

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ  
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM  
REDE NACIONAL - PROFMAT**

**MARCIO LUCIO RODRIGUES**

**O ENSINO DA MATEMÁTICA FINANCEIRA NO ENSINO MÉDIO**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**CURITIBA**

**2013**

MARCIO LUCIO RODRIGUES

**O ENSINO DA MATEMÁTICA FINANCEIRA NO ENSINO MÉDIO**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do grau de “Mestre em Ciências” – Área de Concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Vitor José Petry

**CURITIBA**

**2013**

---

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

---

- R696 Rodrigues, Marcio Lucio  
O ensino da matemática financeira no ensino médio / Marcio Lucio Rodrigues. – 2013.  
75 f. : il. ; 30 cm
- Orientador: Vitor José Petry.  
Dissertação (Mestrado) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Curitiba, 2013.  
Bibliografia: f. 74-75.
1. Matemática Financeira – Estudo e ensino (Ensino médio). 2. Funções (Matemática). 3. Taxas de juros. 4. Séries geométricas. 5. Séries aritméticas. 6. Característica de Euler. 7. Matemática – Dissertações. I. Petry, Vitor José, orient. II. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

CDD (22. ed.) 510

**Título da Dissertação No. 007**

## **“O Ensino da Matemática Financeira no Ensino Médio”**

por

**Marcio Lúcio Rodrigues**

Esta dissertação foi apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Matemática, pelo Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR - Câmpus Curitiba, às 14h do dia 09 de agosto de 2013. O trabalho foi aprovado pela Banca Examinadora, composta pelos doutores:

---

Prof. Vitor José Petry, Dr.  
(Presidente - UTFPR/Curitiba)

---

Prof. Ailton Durigon, Dr.  
(IFSC)

---

Prof. Rubens Robles Ortega Júnior, Dr.  
(UTFPR/Curitiba)

Visto da coordenação:

---

Prof. Ronie Peterson Dario, Dr.  
(Coordenador do PROFMAT/UTFPR)

*A minha esposa Jane, aos meus filhos Sabrina e Guilherme , aos meus pais José e Madalena e a todos meus familiares que me deram apoio nos momentos mais difíceis de minha vida e não mediram esforços para que eu chegasse até esta etapa de minha vida.*

## **AGRADECIMENTOS**

A Deus que iluminou o meu caminho durante esta caminhada.

A minha esposa e aos meus filhos pela paciência e incentivo durante toda essa jornada.

Aos meus alunos da Escola Pascoal Grecco que colaboraram com a realização das atividades.

Aos meus grandes mestres da graduação, Keiji e Manoel Pedro, exemplos de humildade.

Ao meu orientador professor Dr. Vitor José Petry pela paciência na orientação e incentivo que tornaram possível a conclusão dessa dissertação.

Aos amigos Egídio e Glebison pelos momentos compartilhados de estudos e companhia durante as nossas viagens

Aos professores do PROFMAT, pelos ensinamentos.

Aos colegas da Turma 2011 do PROFMAT, pelos momentos em prol do Ensino da Matemática.

A CAPES, pelo apoio financeiro.

## RESUMO

LUCIO RODRIGUES, Marcio . O ENSINO DA MATEMÁTICA FINANCEIRA NO ENSINO MÉDIO. 75 f. Dissertação de Mestrado – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2013.

Desenvolvemos um trabalho visando habilidades relacionadas à compreensão, investigação e a contextualização de situações problemas, caracterizando o pensar matemático na construção do conhecimento. Na medida em que abordamos situações matemáticas percebe-se o quanto é significativo ensinar e aprender. Tratamos a matemática financeira como um estudo de funções. Progressões, aritmética e geométrica, são tratadas como funções afim e exponencial, respectivamente, para um domínio discreto. Faz-se análise de gráficos e tabelas com o intuito de compreender e investigar situações de financiamentos. Através de uma pesquisa com a comunidade local orientamos os alunos quanto à importância de se ter uma educação financeira adequada para tomada de decisões.

**Palavras-chave:** matemática financeira, funções, progressões

## ABSTRACT

LUCIO RODRIGUES, Marcio . TEACHING OF MATHEMATICS IN SECONDARY EDUCATION FINANCIAL. 75 f. Dissertação de Mestrado – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2013.

We develop a job seeking skills related to the understanding, research and contextualization of problem situations, featuring mathematical thinking in knowledge construction. Insofar as situations mathematical approach realizes how teaching and learning is significant. We treat financial mathematics as a study of functions. Progressions, arithmetic and geometry are treated as, affine and exponential functions, respectively for discrete domain. It is analyzing graphs and tables in order to understand and investigate financing situations. Through a survey of the local community have the students about the importance of having a financial education for decision making.

**Keywords:** financial mathematics, functions, progressions



## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1	– Juros simples .....	28
FIGURA 2	– Juros compostos .....	30
FIGURA 3	– Resolução apresentada por um aluno .....	34
FIGURA 4	– Pesquisa e Tabela Price .....	37
FIGURA 5	– Comparação entre juros simples e compostos .....	40
FIGURA 6	– Comparação entre juros simples e compostos .....	41
FIGURA 7	– Alunos participando da tabulação da pesquisa .....	59
FIGURA 8	– Análise gráfica que questão 4 - pesquisa .....	62

## LISTA DE TABELAS

TABELA 1	– Investimento em caderneta de poupança a longo prazo .....	18
TABELA 2	– Investimento em caderneta de poupança .....	18
TABELA 3	– Investimento em caderneta de poupança - continuação .....	19
TABELA 4	– Generalização do resultado .....	19
TABELA 5	– Exemplo 2.3 - Simulação SAC .....	22
TABELA 6	– Exemplo 3.7 - equivalência de capitais .....	31
TABELA 7	– Exemplo 3.11 - Compreensão de dados 1 .....	35
TABELA 8	– Exemplo 3.11 - Compreensão de dados 2 .....	36
TABELA 9	– Exemplo 3.11 - Liquidação de dívida (Price) .....	36
TABELA 10	– Exemplo 4.7 - Aplicações de Progressão Geométrica .....	45
TABELA 11	– Pesquisa - Questão 1 .....	60
TABELA 12	– Pesquisa - Questão 2 .....	60
TABELA 13	– Pesquisa - Questão 3 .....	60
TABELA 14	– Pesquisa - Questão 4 .....	61
TABELA 15	– Pesquisa - Questão 5 .....	63
TABELA 16	– Pesquisa - Questão 6 .....	64
TABELA 17	– Pesquisa - Questão 7 .....	64
TABELA 18	– Pesquisa - Questão 8 .....	66
TABELA 19	– Pesquisa - Questão 9 .....	66
TABELA 20	– Pesquisa - Questão 10 .....	67
TABELA 21	– Pesquisa - Questão 11 .....	67
TABELA 22	– Pesquisa - Questão 12 .....	68
TABELA 23	– Pesquisa - Questão 13 .....	69
TABELA 24	– Pesquisa - Questão 14 .....	69
TABELA 25	– Pesquisa - Questão 15 .....	70
TABELA 26	– Pesquisa - Questão 16 .....	71

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>10</b>
1.1	MOTIVAÇÃO	11
1.2	OBJETIVO GERAL	11
1.2.1	Objetivos Específicos	11
<b>2</b>	<b>REFERENCIAL TEÓRICO</b>	<b>13</b>
2.1	A MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO	13
2.2	CONCEITOS HISTÓRICOS DA MATEMÁTICA FINANCEIRA	14
2.3	O MODELO MATEMÁTICO PARA O ESTUDO DE SITUAÇÕES COTIDIANAS	15
2.4	TAXA DE JUROS	17
2.5	PERCEPÇÃO FINANCEIRA E INVESTIMENTOS	17
2.6	SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO FRANCÊS (SAF)	19
2.7	SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO CONSTANTE (SAC)	21
<b>3</b>	<b>APLICAÇÕES DE SITUAÇÕES PROBLEMAS EM SALA DE AULA ENVOLVENDO CONCEITOS DE MATEMÁTICA FINANCEIRA</b>	<b>25</b>
3.1	JUROS SIMPLES	27
3.2	JUROS COMPOSTOS	29
3.3	EQUIVALÊNCIA DE CAPITAIS	31
3.4	APLICAÇÕES DE CONCEITOS DO SAF	35
<b>4</b>	<b>SUGESTÕES DE ATIVIDADES PARA O ENSINO MÉDIO ENVOLVENDO CONCEITOS DE MATEMÁTICA FINANCEIRA</b>	<b>39</b>
4.1	APLICAÇÕES DE PROGRESSÃO GEOMÉTRICA EM MATEMÁTICA FINANCEIRA	42
4.2	APLICAÇÕES DE PROGRESSÃO ARITMÉTICA EM MATEMÁTICA FINANCEIRA	49
4.3	O NÚMERO DE EULER E SUAS APLICAÇÕES NA MATEMÁTICA FINANCEIRA	50
<b>5</b>	<b>ANÁLISE DA PESQUISA</b>	<b>59</b>
<b>6</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>72</b>
	REFERÊNCIAS	74

## 1 INTRODUÇÃO

O estudo da matemática financeira no ensino médio possibilita a compreensão de conceitos matemáticos de forma simples e útil, onde é possível perceber que todos podem adquirir conceitos básicos e melhorar a sua qualidade de vida. Iniciamos com uma pesquisa na intenção de verificar o que a comunidade local pensa sobre os conceitos financeiros, a partir de então fizemos um estudo sobre as diferentes taxas adotadas no mercado financeiro, adotamos como material (SP, 2012) (material fornecido pela secretaria de Educação do Estado de São Paulo), discutimos conceitos de diferentes funções e seus respectivos gráficos com auxílio do geogebra, conceitos de sequências e enfim princípios básicos da matemática financeira. Conseguimos mostrar que a matemática não é conjunto de fórmulas sem significados, mas sim, um método de tomadas de decisões, para isso utilizamos a tecnologia, onde os alunos puderam fazer inúmeras experiências verificando comportamentos de gráficos e suas variações, o que facilitou a compreensão das taxas de juros.

No segundo capítulo apresentamos fundamentos teóricos dos assuntos apresentados em sala de aula, discutimos conceitos matemáticos baseados na Lei de Diretrizes e Bases da Educação, Orientações e Parâmetros Curriculares do Ensino Médio, além de fatos históricos apresentados em (EVES, 2004) e (MATTOS, 1975). Mostramos a importância de modelos matemáticos no estudo de situações problemas cotidianas e como se adquire uma percepção financeira. Comentamos sobre situações envolvendo investimento em caderneta de poupança, um investimento simples e seguro, finalizando com uma breve apresentação das principais tabelas de financiamento do mercado, o Sistema de Amortização Francês (SAF) e Sistema de Amortização Constante, (SAC).

No terceiro capítulo será feito um estudo de situações problemas aplicadas em sala de aula mostrando algumas resoluções de alunos referente aos conteúdos: Porcentagem, Juros simples e juros compostos, Equivalência de capitais e a Tabela Price.

No quarto capítulo apresentamos algumas sugestões de reflexões para discussão com alunos de ensino médio, onde cada professor poderá adequar a sua realidade. Diferenciare-

mos juros simples e compostos e a importância de correlacionar conteúdos, proporcionando discussões sobre sequências numéricas e funções, importantes conceitos para a compreensão de expressões financeiras como o Sistema de Amortização Francês e o Sistema de Amortização Constante.

No quinto capítulo apresenta-se uma análise da pesquisa, quantitativamente, verificando o que a comunidade local pensa sobre as principais formas de transações financeiras do mercado, o que motivou toda discussão em sala de aula, despertando o interesse dos alunos para o entendimento das situações financeiras apresentadas.

## 1.1 MOTIVAÇÃO

A crescente evolução da educação gera uma reflexão sobre o ensino, o quê, como e para quê ensinar. Dessa forma desenvolvemos um trabalho onde os alunos deveriam participar ativamente das atividades propostas através de habilidades e seu protagonismo.

Uma pesquisa realizada com a comunidade do município de Registro-SP, despertou a curiosidade dos alunos em compreender aspectos da matemática financeira, o que nos leva a propor um trabalho de pesquisa e debate em sala de aula, refletindo sobre algumas situações financeiras que ficarão como sugestões para docentes do ensino médio

## 1.2 OBJETIVO GERAL

Desenvolver atitudes positivas em relação à matemática financeira, como autonomia, confiança quanto as capacidades matemáticas e perseverança na solução de problemas, despertando o interesse dos alunos para um assunto que gera muitas dúvidas e discussões na sociedade.

### 1.2.1 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Desenvolver a capacidade para se expressar através de funções e gráficos.
- Compreender as transformações realizadas em gráficos em diferentes contextos.
- Compreender situações envolvendo crescimento ou decréscimo de funções.
- Rever conceitos de funções de primeiro e segundo grau e exponenciais.
- Resolver situações problemas envolvendo conceitos de porcentagem, juros simples e juros compostos.

- Compreender conceitos de equivalência de capitais.
- Entender a lógica das tabelas SAF e SAC.
- Resolver situações problemas utilizando sequências numéricas e logaritmos, relacionando-as com a matemática financeira.

## 2 REFERENCIAL TEÓRICO

Neste capítulo discutiremos as principais orientações sugeridas no referencial curricular do ensino médio e Parâmetros Curriculares Nacionais, além de abordarmos conceitos históricos que são importantíssimos para a compreensão da evolução da humanidade. Faremos um breve relato sobre alguns modelos matemáticos, tais como investimentos em cadernetas de poupança, tabelas PRICE e SAC, fatos que norteiam o nosso trabalho.

### 2.1 A MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO

De acordo com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, lei nº 9394/96, um dos objetivos do ensino médio é a preparação para o trabalho e para o exercício da cidadania, a formação ética, o desenvolvimento da autonomia intelectual e a compreensão dos processos produtivos.(BRASIL, 1996).

Nas Orientações Curriculares do Ensino Médio (BRASIL, 2008), espera-se que os alunos ao final do ensino médio, saibam usar a matemática para resolver problemas práticos do cotidiano, modelando fenômenos em outras áreas do conhecimento, compreendam que a matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza através de teoremas e demonstrações, percebam a matemática como um conhecimento social e historicamente construído e sua importância no desenvolvimento científico e tecnológico. Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM), destacam que a matemática no ensino médio tem um valor formativo, que ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, desempenhando um papel estrutural, sendo uma ferramenta que serve para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas em quase todas as atividades humanas (BRASIL, 2002).

Assim, ao ensinar matemática é fundamental mostrar ao aluno o quanto ele é capaz, participando da construção de seu conhecimento. No trabalho em sala de aula evidenciamos aplicações reais no cotidiano, utilizando diversos modelos matemáticos propostos em livros do ensino médio, valorizando o raciocínio matemático, permitindo ao aluno formular, perguntar, criar hipóteses e estabelecer conclusões, generalizando situações, abstraindo regularidades e

criando modelos com argumentações fundamentadas.

Ainda nas Orientações Curriculares para o ensino médio, vemos que a matemática financeira pode ser tratada como estudo de funções onde juros e correções monetárias são tratados como problemas de aplicações de funções. Os alunos devem compreender conceitos de sequências numéricas, progressão aritmética e geométrica como funções afim e exponencial, com domínio restrito aos números naturais, de forma que esses assuntos não podem ser trabalhados isoladamente.

No estudo da matemática financeira em diversas situações podemos explorar o estudo das funções e sequências numéricas, mostrando que essas situações são dependentes e que é possível relacionar conteúdos, contextualizando o ensino da matemática por meio de resolução de situações problemas onde o aluno é provocado a construir o seu conhecimento e utilizar o seu raciocínio fazendo com que exercite a sua cidadania na tomada de decisões.

Para facilitar os estudos utiliza-se planilhas eletrônicas, com propósitos educativos, pois oferecem um ambiente adequado para formular hipóteses, estabelecer conjecturas, experimentar e explorar propriedades, por exemplo, comparar comportamentos de sequências de pagamento sob juros simples e compostos, além de oferecer um ambiente apropriado para trabalhar com análise de dados extraídos de situações reais. Dessa forma torna-se possível organizar atividades em que os alunos tenham oportunidades de lidar com diversas etapas do trabalho de análise de dados reais (BRASIL, 2008).

## 2.2 CONCEITOS HISTÓRICOS DA MATEMÁTICA FINANCEIRA

É importante que os nossos alunos conheçam aspectos da história, permitindo melhor compreensão de que a sociedade está em constante transformação, porém a essência da matemática em atender as necessidades humanas ainda perpetua pelos anos. Isto se verifica, quando queremos adquirir um bem para o qual precisamos de uma moeda de troca e em não possuindo moeda, pegamos emprestado de alguém, pelo qual temos que pagar juros.

Tivemos a intenção de familiarizar o nosso educando com situações presentes no cotidiano mostrando como funciona o cálculo de juros, dessa forma abordamos nessa seção alguns fatos históricos da matemática financeira.

Transações comerciais envolvendo juros existem desde a antiguidade, dando destaque as tábulas onde haviam alguns registros significativos sobre o assunto . Segundo Eves,

As tábulas mostram que os sumérios antigos estavam familiarizados com todos os tipos de contratos legais e usuais, como faturas, recibos, notas promissórias, crédito,



juros simples e compostos, hipotecas, escrituras de venda e endossos. Há tabulas que são documentos de empresas comerciais e outras que lidam com sistemas de pesos e medidas.(EVES, 2004, p. 60)

De acordo com Mattos (MATTOS, 1975, p. 18),

Da mesma forma que os impostos, os juros também existem desde a época dos primeiros registros históricos do homem. Revelam-nos a sua existência já na Babilônia, no ano 2.000 a.C. Nas citações mais antigas, os juros eram pagos pelo uso de sementes ou de outras conveniências emprestadas. Muitas das práticas existentes originaram-se dos antigos costumes de empréstimo e devolução de sementes e de outros produtos agrícolas.

O primeiro registro impresso de matemática considerada como financeira foi a aritmética de Treviso, datada no ano de 1478, a qual já mostrava ser uma matemática comercial, tendo em suas aplicações a prática de escambo. Muitos livros foram produzidos no século XVII e redescobertos na fase do Renascimento (BOYER, 2012).

Necessidade do ser humano e a matemática estão interligadas, ou seja, a matemática evolui de acordo com o ser humano, séculos e mais séculos se passam, mas os princípios persistem, porém evoluem.

### 2.3 O MODELO MATEMÁTICO PARA O ESTUDO DE SITUAÇÕES COTIDIANAS

A modelagem matemática no Brasil começou a ser discutida na década de 80, com um grupo de professores da UNICAMP, desde então os estudos prosseguiram (RIBAS, 2004).

O modelo matemático pode ser constatado no avanço de diversas áreas do conhecimento, pressupondo multidisciplinaridade, havendo assim uma mudança no processo de ensino aprendizagem. Quando usamos um modelo e ainda conseguimos relacionar conteúdos trabalhados com o dia-a-dia dos alunos temos a oportunidade de mostrar o quanto é útil o aprendizado em sala de aula. Durante o nosso trabalho, procuramos estabelecer um significado para tudo aquilo que ensinávamos de modo a apresentar os conhecimentos de forma compreensível, rompendo paradigmas entre professor, alunos e ambiente em que estão inseridos.

Para (BASSANEZI, 2009), a modelagem matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções no mundo real. A matemática como outras ciências deve ser empírica e teórica, ou seja, a busca de soluções de problemas deve ser impulsionada por situações experimentais aliadas à atividade criadora. Ao ensinar matemática devemos mostrar a sua importância a partir de situações reais,

onde o protagonismo deve prevalecer, isto é, o indivíduo deve participar ativamente de sua aprendizagem.

Existem inúmeros argumentos favoráveis à modelagem, porém em (BASSANEZI, 2009, p. 37), são citados que muitos colocam obstáculos para implementação da modelagem matemática em curso regulares. Isto é evidenciado nas citações de alguns autores citados por Bassanezi, conforme segue:

Obstáculos instrucionais : Os cursos regulares possuem um programa que deve ser desenvolvido completamente. A modelagem pode ser um processo muito demorado não dando tempo para cumprir o programa todo. Por outro lado, alguns professores tem dúvida se as aplicações e conexões com outras áreas fazem parte do ensino de matemática, salientando que tais componentes tendem a distorcer a estética, a beleza e a universalidade da matemática . Acreditam, talvez por comodidade, que a matemática deve preservar sua “precisão absoluta e intocável sem qualquer relacionamento com o contexto sociocultural e político” (D’AMBROSIO, 1993).

Obstáculos para estudantes: O uso de modelagem foge da rotina do ensino tradicional e os estudantes, não acostumados ao processo, podem se perder e se tornar apáticos nas aulas. Os alunos estão acostumados a ver o professor como transmissor de conhecimento e quando são colocados no centro do processo de ensino-aprendizagem, sendo responsáveis pelos resultados obtidos e pela dinâmica do processo, a aula passa a caminhar em ritmo mais lento (FRANCHI, 1993).

Obstáculos para os professores: Muitos professores não se sentem habilitados a desenvolver modelagem em seus cursos, por falta de conhecimento do processo ou por medo de se encontrarem em situações embaraçosas quantos as aplicações de matemática que desconhecem. Acreditam que perderão muito tempo para preparar as aulas e também não terão tempo para cumprir todo programa do curso (BASSANEZI, 2009).

Certamente esses obstáculos estão presentes em nosso cotidiano, muitos de nós professores temos dificuldades de relacionar os conteúdos com situações reais. Em nosso trabalho procuramos dar início a um processo de aprendizagem, relacionando diversos conteúdos matemáticos com situações reais, que certamente estará facilitando uma relação futura com a modelagem matemática.

Durante a apresentação dos dados da pesquisa surgiram muitas dúvidas, despertando o interesse dos discentes em novos conhecimentos, baseados em análises de tabelas, gráficos e simulações de problemas de nosso cotidiano. Ao utilizar alguns modelos matemáticos para interpretação dos problemas, tornamos o ensino da matemática financeira mais agradável e atraente, relacionando fatos reais com modelos matemáticos existentes.

Em uma sala de aula quando o aluno vê sentido naquilo que estuda, em função da satisfação das suas necessidades e de seus interesses, existe motivação, pois trabalha com entusiasmo e perseverança, tal interesse é importante, pois dá início à formação de atitudes positivas e construtivas.(BURAK, 2004)

## 2.4 TAXA DE JUROS

Inúmeras vezes estaremos comentando sobre taxa de juros, nesta seção definimos a taxa de juros nominal, taxa de juros efetiva e a taxa de juros real.

*Taxa de juros nominal* é aquela expressa em unidades diferentes, ou seja, a unidade de tempo difere daquela em que os juros são capitalizados.

*Taxa de juros efetiva* é aquela expressa na mesma unidade de tempo em que os juros são capitalizados.

*Taxa de juros real* é a taxa onde um investidor recebe descontado a variação da inflação ou qualquer indicador.

## 2.5 PERCEPÇÃO FINANCEIRA E INVESTIMENTOS

Segundo (CERBASI, 2005) juro é o aluguel que você paga por usar uma quantia de dinheiro que não é sua. A maior parte dos alunos não possui a percepção desse significado, ou seja, quando usamos um dinheiro que não é nosso, devemos pagar juros, esses juros podem ser lineares ou não. Atualmente o juro aplicado no mercado financeiro é o juro composto, aquele que incide juro sobre juro.

Quando se tem uma educação adequada cria-se uma percepção financeira. Durante o trabalho desenvolvido em sala de aula tivemos a intenção de desenvolver essa percepção, contribuindo e orientando os alunos sobre os altos valores dos juros aplicados do mercado financeiro.

O investimento em caderneta de poupança é um dos investimentos mais populares do Brasil, sua popularidade é atribuída a sua simplicidade, apesar de pouco rendimento é um investimento seguro.

A poupança foi criada pelo decreto n° 2723 de 12 de janeiro de 1861, sendo que a primeira instituição financeira a oferecer tal investimento foi a Caixa Econômica federal.

Nessa seção estaremos discutindo situações em que modelos matemáticos mostram claramente em longo prazo os valores obtidos em investimentos desse tipo.

Uma grande poupança que lhe gerará grande renda será formada por uma aplicação financeira disciplinada e por boa massa de juros acumulados (CERBASI, 2005).

O exemplo que segue foi utilizado para iniciar as discussões com os alunos.

**Exemplo 2.1.** *Considere a situação hipotética: Uma poupança com uma aplicação mensal de*

R\$300,00 a 0,7% ao mês durante um período de 30 anos.

Tempo (anos)	valor (R\$)	Juros (R\$)	Montante (R\$)
5	18 000,00	4 274,41	22 274,41
10	36 000,00	20 125,64	56 125,64
15	54 000,00	53 570,59	107 570,59
20	72 000,00	113 753,34	185 753,34
25	90 000,00	214 570,51	304 570,51
30	108 000,00	377 141,27	485 141,27

**Tabela 1: Investimento em caderneta de poupança a longo prazo**

Para efetuar esses cálculos utilizamos a expressão:

$$M_n = \frac{P \cdot [(1 + i)^n - 1]}{i}, \quad (1)$$

onde  $M_n$  é o valor do montante,  $P$  aplicação mensal,  $n$  o tempo e  $i$  a taxa de juros unitária, essa expressão está demonstrada no capítulo V. Com uma calculadora podemos efetuar esses cálculos sem muitos problemas. Ao apresentar esse tipo de situação, os alunos se surpreenderam com os altos valores, havendo a necessidade de uma análise detalhada. Para facilitar os cálculos podemos usar uma planilha eletrônica e visualmente compreender passo a passo o funcionamento de um investimento.

Meses	Juros (R\$)	Montante (R\$)
1	0,00	300,00
2	2,10	602,10

**Tabela 2: Investimento em caderneta de poupança**

No primeiro mês efetuamos um depósito de R\$ 300,00, no segundo mês têm-se um montante de R\$ 602,10, sendo R\$ 300,00 do mês anterior, R\$ 300,00 do mês atual e R\$ 2,10 de juros referente a aplicação inicial. De forma análoga, fazendo uma aproximação dos valores obtidos, podemos dar continuidade a tabela até ao mês que achamos conveniente.

Na tabela 3 descrevemos detalhadamente os juros e montante facilitando a compreensão dos dados, assim o aluno poderá iniciar o processo de construção do conhecimento, possibilitando o entendimento da expressão apresentada acima que obtemos através de uma recorrência.

O panorama desta suposição é apresentado na tabela 3, enquanto que na tabela 4 faz-se uma generalização para qualquer tempo  $n$ .

A utilização de uma planilha eletrônica é muito importante para esses casos, ela facilita

Meses	Juros (R\$)	Montante (R\$)
1	0,00	300,00
2	2,10	602,10
3	4,21	906,31
4	6,34	1 212,66
5	8,48	1 521,14
6	10,65	1 831,79
7	12,82	2 144,61
8	15,01	2 459,63
9	17,22	2 776,85
(...)	(...)	(...)

**Tabela 3: Investimento em caderneta de poupança - continuação**

Meses	Montante(R\$)
0	$M_o$
1	$M_1 = (1 + i).M_o + M_o$
2	$M_2 = (1 + i).M_1 + M_o$
3	$M_3 = (1 + i).M_2 + M_o$
.	.
.	.
.	.
$n$	$M_n = (1 + i).M_{(n-1)} + M_o$

**Tabela 4: Generalização do resultado**

o entendimento, pois possuem inúmeros recursos de fácil manuseio, o que simplifica muito o nosso trabalho.

Mas atenção, quando desejamos investir em uma poupança sem ter complicações devemos lembrar-nos da inflação, logo essa taxa de juros deve ser descontado a inflação, portanto o ideal é que após estabelecer um valor investido mensalmente, no mês seguinte aplique um novo valor corrigido pela taxa de inflação (CERBASI, 2005).

## 2.6 SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO FRANCÊS (SAF)

O Sistema de Amortização Francês, também conhecido como Tabela Price, é muito utilizado nos cálculos de financiamentos (MORGADO, 2010). Segundo (PEREIRA, 1965), a denominação Tabela Price é em homenagem ao filósofo, teólogo e matemático inglês Richard Price, que viveu no século XVIII e incorporou a teoria dos juros compostos às amortizações de empréstimos. O nome francês deve-se ao fato do sistema ser desenvolvido na França, no século XIX.

De acordo com (SOBRINHO, 2000, p. 220), “esse sistema consiste em um plano de

amortização de uma dívida em prestações periódicas iguais e sucessivas, dentro do conceito de termos vencidos, em que o valor de cada prestação, ou pagamento, é composto por duas parcelas distintas: uma de juros e outra de capital (chamada amortização).”

No SAF, sendo  $i$  a taxa de juros e  $n$  o número de pagamentos, temos:

$$P_k = D_o \cdot \left( \frac{i}{1 - (1+i)^{-n}} \right) \quad (2)$$

$$D_k = D_o \cdot \left( \frac{1 - (1+i)^{-(n-k)}}{1 - (1+i)^{-n}} \right) \quad (3)$$

$$J_k = i \cdot D_{(k-1)} \quad (4)$$

$$A_k = P_k - J_k \quad (5)$$

onde,  $P$  é o valor da parcela,  $D_o$  a dívida inicial,  $J$  os juros,  $A$  a amortização e  $k$  a época da análise.

Essa fórmula decorre de um teorema apresentado posteriormente, lembrando que o foco inicial era de levar o entendimento e compreensão de conceitos básicos de matemática financeira, visando estabelecer no aluno uma relação de autoconfiança, participando de seu processo do ensino aprendizagem. Porém, enfatizo que o professor de matemática do ensino médio tem a obrigação de conhecer tais conceitos inclusive a sua demonstração e apresentar algumas destas aos seus alunos. No capítulo seguinte, durante análise de resoluções feitas por alunos, estaremos demonstrando a fórmula como fruto de construção do conhecimento.

Na sequência apresentamos aplicações do SAF em situações corriqueiras.

**Exemplo 2.2.** Um automóvel no valor de R\$ 30 000,00 é financiado em 24 parcelas fixas a uma taxa de 1,6% ao mês. Pergunta-se

- Qual é o valor de cada parcela?
- Qual é o valor da dívida após 15 parcelas?

Quanto a situação  $a$ , aplicando a expressão discutida anteriormente, o valor da prestação é obtido quase que imediato. Neste caso temos:

$$\begin{aligned} P &= D_o \cdot \left( \frac{i}{1 - (1+i)^{-n}} \right) \\ &= 30000 \cdot \left( \frac{0,016}{1 - (1+0,016)^{-24}} \right) \\ &= 30000 \cdot \left( \frac{0,016}{1 - (1,016)^{-24}} \right) \\ &= R\$ 1515,18. \end{aligned}$$

Quanto ao item  $b$ , queremos saber o valor da dívida após 15 pagamentos, aplicando o modelo matemático.

$$D_k = D_o \cdot \left( \frac{1 - (1+i)^{-(n-k)}}{1 - (1+i)^{-n}} \right)$$

Segue que:

$$\begin{aligned} D_{15} &= 30000 \cdot \left( \frac{1 - (1,016)^{-(24-15)}}{1 - (1,016)^{-24}} \right) \\ &= 30000 \cdot \left( \frac{1 - (1,016)^{-9}}{1 - (1,016)^{-24}} \right) \\ &= R\$ 12606,70. \end{aligned}$$

Durante algumas discussões com colegas de trabalho e alunos, esses argumentos, aplicações de expressões não foram suficientes para o convencimento, havendo a necessidade da verificação dos dados em uma planilha eletrônica que será discutida na análise dos resultados da pesquisa.

## 2.7 SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO CONSTANTE (SAC)

Segundo (SOBRINHO, 2000) o SAC consiste em um plano de amortização de uma dívida onde as prestações são periódicas, sucessivas e decrescentes, dentro do conceito de termos vencidos, em que o valor de cada prestação é composto por uma parcela de juros e outra parcela de capital

Sua denominação deriva de sua principal característica, ou seja, as amortizações são constantes, sendo que as prestações incluem os juros. Dessa forma, no sistema SAC o valor das prestações são decrescentes em progressão aritmética muito utilizado em financiamentos imobiliários.

Para melhor entendimento vamos analisar uma situação problema.

**Exemplo 2.3.** Considere a seguinte situação hipotética: Marcos financiou um imóvel em 12 prestações, se o valor do imóvel era de R\$ 24000,00 e o sistema escolhido por Marcos foi o SAC, construa uma tabela mostrando os valores das parcelas, dado que a taxa de juros foi de 1% a.m.

Como as amortizações são constantes, para calcular o valor de cada amortização dividimos o valor do imóvel pelo número de prestações. Segue que:

$$A = \frac{D_o}{n}$$

onde:  $D_o$  é o valor inicial da dívida (no instante zero) e  $n$  o número de prestações.

Para construir a tabela devemos considerar inicialmente o valor da dívida de R\$ 24000,00 e as amortizações que são de  $\frac{24000}{12} = R\$ 2000,00$ . Os juros são calculados sobre o saldo devedor, veja:

Número de prestações ( $k$ )	$P_k$ (R\$)	$J_k$ (R\$)	$A_k$ (R\$)	$D_k$ (R\$)
0	-	-	-	24 000,00
1	2 240,00	240,00	2 000,00	22 000,00
2	2 220,00	220,00	2 000,00	20 000,00
3	2 200,00	200,00	2 000,00	18 000,00
4	2 180,00	180,00	2 000,00	16 000,00
5	2 160,00	160,00	2 000,00	14 000,00
6	2 140,00	140,00	2 000,00	12 000,00
7	2 120,00	120,00	2 000,00	10 000,00
8	2 100,00	100,00	2 000,00	8 000,00
9	2 080,00	80,00	2 000,00	6 000,00
10	2 060,00	60,00	2 000,00	4 000,00
11	2 040,00	40,00	2 000,00	2 000,00
12	2 020,00	20,00	2 000,00	Dívida liquidada

**Tabela 5: Exemplo 2.3 - Simulação SAC**

Analisando a tabela e tendo como requisito conceitos de progressão aritmética (PA), vemos que é simples a sua compreensão.

Seja uma progressão aritmética,  $(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n)$ , temos que:

$$a_1 = a_1$$

$$a_2 = a_1 + r$$

$$a_3 = a_1 + 2r$$

...

$$a_n = a_1 + (n - 1).r$$

onde,  $a_1$  é o primeiro termo,  $a_2$  o segundo termo,  $a_3$  o terceiro termo,  $r$  a razão e  $a_n$  o termo geral.

Segue que o termo geral de uma PA é:



$$a_n = a_1 + (n - 1).r$$

Demonstração:

Por indução:

Para  $n = 1$ , veja que  $a_1 = a_1$ . Suponhamos que a fórmula seja válida para algum  $n \in \mathbb{N}$ , vamos mostrar que a fórmula é válida para  $n + 1$ .

$$a_n = a_1 + (n - 1).r$$

Somando  $r$  a ambos os termos temos:

$$a_{n+1} = a_n + r = a_1 + (n - 1).r + r = a_1 + n.r = a_1 + [(n + 1) - 1].r$$

O que mostra que a fórmula é válida para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Utilizando a fórmula do termo geral de uma PA, podemos calcular o valor dos juros após  $k$  pagamentos, com  $k$  natural.

Note que o valor dos juros, das parcelas, da amortização e da dívida corresponde a termos de uma progressão aritmética decrescente onde a razão para os juros e parcelas é a taxa juros  $i$ , multiplicada pelo valor da amortização, ou seja,  $r = -i.A$ . Para a amortização temos uma PA constante e dívida uma PA de razão  $r = -A$ , sendo a amortização  $A = \left(\frac{D_o}{n}\right)$ .

Segue que:

$$\begin{aligned} J_k &= J_o - (k - 1).i.A \\ &= i.D_o - (k - i).i.\left(\frac{D_o}{n}\right) \\ &= i.D_o.\left(1 - \frac{(k - 1)}{n}\right) \\ &= i.D_o.\left(\frac{n - (k - 1)}{n}\right) \\ &= i.\left(\frac{D_o}{n}\right).(n - k + 1) \end{aligned}$$

Como  $\left(\frac{D_o}{n}\right)$  é a amortização, temos:

$$J_k = i.A.(n - k + 1). \quad (7)$$

Onde  $k$  é o número da parcela,  $J_k$  o juros da parcela desejada,  $i$  a taxa de juros e  $A$  a amortização.

Portanto se quisermos saber o valor da parcela após  $k$  pagamentos, basta adicionarmos a amortização com os juros.

$$\begin{aligned}P_k &= A + J_k \\ &= A + i.A.(n - k + 1) \\ P_k &= A.(1 + i.(n - k + 1)).\end{aligned}\tag{8}$$

Se quisermos saber o saldo devedor após  $k$  pagamentos, teríamos feitos  $k$  amortizações:

$$S_k = A.(n - k).\tag{9}$$

Sendo  $S_k$  o saldo devedor após  $k$  pagamentos,  $n$  o número de parcelas e  $k$  o número de parcelas pagas.

### 3 APLICAÇÕES DE SITUAÇÕES PROBLEMAS EM SALA DE AULA ENVOLVENDO CONCEITOS DE MATEMÁTICA FINANCEIRA

Neste capítulo estaremos discutimos conceitos e teoremas da matemática financeira. No decorrer do capítulo citamos aplicações que auxiliam na resolução de situações problemas de matemática financeira, utilizando situações reais de sala onde os alunos participaram ativamente das discussões.

Segundo (MORGADO, 2010), a operação básica da matemática financeira é a operação de empréstimo. Alguém que dispõe de um capital  $M_o$  (capital inicial) empresta-o a outrem por certo período de tempo. Após esse período, ele recebe seu capital  $M_o$  de volta, acrescido de uma remuneração  $J$  pelo empréstimo. Essa remuneração é chamada de juros. A soma  $M_o + J$  é chamada de montante e será representada por  $M_n$ . A razão  $i = \frac{J}{M_o}$ , que é a taxa de crescimento do capital, será sempre referida ao período da operação e chamada de taxa de juros.

Alguns pré-requisitos foram essenciais para o entendimento de conceitos financeiros. Para isso fez-se uma retomada de conceitos funções, apresentadas no caderno 3 do aluno, material fornecido pelo governo do Estado de São Paulo. Fizemos um estudo de diferentes gráficos de funções com o auxílio do Geogebra, analisamos o comportamento de gráficos de funções de primeiro e segundo grau, funções exponenciais e logarítmicas. Essa análise consistiu em verificar intervalos de crescimento ou decrescimento dessas funções com a caracterização da rapidez com que crescem ou decrescem a partir da qualidade expressa em gráficos.

Após essa abordagem demos início aos conceitos financeiros; porcentagem, juros simples e composto, equivalência de capitais e tabela SAC.

Iniciamos o trabalho com conceitos de taxa de porcentagem que é a forma usada para indicar uma fração de denominadores 100 ou equivalente.

**Exemplo 3.1.**  $10\% = \frac{10}{100} = \frac{1}{10} = 0,1$

Na sequência passamos a discutir algumas situações problemas envolvendo o conceito de taxas percentuais, conforme segue:

**Exemplo 3.2.** Um eletrodoméstico cujo o preço à vista é de R\$ 500,00, no mês de março tem um acréscimo de 5%, em abril esse novo preço tem uma redução de 10%. Qual é o valor do eletrodoméstico no mês de abril?

Resolução:

*Mês de março, aumento de 5%.*

$$\begin{aligned} 100\% &\rightarrow 500 \\ 105\% &\rightarrow x \\ 100x &= 52500 \\ x &= R\$ 525,00. \end{aligned}$$

*Mês de abril, decréscimo de 10%*

$$\begin{aligned} 100\% &\rightarrow 525 \\ 90\% &\rightarrow x \\ 100x &= 47250,00 \\ x &= R\$ 472,50. \end{aligned}$$

**Exemplo 3.3.** Uma geladeira teve um aumento de 10% e passou a custar R\$ 1350,00. Qual era o preço antes do aumento?

A maioria dos alunos não tiveram dificuldades para a resolução do problema, apresentando diferentes resoluções. Na sequência, comentários sobre algumas das soluções apresentadas.

Solução apresentada pelo aluno 1.

$$\frac{1350}{(1+0,1)^1} = \frac{1350}{1,1} = R\$ 1227,27.$$

Solução apresentada pelo aluno 2.

$$\begin{aligned} 110\% &\rightarrow 1350 \\ 100\% &\rightarrow x \\ 110.x &= 135000 \\ x &= R\$ 1227,27. \end{aligned}$$

Solução apresentada pelo aluno 3.

$$x + \frac{x}{10} = 1350$$

$$\begin{aligned}
 10.x + x &= 13500 \\
 11.x &= 13500 \\
 x &= \frac{13500}{11} \\
 x &= R\$ 1227,27
 \end{aligned}$$

Solução apresentada pelo aluno 4.

$$\begin{aligned}
 100\% &\rightarrow x \\
 110\% &\rightarrow 1350 \\
 1\% &\rightarrow 12,27 \\
 100\% &\rightarrow R\$ 1227,20
 \end{aligned}$$

Na resolução 1, o aluno argumentou que se o produto teve um aumento de 10%, para voltar ao preço anterior, divide-se por (1,1). Esse assunto foi discutido em sala de aula. Já na resolução 2, foi utilizado uma regra de três simples associando o valor atual a 110%. Quanto a resolução 3 percebe-se que o aluno utilizou uma equação de 1º grau, associando uma incógnita acrescida de um décimo de seu valor, igualando ao novo preço da geladeira e na resolução 4, utilizou uma regra de três para encontrar o valor de 1%, multiplicando por 100 e encontrando o valor pedido.

O professor de ensino médio deve estar preparado para as inúmeras situações que podem ocorrer, procurando compreendê-las e valorizando sempre o raciocínio do aluno de forma a garantir uma aprendizagem significativa.

### 3.1 JUROS SIMPLES

Muito se discute sobre o assunto, alguns autores não veem necessidade de abordar tal assunto, haja vista que suas aplicações são pouco utilizadas em situações cotidianas. Insistimos porém, que é de fundamental importância formar conceitos, pois só assim os alunos poderão aprender algo mais complexo e estabelecer significados participando ativamente da construção de seu conhecimento.

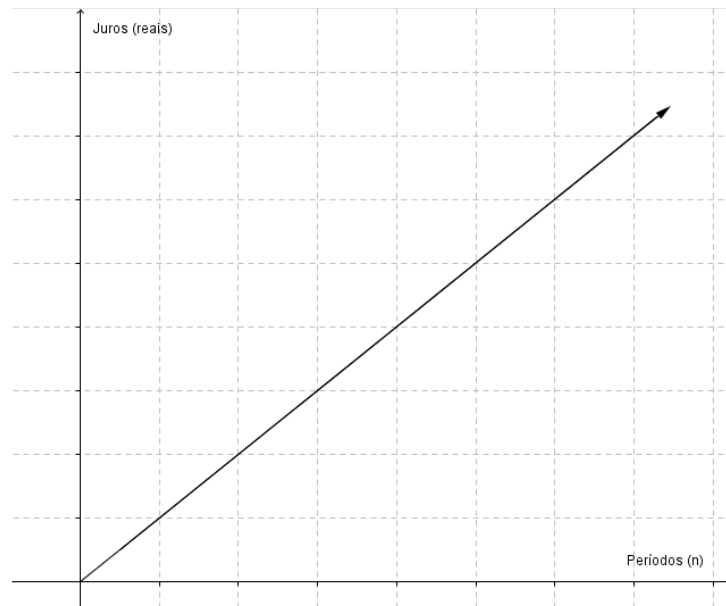
É importante discutir aqui a questão da linearidade, sendo que o regime de juro simples é aquela ao qual o juro incide sempre sobre o capital inicial, portanto podemos escrever:

$$J = C.i.n, \tag{10}$$

onde  $J$  é o juro,  $i$  a taxa e  $n$  o tempo.

Dessa forma teremos,  $J = k.n$ , onde  $k$  é uma constante positiva. Segue que,  $J = k.n$  é uma função linear,  $f : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+$ , onde o gráfico é uma reta passando pela origem. Logo  $\frac{J}{n} = k$ , o que significa que os juros simples  $J$  e o número de períodos  $n$  para um domínio discreto, são grandezas diretamente proporcionais. Daí, infere-se que o crescimento dos juros simples obedece a uma função linear, cujo crescimento depende do produto  $C.i = k$ , que é o coeficiente angular da reta  $J = k.n$ , sendo o tempo representado por  $n$  para um domínio contínuo, daí a importância de rever alguns conceitos de funções lineares.

Graficamente obtemos:



**Figura 1: Juros simples**

**Exemplo 3.4.** *Um capital aplicado a juros simples rendeu, à taxa de 25% ao ano, juros de R\$ 110,00 depois de 24 meses. Qual foi esse Capital.*

Aplicando o modelo matemático temos:

$$110 = C.0,25.2$$

$$C = \frac{110}{0,5} = 50$$

Ao discutir esse assunto em sala de aula os alunos ficaram surpresos quando associamos a função linear, o que foi muito importante, para a abordagem de novos conceitos da matemática financeira. Os alunos resolveram a situação problema como a apresentada acima.

### 3.2 JUROS COMPOSTOS

No sistema de juros compostos, deve-se calcular o juros no fim de cada período, formando um montante sobre o qual se calculam os juros do período seguinte, até esgotar o tempo de aplicação (DANTE, 2011).

**Teorema 3.5.** (MORGADO, 2010, p. 45). *No regime de juros compostos de taxa  $i$ , um principal  $M_o$  transforma-se, em  $n$  períodos de tempo, em um montante igual a:*

$$M_n = M_o \cdot (1 + i)^n. \quad (11)$$

Demonstração:

Para cada  $k$ , seja  $M_k$  a dívida após  $k$  períodos de tempo. Temos  $M_{k+1} = M_k + i \cdot M_k = (1 + i) \cdot M_k$ . Daí,  $M_k$  é uma progressão geométrica de razão  $1 + i$  e  $M_n = M_o \cdot (1 + i)^n$

**Exemplo 3.6.** *Considere a situação hipotética: Qual deve ser o tempo para que a quantia de R\$ 30000,00 gere um montante de R\$ 32781,81, quando aplicada a uma taxa de 3% ao mês, no sistema de juros compostos.*

Resolução:

Para resolver a situação problema os alunos utilizaram uma calculadora científica para o cálculo dos logaritmos apresentados. Se  $M_o = R\$ 30000,00$ ,  $i = 3\%$  ao mês,  $n = ?$  e  $M = R\$ 32781,81$ :

$$\text{Temos, } M_n = M_o \cdot (1 + i)^n$$

$$(1 + i)^n = \frac{M_n}{M_o}$$

$$(1,03)^n = \frac{32781,81}{30000}$$

$$= 1,092727$$

$$\implies n = \frac{\log(1,092727)}{\log(1,03)} = 3$$

Portanto o tempo deve ser de 3 meses.

Essa resolução foi apresentada pela maioria dos alunos, havendo a necessidade nesse momento de rever alguns conceitos de logaritmos.

Para todo número real positivo  $a \neq 1$ , a função exponencial  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,  $f(x) = a^x$ , é uma correspondência biunívoca entre  $\mathbb{R}$  e  $\mathbb{R}^+$ , crescente se  $a > 1$ , e decrescente se  $0 < a < 1$ , com propriedade adicional.

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$$

Segue-se que  $f$  possui uma função inversa. A inversa da função exponencial de base  $a$  é a função  $\log_a: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ , que associa a cada número real positivo  $x$  o número real  $\log_a x$ , chamado de logaritmo de  $x$  na base  $a$ . Por definição de função inversa, tem-se:

$$a^{\log_a x} = x \text{ e } \log(a^x) = x$$

Assim,  $\log_a x$  é o expoente ao qual se deve elevar a base  $a$  para obter o número  $x$ . Ou seja,

$$y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x. (\text{LIMA, 2006, p. 190})$$

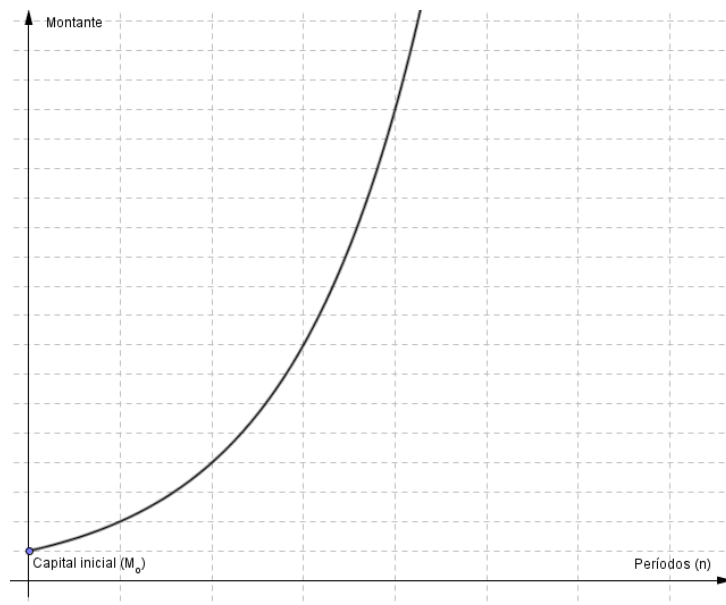
Nos juros compostos o montante é obtido em função do tempo por meio de uma variação exponencial do tipo:

$$g(x) = a \cdot b^x$$

Sendo  $a, b \in \mathbb{R}$ , onde  $a > 0$  e  $a \neq 1$ ,  $g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ .

Até o momento fizemos apenas uma retomada de alguns conceitos de juros feitos no Ensino Fundamental e início do Ensino Médio, porém de importância para a compreensão do que virá a ser apresentado na sequência.

Veja graficamente o montante nos juros compostos.



**Figura 2: Juros compostos**



### 3.3 EQUIVALÊNCIA DE CAPITAIS

Sabemos que o valor de uma quantia depende da época a qual ela está referida. Veja que, em uma situação hipotética onde o meu dinheiro rende 1% ao mês, pagar R\$ 100,00 hoje ou pagar R\$ 101,00 daqui a um mês é indiferente.

Discutindo algumas situações com os alunos e propondo alguns exemplos percebemos algumas dificuldades quanto ao fator deslocamento no tempo, evidenciando-se a necessidade de fazer algumas exposições sobre alguns conceitos importantes. Essas discussões se deram a partir dos exemplos a seguir.

**Exemplo 3.7.** *Considere a situação hipotética: O professor Márcio tomou um empréstimo de R\$ 500,00 a juros mensais de 10%. Dois meses após, Márcio pagou R\$ 250,00 e, um mês após esse pagamento, liquidou o seu débito. Qual o valor desse último pagamento?*

Meses	0	1	2	3
Parcelas	-	-	250	?

**Tabela 6: Exemplo 3.7 - equivalência de capitais**

Fazendo uma discussão sobre o Teorema 3.5,  $M_n = M_o \cdot (1 + i)^n$  é uma quantia relacionada ao tempo atual, ou seja,  $M_o$ , onde transformar-se-á, após  $n$  períodos de tempo em  $M_o \cdot (1 + i)^n$ , isto é, uma quantia, cujo valor atual é  $M_o$ , equivale no futuro, depois de  $n$  períodos de tempo a  $M_n = M_o \cdot (1 + i)^n$ , daí podemos concluir que para descobrir o valor futuro devemos multiplicar por  $(1 + i)^n$  e para descobrir o valor atual dividir por  $(1 + i)^n$ .

O conceito apresentado acima não foi de fácil compreensão por parte dos alunos, exigiu várias simulações, porém foi de suma importância para o prosseguimento do trabalho.

Portanto podemos resolver a situação problema da seguinte forma:

Veja que:

Hoje Márcio emprestou R\$ 500,00 o que é equivalente a um valor futuro,  $\frac{250}{(1 + 0,1)^2} + \frac{P}{(1 + i)^3}$ , observe que Márcio pagou a primeira parcela após dois meses e a segunda parcela será paga após 3 meses, tal situação é equivalente ao valor atual, dessa forma podemos analisar a discussão do teorema 3.5, escrevendo:

$$500 = \frac{250}{(1+0,1)^2} + \frac{P}{(1+0,1)^3}$$

$$500 - \frac{250}{(1+0,1)^2} = \frac{P}{(1+0,1)^3}$$

$$500 - 206,6116 = \frac{P}{(1+0,1)^3}$$

$$P = R\$ 390,50.$$

As resoluções apresentadas pelos alunos foram semelhantes as acima.

Outra situação que chamou a atenção dos alunos que levou a muitas discussões foi o seguinte exemplo (MORGADO, 2010, p. 47).

**Exemplo 3.8.** *Guilherme tem três opções de pagamento na compra de um vestuário:*

a) *À vista, com 10% de desconto.*

b) *Em duas prestações mensais iguais, sem desconto, vencendo a primeira um mês após a compra.*

c) *Em três prestações mensais iguais, sem desconto, vencendo a primeira no ato da compra. Qual a melhor opção para Guilherme, se o dinheiro vale, para ele, 5 % ao mês?*

Sem perda de generalidade vamos fixar um preço de R\$ 30,00. Pagando à vista não houve grandes discussões, pois rapidamente os alunos concluíram que o valor seria de 27 reais, mas, que valor pagaria em duas ou em três prestações?

Comparando os valores no hoje, obtemos:

Analisando o item b, temos:

$$V_b = \frac{15}{1,05} + \frac{15}{1,05^2} \cong 27,89$$

Analisando o item c, temos:

$$V_c = 10 + \frac{10}{1,05} + \frac{10}{1,05^2} \cong 28,59$$

Portanto a melhor opção para Guilherme é a compra à vista.

Os alunos apresentaram a solução com auxílio do professor, tendo dificuldades na compreensão do problema.

Inúmeras situações problemas podem ser discutidas envolvendo a discussão do Teo-

rema 1. Tais situações são encontradas em (MORGADO, 2010) e (DANTE, 2011).

**Teorema 3.9.** *O valor de uma série uniforme de  $n$  pagamentos iguais a  $P$ , uma unidade de tempo antes do primeiro pagamento, é, sendo  $i$  a taxa de juros e  $P_v$  pagamento à vista igual a:*

$$P_v = P \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \quad (12)$$

Para exemplificar considere a seguinte situação hipotética.

**Exemplo 3.10.** *Sabrina comprou uma geladeira em 6 prestações iguais, sendo a primeira paga um mês após a compra, cujo o preço à vista era de R\$ 1000,00. Se os juros são de 10% ao mês, determine o valor das prestações.*

Utilizando uma calculadora científica e aplicando a o Teorema 3.9 os alunos rapidamente encontraram a solução.

Veja que:

$$\begin{aligned} 1000 &= P \left( \frac{1 - (1 + 0,1)^{-6}}{0,1} \right) \\ &= P.4,3552606 \\ P &\cong 229,60. \end{aligned}$$

Porém apenas fizeram contas sem estabelecer significados, muito menos compreenderam o que estavam fazendo, foi aí que solicitei para que usasse o que tínhamos estudado até o momento. Pensando na discussão do Teorema anterior tem -se:

$$1000 = \frac{P}{1,1} + \frac{P}{1,1^2} + \frac{P}{1,1^3} + \frac{P}{1,1^4} + \frac{P}{1,1^5} + \frac{P}{1,1^6}$$

Um aluno indagou: “Professor, isso é muito complicado, não é mais fácil usar a fórmula”.

Foi solicitado para que o aluno resolvesse a situação problema, procurando explicar todas as passagens, de forma trabalhosa, pois houve a necessidades da utilização da soma dos termos de uma PG, chegando a algumas conclusões.

Juros compostos constitui uma progressão geométrica, juros simples constitui uma progressão aritmética.

Não é fácil construir conceitos, mas se faz necessário. Percebe-se que os nossos alunos simplesmente reproduzem mecanicamente sem a devida compreensão e assim entendem a matemática como um conjunto de fórmulas sem significados.

$$\begin{aligned}
 1000 &= \frac{P}{1,1} + \frac{P}{(1,1)^2} + \frac{P}{1,1^3} + \frac{P}{1,1^4} + \frac{P}{1,1^5} + \frac{P}{1,1^6} \\
 1,1^6 \cdot 1000 &= 1,1^5 P + 1,1^4 P + 1,1^3 P + 1,1^2 P + P \\
 1771,561 &= 1,61051 P + 1,4641 P + 1,331 P + 1,21 P + P \\
 \underline{1771,561} &= P \cdot \underline{6,61561} \\
 P &\approx \text{R\$ } 267,80
 \end{aligned}$$

**Figura 3: Resolução apresentada por um aluno**

Vamos analisar a resolução apresentada pelo aluno Felipe na figura 3.

O aluno não apresentou a resposta correta do problema, porém compreendeu o enunciado da questão demonstrando habilidades de cálculo na resolução de situações problemas, veja que, faltou adicionar  $(1,1)P$ , porém tal situação é de fácil correção, sendo descuido do aluno e não falta entendimento do assunto.

Veja que a partir de então a demonstração do Teorema 3.9 é decorrência da construção.

$P_v = \frac{P}{(1+i)} + \frac{P}{(1+i)^2} + \dots + \frac{P}{(1+i)^n}$ , utilizando a soma dos termos de uma PG finita obtém-se:

$$\begin{aligned}
 \frac{P_v}{P} &= (1+i)^{-1} \cdot \frac{(1+i)^{-n} - 1}{(1+i)^{-1} - 1} \\
 &= \frac{(1+i)^{-n} - 1}{(1+i) \cdot \left(\frac{1}{1+i} - 1\right)} \\
 &= \frac{(1+i)^{-n} - 1}{(1+i) \cdot (1 - 1 - i)} \\
 &= \frac{(1+i)^{-n} - 1}{1+i} \\
 &= \frac{(1+i)^{-n} - 1}{-i} \Rightarrow \\
 P_v &= P \cdot \left[ \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right]
 \end{aligned}$$

### 3.4 APLICAÇÕES DE CONCEITOS DO SAF

Os alunos fizeram uma pesquisa sobre as taxas de financiamento da região havendo certa curiosidade desses em saber como funciona a tabela price. Surgiram algumas ideias, a maioria dos financiamentos apresentados pelos alunos os valores das parcelas eram constantes, dessa forma foram orientados a pesquisar na internet algumas tabelas prontas em planilhas eletrônicas e fazer simulações, foi aí que algumas indagações apareceram, sendo discutidas posteriormente.

Inicialmente fizemos uma pequena explanação de como funciona uma tabela PRICE utilizando planilhas eletrônicas, usamos apenas alguns conceitos de porcentagem e algumas subtrações. Esta situação discutida é representada no exemplo que segue:

**Exemplo 3.11.** *Uma pessoa deseja fazer um empréstimo de R\$ 1000,00 e liquidar em 6 parcelas iguais, a uma taxa de 5% ao mês. construa uma tabela para representar os dados utilizando o sistema de amortização francês.*

Oportunizou-se uma discussão na sala, buscando compreender significativamente os os dados apresentados na tabela.

Inicialmente devemos calcular o valor de cada parcela, para isso podemos utilizar o Teorema 3.9, conforme segue:

$$1000 = P \cdot \left( \frac{1 - (1 + 0,05)^{-6}}{0,05} \right)$$

$$50 = P \cdot (0,253785)$$

$$P = R\$ 197,02.$$

Como o sistema de amortização é o SAF, então todas as parcelas são fixas, logo as 6 parcelas são no valor de R\$ 197,02. Observe a tabela 7.

Tempo (meses)	Parcelas (R\$)	Juros (R\$)	Amortização (R\$)	Dívida (R\$)
0	-	-	-	1000,00
1	197,02	-	-	-
2	197,02	-	-	-
3	197,02	-	-	-
4	197,02	-	-	-
5	197,02	-	-	-
6	197,02	-	-	-

**Tabela 7: Exemplo 3.11 - Compreensão de dados 1**

A taxa de juros é de 5% ao mês e, após um mês, calculamos 5% de R\$ 1000,00

obtendo R\$ 50,00. A amortização desse mês é o valor da parcela subtraído do juros, ou seja,  $R\$ 197,02 - R\$ 50,00 = R\$ 147,02$ . Dessa forma a nossa dívida atual passa a ser,  $R\$ 1000,00 - R\$ 147,02 = R\$ 852,98$ . Observe a tabela 8.

Tempo (meses)	Parcelas (R\$)	Juros (R\$)	Amortização (R\$)	Dívida (R\$)
0	-	-	-	1000,00
1	197,02	50,00	$197,02 - 50,00 = 147,02$	852,98
2	197,02	-	-	-
3	197,02	-	-	-
4	197,02	-	-	-
5	197,02	-	-	-
6	197,02	-	-	-

**Tabela 8: Exemplo 3.11 - Compreensão de dados 2**

Procedendo da mesma forma, nossa dívida atual é de R\$ 852,98, calculando os 5% dessa dívida temos um juros de R\$ 42,65, logo uma amortização de  $R\$ 197,02 - R\$ 42,65 = R\$ 154,37$ . Portanto a dívida para o próximo mês é de  $R\$ 852,98 - R\$ 154,37 = R\$ 698,61$ . De forma análoga até a 6ª parcela temos a dívida liquidada. Observe as tabelas 8 e 9, respectivamente.

Tempo (meses)	Parcelas (R\$)	Juros (R\$)	Amortização (R\$)	Dívida (R\$)
0	-	-	-	1000,00
1	197,02	50,00	147,02	852,98
2	197,02	42,65	154,37	698,61
3	197,02	34,93	162,09	536,52
4	197,02	26,83	170,19	366,33
5	197,02	18,31	178,70	187,63
6	197,02	9,38	187,63	Dívida liquidada

**Tabela 9: Exemplo 3.11 - Liquidação de dívida (Price)**

Note que utilizando a planilha eletrônica, podemos facilmente criar uma tabela PRICE e fazer simulações tentando descobrir alguns aspectos interessantes que poucos conseguem visualizar quando se fala em juros compostos.

Pediu-se para que os alunos pesquisassem uma tabela PRICE na internet e fizessem algumas análises, de forma a perceberem que ao lançar um número muito grande de parcelas, essa parcela passaria a não se alterar significativamente, concluindo que quanto menor o número de parcelas, menor os juros que se paga e que o ideal é sempre o pagamento à vista. De fato, no limite quando o número de parcelas tende ao infinito, o valor da parcela tende a um valor fixo que corresponde aos juros.

O fator primordial do trabalho com esses alunos é levá-los à compreensão de alguns fa-

tores importantes que os permitam exercer seu papel de cidadão na sociedade com mais eficácia. Certamente em um curso mais aprofundado de matemática financeira seria possível discutir alguns teoremas em sala de aula sobre o assunto, porém é de fundamental importância que o professor de ensino médio tenha conhecimento sobre esses teoremas.

Na figura 4, mostra-se a participação de alguns alunos participando da pesquisa e discutindo a tabela PRICE.



**Figura 4: Pesquisa e Tabela Price**

Analisando o Teorema 3.12 podemos encontrar os dados de uma Tabela PRICE.

**Teorema 3.12.** *No sistema francês de amortização, sendo  $i$  a taxa de juros e  $n$  o número de pagamentos, temos: (MORGADO, 2010, p. 60).*

$$P_k = D_o \cdot \left( \frac{i}{1 - (1+i)^{-n}} \right) \quad (13)$$

$$D_k = D_o \cdot \left( \frac{1 - (1+i)^{-(n-k)}}{1 - (1+i)^{-n}} \right) \quad (14)$$

$$J_k = i \cdot D_{k-1} \quad (15)$$

$$A_k = P_k - J_k \quad (16)$$

Sendo  $P$  o valor da parcela,  $k$  a parcela desejada,  $J$  o juro e  $A$  a amortização.

Demonstração:

Veja que a primeira fórmula é o Teorema 3.9 demonstrado anteriormente pois:

$$D_o = P_k \cdot \left( \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right)$$

$$P_k = D_o \cdot \left( \frac{i}{1 - (1+i)^{-n}} \right)$$

Note que  $D_k$  será liquidada em  $(n - k)$  pagamentos sucessivos e postecipados, iguais a  $P_k$ . Pelo Teorema 3.9, temos:

$$P_v = P \cdot \left( \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right)$$

Denotando  $P_v$  por  $D_k$  e  $P$  por  $P_k$ , obtemos:

$$D_k = P_k \cdot \left( \frac{1 - (1+i)^{-(n-k)}}{i} \right)$$

Mas,  $P_k = D_o \cdot \left( \frac{i}{1 - (1+i)^{-n}} \right)$ , substituindo em  $D_k$ , temos:

$$\begin{aligned} D_k &= D_o \cdot \left( \frac{i}{1 - (1+i)^{-n}} \right) \cdot \left( \frac{1 - (1+i)^{-(n-k)}}{i} \right) \\ &= D_o \cdot \left( \frac{1 - (1+i)^{-(n-k)}}{1 - (1+i)^{-n}} \right) \end{aligned}$$

Quanto ao juro  $J_k$  ele é calculado sobre o valor da dívida referente ao mês anterior, dessa forma, temos:

$$J_k = i \cdot D_{k-1}$$

A amortização  $A_k$  é o valor da parcela subtraído dos juros, após  $k$  pagamentos a amortização é denotada por:

$$A_k = P_k - J_k$$



#### 4 SUGESTÕES DE ATIVIDADES PARA O ENSINO MÉDIO ENVOLVENDO CONCEITOS DE MATEMÁTICA FINANCEIRA

Após discutir alguns conceitos teóricos e desenvolver atividades em sala de aula, passaremos a apresentar neste capítulo sugestões para o ensino médio, mostrando a importância de relacionar conteúdos, para uma contextualização eficaz, sendo para isto necessário o conhecimento de alguns pré-requisitos. Ao desenvolver aplicações em sala de aula surgiram novas ideias que poderiam ser exploradas e que serão expostas.

Quanto aos juros simples definido no capítulo 3, temos  $J = C.i.n$ , podemos escrever como uma função linear,  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ , para a capitalização simples e  $M_n = M_o.(1 + i)^n$ , relacionamos como uma função exponencial contínua sendo  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ .

Citamos alguns exemplos relacionando o domínio discreto e contínuo. Inicialmente fizemos um parâmetro entre domínio natural obtendo uma imagem real para as funções apresentadas. Na sequência uma análise gráfica onde essas funções de domínio discreto passam a ser analisadas com funções contínuas.

**Exemplo 4.1.** Considere a situação hipotética: Um capital de R\$ 200,00 é aplicado a uma taxa de 2% a.m durante 80 meses a juros simples; calcule o valor do montante.

**Exemplo 4.2.** Considere a situação hipotética: Um capital de R\$200,00 é aplicado a uma taxa de 2% a.m durante 80 meses a juros compostos; calcule o valor do montante.

No exemplo 4.1 relacionamos o montante como uma função linear  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,  $f(x) = 200 + 4x$ , já no exemplo 4.2 temos uma função exponencial,  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,  $f(x) = 200.(1,02)^x$ .

No estudo de juros simples e compostos podemos explorar aplicações de funções, progressão aritmética, geométrica e logaritmos. Quanto a progressão aritmética no exemplo 4.1 temos:

$$f(0) = 200$$

$$f(1) = 204$$

$$f(2) = 208$$

...

$$f(x) = 200 + 4x$$

Portanto a sequência (200, 204, 208, 212, 216, ...) constitui uma progressão aritmética de razão 4 e primeiro termo 200. No exemplo 4.2 temos uma progressão geométrica, veja:

$$f(0) = 200$$

$$f(1) = 204$$

$$f(2) = 208,08$$

$$f(3) = 212,24$$

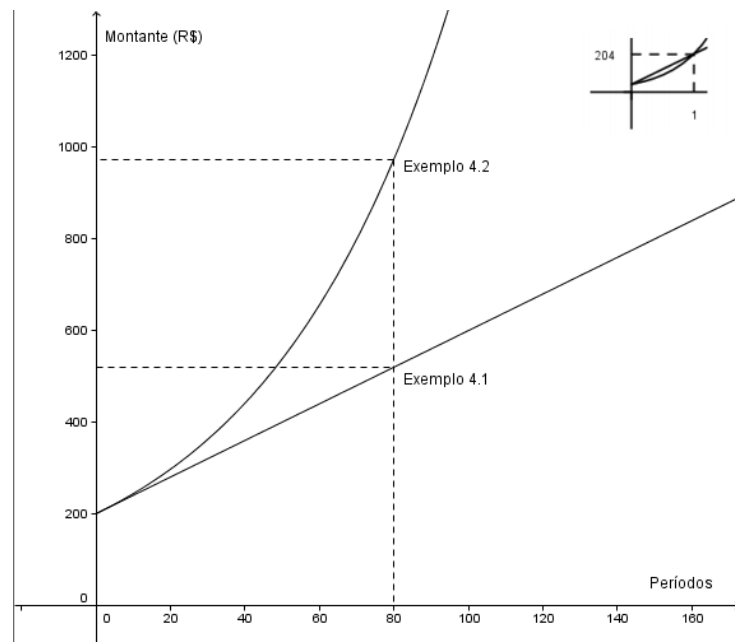
$$f(4) = 216,49$$

...

$$f(x) = 200 \cdot (1,02)^x$$

A sequência (200, 204, 208,08, 212,24, 216,49, ...) constitui uma progressão geométrica de razão 1,02.

Analisando graficamente os exemplos, através das funções definidas anteriormente, temos:

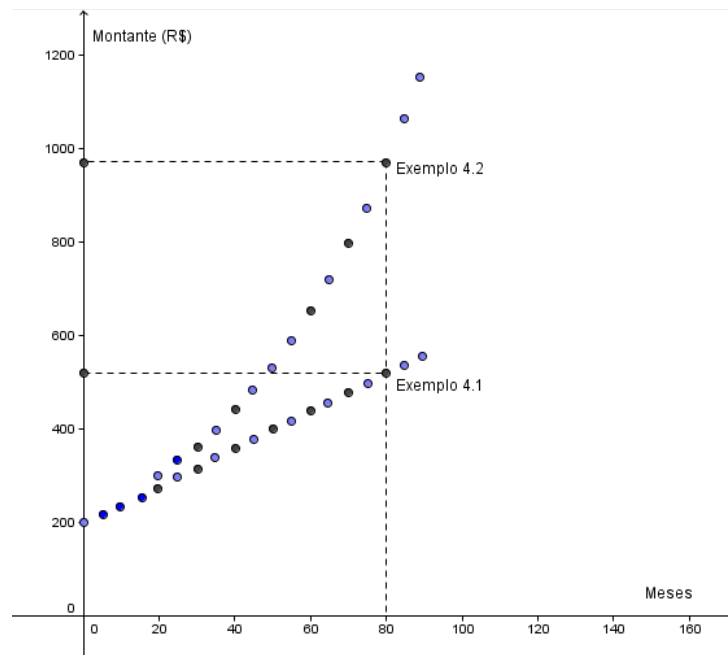


**Figura 5: Comparação entre juros simples e compostos**

O gráfico nos mostra que após 80 meses o valor apresentado nos juros compostos é muito maior que os apresentados nos juros simples, porém no intervalo de 0 a 1, sendo ambas as funções contínuas definidas no conjunto dos números reais o montante dos juros compostos

seria menor que o montante dos juros simples.

O professor de matemática deve ficar atento ao abordar tais assuntos. O aluno precisa estar familiarizado com funções para que consiga ter um aprendizado mais significativo, lembrando que os juros simples e compostos quando tomados em períodos definidos (mês a mês, por exemplo) estão relacionados com domínios discretos (Veja fig:6). Neste caso trata-se de sequências numéricas. Já no caso da figura 5, optou-se por um tratamento de uma função em domínio contínuo.



**Figura 6: Comparação entre juros simples e compostos**

Na sequência citaremos exemplos de situações problemas para reflexão com alunos.

**Exemplo 4.3.** Quanto rendeu a quantia de R\$ 500,00, aplicada a juros simples, com taxa de 2% a.m, no final de 3 anos?

Resolução:

$$\begin{aligned} J &= C.i.n \\ &= 500.0,02.36 \\ &= 360 \end{aligned}$$

Rendeu R\$ 360,00 de juros.

**Exemplo 4.4.** Um capital aplicado a juros simples rendeu, à taxa de 30% ao ano, juros de R\$ 500,00; depois de 36 meses, qual foi esse capital?

Resolução:

$$\begin{aligned}
 J &= C.i.t \\
 500 &= C.0,3.3 \\
 C &= \frac{500}{0,9} = 555,56
 \end{aligned}$$

Esse capital foi de R\$ 555,56.

**Exemplo 4.5.** Quanto receberá de juros, após 7 meses, uma pessoa que investiu, a juros compostos, a quantia de R\$ 10000,00 à taxa de 2% ao mês?

Resolução:

$$\begin{aligned}
 M_n &= M_o.(1+i)^n \\
 &= 10000.(1,02)^7 \\
 &= 11486,86
 \end{aligned}$$

Essa pessoa receberá após 7 meses R\$ 11486,86.

**Exemplo 4.6.** Considere a situação hipotética: Qual deve ser o tempo para que a quantia de R\$ 20000,00 gere um montante de R\$ 50000,00, quanto aplicada a taxa de 5% ao mês, nos sistema de juros compostos?

Resolução:

$$\begin{aligned}
 M_n &= M_o.(1+i)^n \\
 50000 &= 20000.(1,05)^n \\
 &= (1,05)^n = 2,5 \\
 \Rightarrow \log(1,05)^n &= \log(2,5) \\
 \Rightarrow n &= \frac{\log(2,5)}{\log 1,05} \approx 18,78
 \end{aligned}$$

O tempo deve ser de 19 meses.

#### 4.1 APLICAÇÕES DE PROGRESSÃO GEOMÉTRICA EM MATEMÁTICA FINANCEIRA

Em uma sequência de números não nulos na qual a constante é definida como o quociente da divisão de cada termo, a partir do segundo, pelo termo anterior, essa constante é chamada de razão  $q$  da sequência, tal sequência é determinada como progressão geométrica. (DANTE, 2011). Assim, progressão geométrica é uma sequência na qual a taxa de crescimento/decrescimento relativo de cada termo para o seguinte é sempre a mesma.

Seja  $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ , termos de uma Progressão Geométrica e  $q$  a razão, definimos:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

Conjecturando:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 \cdot q^0 \\ a_2 &= a_1 \cdot q^1 \\ a_3 &= a_1 \cdot q^2 \\ &\dots \\ a_n &= a_1 \cdot q^{n-1} \end{aligned}$$

Demonstração:

Por indução temos:

Para  $n = 1$ , reduz-se ao próprio  $a_1$ , suponhamos que seja válido para algum  $n \in \mathbb{N}$ , vamos mostrar que é válido para  $n + 1$ .

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ , multiplicando ambos lados por  $q$ , obtemos:

$a_n \cdot q = a_{n+1} = a_1 \cdot q^{n-1} \cdot q = a_1 \cdot q^n = a_1 \cdot q^{(n+1)-1}$ , o que mostra que é válido para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

A soma dos termos de uma progressão geométrica finita demonstra-se no ensino médio como:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}, \quad q \neq 1.$$

Demonstração:

$$S_n = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \dots + a_1 \cdot q^{n-1} \quad (17)$$

Multiplicando ambos lados por  $q$  obtemos:

$$S_n \cdot q = a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + \dots + a_1 \cdot q^n \quad (18)$$

Subtraindo 17 de 18 temos:

$$\begin{aligned} S_n \cdot q - S_n &= a_n \cdot q^n - a_1 \\ &= S_n(q - 1) = a_1 \cdot (q^n - 1) \\ S_n &= \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}. \end{aligned}$$

Para  $|q| < 1$ , a soma dos  $n$  primeiros termos tem um limite finito quando  $n \rightarrow \infty$ . Veja que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0, \text{ pois } |q| < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_1 \cdot (0 - 1)}{q - 1}, \text{ isto é:}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q}$$

Ainda se  $|q| \geq 1$ ,  $S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$  e  $n \rightarrow \infty$  essa soma representa uma PG divergente.

**Exemplo 4.7.** *Guilherme comprou um automóvel em 24 prestações iguais, sendo a primeira paga um mês após a compra, cujo preço à vista era de R\$ 24000,00. Se os juros são de 2% ao mês, determine o valor das prestações.*

Analisando o problema, temos:

$$24000 = \frac{P}{1,02} + \frac{P}{1,02^2} + \frac{P}{1,02^3} + \dots + \frac{P}{1,02^{24}}.$$

No segundo termo da equação tem-se um progressão geométrica de primeiro termo:

$$a_1 = \frac{P}{1,02} \text{ e razão } q = \frac{1}{1,02}.$$

Aplicando o modelo matemático,  $S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$ , apresentado acima, obtemos:

$$24000 = \frac{\left(\frac{P}{1,02}\right) \cdot \left(\left(\frac{1}{1,02}\right)^{24} - 1\right)}{\frac{1}{1,02} - 1}$$

$$24000 = P \cdot \left(\frac{1 - 1,02^{24}}{1,02^{24} \cdot (1 - 1,02)}\right)$$

$$P = \frac{24000}{18,75} = 1298,91$$

Portanto utilizando a soma dos termos de uma progressão geométrica, concluímos que o valor da parcela seria de aproximadamente R\$ 1298,91.

Com uma calculadora científica, podemos fazer algumas simulações. Na tabela é apresentada a obtenção de forma intuitiva do limite da parcela para o caso apresentado no exemplo 4.7.

Número de parcelas	Valor da parcela (R\$)
60	690,43
120	529,15
180	493,99
360	480,39
720	480

**Tabela 10: Exemplo 4.7 - Aplicações de Progressão Geométrica**

Esse tipo de situação foi apresentado em sala aula. Em algumas atividades obtivemos intuitivamente um limite para as parcelas, o que levou os alunos a utilizar simuladores de financiamentos imobiliários e chegar a algumas conclusões interessantes.

Isto pode ser verificado ao aplicar o limite quando  $n \rightarrow \infty$  na sequência das somas parciais.

$$\text{Como } |q| < 1 \text{ então } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q}$$

Segue que:

$$\begin{aligned} & \frac{P}{1,02} + \frac{P}{1,02^2} + \frac{P}{1,02^3} + \dots \\ &= P \cdot \left( \frac{1}{1,02} + \frac{1}{1,02^2} + \frac{1}{1,02^3} + \dots \right) \\ &= P \cdot \left( \frac{\frac{1}{1,02}}{1 - \frac{1}{1,02}} \right) \\ &= P \cdot \left( \frac{\frac{1}{1,02}}{\frac{1,02 - 1}{1,02}} \right) \\ &= P \cdot \left( \frac{1}{0,02} \right) = 50P \end{aligned}$$

Seja  $P_v$  o pagamento à vista, escrevemos:

$$\begin{aligned} P_v &= \frac{P}{1,02} + \frac{P}{1,02^2} + \frac{P}{1,02^3} + \dots \\ &= P \cdot \left( \frac{1}{1,02} + \frac{1}{1,02^2} + \frac{1}{1,02^3} + \dots \right) \\ P_v &= 50P \\ 24000 &= 50P \\ P &= R\$ 480,00 \end{aligned}$$

Dessa forma no estudo de Progressão Geométrica pode-se explorar conceitos de matemática financeira, trabalhando com assuntos cotidianos, criando o que chamamos de percepção financeira, permitindo ao aluno questionamentos sobre os principais meios de financiamento do mercado financeiro, de forma a exercer o seu papel de cidadão, não aceitando absurdos impostos pelas empresas.

**Exemplo 4.8.** (AV1 - Profmat- 2011-MA12) Um comerciante, para quem o dinheiro vale 5% ao mês, oferece determinado produto por 3 prestações mensais iguais a R\$ 100,00, a primeira paga no ato da compra. Que valor o comerciante deve cobrar por esse produto, no caso de pagamento à vista?

Sabemos que os valores das parcelas são fixas, portanto devemos trazer os valores para o presente, uma vez que a cada parcela está incorporado juros. A primeira parcela é paga no ato da compra e assim não incide juros sobre esta. Para o pagamento à vista temos:

$$P_v = 100 + \frac{100}{1,05} + \frac{100}{1,05^2} = 100 + 95,24 + 90,70 = 285,94.$$

Assim para o pagamento à vista o comerciante deverá cobrar R\$ 285,94.

**Exemplo 4.9.** Jane tomou um empréstimo de R\$ 2000,00 onde irá pagar 12 prestações mensais iguais. Se são cobrados juros de 2% ao mês sobre o saldo devedor, determine o valor de cada prestação se a 1ª é paga:

- (a) No ato da compra.
- (b) Um mês após a compra.
- (c) Cinco meses após a compra.

Resolução: Essa situação pode ser resolvida utilizando progressão geométrica, bem



objetiva, sem grandes complicações.

(a) *Pagamento no ato da compra, o juros passam a ser contabilizados a partir da segunda parcela.*

$$\begin{aligned} 2000 &= P + \frac{P}{1,02} + \frac{P}{1,02^2} + \frac{P}{1,02^3} + \dots + \frac{P}{1,02^{11}} \\ &= P \cdot \left( 1 + \frac{1}{1,02} + \frac{1}{1,02^2} + \frac{1}{1,02^3} + \dots + \frac{1}{1,02^{11}} \right) \end{aligned}$$

Veja que:

$$1 + \frac{1}{1,02} + \frac{1}{1,02^2} + \frac{1}{1,02^3} + \dots + \frac{1}{1,02^{11}}.$$

Representa a soma de termos de uma progressão geométrica de primeiro termo 1 e razão  $\frac{1}{1,02}$ . Portanto:

$$\begin{aligned} S_{12} &= \frac{\left[ \left( \frac{1}{1,02} \right)^{12} - 1 \right]}{\frac{1}{1,02} - 1} = \frac{1,02^{-12} - 1}{1,02^{-1} - 1} \\ &= \frac{0,212}{0,02} = 10,6 \\ \Rightarrow 2000 &= P \cdot (10,6) \end{aligned}$$

$$P = 188,67$$

O valor de cada prestação sendo a primeira paga no ato da compra é de R\$ 188,67.

(b) *Primeira parcela, um mês após a compra:*

$$\begin{aligned} 2000 &= \frac{P}{1,02} + \frac{P}{1,02^2} + \frac{P}{1,02^3} + \dots + \frac{P}{1,02^{12}} \\ &= P \cdot \left( \frac{1}{1,02} + \frac{1}{1,02^2} + \frac{1}{1,02^3} + \dots + \frac{1}{1,02^{12}} \right) \end{aligned}$$

Veja que:

$$\frac{1}{1,02} + \frac{1}{1,02^2} + \frac{1}{1,02^3} + \dots + \frac{1}{1,02^{12}}.$$

Representa a soma de termos de uma progressão geométrica de primeiro termo  $\frac{1}{1,02}$  e razão  $\frac{1}{1,02}$ . Portanto:

$$\begin{aligned} S_{12} &= \frac{1}{1,02} \cdot \left( \frac{\left[ \left( \frac{1}{1,02} \right)^{12} - 1 \right]}{\frac{1}{1,02} - 1} \right) = \left( \frac{1}{1,02} \right) \cdot \left( \frac{1,02^{-12} - 1}{1,02^{-1} - 1} \right) \\ &= (0,98) \cdot \left( \frac{0,212}{0,02} \right) = 10,39216 \\ &\Rightarrow 2000 = P \cdot (10,39216) \\ P &= 192,45. \end{aligned}$$

O valor da prestação, sendo a primeira paga um mês após a compra é de R\$ 192,45.

(c) Primeira parcela paga 5 meses após a compra.

$$\begin{aligned} 2000 &= \frac{P}{1,02^5} + \frac{P}{1,02^6} + \frac{P}{1,02^7} + \dots + \frac{P}{1,02^{16}} \\ &= P \cdot \left( \frac{1}{1,02^5} + \frac{1}{1,02^6} + \frac{1}{1,02^7} + \dots + \frac{1}{1,02^{16}} \right) \end{aligned}$$

Veja que:

$$\frac{1}{1,02^5} + \frac{1}{1,02^6} + \frac{1}{1,02^7} + \dots + \frac{1}{1,02^{16}}.$$

Representa a soma de termos de uma progressão geométrica de primeiro termo  $\frac{1}{1,02^5}$  e razão  $\frac{1}{1,02}$ . Portanto:

$$\begin{aligned} S_{12} &= \frac{1}{1,02^5} \cdot \left( \frac{\left[ \left( \frac{1}{1,02} \right)^{12} - 1 \right]}{\frac{1}{1,02} - 1} \right) = \frac{1}{1,02^5} \cdot \left( \frac{1,02^{-12} - 1}{1,02^{-1} - 1} \right) \\ &= 0,9057 \cdot \left( \frac{0,212}{0,02} \right) = 9,6 \\ &\Rightarrow 2000 = P \cdot (9,6) \\ P &= 208,31. \end{aligned}$$

O valor da prestação, sendo a primeira paga cinco meses após a compra é de R\$ 208,31.

## 4.2 APLICAÇÕES DE PROGRESSÃO ARITMÉTICA EM MATEMÁTICA FINANCEIRA

Nesta secção estaremos sugerindo algumas aplicações de progressão aritmética em matemática financeira que podem ser desenvolvidas com alunos de ensino médio.

Os exemplos que seguem serão resolvidos com aplicações de PA.

**Exemplo 4.10.** *Madalena financiou sua casa em 100 prestações mensais à uma taxa de 1,5% a.m. Sabendo que o valor do imóvel era de R\$ 100000,00 e o sistema escolhido por Madalena foi o de Amortização constante, determine:*

(a) *O valor da amortização.*

(b) *O valor da primeira parcela.*

(c) *O Valor da décima quinta parcela.*

(d) *O valor da última parcela.*

(e) *Hipóticamente, qual o valor da amortização para 200, 400, 600, 1000 parcelas? O que podemos concluir sobre o aumento indefinido no número de parcelas?*

Resolução:

(a) Como o valor da amortização é constante, devemos dividir o valor financiado pelo número de parcelas.

$$A = \left( \frac{100000}{100} \right) = 1000$$

Portanto as amortizações seriam de R\$ 1000,00.

(b) Inicialmente devemos calcular juro 1,5% incidente sobre os R\$ 100000,00.

$$J = 0,015 \cdot 100000 = 1500.$$

A primeira parcela é constituída de uma amortização adicionada aos juros de R\$ 1500, então:

$$P = 1000 + 1500 = 2500.$$

Portanto o valor da primeira parcela seria de R\$ 2500,00.

(c) Veja que a segunda parcela é constituída de juro de 1,5% incidente sobre R\$ 99000,00 adicionado ao valor da amortização, a terceira parcela de juros de 1,5% incidente sobre R\$ 98000,00

adicionado ao valor da amortização e assim por diante. Dessa forma temos:

$$\begin{aligned} P_1 &= R\$ 2500,00 \\ P_2 &= 0,015.99000 + 1000 = R\$ 2485,00 \\ P_3 &= 0,015.98000 + 1000 = R\$ 2470,00 \end{aligned}$$

onde  $P_1$  é a primeira parcela,  $P_2$  a segunda parcela e  $P_3$  a terceira parcela.

Veja que  $R\$ 2500,00$ ,  $R\$ 2485,00$ ,  $R\$ 2470,00$  são termos de uma progressão aritmética decrescente de razão  $R\$ 15,00$ , dessa forma podemos concluir que os valores das parcelas constituem uma progressão aritmética decrescente como demonstrado no capítulo II.

Segue que:

$$a_n = a_1 + (n - 1).r$$

$$P_{15} = 2500 - (15 - 1).15 = 2500 - 14.15 = 2500 - 210 = R\$ 2290,00.$$

(d) Sabendo que as parcelas formam uma progressão aritmética, temos que:

$$P_{100} = 2500 - 99.15 = 2500 - 1485 = 1015$$

Portanto o valor da centésima parcela é de  $R\$ 1015,00$ .

(e) Obtemos para:

$$A_{200} = \frac{100000}{200} = R\$ 500,00.$$

$$A_{400} = \frac{100000}{400} = R\$ 250,00.$$

$$A_{600} = \frac{100000}{600} = R\$ 166,66.$$

$$A_{1000} = \frac{100000}{1000} = R\$ 100,00.$$

Podemos concluir que ao aumentar indefinidamente o número de parcelas a amortização tende a zero, cabendo à pessoa hipoteticamente que financia pagar somente juros.

#### 4.3 O NÚMERO DE EULER E SUAS APLICAÇÕES NA MATEMÁTICA FINANCEIRA

De acordo com (ÁVILA, 2006), o número de Euler  $e$  surgiu na matemática pela primeira vez no início do século XVIII, na consideração de um problema de juros compostos com capitalização em períodos tendendo a zero e é definido como  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$ . Vamos analisar algumas situações para o estudo desse limite.

Em um regime de capitalização contínua composta, podemos fazer a capitalização a

cada instante sendo definido como a menor medida de tempo possível.

**Exemplo 4.11.** *Determine as taxas efetivas anuais equivalentes a :*

a) 48 % ao ano, com capitalização semestral.

b) 48% ao ano, com capitalização trimestral.

c) 48 % ao ano, com capitalização mensal.

d) 48% ao ano, com capitalização diária.

e) 48% ao ano, com capitalização a cada hora.

f)  $i$  % ao ano, capitalizados  $n$  vezes ao ano.

a) A taxa de juros é capitalizada semestralmente, temos  $\frac{48}{2} = 24\%$  ao semestre. Seja  $I$  a taxa de juros efetiva, assim, temos:

$1 + I = \left(1 + \frac{0,48}{2}\right)^2 \Rightarrow I = (1,24)^2 - 1 = 53,76\%$ . Portanto a taxa de juros efetiva anual capitalizada semestralmente é de 53,76%.

b) A taxa de juros capitalizada trimestralmente, temos  $\frac{48}{4} = 12\%$  ao trimestre, segue que:

$1 + I = \left(1 + \frac{0,48}{4}\right)^4 \Rightarrow I = (1,12)^4 - 1 \cong 0,573$ . Portanto a taxa de juros efetiva anual capitalizada semestralmente é de aproximadamente 57,3%.

c) A taxa de juros são capitalizadas mensalmente, então a taxa é de  $\frac{48}{12} = 4\%$  ao mês.

$1 + I = \left(1 + \frac{0,48}{12}\right)^{12} \Rightarrow I = (1,04)^{12} - 1 \cong 0,6$ . Portanto a taxa de juros efetiva é de aproximadamente 60% ao ano.

d) A taxa de juros são capitalizadas diariamente, temos  $\frac{48}{365} \cong 0,13\%$  ao dia, segue que:

$1 + I = \left(1 + \frac{0,48}{365}\right)^{365} \Rightarrow I = (1,001315)^{365} - 1 \cong 0,6155$ . Portanto a taxa de juros efetiva é de aproximadamente 61,55% ao ano.

e) A taxa de juros capitalizada a cada hora, temos  $\frac{48}{8760} \cong 0,00547\%$  a cada hora. Segue que:

$1 + I = \left(1 + \frac{0,48}{8760}\right)^{8760} \Rightarrow I = (1,000547)^{8760} - 1 \cong 0,6160$ . Portanto a taxa de juros efetiva é de aproximadamente 61,6% ao ano.

Intuitivamente percebemos que a taxa efetiva anual tem um limite que é de aproximadamente 61,7%.

No ensino médio com o auxílio de uma planilha eletrônica podemos mostrar intuitivamente a ideia de limite e conceitos de matemática financeira.

f) Se uma taxa  $i$  é capitalizada  $n$  vezes ao ano, temos:

$$1 + I = \left(1 + \frac{i}{n}\right)^n \Rightarrow I = \left(1 + \frac{i}{n}\right)^n - 1$$

Algumas ideias intuitivas de limites podem ser abordadas no ensino médio, ficando demonstrações formais para o Ensino Superior. O professor de matemática deve conhecer o significado daquilo que se ensina, portanto estaremos fazendo algumas demonstrações envolvendo capitalização contínua composta, tais demonstrações foram adaptadas de (ÁVILA, 2006) e (GUIDORIZZI, 2011).

Consideremos a sequência  $\{a_n\}$ , com  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ . Iremos mostrar que esta sequência é monótona e limitada. Para  $n = 1$ , temos  $a_n = 2$ . Para  $n > 1$ , pela fórmula do binômio de Newton temos:

$$\begin{aligned} a_n &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} \cdot \frac{1}{n} + \binom{n}{2} \cdot \frac{1}{n^2} + \binom{n}{3} \cdot \frac{1}{n^3} + \dots + \binom{n}{n} \cdot \frac{1}{n^n} \\ &= \sum_{a=0}^n \binom{n}{a} \cdot \left(\frac{1}{n^a}\right) \\ &= 1 + \sum_{a=1}^n \left[ \frac{n!}{(n-a)! \cdot a!} \right] \cdot \frac{1}{n^a} \\ &= 1 + \sum_{a=1}^n \frac{1}{a!} \cdot \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot [n-(a-1)]}{n^a} \\ &= 1 + \sum_{a=1}^n \frac{1}{a!} \cdot \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot [n-(a-1)]}{n \cdot n \cdot n \cdot (\dots) \cdot n} \\ a_n &= 1 + \sum_{a=1}^n \frac{1}{a!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{3}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{(a-1)}{n}\right) \end{aligned} \quad (19)$$

Para  $n + 1$ , obtemos:

$$a_{n+1} = 1 + \sum_{a=1}^{n+1} \frac{1}{a!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdot \left(1 - \frac{3}{n+1}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{(a-1)}{n+1}\right) \quad (20)$$

Sendo  $n \in \mathbb{N}^*$ , resulta em:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{n}\right) &< \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \\ \left(1 - \frac{2}{n}\right) &< \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \\ \left(1 - \frac{3}{n}\right) &< \left(1 - \frac{3}{n+1}\right) \\ &\dots \\ \left(1 - \frac{(a-1)}{n}\right) &< \left(1 - \frac{(a-1)}{n+1}\right) \end{aligned}$$

Multiplicando ambos os lados das desigualdades obtemos:

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{(a-1)}{n}\right) < \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{(a-1)}{n+1}\right)$$

Segue que:

$a_n < a_{n+1}$ , temos então que  $\{a_n\}$  é uma sequência crescente. O próximo passo consiste em mostrar que ela é limitada.

Como:

$$a_n = 1 + \sum_{a=1}^n \frac{1}{a!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{3}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{(a-1)}{n}\right),$$

observe que cada expressão entre parênteses que aparece no somatório é menor do que 1, isso implica em:

$$a_n < 1 + \sum_{a=1}^n \frac{1}{a!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}. \quad (21)$$

e ainda:

$$1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

pois,

$$\begin{aligned} \frac{1}{3!} &< \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4!} &< \frac{1}{8} \\ \frac{1}{5!} &< \frac{1}{16} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (\dots) \\ & \frac{1}{n!} < \frac{1}{2^{n-1}} \end{aligned}$$

Segue que:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} < \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}$$

Utilizando a soma dos termos de uma Progressão geométrica com,  $0 < q < 1$ , para  $n$  tendendo ao infinito, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} &= \frac{1/2}{1-1/2} \\ \Rightarrow a_n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} &< 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} < 2 + 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a_n < 3 \quad (22)$$

Como:

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{a=0}^n \binom{n}{a} \cdot \frac{1}{n^a} \\ &= 2 + \sum_{a=2}^n \frac{1}{a!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{3}{n}\right) \cdot (\dots) \cdot \left(1 - \frac{(a-1)}{n}\right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a_n > 2 \quad (23)$$

De (22) e (23), obtemos,  $2 \leq a_n < 3, \forall n \in \mathbb{N}^*$ , portanto  $\{a_n\}$  está compreendido entre 2 e 3, o que mostra que a sequência é limitada.

Dessa forma podemos afirmar que  $\{a_n\}$  possui limite.

Provamos que a sequência  $\{a_n\}$  é convergente. Definiremos, então, o número  $e$  como o limite dessa sequência. Vamos provar que:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$



Seja  $x \in \mathbb{R}$ , com  $x > 1$ . Assim, existe  $n \in \mathbb{N}^*$  tal que:

$$n \leq x < n+1 \Rightarrow \frac{1}{n} \geq \frac{1}{x} > \frac{1}{n+1},$$

acrescentando 1 em cada membro da desigualdade, obtemos:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{n} &\geq 1 + \frac{1}{x} > 1 + \frac{1}{n+1} \\ \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} &> \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x > \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n \\ \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) &\geq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x > \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{-1} \end{aligned}$$

Veja que:

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= e \cdot 1 = e. \end{aligned}$$

Da mesma forma:

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{-1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{-1} \\ &= e \cdot 1 = e. \end{aligned}$$

Portanto pelo Teorema do confronto<sup>1</sup>, concluímos que:

<sup>1</sup>Sejam  $f(x)$ ,  $g(x)$  e  $h(x)$  funções reais definidas num domínio  $D \subseteq \mathbb{R}$  e seja  $a$  um ponto desse domínio, tais que:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) &= \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L \\ f(x) &\leq g(x) \leq h(x) \\ \lim_{x \rightarrow a} g(x) &= L \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Voltando ao exemplo 4.11, item  $f$ , concluímos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I = e^i - 1.$$

Na maioria dos livros de ensino médio, no que diz respeito a juros compostos, é apresentada a seguinte fórmula  $M = M_o \cdot (1 + i)^n$  para o cálculo de juros compostos. No entanto iremos aprofundar esse conceito apresentando uma fórmula para o cálculo de juros compostos capitalizados continuamente.

Vejam a seguinte situação: Um capital  $M_o$  é aplicado  $k$  vezes ao ano, ou seja, para cada período de conversão a taxa de juros anual é dividida por  $k$  e em  $t$  anos existem  $k \cdot t$  períodos de conversão, para isso, temos:

$$M = M_o \cdot \left(1 + \frac{i}{k}\right)^{k \cdot n}, \text{ fazendo } \frac{i}{k} = \frac{1}{x}, \text{ obtemos:}$$

$M = M_o \cdot \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right]^{i \cdot n}$ , como  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$  concluímos que o montante capitalizados continuamente é dado pela expressão:

$$M = M_o \cdot e^{i \cdot n}. \quad (24)$$

Portanto se a taxa de juros for de 100% num período de tempo de uma unidade, o montante será  $e$  vezes a quantia inicial.

Vamos fazer a análise de algumas aplicações.

**Exemplo 4.12.** *Um investidor aplica uma quantia de R\$ 100000,00 a uma taxa de 10% ao ano. Calcule o valor do capital investido ao final do primeiro ano, supondo que:*

- a) Os juros sejam incorporados ao capital apenas no final de cada ano.*
- b) Os juros sejam distribuídos uniformemente, sendo incorporados ao capital ao final de cada mês.*
- c) Os juros sejam incorporados continuamente ao capital ao longo do ano.*

a) Se os juros são incorporados ao capital apenas no final de cada ano temos:

$$M = 100000 \cdot 1,1 = \text{R\$ } 110000,00$$

b) Se os juros são distribuídos uniformemente, obtemos:

Ao final do 1° mês.

$$M = 100000 \cdot \left(1 + \frac{0,1}{12}\right) \cong R\$ 100833,33$$

Ao final do 2° mês.

$$M = 100000 \cdot \left(1 + \frac{0,1}{12}\right)^2 \cong R\$ 101673,61$$

Ao final do 3° mês.

$$M = 100000 \cdot \left(1 + \frac{0,1}{12}\right)^3 \cong R\$ 102520,89$$

Segue de forma análoga até o 12° mês.

$$M = 100000 \cdot \left(1 + \frac{0,1}{12}\right)^{12} \cong R\$ 110471,30$$

c) Se os juros são incorporados continuamente, obtemos:

$$M = 100000 \cdot e^{0,1} = R\$ 110517,09$$

Os juros capitalizados continuamente apresenta um montante maior do que os juros distribuídos uniformemente.

**Exemplo 4.13.** Um investidor aplica uma quantia  $M_0$  a uma taxa de juros de 10% ao ano. Calcule depois de quanto tempo o capital investido dobrará de valor, supondo que:

- os juros sejam incorporados ao capital apenas ao final de cada ano.
- os juros sejam incorporados ao capital ao final de cada mês.
- os juros sejam incorporados continuamente ao capital.

a) Para os juros incorporados ao capital apenas no final de cada ano escrevemos:

$$M(n) = 2 \cdot M_0$$

$$M_0 \cdot (1,1)^n = 2 \cdot M_0$$

$$(1,1)^n = 2 \Rightarrow$$

$$n = \frac{\ln(2)}{\ln(1,1)} \cong 7,27$$

b) Ao final de cada mês:

$$M_o \cdot \left(1 + \frac{10\%}{12}\right)^n = 2 \cdot M_o$$

$$\left(1 + \frac{10\%}{12}\right)^n = 2 \Rightarrow$$

$$n = \frac{\ln(2)}{\ln\left(1 + \frac{10\%}{12}\right)}$$

$$\cong 83,52 \text{ meses} \cong 6,96$$

c) Continuamente ao capital:

$$M_o \cdot e^{0,1n} = 2 \cdot M_o$$

$$e^{0,1n} = 2 \Rightarrow$$

$$0,1 \cdot n = \ln(2)$$

$$n = \frac{\ln(2)}{0,1} \cong 6,93.$$

Apresentamos nesse capítulo sugestões que poderão ser utilizadas no ensino médio, algumas foram aplicadas em sala de aula como consta no capítulo anterior, porém o objetivo do capítulo é mostrar aplicações de funções e sequências numéricas no estudo da matemática financeira, não descartando a possibilidade de um estudo mais aprofundado de logaritmos.

Muitos professores de ensino médio ao fazer cursos de pós-graduação questionam o estudo de Cálculo Diferencial e Integral, justificando a falta de aplicação desses conceitos na Educação Básica. Por muitas vezes somos indagados por colegas de trabalho sobre aplicações de Limites, Derivadas, Integrais, etc, no ensino médio. Inúmeros conceitos da Educação Básica são justificados significativamente com o auxílio dessa ferramenta chamada Cálculo.

Neste trabalho não sugerimos estudos aprofundados de limites mas mostrar que é possível apresentar ideias intuitivas com o auxílio da tecnologia.

## 5 ANÁLISE DA PESQUISA

Neste capítulo faremos análise de uma pesquisa adaptada de (LUCCI et al., 2006), realizada com 120 pessoas do município de Registro-SP. Buscou-se detectar as habilidades em reconhecer conceitos de finanças, bem como atitudes em relação ao risco e ao consumo. Os dados apresentados são qualitativos. Analisamos as escolhas dos entrevistados fazendo comentários das alternativas propostas em cada questão.

Essa pesquisa abordou características diferenciadas de indivíduos como idade, escolaridade e estado civil, com a intenção de estudar diferentes grupos sociais. Utilizamos um questionário com perguntas fechadas, segundo (RICHARDSON, 1985), pesquisas fechadas são aquelas em que perguntas ou afirmações apresentam categorias ou alternativas de respostas fixas e preestabelecidas.

Alunos da 3º Série do Ensino Médio da escola Estadual de São Paulo, Pascoal Grecco foram responsáveis pelas entrevistas e tabulação dos dados. Após a tabulação faz-se a discussão, verificando que as opiniões dos alunos se assemelham aos resultados obtidos, evidenciando a necessidade de um trabalho de conceitos de finanças em discussões futuras. As imagens a seguir mostram a participação dos alunos nas atividades.



**Figura 7: Alunos participando da tabulação da pesquisa**

Nas três questões iniciais verificou-se dados como escolaridade, idade e estado civil. Nas questões 4 e 5, avaliamos a percepção dos entrevistados quanto aos juros embutidos em

financiamentos a longo prazo e na questão 6 é feito uma análise de como as pessoas se sentem a respeito de seus conhecimentos financeiros. Na questão 7 discute-se a importância de um planejamento financeiro, nas questões 8 e 9 são feitas análises de propostas apresentadas por operadoras de cartões de crédito e nas questões 10 a 16 apresentamos conceitos de tabelas de financiamento.

Segue abaixo o resultado e análise dos dados apresentados, para todas as situações propostas serão consideradas a primeira parcela um mês após a compra.

1. Idade:

- (a) Entre 15 e 18 anos
- (b) Entre 18 a 25 anos.
- (c) Mais de 25 anos

a	b	c
38%	20%	42%

**Tabela 11: Pesquisa - Questão 1**

2. Nível de escolaridade

- (a) Ensino Fundamental
- (b) Ensino Médio
- (c) Ensino Superior

a	b	c
22%	60%	18%

**Tabela 12: Pesquisa - Questão 2**

3. Estado civil

- (a) Solteiro
- (b) Separado
- (c) Casado
- (d) Outros

a	b	c	d
51%	1%	30%	18%

**Tabela 13: Pesquisa - Questão 3**

Verifica-se que maioria das pessoas entrevistadas estão entre 15 e 25 anos com ensino médio sendo solteiras ou casadas.

4. O que é mais vantajoso em um financiamento?

- (a) 60 parcelas fixas de 200 reais.
- (b) 120 parcelas fixas de 100 reais.
- (c) As alternativas A e B são equivalentes

a	b	c
38%	18%	44%

**Tabela 14: Pesquisa - Questão 4**

Analisando intuitivamente as alternativas, quanto ao item (a), 60 parcelas fixas de 200 reais, teríamos um montante final de R\$ 12000,00, quanto ao item b, o montante final se equivalem, porém as alternativas não citam taxas de juros, e nem valor do dinheiro, mas sabemos que o dinheiro possui valor, portanto para aquelas pessoas que optaram pela alternativa (b) para pagar o mesmo montante ficariam por um tempo maior com o dinheiro em mãos, dessa forma poderiam fazer aplicações que lhes dessem rentabilidade. Aplicando o modelo matemático discutido anteriormente, e utilizando uma situação fictícia onde o empréstimo seja de R\$ 8000,00 e a primeira parcela seja paga um mês após a compra, tem-se:

$$P_v = P \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

Utilizando o modelo matemático para o item (a) e um valor hipotético de 8000 reais para o preço à vista, temos:

$$\begin{aligned} 8000 &= 200 \frac{1 - (1+i)^{-60}}{i} \\ 40 &= \frac{1 - (1+i)^{-60}}{i} \\ \Rightarrow \frac{\ln(1 - 40i)}{\ln(1+i)} &= -60 \\ \Rightarrow i &= 1,45\% \end{aligned}$$

Da mesma forma para o item (b), temos:

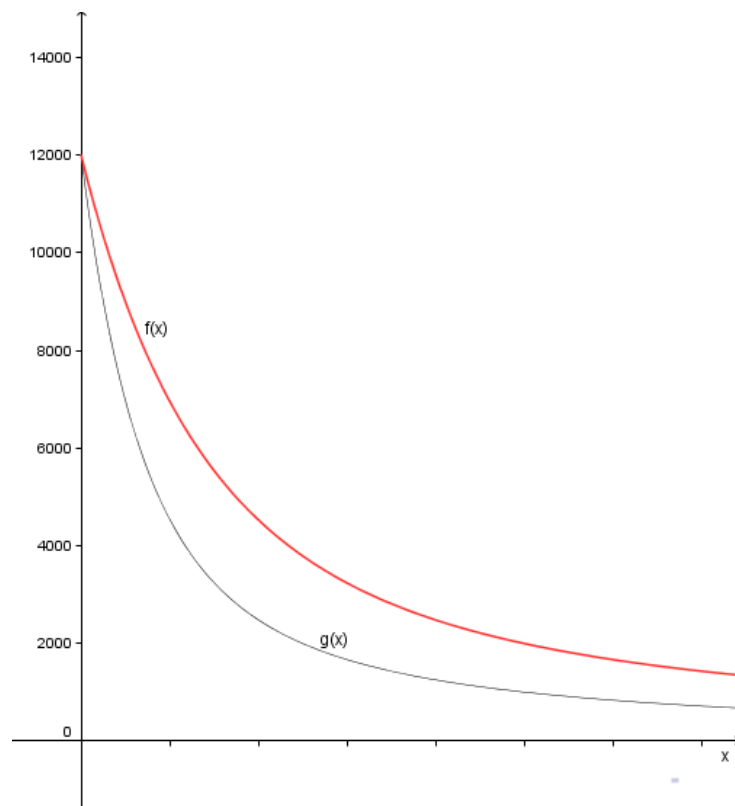
$$\begin{aligned}
 8000 &= 100 \frac{1 - (1+i)^{-120}}{i} \\
 80 &= \frac{1 - (1+i)^{-120}}{i} \\
 \Rightarrow \frac{\ln(1 - 80i)}{\ln(1+i)} &= -120 \\
 \Rightarrow i &= 0,74\%
 \end{aligned}$$

Analisando uma situação onde o valor inicial seja  $x$  e maior do que a parcela, podemos fazer uma análise significativa sobre o financiamento apresentado.

Definindo os preços à vista através das funções:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 200 \frac{1 - (1+x)^{-60}}{x} \\
 g(x) &= 100 \frac{1 - (1+x)^{-120}}{x}
 \end{aligned}$$

Onde  $f(x)$  representa o preço à vista para a situação (a) e  $g(x)$  o preço à vista para a situação (b) e  $x$  maior do que 0, fazamos uma análise gráfica de  $f$  e  $g$ .



**Figura 8: Análise gráfica que questão 4 - pesquisa**

Ao fazer análise dos gráficos de  $f$  e  $g$  ambas funções com tratamento contínuo com domínio em  $\mathbb{R}^+$ , vemos que a função  $f$  é sempre maior que  $g$ , assim, podemos concluir através



da ideia de função inversa que o juro aplicado em  $f$  é maior que o juro aplicado em  $g$ . Portanto o mais vantajoso seria 120 parcelas fixas de 100 reais.

5. Marcos financiou R\$ 10000,00 em 30 parcelas fixas de 500 reais. Se ele quisesse financiar o mesmo valor em 15 parcelas, quanto pagaria pelo valor da parcela?

- (a) Parcelas de R\$ 1000,00.
- (b) Parcelas com valores superiores a R\$ 1000,00.
- (c) Parcelas com valores inferiores a R\$ 1000,00.

a	b	c
49%	28%	23%

**Tabela 15: Pesquisa - Questão 5**

Na situação (a) se Marcos financiou R\$ 10000,00 em 30 parcelas de R\$ 500,00, tem-se:

$$\begin{aligned}
 10000 &= 500 \frac{1 - (1+i)^{-30}}{i} \\
 &= 20 = \frac{1 - (1+i)^{-30}}{i} \\
 \Rightarrow \frac{\ln(1 - 20i)}{\ln(1+i)} &= -30 \\
 \Rightarrow i &= 2,85\%.
 \end{aligned}$$

A taxa de juros é de 2,85%.

Para analisar (b) e (c) Analisando os valores para 15 parcelas e mesma taxa de juros, obtemos:

$$\begin{aligned}
 10000 &= P \frac{1 - (1 + 0,0285)^{-15}}{0,0285} \\
 &= 285 = P \cdot [1 - (1,0285)^{-15}] \\
 \Rightarrow P &\cong R\$ 828,00
 \end{aligned}$$

Portanto concluímos que as parcelas são inferiores a R\$ 1000,00.

6. Como você se sente a respeito de seus conhecimentos em relação ao gerenciamento de seu próprio dinheiro?

- (a) Nada seguro. Eu gostaria de possuir um nível muito melhor de educação financeira
- (b) Não muito seguro. Eu gostaria de saber um pouco mais sobre finanças
- (c) Razoavelmente seguro. Eu conheço a maioria das coisas que eu precisaria saber sobre o assunto

(d) Muito seguro. Eu possuo conhecimentos bastante amplos sobre finanças.

a	b	c	d
29%	44%	20%	7%

**Tabela 16: Pesquisa - Questão 6**

7. Ronaldo e Daniela têm a mesma idade. Aos 25 anos, ela começou a aplicar R\$ 1000,00 por ano, enquanto o Ronaldo não guardava nada. Aos 50 anos, Ronaldo percebeu que precisava de dinheiro para sua aposentadoria e começou a aplicar R\$ 2000,00 por ano, enquanto Daniela continuou poupando seus R\$ 1000,00. Agora eles têm 75 anos. Quem tem mais dinheiro para sua aposentadoria, se ambos fizeram o mesmo tipo de investimento?

- (a) Eles teriam o mesmo valor, já que na prática guardaram as mesmas somas
- (b) Ronaldo, porque poupou mais a cada ano
- (c) Daniela, porque seu dinheiro rendeu por mais tempo a juros compostos.

a	b	c
35%	11%	54%

**Tabela 17: Pesquisa - Questão 7**

Para uma aplicação de R\$ 1000,00 durante 25 anos (300 meses), temos:

$$\begin{aligned}
 M_0 &= 1000 \\
 M_1 &= M_0 \cdot (1 + i_1) + M_0 \\
 M_2 &= M_1 \cdot (1 + i_2) + M_0 \\
 &\dots \\
 M_{300} &= M_{299} \cdot (1 + i_{300}) + M_0 \\
 &\dots \\
 M_n &= M_{n-1} \cdot (1 + i_n) + M_0
 \end{aligned}$$

Onde  $i_1, i_2, i_3, \dots, i_n$ , são as taxas referentes aos respectivos meses.

Generalizando.

Fixando  $i$ , temos:

Sendo a aplicação inicial  $M_0$  e constante, então:

$$M_1 = M_0 \cdot (1 + i) + M_0$$

$$M_2 = M_1 \cdot (1 + i) + M_o$$

$$M_3 = M_2 \cdot (1 + i) + M_o$$

...

$$M_n = M_{(n-1)} \cdot (1 + i) + M_o$$

Segue que:

$$M_2 = [M_o \cdot (1 + i) + M_o] \cdot (1 + i) + M_o = M_o \cdot (1 + i)^2 + M_o \cdot (1 + i) + M_o$$

$$M_3 = M_2 \cdot (1 + i) + M_o = M_o \cdot (1 + i)^3 + M_o \cdot (1 + i)^2 + M_o \cdot (1 + i) + M_o$$

Obtemos através de uma recorrência:

$$M_n = M_o \cdot (1 + i)^n + M_o \cdot (1 + i)^{n-1} + M_o \cdot (1 + i)^{n-2} + \dots + M_o \cdot (1 + i) + M_o.$$

Veja que temos uma PG. Utilizando a soma de seus termos, temos:

$$\begin{aligned} M_n &= \frac{M_o \cdot [(1 + i)^n - 1]}{[(1 + i) - 1]} \\ &= \frac{M_o \cdot ((1 + i)^n - 1)}{i} \end{aligned}$$

Vamos comparar as duas situações, a de Daniela e Ronaldo. Daniela terá o seu dinheiro aplicado por 600 meses e Ronaldo, 300 meses, fixando  $i$  e  $i > 0$ , utilizando o modelo matemático apresentado acima vamos mostrar que  $m_{600} > m_{300}$ .

Seja:

$$f(i) = m_{600} - m_{300}$$

Portanto:

$$\begin{aligned} f(i) &= \frac{1000 \cdot ((1 + i)^{600} - 1)}{i} - \frac{2000 \cdot ((1 + i)^{300} - 1)}{i} \\ &= \frac{1000}{i} \cdot [(1 + i)^{600} - 1] - 2 \cdot [(1 + i)^{300} - 1] \\ &= \frac{1000}{i} \cdot [(1 + i)^{300}]^2 - 2 \cdot (1 + i)^{300} + 1 \\ &= \frac{1000}{i} \cdot [(1 + i)^{300} - 1]^2. \end{aligned}$$

Segue que:

$f(i) > 0$ , pois  $i$  foi fixado e maior do que zero.

Assim,  $m_{600} - m_{300} > 0 \Rightarrow m_{600} > m_{300}$ .

Portanto Daniela estará numa situação mais confortável durante a sua aposentadoria.

8. Qual das pessoas pagaria mais em despesas financeiras por ano se elas gastassem a mesma quantia anuais em seus cartões de crédito?

- (a) Ellen, que sempre paga todo o saldo do cartão de crédito no vencimento.
- (b) Pedro, que geralmente paga todo o saldo do cartão de crédito no vencimento, mas ocasionalmente paga só o mínimo, quando está sem dinheiro.
- (c) Luís, que paga pelo menos o mínimo todo mês e um pouco mais quando tem alguma folga.
- (d) Nanci, que sempre paga o mínimo

a	b	c	d
23%	18%	14%	45%

**Tabela 18: Pesquisa - Questão 8**

A maioria dos cartões de créditos cobram taxas abusivas, portanto pagar o mínimo mensalmente seria um absurdo. Considere uma situação em que a fatura de um cartão no valor de R\$ 2000,00 oferecesse um pagamento mínimo de R\$ 200,00, e ainda uma taxa de juros mensal de 10%, desconsiderando as demais taxas e que você não terá nenhum gasto pelos próximos meses a fatura teria um débito de R\$ 1800,00 que estaria sendo acumulada para o próximo mês, esse valor corrigido seria de R\$ 1980,00, ou seja, o valor real pago de sua dívida seria de R\$ 20,00. Como Ellen paga todo saldo no vencimento, não estaria pagando nenhum juro, Pedro que ocasionalmente paga o mínimo, nesse período pagaria juros e Luis todo mês teria um juro a pagar, que por sua vez menor que o juro de Nanci, que sempre paga o mínimo.

9. Quanto você acha que é a taxa de juros de cartões de crédito?

- (a) Não sei.
- (b) Mais de 10 %.
- (c) Menos de 10 %.

a	b	c
23%	51%	26%

**Tabela 19: Pesquisa - Questão 9**

O objetivo principal da questão é estar verificando se as pessoas fazem a leitura das

respectivas faturas dos cartões, dessa forma vemos que aproximadamente 50% dos entrevistados não tem noção das taxas cobradas nas faturas.

10. Suponhamos que João queira financiar um automóvel 0 km, que taxa de juros ele estaria pagando?

- (a) 3% ao mês
- (b) Entre 3% e 5 % ao mês.
- (c) Menos de 2% ao mês
- (d) Certamente mais de 5% ao mês

a	b	c	d
10%	23%	32%	35%

**Tabela 20: Pesquisa - Questão 10**

De acordo com as pesquisas feitas pelos alunos nas principais instituições da Cidade de Registro-SP, as taxas para financiamento de automóveis são inferiores a 2% a.m, principalmente para automóveis 0 km. Nessa situação estamos desconsiderando as demais taxas cobradas pelas instituições.

11. Marcos e Antonio são jovens que têm o mesmo salário. Ambos desejam comprar um carro no valor de R\$ 10.000,00. Quem pagou mais pelo bem?

- (a) Marcos, que comprou hoje, financiando o saldo devedor por 24 meses.
- (b) Antônio, que preferiu poupar por 15 meses, mas comprou o carro à vista.

a	b
52%	48%

**Tabela 21: Pesquisa - Questão 11**

Considere a seguinte situação hipotética.

Uma concessionária de automóveis trabalha com uma financeira que cobra uma taxa de juros de 1,8% a.m, desconsiderando as demais taxas, para um financiamento de um automóvel no valor de R\$ 10000,00. Calcule o valor da parcela sabendo que o saldo foi financiado em 24 meses.

$$10000 = P \frac{1 - (1 + 0,018)^{-24}}{0,018}$$

$$180 = P.(1 - 1,0285^{-24})$$

$$P = 516,81.$$

O valor da parcela seria de R\$ 516,81.

Supondo que Antônio faça uma aplicação de R\$ 516,81 com rendimento de 0,65% a.m, utilizando os dados da questão 7, após os 15 meses terá um saldo de aproximadamente R\$ 8115,00 terá mais de 81 % do valor do bem, enquanto Marcos terá aproximadamente 58% do valor do bem.

$$D_k = D_o \cdot \left( \frac{1 - (1+i)^{-(n-k)}}{1 - (1+i)^{-n}} \right)$$

Segue que:

$$\begin{aligned} D_{15} &= 10000 \cdot \left( \frac{1 - (1,018)^{-(24-15)}}{1 - (1,018)^{-24}} \right) \\ &= 10000 \cdot \left( \frac{1 - (1,018)^{-9}}{1 - (1,018)^{-24}} \right) \\ &= \text{R\$ } 4258,86. \end{aligned}$$

Dessa forma concluímos que Marcos pagou um valor maior pelo bem. Nesse caso desconsideramos o custo benefício.

12. Se tivesse que tomar a mesma decisão, qual a melhor alternativa na sua visão?

- (a) Ter o carro imediatamente e pagar por ele durante 24 meses, como fez Dirceu
- (b) Poupar por 24 meses para comprá-lo à vista, sem dívida, como fez Roberto
- (c) Ficar no meio termo, guardando dinheiro por 12 meses e financiando o resto em 8 prestações

a	b	c
10%	75%	14%

**Tabela 22: Pesquisa - Questão 12**

Como visto anteriormente, sempre a melhor opção é esperar um pouco e fazer o pagamento à vista, quando não se analisa o custo benefício.

13. Um automóvel é financiado a 2% a.m. No final de 10 parcelas fixas ele pagará juros de 20% (Desconsidere a inflação).

- (a) A afirmação está correta.
- (b) Não sei responder.
- (c) A afirmação esta incorreta.

a	b	c
56%	30%	14%

**Tabela 23: Pesquisa - Questão 13**

Como as parcelas são fixas e existem amortizações discutidas anteriormente no SAF as taxas de juros são inferiores a 20 %. O objetivo da questão não é o cálculo e sim a percepção financeira.

14. Ana Paula financiou uma casa em 10 anos, irá pagar parcela fixas de R\$ 800,00. Certamente se o mesmo financiamento fosse em 20 anos a parcela seria de:

- (a) 400 reais, dobrou o tempo, a parcela cai pela metade.
- (b) Menos de 400 reais.
- (c) Entre 400 e 500 reais.
- (d) Entre 500 e 600 reais.
- (e) Entre 600 e 700 reais.
- (f) Não sei responder.

a	b	c	d	e	f
39%	13%	18%	13%	15%	2%

**Tabela 24: Pesquisa - Questão 14**

Para facilitar os cálculos, considere um valor fictício de R\$ 50000,00 e uma taxa fixa, desconsidere as demais taxas.

$$\begin{aligned}
 50000 &= 800 \frac{1 - (1+i)^{-120}}{i} \\
 &= 62,5 = \frac{1 - (1+i)^{-120}}{i} \\
 \Rightarrow \frac{\ln(1 - 62,5i)}{\ln(1+i)} &= -120 \\
 \Rightarrow i &\cong 1,23\%
 \end{aligned}$$

Utilizando a mesma taxa de juros,  $i = 1,23\%$  para um prazo de 240 meses, temos:

$$\begin{aligned}
 50000 &= P \frac{1 - (1 + 0,0123)^{-240}}{0,0123} \\
 &= 615 = P \cdot (1 - 1,0285^{-15}) \\
 P &\cong R\$ 650,00
 \end{aligned}$$

Dessa forma podemos concluir que a alternativa (e) seria a correta, veja que, a maioria das pessoas ainda não compreende o significado de juros. Não tínhamos a intenção que os entrevistados apresentassem a resposta correta e sim percepção financeira sobre a questão.

15. Considere a situação hipotética: Claudia fez um financiamento em 25 anos pelo SAF (Financiamento que a maioria das instituições financeiras utiliza). Mariana resolveu fazer o mesmo financiamento em 50 anos. Sabendo que Claudia irá pagar parcelas fixas de R\$ 526,00 a taxa de juros de 1% a.m, sendo a mesma de Mariana, podemos afirmar que:

- (a) Mariana irá pagar parcelas fixas de R\$ 263,00.
- (b) Mariana irá pagar parcelas fixas de aproximadamente R\$ 500,00.
- (c) Mariana irá pagar parcelas com valores inferiores a 450 reais mais superiores a R\$ 263,00.
- (d) Não sei responder.

a	b	c	d
25%	24%	42%	9%

**Tabela 25: Pesquisa - Questão 15**

Primeiramente vamos calcular o valor do financiamento:

$$\begin{aligned}
 P_v &= P \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \\
 &= 526 \frac{1 - (1 + 0,01)^{-300}}{0,01} \\
 &= R\$ 50000,00
 \end{aligned}$$

Sabendo o valor financiado, R\$ 50000,00, podemos calcular o valor da parcela para um financiamento 600 meses (50 anos).

$$\begin{aligned}
 50000 &= P \frac{1 - (1 + 0,01)^{-600}}{0,01} \\
 500 &= P \cdot [1 - (1,01)^{-600}] \\
 P &= 501,28.
 \end{aligned}$$

Seja:

$$a_n = (1 + i)^{-n}.$$

Tem-se:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$



Segue que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [1 - a_n] = 1$$

O que mostra que o valor da parcela mínima para esse caso é de R\$ 500,00.

16. Você já ouviu falar nas tabelas SAC e PRICE?

(a) Não

(b) Sim

a	b
73%	27%

**Tabela 26: Pesquisa - Questão 16**

A maioria das pessoas não conhecem as principais tabelas do mercado.

Durante a tabulação dos dados percebe-se que a maioria das pessoas entrevistadas não possuem uma percepção financeira adequada e que agem de forma intuitiva ao tomarem decisões. Não conseguem perceber juros embutidos em transações financeiras, sendo facilmente convencidas ao consumismo.

O nosso objetivo ao analisar a pesquisa foi de orientar os nossos educandos quanto à importância de se ter uma educação financeira para que se possa tomar decisões favoráveis no exercício de sua cidadania.

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ensinar e aprender matemática necessitam de uma reflexão sobre aquilo que ensinamos. Desenvolvemos um trabalho em que foi necessária a percepção entre o domínio discreto e contínuo, houve a preocupação em mostrar o elo existente entre o mundo real, a matemática financeira, funções e sequências numéricas.

Ao citar aspectos históricos e pedagógicos, vimos que o conhecimento é construído ao longo da história e que todos são capazes de aprender, surgem novas gerações, havendo a necessidade de mudanças e intervenções devem ser construtivas, para isso o nosso meio deve ser explorado e situações reais se transformam em problemas a serem resolvidos, tendo dessa forma um aprendizado significativo, fruto de construção.

Através de grandezas discretas, definimos juros simples e compostos, procuramos relacionar com funções contínuas de domínio real, com a intenção de compreensão de dados e intuitivamente imaginar como funcionam essas situações capitalizadas continuamente. Surgem conceitos de limites que intuitivamente e com o auxílio da tecnologia são notados com facilidades, e por fim, surge o número de Euler que é apresentado em conceitos de juros contínuos capitalizados instantaneamente.

No estudo do mercado financeiro são apresentadas alguns sistemas de financiamento, entre eles, o Sistema de Amortização Francês e o Sistema de Amortização constante, conhecidos como SAF e SAC. Essas situações ao serem discutidas com os alunos, desperta a curiosidade em compreender dados. Mostramos que situações onde esses sistemas aparecem, conceitos de Progressão Aritmética e Progressão Geométrica são explorados significativamente e que demonstrações podem ser construídas e não meramente apresentadas sem contextos.

Não existe uma maneira única de ensinar e aprender. Apresentamos sugestões que acreditamos ser válidas no processo ensino aprendizagem e que devem ser adequadas a cada realidade para que se tenham significados.

Os alunos foram capazes de se expressar através de gráficos e tabelas associando conceitos de matemática financeira à funções e sequências numéricas adquirindo uma percepção

financeira significativa e que ao serem questionados, refletiam recorrendo ao auxílio tecnológico para apresentarem respostas fundamentadas, foram capazes de compreender a lógica do SAF e SAC e questionar, descobrindo fatores que interferem em financiamentos, como as demais taxas gerando discussões sobre os custos e benefícios.

Enfim, as ideias centrais dos assuntos presentes atualmente na matemática vão além daquilo que se define e demonstra e que conceitos não são independentes, estão correlacionados e que ao iniciar um estudo é necessário fundamentos e pré-requisitos, cabendo ao professor uma análise daquilo que se pretende ensinar.

## REFERÊNCIAS

- ÁVILA, G. S. d. S. **Análise matemática para licenciatura**. São Paulo-SP: Blucher, 3ª Edição, 2006.
- BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**. São Paulo-SP: ed. Contexto, 2009.
- BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Blucher, 2012.
- BRASIL. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, 20 de dezembro de 1996**. Brasília: Governo Federal, 1996.
- BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**. Brasília: MEC, 2002.
- BRASIL. **Orientações curriculares do para o Ensino Médio**. Brasília: MEC, 2008.
- BURAK, D. **Modelagem Matemática e a sala de aula**. Londrina-PR: UEL, 2004.
- CERBASI, G. P. **Dinheiro, os segredos de quem tem**. São Paulo-SP: ed. Gente, 2005.
- D'AMBROSIO, U. **Etnomatemática: Educação em revista**. São Paulo-SP: SBEM, 1993.
- DANTE, L. R. **Matemática: contexto e aplicações**. São Paulo-SP: ed. Ática, 2011.
- EVES, H. W. **Introdução à história da matemática**. São Paulo-SP: ed. Unicamp, 2004.
- FRANCHI, R. H. O. L. **Modelagem Matemática como estratégia de aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral nos cursos de Engenharia**. Rio Claro-SP: UNESP, 1993.
- GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de Cálculo**. Rio de Janeiro-RJ: ed. Ática, VOL. 1 , 5ª Edição, 2011.
- LIMA, E. L. **A Matemática do Ensino Médio. Vol 1**. Rio de Janeiro-RJ: SBM, 2006.
- LUCCI, C. R. et al. **A influência da educação financeira nas decisões de consumo e investimentos dos indivíduos**. São Paulo-SP: IN IX SIMEAD, 2006.
- MATTOS, A. C. M. **O modelo matemático dos juros: uma abordagem sistemática**. Rio de Janeiro - RJ: ed. Vozes, 1975.
- MORGADO, A. C. **Progressões e Matemática financeira**. Rio de Janeiro: SBM, 5.ed., 2010.
- PEREIRA, M. G. **Plano básico de amortização pelo sistema francês e respectivo fator de conversão. Dissertação de doutoramento**. São Paulo-SP: FCEA, 1965.
- RIBAS, J. L. D. **Discussão sobre Modelagem Matemática e Ensino Aprendizagem**. 2004. Disponível em: <<http://www.somatematica.com.br/artigos/a8/index.php>>. Acesso em: 28 de junho 2013.

RICHARDSON, R. J. **Pesquisa Social: métodos e técnicas**. São Paulo: Atlas, 1985. Disponível em: <<http://www.neidefiori.cfh.prof.ufsc.br/metodo/richardson142.html>>. Acesso em: 04 de abril 2013.

SOBRINHO, J. D. V. **Matemática financeira**. São Paulo-SP: ed. Atlas, 7ª Edição, 2000.

SP. **Caderno do aluno: 3ª Ensino Médio: vol.3**. São Paulo: Governo do Estado de São Paulo, 2012.