

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
CÂMPUS CORNÉLIO PROCÓPIO
DIRETORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA
MESTRADO EM ENGENHARIA ELÉTRICA**

BRUNA FORTUNATO

**ESTABILIZAÇÃO DE SISTEMAS LINEARES INCERTOS A PARÂMETROS
VARIANTES NO TEMPO VIA FUNÇÕES POLINOMIAIS HOMOGÊNEAS**

DISSERTAÇÃO

CORNÉLIO PROCÓPIO

BRUNA FORTUNATO

**ESTABILIZAÇÃO DE SISTEMAS LINEARES INCERTOS A PARÂMETROS
VARIANTES NO TEMPO VIA FUNÇÕES POLINOMIAIS HOMOGÊNEAS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do título de “Mestre em Engenharia Elétrica”.

Orientador: Prof. Dr. Alessandro do Nascimento Vargas

Co-orientador: Prof. Dr. Cristiano Marcos Agulhari

CORNÉLIO PROCÓPIO

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

F745 Fortunato, Bruna

Estabilização de sistemas lineares incertos a parâmetros variantes no tempo via funções polinomiais homogêneas / Bruna Fortunato. – 2019.
37 p. : il. color. ; 31 cm.

Orientador: Alessandro do Nascimento Vargas.

Coorientador: Cristiano Marcos Agulhari.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica. Cornélio Procópio, 2019.

Bibliografia: p. 34-35.

1. Desigualdades (Matemática). 2. Estabilidade. 3. Sistemas lineares. 4. Engenharia Elétrica – Dissertações. I. Vargas, Alessandro do Nascimento, orient. II. Agulhari, Cristiano Marcos, coorient. III. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica. IV. Título.

CDD (22. ed.) 621.3

Biblioteca da UTFPR - Câmpus Cornélio Procópio

Bibliotecário/Documentalista responsável:
Romeu Righetti de Araujo – CRB-9/1676

TERMO DE APROVAÇÃO

Título da Dissertação Nº 059:

“Estabilização de Sistemas Lineares Incertos e Parâmetros Variantes no Tempo Via Funções Polinomiais Homogêneas”.

por

Bruna Fortunato

Orientador: Prof. Dr. Alessandro do Nascimento Vargas

Esta dissertação foi apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de MESTRE EM ENGENHARIA ELÉTRICA – Área de Concentração: Sistemas Eletrônicos Industriais, pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica – PPGEE – da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR – Câmpus Cornélio Procópio, às 09 horas do dia 08 de novembro de 2019. O trabalho foi _____ pela Banca Examinadora, composta pelos professores:

Prof. Dr. Alessandro do Nascimento Vargas
Presidente

Prof. Dr. Cristiano Marcos Agulhari
UTFPR-CP

Prof. Dr. Reinaldo Martinez Palhares
UFMG

Prof. Dr. Emerson Ravazzi Pires da Silva
UTFPR-CP

Visto da coordenação:

Prof. Dr. Alessandro do Nascimento Vargas
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica
UTFPR Câmpus Cornélio Procópio

A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do Programa.

Dedico este trabalho ao Professor Dr. Fábio Renand Durand (in memoriam) o qual tive a honra em conhecer, receber seu apoio e fé incondicional para buscar os meus sonhos. Seu legado me inspira e me faz persistir. Também dedico este trabalho ao Professor Dr. Cristiano Marcos Agulhari, que sempre foi muito paciente, conselheiro e acessível. Sem ele, seria impossível desenvolver esse trabalho

AGRADECIMENTOS

Agradeço à CAPES, por ter financiado parte da minha pesquisa e agradeço os meus supervisores Alessandro do Nascimento Vargas e Cristiano Marcos Agulhari. Agradeço também meus professores e colegas de estudos, pois sem eles eu não teria chegado até aqui.

RESUMO

Fortunato, Bruna.. **Estabilização de Sistemas Lineares incertos a parâmetros variantes no tempo via funções polinomiais homogêneas.** . 36 f. Dissertação – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, .

Este trabalho propõe condições para a síntese de ganhos estabilizantes para realimentação de sistemas lineares sujeitos a parâmetros variantes no tempo, tais como efeitos não-lineares por saturação e quantização de estados. A relação entre o sistema linear e os parâmetros variantes no tempo será dada por meio de uma função afim. A partir disso, condições serão modeladas utilizando Desigualdades Matriciais Lineares (do inglês *Linear Matrix Inequalities* (LMIs) dependentes de Funções Polinomiais Homogêneas (do inglês, *Homogeneous Polynomial Lyapunov Functions* ou HPLF), representadas pelo método *Square Matrix Representation* (SMR ou Matriz de Gram).

Palavras-chave: Desigualdades Matriciais Lineares. Estabilidade. Funções Polinomiais Homogêneas. Sistemas Lineares. Representação por Matrizes Quadráticas.

ABSTRACT

FORTUNATO, Bruna. **Synthesis of gains using Square Matrix Representation for Homogeneous Polynomial Lyapunov Functions for stabilizing linear systems affected by time varying uncertainties.** . 36 f. Master Thesis – Electrical Engineering Graduate Program, Federal University of Technology - Paraná. Cornélio Procópio, .

This work presents the synthesis of stabilizing state-feedback gains for linear systems subject to time-varying parameters, such as saturation and states quantization. A relationship between the linear system and the time varying parameters will be given by an affine function. From this, conditions will be modeled using Linear Matrix Inequalities (or LMIs) dependent on Homogeneous Polynomial Functions (or HPLF), represented by the *Square Matrix Representation* (SMR or Gram Matrix) method.

Keywords: Linear Matrix Inequalities. Stability. Homogeneous Polynomial Lyapunov Functions. Linear systems. Square Matrix Representation.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1	– Exemplo de uma quantização uniforme	25
FIGURA 2	– Estados do sistema (69) e ação de controle com G projetada pelo Teorema 3.1	28
FIGURA 3	– Estados compensados com ganho dado pelo Corolário 1 utilizando quantização com 4 níveis e 2 <i>bits</i>	29
FIGURA 4	– Estados compensados com ganho dado pelo Corolário 1 utilizando quantização com 8 níveis e 3 <i>bits</i>	30
FIGURA 5	– Estados compensados com ganho dado pelo Corolário 1 utilizando quantização com 16 níveis e 4 <i>bits</i>	30
FIGURA 6	– Estados compensados com ganho dado pelo Corolário 1 utilizando quantização com 32 níveis e 5 <i>bits</i>	30

LISTA DE SIGLAS

$\mathcal{L}_{n,d}$	Espaço parametrizado
$conv$	Casco convexo
A/D	Analógico-Digital
BIBS	<i>Bounded-Input Bounded-State</i>
CC	Corrente Contínua
HPLF	<i>Homogeneous Polynomial Lyapunov Function</i>
LMIs	<i>Linear Matrix Inequalities</i>

LISTA DE SÍMBOLOS

$x(t)$	Vetor de estados
\mathbb{R}^n	Espaço dos números reais n -dimensional
$\xi(t)$	Incerteza variante no tempo t
$\mathbb{R}^{n \times n}$	Matrizes reais de ordem $n \times n$.
\mathcal{P}	Politopo
$\Xi_{n,2m}$	Espaço gerado por polinômios homogêneos com n variáveis e $2m$ graus
$x^{\{m\}}$	Vetor de base ou <i>power vector</i>
α	Vetor livre pertencente ao conjunto real com tamanho $\tau(n, m)$
$\tau(n, m)$	Dimensão do espaço parametrizado
\mathbb{R}	Conjunto dos números reais.
H	Matriz de Lyapunov
$\mathbb{R}^{\sigma(n,m)}$	Matriz simétrica de dimensão $n \times n$
A	Matriz de dinâmica invariante no tempo com dimensão $n \times n$
$A^\#$	Matriz estendida
\mathbb{N}	Conjunto dos números naturais
$v(x)$	Função de Lyapunov
m	Grau de um polinômio homogêneo
$A(\xi(t))$	Matriz de dinâmica variante no tempo em função de $\xi(t)$
$B^\#$	Matriz estendida de B
B	Matriz de entrada de controle
G	Matriz de ganhos
$\mathbb{R}^{d \times n}$	Conjunto de números reais com tamanho $d \times n$
L	Nível do Quantizador
$x[n]$	Sequência de um sinal discreto
Δ	Amplitude do degrau de quantização
X_{max}	Máxima amplitude de $x[n]$
$q(x(t))$	Quantizador uniforme <i>midtread</i>
$w(x(t))$	Ruído externo gerado pelo quantizador
x_0	Estados iniciais do sistema
$\Phi(t_0, t)$	Matriz de transição de estados entre o tempo t_0 e t

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	SISTEMAS LINEARES VARIANTES NO TEMPO: DEFINIÇÕES	13
2.1	SISTEMA POLITÓPICO VARIANTE NO TEMPO	13
2.2	ESTABILIDADE ROBUSTA EM SISTEMAS POLITÓPICOS VARIANTES NO TEMPO	13
2.3	REPRESENTAÇÃO DE FUNÇÕES POLINOMIAIS POR FORMAS	14
2.4	REPRESENTAÇÃO DE FORMAS VIA SMR COMPLETO	16
2.5	FUNÇÕES DE LYAPUNOV POLINOMIAIS HOMOGÊNEAS (HPLF)	17
2.6	MATRIZ ESTENDIDA	18
3	SÍNTESE DE CONTROLADORES ROBUSTOS	20
3.1	CONDIÇÃO PARA A ESTABILIDADE ROBUSTA EM SISTEMAS LINEARES E VARIANTES NO TEMPO	21
4	CONTROLE QUANTIZADO	24
4.1	PROCESSO DE QUANTIZAÇÃO	24
4.2	PROJETO DE CONTROLE QUANTIZADO	25
4.3	ESTABILIDADE EM SISTEMAS VARIANTES NO TEMPO QUANTIZADOS	26
5	EXEMPLOS NUMÉRICOS	27
5.1	ESTABILIZAÇÃO DE UM SISTEMA COM ENTRADAS VARIANTES NO TEMPO	27
5.2	ESTABILIZAÇÃO DE UM MOTOR CC COM QUANTIZAÇÃO	28
6	COMENTÁRIOS FINAIS	32
	REFERÊNCIAS	33
	APÊNDICE A – ALGORITMOS COMPUTACIONAIS UTILIZADOS	36

1 INTRODUÇÃO

O projeto para sistemas de controle envolve a busca por soluções otimizadas, tais como a determinação de um ponto mínimo em um polinômio ou a busca por funções polinômiais que satisfaçam restrições específicas (CHESI, 2010). Dentre outras alternativas, a análise de estabilidade em sistemas de controle se baseia, em geral, na Teoria de Lyapunov (BARNETT, 1973).

A Teoria de Lyapunov é utilizada através da busca por funções objetivas (ou funções de Lyapunov) associadas ao conjunto de restrições convexas, a fim de garantir a estabilidade e desempenho do sistema. Dependendo da abordagem utilizada, tais restrições podem ser descritas em termos de Desigualdades Matriciais Lineares ou LMI (do inglês *Linear Matrix Inequalities*), comumente aplicadas por algoritmos computacionais (BARNETT, 1973). Chairinnas et al. (2016), por exemplo, utilizaram LMI associadas ao Teorema do Pequeno ganho para minimizar perturbações no controle de direção de navios. Hysiusová e Rosinová (2015) propuseram o projeto de controladores robustos via LMI para um sistema acoplado a dois tanques, discutindo a qualidade das soluções obtidas em termos de desempenho e estabilidade.

Um problema comumente encontrado durante o projeto em sistemas digitais envolve a estabilidade de controladores digitais enquanto operam em tempo real. Segundo Slaughter (1964) a estabilidade de um sistema digital envolve os efeitos da quantização sobre amplitude de sinais digitais, típicos em sistemas híbridos. Assim, tais autores propuseram uma expressão quantitativa para minimizar o erro de quantização, supondo o tempo e amostragem constantes. Além disso, Kolesnikov, Trichina e Kauranne (2015) apresentaram os efeitos da quantização sobre análises de dados e desta forma propuseram um estudo aplicado a banco de dados, agrupamento e análise exploratória sujeitos a erros de quantização. A ideia consiste em determinar a quantidade ótima de dados para exploração em banco de dados no qual os efeitos de quantização são minimizados. Já Runge e Gerfers (2018) propuseram um algoritmo para estimar erros não lineares e variantes no tempo em conversores A/D .

Uma outra abordagem para garantir a estabilidade de sistemas lineares sob parâmetros variantes no tempo consiste em analisar a existência de funções polinômiais homogêneas de Lyapunov dependentes de parâmetros incertos ou a existência de funções polinômiais homogêneas de Lyapunov sujeitos a um politopo de incertezas limitados em banda (OLIVEIRA; PERES, 2009); (BLIMAN et al., 2006). Este método se torna interessante pois apresenta uma abordagem que pode reduzir significativamente a conservatividade na busca de soluções otimizadas em LMIs.

Esta dissertação tem por objetivo apresentar condições convexas capazes de garantir a estabilidade no sentido BIBS (do inglês, *Bounded-Input, Bounded-state*) e a estabilidade robusta aplicadas aos sistemas lineares quantizados e/ou com incertezas variantes no tempo. Em termos gerais, a robustez será garantida pela minimização dos efeitos não-lineares de quantização e/ou incertezas variantes no tempo, através de testes formulados em LMI para uma função polinomial homogênea de Lyapunov (ou HPLF).

O método proposto é fundamentado no *Square Matrix Representation* (SMR ou Matriz de Gram) e matrizes estendidas. A revisão teórica esta baseada nos Teoremas apresentados

por Chesi et al. (2009) e Chesi (2011) com utilização de soluções otimizadas por LMI.

No capítulo 2 serão apresentados os sistemas lineares variantes no tempo e sua descrição em termos de um conjunto convexo de incertezas. Após, serão apresentadas as condições necessárias para garantir a estabilidade de sistemas variantes no tempo através da determinações de funções polinomiais homogêneas de Lyapunov utilizando e a representação quadrática matricial, baseadas no produto de Kronecker e matrizes estendidas; No capítulo 3 será apresentado um Teorema para a síntese de ganhos que garantam a estabilidade robusta e assintótica de um sistema variante no tempo; no capítulo 4 será apresentado um Corolário para garantir a estabilidade no sentido BIBS de um sistema variante no tempo sob efeitos de quantização; no capítulo 5 serão apresentados exemplos numéricos que utilizam o Teorema e o Corolário apresentados bem como resultados simulados; no capítulo 6 são apresentadas e discutidos os resultados obtidos e por fim, as referências utilizadas.

2 SISTEMAS LINEARES VARIANTES NO TEMPO: DEFINIÇÕES

2.1 SISTEMA POLITÓPICO VARIANTE NO TEMPO

Neste capítulo, apresentam-se condições para a estabilidade de sistemas lineares dependentes de parâmetros variantes no tempo, sendo estes descritos de maneira politópica. Em termos formais, seja o sistema determinístico e variante no tempo,

$$\dot{x}(t) = A(\xi(t))x(t), \quad \forall t \geq 0, \quad (1)$$

no qual $x(t) \in \mathbb{R}^n$ denota os estados do sistema, $\xi(t) \in \mathbb{R}^q$ corresponde ao vetor de parâmetros incertos variantes no tempo e $A(\xi(t)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ expressa a matriz de dinâmicas do sistema, descrita por

$$A(\xi(t)) = A_0 + \sum_{i=1}^q \xi_i(t) A_i, \quad (2)$$

tal que as matrizes $A_0, \dots, A_q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ são previamente estabelecidas (CHESI et al., 2009). Dado um conjunto \mathcal{P} , supõe-se que

$$\xi(t) \in \mathcal{P}, \quad \forall t \geq 0, \quad (3)$$

sendo \mathcal{P} definido como um politopo com vértices definidos por

$$\mathcal{P} = \text{conv} \{ \xi^{(1)}, \dots, \xi^{(r)} \}, \quad (4)$$

para vetores $\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(r)} \in \mathbb{R}^q$ em um Casco convexo (*conv*). Define-se o sistema (1) dependente de parâmetros que satisfazem (2)-(4) como um *Sistema Politópico Variante no Tempo* (CHESI et al., 2009).

2.2 ESTABILIDADE ROBUSTA EM SISTEMAS POLITÓPICOS VARIANTES NO TEMPO

Para Su e Chesi (2018), o problema de estabilização de sistemas politópicos variantes no tempo consiste em determinar as condições dadas na Definição 1.

Definição 1. (KHALIL, 2002) O ponto de equilíbrio $x = 0$ em (1) é:

- *estável se, para cada $\epsilon > 0$, existir $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que*

$$\|x(0)\| < \delta \implies \|x(t)\| < \epsilon, \quad \forall t \geq 0, \quad \forall \xi(\cdot) \in \mathcal{P};$$

- *instável, caso não seja estável;*
- *assintoticamente estável se, além estável, δ puder ser escolhido tal que*

$$\|x(0)\| \implies \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0, \quad \forall x(0) \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \xi(\cdot) \in \mathcal{P}. \quad (5)$$

Assim, o sistema (1) é robustamente estável quando a origem corresponde a um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável para todas as possíveis incertezas paramétricas (3) e (4) (CHESI et al., 2009). Uma maneira de avaliar tal estabilidade, de acordo com Chesi et al. (2009), consiste em estudar a positividade de um conjunto de funções polinomiais homogêneas de Lyapunov (HPLF) representadas por SMR (*Square Matrix Representation* ou matriz de Gram) utilizando formas, ou seja, funções polinomiais de mesmo grau. São apresentados a seguir os significados formais desta abordagem.

2.3 REPRESENTAÇÃO DE FUNÇÕES POLINOMIAIS POR FORMAS

A representação de polinômios por vetores de base considera o conjunto

$$\mathcal{L}_{n,d} = \left\{ q \in \mathbb{N}^n : \sum_{i=1}^n q_i = d \right\}, \quad (6)$$

pertencente a uma classe polinomial $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$v(x) = \sum_{q \in \mathcal{L}_{n,d}} a_q x^q, \quad (7)$$

tal que $x \in \mathbb{R}^n$ e $a_q \in \mathbb{R}$ é o coeficiente do monômio x^q . Esta classe polinomial será referida como uma forma de grau d em n escalares (CHESI et al., 2009).

O conjunto de formas de grau d em n escalares é dado por:

$$\Xi_{n,d} = \{ v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : \text{Eq.(7) é satisfeita} \}. \quad (8)$$

Formas podem ser representadas por vetores com coeficientes dados em termos de uma base apropriada. A quantidade de coeficientes de qualquer forma em $\Xi_{n,d}$ é dada pela quantidade de elementos no Espaço parametrizado ($\mathcal{L}_{n,d}$), calculada por:

$$\sigma(n, m) = \frac{(n + m - 1)!}{(n - 1)!m!}. \quad (9)$$

Já os vetores base $x^{\{m\}}$ estão associados a combinações lineares de acordo com a Definição 2.

Definição 2. (CHESI et al., 2009, p.2) *Seja $x^{\{m\}}$ um vetor em $\mathbb{R}^{\sigma(n,m)}$ tal que para todo polinômio homogêneo $v \in \Xi_{n,2m}$ exista $g \in \Xi_{n,2m}$ que satisfaça*

$$v(x) = g' x^{\{m\}}. \quad (10)$$

Então $x^{\{m\}}$ é definido como um vetor base para $\Xi_{n,2m}$.

Escolhas especiais para $(x^{\{m\}})_i$ são entradas que correspondem aos monômios

$$(x^{\{m\}})_i = x^{\varphi(i)}, \quad (11)$$

tal que $(x^{\{m\}})_i$ corresponde à i -ésima entrada de $x^{\{m\}}$ e φ denota uma função bijetora:

$$\varphi : \{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq \sigma(n, m)\} \longrightarrow \mathcal{L}_{n,m}. \quad (12)$$

Segundo Chesi et al. (2009, p.3) a escolha para $x^{\{m\}}$ deve satisfazer propriedades específicas, ou seja,

$$x^{\{m\}'} x^{\{m\}} = \|x\|^{2m}. \quad (13)$$

Uma maneira de satisfazer (13) é ponderar os elementos de $x^{\{m\}}$ pela relação

$$(x^{\{m\}})_i = \sqrt{\frac{m!}{(\varphi(i)_1!)(\varphi(i)_2!) \dots (\varphi(i)_n!)}} x^{\varphi(i)}. \quad (14)$$

A seguir será apresentado um exemplo para $x^{\{m\}}$ que satisfaz as condições (11)-(14).

Exemplo 1 (CHESI et al., 2009, Exemplo 1.1 p.3). Seja a forma

$$h(x) = x_1^3 + 2x_1^2x_2 + 0x_1x_2 - 4x_2^3, \quad (15)$$

tal que $h \in \Xi_{n,2m}$, ou seja, $n = 2$ representa o número de variáveis e $m = 3$ é o grau do polinômio. Então a forma (15), utilizando a expressão (10), é representada como

$$g = [1 \ 2 \ 0 \ -4]'; \quad x^{\{3\}} = [x_1^3 \ x_1^2x_2 \ x_1x_2^2 \ x_2^3]'. \quad (16)$$

A escolha de $x^{\{3\}}$ é um vetor base para $\Xi_{2,3}$. Observe que a dimensão de $x^{\{m\}}$ é determinada por (9), sendo $\sigma(2, 3) = 4$. Observe também que essa escolha não satisfaz (13), porque

$$\begin{aligned} x^{\{3\}'} x^{\{3\}} &= x_1^6 + x_1^4x_2^2 + x_1^2x_2^4 + x_2^6 \\ &\neq x_1^6 + 3x_1^4x_2^2 + 3x_1^2x_2^4 + x_2^6 \\ &= \|x\|^{2m}. \end{aligned} \quad (17)$$

Alternativamente, uma escolha para $x^{\{m\}}$ que satisfaça (13) pode ser realizada como

$$g = \left[1 \ \frac{2}{\sqrt{3}} \ 0 \ -4 \right]' \quad x^{\{3\}} = [x_1^3 \ \sqrt{3}x_1^2x_2 \ \sqrt{3}x_1x_2^2 \ x_2^3]', \quad (18)$$

e assim, (13) e (14) são satisfeitas.

O conjunto de formas é utilizado para a representação via SMR (ou *Square Matrix Representation*), definida na sequência.

2.4 REPRESENTAÇÃO DE FORMAS VIA SMR COMPLETO

Seja $v(x)$ dado conforme a Definição 3.

Definição 3. (CHESI et al., 2009, SMR p.4) Seja $v \in \Xi_{n,2m}$ e $H \in \mathbb{S}^{\sigma(n,m)}$ tal que

$$v(x) = x^{\{m\}'} H x^{\{m\}}. \quad (19)$$

Então, (19) é dito ser um SMR em relação a $x^{\{m\}} \in \mathbb{R}^{\sigma(n,m)}$ e H é denominado uma matriz SMR de $v(x)$ em relação a $x^{\{m\}}$ (CHESI et al., 2009).

A partir da Definição 3, a existência de uma matriz H pode ser obtida em termos de quaisquer vetores de base $x^{\{m\}}$ (CHESI et al., 2009). Desta forma, seja o conjunto de matrizes H definido por:

$$\mathcal{H}(v) = \{H \in \mathbb{S}^{\sigma(n,m)} : (19) \text{ é garantido}\}. \quad (20)$$

então, $v \in \Xi_{n,2m}$ e $\mathcal{H}(v)$ é um espaço afim, conforme definido em Chesi et al. (2009).

O espaço afim em (20) pode ser expresso como a combinação linear entre um elemento específico de $\mathcal{H}(v)$ e uma base para o espaço nulo (CHESI et al., 2009). Seja, então, $L \in \mathbb{R}^{\tau(n,m)} \rightarrow \mathbb{R}^{\sigma(n,m) \times \sigma(n,m)}$ uma parametrização linear do subespaço

$$\mathcal{L}(n, m) = \{L = L' : x^{\{m\}'} L x^{\{m\}} = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n\}, \quad (21)$$

no qual sua dimensão é dada por:

$$\tau(n, m) = \frac{1}{2}\sigma(n, m)(\sigma(n, m) + 1) - \sigma(n, 2m), \quad (22)$$

e $\alpha \in \tau(n, m)$ um vetor livre (CHESI, 2011). Então, o conjunto (20) pode ser reescrito como

$$\mathcal{H}(v) = \{H + L(\alpha) : H \in \mathbb{S}^{\sigma(n,m)} \text{ satisfaz a relação (19) e } \alpha \in \mathbb{R}^{\tau(n,m)}\}. \quad (23)$$

Consequentemente, $v(x)$ em (19) pode ser representado como

$$v(x) = x^{\{m\}'} (H + L(\alpha)) x^{\{m\}}. \quad (24)$$

A seguir serão apresentados dois exemplos desta representação.

Exemplo 2 (CHESI et al., 2009, p.8 Exemplo 1.2) Considere a forma

$$h(x) = x_1^4 + 2x_1^3x_2 + 2x_2^4, \quad (25)$$

com $h \in \Xi_{2,4}$. Pela Definição 3, a quantidade de elementos e o grau da base polinomial $x^{\{m\}}$ deve ser, respectivamente, $n = 2$ e $m = 2$. Utilizando algoritmo computacional disponível no

Apêndice A, tem-se a relação:

$$x^{\{2\}} = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_1x_2 \\ x_2^2 \end{pmatrix}; H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ * & 0 & 0 \\ * & * & 2 \end{pmatrix}; L(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\alpha_1 \\ * & 2\alpha_1 & 0 \\ * & * & 0 \end{pmatrix}$$

O símbolo $*$ denota blocos simétricos.

Exemplo 3 (CHESI et al., 2009, p.8-9 Exemplo 1.3) Considere a forma

$$h(x) = x_1^4 + 2x_2^4 + 3x_3^4, \quad (26)$$

com $n = 3$ correspondente ao número de variáveis e grau polinomial $m = 2$. Então, $h(x)$ pode ser escrito da forma (24), utilizando o algoritmo computacional disponível no Apêndice A considerando

$$x^{\{2\}} = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_1x_2 \\ x_1x_3 \\ x_2^2 \\ x_2x_3 \\ x_3x_2 \\ x_3^2 \end{pmatrix}; H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 2 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & 3 \end{pmatrix}; L(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 \\ * & 2\alpha_1 & \alpha_2 & 0 & -\alpha_4 & -\alpha_5 \\ * & * & 2\alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 & -\alpha_6 \\ * & * & * & * & 2\alpha_6 & 0 \\ * & * & * & * & * & 0 \end{pmatrix}$$

2.5 FUNÇÕES DE LYAPUNOV POLINOMIAIS HOMOGÊNEAS (HPLF)

As condições para a estabilidade assintótica global robusta dadas pela Definição 1 podem ser verificadas através de testes de otimização que utilizam HPLF (CHESI, 2011). As funções HPLF correspondem a uma classe de funções de Lyapunov dadas em termos de variáveis de estados que satisfazem a Definição 4.

Definição 4 (HPLF p.64). (CHESI et al., 2009) Seja $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função que satisfaça as seguintes condições

$$\begin{cases} \forall v \in \Xi_{n,2m} \\ v(x) > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}_0^n \\ \dot{v}(x) < 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}_0^n \quad \forall p \in \mathcal{P}. \end{cases} \quad (27)$$

sendo $\mathbb{R}_0^n \triangleq \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$ e

$$\dot{v}(x) = \left. \frac{dv(x)}{dt} \right|_{\dot{x}=A(\xi(t))x}. \quad (28)$$

Então, $v(x)$ é uma Função de Lyapunov Polinomial Homogênea (ou Homogeneous Polynomial Lyapunov Function (HPLF)) de grau $2m$ para o sistema (1) - (4).

A representação por HPLF permite provar a estabilidade assintótica global em (1) - (4)

(CHESI et al., 2009). Para isso, tais funções são representadas via SMR como

$$v(x) = x^{\{m\}'} H x^{\{m\}}, \quad (29)$$

sendo $H \in \mathbb{R}^{\sigma(n,m)}$.

A seção a seguir apresenta como construir um HPLF pela resolução de problemas de otimização convexa.

2.6 MATRIZ ESTENDIDA

Para realizar a análise de robustez, será introduzida a noção de matriz estendida.

Definição 5 (Matriz Estendida). (CHESI et al., 2009, p. 65)

Considere o sistema:

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad (30)$$

tal que $x(t) \in \mathbb{R}^n$ e $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Seja o inteiro $m \geq 1$ e $A^\# \in \mathbb{R}^{\sigma(m,m) \times \sigma(m,m)}$ uma matriz que satisfaz a relação

$$\frac{dx^{\{m\}}}{dt} = \frac{\partial x^{\{m\}}}{\partial x} Ax = A^\# x^{\{m\}}. \quad (31)$$

Então, a matriz $A^\#$ é denominada matriz estendida de A .

Observe que em (31) a matriz $A^\#$ depende linearmente de A . Utilizando o produto de Kronecker, a matriz estendida é obtida explicitamente como apresentado no teorema a seguir.

Teorema 2.1. (CHESI et al., 2009, p.65-66) Seja $K_m \in \mathbb{R}^{n^m \times \sigma(n,m)}$ uma matriz tal que

$$x^{[m]} = K_m x^{\{m\}}, \quad (32)$$

no qual $x^{[m]}$ corresponde à m -ésima potência de Kronecker em x . Então, $A^\#$ segue a relação

$$A^\# = (K_m' K_m)^{-1} K_m' \left(\sum_{i=0}^{m-1} I_{n^{m-1-i}} \otimes A \otimes I_{n^i} \right) K_m. \quad (33)$$

Considere agora o sistema linear com parâmetro variante no tempo (1). O Teorema 2.2 apresenta uma condição suficiente para testes de robustez utilizando HPLF.

Teorema 2.2. (CHESI, 2011) (CHESI, 2010) Seja $m \in \mathbb{N}$ dado e $A_i^\#$ a matriz estendida de $A(\xi^{(i)})$. Se existe uma matriz $V = V' \in \mathbb{R}^{\sigma(n,m) \times \sigma(n,m)}$ e vetores $\alpha^{(i)}, \dots, \alpha^{(r)} \in \mathbb{R}^{\tau(n,m)}$ tais que as condições

$$\begin{cases} 0 < V \\ 0 > V A_i^\# + A_i^{\#'} V + L(\alpha^{(i)}), \quad \forall i = 1, \dots, r, \end{cases} \quad (34)$$

são satisfeitas, então $v(x)$ definido em (29) é um HPLF que verifica que o sistema (1) - (4) é robustamente estável.

Teorema 2.3. (CHESI, 2011) (CHESI, 2010) *Dado que o sistema (1) é robustamente estável, então existe m suficientemente grande tal que as LMIs (34) são satisfeitas para uma matriz $V = V' \in \mathbb{R}^{\sigma(n,m) \times \sigma(n,m)}$ e um conjunto de vetores $\alpha^{(i)}, \dots, \alpha^{(r)} \in \mathbb{R}^{\tau(n,m)}$.*

Em geral, encontra-se na literatura a análise de sistemas lineares dependentes de parâmetros variantes no tempo a partir da Teoria de Lyapunov aplicada a matrizes com grau genérico a partir de parâmetros limitados em norma ou variantes no tempo (OLIVEIRA; PERES, 2009) (BLIMAN et al., 2006). Em geral, tais técnicas consistem na análise de positividade ou negatividade de cada monômio de um polinômio homogêneo. Os Teoremas 2.2 e 2.3, por sua vez, apresentam uma proposta alternativa à análise de estabilidade robusta em sistemas lineares dependentes de parâmetros, uma vez que V atende as condições da Definição 4 e sua representação em um SMR completo se dá a partir de quaisquer vetores de base, $x^{\{m\}}$, com respectivas matrizes P e $L(\alpha)$, parametrizadas em função do espaço e subespaço gerados pelos vetores de base que seguem as relações (21), (23) e (24). Baseado nisso, uma das principais contribuições desta dissertação consiste em utilizar os Teoremas 2.2 e 2.3 para propor uma técnica de síntese de controladores robustos para o tipo de sistema em questão, apresentada no capítulo a seguir.

3 SÍNTESE DE CONTROLADORES ROBUSTOS

Considere o sistema

$$\dot{x}(t) = A(\xi(t))x(t) + Bu(t), \quad (35)$$

sendo $u(t) \in \mathbb{R}^d$ a entrada de controle a ser considerada. Adaptando os resultados apresentados em Chesi et al. (2009), é possível mostrar que a dinâmica da forma $x^{\{m\}}(t)$ considerando os estados do sistema controlado (35) é dada por

$$\frac{dx^{\{m\}}}{dt} = \frac{\partial x^{\{m\}}}{\partial x} (A(\xi(t))x(t) + Bu) = A^\# x^{\{m\}} + B^\# (u(t) \otimes x^{\{m-1\}}) \quad (36)$$

sendo $A^\#$ uma matriz estendida de $A(\xi(t)) \in \mathbb{R}^{\sigma(m,m) \times \sigma(m,m)}$ e $B^\# \in \mathbb{R}^{n \times d}$ a matriz estendida de B , dada por

$$B^\# = (K'_m K_m)^{-1} K'_m \left(\sum_{i=0}^{m-1} (I_{n^j} \otimes B) F_i \otimes I_{n^{m-1-i}} \right) (I_d \otimes K_{m-1}), \quad (37)$$

com K_m satisfazendo (32) e $F_i \in \mathbb{R}^{dn^i \times dn^i}$ sendo determinada por:

$$F_i = (I_d \otimes e_1^{(n^i)}, \dots, I_d \otimes e_{n^i}^{(n^i)})',$$

de forma que $e_j^{(k)}$ corresponde à j -ésima coluna de I_k .

Seja agora o ganho de realimentação de estados $G \in \mathbb{R}^{d \times n}$ de forma que

$$u(t) = Gx(t) \quad (38)$$

garante a estabilidade robusta do sistema (35). Aplicando tal estrutura em (36), tem-se que

$$\frac{dx^{\{m\}}}{dt} = A^\# x^{\{m\}} + B^\# (Gx \otimes x^{\{m-1\}}). \quad (39)$$

De acordo com Chesi et al. (2009),

$$Gx \otimes x^{\{m-1\}} = G^\# x^{\{m\}}, \quad (40)$$

com

$$G^\# = (G \otimes (K'_{m-1} K_{m-1})^{-1} K'_{m-1}) K_m. \quad (41)$$

Dessa forma, o sistema (39) pode ser reescrito como

$$\frac{dx^{\{m\}}}{dt} = (A^\# + B^\# G^\#) x^{\{m\}} \quad (42)$$

A seção a seguir apresenta a condição proposta neste trabalho para realizar a síntese

de um ganho aumentado de realimentação de estados $G^\#$ capaz de estabilizar robustamente o sistema (42) e, por consequência, (35). Para tanto, é necessário apresentar a Proposição 1 para compreensão da técnica.

Proposição 1. (XING; SHEN; WANG, 2018, p.04) Para qualquer vetor $\nu \in \mathbb{R}^m$, matrizes $R_1, R_2 \in \mathbb{S}_n^+$, $W_1, W_2 \in \mathbb{R}^{n \times m}$; e escalares reais não negativos, ρ e β , tal que $\rho + \beta = 1$, a seguinte desigualdade é satisfeita

$$\frac{1}{\rho} \nu' W_1' R_1 W_1 \nu + \frac{1}{\beta} \nu' W_2' R_2 \nu \geq \nu' \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} R_1 & S \\ S' & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix} \nu \quad (43)$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} R_1 & S \\ S' & R_2 \end{bmatrix} \geq 0. \quad (44)$$

3.1 CONDIÇÃO PARA A ESTABILIDADE ROBUSTA EM SISTEMAS LINEARES E VARIANTES NO TEMPO

O resultado a seguir mostra a principal contribuição por meio do desenvolvimento de condições em LMIs, que garantam que (35) seja robustamente estável.

Teorema 3.1. Se houver um escalar $0 < \mu \leq 1$ e matrizes $W = W' > 0$ e $Z^\#$, sendo I a matriz identidade de dimensões apropriadas, tais que as condições

$$\begin{bmatrix} A_i^\# W + B^\# Z^\# + W A_i^{\#'} + Z^{\#'} B^{\#'} & W \\ W & -\mu I \end{bmatrix} < 0, \quad i = 1, \dots, r. \quad (45)$$

$$\begin{bmatrix} I & L(\alpha^{(i)}) \\ L(\alpha^{(i)}) & I \end{bmatrix} > 0, \quad i = 1, \dots, r. \quad (46)$$

são satisfeitas, então, é possível determinar um ganho aumentado $G^\# = Z^\# W^{-1}$ tal que o sistema aumentado (42) seja robustamente estável.

Demonstração.

De acordo com o Teorema 2.2, o sistema (42) será estável se houver uma matriz $V = V' \geq 0 \in \mathbb{R}^{\sigma(n,m) \times \sigma(n,m)}$ e vetores $\alpha^{(i)}, \dots, \alpha^{(r)} \in \mathbb{R}^{\tau(n,m)}$ satisfazendo

$$V(A_i^\# + B^\# G^\#) + (A_i^\# + B^\# G^\#)' V + L(\alpha^{(i)}) < 0, \quad i = 1, \dots, r. \quad (47)$$

Multiplicando por $W = V^{-1}$ à esquerda e à direita, tem-se que a última desigualdade é equivalente a

$$(A_i^\# + B^\# G^\#) W + W (A_i^\# + B^\# G^\#)' + W L(\alpha^{(i)}) W < 0, \quad \forall i = 1, \dots, r. \quad (48)$$

Observe que o produto entre $L(\alpha)$ e W apresenta um expressão não linear. Para

linearizar esse termo, será utilizada a Proposição 1. Assim, para quaisquer escalares não-negativos ρ e β , tem-se que:

$$\frac{1}{\rho}x^{\{m\}'}WIWx^{\{m\}} + \frac{1}{\beta}x^{\{m\}'}WIWx^{\{m\}} \geq x^{\{m\}'} \begin{bmatrix} W \\ W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & L(\alpha^{(i)}) \\ L(\alpha^{(i)}) & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W \\ W \end{bmatrix} x^{\{m\}}, \quad (49)$$

sujeito a,

$$\begin{bmatrix} I & L(\alpha^{(i)}) \\ L(\alpha^{(i)}) & I \end{bmatrix} \geq 0. \quad (50)$$

sendo $Z^\# = G^\#W$.

A desigualdade (49), considerando $\rho + \beta = 1$ pela Proposição 1, implica em

$$\frac{1}{\rho}WW + \frac{1}{\beta}WW \geq 2WW + 2L(\alpha^{(i)})W \Rightarrow 2WL(\alpha^{(i)})W \leq \frac{(1 - 2\rho\beta)}{\rho\beta}WW. \quad (51)$$

Concluimos que

$$WL(\alpha^{(i)})W \leq \gamma WW, \quad (52)$$

no qual

$$\gamma = \frac{(1 - 2\rho\beta)}{2\rho\beta}, \quad (53)$$

Pode-se provar que $\gamma \geq 1$ para todo ρ e β , tais que $\rho + \beta = 1$. Portanto, suponha que a desigualdade a seguir seja válida:

$$A_i^\#W + B^\#Z^\# + WA_i^{\#\prime} + Z^{\#\prime}B^{\#\prime} + \gamma WW < 0, \quad \forall i = 1, \dots, r, \quad (54)$$

sujeito a,

$$\begin{bmatrix} I & L(\alpha^{(i)}) \\ L(\alpha^{(i)}) & I \end{bmatrix} \geq 0, \quad (55)$$

Então, a condição (48) é satisfeita devido a (52). Por outro lado, a desigualdade (54) equivale a:

$$\begin{bmatrix} A_i^\#W + B^\#Z^\# + WA_i^{\#\prime} + B^{\#\prime}Z^{\#\prime} & W \\ W & -\mu I \end{bmatrix} < 0, \quad (56)$$

sendo $\mu = \gamma^{-1}$.

□

Uma vez obtido $G^\#$ é possível obter o ganho de realimentação de estados G pela igualdade (41). Tal ganho pode ser obtido através do método *Nearest Kronecker Product*, que

consiste em resolver o problema de otimização em dado por

$$\min_G \|G^\# - (G \otimes (K'_{m-1}K_{m-1})^{-1}K'_{m-1})K_m\|_F, \quad (57)$$

sendo $\|\cdot\|_F$ a norma de Frobenius (LOAN; PITSIANIS, 1993). Os termos de (57) são provenientes de (41).

Após aplicar o Teorema 3.1 e a determinação do ganho G em (57), a estabilidade do sistema linear para todo $\xi(t) \in \mathcal{P}$ será garantida independente da sua taxa de variação. Além disso, valores maiores para o grau polinomial m garantirão maiores graus de liberdade para a busca otimizada nas LMIs apresentadas pelo Teorema 3.1. Em consequência, o custo computacional para implementação de tais algoritmos serão aumentados.

Para validação da técnica proposta são apresentados exemplos de síntese de controladores nos capítulos a seguir.

4 CONTROLE QUANTIZADO

4.1 PROCESSO DE QUANTIZAÇÃO

Define-se quantização como o processo de transformação, agrupamento e aproximação de um conjunto de amostras de um sinal em um intervalo de tempo contínuo para níveis de quantização (HAYKIN, 2004). O sinal quantizado é portanto o resultado aproximado do sinal original, sendo sua precisão aumentada de acordo com o aumento do número de níveis. Quando ocorrem dois passos de amostragem e quantização, a conversão A/D se completa.

Os níveis de quantização obedecem a relação $L = 2^N$, sendo N o número de *bits* associados aos níveis de quantização. Como a quantidade de *bits* disponível é limitada, pode-se concluir que a quantidade de níveis sempre será finita (CAMPOS, 2017).

Quantizadores podem ser classificados como uniformes (lineares) ou não-uniformes (não-lineares) (HAYKIN, 2004). Nos casos onde o quantizador é uniforme, a quantização se caracteriza pela aplicação de um sinal tipo degrau constante entre níveis de quantização. O sinal degrau pode ser do tipo meio piso (do inglês *midtread*), com origem no meio do degrau de quantização ou meio-degrau (do inglês *midrise*), com origem fixada na transição em cada passo de quantização.

A Fig.1 mostra um quantizador uniforme, $q(x(t))$, tipo meio piso, e o relaciona à amplitude de uma sequência $x[n]$. Note que a origem de $x[n]$ é limitada no intervalo $\frac{\Delta}{2}$ e $-\frac{\Delta}{2}$ pela aplicação do quantizador linear *midtread*. Isto significa que todos os valores com amplitudes próximas a zero serão agrupados no nível nulo durante a quantização. Este processo é conhecido como zona morta. Similarmente, os demais níveis possuirão o mesmo padrão de decisão e, por isso, o sinal ao ser decodificado apresentará distorções no espectro do sinal (Martínez-Rach et al., 2017).

A zona morta pode produzir efeitos indesejados em sistemas de controle como, por exemplo, o comprometimento da estabilidade. No cenário de controle quantizado, apresenta-se um resultado que garante a estabilidade em sistemas lineares variantes no tempo.

Este trabalho adota um quantizador uniforme com degraus de quantização de tamanho Δ , estabelecido pela relação,

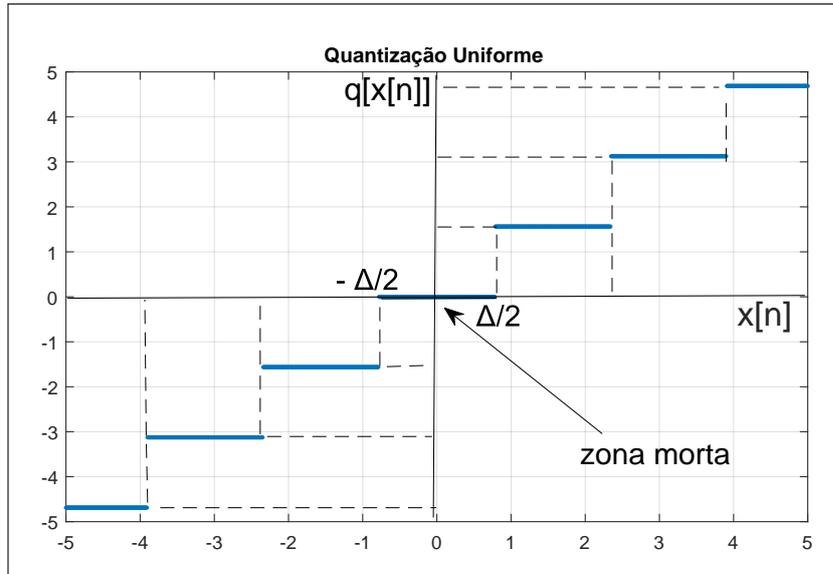
$$\Delta = \frac{X_{max}}{2^N}, \quad (58)$$

com N correspondendo à quantidade de *bits* por amostra na conversão binária, 2^N o número de níveis de quantização, X_{max} a maior amplitude do sinal amostrado (HAYES, 1998), de forma que

$$|x[n]| \leq X_{max}, \quad (59)$$

no qual $|x[n]|$ corresponde ao valor em módulo de $x[n]$. O processo de quantização considerado apresenta erros que podem ser modelados como ruídos uniformes sobre o intervalo $[-\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2}]$ (HAYES, 1998).

Figura 1 – Exemplo de uma quantização uniforme



Fonte: autoria própria

4.2 PROJETO DE CONTROLE QUANTIZADO

Nesta seção deseja-se apresentar a estrutura do quantizador adotada, incorporá-lo ao sinal de controle do sistema (35) e então, determinar ganhos capazes de garantir a estabilidade do sistema mesmo com os efeitos de quantização, responsável por produzir distorções sobre os espectros de sinais que representam os estados em tempo contínuo de sistemas de controle. Desta forma, considere o sistema (35) em malha fechada como:

$$\dot{x}(t) = A(\xi(t))x(t) + Bu(t), \quad \forall t \geq 0. \quad (60)$$

Deseja-se determinar ganhos de realimentação $G \in \mathbb{R}^{d \times n}$ para que a ação de controle

$$u(t) = Gq(x(t)), \quad u(t) \in \mathbb{R}^m \quad (61)$$

garanta a estabilidade do sistema (35), considerando $q(x(t))$ o quantizador uniforme *midtread*

$$q(x(t)) = \Delta \left\lfloor \frac{x(t)}{\Delta} + \frac{1}{2} \right\rfloor, \quad (62)$$

sendo $\lfloor x(t) \rfloor$ o maior inteiro menor ou igual a $x(t)$.

Com a aplicação do controlador (61), tem-se o sistema

$$\dot{x}(t) = A(\xi(t))x(t) + BGq(x(t)). \quad (63)$$

O sistema (63) considera a adição de uma constante $\frac{\Delta}{2}$ associada a cada nível de quantização Δ , sendo o quantizador limitado a uma faixa de 2^N bits. Assim, um sinal $x(t)$ em tempo contínuo,

após a quantização, apresentará erro (ou distúrbios não-lineares) sobre o seu valor. Para caracterizar o erro de quantização, admitimos uma entrada externa ruidosa, $w(x(t))$, definida por:

$$w(x(t)) = x(t) - q(x(t)), \quad \forall t \geq 0. \quad (64)$$

Perceba que $|w(x(t))| \leq \frac{\Delta}{2}$. Além disso, uma maior quantidade de *bits* implica em menores degraus de quantização Δ e, em consequência, $w(x(t)) \in \mathbb{R}^d$ apresentará menores valores de amplitude. Segue de (63) e (64) que

$$\dot{x}(t) = \underbrace{(A(\xi(t)) + BG)}_{A_{cl}(\xi(t))} x(t) - \underbrace{BG}_{B_{cl}} w(x(t)), \quad \forall t \geq 0. \quad (65)$$

A seguir, condições para a determinação da estabilidade exponencial são apresentadas.

4.3 ESTABILIDADE EM SISTEMAS VARIANTES NO TEMPO QUANTIZADOS

A solução do sistema dinâmico (65), sujeita à condição inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$, pode ser expressa em termos da matriz de transição de estados como:

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x_0 - \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B_{cl}(\tau)w(\tau)d\tau, \quad (66)$$

sendo $\Phi(t_0, t)$ a matriz de transição do sistema autônomo

$$\dot{x}(t) = A_{cl}(\xi(t)) x(t). \quad \forall t \geq 0 \quad (67)$$

e $x(t_0) = x_0$ as condições iniciais (WILLEMS, 1970).

Corolário 1. (WILLEMS, 1970) *Seja (67) robustamente uniformemente assintoticamente estável no sentido de Lyapunov. Então, quando $w(x(t))$ for limitado em norma para todo $t \geq 0$, o sistema (65) será Bounded-Input Bounded-State (BIBS) com $x(t)$ satisfazendo*

$$\|x(t)\| \leq c_1 \|x_0\| + \frac{1}{2c_2} c_1 M_1, \quad \forall t \geq 0, \quad (68)$$

no qual c_1 , c_2 e M_1 são constantes positivas.

Como consequência, a determinação do ganho G pelo Teorema 3.1 garante a estabilidade assintótica do sistema do sistema (67), e sua aplicação no sistema quantizado, modelado como (65), resulta em trajetórias que tenderão assintoticamente a uma região suficientemente próxima da origem, que depende de c_1, c_2 e M_1 de acordo com o Corolário 1. Maiores detalhes do procedimento estão descritos em Junior (2014).

5 EXEMPLOS NUMÉRICOS

Para ilustrar o Teorema 3.1 e o Corolário 1, serão apresentadas simulações envolvendo a aplicação dos ganhos para a estabilidade de sistemas de controle. O primeiro exemplo apresenta um sistema linear que utiliza o Teorema 3.1 para garantir a estabilidade robusta na presença de incertezas variantes no tempo; Já o segundo exemplo, utiliza o Teorema 3.1 em conjunto com o Corolário 1 para determinar a estabilidade BIBS dos estados quantizados de um sistema.

5.1 ESTABILIZAÇÃO DE UM SISTEMA COM ENTRADAS VARIANTES NO TEMPO

Considere o sistema linear variante no tempo (35), com $n = 2$, $m = 2$ e dinâmica dadas por:

$$\dot{x}(t) = A(\xi(t))x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \quad \forall t \geq t_0, \quad (69)$$

no qual $A(\xi(t))$ possui a estrutura dada:

$$A(\xi(t)) = \xi^1(t) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} + \xi^2(t) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad (70)$$

e $\xi^1(t), \xi^2(t) \in \mathbb{R}^q$ o conjunto de vetores que correspondem a incertezas variantes no tempo. Para o presente exemplo, serão realizadas simulações considerando os parâmetros,

$$\begin{aligned} \xi^1(t) &= 0.2 \sin(t) + 0.5, \\ \xi^2(t) &= 1 - (0.2 \sin(t) + 0.5). \end{aligned} \quad (71)$$

No entanto, é importante ressaltar que o controlador será sintetizado para todo $\xi(t)$ que obedecem a relação $\xi_1(t) + \xi_2(t) = 1$. Deseja-se tornar o sistema (70) e (71) robustamente estável por meio do Teorema 3.1. Para isso, será considerado que a relação (71) atende a (3) e (4), formando um sistema politópico variante no tempo.

A fim de garantir a robustez de (70) e (71), será considerada a entrada para controle,

$$u(t) = Gx(t), \quad \forall t \geq 0. \quad (72)$$

sendo G o ganho determinado a partir $G^\#$ em (57).

A partir da resolução das LMIs do Teorema 3.1, o ganho $G^\#$ para (70) a (71) foi

$$G^\# = \begin{bmatrix} -4.2123 & -7.9178 & 0 \\ 0 & -4.2123 & -7.9178 \end{bmatrix}. \quad (73)$$

Por meio da operação (57) em (73), obteve-se

$$G = [-4.2123 \quad -7.9178]. \quad (74)$$

A partir do resultado em (74) o sistema (70)-(71) pode ser reescrito como (35).

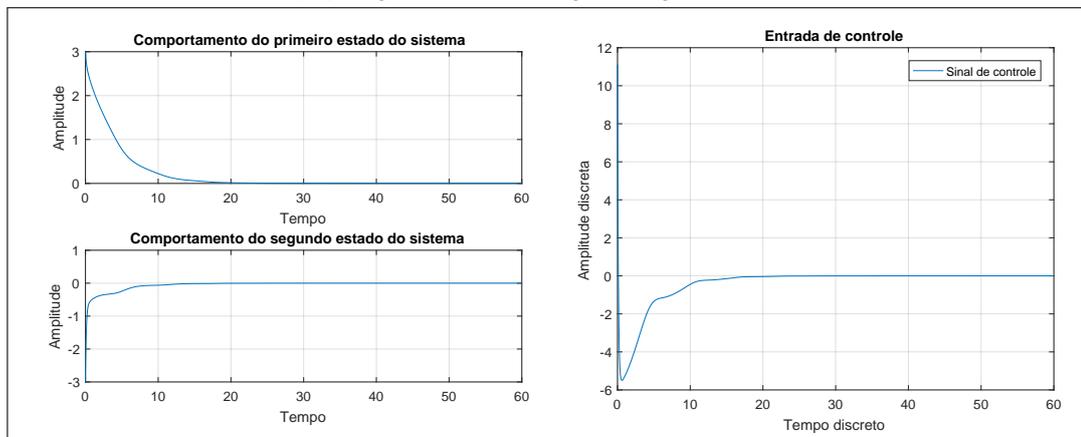
$$\dot{x}(t) = \underbrace{\left(A(\xi(t)) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4.2123 & -7.9178 \end{bmatrix} \right)}_{A_{cl}(\xi(t))} x(t), \quad \forall t \geq t_0. \quad (75)$$

Então, a partir das condições iniciais,

$$x_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad (76)$$

aplicadas a (70) e (71) com controle por regulação de estados, foram obtidas as respostas transitórias a seguir.

Figura 2 – Estados do sistema (69) e ação de controle aplicada pelo Teorema 3.1



Observe que a após o ganho (74) ser aplicado no sistema (70) e (71), as respostas dos estados tenderam a zero em amplitude, confirmando a validade do método apresentado pelo Teorema 3.1.

5.2 ESTABILIZAÇÃO DE UM MOTOR CC COM QUANTIZAÇÃO

Considere um motor Corrente Contínua (CC) representado em espaço de estados,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \omega(t)}{\partial t} \\ \frac{\partial i(t)}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.9315 & 6.8974 \\ -1.4293 & -6.6652 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega(t) \\ i(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 10.1463 \end{bmatrix} u(t), \quad \forall t \geq 0. \quad (77)$$

no qual suas variáveis de estados são a velocidade angular $\omega(t)$ e a corrente de alimentação $i(t)$ (JUNIOR, 2014).

Deseja-se garantir a estabilidade dos estados em (77) no sentido BIBS. Para isso, será considerado que a velocidade angular e a corrente de alimentação do motor CC estão sujeitas a ruídos provenientes do processo de quantização. Sabe-se que o sistema opera sobre uma

tensão de 0 V a 5 V sendo relacionada a uma quantidade finita de níveis de quantização na conversão Analógico-Digital (A/D).

O quantizador considerado é uniforme e tipo *midtread* e sua estrutura segue (58), (59) e (62). Neste exemplo os efeitos de amostragem são desconsiderados.

A partir das especificações apresentadas, deseja-se incluir a entrada para controle

$$u(t) = Gx(t), \quad \forall t \geq 0. \quad (78)$$

Após a resolução das LMIs referente ao Teorema 3.1, a matriz estendida de ganhos $G^\#$ obtida foi

$$G^\# = \begin{bmatrix} -0.5462 & 0.4574 & 0 \\ 0 & -0.5462 & 0.4574 \end{bmatrix}. \quad (79)$$

Pela operação em (79), a entrada de controle que garante a estabilidade robusta e BIBS para (77) deve ser dada por

$$u(t) = [-0.5462 \quad 0.4574] q(x(t)). \quad (80)$$

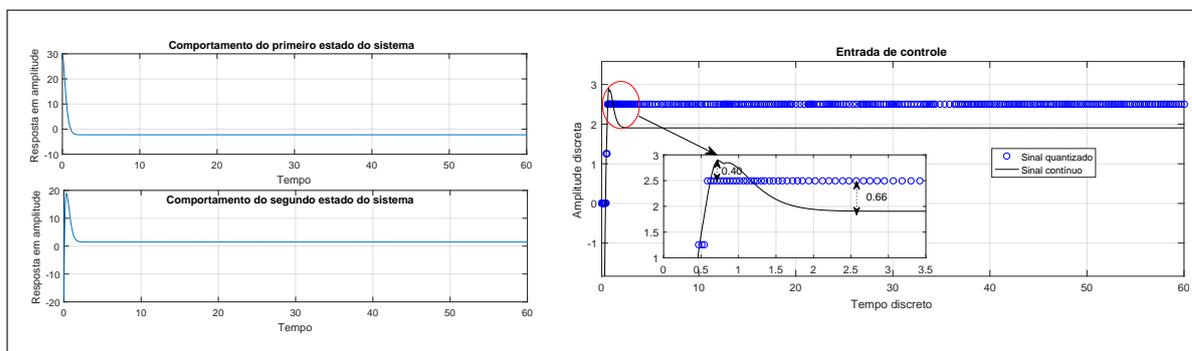
Para ilustrar o resultado, a entrada de controle (80) foi aplicada a (77) em três diferentes condições para quantização compreendidas nos casos 1 a 3, sob mesmas condições iniciais. Tais informações estão descritas na Tabela 1.

Tabela 1 – Estados, condições iniciais e níveis utilizados para quantização.

Estados	Condições iniciais	Níveis para $q(x(t))$			
		caso 1	caso 2	caso 3	caso 4
$x_1(t)$	-3	2^2	2^3	2^4	2^5
$x_2(t)$	3	2^2	2^3	2^4	2^5

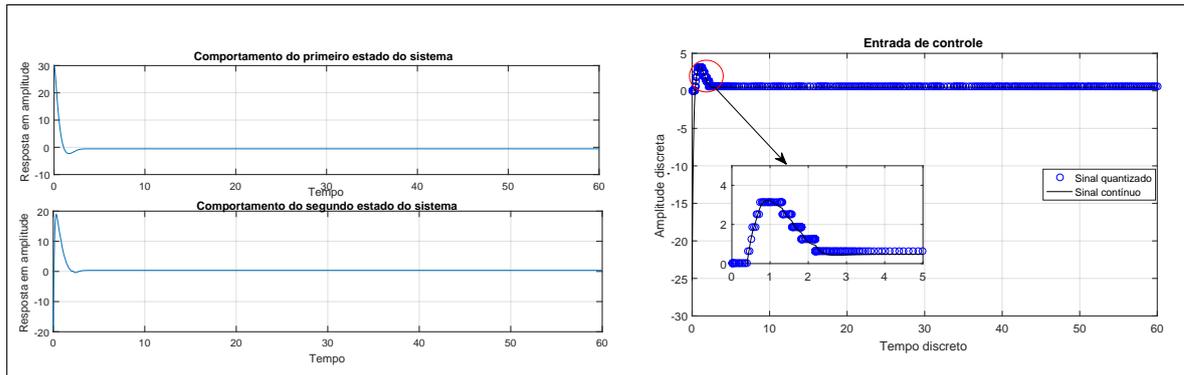
Considerando o controle com regulagem de estados ao sistema compensado, obteve-se os resultados mostrados nas Fig.3 e 4.

Figura 3 – Estados compensados com ganho dado pelo Corolário 1 utilizando quantização com 4 níveis e 2 bits



Fonte: Autoria própria

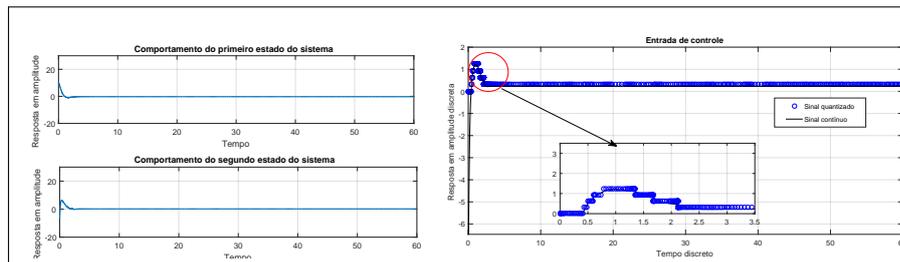
Figura 4 – Estados compensados com ganho dado pelo Corolário 1 utilizando quantização com 8 níveis e 3 bits



Fonte: Autoria própria

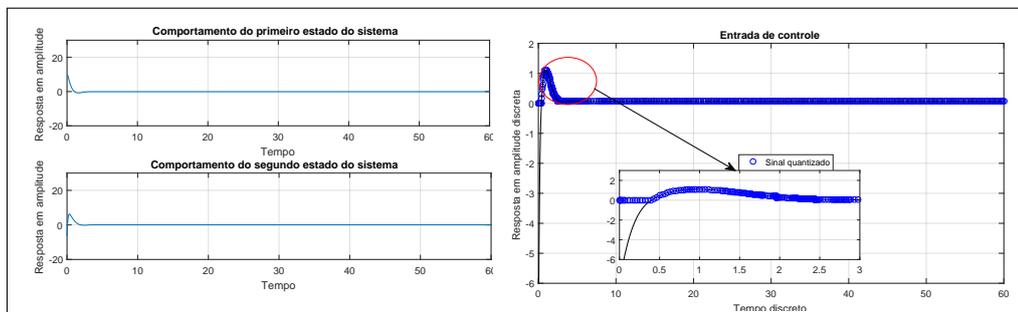
Por meio das simulações exibidas nas Fig.3 e 4, é possível observar a entrada de controle (80) durante as quantizações com 4 e 8 níveis, atuando sobre os estados do sistema quantizado, fazendo com que a amplitude da resposta apresentasse comportamento constante e próximo a origem. Esta amplitude constante se justifica pelo erro em regime ocasionado pela ação do controlador e sua estabilidade pode ser garantida pelo Corolário 1.

Figura 5 – Estados compensados com ganho dado pelo Corolário 1 utilizando quantização com 16 níveis e 4 bits



Fonte: Autoria própria

Figura 6 – Estados compensados com ganho dado pelo Corolário 1 utilizando quantização com 32 níveis e 5 bits



Fonte: Autoria própria

As Fig.5 e Fig.6 ilustram o comportamento do sistema (77) mediante a entrada de controle (80). A quantização com maior quantidade de *bits* implica em sinais para controle em tempo discreto aproximados em sua representação em tempo contínuo, sendo em ambos os casos os estados para controle estabilizados.

6 COMENTÁRIOS FINAIS

Neste trabalho foi apresentado o uma técnica de síntese de ganhos de realimentação de estados, baseada na teoria de formas polinomiais apresentada em Chesi et al. (2009), para estabilização em sistemas lineares sujeitos a parâmetros variantes no tempo. Tal técnica consiste na representação do sistema em malha fechada utilizando matrizes aumentadas, e na posterior aplicação de um conjunto de condições LMIs, principal contribuição deste trabalho, para o cálculo de ganhos de realimentação aumentados. É também proposto um procedimento de otimização para obter os ganhos desejados de realimentação de estados a partir das matrizes aumentadas. Foi também analisada a estabilidade BIBS de sistemas afetados por ruídos exógenos.

Para ilustrar a estabilidade em sistemas lineares variantes no tempo sujeitos aos efeitos de quantização, foram realizados duas simulações. A primeira consiste na aplicação da técnica para estabilização de um modelo simples, porém dependente de parâmetros variantes no tempo, para que fosse analisado seu comportamento, que apresentou as características de estabilidade desejadas. A segunda simulação consiste na aplicação, em um modelo de motor CC, de um quantizador uniforme do tipo *Midtread*. Durante as simulações foi possível observar que após a compensação, as interferências geradas pelo quantizador foram minimizadas.

Assim, a técnica proposta para síntese de ganhos estabilizantes em sistemas incertos a parâmetros variantes no tempo via funções polinomiais homogêneas pode ser uma alternativa interessante. Para trabalhos futuros, propõe-se a adaptação da técnica para otimizar critérios de desempenho e robustez.

REFERÊNCIAS

- BARNETT, S. Matrices, polynomials, and linear time-variant systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 18, n. 1, p. 1–10, February 1973. ISSN 0018-9286. Citado na página 11.
- BLIMAN, P-A et al. Existence of homogeneous polynomial solutions for parameter-dependent linear matrix inequalities with parameters in the simplex. In: IEEE. **Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control**. [S.l.], 2006. p. 1486–1491. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 19.
- CAMPOS, Gustavo Cruz. Efeitos da quantização em sistemas de controle em rede. 2017. Citado na página 24.
- CHAIRINNAS et al. Robust control with linear matrix inequality approach for ship steering problem. In: **2016 International Conference on Instrumentation, Control and Automation (ICA)**. [S.l.: s.n.], 2016. p. 126–131. Citado na página 11.
- CHESI, Graziano. Lmi techniques for optimization over polynomials in control: a survey. **IEEE Transactions on Automatic Control**, IEEE, v. 55, n. 11, p. 2500–2510, 2010. Citado 3 vezes nas páginas 11, 18 e 19.
- _____. LMI conditions for time-varying uncertain systems can be non-conservative. **Automatica**, Elsevier, v. 47, n. 3, p. 621–624, 2011. Citado 5 vezes nas páginas 12, 16, 17, 18 e 19.
- CHESI, Graziano et al. **Homogeneous polynomial forms for robustness analysis of uncertain systems**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2009. v. 390. Citado 9 vezes nas páginas 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 20 e 32.
- HAYES, Monson H. **Schaum's outline of digital signal processing**. [S.l.]: McGraw-Hill, Inc., 1998. Citado na página 24.
- HAYKIN, Simon. **Sistemas de comunicação**. [S.l.]: Bookman, 2004. Citado na página 24.
- HYPIUSOVÁ, M.; ROSINOVÁ, D. Robust control of coupled two tank system via lmi. In: **2015 20th International Conference on Process Control (PC)**. [S.l.: s.n.], 2015. p. 320–325. Citado na página 11.
- JUNIOR, Vlademir Aparecido Freire. **Controle quantizado h-infinito via realimentação de estados**. 2014. Dissertação (Mestrado) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 28.
- KHALIL, Hassan K. Nonlinear systems. **Upper Saddle River**, 2002. Citado na página 13.
- KOLESNIKOV, Alexander; TRICHINA, Elena; KAURANNE, Tuomo. Estimating the number of clusters in a numerical data set via quantization error modeling. **Pattern Recognition**, Elsevier, v. 48, n. 3, p. 941–952, 2015. Citado na página 11.
- LOAN, Charles F Van; PITSIANIS, Nikos. Approximation with kronecker products. In: **Linear algebra for large scale and real-time applications**. [S.l.]: Springer, 1993. p. 293–314. Citado na página 23.

Martínez-Rach, M. O. et al. Influence of dead zone quantization parameters in the r/d performance of wavelet-based image encoders. In: **2017 Data Compression Conference (DCC)**. [S.l.: s.n.], 2017. p. 62–71. ISSN 2375-0359. Citado na página 24.

OLIVEIRA, Ricardo CLF; PERES, Pedro LD. Time-varying discrete-time linear systems with bounded rates of variation: Stability analysis and control design. **Automatica**, Elsevier, v. 45, n. 11, p. 2620–2626, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 19.

Runge, M.; Gerfers, F. Correlation based time-variant dac error estimation in continuous-time \hat{a} adcs with pseudo random noise. In: **2018 IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS)**. [S.l.: s.n.], 2018. p. 1–5. ISSN 2379-447X. Citado na página 11.

Slaughter, J. Quantization errors in digital control systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 9, n. 1, p. 70–74, January 1964. ISSN 2334-3303. Citado na página 11.

SU, Lanlan; CHESI, Graziano. Robust stability of uncertain linear systems with input and output quantization and packet loss. **Automatica**, Elsevier, v. 87, p. 267–273, 2018. Citado na página 13.

WILLEMS, Jacques Leopold. Stability theory of dynamical systems (studies in dynamical systems). **Thomas Nelson and Sons LTD**, 1970. Citado na página 26.

XING, Mengping; SHEN, Hao; WANG, Zhen. Synchronization of semi-markovian jump neural networks with randomly occurring time-varying delays. **Complexity**, Hindawi, v. 2018, 2018. Citado na página 21.

Apêndices

APÊNDICE A – ALGORITMOS COMPUTACIONAIS UTILIZADOS

\Algoritmo para determinar a matriz H segundo a Eq. (11).

- Escolha $x^{\{m\}}$ e $x^{\{2m\}}$ conforme a Eq.(11)
- Defina $g \in \mathbb{R}^{\sigma(n,2m)}$ tal que $h(x) = g'x^{\{2m\}}$
- Estabeleça $H = 0_{\sigma(n,m) \times \sigma(n,m)}$
- for $i = 1, \dots, \sigma(n, m)$ e $j = 1, \dots, \sigma(n, m)$, defina $a = ind(x^{\{m\}})_i(x^{\{m\}})_j, x^{\{2m\}}$ e $H_i = H_i + g_a$ fim do for
- Defina $H = 0.5he(H)$

\Algoritmo para determinar a matriz $L(\alpha)$ segundo a Eq. (11).

- Escolha $x^{\{m\}}$ e $x^{\{2m\}}$ conforme a Eq.(11)
- Defina $A = 0_{\sigma(n,2m) \times 3}$, $b = 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}^{\omega(n,m)}$
- for $i = 1, \dots, \sigma(n, m)$ e $j = 1, \dots, \sigma(n, m)$, defina $a = ind(x^{\{m\}})_i(x^{\{m\}})_j, x^{\{2m\}}$ e $A_{a,1} = A_{a,1} + 1$
- Se $A_{a,1} = 1$, defina $A_{a,2} = i$ e $A_{a,3} = j$
- Caso contrário, defina $b = b + 1$ e $G = 0_{\sigma(n,m) \times \sigma(n,m)}$ e $G_{i,j} = 1$
- Defina $k = A_{a,2}$ e $l = A_{a,3}$ e $G_{k,l} = G_{k,l} - 1$
- Defina $L(\alpha) = L(\alpha) + a_b G$
- fim da condição de teste
- fim do for
- Defina $L(\alpha) = 0.5he(L(\alpha))$