWN, 2002). O conceito envolve a estimativa da contribuição individual de um único grau de liberdade para o conjunto de múltiplos graus de liberdade ensaiados. Similarmente ao que foi apresentado na Figura 6, tem-se:

$$[H(\omega)]_{N_o \times N_i} = \frac{[A_r]_{N_o \times N_i}}{i\omega - \lambda_r} + \frac{[A_r^*]_{N_o \times N_i}}{i\omega - \lambda_r^*} \quad (37)$$

Com:

$[H(\omega)]$ = matriz de funções de resposta em frequência;

$N_o \times N_i$ = a ordem da matriz, expressa em números de entrada por números de saída;

$[A_r]$ = matriz de resíduos;

λ_r = valor complexo de frequência modal;

$()^*$ = notação de conjugado.

4.2.8. Exemplos de Aplicação da Análise Modal Teórica e Experimental

A fim de melhorar a compreensão do Método das Diferenças nas Curvaturas Modais, é relevante citar algumas referências para exemplificar e contribuir, posteriormente, na análise dos resultados deste trabalho.

Primeiramente, Ashory (1999) ressalta que a Análise Modal Experimental se diferencia da Análise Modal Teórica principalmente pela interferência de ruídos, os quais podem ser reduzidos a partir de uma investigação detalhada de suas causas, associadas à aquisição de dados (configurações de ensaio), processamento de sinais e análise desses dados (identificação dos parâmetros modais). Uma observação relevante deste autor, referente à suspensão livre-livre (Figura 10) admitida nos ensaios, é de que não é possível simular essa condição perfeitamente. Porém, a situação mais próxima é o uso de molas e cordas de baixa rigidez, o que diminui a interferência dos modos de corpo rígido e modos de torção. Allemang e Brown (2002) complementam que, para garantir essa condição de contorno, é necessário mensurar a frequência de corpo rígido, a qual deverá ser menor que 1/10 da frequência do primeiro modo de flexão.

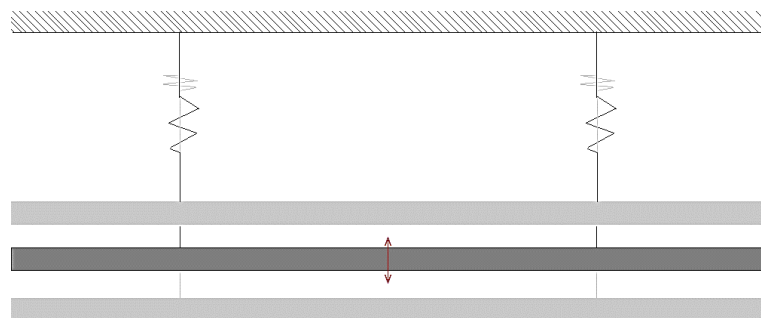


Figura 10 – Modo de Corpo Rígido

A detecção de danos é facilitada quando reconhecidas as alterações nos parâmetros modais entre as estruturas íntegras e danificadas, tanto em modelagens numéricas, quanto em estudos experimentais.

Em relação às variações de amortecimentos modais, Razak e Choi (2001) desenvolveram ensaios em vigas de concreto armado sujeitas à corrosão. Neste caso, a energia livre é dissipada pelo surgimento dos defeitos provenientes da ação do tempo, o que afeta o movimento oscilatório. Comparando as vigas de concreto intactas com as danificadas, as primeiras apresentam, em geral, amortecimentos menores do que as danificadas.

Por outro lado, Salawu e Willians (1994) utilizaram vigas metálicas em seus ensaios. Os resultados apontam aumento em maior parte dos amortecimentos e decréscimo em alguns, sem obedecer a um padrão específico.

A avaliação da sensibilidade do método é feita ao comparar o posicionamento dos danos (e sua profundidade) ao longo do comprimento da estrutura às mudanças nos deslocamentos modais e frequências naturais. Em Elshafey *et al* (2011), a análise experimental foi efetuada com 21 GDLs e vigas com cortes de 25, 50 e 75% da altura. O dano foi posicionado entre os elementos 7 e 8 e a diferença relativa foi feita para apenas 3 modos de vibrar. Seus resultados apontaram o dano claramente na diferença das curvaturas do segundo modo, onde não havia interferência significativa de ruídos.

Soares (2000), por exemplo, realizou seus ensaios com 5 modos em vigas de seção I com perda de inércia da seção transversal de 19,07% e 30,51% para profundidades de corte de 2,5 e 4mm, respectivamente. O decréscimo nas frequências naturais dessas vigas teve um valor máximo de 4,9% para o primeiro modo, em uma viga com dano de 4mm de profundidade. A diferença relativa entre as curvaturas foi proporcional à perda de inércia, variando de 0,02 a 0,5, em módulo. Para as vigas com dois danos consecutivos, o método mostrou-se pouco sensível, apontando apenas um deles no gráfico de multiplicação das diferenças.

Em Owolabi *et al* (2003), o diagnóstico do método para uma viga de alumínio biapoiada, com 6,5m de comprimento e seção quadrada de 25,4 mm, contemplou apenas 3 modos de vibrar. Foram testadas diferentes profundidades de danos, no intervalo de $0,1d$ a $0,7d$ ($d =$ altura da seção = 25,4mm), com incremento de $0,1d$, em diversos elementos ao longo do comprimento. Observou-se a redução de até 29,15% na frequência natural do primeiro modo para $0,7d$ e alteração significativa das curvaturas modais ímpares (1^a e 3^a) para $0,5d$, ambos resultados referentes ao elemento no meio do vão. Concluiu-se que o uso de apenas 3 modos foi suficiente para a detecção de danos, desde que feita uma análise detalhada da mudança nas amplitudes das FRF's e nas frequências naturais.

Em Bonetti (2014), comparou-se a eficiência do método entre duas vigas de alumínio com danos de 10% e 60% de perda de inércia, também utilizando os 3 primeiros modos de flexão. O decréscimo das frequências naturais foi significativo apenas para o dano de 60% da inércia, com valor de 4,08% para o primeiro modo e, para 10% de dano, praticamente não houve alterações. A detecção de danos foi prejudicada pela interferência de ruídos a partir do 3º modo e os elementos danificados em 0,5L foram localizados com maior facilidade do que os elementos em 0,1L. Dessa forma, percebeu-se a necessidade de investigar alterações em modos mais altos, medindo a vibração livre das vigas numa larga faixa de frequência.

Em suas modelagens numéricas, Guerreiro (2014) constatou a diminuição das diferenças entre as frequências das vigas intactas e danificadas, à medida que se elevou o número de elementos (nGDL) analisado – de 9,724% com 10 elementos, para 1,979% para 50 elementos, no primeiro modo. Em relação às curvaturas, os danos foram localizados claramente a partir do 3º modo. Investigando a influência da porcentagem dos danos, sua detecção é favorecida com uma redução de, no mínimo, 30% do módulo de elasticidade do material.

Amorim (2015) fixou a quantidade de 21 GDL com uma redução de 40% de inércia da seção transversal, numa faixa de frequência de aproximadamente 39 Hz a 1241 Hz, correspondente aos 8 primeiros modos de flexão. As frequências naturais praticamente não se alteraram, com valor máximo de 0,16% para o primeiro modo em uma viga com dois danos (em 0,3L e 0,5L). As curvaturas também não sofreram mudanças visivelmente significativas, porém as diferenças apontaram os danos também a partir do 3º modo.

5 MATERIAIS E MÉTODOS

5.1 MATERIAIS

Para o desenvolvimento deste trabalho foram utilizados 3 perfis tubulares de aço-carbono (Figura 11), com comprimento nominal de 2 m e seção transversal tubular retangular conforme as propriedades listadas a seguir:

Tabela 1– Propriedades físico-geométricas dos perfis utilizados

	Viga V1 Íntegra	Viga V2 Íntegra	Viga V3 Íntegra
Comprimento (cm)	199,5	200,7	199,6
Massa (g)	2532,74	2549,17	2529,98
Base (mm) – b_0	50,48	50,363	50,363
Altura (mm) – h_0	21,31	20,25	20,26
Densidade Aparente (g/cm³) - ρ	7,268	7,002	7,114
Área de Seção Transversal (cm²) - A	1,747	1,814	1,782
Espessura (mm) – e	1,28	1,33	1,31
Inércia I_x (mm⁴)	12915,21	13068,22	13232,02
Inércia I_y (mm⁴)	54951,90	55704,88	56739,19
Volume (cm³)	348,481	355,642	363,127



Figura 11 – Perfis de aço-carbono adquiridos para os ensaios.

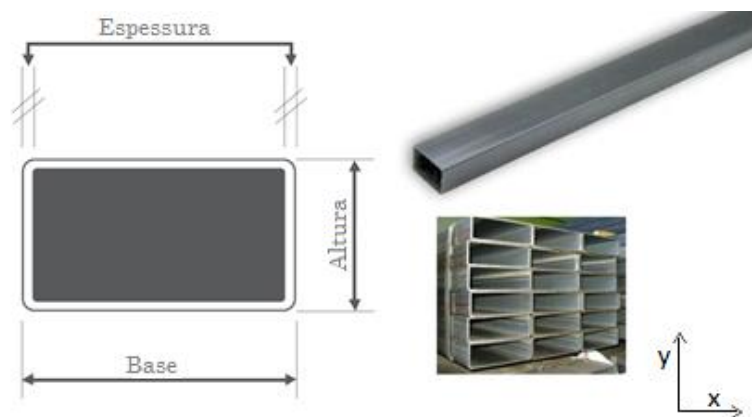


Figura 12 – Seção transversal do tubo retangular de aço-carbono.
Fonte: Adaptado de Catálogo Arcelor-Mittal (2009).

5.2 MÉTODOS

5.2.1 Simulação Dos Danos

Os danos foram simulados reduzindo-se o momento de inércia da seção transversal. Para tanto, na região danificada foi extraída uma lateral de 10 mm da parede do tubo (Figura 13). Dessa forma, os momentos de inércia sofreram uma redução em torno de 72% no eixo x (I_x) e em torno de 25%, no eixo y (I_y), na seção danificada (Tabela 2).

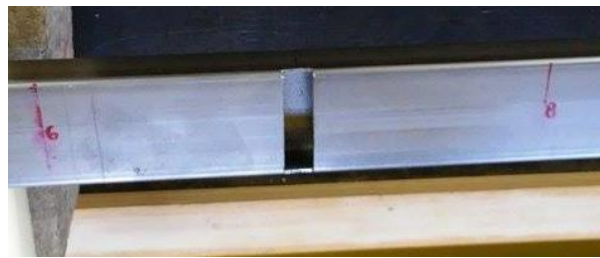


Figura 13 – Corte na seção transversal, ponto 7, em 0,3L.

Tabela 2 – Redução de inércia nas seções transversais danificadas.

	I_x (mm ⁴) ⁽²⁾	I_y (mm ⁴) ⁽²⁾	I_x' (mm ⁴) ⁽³⁾	I_y' (mm ⁴) ⁽³⁾	Redução de I_x (%)	Redução de I_y (%)
Viga V1 ⁽¹⁾	12915,21	54951,90	3618,98	41230,87	71,98	24,97
Viga V2 ⁽¹⁾	13068,22	55704,88	3649,62	41759,40	72,07	25,03
Viga V3 ⁽¹⁾	13251,52	56632,34	3689,41	42420,72	72,16	25,09

Notas:

(1) V1, V2 e V3, ao serem danificadas respectivamente com danos em $x=0,3L$, $x=0,5L$ e simultaneamente em $x=0,3L$ e $x=0,5L$ e recebem a notação de V1', V2' e V3';

(2) I_x e I_y – inércias correspondentes à seção íntegra, considerada tubular retangular;

(3) I_x' e I_y' – inércias correspondentes à seção com o dano, considerada seção “U”, de altura $h' = h_0 - e$.

Foram analisadas três situações de danos. Na viga V1 o dano foi posicionado em $x=0,3L$. Essa posição foi definida de forma que o dano não fique localizado no ponto nodal dos primeiros sete modos de vibração. Na viga V2, o dano foi posicionado em $x=0,5L$ para avaliar se o método é preciso em detectar um dano localizado no meio do vão, onde se tem, em geral, o maior momento fletor nas vigas e onde se localizam os pontos nodais dos modos pares. Por fim, na viga V3, foram posicionados os danos em $x=0,3L$ e $x=0,5L$, a fim de verificar se o Método das Diferenças nas Curvaturas Modais tem sensibilidade para detectar dois danos simultâneos. A Figura 14 ilustra as vigas que serão ensaiadas:

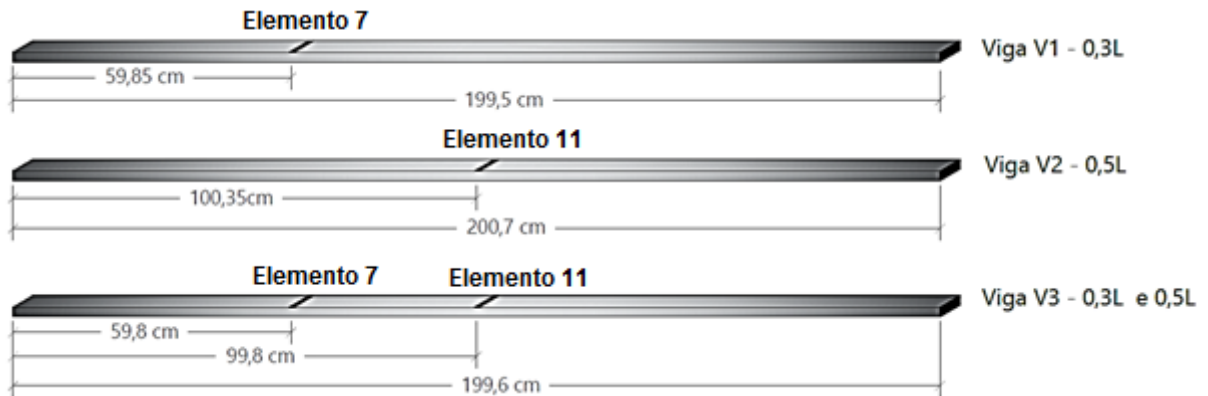


Figura 14 – Posição dos danos.

5.2.2 Ensaio de Vibração Transversal

O ensaio foi realizado com as vigas em suspensão livre, como mostra a Figura 15. Para tanto, as vigas foram suspensas por meio de cordas finas e molas de tração de baixa rigidez.

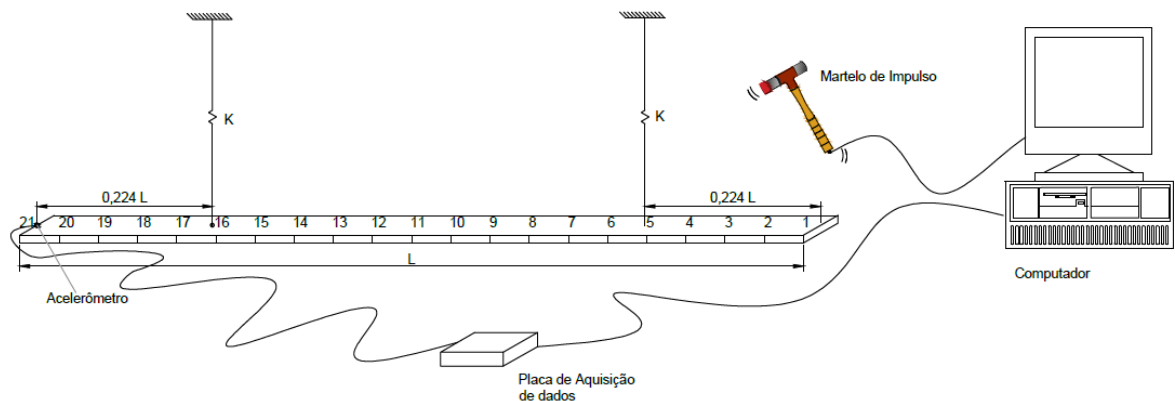


Figura 15 - Configuração do Ensaio de Vibração Transversal.

Os equipamentos empregados no ensaio foram um acelerômetro B&K 4507 com sensibilidade de 96,12 mV/g, um martelo de impulso B&K 8206, uma placa de aquisição de dados USB 6009 da *National Instruments* e um condicionador de sinais IEPE com 4 canais (Figura 16). Para a análise e processamento dos sinais foi usado o software *Impact* desenvolvido na plataforma *Labview* por Carreira (2012).



Figura 16 – Disposição dos equipamentos utilizados.

Para a escolha da ponta do martelo, foram testadas as três opções disponíveis: flexível, de silicone; média, de plástico e; dura, de alumínio. A fim de se conseguir um número maior de modos, optou-se por utilizar a ponta de plástico e, para melhorar o ajuste dos primeiros três modos, colou-se uma ponta de borracha com fita dupla-face junto à viga, no ponto de medida (Figura 17).



Figura 17 – Martelo de impulso com ponta de plástico e contato de borracha, excitação no GDL 11 (meio do vão).

A técnica adotada consistiu em manter o acelerômetro fixo em uma das extremidades da viga enquanto se excitava os 21 GDLs com o martelo de impulso. Para cada impacto desferido com o martelo foram medidas a força no martelo de impulso e as acelerações no GDL 21. A FRF de cada GDL foi calculada com a média de 5 espectros de frequência dos sinais do martelo e do acelerômetro.

As FRF's medidas experimentalmente foram empregadas para identificar os parâmetros modais (frequências naturais, modos normais e amortecimentos modais). A identificação dos parâmetros modais pode ser feita utilizando-se o método *Least Squares Complex Exponential (LSCE)*. Esse método foi implementado no programa *Impact* (Figura 18) usando a biblioteca *Sound and Vibration* da *National Instruments*.

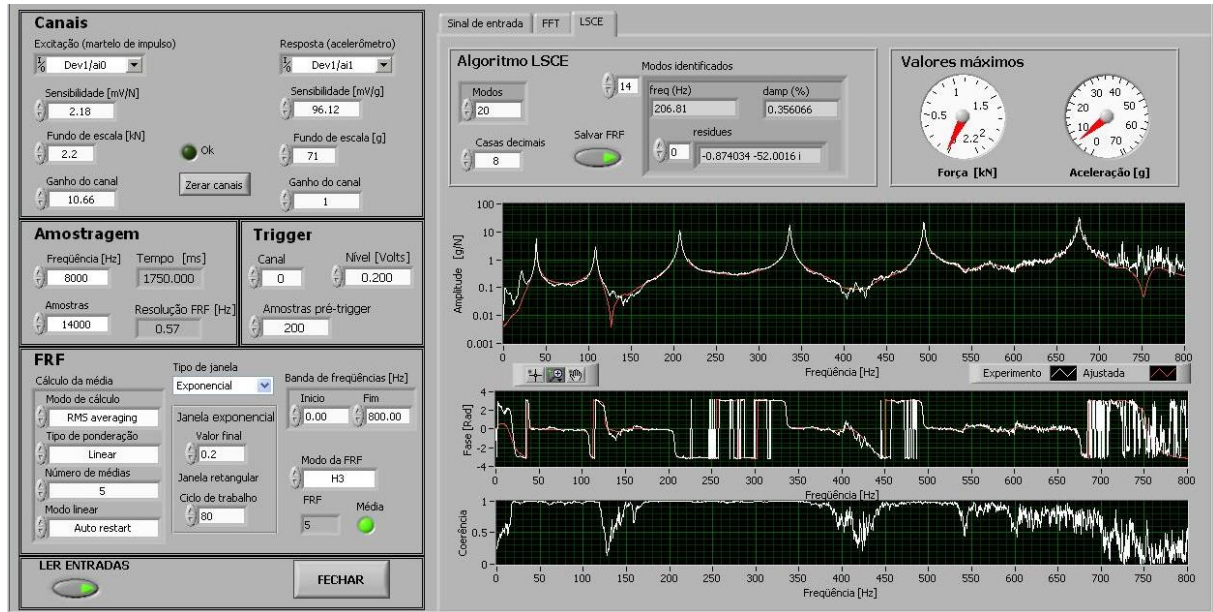


Figura 18 – Plataforma do software *Impact* e parâmetros para as medições.

5.2.3 Determinação Analítica dos Modos de Flexão

As condições de contorno para a vinculação livre-livre são expressas por esforços cortante e momento fletor nulos tanto na posição $x=0$, quanto em $x=L$. Assim, a partir das derivadas da Equação (33), encontra-se um conjunto de soluções da forma:

$$\cosh \lambda L \cos \lambda L = 1 \quad (38)$$

Os valores de λL obtidos da equação anterior são respectivos a cada modo de flexão da viga e são substituídos na expressão:

$$\omega_j = \lambda_j^2 \sqrt{\frac{EI}{m}} \quad (39)$$

onde j corresponde ao j -ésimo modo e ω_j sua frequência natural.

Com a frequências naturais, encontram-se os valores das constantes C_5 e C_6 , para então as substituir na equação (33) e determinar os deslocamentos modais, que obedecem à forma:

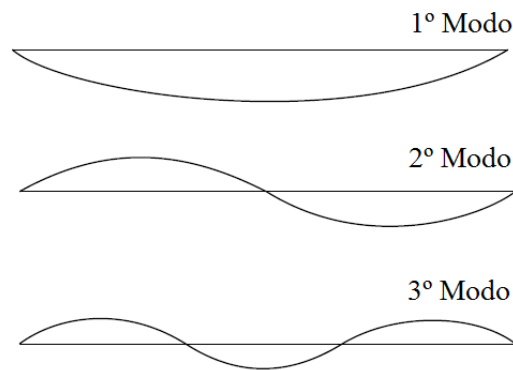


Figura 19 – Deslocamentos dos três primeiros modos de flexão de uma viga em suspensão livre-livre.

5.2.4 Determinação Experimental dos Modos de Flexão

Após cada medição referente aos 21 graus de liberdade, retiram-se dos resultados na janela do programa *Impact*, as seguintes informações: frequência, amortecimento e a parte imaginária da FRF de aceleração de cada um dos N modos obtidos. Feito o procedimento para todos os pontos, são plotados gráficos nos quais o eixo horizontal corresponde aos 21 GDL e, o eixo vertical, aos deslocamentos normalizados (em módulo).

5.2.5 Cálculo das Curvaturas Modais

As vigas foram discretizadas em 20 segmentos iguais (de tamanho h), nomeando-se cada GDL (i) ao longo do comprimento, de 1 a 21.

Para calcular as curvaturas dos deslocamentos modais dos três modelos ensaiados, seguiu-se o mesmo método utilizado por Pandey *et al* (1991), fazendo-se a aproximação da derivada segunda dos deslocamentos por Diferenças Finitas, da seguinte forma:

$$\phi''_i = \frac{\phi_{i-1} - 2\phi_i + \phi_{i+1}}{h^2} \quad (40)$$

Onde:

ϕ''_i é a curvatura modal do GDL i analisado – derivada segunda no ponto;

ϕ_{i-1} , ϕ_i e ϕ_{i+1} são as amplitudes modais (parte imaginária da FRF) dos pontos anterior, central e posterior ao GDL i .

Aplicando esta aproximação para todos os 21 GDL do elemento em cada modo de vibração, pode-se obter, por exemplo, as curvaturas para os cinco primeiros modos de uma viga biapoiada, conforme a figura:

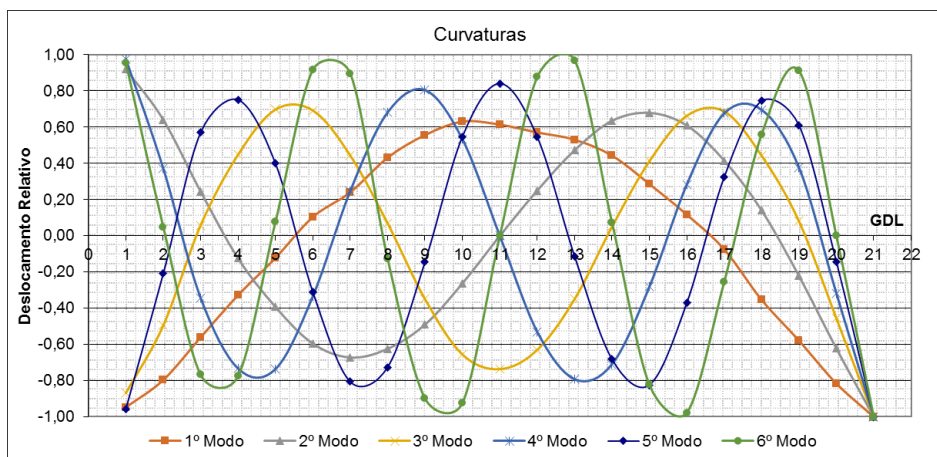


Figura 20 – Curvaturas dos primeiros 6 modos de vibrar de uma viga intacta em suspensão.

5.2.6 Detecção e Localização dos Danos

Seguindo procedimentos semelhantes aos desenvolvidos em Soares (2000), aplica-se a Equação (40) aos deslocamentos das vigas íntegras e danificadas para aproximar a curvatura no ponto em análise e, então, extrair as diferenças dessas curvaturas para cada modo. Com o intuito de melhorar a visualização gráfica, Soares (2000) propôs a divisão das diferenças em cada GDL pela de maior magnitude para que a diferença relativa variasse entre -1 e 1. Porém, neste trabalho, efetua-se a divisão de todas as diferenças pelo maior valor absoluto entre elas, ou seja, normalizam-se os valores de forma que variem de 0 a 1.

Foram plotados gráficos relacionando os 21 GDL às diferenças relativas das curvaturas modais. Para detectar os danos, foi feita a multiplicação entre as diferenças relativas de todos os modos medidos, em cada GDL. Analogamente, os resultados da multiplicação são normalizados e dispostos em um gráfico, onde o pico (maior valor no GDL i) indica o dano.

5.2.7 Alteração nas Frequências Naturais

Em consequência da redução de inércia da seção transversal no local dos danos, pode-se observar a diminuição nas frequências naturais. A forma mais simples de representar essa diferença é aplicando-se a fórmula (BONETTI, 2014):

$$\Delta\omega_n = 100 \left(1 - \frac{\omega_n'}{\omega_n} \right) \quad (41)$$

Onde:

$\Delta\omega_n$ é a redução de frequência, em %;

ω_n' e ω_n são as médias das frequências após e sem o dano, respectivamente, no modo n .

5.2.8 Ensaio de Flexão Estática

Foram realizados ensaios de flexão estática em três vigas metálicas com o objetivo de obter o produto de rigidez da seção transversal das vigas, para posteriormente calcular as frequências naturais dos seis primeiros modos de flexão das vigas integras.

Admitiu-se o esquema estático de viga simplesmente apoiada com carga concentrada no meio do vão. As vigas foram apoiadas sobre roletes metálicos com 20 mm de diâmetro. O vão livre do ensaio foi de 1,90 m. Utilizando pesos metálicos foram aplicadas duas intensidades de força sendo $P_1 = 32,25\text{N}$ e $P_2 = 73,73\text{ N}$. Os deslocamentos foram medidos no meio do vão, logo abaixo do ponto de aplicação das forças, usando um relógio comparador digital Mitutoyo com resolução de 0,001 mm. A Figura 21 ilustra a realização do ensaio de flexão estática.



Figura 21 – Esquema estático do ensaio de flexão:
a) Carga P_1 ; b) Carga $P_{res} = P_1 + P_2$.

O deslocamento vertical no meio do vão para vigas simplesmente apoiadas é (HIBBELER, 2010):

$$u = \frac{PL^3}{48EI} \quad (42)$$

Em que:

u é o deslocamento causado pela carga P ;

L é o vão livre (1,90 m);

E é o módulo de elasticidade longitudinal;

I é a inércia em torno de x (I_x).

Adaptando a Equação (42) para este ensaio, em específico, o produto entre o módulo de elasticidade e a inércia pode ser escrito como:

$$EI_x = \frac{\Delta P \cdot L^3}{48\Delta u} \quad (43)$$

Sendo: $\Delta P = P_2 - P_1$ o incremento de carga aplicada e $\Delta u = u_2 - u_1$ o incremento no deslocamento vertical.

A estimativa das frequências naturais depende dos valores λL (dos 6 primeiros modos de flexão) encontrados pelas Equações (33), (38) e (39), expostos na Tabela 3:

Tabela 3 – Valores λL

1º Modo	2º Modo	3º Modo	4º Modo	5º Modo	6º Modo
4,730041	7,853205	10,995608	14,137165	17,278760	20,420352

Conhecidos esses valores, calculam-se as frequências conforme a equação semelhante à apresentada em Rao (2011), p.724:

$$f_n = \sqrt{\frac{(EI)(\lambda_n L)^4}{4\pi^2 \rho A L^4}} \quad (44)$$

Onde:

f_n é a frequência natural do modo n , Hz;

EI é o produto de rigidez entre o módulo de elasticidade longitudinal e momento inércia, resultante do ensaio de flexão estática, N.m²;

$\lambda_n L$ da Tabela 3, m;

ρ , L e A são, respectivamente, a densidade aparente (kg/m³), comprimento da viga (m) e área (m²), Tabela 1.

6 RESULTADOS E DISCUSSÕES

6.1 RESULTADOS

6.1.1 Ensaio de Flexão e Estimativa das Frequências Naturais

A Tabela 4 mostra os resultados do ensaio de flexão estática:

Tabela 4 – Resultados do ensaio de flexão

Medição	u_1 (mm)	u_2 (mm)	EI (N.m ²)
1	2,007	4,485	2391,5344
2	1,949	4,418	2400,252
3	1,932	4,426	2376,1917
Média			2389,326

Aplicada a Equação (44) para os seis modos de flexão das três vigas da Tabela 1, foram estimadas as frequências naturais, como demonstra a Tabela 5:

Tabela 5 – Frequências Naturais Estimadas (Hz)

	1° Modo	2° Modo	3° Modo	4° Modo	5° Modo	6° Modo
Viga V1	38,813	106,989	209,743	346,715	517,933	723,393
Viga V2	38,341	105,689	207,193	342,501	511,638	714,601
Viga V3	38,805	106,967	209,699	346,644	517,826	723,244
MÉDIA	38,653	106,5489	208,878	345,287	515,799	720,413

6.1.2 Alterações nas Frequências Naturais dos Perfis Ensaçados

As frequências naturais medidas nos 21 GDL, para cada modo, apresentaram pouca ou nenhuma variação (de 0 a 0,3%) tanto para as vigas íntegras, quanto para as danificadas. A seguir, as Tabelas 6, 7 e 8 demonstram as alterações nas frequências após a danificação.

Tabela 6 – Comparação entre as frequências da Viga V1 antes e após o dano (0,3L)

	1° Modo	2° Modo	3° Modo	4° Modo	5° Modo	6° Modo
ω_n (Hz)	38,3464	104,7682	205,5105	336,0174	493,8887	675,5014
ω_n' (Hz)	37,0697	99,2191	203,3342	334,9701	476,0150	659,4803
$\Delta\omega_n$ (%)	-3,3292	-5,2966	-1,0590	-0,3117	-3,6190	-2,3717

Tabela 7 – Comparação entre as frequências da Viga V2 antes e após o dano (0,5L)

	1º Modo	2º Modo	3º Modo	4º Modo	5º Modo	6º Modo
ω_n (Hz)	38,0115	103,8867	205,0720	333,4701	488,9508	668,7605
ω_n' (Hz)	35,6964	103,7532	202,4195	333,0297	471,1763	668,3024
$\Delta\omega_n$ (%)	-6,0906	-0,1286	-1,2934	-0,1321	-3,6352	-0,0685

Tabela 8 – Comparação entre as frequências da Viga V3 antes e após o dano (0,3L e 0,5L)

	1º Modo	2º Modo	3º Modo	4º Modo	5º Modo	6º Modo
ω_n (Hz)	38,372	105,0667	206,4603	337,0625	494,8851	676,8921
ω_n' (Hz)	34,9414	99,3058	190,4131	336,2415	460,5950	660,1237
$\Delta\omega_n$ (%)	-8,9403	-5,4830	-7,7726	-0,2436	-6,9289	-2,4773

É notável que as diferenças são maiores nas curvaturas cujos pontos nodais não coincidem com a localização dos elementos danificados. As frequências naturais apresentam comportamento semelhante, com redução nos modos em que a localização dos danos difere dos pontos nodais (Tabelas 6 a 8), sendo o 1º modo é o mais afetado nas vigas V2 e V3 e o 2º modo, na viga V1, por exemplo.

Em relação às porcentagens de redução das frequências naturais, pode-se constatar a presença de danos quando esses valores são maiores ou aproximadamente iguais a 5%, porém esses dados não fornecem informações a respeito da intensidade e da localização dos danos (GUERREIRO, 2014).

Outra observação pertinente é de que as frequências estimadas (Tabela 5) foram superiores às experimentais, principalmente a partir do 3º modo.

6.1.3 Alterações nos Amortecimentos Adimensionais dos Perfis Ensaçados

Em geral, os sistemas estruturais apresentam amortecimentos baixos, o que pode ser um fator determinante para distinguir os modos estruturais dos modos computacionais nas FRF's obtidas. Asmussem (1997) comenta que valores $\xi > 5\%$ não são confiáveis e podem apresentar ruídos. Neste trabalho, tendo em vista que os perfis são de aço, foram aceitos $\xi < 1\%$ e a diferença entre eles pode ser avaliada nas tabelas 9 a 11:

Tabela 9 – Comparação entre os amortecimentos da Viga V1 antes e após o dano (0,3L)

	1º Modo	2º Modo	3º Modo	4º Modo	5º Modo	6º Modo
ξ (%)	0,524	0,304	0,344	0,184	0,113	0,232
ξ' (%)	0,722	0,224	0,803	0,176	0,114	0,207
$\Delta\xi$ (%)	+37,774	-26,253	+133,439	-4,019	+1,192	-10,661

Tabela 10 – Comparação entre os amortecimentos da Viga V2 antes e após o dano (0,5L)

	1º Modo	2º Modo	3º Modo	4º Modo	5º Modo	6º Modo
ξ (%)	0,926	0,445	0,274	0,358	0,143	0,181
ξ' (%)	0,547	0,319	0,803	0,240	0,070	0,128
$\Delta\xi$ (%)	-40,906	-28,302	+193,077	-32,802	-50,782	-29,204

Tabela 11 – Comparação entre os amortecimentos da Viga V3 antes e após o dano (0,3L e 0,5L)

	1º Modo	2º Modo	3º Modo	4º Modo	5º Modo	6º Modo
ξ (%)	0,591	0,314	0,232	0,136	0,102	0,213
ξ' (%)	0,557	0,301	0,422	0,019	0,005	0,080
$\Delta\xi$ (%)	-5,618	-4,083	+81,743	-85,983	-94,714	-62,292

Observa-se das tabelas 9 a 11, que a maioria dos amortecimentos tende a diminuir. Todavia, no 3º Modo os valores apresentam comportamento contrário nas três condições de danos. Ainda assim, os que apresentam decréscimo nos amortecimentos são os mesmos nas tabelas 10 e 11.

6.1.4 Alterações nos modos de flexão

Em conformidade com o item 5.2.4 e com a posição dos danos mostrados na Figura 14, foram ensaiados os 3 perfis e os dados foram registrados em suas planilhas correspondentes (Apêndice A), as quais fornecem os modos de flexão. Nos pontos onde as FRF's apresentavam ajustes inadequados e resultados não confiáveis, foram refeitas as medições de acordo com a faixa de frequência do modo correspondente. Nos gráficos 22 a 30 seguintes, pode-se observar diferenças entre amplitudes modais das vigas íntegras e danificadas.

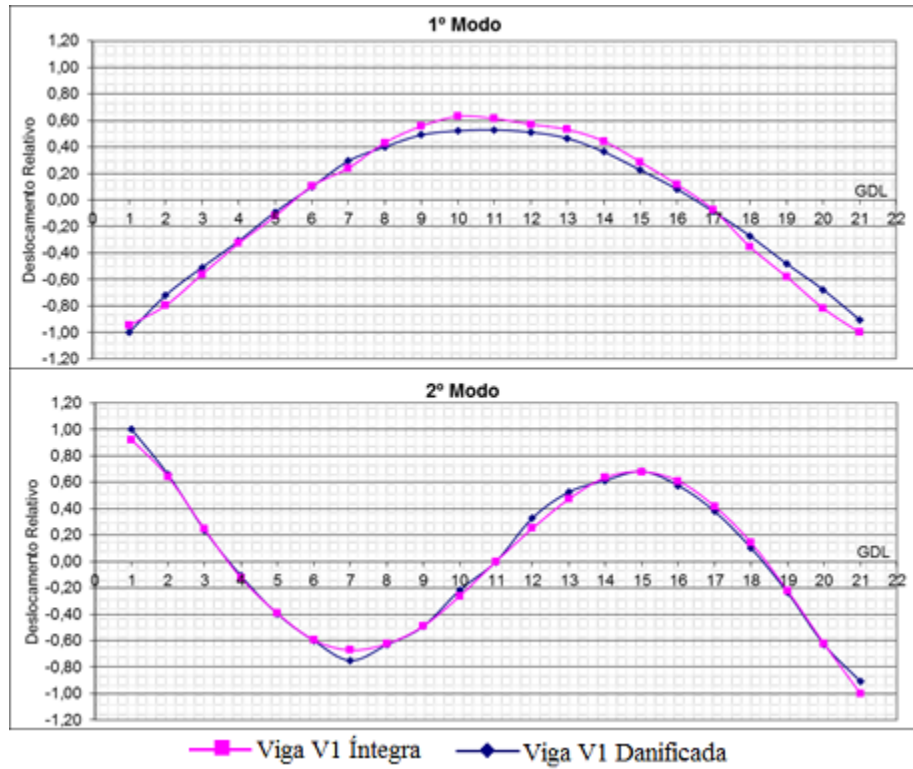


Figura 22 – Alteração do 1º e 2º Modos de Flexão de V1 para V1'.

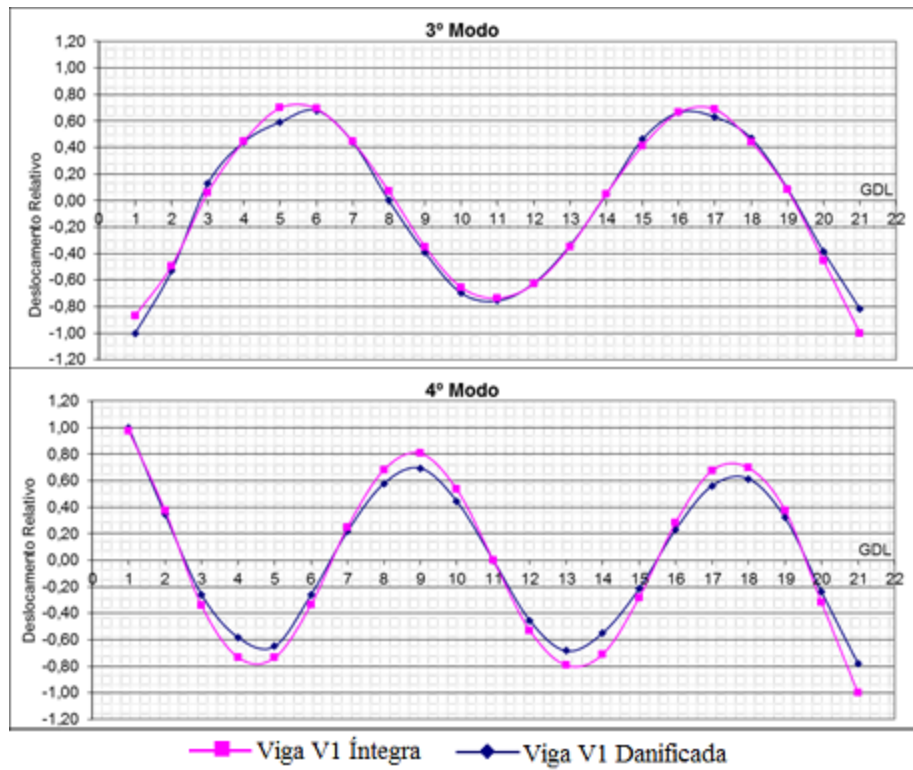


Figura 23 – Alteração do 3º e 4º Modos de Flexão de V1 para V1'.

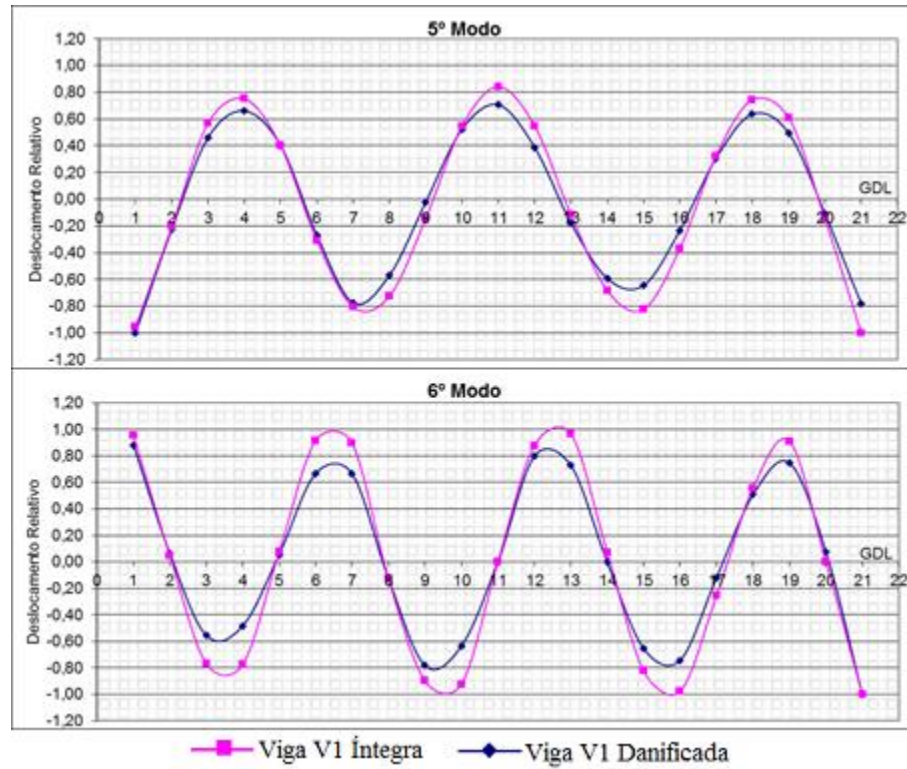


Figura 24 – Alteração do 5º e 6º Modos de Flexão de V1 para V1'.

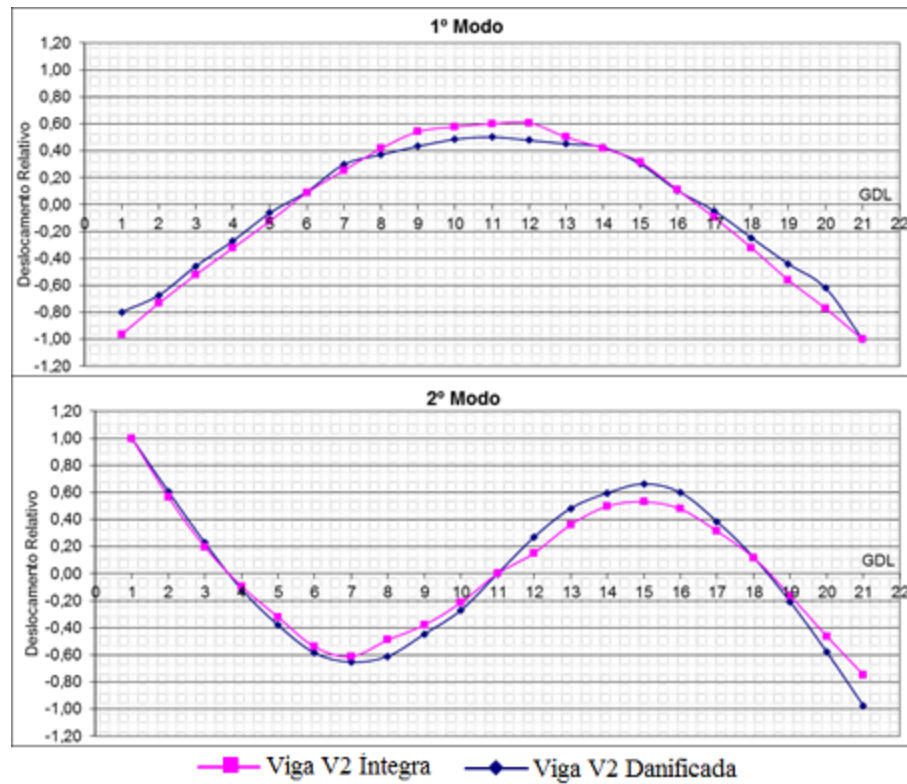


Figura 25 – Alteração dos 1º e 2º Modos de Flexão de V2 para V2'.

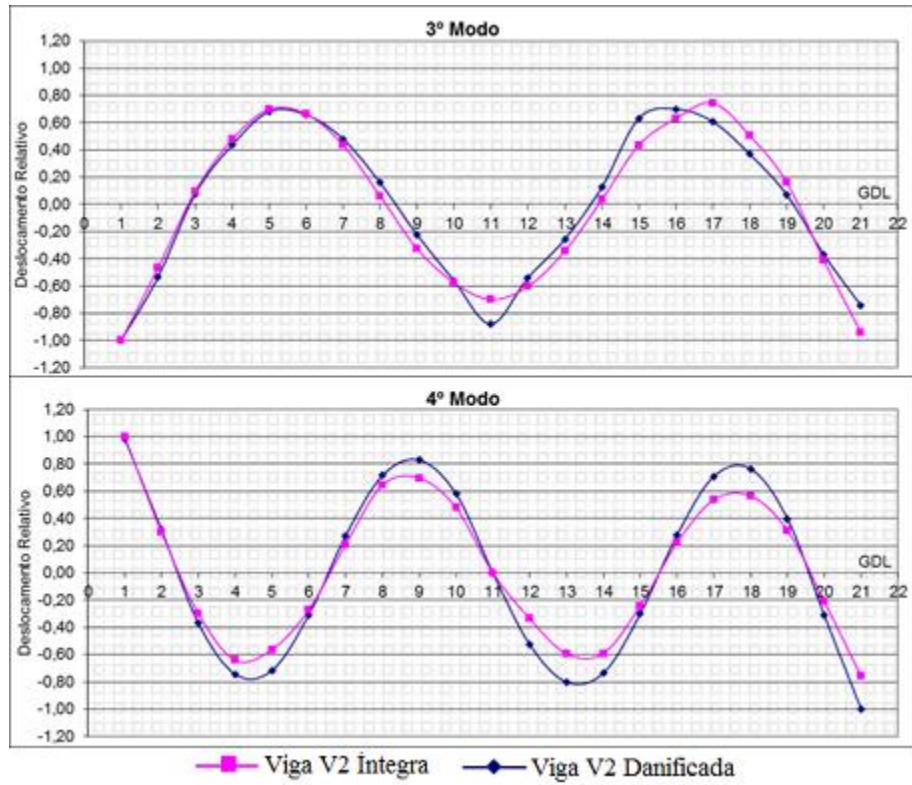


Figura 26 – Alteração do 3º e 4º Modos de Flexão de V2 para V2'.

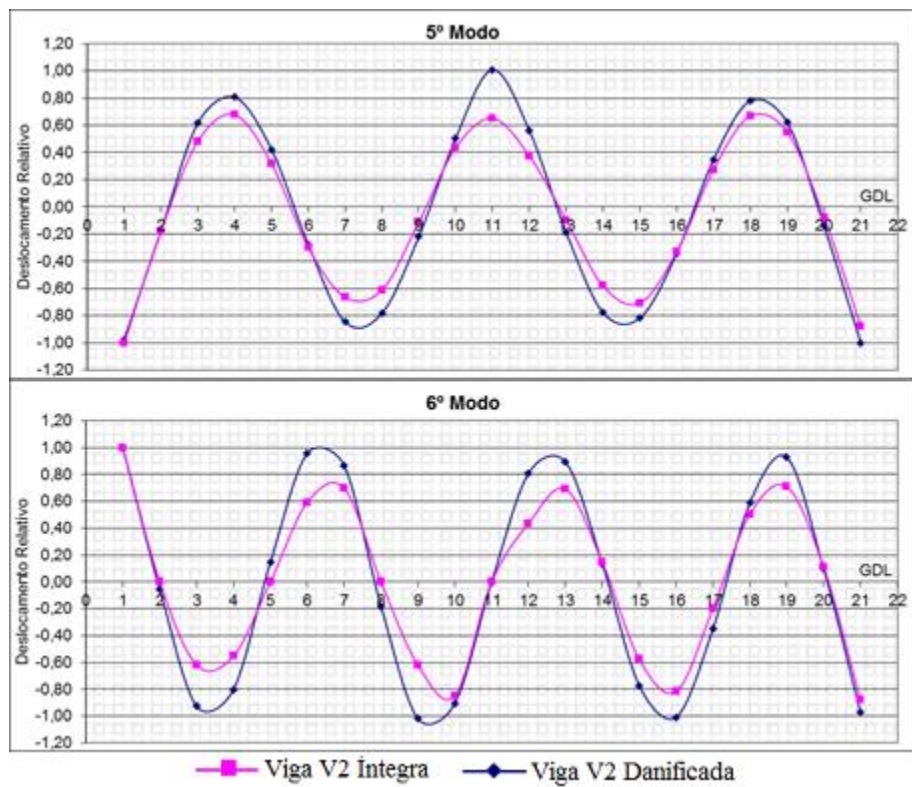


Figura 27 – Alteração do 5º e 6º Modos de Flexão de V2 para V2'.

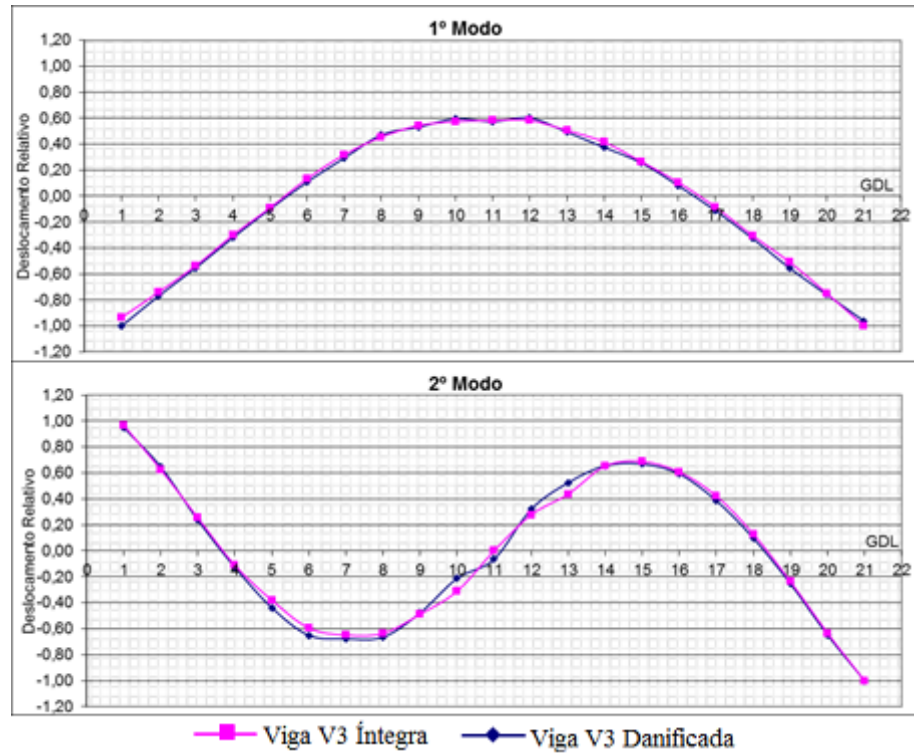


Figura 28 – Alteração do 1º e 2º Modos de Flexão de V3 para V3'.

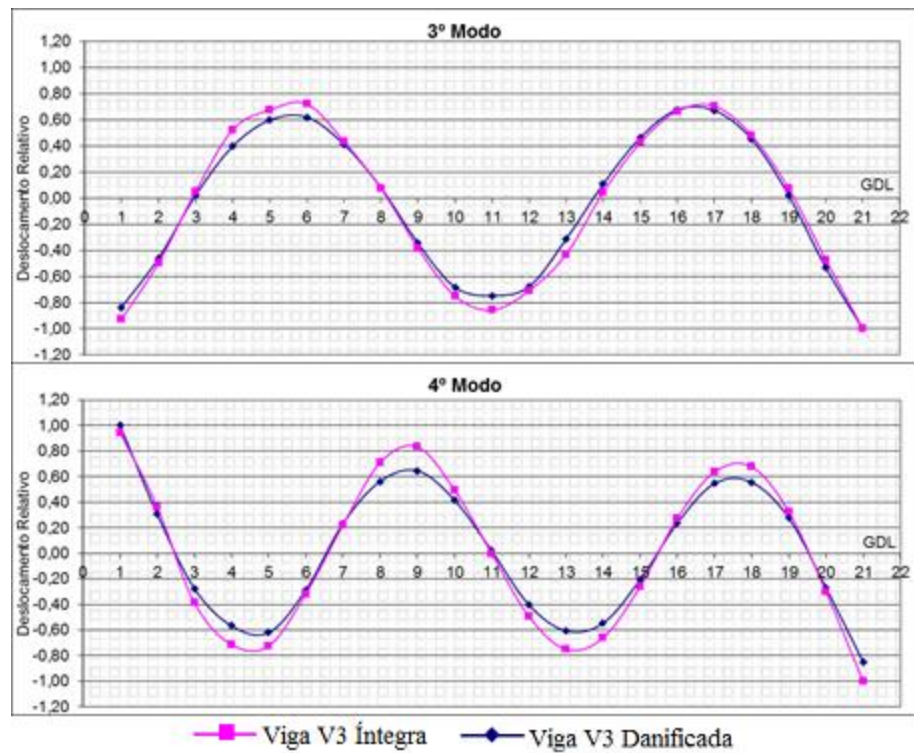


Figura 29 – Alteração do 3º e 4º Modos de Flexão de V3 para V3'.

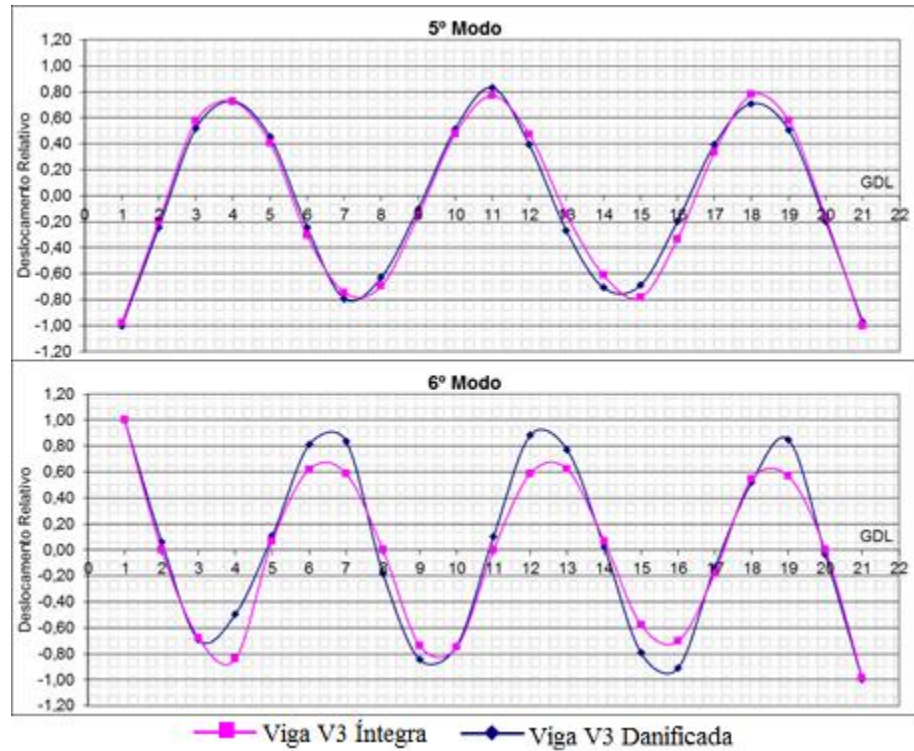


Figura 30 – Alteração do 5º e 6º Modos de Flexão de V3 para V3'.

6.1.5 Detecção de Danos

Aplicando-se a Equação (40) e de acordo com a metodologia do item 5.2.5, pode-se obter o valor da diferença entre as curvaturas modais conforme mostram as Figuras 22 a 30, para 6 modos de vibração. Registrados em tabelas (Apêndice B), esses dados permitem a visualização gráfica das variações entre os modos de flexão nos 21 GDL analisados, que seguem:

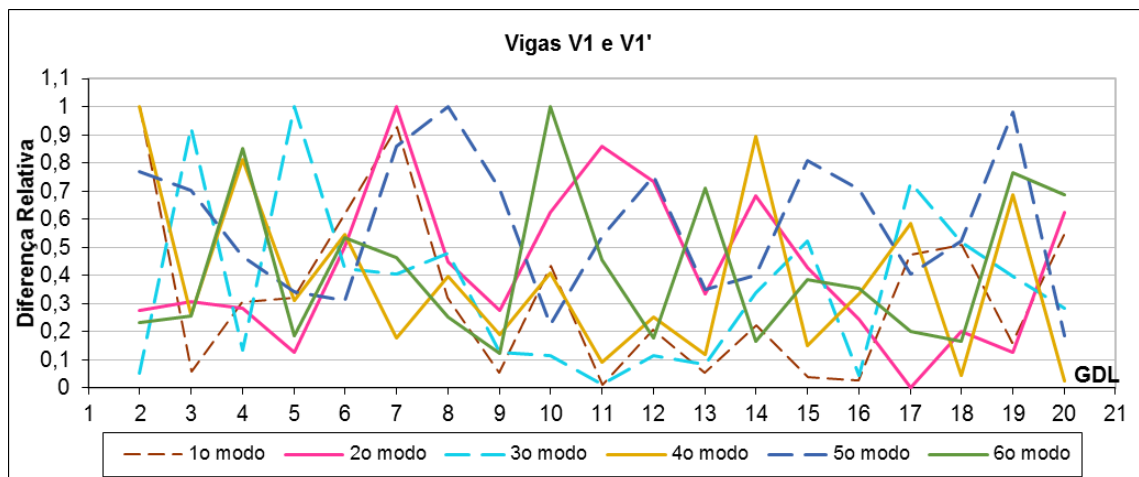
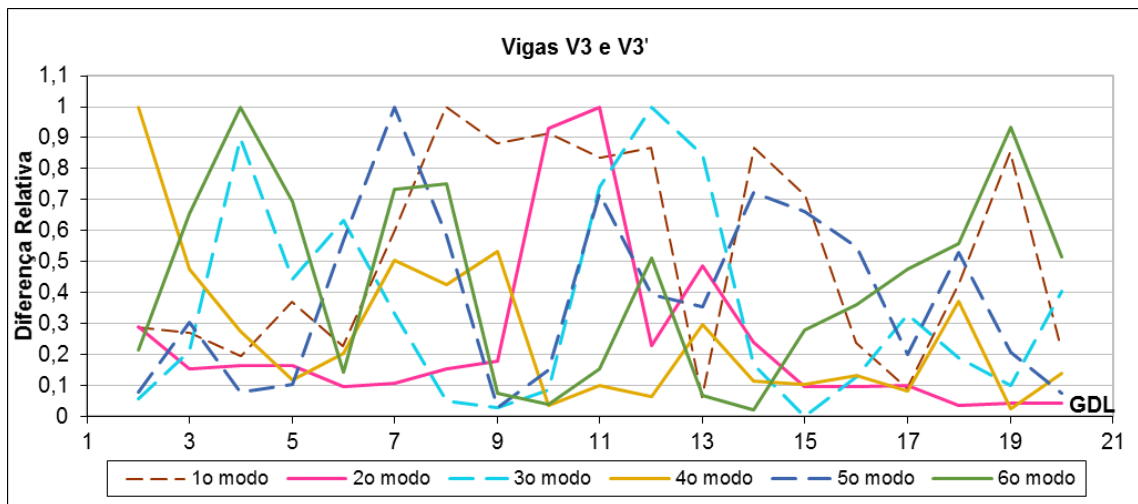
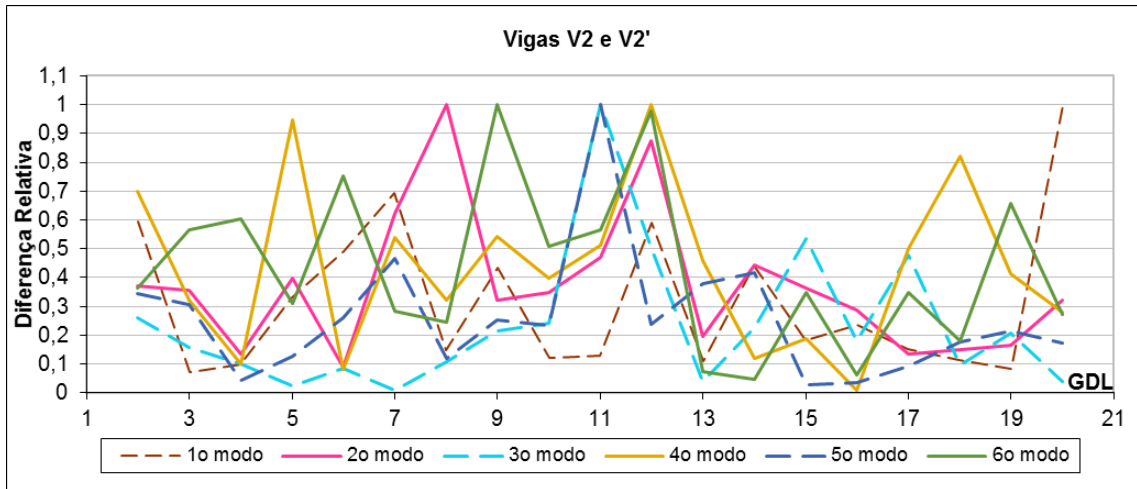


Figura 31 – Diferença Relativa entre as Curvaturas Modais da Viga V1.



Para os três casos analisados observou-se que os modos cujos pontos de maior amplitude modal coincidem com a posição dos danos foram os que apresentaram maiores diferenças nas curvaturas. Comportamento semelhante pode ser verificado na redução de frequências.

Na viga V1, é relevante a alteração do 1º, 2º e 5º modos em relação às frequências e às curvaturas. Também é visível um alto valor na diferença entre as curvaturas do 4º modo, no elemento 14, um provável indicativo de ruídos. Soares (2000) obteve resultados semelhantes utilizando cinco modos em três das oito vigas analisadas, cuja posição do dano situava-se em $x=0,27L$.

Em V2, com o elemento 11 danificado (meio do vão), os modos pares praticamente não sofrem alterações. Guerreiro (2014) comenta que a localização desse elemento favorece sua detecção, já que os modos ímpares (1º, 3º e 5º) apontam diferenças relativamente grandes, tanto em suas frequências naturais, quanto em suas curvaturas (Figuras 25 a 27).

Já na viga V3, onde os elementos 7 e 11 são simultaneamente danificados, os modos mais prejudicados são os que apresentam picos nesses pontos ou no intervalo entre eles. Nota-se, portanto, que o 1º, 3º e 5º modos contribuem em maior intensidade para a detecção desses danos (Figura 33).

As Figuras 31 a 33 apontam separadamente as diferenças relativas, porém ainda falta multiplicar os seis valores em cada um dos 21 GDL. O resultado da multiplicação é normalizado (componentes) e pode ser visualizado conforme os gráficos apresentados nas Figuras 34 a 36.

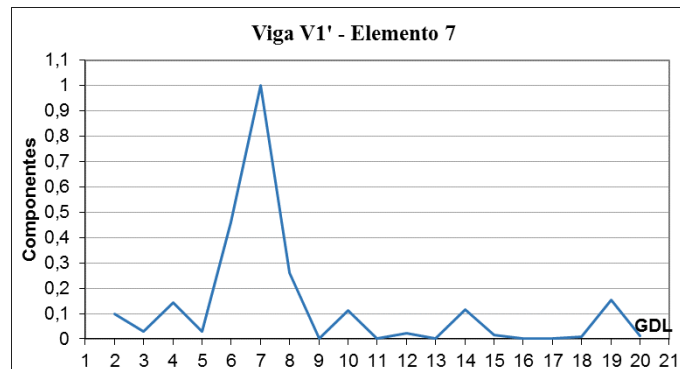


Figura 34 – Detecção de Dano em V1.

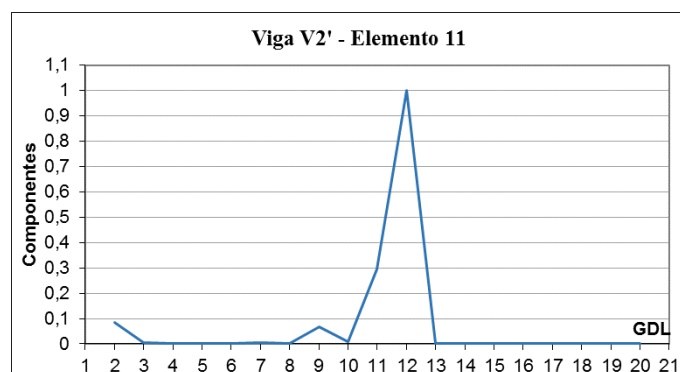


Figura 35 – Detecção de Dano em V2.

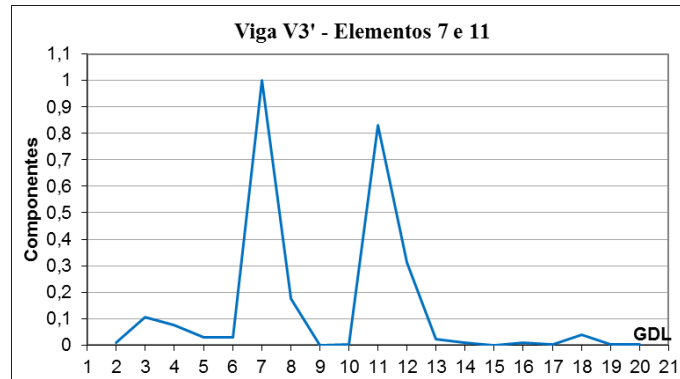


Figura 36 – Detecção de Dano em V3.

É importante destacar que o produto das diferenças relativas pode reduzir a interferência da variação das amplitudes modais causadas por ruídos e consegue identificar a posição dos danos. No entanto, se considerados deslocamentos provenientes de ensaios ruidosos, os resultados podem apontar falsos positivos.

Assim, a partir das figuras 34 a 36, pode-se constatar que as medições foram feitas com razoável precisão, identificando a posição dos danos de acordo com o esperado.

6.2 DISCUSSÕES

6.2.1 Detecção e Localização de Danos com 3, 4 e 5 Modos

A partir das Figuras 31 a 33 e tabelas correspondentes, optou-se por testar a viabilidade do método, utilizando 3, 4 ou 5 modos para a detecção dos danos. Assim, foram multiplicadas as três primeiras diferenças relativas e retiradas suas componentes normalizadas, para o emprego dos três primeiros modos de vibrar, por exemplo. O mesmo foi feito para quatro e cinco modos em cada uma das vigas analisadas. Os resultados obtidos para a viga V1 podem ser visualizados nas Figuras 37 a 39:

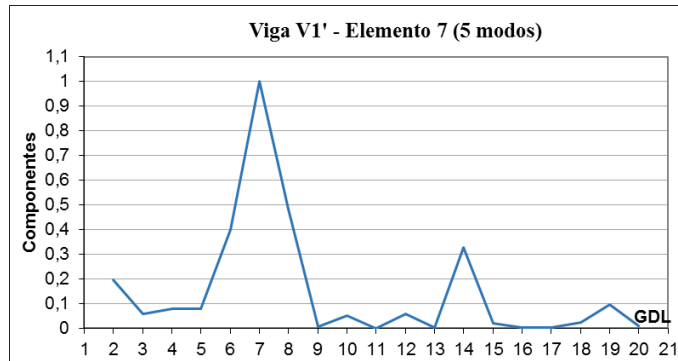


Figura 37 – Localização de dano com apenas 5 modos, em V1'.

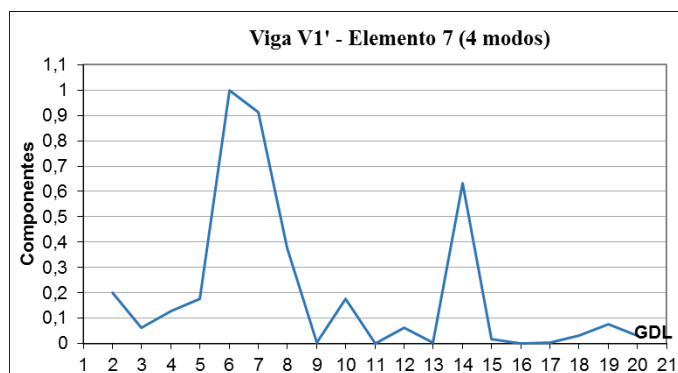


Figura 38 – Localização de dano com apenas 4 modos, em V1'.

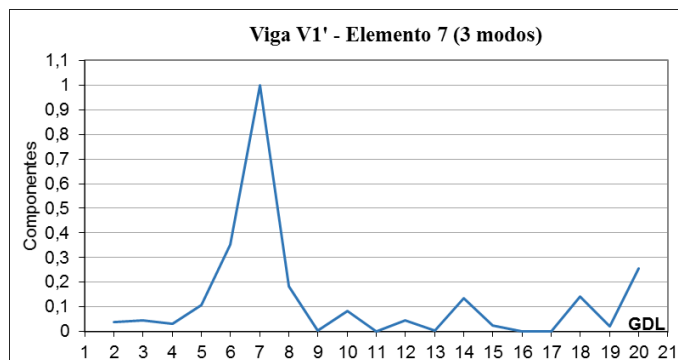


Figura 39 – Localização de dano com apenas 3 modos, em V1'.

Nos gráficos 36 a 38, observou-se a presença de ruídos no elemento 14, tanto para 4, quanto para 5 modos. Porém, para os 3 primeiros modos, houve coerência na detecção de danos em relação aos 6 inicialmente testados. Ou seja, os resultados apontam ruídos a partir do 4º modo de vibrar, os quais são minimizados pelo ajuste das curvaturas do 6º modo – confirmando a hipótese apontada no gráfico de diferenças relativas (Figura 31).

As Figuras 40 a 42 mostram o resultado da localização dos danos na viga V2' respectivamente considerando 5, 4 e 3 modos de flexão:

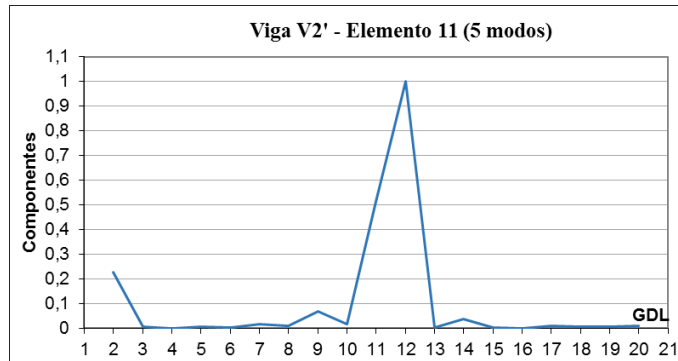


Figura 40 – Localização de dano com apenas 5 modos, em V2'.

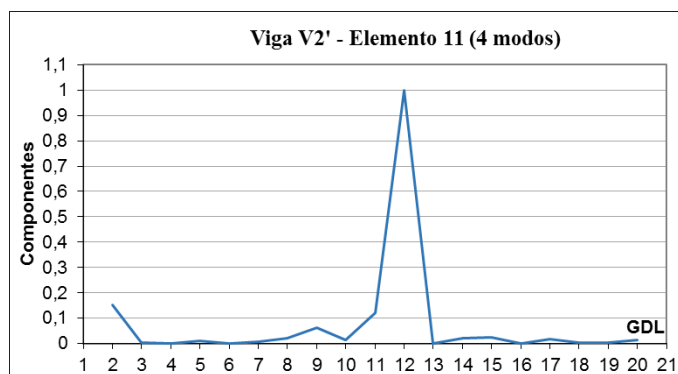


Figura 41 – Localização de dano com apenas 4 modos, em V2'.

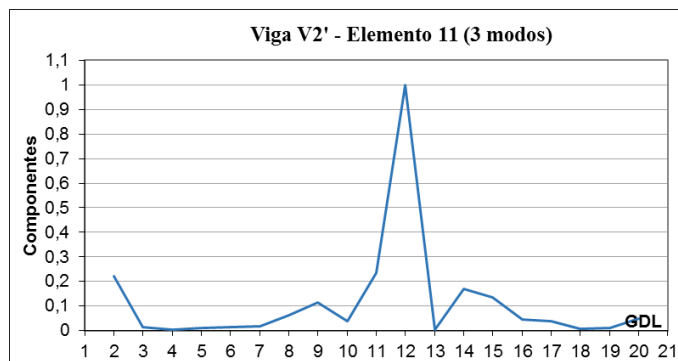


Figura 42 – Localização de dano com apenas 3 modos, em V2'.

Nos gráficos 39 a 41, observa-se o surgimento de falsos positivos na medida em que se reduz a quantidade de modos empregada no método, devido aos ruídos de ensaio nos primeiros modos, neste caso. Ainda assim, confirma-se a sensibilidade do método aos danos no meio do vão com as três primeiras curvaturas.

As Figuras 43 a 45 mostram os resultados obtidos na avaliação da posição dos danos na viga V3', respectivamente, considerando 5, 4 e 3 modos de flexão.

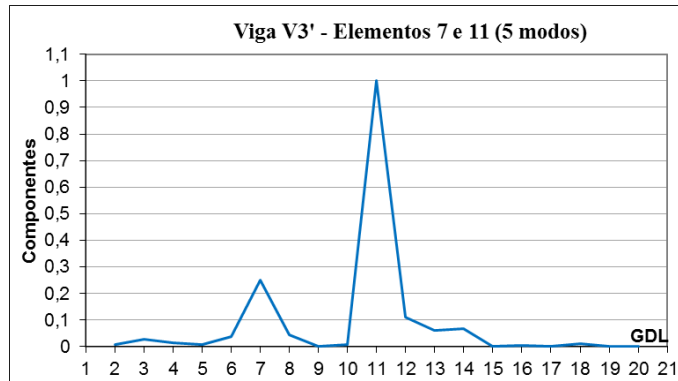


Figura 43 – Localização de dano com apenas 5 modos, em V3'.

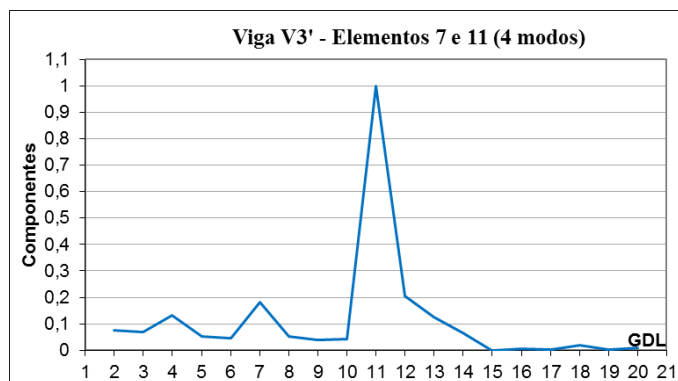


Figura 44 – Localização de dano com apenas 4 modos, em V3'.

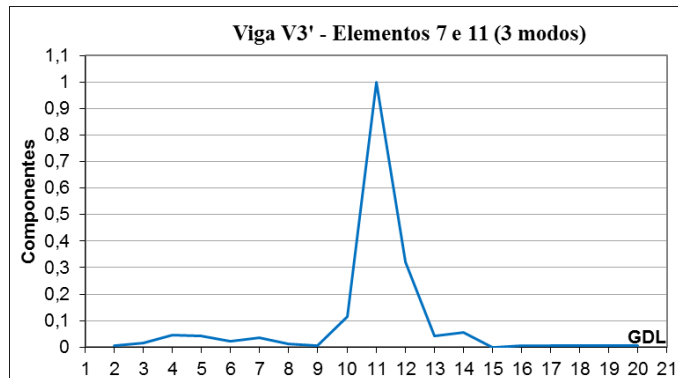


Figura 45 – Localização de dano com apenas 3 modos, em V3'.

Por fim, em V3' pode-se perceber o desaparecimento do dano em $x=0,3L$. Isso confirma a hipótese abordada em Soares (2000), cuja conclusão é a efetividade dos modos mais altos localizarem melhor o dano, já que em seus resultados não foi possível identificar claramente os dois elementos (9 e 10, de 34) com cortes de 2,5mm de profundidade e redução de inércia de 19,07%, utilizando as curvaturas dos cinco primeiros modos.

6.2.2 Sensibilidade do Método da Diferença das Curvaturas Modais

Em síntese dos trabalhos mencionados no item 4.2.8, observa-se que nas modelagens numéricas, os resultados demonstram pouca variação nas frequências naturais dependendo do número de pontos escolhido e há boa sensibilidade do método com, pelo menos, 3 modos de vibrar e 30% de dano, visto que não há presença de ruídos.

Nos estudos experimentais, a presença dos ruídos dificulta o emprego do método, uma vez que podem apontar falsos positivos nos gráficos de diferenças relativas e contribuir para a alteração nas frequências naturais. A quantidade de modos conveniente admitida depende do grau de severidade dos danos e localização.

Neste trabalho, com métodos semelhantes aos trabalhos já citados na revisão de literatura, os resultados apontaram a necessidade de no mínimo 5 modos de flexão para a correta localização do dano – nas vigas onde a localização e quantidade de danos era desfavorável para a detecção. Para este estudo de caso, as frequências não chegaram a 10% de redução e notou-se menor eficiência do método para danos simultâneos com apenas 3 modos. A contribuição do 6º modo foi relevante, mesmo com a presença de ruídos.

7 CONCLUSÕES

Em relação às mudanças nas frequências naturais, observa-se o decréscimo entre 0,07% a 8,94%. Nas tabelas, as reduções bruscas nas frequências podem indicar danos presentes nos elementos de maior amplitude modal dos respectivos modos de flexão como, por exemplo, 6,09% em V1 no primeiro modo. Em estudos numéricos, dependendo do grau de danificação, essa diferença pode ser insignificante.

Os amortecimentos adimensionais serviram como parâmetros para distinguir os modos reais dos computacionais, com valores abaixo de 1%. No entanto, os valores entre as vigas intactas e danificadas apontaram variações, em módulo, de 1,19 a 193,08%, não sendo pertinente considerar sua contribuição para detectar irregularidades nos perfis, já que as mesmas não seguiram um padrão de acréscimo ou decréscimo, para os seis modos considerados.

Nos gráficos das amplitudes modais notou-se as diferenças localizadas nas amplitudes entre as vigas íntegras e danificadas – o que não ocorreu em Amorim (2015), com abordagem numérica. Porém, algumas dessas diferenças são consequência de ruídos, os quais são inerentes à Análise Experimental. Já os gráficos de diferenças apontaram claramente a presença e localização dos danos, com algumas controvérsias: com 3 ou 4 modos, a tendência foi o surgimento de falsos positivos e, no caso de dois danos simultâneos, a localização de apenas um deles; já com 5 ou 6 modos, o método mostrou-se eficiente, indicando picos nos pontos esperados. Dessas informações, verifica-se que a quantidade de modos necessária a essa verificação é maior ou igual a 5 – em oposição aos 3 modos requeridos nas análises numéricas – e, como prova disso, os resultados com 6 modos de flexão neste estudo de caso mostraram-se bastante esclarecedores quanto à localização dos danos.

8 REFERÊNCIAS

ARCELOR-MITTAL: **Tubos Industriais Mecânicos – Catálogo**. 6f. Junho de 2009. Disponível em: <http://longos.arcelormittal.com.br/produtos/planos_e_derivados/tubos_industriais_mecanicos/pdf/tubos_industriais_mecanicos.pdf>. Acesso em: 19.out.2015.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 8681: **Ações e Segurança nas Estruturas - Procedimento**. 15f. Rio de Janeiro, 2003.

ALLEMANG, R. J.; BROWN, D. L. Experimental Modal Analysis. In: HARRIS, C.M.; PIERSOL, A.G. **Harris' Shock And Vibration Handbook**. 5 ed. New York: McGraw-Hill, p. 21.1-21.72, 2002.

AMORIN, G.E.R. **Avaliação Numérica do Método das Diferenças nas Curvaturas Modais na Detecção de Danos em Vigas**. 43f. Trabalho de Conclusão de Curso (Engenharia Civil). Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Campo Mourão, 2015.

ASHORY, M.R. **High Quality Modal Testing Methods**. Thesis - Dynamics Section. Department of Mechanical Engineering - Imperial College of Science, Technology and Medicine. University of London, 272f, 1999.

ASMUSSEM, J.C.; **Modal Analysis Based on the Random Decrement Technique - Application to Civil Engineering Structures**. Thesis for Ph.D in Dynamics of Structures. Department of Building Technology and Structural Engineering - University of Aalborg, 1997.

BILOŠOVÁ, A. **Modal Testing**. OP Education for Competitiveness, Ostrava, 2011.

BONETTI, L.S. **Detecção de Danos em Vigas Empregando o Método das Diferenças nas Curvaturas Modais**. 72f. Trabalho de Conclusão de Curso (Engenharia Civil). Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Campo Mourão, 2014.

CAMARGO, R.S.; FERREIRA, W.G. Algoritmos Eficientes para Correção de Erros de Análise Dinâmica no Domínio da Frequência de Sistemas Estruturais. **Revista Sul-Americana de Engenharia Estrutural**. Passo Fundo, v. 9, n.2. Agosto de 2012.

CARREIRA, M.R. **Avaliação da rigidez à flexão de toras de madeira por meio de vibração transversal**. 411 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Carlos, 2012.

CHOPRA, A. K. **Dynamics of Structures Theory and Applications to Earthquake Engineering**, 3 ed. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2007.

CLOUGH, R.W.; PENZIEN, J. **Dynamics of Structures**. 3 ed. Computers & Structures, 2003.

COUTO, P.M.T. **Caracterização Experimental do Comportamento Dinâmico de Sistemas Estruturais**. Dissertação. Mestrado em Estruturas de Engenharia Civil. Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 1995.

ELSHAFEY, A.A.; MARZOUK, H.; HADDARA, M.R. Experimental Damage Identification Using Modified Mode Shape Difference. **Journal of Marine Science And Application**, v.10, p. 150-155, 2011.

ENDEVCO: **Modal Hammer, Model 2302 – Catálogo**. 2f. Disponível em: <<https://www.endevco.com/product/prodpdf/2302.pdf>>. Acesso em: 18.nov.2015.

ENDEVCO: **Electromagnetic shaker system, Model F5B/Z11 – Catálogo**. 2f. Disponível em: <<https://www.endevco.com/wp-content/uploads/F5B-Z11spec98394.pdf>>. Acesso em: 18.nov.2015.

GATTI, P.L.; FERRARI, V. **Applied Structural and Mechanical Vibrations: Theory, Methods and Measuring Instrumentation**, 1 ed. Taylor & Francis Group, 2003.

GUERREIRO, M.A.J. **Identificação de Dano Estrutural com Base em Análise Modal**. 140f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil, Estruturas). Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa, 2014.

HE, J.; FU, Z.F. **Modal analysis**. 1. ed. Woburn, MA: Butterworth-Heinemann, 2001.

HUYNH, D.; HE, J.; TRAN, D. Damage location vector: A non-destructive structural damage detection technique. **Computers and Structures**, 2005, Vol.83(28), p.2353-2367.

HIBBELER, R. C. **Resistência dos materiais**. 7. ed. São Paulo, SP: Pearson, 2010. 637 p.

KELLY, S.G. **Fundamentals of Mechanical Vibrations**. 2 ed. Boston, US-MA: McGraw-Hill, 2000.

MARTHA, L. F. **Análise de estruturas: conceitos e métodos básicos**. 524 p., Rio de Janeiro, RJ: Elsevier, 2010.

NÓBREGA, J.M.A.N.C. **Modelação de Estruturas por Análise Modal Experimental e Acoplamento Dinâmico**. 266f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Estrutural) – Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 1996.

OWOLABI, G.M.; SWAMIDAS, A.S.J.; SESHADRI; R. Crack detection in beams using changes in frequencies and amplitudes of frequency response functions. **Journal of Sound and Vibration**, v. 265, p. 1-22, 2003.

PANDEY, A. K.; BISWAS, M.; SAMMAN, M. M. Damage detection from changes in curvature mode shapes. **Journal of Sound and Vibration**, v. 145, n. 2, p. 321-332, 1991.

RAO, S. S. **Mechanical vibrations**. 5 ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2011.

RAZAK, H.A.; CHOI, F.C. The effect of corrosion on the natural frequency and modal damping of reinforced concret beams. **Journal of Engineeing Structures**, n.23, p.1126-1133, 2001.

SALAWU, O.S.; WILLIANS, C. Damage Location Using Vibration Mode Shapes.12th **International Modal Analysis Conference**. v. 2251, p. 933-939, 1994.

SOARES, M.E.G.; **Localização e Quantificação de Danos em Estruturas por meio das suas Características Dinâmicas**. 130p. Dissertação (Mestrado em Estruturas e Construção Civil) - Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, 2000.

SOEIRO, N. S. **Notas de Aula: Análise Modal Experimental**. Instituto de Tecnologia (ITEC), Grupo de Vibrações e Acústica. Universidade Federal do Pará, 2001.

SOEIRO, N.S. **Notas de Aula: Curso de fundamentos de vibrações e balanceamento de Rotores**. Instituto de Tecnologia (ITEC), Grupo de Vibrações e Acústica. Universidade Federal do Pará, 2008.

THOMSON; T.W. **Teoria da Vibração com Aplicações**. Editora Interciência, 1978

APÊNDICE A

PLANILHAS DAS CURVATURAS MODAIS ÍNTEGRAS E DANIFICADAS

Tabela 14 – Frequências, Amortecimentos e Deslocamentos de V2 Íntegra para 6 modos analisados

V2 INT.	1o Modo			2o Modo			3o Modo			4o Modo			5o Modo			6o Modo								
	freq (Hz)	Amort(%)	Im	Normaliz	freq (Hz)	Amort(%)	Im	Normaliz	freq (Hz)	Amort(%)	Im	Normaliz	freq (Hz)	Amort(%)	Im	Normaliz	freq (Hz)	Amort(%)	Im	Normaliz				
1	37,955	0,915	-17,272	-0,983	104,194	0,947	59,887	1,000	204,952	0,208	-46,992	-1,000	333,137	0,378	148,806	1,000	488,879	0,141	-222,335	-1,000	688,754	0,176	276,828	1,000
2	37,971	0,802	-13,152	-0,734	103,967	0,572	33,868	0,566	204,936	0,206	-21,891	-0,486	333,239	0,391	44,280	0,298	489,089	0,166	-39,331	-0,177	688,021	0,135	-171,110	0,000
3	37,942	0,723	-9,334	-0,521	103,839	0,481	11,881	0,195	204,820	0,525	4,452	0,095	333,304	0,317	-44,300	-0,298	489,038	0,146	106,944	0,481	688,021	0,135	-171,110	-0,818
4	37,991	1,014	-5,791	-0,323	103,854	0,427	-5,887	-0,093	205,041	0,216	22,943	0,475	333,317	0,308	-95,210	-0,841	488,915	0,150	150,498	0,677	688,572	0,164	-152,800	-0,552
5	38,158	1,372	-2,183	-0,122	103,578	0,444	-19,199	-0,321	204,995	0,212	32,822	0,698	333,359	0,278	-83,707	-0,563	488,864	0,159	70,681	0,318	688,934	0,137	163,446	0,590
6	38,020	0,838	9,711	0,088	103,711	0,514	-32,358	-0,541	205,017	0,214	31,191	0,664	333,342	0,342	-40,265	-0,271	489,092	0,165	-66,594	-0,300	688,934	0,137	163,446	0,696
7	37,985	0,758	4,550	0,254	103,948	0,496	-36,802	-0,611	205,138	0,223	20,495	0,436	333,252	0,360	31,029	0,209	488,978	0,129	-147,834	-0,665	688,794	0,171	192,810	0,696
8	38,048	0,746	7,459	0,416	103,884	0,384	-29,320	-0,490	205,938	0,581	2,912	0,062	333,484	0,405	95,891	0,645	488,953	0,134	-135,740	-0,611	688,371	0,183	-171,670	-0,920
9	38,007	0,810	10,359	0,578	103,842	0,371	-12,787	-0,219	205,018	0,178	-27,035	-0,575	333,308	0,418	71,192	0,479	488,969	0,129	96,466	0,434	688,753	0,229	-235,041	-0,849
10	38,126	0,899	10,763	0,600	104,303	0,400	9,133	0,153	205,036	0,185	-32,844	-0,699	333,435	0,276	-49,857	-0,335	488,935	0,119	144,825	0,651	688,371	0,183	-171,670	-0,920
11	38,021	0,860	10,878	0,607	103,862	0,361	21,665	0,382	205,073	0,181	-16,078	-0,603	333,371	0,327	-88,289	-0,564	488,978	0,128	-21,805	-0,087	688,926	0,188	191,292	0,691
12	38,028	0,783	8,993	0,502	103,862	0,397	29,786	0,498	204,852	0,242	1,622	0,035	333,565	0,384	-87,815	-0,591	488,969	0,142	-129,231	-0,581	688,835	0,238	40,157	0,145
13	38,001	0,836	7,509	0,419	103,862	0,397	29,786	0,498	204,852	0,242	1,622	0,035	333,565	0,384	-87,815	-0,591	488,969	0,142	-129,231	-0,581	688,835	0,238	40,157	0,145
14	38,028	1,185	5,881	0,317	103,831	0,403	31,716	0,530	205,264	0,277	20,428	0,435	333,581	0,366	-35,876	-0,241	488,904	0,150	-157,451	-0,708	688,845	0,174	-159,451	-0,576
15	37,982	1,049	1,984	0,111	103,851	0,404	28,579	0,477	205,200	0,212	29,638	0,631	333,519	0,408	-32,909	-0,221	488,985	0,150	-73,921	-0,332	688,614	0,262	-228,185	-0,817
16	37,991	1,143	-1,707	-0,066	103,857	0,363	18,781	0,314	205,229	0,285	34,883	0,744	333,738	0,366	78,792	0,537	488,915	0,156	61,216	0,275	688,642	0,194	-55,055	-0,189
17	37,942	1,206	-5,730	-0,320	103,855	0,420	7,050	0,118	205,327	0,248	23,881	0,504	333,740	0,344	83,877	0,564	488,904	0,151	148,481	0,668	688,688	0,165	139,829	0,505
18	37,990	1,136	-10,051	-0,561	103,802	0,462	-9,992	-0,162	204,681	0,738	7,556	0,161	333,739	0,380	46,412	0,312	488,940	0,163	122,103	0,549	688,936	0,176	190,233	0,709
19	38,001	0,982	-13,802	-0,770	103,851	0,381	-27,863	-0,462	205,170	0,218	-19,365	-0,412	333,827	0,384	-30,972	-0,208	489,091	0,153	-16,969	-0,076	688,881	0,211	30,556	0,110
20	37,989	0,644	-17,828	-1,000	103,770	0,357	-44,996	-0,747	205,140	0,204	-44,120	-0,839	333,656	0,311	-112,801	-0,759	488,810	0,093	-194,838	-0,876	688,303	0,157	-243,160	-0,878
Média	38,012	0,926	-	-	103,887	0,445	-	-	205,072	0,274	-	-	333,470	0,358	-	-	488,951	0,143	-	-	688,760	0,181	-	-
Desvio Padrão	0,0666	0,19297	-	-	0,1582	0,13124	-	-	0,2682	0,14822	-	-	0,2183	0,04282	-	-	0,0797	0,02866	-	-	0,212	0,03767	-	-
Variacão	0,2%	20,8%	-	-	0,2%	29,5%	-	-	0,1%	54,1%	-	-	0,1%	12,0%	-	-	0,0%	20,3%	-	-	0,0%	20,8%	-	-

Tabela 15 – Frequências, Amortecimentos e Deslocamentos de V2 Danificada para 6 modos analisados

V2 DAN.	1o Modo			2o Modo			3o Modo			4o Modo			5o Modo			6o Modo								
	freq (Hz)	Amort(%)	Im	Normaliz	freq (Hz)	Amort(%)	Im	Normaliz	freq (Hz)	Amort(%)	Im	Normaliz	freq (Hz)	Amort(%)	Im	Normaliz	freq (Hz)	Amort(%)	Im	Normaliz				
1	35,982	0,486	-16,524	-0,797	103,739	0,321	47,262	1,000	201,190	0,504	-15,568	-1,000	332,830	0,173	115,136	0,985	471,035	0,059	-162,952	-0,877	688,368	0,056	213,728	1,000
2	35,726	0,627	-13,958	-0,673	103,739	0,328	28,638	0,606	202,274	0,622	-8,284	-0,532	333,042	0,211	36,948	0,316	471,222	0,072	-29,468	-0,177	688,058	0,186	-11,374	-0,953
3	35,718	0,600	-9,485	-0,457	103,670	0,337	10,743	0,227	202,364	0,401	1,181	0,076	333,111	0,221	-43,090	-0,369	471,200	0,073	102,576	0,615	688,406	0,095	-198,243	-0,928
4	35,705	0,471	-5,601	-0,270	103,715	0,316	-5,462	-0,116	202,204	0,298	6,778	0,435	333,011	0,232	-86,917	-0,743	471,184	0,074	134,430	0,806	688,193	0,114	-171,549	-0,803
5	35,720	0,202	-1,271	-0,061	103,750	0,300	-17,968	-0,381	202,091	0,320	10,603	0,691	333,016	0,232	-89,081	-0,716	471,213	0,074	70,389	0,422	688,056	0,103	30,956	0,145
6	35,714	0,487	1,881	0,096	103,754	0,301	-27,672	-0,586	202,596	0,484	10,255	0,659	332,920	0,229	-36,043	-0,308	471,230	0,068	-46,499	-0,279	688,368	0,100	204,637	0,957
7	35,630	0,801	6,184	0,298	103,735	0,308	-30,881	-0,653	203,512	1,026	7,475	0,480	333,073	0,267	31,827	0,272	471,193	0,078	-141,189	-0,947	688,342	0,113	185,386	0,867
8	35,718	0,575	7,681	0,370	103,766	0,270	-28,810	-0,610	202,809	0,634	2,480	0,159	333,110	0,250	83,651	0,716	471,185	0,066	-36,677	-0,782	687,825	0,108	-38,914	-0,182
9	35,692	0,500	8,975	0,433	103,764	0,251	-21,063	-0,446	202,074	0,303	-3,456	-0,222	333,051	0,245	96,807	0,829	471,182	0,068	-36,677	-0,220	688,552	0,108	-217,897	-1,019
10	35,696	0,447	10,064	0,485	103,720	0,308	-12,748	-0,270	202,026	0,302	-8,726	-0,561	333,016	0,263	67,836	0,580	471,206	0,073	84,129	0,504	688,423	0,088	-193,828	-0,907
11	35,665	0,442	10,398	0,501	103,720	0,308	0,000	0,000	202,450	0,693	-13,669	-0,878	333,016	0,263	67,836	0,580	471,176	0,073	167,891	1,007	688,423	0,088	-193,828	-0,907
12	35,702	0,487	9,907	0,478	103,654	0,483	12,780	0,270	202,189	0,268	-8,392	-0,539	332,885	0,270	-61,518	-0,526	471,154	0,077	93,529	0,561	688,327	0,093	172,815	0,809
13	35,689	0,467	9,348	0,451	103,753	0,334	22,800	0,483	202,140	0,246	-3,975	-0,255	333,063	0,221	-83,692	-0,801	471,155	0,065	-31,417	-0,188	688,447	0,066	191,026	0,894
14	35,713	0,942	8,834	0,426	103,747	0,312	28,144	0,595	203,665	1,455	1,989	0,128	333,113	0,243	-85,905	-0,735	471,165	0,079	-129,552	-0,777	688,826	0,112	28,775	0,135
15	35,730	0,905	6,248	0,301	103,719	0,322	31,346	0,683	202,584	1,320	9,849	0,633	333,066	0,267	-35,208	-0,301	471,157	0,071	-139,413	-0,818	688,363	0,090	-165,327	-0,774
16	35,707	0,461	2,198	0,105	103,728	0,330	28,287	0,599	202,525	0,582	10,903	0,700	333,066	0,247	32,564	0,278	471,174	0,074	-57,335	-0,344	688,299	0,088	-215,583	-1,009
17	35,683	0,418	-5,099	-0,246	103,762	0,285	18,176	0,386	202,100	0,304	9,448	0,607	333,050	0,240	82,801	0,709	471,175	0,055	57,835	0,347	687,990	0,222	-74,612	-0,349
18	35,																							

Tabela 16 – Frequências, Amortecimentos e Deslocamentos de V3 Íntegra para 6 modos analisados

V3 INT. GDL	1o Modo			2o Modo			3o Modo			4o Modo			5o Modo			6o Modo				
	freq (Hz)	Amort(%)	Im	Normaliz.	freq (Hz)	Amort(%)	Im	Normaliz.	freq (Hz)	Amort(%)	Im	Normaliz.	freq (Hz)	Amort(%)	Im	Normaliz.	freq (Hz)	Amort(%)	Im	Normaliz.
1	38,375	0,496	-17,436	-0,935	105,003	0,365	45,071	0,967	206,573	0,216	-56,517	0,946	494,933	0,080	-193,870	-0,980	677,240	0,199	294,873	0,000
2	38,352	0,463	-13,783	-0,739	105,054	0,257	29,157	0,625	206,352	0,138	-30,168	-0,494	336,778	0,089	-38,798	-0,196	677,032	0,203	-199,480	0,000
3	38,365	0,487	-10,006	-0,537	105,115	0,324	11,901	0,255	206,387	0,156	3,106	-0,371	494,822	0,107	114,031	0,577	677,055	0,323	-247,727	-0,676
4	38,332	0,549	-5,609	-0,301	105,083	0,324	-5,169	-0,111	206,314	0,193	31,952	0,524	336,811	0,118	-88,105	0,726	676,055	0,408	20,096	0,068
5	38,376	0,419	-1,691	-0,091	105,068	0,243	-17,713	-0,380	206,504	0,172	41,194	0,675	336,802	0,120	-89,497	-0,725	677,470	0,129	20,096	0,068
6	38,205	0,944	2,485	0,133	105,023	0,248	-27,722	-0,595	206,329	0,162	43,977	0,721	336,880	0,122	-39,141	-0,311	676,508	0,176	182,393	0,619
7	38,305	0,611	5,926	0,138	105,015	0,223	-30,257	-0,649	206,586	0,229	26,443	0,433	336,852	0,102	27,299	0,221	676,508	0,147	173,629	0,589
8	38,358	0,613	8,478	0,455	105,041	0,244	-29,617	-0,635	206,616	0,345	4,608	0,076	336,820	0,124	87,662	0,710	676,758	0,147	173,629	0,589
9	38,382	0,533	10,117	0,543	105,084	0,242	-22,803	-0,489	206,440	0,210	-23,437	-0,384	336,784	0,127	102,896	0,833	677,221	0,213	-217,389	0,000
10	38,400	0,524	10,693	0,573	105,111	0,432	-14,484	-0,311	206,350	0,235	-44,771	-0,750	494,878	0,095	94,154	0,476	676,375	0,261	-221,703	-0,752
11	38,419	0,569	10,837	0,581	105,111	0,432	-14,484	-0,311	206,350	0,235	-44,771	-0,750	494,878	0,095	94,154	0,476	676,375	0,261	-221,703	-0,752
12	38,412	0,552	10,855	0,582	105,223	0,445	12,917	0,277	206,424	0,247	-43,211	-0,708	337,242	0,152	-60,792	-0,492	676,757	0,201	173,313	0,588
13	38,405	0,587	9,422	0,502	105,137	0,269	20,343	0,436	206,577	0,355	-26,209	-0,430	337,171	0,147	-92,732	-0,751	676,908	0,204	183,193	0,621
14	38,389	0,647	7,762	0,416	105,057	0,331	30,435	0,653	206,642	0,307	2,725	0,045	-81,605	-0,661	494,986	0,087	677,624	0,198	20,005	0,068
15	38,416	0,603	4,949	0,265	105,056	0,336	32,056	0,688	206,484	0,232	25,962	0,426	337,241	0,148	-31,918	-0,259	677,017	0,282	-169,866	-0,704
16	38,370	0,705	1,978	0,106	105,055	0,333	28,282	0,607	206,477	0,249	40,612	0,666	337,339	0,152	33,891	0,275	677,009	0,232	-207,651	-0,704
17	38,398	0,549	-1,572	-0,084	105,037	0,335	19,694	0,422	206,455	0,230	43,039	0,705	337,269	0,147	78,705	0,638	676,944	0,270	-52,974	-0,180
18	38,372	0,730	-5,665	-0,304	105,039	0,339	6,002	0,129	206,513	0,251	29,290	0,480	337,305	0,135	83,655	0,678	677,514	0,202	160,594	0,545
19	38,385	0,688	-9,479	-0,508	105,031	0,329	-11,012	-0,236	206,522	0,312	4,575	0,075	337,379	0,151	40,182	0,325	676,795	0,201	167,302	0,567
20	38,399	0,636	-13,936	-0,747	105,032	0,319	-29,516	-0,633	206,494	0,233	-28,690	-0,470	337,348	0,138	-37,218	-0,301	676,944	0,201	167,302	0,567
21	38,396	0,499	-18,645	-1,000	105,049	0,333	-46,616	-1,000	206,345	0,216	-81,007	-1,000	494,832	0,079	-197,790	-1,000	675,940	0,176	-290,841	-0,986
Média	38,372	0,591	-	-	105,067	0,314	-	-	206,460	0,232	-	-	337,062	0,136	-	-	676,892	0,213	-	-
Desvio Padrão	0,0473	0,11407	-	-	0,051	0,06048	-	-	0,1059	0,05848	-	-	0,2418	0,0189	-	-	0,4748	0,0487	-	-
Variacão	0,1%	19,3%	-	-	0,0%	19,3%	-	-	0,1%	25,2%	-	-	0,1%	13,9%	-	-	0,0%	19,8%	-	-

Tabela 17 – Frequências, Amortecimentos e Deslocamentos de V3 Danificada para 6 modos analisados

V3 DAN. GDL	1o Modo			2o Modo			3o Modo			4o Modo			5o Modo			6o Modo				
	freq (Hz)	Amort(%)	Im	Normaliz.	freq (Hz)	Amort(%)	Im	Normaliz.	freq (Hz)	Amort(%)	Im	Normaliz.	freq (Hz)	Amort(%)	Im	Normaliz.	freq (Hz)	Amort(%)	Im	Normaliz.
1	34,866	0,609	-16,671	-1	99,243	0,277453	41,126	0,949525	190,033	0,330	-64,166	-0,836012	335,993	0,275	134,192	-1	460,507	0,077	-186,228	256,593
2	34,925	0,555	-12,825	-0,769256	99,279	0,304	-28,020	0,6469195	190,255	0,442	-35,218	-0,458855	336,149	0,247	41,103	0,306298	460,502	0,083	-45,229	16,422
3	34,912	0,535	-9,189	-0,551798	99,269	0,305	10,267	0,2370378	190,809	0,835	1,739	0,02286	336,359	0,258	-36,960	-0,275429	460,511	0,079	96,940	-177,200
4	34,928	0,582	-5,333	-0,319872	99,246	0,271	-5,495	-0,12688	190,369	0,469	30,441	0,3986611	336,370	0,233	-76,063	-0,568825	460,606	0,074	135,687	-0,49568
5	34,924	0,612	-1,670	-0,100172	99,355	0,299	-18,990	-0,438439	190,331	0,317	45,639	0,597228	336,180	0,219	-83,193	-0,619958	460,630	0,083	84,222	45,2542
6	34,926	0,532	1,797	0,107781	99,330	0,256	-28,195	-0,65096	190,288	0,303	47,510	0,619008	336,175	0,232	-38,554	-0,287308	460,659	0,085	-45,369	-0,243622
7	35,123	0,737	4,868	0,292019	99,348	0,250	-29,334	-0,677264	190,429	0,280	31,640	0,412238	336,313	0,244	31,249	0,232868	460,575	0,085	-147,602	-0,792568
8	34,966	0,552	7,841	0,470324	99,344	0,273	-28,795	-0,664824	190,629	0,575	6,127	0,079825	336,196	0,219	75,553	0,563022	460,623	0,078	-117,443	-0,630641
9	34,933	0,456	8,843	0,590448	99,337	0,282	-20,734	-0,478707	190,451	0,356	-26,564	-0,346105	336,182	0,210	86,731	0,646317	460,631	0,089	-18,756	-0,100715
10	34,926	0,476	9,915	0,584721	99,316	0,278	-9,183	-0,212009	190,280	0,367	52,433	0,683141	336,312	0,236	56,032	0,417547	460,562	0,078	95,873	0,5148141
11	34,936	0,479	9,543	0,572438	99,158	0,551	-2,779	-0,064163	190,220	0,308	-2,779	-0,064163	336,889	0,260	2,684	0,020073	460,557	0,080	155,060	0,8327964
12	34,927	0,517	10,023	0,601219	99,335	0,307	13,858	0,3199631	190,335	0,389	-53,861	-0,401376	460,620	0,079	73,283	0,3935128	680,088	0,111	226,882	0,88421
13	34,934	0,550	8,204	0,492114	99,336	0,304	22,722	0,5246061	190,561	0,395	-23,990	-0,312568	336,275	0,228	-81,417	-0,60672	460,655	0,079	-50,269	-0,269934
14	34,962	0,572	6,254	0,375133	99,342	0,295	28,372	0,655058	190,496	0,459	8,298	0,108117	336,244	0,219	73,318	0,546366	460,587	0,080	-131,660	-0,706883
15	34,950	0,605	4,274	0,256395	99,337	0,292	28,955	0,6685091	190,483	0,459	8,298	0,108117	336,244	0,219	73,318	0,546366	460,587	0,080	-131,660	-0,706883
16	35,012	0,467	1,330	0,079786	99,336	0,291	25,634	0,5918384	190,476	0,351	52,006	0,463307	336,206	0,227	-27,610	-0,205748	460,616	0,078	-128,458	-0,699789
17	34,879	0,634	-1,859	-0,11519	99,338	0,313	16,708	0,3857501	190,451	0,354	51,467	0,670561	336,333	0,245	73,323	0,236879	460,649	0,072	-36,605	-0,196558
18	34,927	0,592	-5,427	-0,325546	99,344	0,272	4,199	0,0898547	190,628	0,444	34,725	0,452432	336,332	0,237	74,581	0,555781	460,582	0,071	132,447	0,7112088
19	34,929	0,533	-9,241	-0,554329	99,279	0,311	-10,979	-0,253481	190,563	0,748	1,797	0,023412	336,441	0,269	37,114	0,276572	460,607	0,088	94,625	0,508111
20	34,925	0,518	-12,648	-0,758651	99,322	0,286	-28,058	-0,647808	190,479	0,379	-40,640	-0,529502	336,317	0,261	-36,267	-0,270258	460,633	0,080	-36,295	-0,194894
21	34,972	0,591	-16,027	-0,961335	99,329	0,297	-43,313	-1	190,416	0,343	-76,752	-0,849522	460,523	0,087	-113,999	-0,849522	689,723	0,112	-255,671	-0,98641
Média	34,941	0,557	-	-	99,306	0,301	-	-	190,413	0,422	-	-	336,247	0,238	-	-	460,595	0,081	-	-
Desvio Padrão	0,05118	0,065155	-	-	0,05013	0,059927	-	-	0,18201	0,144871	-	-	0,1273	0,019101	-	-	0,05128	0,005418	-	-
Variacão	0,1%	11,7%	-	-	0,1%	19,9%	-	-	0,1%	34,3%	-	-	0,0%	8,0%	-	-	0,0%	6,7%	-	-

APÊNDICE B
PLANILHAS DE DIFERENÇAS ABSOLUTAS, RELATIVAS
E DETECÇÃO DE DANOS (3, 4, 5 E 6 MODOS)

Tabela 19 – Diferenças Absolutas e Relativas entre as Aproximações das Curvaturas das Vigas V1 e V1.

V1 GDL	1o Modo			2o Modo			3o Modo			4o Modo			5o Modo			6o Modo					
	Curv.int	Curv.dan	dif	Dif. relativa	Curv.int	Curv.dan	dif	Dif. relativa	Curv.int	Curv.dan	dif	Dif. relativa	Curv.int	Curv.dan	dif	Dif. relativa	Curv.int	Curv.dan	dif	Dif. relativa	
1	8,495	-8,688	15,482	1,000	-11,704	-7,744	3,960	0,274	18,039	19,083	1,024	0,053	-11,144	5,163	18,308	1,000	3,147	-8,149	12,288	0,768	
2	-0,271	-1,199	0,927	0,060	2,809	7,287	4,458	0,309	-16,359	-34,220	17,861	0,927	32,693	28,328	4,365	0,262	-59,873	-48,604	11,268	0,704	
3	-2,752	1,938	4,690	0,303	10,009	5,941	4,069	0,282	-14,075	-16,871	2,796	0,135	38,680	-25,406	13,274	0,814	-53,221	-45,714	7,506	0,489	
4	2,081	-2,899	4,980	0,322	6,988	8,424	1,826	0,128	-25,419	-6,158	19,261	1,000	40,463	45,566	5,093	0,312	-35,868	-41,334	5,468	0,342	
5	-8,968	0,871	9,839	0,623	12,632	7,263	5,369	0,503	-24,357	-32,541	8,184	0,425	17,997	9,107	8,890	0,545	17,997	16,378	1,619	0,312	
6	5,606	-8,885	14,391	0,830	12,373	26,809	14,436	1,000	-12,668	-20,463	7,795	0,405	-14,751	-11,879	2,872	0,176	57,862	71,436	13,574	0,859	
7	-6,993	-1,738	4,655	0,320	8,648	2,176	6,472	0,448	-4,368	4,887	9,235	0,479	-31,086	-24,581	6,505	0,369	50,136	34,128	16,008	1,000	
8	-5,033	-5,852	0,819	0,063	9,415	13,375	3,960	0,274	11,284	8,810	2,474	0,128	-39,502	-36,453	3,050	0,189	10,885	-0,318	11,302	0,708	
9	-9,079	-2,370	6,709	0,433	3,455	-5,584	9,039	0,626	22,544	24,773	2,229	0,116	-26,108	-19,472	6,636	0,411	-39,889	-36,277	3,612	0,228	
10	-2,688	-2,540	0,148	0,010	-1,263	11,332	12,385	0,858	18,868	18,963	0,281	0,015	0,388	-1,091	1,477	0,081	-56,645	-50,033	6,612	0,638	
11	-4,822	-5,843	0,921	0,063	-8,066	-10,865	4,709	0,332	17,507	15,268	2,239	0,116	-26,889	22,573	4,316	0,252	-36,707	-24,619	12,088	0,755	
12	-8,888	-3,455	5,433	0,222	-11,861	-9,878	1,983	0,084	-3,760	2,753	6,513	0,338	34,504	19,883	14,621	0,897	42,728	36,284	6,443	0,402	
13	-1,259	-0,660	0,599	0,039	-11,319	-17,507	6,188	0,428	-11,069	-21,185	10,066	0,524	-13,671	-11,241	2,429	0,149	59,440	46,516	12,924	0,807	
14	-2,186	-2,688	0,403	0,026	-12,415	-8,900	3,515	0,243	-22,677	-23,552	0,875	0,045	-17,223	-11,756	5,469	0,335	24,160	12,832	11,328	0,708	
15	-8,747	-1,406	7,340	0,474	-8,159	-8,179	0,020	0,001	-26,879	-12,793	14,085	0,731	-37,266	-27,698	9,568	0,587	-27,376	-20,914	6,462	0,404	
16	5,352	-2,516	7,867	0,508	-8,764	-5,881	2,883	0,200	-11,865	-21,882	10,017	0,520	-33,888	-34,612	0,724	0,044	-55,512	-47,153	8,359	0,552	
17	-1,184	1,276	2,470	0,190	-3,760	-5,552	1,802	0,125	-17,323	-9,706	7,617	0,395	-37,597	-26,375	11,221	0,688	-81,877	-46,281	15,716	0,992	
18	5,333	-3,117	8,450	0,546	2,281	11,268	8,987	0,623	-0,721	4,774	5,495	0,285	1,281	1,881	0,600	0,025	-10,223	-7,254	2,969	0,185	
19	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
20	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
21	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
Máx. Abs	-	-	15,482	-	-	-	14,436	-	-	-	19,261	-	-	-	-	16,308	-	-	-	16,008	-
Min. Abs	-	-	0,159	-	-	-	0,020	-	-	-	0,281	-	-	-	-	0,400	-	-	-	2,969	-
Maior Valor	-	-	15,482	-	-	-	14,436	-	-	-	19,261	-	-	-	-	16,308	-	-	-	16,008	-

Tabela 18 – Multiplicação das Diferenças Relativas para Detecção e Localização de Dano, utilizando de 3 a 6 modos de vibrar (V1).

V1 GDL	Detecção c/ 6 modos			Detecção c/ 5 modos			Detecção c/ 4 modos			Detecção c/ 3 modos		
	Componentes	Multiplicação	Componentes	Multiplicação	Componentes	Multiplicação	Componentes	Multiplicação	Componentes	Multiplicação	Componentes	Multiplicação
1	0,040585084	0,098086521	0,173371693	0,196889649	0,225700898	0,200956568	0,225700898	0,200956568	0,225700898	0,200956568	0,225700898	0,200956568
2	0,012602333	0,030992179	0,048891088	0,056523189	0,069455635	0,061840986	0,069455635	0,061840986	0,069455635	0,061840986	0,069455635	0,061840986
3	0,057905602	0,142404348	0,068006333	0,077231426	0,145027467	0,12912763	0,145027467	0,12912763	0,145027467	0,12912763	0,145027467	0,12912763
4	0,012416539	0,030535267	0,067195375	0,076310461	0,196711769	0,175145613	0,196711769	0,175145613	0,196711769	0,175145613	0,196711769	0,175145613
5	0,187344062	0,460724286	0,350219607	0,397272707	1,123132724	1,026532664	1,123132724	1,026532664	1,123132724	1,026532664	1,123132724	1,026532664
6	0,406629448	1,080552604	1,080552604	1,026532664	1,026532664	1,026532664	1,026532664	1,026532664	1,026532664	1,026532664	1,026532664	1,026532664
7	0,106412734	0,261694607	0,424896583	0,482534015	0,424896583	0,378313777	0,424896583	0,378313777	0,424896583	0,378313777	0,424896583	0,378313777
8	0,0047139	0,001159262	0,003845805	0,00436749	0,005446945	0,004849779	0,005446945	0,004849779	0,005446945	0,004849779	0,005446945	0,004849779
9	0,045033994	0,110749466	0,045033994	0,051142878	0,199600105	0,177717291	0,199600105	0,177717291	0,199600105	0,177717291	0,199600105	0,177717291
10	1,38329E-05	0,000107796	9,65435E-05	0,000109684	0,000179452	0,000159778	0,000179452	0,000159778	0,000179452	0,000159778	0,000179452	0,000159778
11	0,00671648	0,001651744	0,000944582	0,001072715	0,00289251	0,002397321	0,00289251	0,002397321	0,00289251	0,002397321	0,00289251	0,002397321
12	0,006216886	0,015288823	0,016187336	0,01838156	0,02004986	0,017851728	0,02004986	0,017851728	0,02004986	0,017851728	0,02004986	0,017851728
13	0,000372491	0,000916045	0,001056864	0,001200229	0,001453456	0,001329723	0,001453456	0,001329723	0,001453456	0,001329723	0,001453456	0,001329723
14	0,000348575	0,000857229	0,001743169	0,001917963	0,00431846	0,003845013	0,00431846	0,003845013	0,00431846	0,003845013	0,00431846	0,003845013
15	0,003148602	0,007743172	0,01894774	0,021518049	0,03628603	0,032307874	0,03628603	0,032307874	0,03628603	0,032307874	0,03628603	0,032307874
16	0,063029608	0,155005025	0,082368078	0,093541349	0,083897587	0,074699619	0,083897587	0,074699619	0,083897587	0,074699619	0,083897587	0,074699619
17	0,004680601	0,011510729	0,006822153	0,007475682	0,036783348	0,032750669	0,036783348	0,032750669	0,036783348	0,032750669	0,036783348	0,032750669
18	0,406629448	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
19	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
20	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
21	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Máx. Abs	-	-	15,482	-	-	19,261	-	-	-	-	16,308	-
Min. Abs	-	-	0,159	-	-	0,281	-	-	-	-	0,400	-
Maior Valor	-	-	15,482	-	-	19,261	-	-	-	-	16,308	-

Tabela 23 – Diferenças Absolutas e Relativas entre as Aproximações das Curvaturas das Vigas V3 e V3.

V3	1o Modo				2o Modo				3o Modo				4o Modo				5o Modo				6o Modo				
	Curv.int	Curv.dan	dif	Dif. Relativa	Curv.int	Curv.dan	dif	Dif. relativa	Curv.int	Curv.dan	dif	Dif. relativa	Curv.int	Curv.dan	dif	Dif. relativa	Curv.int	Curv.dan	dif	Dif. relativa	Curv.int	Curv.dan	dif	Dif. relativa	
1	0,667	-1,329	1,995	0,288	-2,879	-10,728	7,848	0,291	11,352	10,436	0,916	0,055	-18,060	11,198	27,857	1,000	-1,134	0,828	1,762	0,079	32,351	18,141	14,209	0,214	
2	3,323	1,447	1,876	0,271	0,399	4,598	4,197	0,156	-7,259	-10,758	3,498	0,212	42,301	29,033	13,268	0,476	-62,342	-55,535	6,807	0,304	51,288	94,950	43,663	0,656	
3	-2,570	-1,223	1,347	0,185	6,710	5,238	4,474	0,166	-32,136	-17,333	14,801	0,897	31,547	23,826	7,721	0,277	-48,687	-48,442	1,755	0,078	107,188	40,854	66,334	1,000	
4	1,394	-1,175	2,569	0,370	5,438	9,004	4,466	0,185	-10,687	-17,884	7,296	0,442	41,916	39,578	3,337	0,120	-39,595	-41,952	2,357	0,105	-35,787	10,361	46,148	0,894	
5	-3,942	-2,372	1,571	0,227	16,034	18,622	2,588	0,096	-33,302	-22,855	10,447	0,633	13,028	18,753	5,725	0,206	27,457	14,691	12,766	0,570	-58,012	-67,651	9,640	0,145	
6	-4,786	-0,593	4,175	0,603	6,811	3,874	2,936	0,109	-7,051	-12,564	5,513	0,334	-4,922	-19,002	14,080	0,506	48,678	71,091	22,413	1,000	-55,911	-104,678	48,767	0,733	
7	-4,888	-11,818	6,921	1,000	13,244	17,368	4,124	0,153	-10,179	-9,352	0,827	0,050	-36,555	-24,888	11,869	0,426	49,906	36,788	13,109	0,586	-14,840	35,120	49,960	0,751	
8	-5,696	0,415	6,111	0,883	3,228	8,058	4,830	0,178	9,383	8,889	0,473	0,029	-48,089	-31,207	14,883	0,534	7,884	8,660	0,876	0,300	72,260	77,143	4,883	0,073	
9	-6,656	6,336	0,915	0,135	13,225	-11,885	25,110	0,930	25,898	27,295	1,397	0,095	-15,946	-18,670	1,025	0,037	-33,092	-29,755	3,337	0,149	76,649	73,950	2,699	0,041	
10	-5,107	5,784	0,836	0,135	-3,362	23,628	26,990	1,000	25,816	13,407	12,210	0,740	0,354	-2,397	2,751	0,089	-59,586	-75,727	16,140	0,720	-16,410	-6,215	10,196	0,153	
11	-7,760	-13,789	6,009	0,868	-11,777	-17,948	6,171	0,229	12,962	29,470	16,507	0,846	0,000	23,371	21,610	1,760	0,268	-31,218	-22,416	8,802	0,363	-55,425	-89,530	34,105	0,513
12	-6,185	-0,176	6,010	0,868	5,717	-7,419	13,136	0,429	19,558	5,599	6,313	0,846	0,000	34,893	29,570	5,323	0,288	14,697	22,640	7,973	0,356	-58,692	-93,117	4,425	0,067
13	-8,843	-5,787	4,944	0,714	-11,576	-9,012	2,564	0,095	-14,075	-14,091	0,016	0,001	13,058	10,201	2,857	0,103	62,454	47,604	14,850	0,663	51,577	70,192	18,615	0,280	
14	-3,111	-1,470	1,641	0,237	-10,326	-12,942	2,616	0,097	-20,034	-22,131	2,097	0,127	-17,005	-13,310	3,695	0,133	22,073	9,822	12,251	0,547	65,269	89,304	24,035	0,361	
15	-2,910	-2,272	0,638	0,092	-10,849	-8,271	2,578	0,099	-26,517	-21,110	5,407	0,328	-32,290	-30,014	2,276	0,082	-23,025	-27,513	4,488	0,200	19,872	-11,794	31,735	0,477	
16	1,497	-1,476	2,973	0,430	-7,128	-6,164	0,964	0,036	-17,974	-21,089	3,115	0,189	-39,223	-28,859	10,364	0,372	-83,782	-51,942	11,840	0,528	-70,152	-32,986	37,166	0,659	
17	-3,452	2,446	5,898	0,852	-3,195	-4,389	1,195	0,044	-14,015	-12,389	1,625	0,098	-27,481	-28,762	0,719	0,026	-64,611	-49,991	4,620	0,206	-59,012	-121,250	62,238	0,935	
18	-1,351	0,164	1,514	0,219	3,011	4,214	1,202	0,045	1,554	8,242	6,688	0,405	-7,159	-3,243	3,916	0,141	-9,339	-7,660	1,688	0,075	-41,896	-7,571	34,324	0,516	
19	-	-	6,920646	-	-	-	26,99006	-	-	-	16,50708	-	-	-	27,8571	-	-	-	-	-	-	-	86,53411	-	
20	-	-	0,420442	-	-	-	0,963696	-	-	-	0,918012	-	-	-	0,718728	-	-	-	-	-	-	-	1,548277	-	
21	-	-	6,920646	-	-	-	26,99006	-	-	-	16,50708	-	-	-	27,8571	-	-	-	-	-	-	-	86,53411	-	

Tabela 22 – Multiplicação das Diferenças Relativas para Detecção e Localização de Danos, utilizando de 3 a 6 modos de vibrar (V3).

V3	GDL	Detecção de 3 modos		Detecção de 4 modos		Detecção de 5 modos		Detecção de 6 modos	
		Multiplicação	Componentes	Multiplicação	Componentes	Multiplicação	Componentes	Multiplicação	Componentes
1	1	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
2	2	7,80828E-05	0,00614651	0,000365614	0,008314681	0,004650945	0,076166339	0,004650945	0,007523079
3	3	0,00084791	0,104406680	0,001282068	0,028383832	0,00425423	0,066672271	0,008832314	0,014448354
4	4	0,000627787	0,077301952	0,000627787	0,014276935	0,008017828	0,131306373	0,028929751	0,048794982
5	5	0,00023637	0,029105229	0,000340786	0,007750063	0,003236988	0,053061857	0,027048835	0,043744422
6	6	0,000233564	0,0287569742	0,001612101	0,038661908	0,002830295	0,046352235	0,013772283	0,022277153
7	7	0,008121226	1	0,011076911	0,251976028	0,011076911	0,181457648	0,021821391	0,035458514
8	8	0,001432947	0,176370735	0,001907514	0,043380112	0,003281485	0,053413428	0,007654844	0,012381989
9	9	5,35919E-06	0,000658899	7,30256E-06	0,001680727	0,002418686	0,03962588	0,004528929	0,007325713
10	10	1,60224E-05	0,001972009	0,000394944	0,008981708	0,00265304	0,043437239	0,07210027	0,118624902
11	11	0,000738298	0,829714373	0,043972088	1	0,061090562	1	0,818223628	1
12	12	0,002525617	0,31068964	0,004927082	0,11205023	0,012545751	0,205463957	0,188516918	0,321108592
13	13	0,000180308	0,022202095	0,002711107	0,061655179	0,007621509	0,12481878	0,025538423	0,041306361
14	14	8,80007E-05	0,008380597	0,002928657	0,066600358	0,004909827	0,066341109	0,03618175	0,066907806
15	15	1,25177E-06	0,000154139	4,47402E-06	0,000101747	6,75259E-06	0,000110588	6,58297E-05	0,000106482
16	16	7,64798E-05	0,009417155	0,00021171	0,004814647	0,00038731	0,006343043	0,002820349	0,004723774
17	17	2,33722E-05	0,002877918	4,90005E-06	0,001114355	0,000244728	0,004007948	0,002966298	0,004844988
18	18	0,000317742	0,039124895	0,000568816	0,012935941	0,00107672	0,017633635	0,002884127	0,00488138
19	19	1,84745E-05	0,002274839	1,97497E-05	0,000449142	6,58025E-05	0,001568957	0,003713183	0,000006213
20	20	2,15709E-05	0,002868119	4,18132E-05	0,000956093	0,000969657	0,009089657	0,003948527	0,006386862
21	21	0,008121226	1	0,043972088	0,061090562	0,0618223628	0,618223628	0,618223628	0,618223628