

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
DIRETORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

ALEFFER ROCHA

COLORAÇÃO ARCO-ÍRIS EM CLASSES DE GRAFOS

DISSERTAÇÃO

PONTA GROSSA
2020

ALEFFER ROCHA

COLORAÇÃO ARCO-ÍRIS EM CLASSES DE GRAFOS

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Ciência da Computação, da Diretoria de Pesquisa e Pós-graduação, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Orientadora: Profa. Dra. Sheila Morais de Almeida

Coorientador: Prof. Dr. Leandro Miranda Zatesko

PONTA GROSSA

2020

Ficha catalográfica elaborada pelo Departamento de Biblioteca
da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campus Ponta Grossa
n.55/20

R672 Rocha, Aleffer

Coloração arco-íris em classes de grafos. / Aleffer Rocha, 2020.
59 f. : il. ; 30 cm.

Orientadora: Profa. Dra. Sheila Morais de Almeida
Coorientador: Prof. Dr. Leandro Miranda Zatesko

Dissertação (Mestrado em Ciência da Computação) - Programa de Pós-
Graduação em Ciência da Computação. Universidade Tecnológica Federal do
Paraná, Ponta Grossa, 2020.

1. Teoria dos grafos. 2. Arco-íris. 3. Conectividade (Computadores). I. Almeida,
Sheila Morais de. II. Zatesko, Leandro Miranda. III. Universidade Tecnológica
Federal do Paraná. IV. Título.

CDD 004



Ministério da Educação
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ CÂMPUS
PONTA GROSSA
Diretoria de Pesquisa e Pós-Graduação
Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação



FOLHA DE APROVAÇÃO

Título de Dissertação Nº 20/2020

COLORAÇÃO ARCO-ÍRIS EM CLASSES DE GRAFOS

Por

Aleffer Rocha

Esta dissertação foi apresentada às **15 horas de 16 de julho de 2020**, à distância, por webconferência, como requisito parcial para a obtenção do título de MESTRE EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO, Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação. O candidato foi arguido pela Banca Examinadora, composta pelos professores abaixo assinados. Após deliberação, a Banca Examinadora considerou o trabalho APROVADO.

Prof. Dr. Atílio Gomes Luiz
(UFC)

Profa. Dra. Marina Esther Groshaus
(UTFPR)

Prof. Dr. Renato José da Silva Carmo
(UFPR)

Profa. Dra. Sheila Morais de Almeida
(UTFPR)
Orientadora e presidente da banca



Visto do Coordenador:

Prof. Dr. André Koscianski
Coordenador do PPGCC
UTFPR – Câmpus Ponta Grossa

- A FOLHA DE APROVAÇÃO ASSINADA ENCONTRA-SE NA SECRETARIA
ACADÊMICA -

Dedico este trabalho a Deus, família e amigos. Em especial a Maria de Lourdes Leopoldino Elias, minha amada vó Dudi que tão cedo nos deixou. Vó Dudi ensinou a amar sem olhar a quem.

AGRADECIMENTOS

- Mãe e pai, obrigado por todo carinho, amor, paciência e suporte durante o meu mestrado, principalmente nos últimos meses. Vó Edeli, a senhora é uma das minhas inspirações de vida, obrigado por todos os conselhos e palavras de conforto durante as longas ligações. Família, obrigado por sempre estarem me apoiando de todas as formas.
- Obrigado, Camila, Luiz Henrique e Natanael, pelas vezes que me levaram aos aeroportos, sem medir esforços, para que eu pudesse expandir o meu conhecimento em outros estados.
- Elder, Edinara, Antônio, Rose, Filipe, Tairine e Cássio, obrigado por todas as vezes que abriram a porta do conforto de seus lares em Santa Catarina e me receberam com muito amor e carinho; pelas vezes que me aturaram, em plenos dias de descanso, trabalhando na minha pesquisa. Obrigado, Tairine, por todas as palavras de ânimo e conforto.
- Fernanda Silva, obrigado pelas inúmeras conversas ao telefone e por compartilhar as suas experiências sobre a pós-graduação. Leonardo Almeida, obrigado por ouvir os infinitos áudios no WhatsApp e por estar sempre disposto a me ajudar em qualquer situação. Luis Gonzaga, obrigado pelas inúmeras conversas sobre grafos, independente da hora, dia ou lugar. Roseane Garcia, obrigado ser tão amiga e por sempre estar disposta a me ajudar, principalmente emprestando o seu carro para algumas viagens a Curitiba e em dias muito chuvosos.
- Mayara, obrigado pelas vezes que ouviu os meus desabaços, enxugou as minhas lágrimas, me acalmou e me fez sorrir. Obrigado por transmitir suas experiências acadêmicas, por ser uma inspiração de persistência e dedicação. Agradeço também aos seus pais, que diversas vezes me receberam naquele lar maravilhoso em Ferraz de Vasconcelos, onde fui tratado como um marajá, logo digo. Obrigado a você e a querida Ellen pela estadia no chalézinho durante o mês que passei em Campinas. Foram dias maravilhosos que passaram muito rápido.
- Obrigado, Celso Santos, que de uma forma tão didática me ajudou a compreender uma prova de redução em coloração arco-íris quando estive em Campinas.
- Agradeço à Universidade Tecnológica Federal do Paraná por todos os auxílios que recebi desde a graduação e pela bolsa de mestrado, de agosto de 2018 a setembro de 2019. O campus Ponta Grossa, por muitas vezes, foi o meu segundo lugar.
- Aos amigos, Daniel Zadra, Lucia Ramos, Tamires Doniak e Cristina Kasprzak, obrigado por todas as vezes que abriram a porta de suas salas na nossa querida UTFPR para ouvirem e me fazerem rir.
- Às professoras Simone Aires e Denise Maciel, obrigado por disponibilizarem as disciplinas de Estrutura de Dados e Matemática Discreta para que eu pudesse colocar em prática a minha docência. Senti-me honrado por confiarem a mim tamanha responsabilidade.
- Aos amigos do Sociais PPGCC (Bauke Dijkstra, Eduardo Sallum, Everton Skeika, Fábica Enembreck e Lin Yu Han), obrigado pela companhia durante os almoços no restaurante universitário, conversas na Sala de Estudos do PPGCC e por todos os churrascos também. Não fiz apenas amigos de mestrado, mas sim amigos para a vida toda. Em especial obrigado, Fábica, por sempre concordar com as minhas ideias e por ter sido o meu braço direito como representante discente do PPGCC.

- Gleifer Vaz, Renato Carmo, Marina Groshaus e Atílio Luiz, obrigado por contribuírem com esta pesquisa. Obrigado também, Gleifer Vaz e Hugo Valadares, por todo o auxílio durante a minha qualificação de mestrado.
- Leandro, foram poucos meses trabalhando juntos, mas de muito aprendizado. Obrigado por todo carinho, paciência para comigo e para com a minha pesquisa. Gostaria de agradecer também a Giullia e ao pequeno e observador Arthur, por serem compreensíveis todas as vezes que você, Leandro, passou horas trabalhando comigo e com a Sheila.
- Sheila, você ensina não somente pesquisa, você ensina humanidade também. Obrigado por todo o carinho e por ter sido a minha mãe acadêmica. Saiba que sempre sou grato por tudo o que faz por mim. Parafrazeando O Pequeno Príncipe, digo: Sheila era uma orientadora igual a cem mil outras, mas eu fiz dela uma amiga, ela agora é única no mundo. Aproveito para agradecer ao Daniel Abrahão, pelas vezes que indiretamente contribuiu para este trabalho e também por ter sido tão compreensivo todas as vezes em que eu passava horas trabalhando com você, Sheila, e ao pequeno Martim que talvez quando ler isso já esteja grande e anos já tenham se passado, mesmo assim lhe agradeço por animar as reuniões com os seus doces e espontâneos sorrisos. Obrigado, Martim, por dividir a sua maravilhosa mãe comigo.

“Nunca estou realmente satisfeita quanto a entender alguma coisa; porque, até onde entendo, a minha compreensão só pode ser uma fração infinitesimal de tudo que eu quero compreender.”
Ada Lovelace

RESUMO

ROCHA, Aleffer. **Coloração arco-íris em classes de grafos**. 2020. 59 f. Dissertação (Mestrado em Ciência da Computação) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Ponta Grossa, 2020.

Problemas de coloração arco-íris, com notáveis aplicações em segurança de informação, têm recebido bastante atenção nos últimos anos na área de Combinatória. Em particular, o *número de conexão arco-íris* de um grafo conexo G , denotado por $rc(G)$, é o menor inteiro k para o qual G admite uma k -coloração de arestas (não necessariamente própria) tal que, entre qualquer par de vértices, existe um *caminho arco-íris*, ou seja, um caminho em que as cores das arestas são todas distintas. Dada uma coloração de arestas ϕ para um grafo G , se entre cada par de vértices existe um caminho mínimo que é arco-íris, então ϕ é uma *coloração arco-íris forte*. O menor número de cores que permite uma coloração arco-íris forte de um dado grafo G é o *número de conexão arco-íris forte* de G . Um grafo G é *arco-íris crítico* se a remoção de uma aresta qualquer aumenta o número de conexão arco-íris de G . Neste trabalho, são determinados o número de conexão arco-íris e o número de conexão arco-íris forte dos grafos sombras de caminhos, cobras triangulares triplas, circulantes $C_{2k}^{1,k}$ e junção $G + K_m$ quando G tem $rc(G) \leq 2$. Também foram determinados os números de conexão arco-íris dos grafos junção de *sunlet* (R_n) com G quando $|V(G)| \geq n - 1$ e de cografos com três vértices pendentos. Foram encontrados novos limitantes superiores para o número de conexão arco-íris dos grafos cobras, de junção de dois grafos com vértice universal e de junção $R_n + K_m$ quando $m \leq n - 2$. Também são apresentadas condições necessárias e suficientes para a criticalidade dos grafos leque, dos produtos cartesianos de $G \times P_n$ quando $rc(G) = diam(G) \geq 2$ ou quando G é uma panela, $G \times K_m$ quando $rc(G) = diam(G) \geq 1$ e de $C_m \times C_n$, quando m e n são pares.

Palavras-chave: Teoria dos Grafos. Arco-íris. Conectividade.

ABSTRACT

ROCHA, Aleffer. **Rainbow coloring in classes of graphs**. 2020. 59 f. Dissertation (Master Degree in Computer Science) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Ponta Grossa, 2020.

Rainbow coloring problems, of noteworthy applications in Information Security, have been receiving much attention in the last years in Combinatorics. In particular, the *rainbow connection number* of a connected graph G , denoted $rc(G)$, is the least k for which G admits a (not necessarily proper) k -edge-coloring such that between any pair of vertices there is a *rainbow path*, i. e., a path whose edge colors are all distinct. Given an edge coloring ϕ for a graph G , if between any pair of vertices there is a minimum path which is rainbow, then ϕ is a *strong rainbow coloring*. The minimum number of colors for which a given graph G has a strong rainbow coloring is the *strong rainbow connection number* of G . A graph G is rainbow critical if the deletion of any edge of G increases $rc(G)$. In this work, we determine the rainbow connection number and the strong rainbow connection number of shadow graphs of paths, triple triangular snake graphs, circulant graphs $C_{2k}^{1,k}$ and join graphs $G + K_m$ when $rc(G) \leq 2$. We also determine the rainbow connection number of join graphs of sunlet (R_n) with G when $|V(G)| \geq n - 1$ and of cographs with three pendent vertices. We found new upper bounds for the rainbow connection number of snake graphs, join graphs of two graphs with universal vertices, and join graphs $R_n + K_m$ when $m \leq n - 2$. We also present necessary and sufficient conditions for the criticality of fan graphs, Cartesian products $G \times P_n$ when $rc(G) = diam(G) \geq 2$ or when G is a pan graph, $G \times K_m$ when $rc(G) = diam(G) \geq 1$, and $C_m \times C_n$ when m and n are even.

Keywords: Graph Theory. Rainbow. Connectivity.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	– Grafo G em (a) com uma coloração de arestas própria e em (b) com uma coloração de arestas não-própria	13
Figura 2	– Grafo G e uma de suas árvores geradoras H	18
Figura 3	– Produto cartesiano $P_3 \times P_4$	20
Figura 4	– Grafos 4-panela e 5-panela	20
Figura 5	– Árvore com uma coloração de arestas	25
Figura 6	– Grafo sombra $D_3(P_3)$	31
Figura 7	– Grafo cobra $S(5, 4, 7)$	33
Figura 8	– Bloco $B_{i,i+1}$ com rotulação dos vértices	33
Figura 9	– Construindo uma coloração arco-íris para o grafo $S(3, 3, 3)$	36
Figura 10	– Uma coloração arco-íris para o grafo $S(3, 3, n)$ tal que $n > 3$	36
Figura 11	– Grafo circulante $C_{12}^{1,6}$ com uma coloração arco-íris	39
Figura 12	– Grafo $C_7 \times C_5$ com uma coloração arco-íris	44
Figura 13	– Grafo $C_5 \times K_4$ com uma coloração arco-íris	46
Figura 14	– Leques F_4 , F_5 e F_6 não arco-íris críticos	47

LISTA DE SÍMBOLOS

C_n	Grafo ciclo com n vértices
$C_n^{d_0, d_1, \dots, d_{q-1}}$	Grafo circulante com n vértices
$d(v)$	Grau do vértice v
$\text{diam}(G)$	Diâmetro de um grafo G
$D_m(G)$	Grafo sombra de G
$E(G)$	Conjunto de arestas de um grafo G
F_n	Grafo leque com $n + 1$ vértices
$G + H$	G junção H
$G \cup H$	G união H
$G \times H$	Produto cartesiano de G e H
$K_{s,t}$	Grafo bipartido completo
K_n	Grafo completo com n vértices
P_n	Grafo caminho com n vértices
$rc(G)$	Número de conexão arco-íris do grafo G
$rc(G)$	Número de conexão arco-íris forte do grafo G
R_n	Grafo <i>sunlet</i> com $2n$ vértices
S_n	Grafo estrela com $n + 1$ vértices
T_n	Grafo árvore com n vértices
TS_n^ℓ	Grafo cobra triangular
$V(G)$	Conjunto de vértices de um grafo G
$ V(G) $	Cardinalidade do conjunto $V(G)$
W_n	Grafo roda com $n + 1$ vértices
$\delta(G)$	Grau mínimo do grafo G

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
1.1	DIFERENTES PROBLEMAS SOBRE A COLORAÇÃO ARCO-ÍRIS.....	14
1.2	ORGANIZAÇÃO DO DOCUMENTO	16
2	RESENHA LITERÁRIA	17
2.1	DEFINIÇÕES BÁSICAS	17
2.2	COMPLEXIDADE COMPUTACIONAL	20
2.3	COLORAÇÃO ARCO-ÍRIS EM ALGUMAS CLASSES DE GRAFOS.....	23
2.4	CRITICALIDADE ARCO-ÍRIS	30
3	RESULTADOS EM COLORAÇÃO ARCO-ÍRIS	31
3.1	GRAFOS SOMBRAS DE CAMINHO.....	31
3.2	GRAFOS COBRAS	32
3.3	O GRAFO CIRCULANTE $C_{2K}^{1,K}$	38
3.4	GRAFOS DE JUNÇÃO	39
3.5	GRAFOS DE PRODUTO CARTESIANO.....	43
4	RESULTADOS EM CRITICALIDADE ARCO-ÍRIS	47
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	52
	REFERÊNCIAS	55
	Índice	58

1 INTRODUÇÃO

Considere uma troca de mensagens confidenciais entre agências de segurança nacional em uma rede de dispositivos (por exemplo, celulares, computadores etc) conectados através de *links*. Dado este cenário, desejamos rotear mensagens exigindo que cada *link* do caminho entre estes dispositivos tenha uma frequência distinta dos demais *links* do caminho. Certamente, queremos minimizar o número de frequências distintas desta rede. Este problema pode ser modelado através de um grafo que represente a rede de dispositivos (LI; SUN, 2012).

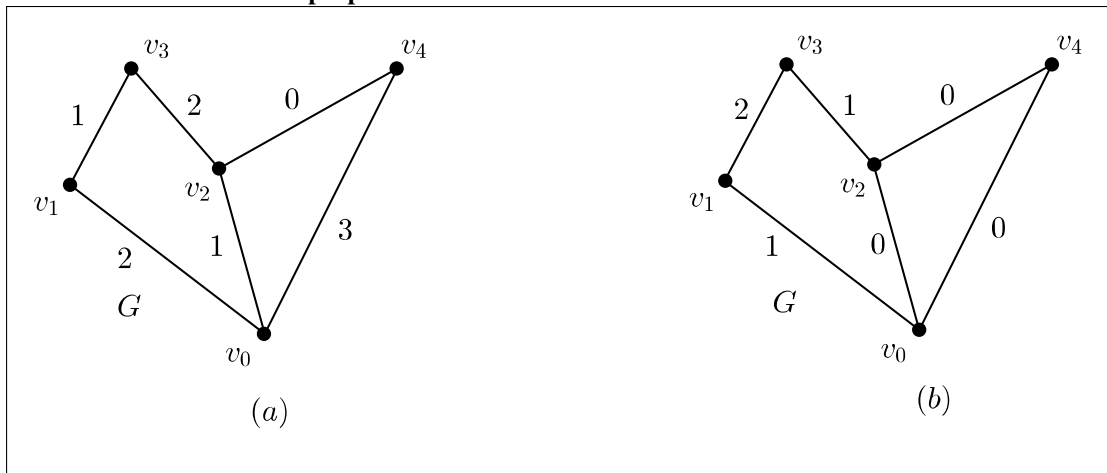
Um grafo $G = (V(G), E(G))$ é uma estrutura matemática definida por $V(G)$ e $E(G)$, tal que $V(G)$ é um conjunto de elementos chamados de *vértices* e $E(G)$ é um multiconjunto de pares não ordenados de vértices, chamados *arestas*. A aresta de um grafo G formada pelo par de vértices u e v será denotada por uv , e dizemos que u e v são *adjacentes* ou *vizinhos*, que a aresta uv *incide* em u e v , e que u e v são os *extremos* da aresta uv . Um *laço* é uma aresta cujos extremos incidem no mesmo vértice e *arestas múltiplas* são um conjunto de arestas que incidem sobre o mesmo par de vértices. Um grafo G é *simples* se G não possui laços ou arestas múltiplas, do contrário, o grafo é denominado *multigrafo*. Neste trabalho, ao menos quando explícito, os grafos são considerados simples. Um *caminho* entre um par de vértices u e v em um grafo G é uma sequência $w_0w_1w_2 \dots w_{k-1}$ em que $u = w_0$, $v = w_{k-1}$ e, para $0 \leq i \leq k-2$, vale que w_i é adjacente a w_{i+1} em G . Um grafo G com $E(G) \neq \emptyset$ é *conexo* se existe um caminho entre qualquer par de vértices de G , e *desconexo* caso contrário.

O problema da minimização de frequências nas trocas de mensagens entre agências nacionais de segurança pode ser modelado com um grafo G , onde cada dispositivo do cenário apresentado inicialmente corresponde a um vértice e os *links* são representados por arestas do grafo. Podemos representar as frequências desta rede através de cores que serão atribuídas para as arestas do grafo. Uma *coloração de arestas* em G é uma atribuição de cores para todas as arestas de G . As cores em geral são denotadas por números inteiros. Uma coloração de arestas é *própria* se arestas incidentes em um mesmo vértice têm cores distintas. A Figura 1 apresenta um grafo com duas colorações de arestas diferentes. Observe que a coloração de arestas da Figura 1(a) é própria. Observe que na Figura 1(b) existe pelo menos um vértice (v_2) onde duas arestas (v_0v_2 e v_2v_4) têm a mesma cor e, portanto, esta coloração de arestas não é própria.

Dado um grafo G com uma coloração de arestas não necessariamente própria, um *caminho arco-íris* entre um par de vértices é um caminho em que as cores das arestas são todas distintas. No cenário inicial apresentado, um caminho arco-íris representa o caminho de um dispositivo a outro cujos *links* possuem todas frequências distintas. Observe, na Figura 1(b), que o caminho $v_1v_3v_2v_0v_4$ não é arco-íris, pois existem duas arestas no caminho com a mesma cor (v_2v_0 e v_0v_4). Por outro lado, existe o caminho $v_1v_3v_2v_4$ entre v_1 e v_4 , que é arco-íris.

Segundo Chartrand *et al.* (2008), uma coloração de arestas de G é uma *coloração arco-íris* se entre qualquer par de vértices de G existe um caminho arco-íris. As colorações do grafo

Figura 1 – Grafo G em (a) com uma coloração de arestas própria e em (b) com uma coloração de arestas não-própria



Fonte: (ROCHA, 2017)

G apresentadas na Figura 1 são arco-íris. Colorações arco-íris aparecem em diferentes contextos da Combinatória (EHARD; GLOCK; JOOS, 2019; MONTGOMERY; POKROVSKIY; SUDAKOV, 2019) e também têm recebido atenção nos últimos anos, sendo alguns trabalhos financiados pela Agência Nacional de Segurança (em inglês *National Security Agency – NSA*) dos Estados Unidos (LO, 2012; DUDEK; FRIEZE; TSOURAKAKIS, 2015), devido às aplicações na transferência segura de informações sigilosas, em especial após os ataques terroristas de 11 de setembro de 2001 (LI; SUN, 2012).

O *número de conexão arco-íris* de um grafo G é o menor inteiro k para se obter uma coloração arco-íris em G com k cores e é denotado por $rc(G)$. O *Problema da Coloração Arco-íris* é determinar $rc(G)$ para um grafo G simples e conexo qualquer. Por exemplo, caso o grafo G seja o mesmo apresentado na Figura 1, $rc(G) = 2$. Pois embora a Figura 1(b) ilustre uma coloração arco-íris com 3 cores, o que implica que $rc(G) \leq 3$, se a cor 1 ou 0 for atribuída para a aresta v_1v_3 , obtém-se uma outra coloração arco-íris com duas cores. Logo, $rc(G) \leq 2$. Como existe pelo menos um par de vértices que não são adjacentes em G , não é possível apresentar uma coloração arco-íris para este grafo com uma única cor e, portanto, $rc(G) = 2$.

Um *caminho mínimo* entre um par de vértices u e v em um grafo G é um caminho entre u e v com o menor número de arestas possível. O *número de conexão arco-íris forte* de um grafo G , denotado por $src(G)$, é o menor inteiro k possível para se obter uma coloração arco-íris em G com k cores tal que existe um caminho mínimo que é arco-íris entre qualquer par de vértices de G . Há estudos sobre o número de conexão arco-íris forte em algumas classes de grafos (CHARTRAND *et al.*, 2008; ANANTH; NASRE; SARPATWAR, 2011; LAURI, 2016).

Dado um grafo G e um parâmetro monotônico $p(G)$ de G . Um grafo G é *aresta-crítico* (resp. *vértice-crítico*) em relação a $p(G)$ se a remoção de uma aresta (resp. vértice) qualquer de G altera $p(G)$. Como o número de conexão arco-íris não é monotônico para a remoção de vértices, consideramos apenas a aresta-criticalidade no que diz respeito a esse parâmetro. Portanto, ao longo deste texto, um grafo G é *arco-íris crítico* (ou simplesmente *crítico*) se é aresta-crítico em

relação a $rc(G)$, isto é, se $E(G) \neq \emptyset$ e para toda aresta $e \in E(G)$ tem-se $rc(G - e) > rc(G)$.

Durante o levantamento bibliográfico para o desenvolvimento deste trabalho foram encontrados vários resultados incorretos sobre o número de conexão arco-íris e a criticalidade arco-íris em algumas classes de grafos, publicados em periódicos predatórios ¹. A partir destes achados desenhou-se o principal objetivo deste mestrado: apresentar soluções corretas para estes casos, que são identificados ao longo do texto com uma nota de rodapé. Neste trabalho, são determinados o número de conexão arco-íris e o número de conexão arco-íris forte nas seguintes classes de grafos² sombras de caminhos, cobras triangulares triplas, circulantes $C_{2k}^{1,k}$ e junção $G + K_m$ quando G tem $rc(G) \leq 2$. Também foram determinados os números de conexão arco-íris dos grafos junção de *sunlet* (R_n) com G quando $|V(G)| \geq n - 1$ e de cografos com três vértices pendentos. Foram encontrados novos limitantes superiores para o número de conexão arco-íris dos grafos cobras, de junção de dois grafos com vértice universal e de junção $R_n + K_m$ quando $m \leq n - 2$. Também são apresentadas condições necessárias e suficientes para a criticalidade dos grafos leque, dos produtos cartesianos de $G \times P_n$ quando $rc(G) = diam(G) \geq 2$ ou quando G é uma panela, $G \times K_m$ quando $rc(G) = diam(G) \geq 1$ e de $C_m \times C_n$, quando m e n são pares.

1.1 DIFERENTES PROBLEMAS SOBRE A COLORAÇÃO ARCO-ÍRIS

Desde que a coloração arco-íris foi definida no artigo de Chartrand *et al.* (2008) e no livro de Chartrand e Zhang (2009), muitas questões sobre o tema foram levantadas, gerando uma diversidade de problemas sobre a coloração arco-íris. Com o objetivo de apresentar esses problemas, tanto para completude deste documento, quanto para deixar claro quais problemas são tratados nesta dissertação, esta seção sumariza as principais questões abordadas na literatura sobre a coloração arco-íris.

Tanto Chartrand *et al.* (2008) quanto Chartrand e Zhang (2009) definem o problema de, dado um grafo conexo G , determinar o menor número de cores para o qual existe uma coloração de arestas de G tal que entre qualquer par de vértices há um caminho arco-íris. Nos dois trabalhos, esse número é chamado de número de conexão arco-íris e é denotado por $rc(G)$. Nos dois trabalhos, esta coloração de arestas é chamada de coloração arco-íris. Chartrand *et al.* (2008) e Chartrand e Zhang (2009) também definem a coloração arco-íris forte e consideram o problema de se determinar o menor número de cores que permite uma coloração de arestas de um dado grafo G tal que entre qualquer par de vértices exista um caminho mínimo que seja arco-íris. Como já visto, esse número de cores é chamado de número de conexão arco-íris forte e denotado por $src(G)$. Estes são os problemas apresentados na introdução desta dissertação e para os quais são apresentados novos resultados neste trabalho. A seguir, são apresentadas va-

¹ Para mais informações sobre periódicos predatórios acesse: <<https://predatoryjournals.com/journals/>>.

² Para auxiliar o leitor a localizar uma definição específica, preparamos um índice remissivo no final do documento.

riações dos problemas de se determinar o número de conexão arco-íris e o número de conexão arco-íris forte, algumas com diferenças bastante sutis.

Um grafo G é k -*vértice-conexo* (ou simplesmente k -conexo) se existem k caminhos internamente disjuntos entre qualquer par de vértices de G . O menor k tal que G é k -conexo é o parâmetro conhecido como *conectividade* de G e denotado por $\kappa(G)$. No livro de Chartrand e Zhang (2009), os autores definem um conceito similar em relação à coloração arco-íris, apresentando o parâmetro de *conectividade arco-íris* de G , denotado por $\kappa_r(G)$, que é o menor número de cores necessárias para uma coloração de arestas de G que garanta $\kappa(G)$ caminhos arco-íris internamente disjuntos entre qualquer par de vértices de G . Assim, um dos problemas que pode ser abordado em relação à coloração arco-íris é, dado um grafo G , determinar $\kappa_r(G)$.

Ainda em 2009, Chartrand *et al.* (2009) apresentam um parâmetro mais geral com o nome de k -*conectividade arco-íris* de G . Dado um grafo ℓ -conexo G , $\ell \geq 1$, é verdade que para qualquer inteiro k , $1 \leq k \leq \ell$, e quaisquer dois vértices distintos u e v do grafo G , existem k caminhos internamente disjuntos entre u e v . A k -conectividade arco-íris de G , $rc_k(G)$ é o menor número de cores necessárias para se obter uma coloração de arestas de G tal que existam k caminhos arco-íris internamente disjuntos entre qualquer par de vértices. Se tal coloração existir, G é k -*arco-íris conexo*. Note que o parâmetro $rc_k(G) = \kappa_r(G)$ quando $k = \kappa(G)$. Note também que $rc_1(G) = rc(G)$. Então, outro problema relacionado à coloração arco-íris de G é responder qual o valor de $rc_k(G)$, dados um grafo G e um inteiro $k \geq 1$.

Observe ainda que, apesar de não serem vistas na literatura, é interessante pesquisar variações dos problemas mencionados nas quais os caminhos arco-íris entre qualquer par de vértices necessitem ser disjuntos apenas nas arestas em vez de internamente disjuntos. Ressalta-se que tais variações parecem ainda mais interessantes ao se observar que em uma coloração de arestas de um dado grafo G pode haver dois caminhos arco-íris entre um mesmo par de vértices de forma que estes caminhos não sejam internamente disjuntos nos vértices, mas sejam disjuntos nas arestas. Um grafo G é k -*aresta-conexo* se existem k caminhos disjuntos nas arestas entre qualquer par de vértices de G . O menor k tal que G é k -aresta-conexo é o parâmetro conhecido como k -*aresta-conectividade* de G e denotado por $\lambda(G)$. Seja $\lambda_r(G)$ o menor número de cores necessárias para se obter uma coloração arco-íris de um dado grafo G tal que entre qualquer par de vértices existam $\lambda(G)$ caminhos arco-íris disjuntos nas arestas. Como a restrição de que os caminhos arco-íris sejam disjuntos apenas nas arestas é menor que a restrição de que sejam internamente disjuntos, é de se esperar que $\lambda_r(G) \leq \kappa_r(G)$. Similarmente, pode-se definir o conceito $rc'_k(G)$ como o menor número de cores necessárias para uma coloração de arestas em G tal que entre qualquer par de vértices existam k caminhos arco-íris disjuntos nas arestas.

Considere o problema de decidir se um grafo G tem uma coloração arco-íris com k cores, dados um grafo G e um inteiro $k \geq 1$. Para provar que este problema pertence à NP³, é necessário mostrar que, dada uma coloração de arestas para o grafo G pode-se verificar em tempo

³ Para o leitor não familiarizado com conceitos de Complexidade Computacional, como P, NP, entre outros conceitos, é recomendado Arora e Barak (2009).

polinomial se tal coloração é arco-íris. Surge então a seguinte questão: qual a complexidade computacional de se verificar se uma coloração de arestas dada para determinado grafo G é arco-íris? Com base nesta pergunta, Chakraborty *et al.* (2011) apresentam um outro problema relacionado à coloração arco-íris: dado um grafo G e uma coloração de arestas de G , decidir se esta é uma coloração arco-íris para G . Lauri (2016) chama este problema de *Problema de Conectividade Arco-Íris* e apresenta também uma versão análoga para a coloração arco-íris forte. De acordo com Lauri (2016), o *Problema da Conectividade Arco-Íris Forte* é, para um dado grafo G com uma coloração de arestas α , decidir se α é uma coloração arco-íris forte.

Há ainda na literatura variações dos mesmos problemas considerando a coloração de vértices em vez da coloração de arestas, como nos trabalhos de Krivelevich e Yuster (2009) e Li, Li e Shi (2015). E há também trabalhos onde dado um grafo G impõe-se a restrição de que determinados subgrafos com estruturas bem definidas sejam arco-íris, ou seja, todas as arestas desses subgrafos tenham cores distintas. Como exemplo, uma coloração de arestas própria pode ser vista como uma coloração arco-íris em que se restringe a todas as estrelas do grafo serem arco-íris. Como outro exemplo, pode-se citar o trabalho de Chartrand, Okamoto e Zhang (2010) que aborda árvores arco-íris. Um subgrafo T de um grafo G com uma coloração de arestas é *árvore arco-íris* se T é uma árvore e todas as arestas de T possuem cores distintas. Chartrand, Okamoto e Zhang (2010) definem uma *k-coloração arco-íris* em um grafo G como uma coloração de arestas de G tal que para cada subconjunto de vértices $S \subseteq V(G)$ com tamanho k , existe uma árvore arco-íris em G que contém os vértices de S . O menor inteiro positivo j para se obter uma *k-coloração arco-íris* de G é denotado por $rx_k(G)$.

1.2 ORGANIZAÇÃO DO DOCUMENTO

Este documento está organizado em cinco capítulos. O Capítulo 2 apresenta algumas definições básicas, detalhes sobre a complexidade computacional dos problemas abordados nesta dissertação de mestrado e alguns resultados já existentes sobre o número de conexão arco-íris. O Capítulo 3 traz os resultados obtidos durante o desenvolvimento desta pesquisa sobre o número de conexão arco-íris e o número de conexão arco-íris forte em algumas classes de grafos. O Capítulo 4 apresenta as contribuições dadas sobre a criticalidade arco-íris de leques e de alguns grafos resultantes da operação de produto cartesiano. O Capítulo 5 apresenta as considerações finais e propostas para trabalhos futuros.

2 RESENHA LITERÁRIA

Neste capítulo são apresentados alguns resultados presentes na literatura sobre o Problema da Coloração Arco-íris e o Problema da Coloração Arco-íris Forte. O capítulo está dividido em quatro seções. A primeira seção apresenta conceitos básicos da Teoria dos Grafos que são utilizados neste documento. A segunda seção discorre sobre a complexidade computacional dos problemas que são abordados. A terceira seção apresenta alguns limitantes para o número de conexão arco-íris e o número de conexão arco-íris forte, bem como os valores exatos desses parâmetros quando se considera classes de grafos específicas. Por fim, a quarta seção aborda o estado da arte sobre criticalidade arco-íris.

2.1 DEFINIÇÕES BÁSICAS

Algumas definições já foram apresentadas no Capítulo 1, como o próprio conceito de grafo. Outras definições básicas são apresentadas nesta seção. Outras ainda, por serem mais específicas, optamos por deixá-las mais próximas de quando são usadas no texto. Para auxiliar o leitor a encontrar uma definição específica, preparamos um índice remissivo ao final do documento.

Um *subgrafo* H de um grafo G é um grafo com conjunto de vértices $V(H) \subseteq V(G)$ e conjunto de arestas $E(H) \subseteq E(G)$. Um subgrafo de G *induzido* por $U \subset V(G)$, denotado por $G[U]$, é o grafo com conjunto de vértices $V(G[U]) = U$ e arestas $E(G[U]) = \{uv \in E(G) : u, v \in U\}$. O subgrafo de G induzido por um subconjunto de arestas $A \subseteq E(G)$, denotado por $G[A]$, é o grafo com conjunto de arestas $E(G[A]) = A$ e conjunto de vértices $V(G[A]) = \{v : v \text{ é extremo de alguma aresta do conjunto } A\}$. Considere um grafo G possivelmente desconexo. Um subgrafo conexo de G é maximal se não está propriamente contido em nenhum subgrafo conexo de G . Cada subgrafo conexo maximal de um grafo G é chamado de *componente conexa* de G . Arestas cuja remoção desconectam o grafo são chamadas de *pontes*.

Um grafo é *vazio* se não contém arestas. Um grafo é *trivial* se é vazio e contém apenas um vértice. Um grafo G é *completo* se todos os vértices em G são adjacentes entre si. O grafo completo com n vértices é denotado por K_n .

O *grau* de um vértice v em um grafo G , denotado por $d_G(v)$, é a quantidade de arestas que incidem em v no grafo G . Quando não houver ambiguidade, o índice subscrito que especifica o grafo será omitido, escrevendo-se apenas $d(v)$. Um vértice v é *isolado* em um grafo G se $d(v) = 0$. Um vértice v é *pendente* em um grafo G se $d(v) = 1$. Um vértice v em um grafo G é *universal* se $d(v) = |V(G)| - 1$. O número de vértices isolados (i.e. com grau 0) em um grafo (possivelmente desconexo) G é denotado por $\iota(G)$.

Um *conjunto independente* em um grafo G é um subconjunto não-vazio de $V(G)$ que

induz um grafo vazio.

Um grafo *caminho* $P_n: v_0v_1 \dots v_{n-1}$ é um grafo com conjunto de vértices $V(P_n) = \{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$ e conjunto de arestas $E(P_n) = \{v_iv_{i+1}: 0 \leq i \leq n-2\}$. Sejam $P: v_0v_1 \dots v_{m-1}$ e $Q: u_0u_1 \dots u_{n-1}$ caminhos tais que $v_{m-1} = u_0$. A *concatenação* de P com Q é o caminho $v_0v_1 \dots v_{m-1}u_1 \dots u_{n-1}$.

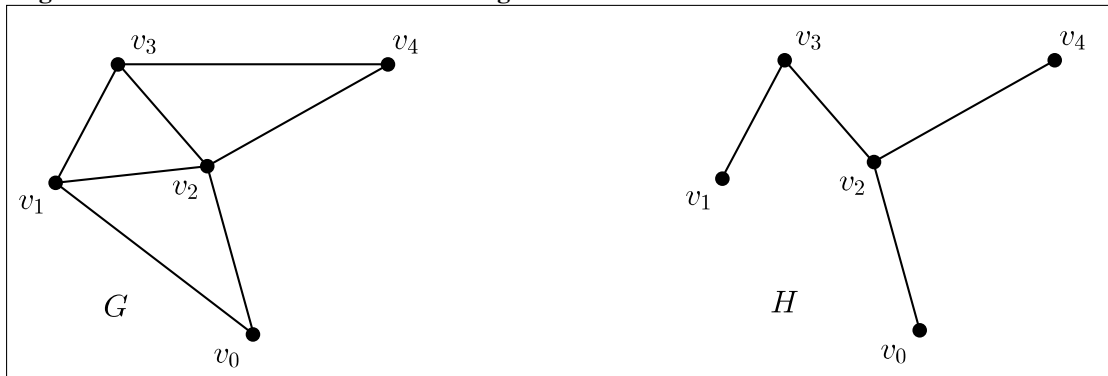
Um grafo *ciclo* $C_n: v_0v_1 \dots v_{n-1}v_0$, com $n \geq 3$, é um grafo com conjunto de vértices $V(C_n) = \{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$ e conjunto de arestas $E(C_n) = \{v_iv_{(i+1) \bmod n} : 0 \leq i < n\}$. Observe que, pelas definições apresentadas, um ciclo C_3 é também um grafo completo K_3 . Um grafo G é uma *árvore* se, e somente se, G é conexo e não contém ciclos como subgrafos (diz-se que G é acíclico).

A *distância* entre um par de vértices u e v em um grafo G , denotada por $dist(u, v)$, é a quantidade de arestas em um caminho mínimo entre u e v em G . O *diâmetro* de um grafo G , denotado por $diam(G)$, é a maior distância encontrada entre os pares de vértices de G .

Um *isomorfismo* entre dois grafos G_1 e G_2 é uma bijeção $\pi: V(G_1) \rightarrow V(G_2)$ tal que, para todo u e todo v em $V(G_1)$, temos $uv \in E(G_1)$ se, e somente se, $\pi(u)\pi(v) \in E(G_2)$. Dizemos então que dois grafos são isomorfos se existe isomorfismo entre eles.

Uma *árvore geradora* em um grafo G é um subgrafo $H = (V(H), E(H))$ tal que $V(H) = V(G)$, $E(H) \subseteq E(G)$ e H é uma árvore. A Figura 2 apresenta como exemplo um grafo G e uma de suas árvores geradoras H .

Figura 2 – Grafo G e uma de suas árvores geradoras H



Fonte: (ROCHA, 2017)

Um grafo *bipartido* $G = ([S, T], E(G))$ é um grafo G cujo conjunto de vértices pode ser particionado em dois conjuntos independentes S e T . Considere um grafo bipartido $G = [S, T]$. Se cada vértice em S é adjacente a todos os vértices de T , o grafo G é chamado de *bipartido completo* e é denotado por $K_{s,t}$, onde $s = |S|$ e $t = |T|$. Um grafo é *k-partido completo* se o seu conjunto de vértices pode ser particionado em k conjuntos independentes, S_1, S_2, \dots, S_k de tal modo que todo vértice $v \in S_i$ é adjacente a todo vértice $y \in S_j$, para todo par i e j tal que $i \neq j$.

Considere $k \geq 2$ e sejam G_1, G_2, \dots, G_k grafos quaisquer. A *operação de união* $G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_k$ resulta no grafo com conjunto de vértices $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2) \cup \dots \cup V(G_k)$ e conjunto de arestas $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \dots \cup E(G_k)$. A *operação de*

junção $G = G_1 + G_2 + \dots + G_k$ resulta no grafo com conjunto de vértices $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2) \cup \dots \cup V(G_k)$ e conjunto de arestas $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \dots \cup E(G_k) \cup E_G$, onde $E_G = \{vw : v \in G_i \wedge w \in G_j \wedge i \neq j\}$. O grafo $G = G_1 + G_2 + \dots + G_k$ é chamado de *grafo de junção* e as arestas do conjunto E_G são chamadas *arestas de junção* de G .

Quando G é um grafo vazio com n vértices, o grafo $G + K_1$ é chamado de *estrela* e denotado por S_n . Quando G é um caminho $P_n : v_0v_1 \dots v_{n-1}$ com $n \geq 2$, o grafo $G + K_1$ é o grafo *leque* denotado por F_n . E quando G é um ciclo C_n com $n \geq 3$, o grafo $C_n + K_1$ é o *grafo roda*, denotado por W_n .

Um grafo G é *cografo* se G é o grafo trivial, se é resultado da união de cografos, ou se é resultado da junção de cografos. Portanto, cografos conexos são uma subclasse dos grafos de junção. A classe dos cografos é equivalente à classe dos grafos que são livres de P_4 induzido (CORNEIL; LERCHS; BURLINGHAM, 1981). Um grafo *threshold* é um cografo construído a partir de sucessivas operações de união ou junção de grafos triviais. Então, K_1 é um *threshold*, e se um grafo G é *threshold*, então $G + K_1$ e $G \cup K_1$ também são grafos *threshold*.

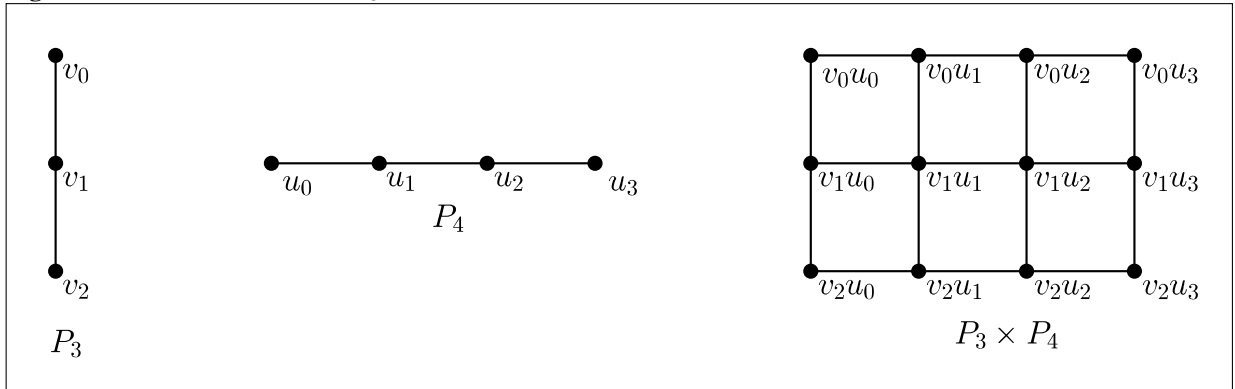
O *produto cartesiano* entre dois conjuntos, A e B , é o conjunto de todos os pares ordenados, cujo primeiro elemento do par pertence a A e o segundo elemento do par pertence a B , ou seja, $\{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$. Agora, considere dois grafos, $G = (V(G), E(G))$ e $H = (V(H), E(H))$, tais que $V(G) = \{v_0, v_1, v_2, \dots, v_{|V(G)|-1}\}$ e $V(H) = \{u_0, u_1, u_2, \dots, u_{|V(H)|-1}\}$. O produto cartesiano de G e H , denotado por $G \times H$, é um grafo com conjunto de vértices dado pelo produto cartesiano $V(G) \times V(H)$ e tal que existe aresta entre dois vértices (v_i, u_j) e (v_k, u_l) se, e somente se, $v_iv_k \in E(G)$ e $u_j = u_l$; ou se $u_ju_l \in E(H)$ e $v_i = v_k$. Neste trabalho, sempre que nos referimos a um produto cartesiano $A \times B$, tal que $V(A) = \{v_0, \dots, v_{m-1}\}$ e $V(B) = \{u_0, \dots, u_{n-1}\}$, denotamos por $A''(j)$, com $0 \leq j < n$, o subgrafo de $A \times B$ induzido pelo conjunto de vértices $\{(v_k, u_j) : 0 \leq k < m\}$. Similarmente, denotamos por $B'(i)$, com $0 \leq i < m$, o subgrafo de $A \times B$ induzido pelo conjunto de vértices $\{(v_i, u_k) : 0 \leq k < n\}$. Observe que $A''(j)$ é sempre uma *cópia* de A em $A \times B$, i.e. um subgrafo de $A \times B$ isomorfo a A . De igual modo, $B'(i)$ é sempre uma *cópia* de B em $A \times B$. Para simplificar a escrita, sempre que o contexto definir claramente o intervalo de uma variável i (resp. j), este intervalo não será explicitado, sendo substituído pelo quantificador $\forall i$ (resp. $\forall j$). Na Figura 3 é apresentado o produto cartesiano $P_3 \times P_4$.

Um grafo é *n-panela* se possui um ciclo induzido de tamanho n tal que $n \geq 3$, e um único vértice de grau 1 adjacente a um dos vértices do ciclo. A Figura 4 apresenta os grafos 4-panela e 5-panela em (a) e (b), respectivamente.

Um *emparelhamento perfeito* em um grafo G é um conjunto de arestas $M \subseteq E(G)$, tal que em cada vértice $v \in V(G)$ incide exatamente uma aresta $e \in M$.

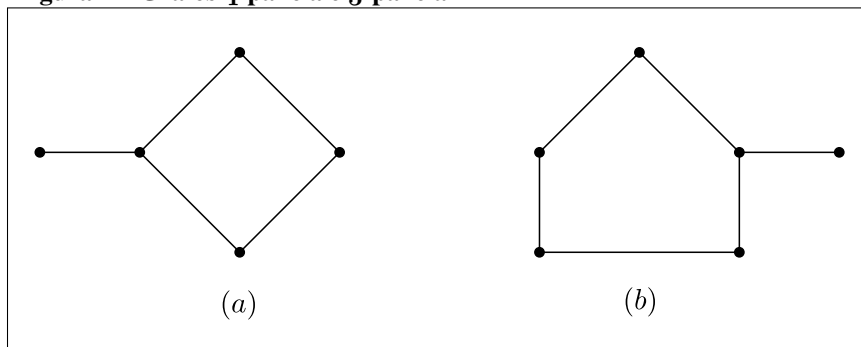
Um grafo *sunlet* é obtido através da adição de um vértice pendente adjacente a cada vértice de um ciclo C_n , com $n \geq 3$. Prabha e Rajasingh (2012) referem-se aos grafos *sunlet* como *crown graphs*, mas este termo é mais comumente utilizado para definir os grafos bipartidos completos $K_{n,n}$ dos quais se remove um emparelhamento perfeito. Sy, Medika e Yulianti (2013),

Figura 3 – Produto cartesiano $P_3 \times P_4$



Fonte: (ROCHA, 2017)

Figura 4 – Grafos 4-panela e 5-panela



Fonte: Autoria própria

assim como outros autores na literatura chamam os grafos *sunlet* de *sun graphs* (ANITHA; LEKSHMI, 2008; WALLIS, 2001), mas este termo é mais utilizado para referir-se à classe dos grafos que são formados por um grafo completo K_n com conjunto de vértices $\{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$ aos quais se adicionam n novos vértices u_0, u_1, \dots, u_{n-1} tais que cada vértice u_i é adjacente a v_i e $v_{(i+1) \bmod n}$.

2.2 COMPLEXIDADE COMPUTACIONAL

Nesta seção são apresentados resultados sobre a complexidade computacional do Problema da Coloração Arco-Íris e do Problema da Coloração Arco-Íris Forte, definidos a seguir.

Problema da Coloração Arco-Íris (RCP)

Entrada: um grafo G .

Pergunta: qual o valor de $rc(G)$?

Problema da Coloração Arco-Íris Forte (SRCP)

Entrada: um grafo G .

Pergunta: qual o valor de $src(G)$?

Ressalta-se que é comum que um algoritmo que resolva RCP (SRCP) também apresente uma coloração arco-íris (coloração arco-íris forte) para o grafo dado na entrada utilizando $rc(G)$ ($src(G)$) cores, embora, pela definição desses problemas, apresentar tal coloração não seja obrigatório.

Seja k um inteiro fixo não-negativo qualquer. Definimos também os seguintes problemas de decisão.

Problema da k -Coloração Arco-Íris (k -RC)

Entrada: um grafo G .

Pergunta: $rc(G) \leq k$?

Problema da k -Coloração Arco-Íris Forte (k -SRC)

Entrada: um grafo G .

Pergunta: $src(G) \leq k$?

Qualquer grafo que tenha dois vértices não adjacentes tem $rc(G) > 1$. Então, para resolver 1-RC é suficiente verificar se G é o grafo completo, o que pode ser feito em tempo polinomial. Caro *et al.* (2008) conjecturaram que 2-RC é NP-completo e, conseqüentemente, que RCP é NP-difícil para o caso geral. Essa conjectura foi provada por Chakraborty *et al.* (2011).

Teorema 2.1 (CHAKRABORTY *et al.*, 2011). *Dado um grafo G , decidir se $rc(G) = 2$ é um problema NP-completo.*

No mesmo ano em que o Teorema 2.1 foi publicado, Ananth, Nasre e Sarpatwar (2011) determinaram a complexidade de k -RC quando k é ímpar, considerando um grafo qualquer.

Teorema 2.2 (ANANTH; NASRE; SARPATWAR, 2011). *Para um inteiro $k \geq 3$ ímpar fixo e um grafo G qualquer, decidir se $rc(G) \leq k$ é NP-completo.*

Ainda em 2011, Li e Li (2011) generalizaram os resultados de Chakraborty *et al.* (2011) e Ananth, Nasre e Sarpatwar (2011).

Teorema 2.3 (LI; LI, 2011). *Para um inteiro $k \geq 2$ fixo, dado um grafo G , decidir se $rc(G) \leq k$ é NP-completo.*

Chandran e Rajendraprasad (2012) apresentaram a complexidade computacional de k -

RC quando restrito a algumas classes de grafos como, por exemplo, os grafos cordais. Para estes grafos, Chandran e Rajendraprasad (2012) provaram que k -RC com $k \geq 3$ é NP-completo. Mesmo quando 3-RC é restrito aos grafos *split*, uma subclasse dos grafos cordais, Chandran e Rajendraprasad (2012) mostraram que k -RC permanece NP-completo. Contudo, os autores apresentaram um algoritmo linear que computa uma coloração arco-íris para qualquer grafo *split* usando no máximo $rc(G) + 1$ cores. Para os grafos *threshold*, uma subclasse dos grafos *split*, Chandran e Rajendraprasad (2012) provaram que k -RC pode ser resolvido em tempo polinomial.

Li, Li e Shi (2015) mostraram que k -RC com $k \geq 3$ é NP-completo quando restrito aos grafos bipartidos. Chartrand *et al.* (2008) provaram que k -RC é polinomial em subclasses dos grafos bipartidos, como bipartidos completos e árvores. Chartrand *et al.* (2008) também provaram que k -RC é polinomial quando a entrada é um ciclo ou um grafo completo.

A complexidade de k -RC ainda é um problema em aberto para as classes de grafos blocos, circulantes, cobras, cografos e sombras¹. O Quadro 1 apresenta um resumo dos resultados existentes na literatura sobre a complexidade computacional para os problemas k -RC e RCP em classes de grafos.

Quadro 1 – Complexidade Computacional de k -RC

G	k -RC	Referência
Árvore	P	(CHARTRAND <i>et al.</i> , 2008)
Bipartido	$k \geq 3$:NPC	(LI; LI; SHI, 2015)
Bipartido completo	P	(CHARTRAND <i>et al.</i> , 2008)
Bloco	Aberto	
Ciclo	P	(CHARTRAND <i>et al.</i> , 2008)
Circulantes	Aberto	
Cobras	Aberto	
Cografos	Aberto	
Completo	P	(CHARTRAND <i>et al.</i> , 2008)
Cordal	$k \geq 2$:NPC	(CHANDRAN; RAJENDRAPRASAD, 2012)
Planar	P	(LAURI, 2016)
Qualquer	$k \geq 2$:NPC	(CHAKRABORTY <i>et al.</i> , 2011) (ANANTH; NASRE; SARPATWAR, 2011) (LI; LI, 2011)
<i>Split</i>	$k = 2, 3$:NPC	(CHANDRAN; RAJENDRAPRASAD, 2012)
Sombras	Aberto	
<i>Threshold</i>	P	(CHANDRAN; RAJENDRAPRASAD, 2012)

Fonte: Autoria própria

Considerando a coloração arco-íris forte, Li e Li (2011) determinaram a complexidade computacional de k -SRC no caso geral.

Teorema 2.4 (LI; LI, 2011). *Para todo inteiro k ímpar fixo, tal que $k \geq 3$, dado um grafo G , decidir se $src(G) \leq k$ é NP-completo.*

¹ A definição dos grafos que não se encontram no índice remissivo deste documento pode ser encontrada em Brandstädt, Le e Spinrad (1999).

Ananth, Nasre e Sarpatwar (2011) mostraram que k -SRC com $k \geq 3$ é NP-completo mesmo quando restrito aos grafos bipartidos. Chartrand *et al.* (2008) mostraram que k -SRC pode ser resolvido em tempo polinomial para bipartidos completos, assim como para árvores, ciclos e completos.

Lauri (2016) provou que o k -SRC com $k \geq 3$ é NP-completo mesmo quando se sabe que a entrada é um grafo cordal.

O Quadro 2 apresenta um resumo dos resultados existentes na literatura sobre a complexidade computacional para os problemas k -SRC e SRCP em classes de grafos.

Quadro 2 – Complexidade Computacional de k -SRC

G	k -SRC	Referência
Árvore	P	(CHARTRAND <i>et al.</i> , 2008)
Bipartido	$k \geq 3$:NPC	(ANANTH; NASRE; SARPATWAR, 2011)
Bipartido completo	P	(CHARTRAND <i>et al.</i> , 2008)
Bloco	P	(LAURI, 2016)
Ciclo	P	(CHARTRAND <i>et al.</i> , 2008)
Circulantes	Aberto	
Cobras	Aberto	
Cografos	Aberto	
Completo	P	(CHARTRAND <i>et al.</i> , 2008)
Cordal	$k \geq 2$:NPC	(LAURI, 2016)
Planar	P	(LAURI, 2016)
Qualquer	$k \geq 2$:NPC	(ANANTH; NASRE; SARPATWAR, 2011; LI; LI, 2011)
<i>Split</i>	$k \geq 2$:NPC	(LAURI, 2016)
Sombras	Aberto	
<i>Threshold</i>	Aberto	

Fonte: Autoria própria

2.3 COLORAÇÃO ARCO-ÍRIS EM ALGUMAS CLASSES DE GRAFOS

Considerando que determinar o número de conexão arco-íris de um grafo qualquer é um problema NP-difícil, diversos autores empreenderam esforços na busca por limitantes inferiores e superiores para o número de conexão arco-íris e na busca por soluções eficientes para classes de grafos específicas (CHAKRABORTY *et al.*, 2011; CHANDRAN; RAJENDRAPRASAD, 2012; SCHIERMEYER, 2009; SCHIERMEYER, 2011).

Em relação à busca por limitantes inferiores e superiores para o número de conexão arco-íris, um resultado seminal de Chartrand *et al.* (2008) explora a quantidade de arestas presentes em uma árvore geradora de G . Como as árvores são grafos conexos, existe um caminho entre qualquer par de vértices destes grafos. Além disso, qualquer subgrafo conexo de G que contenha $V(G)$ tem pelo menos tantas arestas quanto uma árvore geradora de G . Então, para obter uma coloração arco-íris de qualquer grafo simples e conexo, é suficiente atribuir cores distintas para todas as arestas de uma de suas árvores geradoras, colorindo-se as demais arestas do

grafo arbitrariamente. Sabe-se que qualquer árvore com n vértices tem exatamente $n - 1$ arestas. Então, uma coloração arco-íris de uma árvore geradora de um grafo G usa $|V(G)| - 1$ cores e, portanto, $rc(G) \leq |V(G)| - 1$, para qualquer grafo conexo G . Por outro lado, o diâmetro de um grafo G é um limitante inferior para o número de conexão arco-íris de G . De fato, existe um par de vértices em G entre os quais não há caminho de tamanho menor que $diam(G)$. Então, em qualquer coloração arco-íris de G existe um caminho arco-íris com pelo menos $diam(G)$ arestas. Logo, $rc(G) \geq diam(G)$. Destas observações, conclui-se a Proposição 2.5.

Proposição 2.5 (CHARTRAND *et al.*, 2008). *Se G é um grafo conexo e não trivial com n vértices, então $diam(G) \leq rc(G) \leq n - 1$.*

Os primeiros resultados em relação ao número de conexão arco-íris em classes de grafos específicas também são do trabalho seminal de Chartrand *et al.* (2008). Os autores determinaram o número de conexão arco-íris para ciclos, grafos completos e árvores. Nos ciclos C_n com $n \geq 4$, uma coloração arco-íris mínima pode ser obtida atribuindo-se a cor $i \bmod \lceil n/2 \rceil$ para cada aresta $v_i v_{(i+1) \bmod n}$.

Teorema 2.6 (CHARTRAND *et al.*, 2008). *Seja G um grafo com n vértices. Então:*

- (a) $rc(G) = 1$ se, e somente se, G é um grafo completo;
- (b) $rc(G) = \lceil n/2 \rceil$ se G é um ciclo tal que $n \geq 4$.

Podemos observar que o número de conexão arco-íris de um grafo G pode ser correlacionado com o número de pontes do grafo, como mostra a Proposição 2.7.

Proposição 2.7. *Se G é um grafo conexo com p pontes, então $rc(G) \geq p$.*

Demonstração. Em qualquer coloração arco-íris de um grafo G com p pontes, cada cor é utilizada em no máximo uma ponte. Se isto não for verdade, então existem duas pontes, e_k e e_l , coloridas com a mesma cor em um grafo G com uma coloração arco-íris. Então, existe um extremo v da ponte e_k e um extremo u da ponte e_l tal que qualquer caminho entre u e v contém e_k e e_l , contradizendo o fato de que esta é uma coloração arco-íris. \square

Seja G uma árvore com n vértices. Embora a prova de que $rc(G) = n - 1$ seja intuitiva, é interessante conhecer os argumentos que garantem que nenhum grafo H com n vértices que contenha um ciclo tem $rc(H) = n - 1$.

Teorema 2.8 (CHARTRAND *et al.*, 2008). *Seja G um grafo com m arestas. Então $rc(G) = m$ se, e somente se, G é uma árvore.*

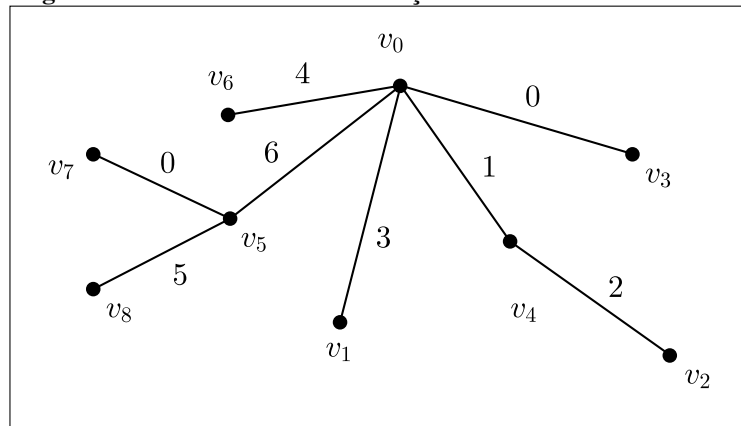
Demonstração. Primeiro vamos provar a suficiência por contraposição. Seja G um grafo conexo com m arestas tal que G não é uma árvore. Então G contém um ciclo $v_0 v_1 \dots v_{k-1} v_0$, sendo $k \geq 3$. Vamos construir uma coloração arco-íris para G utilizando $m - 1$ cores. Utilize cor

0 para as arestas v_0v_1 e v_1v_2 , e outras $m - 2$ cores distintas para as demais $m - 2$ arestas de G . Note que esta é uma coloração arco-íris para G utilizando $m - 1$ cores, já que o caminho $v_0v_{k-1}v_{k-2}v_{k-3} \dots v_2$ é um caminho arco-íris entre v_0 e v_2 . Portanto, $rc(G) \leq m - 1$.

A necessidade é consequência da Proposição 2.7, uma vez que numa árvore toda aresta é ponte. \square

A Figura 5 apresenta uma árvore G com nove vértices e uma coloração de arestas usando sete cores. Observe que as arestas v_0v_3 e v_5v_7 são as únicas coloridas com a mesma cor. O único caminho entre os vértices v_3 e v_7 contém as duas arestas com cor 0 e, portanto, não é arco-íris.

Figura 5 – Árvore com uma coloração de arestas



Fonte: Autoria própria

Ainda considerando classes de grafos com pontes, a Proposição 2.9 e o Teorema 2.10 apresentam o número de conexão arco-íris dos grafos *panelas* e *sunlets*.² O número de conexão arco-íris dos grafos *panelas* será utilizado em uma prova no Capítulo 4.

Proposição 2.9. *Seja $n \geq 3$ e G um grafo n -panela. Então $rc(G) = diam(G) = \lfloor n/2 \rfloor + 1$.*

Demonstração. É suficiente exibir uma coloração arco-íris para uma n -panela G .

Quando $n = 3$, atribua a cor 0 para as arestas do ciclo e a cor 1 para a ponte.

Se $n \geq 4$, considere a coloração arco-íris ϕ tal que:

$$\phi(e) = \begin{cases} i \bmod \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, & \text{para } e = v_i v_{(i+1) \bmod n} \text{ onde } 0 \leq i < n; \\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, & \text{para } e = v_0 v_n. \end{cases}$$

\square

² Sy, Medika e Yulianti (2013) também apresentaram uma prova de $rc(R_n) = \lfloor n/2 \rfloor + n$, mas esta prova está incorreta.

Teorema 2.10 (PRABHA; RAJASINGH, 2012). *Se R_n é um sunlet com $2n$ vértices, com $n \geq 3$, então*

$$rc(R_n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \text{ é ímpar,} \\ n + 1, & \text{se } n \text{ é par.} \end{cases}$$

Os próximos resultados referem-se a subclasses dos grafos de junção e dos grafos de produto cartesiano.

Neste trabalho, temos restringido nosso estudo apenas a grafos conexos. Observe que um grafo $G + H$ é sempre conexo, mesmo quando G ou H são desconexos. Por isto, quando tratamos de coloração arco-íris em grafos de junção, não podemos presumir a conexidade de G ou H .

Sendo $G + H$ um grafo de junção, note que $diam(G + H) \leq 2$. Ainda assim, para qualquer inteiro positivo n , a operação $G + H$ pode resultar em um grafo com n pontes, no caso em que G é um grafo vazio com n vértices e H é trivial, i.e. $G + H$ é uma estrela. Portanto, a diferença entre $diam(G + H)$ e $rc(G + H)$ pode ser arbitrariamente grande. Observe que quando $G + H$ é uma estrela e $n > 1$, temos G desconexo e, portanto, $rc(G) = \infty$.

Proposição 2.11. *Para dois grafos G e H quaisquer disjuntos nos vértices tal que G não é trivial, $rc(G + H) \leq \max\{rc(G), rc(H)\}$.*

Demonstração. Existe uma coloração arco-íris com $\max\{rc(G), rc(H)\}$ cores para ambos os grafos. Como G e H são disjuntos nos vértices, ambos admitem uma coloração arco-íris com o mesmo conjunto de $\max\{rc(G), rc(H)\}$ cores. Para completar uma coloração arco-íris de $G + H$, é suficiente atribuir às arestas de junção qualquer uma das cores já utilizadas nas arestas de G e H . Resta apresentar um caminho arco-íris entre quaisquer dois vértices não adjacentes, u e v . Se u e v são vértices ambos em G ou ambos em H , já temos, da construção da coloração a garantia da existência de um caminho arco-íris entre eles. Do contrário, o caminho arco-íris entre eles é composto unicamente por uma aresta de junção. \square

Se G ou H são grafos desconexos, $G + H$ é conexo. Neste caso $rc(G + H)$ é finito.

Teorema 2.12 (SEPTYANTO; SUGENG, 2017). *Sejam G e H , com $E(G) = \emptyset$, dois grafos disjuntos nos vértices (não necessariamente conexos). Então*

$$\min\left\{3, \iota(G)^{\frac{1}{|V(H)|}}\right\} \leq rc(G + H) \leq \max\{3, \iota(G)\}.$$

Se $E(G) \neq \emptyset$ e $E(H) = \emptyset$, então o limitante inferior pode ser melhorado para

$$\min\left\{4, \iota(G)^{\frac{1}{|V(H)|}}\right\}.$$

Além dos limitantes para o número de conexão arco-íris em grafos de junção, apresentados na Proposição 2.11 e no Teorema 2.12, há subclasses para as quais o número de conexão arco-íris é conhecido. Uma destas classes é a das estrelas. Como toda estrela é uma árvore, vale o Teorema 2.8. Outras subclasses de grafos de junção para as quais se conhece o número de conexão arco-íris são as rodas e os leques.

Teorema 2.13 (CHARTRAND *et al.*, 2008). *O grafo roda W_n , com $n \geq 3$, tem número de conexão arco-íris dado por:*

$$rc(W_n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 3, \\ 2, & \text{se } 4 \leq n \leq 6, \\ 3, & \text{se } n \geq 7. \end{cases}$$

Teorema 2.14 (SY; MEDIKA; YULIANTI, 2013). *Seja F_n um grafo leque. Então,*

$$rc(F_n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 2, \\ 2, & \text{se } 3 \leq n \leq 6, \\ 3, & \text{se } n \geq 7. \end{cases}$$

Cografos também são uma subclasse dos grafos de junção. Existem subclasses dos cografos em que o número de conexão arco-íris pode ser atrelado ao número de pontes no grafo, como as estrelas. Mas com exceção de grafos que tenham pontes, o número de conexão arco-íris dos cografos é limitado superiormente a 4.

Teorema 2.15 (D'ALMEIDA, 2018). *Seja $G = G_1 + G_2 + \dots + G_k$ um cografo conexo tal que, para todo i , o grafo G_i tem n_i vértices. Se $k = 2$ e $2 \leq n_1 \leq n_2$, então $rc(G) \leq 4$. Se $k \geq 3$, então $rc(G) \leq 3$.*

O Lema 2.16 identifica os cografos conexos que têm pontes.

Lema 2.16 (D'ALMEIDA, 2018). *Um vértice x é um vértice pendente em um cografo conexo G se, e somente se, $G = K_1 + H$ e x é um vértice com grau 0 em H .*

Considerando os casos em que G é um cografo com vértices pendentes, D'Almeida (2018) prova que o número de pontes pode ser determinante para o número de conexão arco-íris.

Teorema 2.17 (D'ALMEIDA, 2018). *Se $G = G_1 + G_2 + \dots + G_k$ é um cografo conexo com p vértices pendentes, então*

$$rc(G) \begin{cases} = p, & \text{se } p \geq 4 \\ \leq 4, & \text{se } p < 4. \end{cases}$$

Uma das subclasses dos cografos para a qual o número de conexão arco-íris é conhecido são os grafos *threshold*.

Teorema 2.18 (CHANDRAN; RAJENDRAPRASAD, 2012). *Seja G um grafo threshold conexo com $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, tal que $d(v_1) > \dots > d(v_n)$.*

$$rc(G) = \begin{cases} 1, & \text{se } G \text{ é completo,} \\ 2, & \text{se } \sum_{i=k}^n 2^{-d(v_i)} \leq 1 \text{ e } G \text{ não é completo,} \\ \max\{p, 3\}, & \text{se } \sum_{i=k}^n 2^{-d(v_i)} > 1, \end{cases}$$

onde $k = \min\{i : 1 \leq i \leq n \wedge d(v_i) \leq i - 1\}$ e p é o número de vértices pendentes.

Grafos k -partidos completos também são uma subclasse dos cografos, resultantes da operação de junção $G_1 + G_2 + \dots + G_k$ tal que cada G_i é um grafo vazio (i.e. G_i é a união de grafos triviais). Para grafos k -partidos completos, o número de conexão arco-íris é conhecido, como mostram os Teoremas 2.19 e 2.20.

Teorema 2.19 (CHARTRAND *et al.*, 2008). *Se $K_{s,t}$ é um grafo bipartido completo com $2 \leq s \leq t$, então $rc(G) = \min\{\lceil \sqrt[s]{t} \rceil, 4\}$.*

Teorema 2.20 (CHARTRAND *et al.*, 2008). *Se $G = K_{n_1, n_2, n_3, \dots, n_k}$ é um grafo k -partido completo com $k \geq 3$ e $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_k$, onde $s = \sum_{i=1}^{k-1} n_i$, então*

$$rc(G) = \begin{cases} 1 & \text{se } n_k = 1; \\ 2 & \text{se } n_k \geq 2 \text{ e } s > n_k; \\ \min\{\lceil \sqrt[s]{n_k} \rceil, 3\} & \text{se } s \leq n_k. \end{cases}$$

Para os grafos resultantes da operação de produto cartesiano, no caso geral, são conhecidos limitantes superiores para o número de conexão arco-íris.

Teorema 2.21 (LI; SUN, 2010). *Seja $n \geq 2$ e $G = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$, tal que G_i é conexo, $1 \leq i \leq n$. Então $rc(G) \leq \sum_{i=1}^n rc(G_i)$. Além disso, se $\text{diam}(G_i) = rc(G_i)$ para todo G_i , $1 \leq i \leq n$, então, $rc(G) = \sum_{i=1}^n rc(G_i)$.*

Para compreender o Teorema 2.21 vamos apresentar uma ideia da prova. Considere dois grafos G e H ambos com uma coloração arco-íris utilizando $rc(G)$ e $rc(H)$ cores, respectivamente. Considere ainda que os conjuntos de cores usados em G e H são disjuntos. Uma coloração arco-íris para $G \times H$ pode ser obtida atribuindo-se a cada aresta em $G''(j)$ a mesma cor utilizada na respectiva aresta de G , para todo j , e da mesma forma atribuindo-se a cada aresta em $H'(i)$ a mesma cor utilizada na respectiva aresta de H , para todo i . Assim, para cada

par de vértices em um subgrafo $G''(j)$ (ou $H'(i)$) existe um caminho arco-íris. Mais ainda, para um par de vértices que não pertença a um subgrafo $G''(j)$ (ou $H'(i)$), existe um caminho arco-íris, já que as cores utilizadas em subgrafos $G''(j)$ são distintas das cores utilizadas em subgrafos $H'(i)$, para todo i e todo j . Então, $rc(G \times H) \leq rc(G) + rc(H)$. Sabe-se que $diam(G \times H) = diam(G) + diam(H)$. Então, quando $rc(G) = diam(G)$ e $rc(H) = diam(H)$, tem-se $rc(G) + rc(H) = diam(G) + diam(H) = diam(G \times H) \leq rc(G \times H)$. Logo, neste caso, vale a igualdade. Por indução, pode-se obter o resultado do Teorema 2.21 para $G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$.

Sabe-se que $diam(P_n) = n - 1$, $diam(C_n) = \lfloor n/2 \rfloor$ e $diam(K_n) = 1$ para $n \geq 2$. Então, pelos Teoremas 2.6, 2.8 e 2.21, pode-se inferir os seguintes corolários.

Corolário 2.22. *Sejam m e n inteiros maiores que 1, P_m e P_n dois caminhos. Então, $rc(P_m \times P_n) = m + n - 2$.*

Corolário 2.23. *Sejam m e n inteiros pares maiores que 3, C_m e C_n dois ciclos. Então, $rc(C_m \times C_n) = (m + n)/2$.*

Corolário 2.24. *Sejam $m \geq 2$, n par maior que 3, P_m um caminho e C_n um ciclo. Então, $rc(P_m \times C_n) = m - 1 + n/2$.*

Corolário 2.25. *Sejam $m, n \geq 2$, P_m um caminho e K_n um grafo completo. Então, $rc(P_m \times K_n) = m - 1 + 1$.*

Li e Sun (2010) determinaram o número de conexão arco-íris para o produto cartesiano de grafos que possuem o diâmetro igual ao número de conexão arco-íris. Quando um dos grafos da operação de produto cartesiano tem o diâmetro diferente do seu número de conexão arco-íris, como é o caso dos ciclos ímpares, os autores apresentaram um limitante superior. Rocha e Almeida (2017a) determinaram o número de conexão arco-íris para o produto cartesiano de ciclos ímpares com caminhos, ciclos ímpares com ciclos pares e ciclos ímpares com grafos completos. Para o produto cartesiano de dois ciclos ímpares, os autores deixaram mais justo o limitante superior do número de conexão arco-íris em comparação com o limitante dado por Li e Sun (2010).

Teorema 2.26 (ROCHA; ALMEIDA, 2017a). *Se $C_m \times P_n$ tem m ímpar e $n \geq 2$, então $rc(C_m \times P_n) = \lfloor m/2 \rfloor + n - 1$.*

Teorema 2.27 (ROCHA; ALMEIDA, 2017a). *Seja $C_m \times C_n$ um grafo com m ímpar.*

$$rc(C_m \times C_n) \begin{cases} = 2, & \text{se } m = n = 3; \\ = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1, & \text{se } m = 3 \text{ e } n > 3; \\ = \frac{m-1}{2} + \frac{n}{2}, & \text{se } m, n > 3 \text{ e } n \text{ é par}; \\ \leq \frac{m+n}{2}, & \text{se } m, n > 3 \text{ e } n \text{ é ímpar}. \end{cases}$$

Teorema 2.28 (ROCHA, 2017). *Se $C_m \times K_n$ tem $m \geq 5$ ímpar e $n \geq 3$, então $rc(C_m \times K_n) =$*

$$\lfloor m/2 \rfloor + 1.$$

O presente trabalho é continuação da pesquisa realizada no Trabalho de Conclusão de Curso de Rocha (2017). No decorrer do mestrado, provas mais claras e sucintas (com menos casos e enunciados mais completos) para os Teoremas 2.27 e 2.28 foram construídas. Estas provas serão apresentadas no Capítulo 3.

2.4 CRITICALIDADE ARCO-ÍRIS

Primeiramente, discutimos alguns fatos imediatos sobre criticalidade arco-íris.

Proposição 2.29. *Ciclos, grafos completos não triviais e árvores não triviais são grafos arco-íris críticos.*

Demonstração.

- (a) Se G é um grafo completo com $n \geq 2$, para toda aresta $e \in E(G)$ temos que $rc(G) = 1 < rc(G - e) = 2$ se $n > 2$, ou $rc(G) = 1 < \infty = rc(G - e)$ se $n = 2$;
- (b) se G é um ciclo, para toda aresta $e \in E(G)$ temos que $rc(G) = \lfloor n/2 \rfloor < rc(G - e) = n - 1$ se $n > 3$, ou $rc(G) = 1 < 2 = rc(G - e)$ se $n = 3$;
- (c) se G é uma árvore, $rc(G) = n - 1 < \infty = rc(G - e)$ para toda aresta $e \in E(G)$. \square

Proposição 2.30. *O grafo roda W_n é arco-íris crítico se, e somente se, $n = 3$.*

Demonstração. Quando $n = 3$, o grafo W_3 é isomorfo ao grafo completo K_4 e, pela Proposição 2.29 é arco-íris crítico. Temos a necessidade.

A suficiência é consequência dos Teoremas 2.13 e 2.14, já que $rc(W_n - e) = rc(F_n)$, para qualquer aresta e não incidente no vértice universal da roda e $n \geq 4$. \square

Até onde vai nosso conhecimento, há poucos resultados na literatura sobre criticalidade arco-íris e eles são apresentados a seguir.

Rocha e Almeida (2017b) estudaram a criticalidade arco-íris de alguns grafos resultantes da operação de produto cartesiano, obtendo os seguintes resultados.

Teorema 2.31 (ROCHA; ALMEIDA, 2017b). *Sejam m e n inteiros positivos. O grafo $P_m \times P_n$ é arco-íris crítico se, e somente se, ele é isomorfo ao C_4 ou a um caminho.*

Teorema 2.32 (ROCHA; ALMEIDA, 2017b). *O grafo $C_m \times P_n$, com m par e $n \geq 2$, não é arco-íris crítico.*

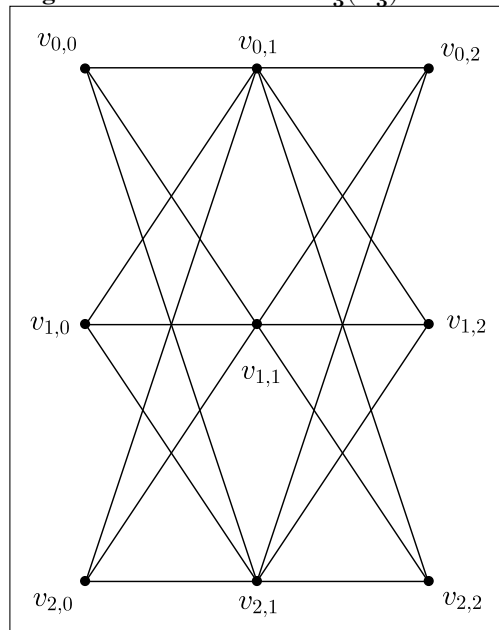
3 RESULTADOS EM COLORAÇÃO ARCO-ÍRIS

Neste capítulo são apresentados os resultados obtidos quanto ao número de conexão arco-íris e número de conexão arco-íris forte.

3.1 GRAFOS SOMBRAS DE CAMINHO

O grafo m -sombra de um grafo conexo G , denotado por $D_m(G)$, é construído a partir de m cópias de G , denotadas por G_1, G_2, \dots, G_m , adicionando-se aresta entre cada vértice $v \in G_i$ e os vizinhos do vértice correspondente a v em cada grafo G_j , para todo par i e j tal que $1 \leq i, j \leq m$ e $i \neq j$. A Figura 6 apresenta o grafo 3-sombra de um caminho P_3 .

Figura 6 – Grafo sombra $D_3(P_3)$



Fonte: Autoria própria

No Teorema 3.1 determinamos o número de conexão arco-íris e o número de conexão arco-íris forte dos grafos sombras de caminho.¹

Teorema 3.1. *Sejam $m \geq 1$ e $n \geq 2$. O grafo sombra $D_m(P_n)$ tem*

$$src(D_m(P_n)) = rc(D_m(P_n)) = diam(D_m(P_n)) = \begin{cases} 2, & \text{se } n = 2 \text{ e } m \geq 2, \\ n - 1, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

¹ O número de conexão arco-íris dos grafos-sombra de caminho já havia sido considerado por A. Arputharmaya e M. H. Mercy no trabalho *Rainbow Coloring of Shadow Graphs* em um periódico predatório, em 2015. Porém, os autores alegaram que o número de conexão arco-íris poderia ser maior que o diâmetro do grafo.

Demonstração. Seja $P_n(i): v_{i,0}v_{i,1} \dots v_{i,n-1}$ um subgrafo de $D_m(P_n)$ correspondente a i -ésima cópia de P_n , para todo i .

Quando $m = 1$ e $n \geq 2$, o grafo $D_1(P_n)$ é isomorfo ao grafo P_n , cujo número de conexão arco-íris é determinado pelo Teorema 2.8.

Se $n = 2$, atribua cor 0 para as arestas que pertencem aos caminhos $P_2(i)$, para todo i . E atribua cor 1 para as demais arestas do grafo. Note que estamos usando $\text{diam}(D_m(P_2)) = 2$ cores. Um caminho arco-íris entre dois vértices do mesmo caminho $P_2(i)$, para qualquer i , é $v_{i,0}v_{i,1}$. Um caminho arco-íris entre dois vértices $v_{i,j}$ e $v_{k,j}$ quando $i \neq k$ é $v_{i,j}v_{k,(j+1) \bmod 2}v_{k,j}$. Para concluir o caso $n = 2$, um caminho arco-íris entre dois vértices $v_{i,j}$ e $v_{k,(j+1) \bmod 2}$ quando $i \neq k$ é $v_{i,j}v_{k,(j+1) \bmod 2}$.

Agora, vamos mostrar que $rc(D_m(P_n)) = n - 1$ quando $n > 2$. Observe que neste caso $\text{diam}(D_m(P_n)) = n - 1$. Portanto, é suficiente mostrar uma coloração arco-íris para o grafo $D_m(P_n)$ com $n - 1$ cores.

Para as arestas $v_{i,j}v_{i,j+1}$ atribua a cor j , para todo i e $j \leq n - 2$. Para cada aresta $v_{i,j}v_{k,j-1}$ onde $0 \leq i < k < m$ e $0 < j < n - 1$, se j é ímpar, atribua a cor j , caso contrário, atribua a cor $j - 1$. Para cada aresta $v_{i,j}v_{k,j+1}$ onde $0 \leq i < k < m$ e $0 \leq j \leq n - 2$, se j é ímpar, atribua a cor $j - 1$, caso contrário, atribua a cor j . Por último, para as arestas $v_{i,n-1}v_{k,n-2}$ onde $0 \leq i < k < m$, se n é ímpar atribua a cor $n - 2$, caso contrário, atribua a cor 0.

Agora vamos mostrar que existe um caminho arco-íris entre qualquer par de vértices $v_{h,i}$ e $v_{j,k}$ tal que $0 \leq h, j < m$ e $0 \leq i, k < n$. Se $h = j$, o menor caminho entre $v_{h,i}$ e $v_{j,k}$ no subgrafo $D_m(P_n)$ induzido pelo conjunto de vértices $\{v_{h,p} : 0 \leq p < n\}$ é um caminho arco-íris. Portanto, assuma sem perda de generalidade que $h < j$. Se $i < k$, o caminho arco-íris é $v_{h,i}v_{j,i+1}v_{j,i+2} \dots v_{j,k}$. Se $i = k$ e i é par, existe pelo menos um dos dois caminhos arco-íris: $v_{h,i}v_{h,i-1}v_{j,k}$ e $v_{h,i}v_{h,i+1}v_{j,k}$ (o primeiro existe somente para $i > 0$ e o segundo existe somente para $i < n - 1$). Se $i = k$ e i é ímpar, existe pelo menos um dos dois caminhos arco-íris: $v_{h,i}v_{j,i-1}v_{j,k}$ ou $v_{h,i}v_{j,i+1}v_{j,k}$. Quando n é par e $0 \leq k < i < n - 1$ ou quando n é ímpar e $0 \leq k < i \leq n - 1$, o caminho arco-íris é $v_{h,i}v_{j,i-1}v_{j,i-2} \dots v_{j,k}$. Quando n é par e $0 \leq k < i = n - 1$, o caminho arco-íris é $v_{h,i}v_{h,i-1}v_{j,i-2} \dots v_{j,k}$ para $k < n - 2$, ou $v_{h,i}v_{j,k}$ para $k = n - 2$.

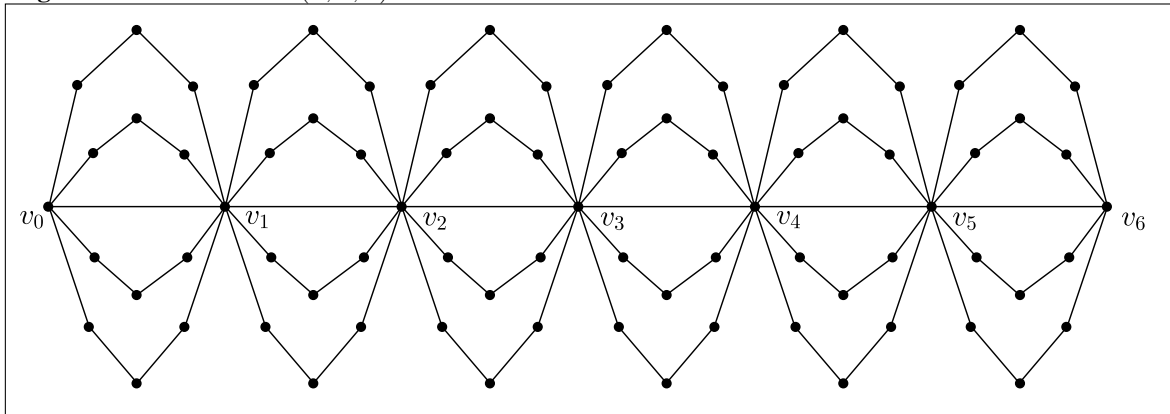
Como o caminho arco-íris entre qualquer par de vértices do grafo $D_m(P_n)$ é um caminho mínimo, podemos concluir que $src(D_m(P_n)) = rc(D_m(P_n))$. \square

3.2 GRAFOS COBRAS

Uma *subdivisão em uma aresta* uv em um grafo G é a operação de remoção da aresta uv e adição de um novo vértice w adjacente a u e v . Um conjunto de t sucessivas subdivisões de uma aresta uv do grafo G é a operação de remoção da aresta uv , seguida da união disjunta de G com um caminho $P_t: w_0w_1 \dots w_{t-1}$ e adição das arestas uw_0 e $w_{t-1}v$. Um grafo *cobra*

ℓ -lábata k -múltipla sobre n vértices, denotado por $S(\ell, k, n)$ é criado a partir de um caminho $P_n: v_0v_1 \dots v_{n-1}$ da seguinte forma. Adicione k múltiplas arestas (novas) entre cada par de vértices v_i e v_{i+1} para $0 \leq i \leq n - 2$, observe que este grafo não é simples. Seja M o conjunto das arestas adicionadas ao caminho P_n . Faça $\ell - 2$ sucessivas subdivisões em cada aresta do conjunto M . A Figura 7 apresenta uma cobra 5-lábata 4-múltipla sobre 7 vértices.

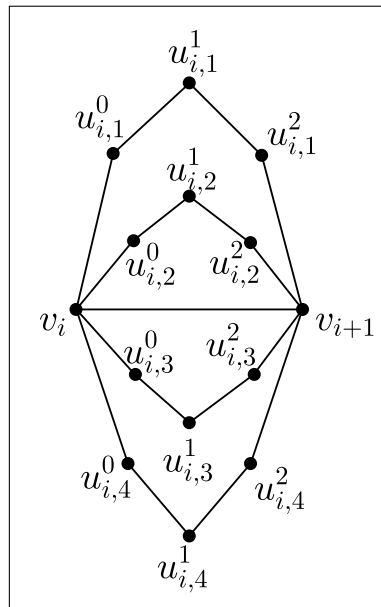
Figura 7 – Grafo cobra $S(5, 4, 7)$



Fonte: Autoria própria

O bloco $B_{i,i+1}$ é o subgrafo de $S(\ell, k, n)$ induzido por v_i, v_{i+1} e todos os vértices adicionados durante as subdivisões de arestas entre v_i e v_{i+1} . Note que existem $k + 1$ caminhos internamente disjuntos entre v_i e v_{i+1} no bloco $B_{i,i+1}$. Numere estes caminhos $P_{i,j}$ onde $0 \leq j \leq k$, tal que o caminho $P_{i,0}$ seja o caminho com a única aresta v_0v_1 . Rotule os vértices de cada caminho $P_{i,j}: u_{i,j}^0, u_{i,j}^1, \dots, u_{i,j}^{\ell-3}$, para i e j tais que $0 \leq i \leq n - 2$ e $1 \leq j \leq k$. A Figura 8 mostra como são rotulados os vértices em cada bloco $B_{i,i+1}$.

Figura 8 – Bloco $B_{i,i+1}$ com rotulação dos vértices



Fonte: Autoria própria

Observe que o grafo $S(\ell, k, n)$ pode ser construído a partir do grafo $S(\ell - 1, k, n)$ subdividindo-se cada aresta $v_i u_{i,j}^0$, para todo $i \leq n - 2$ e $1 \leq j \leq k$.

Lema 3.2. *O grafo $S(\ell, k, n)$ tem*

$$\text{diam}(S(\ell, k, n)) = \begin{cases} \lfloor \ell/2 \rfloor, & \text{se } n = 2 \text{ e } k = 1; \\ \ell - 1, & \text{se } n = 2 \text{ e } k > 1; \\ 2\lfloor \ell/2 \rfloor + n - 3, & \text{se } n > 2. \end{cases}$$

Demonstração. Se $n = 2$ e $k = 1$, o grafo $S(\ell, k, n)$ é um ciclo com ℓ vértices e, portanto, tem $\text{diam}(S(\ell, k, n)) = \lfloor \ell/2 \rfloor$.

Se $k \geq 2$, em cada bloco $B_{i,i+1}$, para p e q distintos e quaisquer, o subgrafo induzido pelas arestas dos caminhos $P_{i,p}$ e $P_{i,q}$, com $i > 0$, é um ciclo com $2\ell - 2$ vértices. Então, quando $n = 2$ e $k > 1$, o diâmetro de $S(\ell, k, 2)$ é $\ell - 1$.

Quando $n > 2$, o diâmetro de $S(\ell, k, n)$ é a distância de um vértice $u_{0,p}^{\lfloor (\ell-3)/2 \rfloor}$, até um vértice $u_{n-2,q}^{\lfloor (\ell-3)/2 \rfloor}$, para quaisquer valores $p > 0$ e $q > 0$. Um caminho mínimo entre $u_{0,p}^{\lfloor (\ell-3)/2 \rfloor}$ e $u_{n-2,q}^{\lfloor (\ell-3)/2 \rfloor}$ é o menor caminho de $u_{0,p}^{\lfloor (\ell-3)/2 \rfloor}$ até v_1 , concatenado com o menor caminho de v_1 a v_{n-2} , concatenado com o menor caminho de v_{n-2} até $u_{n-2,q}^{\lfloor (\ell-3)/2 \rfloor}$. Então, o diâmetro de $S(\ell, k, n)$ é a soma das distâncias desses caminhos, ou seja, é $\lfloor \ell/2 \rfloor + n - 3 + \lfloor \ell/2 \rfloor = 2\lfloor \ell/2 \rfloor + n - 3$. \square

Os grafos $S(3, 1, n)$, $S(3, 2, n)$ e $S(3, 3, n)$ são chamados, respectivamente, de *cobra triangular*, *cobra triangular dupla* e *cobra triangular tripla*.

Proposição 3.3. *Sejam $n \geq 2$ e $k \in \{1, 2\}$. As cobras triangulares e cobras triangulares duplas tem $rc(S(3, k, n)) = \text{diam}(S(3, k, n))$.²*

Demonstração. Suponha $k = 2$. Vamos primeiro apresentar uma coloração arco-íris para o grafo $S(3, 2, n)$. Atribua cor i para as arestas $v_i v_{i+1}$, $u_{i,1}^0 v_i$, $u_{i,2}^0 v_i$ e $u_{i,2}^0 v_{i+1}$, para todo i . Atribua cor 0 para as arestas $u_{i,1}^0 v_{i+1}$. Substitua a cor da aresta $v_0 u_{0,2}^0$ por 1. Um caminho arco-íris de qualquer vértice x do bloco $B_{i,i+1}$ para um vértice y do bloco $B_{j,j+1}$, com $i < j$, é o caminho mínimo de x a v_{i+1} , concatenado com o caminho $v_{i+1} v_{i+2} \dots v_j$, concatenado com o menor caminho de v_j a y . Um caminho arco-íris de um vértice x para um vértice y , ambos no mesmo bloco, é um caminho mínimo entre x e y . Em especial, se $x = u_{i,1}^0$, $y = u_{i,2}^0$ e $i \neq 0$, o caminho arco-íris é $u_{i,1}^0 v_{i+1} u_{i,2}^0$. Quando $i = 0$, o caminho arco-íris entre $u_{0,1}^0$ e $u_{0,2}^0$ é $u_{0,1}^0 v_0 u_{0,2}^0$.

Para o caso $k = 1$, considere o grafo $S(3, 2, n)$ colorido como no caso anterior. Remova os vértices $u_{i,2}^0$ para todo i . Observe que o grafo obtido é o $S(3, 1, n)$. Pelos argumentos já apresentados, existe um caminho arco-íris entre todo par de vértices. Pelo Lema 3.2,

² Os números de conexão arco-íris para os grafos cobra triangular, cobra triangular dupla e cobra triangular tripla já haviam sido considerados por D. Parmar, P. V. Shah e B. Suthar no trabalho *Rainbow Connection Number of Triangular Snake Graph* em um periódico predatório, em 2019. Os autores apresentaram os resultados corretos para os grafos cobra triangular e cobra triangular dupla. Entretanto, para as cobras triangulares triplas, verificou-se que a prova não estava correta (os autores afirmam que o número de conexão arco-íris dos grafos cobra triangular tripla pode ser maior que o diâmetro quando $n \geq 3$).

$diam(S(3, 1, n)) = diam(S(3, 2, n))$, então a coloração arco-íris também é ótima neste caso. \square

Considerando que determinar o número de conexão arco-íris das cobras triangulares triplas era um problema em aberto, apresentamos a seguir uma solução para este problema.

Teorema 3.4. *A cobra triangular tripla tem:*

$$src(S(3, 3, n)) = rc(S(3, 3, n)) = \begin{cases} diam(S(3, 3, n)), & se\ n \geq 2\ e\ n \neq 3; \\ diam(S(3, 3, n)) + 1, & se\ n = 3. \end{cases}$$

Demonstração. Considere $n = 2$. É suficiente apresentar uma coloração arco-íris para o grafo $S(3, 3, 2)$ usando $diam(S(3, 3, 2)) = 2$ cores. Atribua a cor 1 para as arestas $v_0u_{0,1}^0$ e $u_{0,2}^0v_1$. Atribua a cor 0 para as arestas restantes. Pode-se verificar por inspeção que esta é uma coloração arco-íris para o grafo $S(3, 3, 2)$.

Considere $n = 3$. Primeiro vamos mostrar que é possível construir uma coloração arco-íris para $S(3, 3, 3)$ usando $diam(S(3, 3, 3)) + 1 = 3$ cores. Para todo $k \in \{1, 2, 3\}$, atribua a cor 0 para as arestas v_0v_1 e $u_{0,k}^0v_1$, a cor 1 para as arestas v_1v_2 e $v_1u_{1,k}^0$, e a cor $k - 1$ para as arestas $v_0u_{0,k}^0$ e $u_{1,k}^0v_2$. Por inspeção, pode-se verificar que esta é uma coloração arco-íris para o grafo $S(3, 3, 3)$.

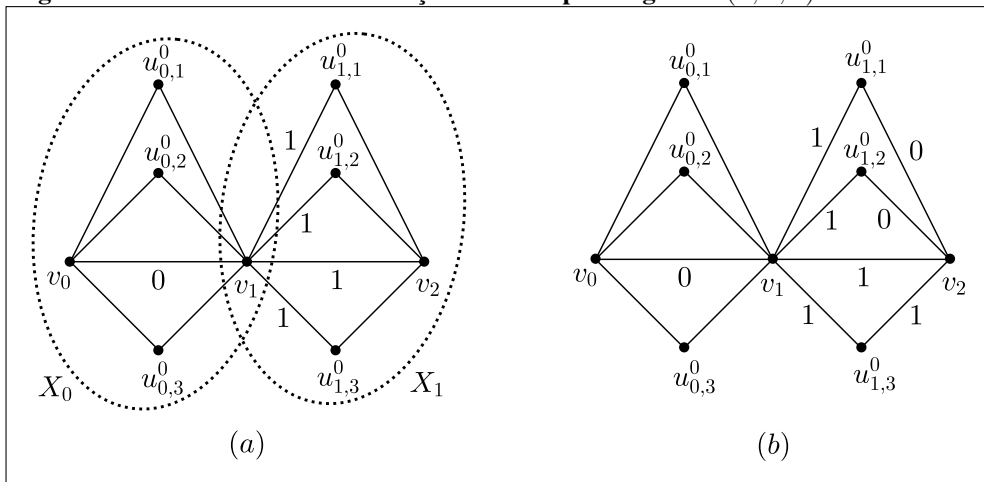
Ainda considerando $n = 3$, assumamos por contradição que existe uma coloração arco-íris para o grafo $S(3, 3, 3)$ usando 2 cores. Sem perda de generalidade, atribua a cor 0 para a aresta v_0v_1 . Como existe um caminho arco-íris entre v_0 e x , para todo $x \in B_{1,2}$, e como a aresta v_0v_1 está colorida com a cor 0 e é a primeira aresta nesses caminhos, as arestas v_1v_2 e $v_1u_{1,k}^0$, com $k \in \{1, 2, 3\}$, devem ser coloridas com a cor 1 (como mostra a Figura 9(a)). Este cenário faz com que os caminhos $u_{1,1}^0v_2u_{1,2}^0$ e $u_{1,1}^0v_2u_{1,3}^0$ sejam os únicos caminhos arco-íris de tamanho 2 entre $u_{1,1}^0$ e os vértices $u_{1,2}^0$ e $u_{1,3}^0$, respectivamente. Como os caminhos compartilham a aresta $u_{1,1}^0v_2$, temos que as arestas $v_2u_{1,2}^0$ e $v_2u_{1,3}^0$ estão coloridas com a mesma cor (como mostra a Figura 9(b)) para o caso em que a aresta $u_{1,1}^0v_2$ está colorida com a cor 1). Porém, os únicos caminhos de tamanho 2 entre $u_{1,2}^0$ e $u_{1,3}^0$ são $u_{1,2}^0v_1u_{1,3}^0$ e $u_{1,2}^0v_2v_{1,3}^0$, que são ambos monocromáticos, uma contradição.

Considere $n > 3$. Vamos construir uma coloração arco-íris para o grafo $S(3, 3, n)$ usando $diam(S(3, 3, n)) = n - 1$ cores. A coloração de $B_{i,i+1}$, para $0 \leq i \leq 2$, é apresentada na Figura 10.

Para $i > 2$, a coloração de $B_{i,i+1}$ é uma generalização da coloração das arestas do bloco $B_{2,3}$ da seguinte forma: atribua a cor i para as arestas v_iv_{i+1} e $v_iu_{i,k}^0$ tal que $1 \leq k \leq 3$. Para as arestas $u_{i,k}^0v_{i+1}$, $1 \leq k \leq 3$, atribua a cor $k - 1$ (como mostra a Figura 10).

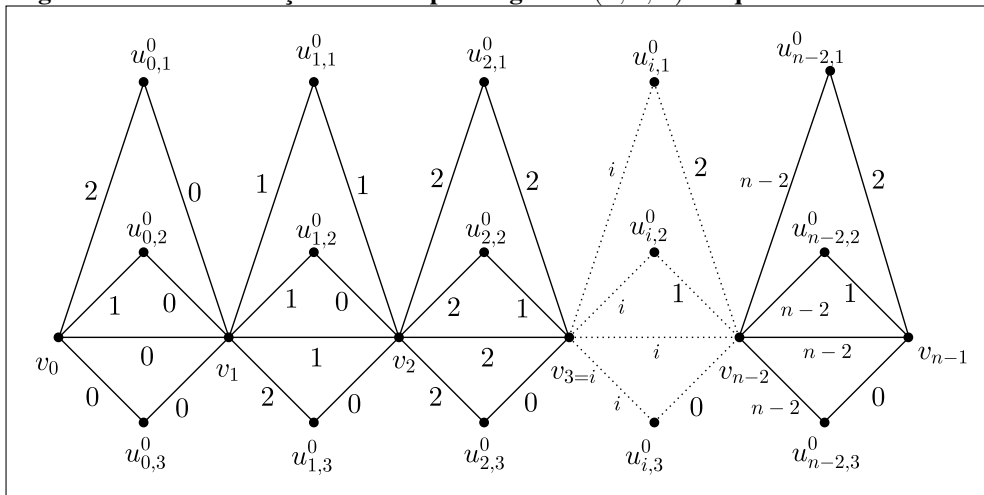
Agora vamos mostrar que existe uma coloração arco-íris entre qualquer par de vértices. Para todo $i \geq 1$ e $\{p, q\} \subseteq \{1, 2, 3\}$, o caminho arco-íris entre $u_{i,p}^0$ e $u_{i,q}^0$, é o caminho de tamanho 2 que contém v_{i+1} . Quando $i = 0$ o caminho arco-íris entre $u_{i,p}^0$ e $u_{i,q}^0$, é o caminho de tamanho 2

Figura 9 – Construindo uma coloração arco-íris para o grafo $S(3, 3, 3)$



Fonte: Autoria própria

Figura 10 – Uma coloração arco-íris para o grafo $S(3, 3, n)$ tal que $n > 3$



Fonte: Autoria própria

que contém v_0 . Para os demais casos existe somente um caminho mínimo entre o par de vértices e este caminho é arco-íris.

Como o caminho arco-íris entre qualquer par de vértices do grafo $S(3, 3, n)$ é o menor caminho, podemos concluir que $src(S(3, 3, n)) = rc(S(3, 3, n))$. \square

O resultado apresentado no Teorema 3.4 foi aceito no V Encontro de Teoria da Computação 2020 e será publicado nos Anais do XL Congresso da Sociedade Brasileira de Computação.

Observe que, das provas apresentadas para as cobras triangulares, cobras triangulares duplas e triplas, não somente determinar o número de conexão arco-íris de um grafo $S(3, k, n)$ para $k \in \{1, 2, 3\}$, mas também computar uma coloração arco-íris ótima deste grafo, pode ser feito em tempo polinomial. Para o caso geral, determinar o número de conexão arco-íris de uma cobra $S(\ell, k, n)$ é um problema em aberto, bem como determinar a complexidade deste problema.

Os Teoremas 3.5 e 3.6 apresentam limitantes superiores para o número de conexão

arco-íris das cobras no caso geral.

Teorema 3.5. *Seja $\ell \geq 3$ e $k \geq 1$. Então, $rc(S(\ell, k, 2)) \leq diam(S(\ell, k, 2)) + 1$.*

Demonstração. Se $k = 1$, então $S(\ell, 1, 2)$ é um ciclo e, pelo Teorema 2.6(b), $rc(S(\ell, 1, 2)) \leq diam(S(\ell, 1, 2)) + 1$. Então, suponha que $k > 1$.

Primeiro, vamos apresentar uma coloração de arestas para o grafo $S(\ell, k, 2)$ utilizando $diam(S(\ell, k, 2)) + 1$ cores e, depois, vamos provar que existe um caminho arco-íris entre qualquer par de vértices.

Atribua cor 0 para as arestas incidentes em v_0 , com exceção da aresta v_0v_1 . Para a aresta v_0v_1 , atribua cor $diam(S(\ell, k, 2))$. Atribua a cor $diam(S(\ell, k, 2)) - 1$ para as arestas $u_{0,j}^{\ell-3}v_1$, onde $1 \leq j \leq k$. Ainda, se $\ell \geq 4$, atribua cor $h + 1$ para as arestas $u_{0,j}^h u_{0,j}^{h+1}$, onde $0 \leq h \leq \ell - 4$ e $1 \leq j \leq k$.

Agora, vamos mostrar que há um caminho arco-íris entre qualquer par de vértices. Para quaisquer valores de i e j , se dois vértices pertencem ao mesmo caminho $P_{i,j}$, então existe um caminho arco-íris entre eles, já que as cores das arestas de $P_{i,j}$ são duas a duas distintas. Resta mostrar que existe caminho arco-íris entre $u_{0,p}^s$ e $u_{0,q}^t$ quando $p \neq q$.

Sem perda de generalidade, suponha $s \leq t$. Um caminho arco-íris entre $u_{0,p}^s$ e $u_{0,q}^t$ é o caminho $u_{0,p}^s u_{0,p}^{s-1} \dots v_0$, concatenado com o caminho v_0v_1 , concatenado com o caminho $v_1 u_{0,q}^{\ell-3} u_{0,q}^{\ell-4} \dots u_{0,q}^t$. \square

O Teorema 3.6 apresenta um limitante superior para o número de conexão arco-íris de um grafo cobra qualquer.

Teorema 3.6. *Sejam $\ell \geq 3$, $k \geq 1$ e $n \geq 2$. Então,*

$$rc(S(\ell, k, n)) \leq \begin{cases} diam(S(\ell, k, n)) + 1, & \text{se } \ell \text{ é par;} \\ diam(S(\ell, k, n)) + 2, & \text{se } \ell \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Demonstração. Se $n = 2$, pelo Teorema 3.5, $rc(S(\ell, k, 2)) \leq diam(S(\ell, k, 2)) + 1$. Então, suponha $n > 2$.

Primeiro, vamos apresentar uma coloração de arestas para o grafo $S(\ell, k, n)$ e, depois, vamos provar que é uma coloração arco-íris.

Pinte cada bloco $B_{i,i+1}$ da mesma forma que o bloco $B_{0,1}$ é colorido no Teorema 3.5. Substitua as cores das arestas do caminho $v_1v_2 \dots v_{n-1}$ atribuindo para cada aresta $v_i v_{i+1}$ a cor $diam(B_{0,1}) + i$.

Foram usadas $diam(B_{0,1}) + n - 1$ cores. Pelo Lema 3.2, o bloco $B_{0,1}$ tem diâmetro $\ell - 1$. Logo, foram utilizadas, $\ell + n - 2$ cores. Quando ℓ é par, pelo Lema 3.2, o número de cores usadas é $\ell + n - 2 = 2\lfloor \ell/2 \rfloor + n - 2 = diam(S(\ell, k, n)) + 1$. Quando ℓ é ímpar, pelo Lema 3.2,

o número de cores usadas é $\ell + n - 2 = \text{diam}(S(\ell, k, n)) + 2$. Vamos mostrar que esta é uma coloração arco-íris.

Se dois vértices pertencem ao mesmo bloco $B_{i,i+1}$, para $0 \leq i \leq n - 2$, então existe um caminho arco-íris entre eles, pelo Teorema 3.5.

Existe um caminho arco-íris entre quaisquer dois vértices v_i e v_j , já que as arestas do caminho $v_0v_1 \dots v_{n-1}$ têm cores distintas umas das outras.

Existe caminho arco-íris entre qualquer vértice $u_{i,p}^h$ e qualquer vértice v_q , $q \leq p$, dado pelo menor caminho de $u_{i,p}^h$ a v_{i+1} concatenado com o menor caminho de v_{i+1} a v_q . Também existe um caminho arco-íris entre $u_{i,p}^h$ e v_q quando $q > p$, dado pelo menor caminho de $u_{i,p}^h$ a v_i concatenado com o menor caminho de v_i a v_q .

Resta provar que existe caminho arco-íris entre dois vértices $u_{r,p}^h$ e $u_{s,q}^i$ quando $r \neq s$. Sem perda de generalidade, suponha $r < s$. São dois casos:

1. se $h \leq i$, o caminho arco-íris é o caminho $u_{r,p}^h u_{r,p}^{h-1} \dots v_r$, concatenado com o caminho $v_r v_{r+1} \dots v_{s+1}$, concatenado com o caminho $v_{s+1} u_{s,q}^{\ell-3} u_{s,q}^{\ell-4} \dots u_{s,q}^i$;
2. se $h > i$, o caminho arco-íris é o caminho $u_{r,p}^h u_{r,p}^{h+1} \dots v_{r+1}$, concatenado com o caminho $v_{r+1} v_{r+2} \dots v_s$, concatenado com o caminho $v_s u_{s,q}^0 u_{s,q}^1 \dots u_{s,q}^i$. \square

3.3 O GRAFO CIRCULANTE $C_{2k}^{1,k}$

Um grafo circulante $C_n^{d_0, d_1, \dots, d_{q-1}}$ é um grafo com conjunto de vértices $\{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$ e conjunto de arestas $\{v_i v_{(i+d_j) \bmod n} : 0 \leq i < n \text{ e } 1 \leq j < q\}$. Note que o grafo C_n^1 é isomorfo ao ciclo C_n e que o grafo $C_n^{1,2,\dots,\lfloor n/2 \rfloor}$ é isomorfo ao grafo completo K_n . O número de conexão arco-íris desses grafos é apresentado no Teorema 2.6. O número de conexão arco-íris dos grafos circulantes $C_{2k}^{1,k}$ tal que $k \geq 2$ é apresentado no Teorema 3.7.

Teorema 3.7. *Seja k um inteiro positivo tal que $k \geq 2$. O grafo circulante $C_{2k}^{1,k}$ tem $\text{src}(C_{2k}^{1,k}) = \text{rc}(C_{2k}^{1,k}) = \text{diam}(C_{2k}^{1,k}) = \lceil k/2 \rceil$.*

Demonstração. Considere o grafo circulante $C_{2k}^{1,k}$ tal que $k \geq 2$. Se $k = 2$, $C_{2k}^{1,k}$ é isomorfo ao grafo completo K_4 e tem $\text{rc}(C_4^{1,2}) = 1$, pelo Teorema 2.6(a). Como $\text{diam}(C_4^{1,2}) = 1$, este caso está resolvido. Considere então o caso em que $k \geq 3$. Ao longo desta prova, por uma questão de simplicidade, todas as operações aritméticas devem ser consideradas módulo $2k$.

Vamos colorir o grafo com $\text{diam}(C_{2k}^{1,k}) = \lceil k/2 \rceil$ cores. Atribua a cor $i \bmod \lceil k/2 \rceil$ para as arestas $v_i v_{i+1}$, $v_{i+k} v_{i+k+1}$, e $v_{i+1} v_{i+1+k}$ tal que $0 \leq i < k$.

Agora vamos mostrar que existe um caminho arco-íris entre qualquer par de vértices v_i e v_j , com $0 \leq i, j < 2k$. Se $(j - i) \bmod (2k) \leq \lceil k/2 \rceil$, então o caminho arco-íris é $v_i v_{i+1} \dots v_j$.

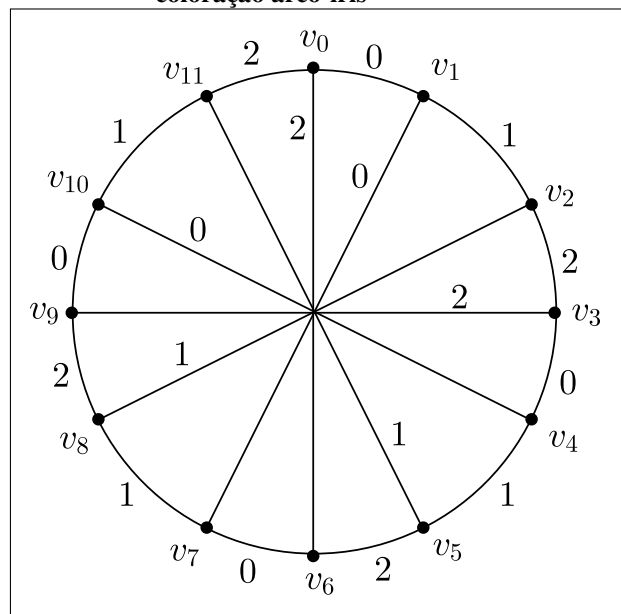
Se $(i - j) \bmod (2k) \leq \lfloor k/2 \rfloor$, o caminho arco-íris é $v_i v_{i-1} \dots v_j$. Se $j = (i + k + q) \bmod (2k)$ para $0 \leq q < \lfloor k/2 \rfloor$, então o caminho arco-íris é $v_i v_{i+k} v_{i+k+1} \dots v_j$. Se $j = (i + k - q) \bmod (2k)$ para $0 \leq q < \lfloor k/2 \rfloor$, então o caminho arco-íris é $v_i v_{i-1} v_{i-2} \dots v_{j+k} v_j$.

Resta mostrar o caminho arco-íris entre v_i e $v_{i+\lceil k/2 \rceil}$, e o caminho arco-íris entre v_i e $v_{i+k+\lfloor k/2 \rfloor}$. Quando $0 \leq i \leq \lfloor k/2 \rfloor$ ou $k < i \leq k + \lfloor k/2 \rfloor$, o caminho arco-íris para $v_{i+\lceil k/2 \rceil}$ é $v_i v_{i+1} \dots v_{i+\lceil k/2 \rceil}$ e o caminho arco-íris para o vértice $v_{i+k+\lfloor k/2 \rfloor}$ é $v_i v_{i+k} v_{i+k+1} \dots v_{i+k+\lfloor k/2 \rfloor}$. Quando $\lfloor k/2 \rfloor < i \leq k$ ou $k + \lfloor k/2 \rfloor < i < 2k$, o caminho arco-íris para o vértice $v_{i+\lceil k/2 \rceil}$ é $v_i v_{i-1} \dots v_{i-\lfloor k/2 \rfloor} v_{i+\lceil k/2 \rceil}$ e o caminho arco-íris para o vértice $v_{i+k+\lfloor k/2 \rfloor}$ é $v_i v_{i-1} v_{i-2} \dots v_{i+k+\lfloor k/2 \rfloor}$.

Como o caminho arco-íris entre qualquer par de vértices do grafo $C_{2k}^{1,k}$ é um caminho mínimo, podemos concluir que $src(C_{2k}^{1,k}) = rc(C_{2k}^{1,k})$. \square

A Figura 11 apresenta o grafo $C_{12}^{1,6}$ com uma coloração arco-íris (forte), utilizando a coloração apresentada no Teorema 3.7.

Figura 11 – Grafo circulante $C_{12}^{1,6}$ com uma coloração arco-íris



Fonte: Autoria própria

3.4 GRAFOS DE JUNÇÃO

Seja G um grafo qualquer, não necessariamente conexo. O número de conexão arco-íris de $G + K_n$, para qualquer inteiro positivo n , pode ser significativamente menor que o número de conexão arco-íris de G . Como exemplos, considere os grafos rodas e leques, resultantes respectivamente das junções $C_n + K_1$ e $P_n + K_1$. Pelos Teoremas 2.13 e 2.14, estes grafos têm número de conexão arco-íris limitado a 3, enquanto o número de conexão arco-íris dos ciclos e dos caminhos com n vértices cresce linearmente em função de n . Os Teoremas 3.8 a 3.12 apresentam outros casos em que o número de conexão arco-íris do grafo de junção é no máximo 3.

Teorema 3.8. *Seja $m \geq 1$. Se $rc(G) \leq 2$, então $rc(G + K_m) = diam(G + K_m)$.*

Demonstração. Se $rc(G) = 1$, então $G + K_m$ é um grafo completo e, pelo Teorema 2.6(a), $rc(G + K_m) = diam(G + K_m) = 1$.

Se $rc(G) = 2$, então $diam(G) = 2$, pois quando $diam(G) = 1$ o grafo G é completo e pelo Teorema 2.6(a), $rc(G) = 1$. Observe que $diam(G + K_m) = diam(G)$. Então, considere uma coloração arco-íris no subgrafo induzido pelo conjunto de vértices $V(G)$ em $G + K_m$, utilizando as cores do conjunto $\{0, 1\}$. Existe um caminho arco-íris de tamanho 2 entre quaisquer dois vértices de G . Atribua a cor 0 para as demais arestas de $G + K_m$. Como $V(K_m)$ é um conjunto de vértices universais no grafo $G + K_m$, existe um caminho arco-íris de tamanho 1 de qualquer vértice de $V(K_m)$ para qualquer vértice de $V(G + K_m)$. \square

Teorema 3.9. *Se G e H possuem ao menos um vértice universal cada, então $rc(G + H) \leq 3$.*

Demonstração. Vamos provar que existe uma 3-coloração arco-íris para o grafo $G + H$. Seja y um vértice universal em G e seja x um vértice universal em H . Atribua a cor 0 para as arestas do subgrafo induzido pelo conjunto de vértices $V(G)$ e para as arestas do subgrafo induzido pelo conjunto de vértices $V(H)$. Atribua a cor 1 para as arestas vx e yz , para todo $z \in V(H)$ e $v \in V(G)$. Substitua a cor da aresta yx pela cor 2. Atribua a cor 2 para as demais arestas de $G + H$. Resta mostrar que esta é uma 3-coloração arco-íris para o grafo $G + H$. Vértices adjacentes possuem caminho arco-íris de tamanho 1. Sejam u e w dois vértices não adjacentes em $G + H$. O caminho arco-íris entre eles é $uxyw$. \square

Teorema 3.10. *Sejam G e H dois grafos que possuem pelo menos uma componente não trivial cada um. Então, $rc(G + H) \leq 3$.*

Demonstração. Vamos provar que existe uma 3-coloração arco-íris para o grafo $G + H$. Atribua a cor 0 para as arestas do subgrafo induzido pelo conjunto de vértices $V(G)$ e para as arestas do subgrafo induzido por $V(H)$. Como G e H possuem uma componente não trivial, então cada um deles possui pelo menos uma aresta. Sejam $xy \in E(H)$ e $zw \in E(G)$. Atribua a cor 1 para toda aresta xv tal que $v \in V(G)$ e para toda aresta zt tal que $t \in V(H)$. Atribua a cor 2 para as demais arestas de $G + H$. Resta mostrar que esta é uma 3-coloração arco-íris para o grafo $G + H$. Vértices adjacentes possuem caminho arco-íris de tamanho 1. Sejam u e v dois vértices não adjacentes em $G + H$. Primeiro, suponha que u e v pertencem a $V(G)$. Se um deles for igual a z , assumamos sem perda de generalidade que $z = u$. O caminho arco-íris entre u e v é $uxyv$. Então suponha que u e v pertencem a $V(H)$. Se um deles for x , assumamos sem perda de generalidade que $x = u$. O caminho arco-íris entre u e v é $uzwv$. \square

O Teorema 3.11 considera o caso em que o grafo $G + H$ é formado a partir de um grafo G sem vértice universal, ou seja, o Teorema 3.9 não cobre este caso. Além disso, o grafo H não tem aresta e, portanto, o Teorema 3.10 também não cobre este caso.

Teorema 3.11. *Sejam $n \geq 3$ e R_n o grafo n -sunlet. Então, $rc(R_n + K_1) = 3$.*

Demonstração. Considere o grafo *sunlet* R_n . Rotule os vértices de R_n da seguinte forma: os vértices do ciclo devem ser rotulados u_0, u_1, \dots, u_{n-1} tal que u_i é adjacente a u_{i+1} , para $0 \leq i < n$, com operações tomadas módulo n . Os vértices pendentos devem ser rotulados de maneira que u_i seja adjacente a v_i , para $0 \leq i < n$.

Vamos atribuir uma coloração arco-íris para o grafo $R_n + K_1$. Seja $V(K_1) = \{x\}$. Atribua a cor 1 para as arestas $u_i v_i$ e a cor 2 para as arestas $x u_i$, para $0 \leq i < n$. Atribua cor 0 para as arestas restantes no grafo.

Agora vamos mostrar que existe um caminho arco-íris entre qualquer par de vértices de $R_n + K_1$. Vértices adjacentes têm um caminho arco-íris de tamanho 1. O caminho arco-íris de um vértice v_i a um vértice v_j é $v_i x u_j v_j$, para $0 \leq i, j < n$. O caminho arco-íris de um vértice u_i a um vértice u_j é o caminho $u_i v_i x u_j$, para $0 \leq i, j < n$. O caminho arco-íris de um vértice u_i a um vértice v_j é o caminho $u_i x v_j$, para $0 \leq i, j < n$. Como existe um caminho entre qualquer par de vértices de $R_n + K_1$ com uma 3-coloração arco-íris, $rc(R_n + K_1) \leq 3$.

Suponha que existe uma 2-coloração arco-íris para $R_n + K_1$. Considere os vértices v_0, v_1 e v_2 . Existe apenas um caminho de tamanho 2 entre cada par tomado dentre esses vértices, sendo este $v_i x v_j$, para $0 \leq i, j < 3$. Sem perda de generalidade, seja 0 a cor da aresta $v_0 x$. Para existir um caminho arco-íris de v_0 aos vértices v_1 e v_2 , as arestas $x v_1$ e $x v_2$ necessitam ter cores distintas da cor da aresta $v_0 x$. Seja 1 a cor das arestas $x v_1$ e $x v_2$. Observe que não existe um caminho arco-íris do vértice v_1 ao vértice v_2 dado que o único caminho de tamanho 2 não é arco-íris, uma contradição. Portanto, não existe 2-coloração arco-íris para $R_n + K_1$. Logo, $rc(R_n + K_1) = 3$. \square

No Teorema 3.12, apresentamos um caso em que G e H são ambos não vazios e o número de conexão arco-íris de $G + H$ é estritamente menor que 3.

Teorema 3.12. *Seja R_n o grafo n -sunlet com $n \geq 3$ e G um grafo com $rc(G) \leq 2$. Se $|V(G)| \geq n - 1$, então $rc(R_n + G) = 2$.*

Demonstração. Considere o grafo *sunlet* R_n . Rotule os vértices de R_n da seguinte forma: os vértices do ciclo devem ser rotulados u_0, u_1, \dots, u_{n-1} tal que u_i é adjacente a u_{i+1} , para $0 \leq i < n$, com operações tomadas módulo n . Os vértices pendentos devem ser rotulados v_i de maneira que u_i seja adjacente a v_i , para $0 \leq i < n$. Os vértices de G devem ser rotulados $x_0, x_1, \dots, x_{|V(G)|-1}$.

Para provar que $rc(R_n + G) = 2$, é suficiente apresentar uma 2-coloração arco-íris para o grafo $R_n + G$. Como $rc(G) \leq 2$, considere uma $rc(G)$ -coloração arco-íris em G usando as cores 0 e 1. Atribua a cor 0 para as arestas $v_i x_i$ e $u_i x_i$, para $0 \leq i < n$, e a cor 1 para as demais arestas do grafo.

Agora resta mostrar que esta é uma coloração arco-íris. Vértices adjacentes têm caminho arco-íris de tamanho 1. Quaisquer dois vértices de $V(G)$ têm um caminho arco-íris entre si, já que G foi colorido com uma coloração arco-íris.

Vamos apresentar uma coloração arco-íris entre $w_i \in \{u_i, v_i\}$ e $w_j \in \{u_j, v_j\}$ para todo par i, j , tal que $0 \leq i, j < n$. Note que se $i = j$, então ou $w_i = w_j$ ou w_i é adjacente a w_j , portanto existe caminho arco-íris. Resta considerar o caso em que $i \neq j$. Sem perda de generalidade, assumamos $i < j$. Então $i \leq n - 2$. Como $|V(G)| \geq n - 1$, a aresta $w_i x_i$ existe. Como $R_n + G$ é um grafo junção, a aresta $x_i w_j$ também existe. Portanto, o caminho arco-íris é $w_i x_i w_j$, para $0 \leq i \leq n - 2$. \square

Corolário 3.13. *Se R_n é um grafo sunlet e K_m um grafo completo, $n \geq 3$ e $m \geq 1$, então*

$$rc(R_n + K_m) \begin{cases} = 2, & \text{se } m \geq n - 1; \\ = 3, & \text{se } m = 1; \\ \leq 3, & \text{se } 1 < m \leq n - 2. \end{cases}$$

Demonstração. Quando $m \geq n - 1$, está provado pelo Teorema 3.12. Para $m = 1$, está provado pelo Teorema 3.11. Para $m > 1$, com $m \leq n - 2$, está provado pelo Teorema 3.10. \square

Observe que os Teoremas 3.9 e 3.10 melhoram o limitante superior do número de conexão arco-íris para alguns cografos apresentados no Teorema 2.15.

Pelo Teorema 2.17, todo cografo conexo G com $p \geq 4$ vértices pendentes tem $rc(G) = p$. Para o caso em que G tem no máximo três vértices pendentes, o Teorema 2.17 garante que $rc(G) \leq 4$. No Teorema 3.14 provamos que $rc(G) = p$ mesmo quando $p = 3$.

Teorema 3.14. *Se G é um cografo conexo com $p \geq 3$ vértices pendentes, então $rc(G) = p$.*

Demonstração. Seja G , um cografo conexo com p vértices pendentes. Pelo Lema 2.16, $G = G_1 + G_2$ tal que G_1 é um K_1 e G_2 tem p vértices isolados. Seja S o conjunto dos vértices isolados em G_2 .

Observe que as arestas que incidem em S são pontes no grafo G e, pela Proposição 2.7, são necessárias p cores para as colorir. Portanto, $rc(G) \geq p$. Considere então que as p pontes estão coloridas com p cores distintas. Resta colorir as demais arestas de G , se existirem, de forma a garantir uma coloração arco-íris para G . Sejam $V(G_1) = \{x\}$ e C_1, C_2, \dots, C_q , as componentes conexas de G_2 que têm pelo menos dois vértices. Considere um vértice em cada componente C_i , para $1 \leq i \leq q$, vamos denotar este vértice por u_i . Para cada vértice $v \neq u_i$ na componente C_i , para $1 \leq i \leq q$, vamos denotar por $dist_{G_2}(u_i, v)$, a distância entre v e u_i no grafo G_2 . Desta forma, se v é vizinho de u_i , então $dist_{G_2}(u_i, v) = 1$; e se v pertence a C_i mas não é adjacente a u_i , então $dist_{G_2}(u_i, v) = 2$, pois G_2 é um cografo e, portanto, cada componente conexa C_i é um subgrafo com diâmetro no máximo 2. Considere $v \in C_i$ onde $1 \leq i \leq q$. Se $v \neq u_i$ e $dist_{G_2}(u_i, v) = 1$, atribua a cor 2 para as arestas xv . Se $v \neq u_i$ e $dist_{G_2}(u_i, v) = 2$,

atribua a cor 0 para as arestas xv . Atribua a cor 0 para as arestas xu_i e cor 1 para as demais arestas não coloridas do grafo. Vamos provar que esta é uma coloração arco-íris de G .

Vértices adjacentes em G têm caminho arco-íris de tamanho 1. Considere então dois vértices não adjacentes, v e w . Se v e w são dois vértices isolados de G_2 , então o caminho arco-íris entre eles é vxw , já que todas as pontes receberam cores diferentes. Então, suponha que v e w pertencem a componentes conexas não triviais de G_2 . Sejam C_v e C_w as componentes de G_2 que contêm v e w , respectivamente. Se $dist_{G_2}(u_v, v) = 1$ e $dist_{G_2}(u_w, w) = 1$, então um caminho arco-íris entre v e w é $vxu_w w$. Note que este é um caminho arco-íris mesmo quando v e w pertencem à mesma componente conexa de G_2 . Se $dist_{G_2}(u_v, v) = 1$ e $w = u_w$ (ou vice-versa), então um caminho arco-íris é wxv . Se $v = u_v$, $w = u_w$ e $u_v \neq u_w$, então o caminho arco-íris é $wxyv$, onde y é qualquer vértice que satisfaça $dist_{G_2}(u_v, y) = 1$ (y existe pois C_v tem pelo menos dois vértices). Se $v = u_v$ e $dist_{G_2}(u_w, w) = 2$, então w tem um vizinho em comum com u_w , que será denotado por h . Neste caso, um caminho arco-íris é $vxhw$. Se $dist_{G_2}(u_v, v) = 1$ e $dist_{G_2}(u_w, w) = 2$, então um caminho arco-íris é vxw . Se $dist_{G_2}(u_v, v) = 2$ e $dist_{G_2}(u_w, w) = 2$, então o caminho $wxhv$ é arco-íris, onde h é um vizinho comum de v e u_v .

Por fim, considere o caso em que v é pendente e u pertence a uma componente não trivial de G_2 . Caso a aresta incidente em v tenha cor $c > 2$, então existe um caminho arco-íris, pois existe um caminho arco-íris do vértice x para qualquer vértice $w \neq v$ que não usa a cor c , vamos denotar tal caminho por $x \dots w$. É suficiente fazer o caminho $vx \dots w$. Se a ponte incidente em v tem cor 0, então existe um caminho arco-íris entre v e qualquer $w \in C_i$, para $1 \leq i \leq q$, dado por vxw quando $dist_{G_2}(u_w, w) = 1$, ou por $vxhw$ onde h é um vértice comum entre u_w e w (mesmo que $u_w = w$). Se no vértice pendente v incide a cor 1, então existe um caminho arco-íris entre v e qualquer $w \in G_2$, dado por vxw . Se no vértice pendente v incide a cor 2, então existe um caminho arco-íris entre v e qualquer $w \in C_i$, para $1 \leq i \leq q$, dado por vxw , quando $w = u_w$ ou quando $dist_{G_2}(u_w, w) = 2$. Também existe caminho arco-íris se $dist_{G_2}(u_w, w) = 1$, dado por $vxu_w w$. Portanto, $rc(G) = p$ quando $p \geq 3$. \square

Pelos Teoremas 2.15, 2.17 e 3.14, tem-se o seguinte corolário.

Corolário 3.15. *Se $G = G_1 + G_2 + \dots + G_k$ é um cografo conexo com $p \geq 0$ vértices pendentes, então*

$$rc(G) \begin{cases} = p, & \text{se } p \geq 3; \\ \leq 3, & \text{se } k \geq 3, \text{ ou se } k = 2, G_1 \text{ é trivial e } 0 \leq p \leq 3; \\ \leq 4, & \text{se } k = 2 \text{ e nem } G_1, \text{ nem } G_2 \text{ é trivial.} \end{cases}$$

3.5 GRAFOS DE PRODUTO CARTESIANO

Nesta seção são apresentadas provas mais sucintas para os Teoremas 2.27 e 2.28.

O Teorema 2.27 determina $rc(C_m \times C_n)$ quando m ou n é ímpar, e apresenta um limitante superior mais justo que o conhecido pelo Teorema 2.21 para $rc(C_m \times C_n)$ quando m e n são ímpares. A seguir, apresentamos uma prova mais concisa (com menos casos) para este resultado.

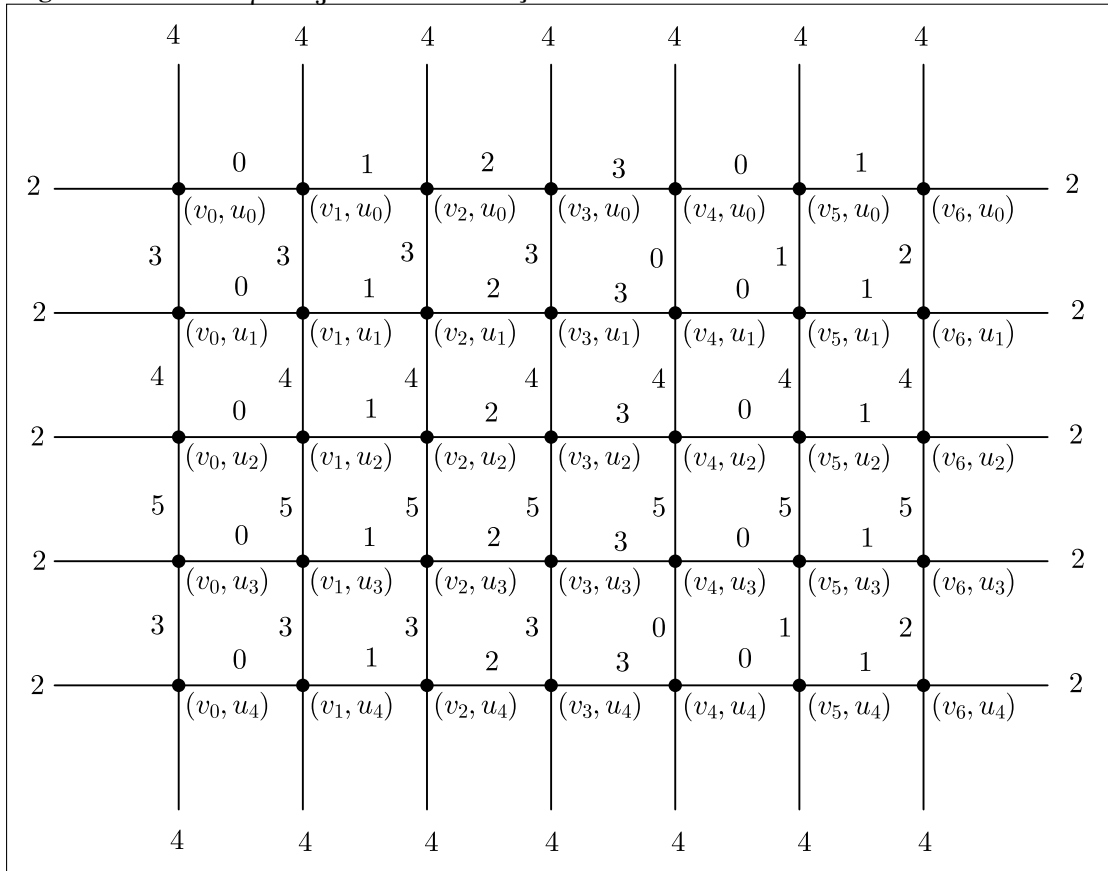
Teorema 3.16. *Sejam $m, n \geq 3$. Então, $rc(C_m \times C_n) \leq diam(C_m \times C_n) + 1$. Além disso, se m ou n é par ou $m = n = 3$, então $rc(C_m \times C_n) = diam(C_m \times C_n)$.*

Demonstração. Considere dois ciclos $C_m: v_0v_1 \dots v_{m-1}v_0$ e $C_n: u_0u_1 \dots u_{n-1}u_0$ tal que $m \geq 3$ e $n \geq 3$. No caso em que m ou n é par, considere sem perda de generalidade que n é par.

Se $m = n = 3$, ou se m e n são inteiros pares, então está provado pelo Teorema 2.21 que $rc(C_m \times C_n) = diam(C_m \times C_n)$. Resta mostrar o caso em que um entre m e n é ímpar e maior que 3.

Para cada i e j , atribua a cor $i \bmod \lceil m/2 \rceil$ para a aresta $(v_i, u_j)(v_{(i+1) \bmod m}, u_j)$ e a cor $\lfloor m/2 \rfloor + j \bmod \lceil n/2 \rceil$ para a aresta $(v_i, u_j)(v_i, u_{(j+1) \bmod n})$. Se $\lceil m/2 \rceil \leq i < m$ e $j \equiv 0 \pmod{\lceil n/2 \rceil}$, substitua a cor da aresta $(v_i, u_j)(v_i, u_{j+1})$ por $i \bmod \lceil m/2 \rceil$. A Figura 12 apresenta esta coloração no grafo $C_7 \times C_5$.

Figura 12 – Grafo $C_7 \times C_5$ com uma coloração arco-íris



Fonte: Autoria própria

Vamos mostrar que esta é uma coloração arco-íris para $C_m \times C_n$, apresentando um caminho arco-íris entre qualquer par de vértices (v_i, u_j) e (v_k, u_l) , para todo i e j , e para todo k e

l. Seja H o subgrafo de $C_m \times C_n$ induzido pelo conjunto de arestas com cores $\{0, 1, \dots, \lfloor m/2 \rfloor\}$.

Se (v_i, u_j) e (v_k, u_l) pertencem à mesma componente conexa em H , então ou $j = l$ ou, sem perda de generalidade, $l = j + 1$. Se $j = l$, então o caminho arco-íris é o menor caminho entre (v_i, u_j) e (v_k, u_l) em $C_m''(j)$. Considere então $l = j + 1$ e assuma as operações aritméticas modulo m . Seja Y o menor caminho de (v_i, u_j) a (v_k, u_j) em $C_m''(j)$. Se $(v_{i-1}, u_j) \in V(Y)$, então um caminho arco-íris entre (v_i, u_j) e (v_k, u_l) é o caminho $(v_i, u_j)(v_i, u_l)$ concatenado com o menor caminho entre (v_i, u_l) e (v_k, u_l) em $C_m''(l)$, senão, é o caminho Y concatenado com o caminho $(v_k, u_j)(v_k, u_l)$.

Assuma então que (v_i, u_j) e (v_k, u_l) pertencem a componentes conexas distintas em H , O_1 e O_2 , respectivamente. Existe um caminho arco-íris P entre (v_i, u_j) e (v_k, u_j) em O_1 . Se O_1 é um subgrafo isomorfo ao $C_m \times P_2$, então para um único valor $t \in \{j - 1, j + 1\}$, existe um caminho arco-íris Y entre (v_i, u_j) e (v_k, u_t) em O_1 . Como P e Y são caminhos em O_1 , ambos são coloridos com as cores $\{0, 1, \dots, \lfloor m/2 \rfloor\}$. Seja H' um subgrafo de $C_m \times C_n$ induzido pelo conjunto de arestas $E(C_m \times C_n) \setminus E(H)$. Observe que as cores atribuídas para as arestas de H' não são as mesmas atribuídas para as arestas de H . Por construção, em H' existe um caminho arco-íris entre (v_k, u_j) e (v_k, u_l) ou um caminho arco-íris entre (v_k, u_t) e (v_k, u_l) , que chamaremos de Q . Pela concatenação de Q com P ou Y , obtemos um caminho arco-íris entre (v_i, u_j) e (v_k, u_l) .

O conjunto de cores utilizado para colorir o grafo foi $\{0, 1, \dots, \lfloor m/2 \rfloor + \lceil n/2 \rceil - 1\}$. Quando m ou n é par, foram utilizadas $\lfloor m/2 \rfloor + \lfloor n/2 \rfloor = \text{diam}(C_m \times C_n)$ cores. Quando m e n são ímpares e pelo menos um entre m e n é maior que 3, o número de cores usadas é $\text{diam}(C_m \times C_n) + 1$. \square

O Teorema 2.21 determina o número de conexão arco-íris dos grafos $C_m \times K_n$ quando m é par ou $m = 3$. O Teorema 2.28 determina o número de conexão arco-íris dos grafos $C_m \times K_n$, para $m \geq 5$ ímpar e $n \geq 3$. O Teorema 3.17 apresenta uma prova mais clara considerando ambos os casos.

Teorema 3.17. *Sejam os inteiros $m \geq 3$ e $n \geq 1$. Então, $rc(C_m \times K_n) = \lfloor m/2 \rfloor$ se m é par e $n = 1$, ou $rc(C_m \times K_n) = \lfloor m/2 \rfloor + 1$ caso contrário.*

Demonstração. Se $n = 1$, o grafo $C_m \times K_1$ é isomorfo ao grafo C_m e $rc(C_m)$ é conhecido pelo Teorema 2.6(b). Se m é par, $rc(C_m \times K_n)$ é conhecido pelos Teoremas 2.21 e 2.6. Se $n = 2$, então K_2 é um caminho e, pelo Teorema 2.26, $rc(C_m \times K_2)$ é conhecido. Se $n = 3$, $rc(C_m \times K_3)$ é conhecido pelo Teorema 2.27.

Considere o caso em que m é ímpar e $n \geq 4$. Rotule os vértices do ciclo tal que $C_m: v_0 v_1 \dots v_{m-1} v_0$ e os vértices do grafo completo tal que $V(K_n) = \{u_0, u_1, \dots, u_{n-1}\}$. Seja ϕ uma coloração de arestas, utilizando $\text{diam}(C_m \times K_n)$ cores, para o grafo $C_m \times K_n$, definida

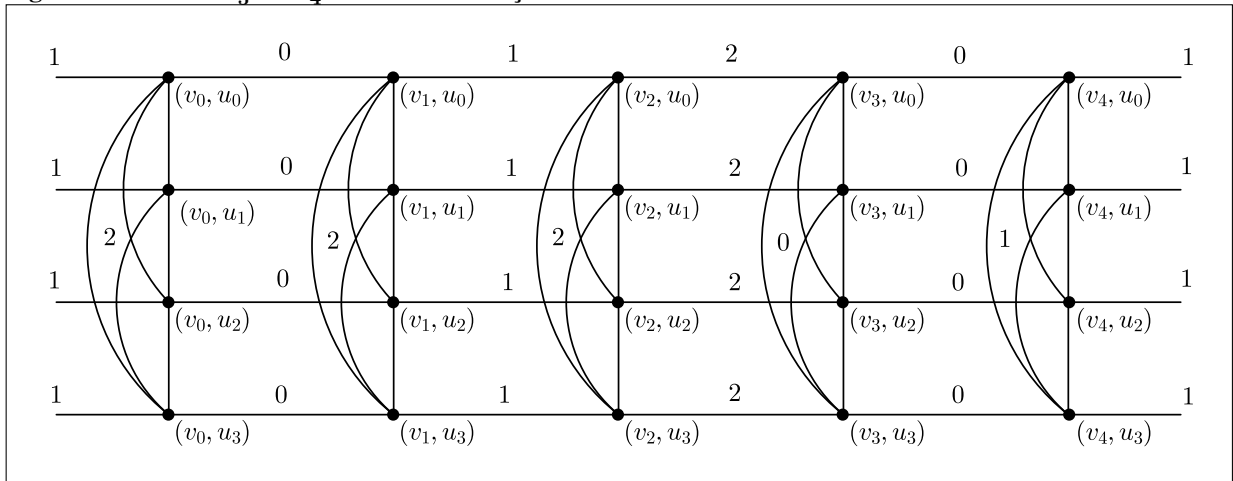
a seguir:

$$\phi(e) = \begin{cases} i \bmod \lceil \frac{m}{2} \rceil, & \text{se } e = (v_i, u_j)(v_{i+1 \bmod m}, u_j) \in \\ & E(C''_m(j)), \forall i \forall j; \\ \lfloor \frac{m}{2} \rfloor, & \text{se } e \in E(K'_n(i)) \text{ e } 0 \leq i \leq \lfloor m/2 \rfloor; \\ i \bmod \lceil \frac{m}{2} \rceil, & \text{se } e \in E(K'_n(i)) \text{ e } \lceil m/2 \rceil \leq i < m. \end{cases}$$

Sejam (v_i, u_j) e (v_k, u_l) dois vértices de $C_m \times K_n$. Se $i = k$ (resp. $j = l$), então um caminho arco-íris entre (v_i, u_j) e (v_k, u_l) é o menor caminho entre esses vértices em $K'_n(i)$ (resp. $C''_m(j)$). Assuma $i \neq k$ e $j \neq l$. Considere as operações módulo m . Seja Y o menor caminho entre (v_i, u_j) e (v_k, u_j) em $C''_m(j)$. Se $(v_{i-1}, u_j) \in V(Y)$, então $(v_i, u_j)(v_i, u_l)$ concatenado com o menor caminho entre (v_i, u_l) e (v_k, u_l) em $C''_m(l)$ é um caminho arco-íris. Senão, Y concatenado com $(v_k, u_j)(v_k, u_l)$ é um caminho arco-íris. \square

A Figura 13 apresenta a coloração arco-íris descrita no Teorema 3.17, para o grafo $C_5 \times K_4$.

Figura 13 – Grafo $C_5 \times K_4$ com uma coloração arco-íris



Fonte: Autoria própria

4 RESULTADOS EM CRITICALIDADE ARCO-ÍRIS

Neste capítulo serão apresentados os resultados obtidos durante o mestrado quanto à criticalidade arco-íris. Observe que, mesmo ciclos sendo grafos arco-íris críticos, os grafos $C_n + K_1$ com $n \geq 4$ não são arco-íris críticos, como mostra a Proposição 2.30. Da mesma forma, mesmo os caminhos sendo grafos arco-íris críticos, os grafos $P_n + K_1$ com $n \geq 3$ não são arco-íris críticos, como é apresentado no Teorema 4.1.

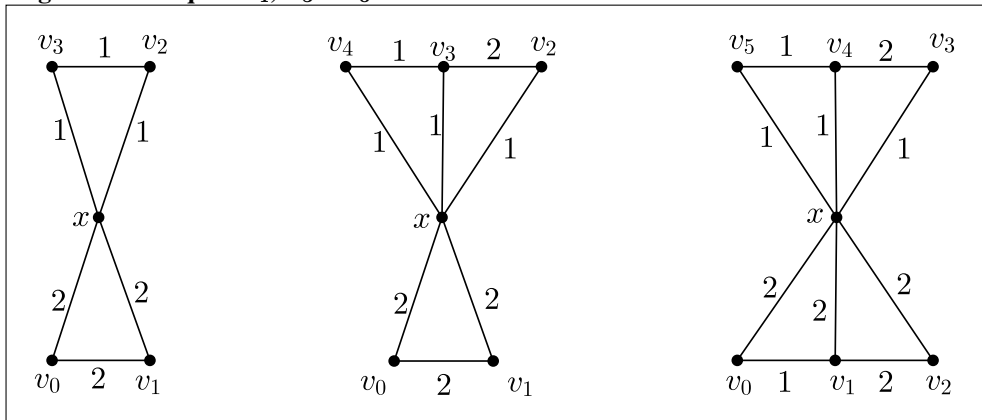
Teorema 4.1. *O grafo F_n é arco-íris crítico se, e somente se, $n = 2$.*

Demonstração. Sejam $F_n = P_n + K_1$ o grafo leque tal que $P_n: v_0v_1 \dots v_{n-1}$ e $V(K_1) = \{x\}$. Quando $n = 2$, F_2 é isomorfo ao grafo K_3 . Pelo Teorema 2.6(a) e pela Proposição 2.29 temos a necessidade. A suficiência é apresentada a seguir.

Considere $e = v_1x \in E(F_n)$. Quando $n = 3$, o grafo $F_3 - e$ é isomorfo ao grafo C_4 . Pelos Teoremas 2.6(b) e 2.14, $rc(F_3) = rc(F_3 - e) = rc(C_4) = 2$. Portanto, F_3 não é arco-íris crítico.

Quando $4 \leq n \leq 6$, temos que $rc(F_n) = 2$ pelo Teorema 2.14. Logo, é suficiente mostrar que a remoção de uma aresta não aumenta o número de conexão arco-íris do grafo. Seja $e = v_{\lfloor n/2 \rfloor - 1}v_{\lfloor n/2 \rfloor} \in E(F_n)$. O grafo $F_n - e$ é a união de dois subgrafos leque, sendo um isomorfo ao $F_{\lfloor n/2 \rfloor}$ e outro isomorfo ao $F_{\lceil n/2 \rceil}$, com apenas o vértice x em comum. Uma coloração arco-íris utilizando 2 cores é apresentada na Figura 14. Portanto, quando $4 \leq n \leq 6$, $rc(F_n - e) = rc(F_n) = 2$ e o grafo F_n não é arco-íris crítico.

Figura 14 – Leques F_4 , F_5 e F_6 não arco-íris críticos



Fonte: Autoria própria

Sabemos pelo Teorema 2.14 que $rc(F_7) = 3$. Seja $e = v_0v_1 \in E(F_n)$. Observe que $F_7 - e$ tem como subgrafo induzido o grafo F_6 e pelo Teorema 2.14, $rc(F_6) = 2$. Considere uma coloração arco-íris ótima para o subgrafo F_6 . Como v_0 é um vértice pendente em $F_7 - e$, é necessário atribuir uma nova cor para a aresta v_0x para obtermos uma coloração arco-íris no grafo $F_7 - e$. Logo, $rc(F_7 - e) = rc(F_7) = 3$. Portanto F_7 não é arco-íris crítico.

Resta considerar os casos em que F_n tem $n \geq 8$. Pelo Teorema 2.14, sabemos que $rc(F_n) = 3$ nestes casos. Seja $e = v_3v_4 \in E(F_n)$. Vamos mostrar que $rc(F_n - e) = 3$. Para $0 \leq i < n$, pinte a aresta $v_i v_{i+1}$ com cor 1 quando i é par e com cor 3 quando i é ímpar. Para $0 \leq i < n$, pinte a aresta $v_i x$ com cor 3 se i é ímpar e com cor 2 se i é par. Note que existe um caminho de tamanho 1 entre x e qualquer outro vértice do grafo. Se i e j têm paridades distintas, então o caminho arco-íris de v_i a v_j é $v_i x v_j$. Se i e j são ímpares, então o caminho arco-íris de v_i a v_j é $v_i v_{i-1} x v_j$. Se i e j são pares, então o caminho arco-íris de v_i a v_j é $v_i v_{i+1} x v_j$. \square

O resultado do Teorema 4.1 foi publicado nos Anais do 3º Workshop de Pesquisa em Computação dos Campos Gerais (ROCHA; ALMEIDA, 2019).

Considere um grafo G tal que $rc(G) = diam(G) \geq 2$. O Teorema 4.2 apresenta condições necessárias e suficientes para que o grafo $G \times P_n$ seja arco-íris crítico.

Teorema 4.2. *Seja G um grafo conexo tal que $rc(G) = diam(G) \geq 2$. O grafo $G \times P_n$ é arco-íris crítico se, e somente se, $n = 1$ e G é arco-íris crítico.*

Demonstração. Por hipótese, $rc(G) = diam(G)$. Então $rc(G \times P_n) = diam(G) + diam(P_n) = diam(G) + (n - 1)$ pelos Teoremas 2.21 e 2.8.

Se $n = 1$, então o grafo $G \times P_n$ é isomorfo ao grafo G , temos então a necessidade. Vamos mostrar a suficiência, considere então $n \geq 2$. Vamos provar que $G \times P_n$ não é arco-íris crítico, independente de G ser arco-íris crítico ou não.

Sejam $V(G) = \{v_0, \dots, v_{m-1}\}$ e ϕ uma coloração arco-íris de G com cores do conjunto $\{0, \dots, diam(G) - 1\}$. Além disso, considere $\phi_j((x, u_j)(y, u_j)) = \phi(xy)$ para toda aresta $(x, u_j)(y, u_j) \in G''(j)$, para todo j . Seja ψ uma coloração de arestas para $G \times P_n$ tal que:

$$\psi(e) = \begin{cases} j, & \text{se } e = (v_i, u_j)(v_i, u_{j+1}) \in E(P'_n(i)), \forall j \leq n - 2, \forall i; \\ n - 1 + (\phi_j(e) + (j \bmod 2)) \bmod diam(G), & \text{se } e \in E(G''(j)), \forall j. \end{cases}$$

Observe que ψ é uma coloração arco-íris com $rc(G \times P_n) = diam(G) + (n - 1)$ cores, pois as cores utilizadas em $P'_n(i)$ são distintas das cores utilizadas em $G''(j)$, para todo i e j . Seja $f = (v_i, u_0)(v_i, u_1) \in E(P'_n(i))$, i qualquer. Vamos mostrar que ψ é uma coloração arco-íris para o grafo $(G \times P_n) - f$.

Primeiro vamos mostrar que existe um caminho arco-íris em $(G \times P_n) - f$ entre os vértices (v_i, u_0) e (v_i, u_1) , para todo i . Sendo $xv_i \in E(G)$ (note que $d_G(v_i) > 0$), as arestas $(v_i, u_0)(x, u_0)$ e $(v_i, u_1)(x, u_1)$ certamente têm cores distintas, dado que $diam(G) \geq 2$. Logo, um caminho arco-íris entre os vértices (v_i, u_0) e (v_i, u_1) é $Q = (v_i, u_0)(x, u_0)(x, u_1)(v_i, u_1)$. Além disso, para todo $j > 1$, um caminho arco-íris entre (v_i, u_0) e (v_i, u_j) é o caminho Q concatenado com o único caminho entre (v_i, u_1) e (v_i, u_j) em $P'_n(i)$. Para os demais casos, um caminho arco-íris entre (v_p, u_q) e (v_r, u_s) em $(G \times P_n) - f$ é o único caminho entre (v_p, u_q) e (v_p, u_s) em $P'_n(p)$ concatenado com qualquer caminho arco-íris entre (v_p, u_s) e (v_r, u_s) em $G''(s)$. \square

Pelo Teorema 4.2 pode-se inferir alguns resultados, que são apresentados nos Corolários 4.3 e 4.4.

Corolário 4.3. *Sejam m e n inteiros positivos. O grafo $P_m \times P_n$ é arco-íris crítico se, e somente se, é isomorfo ao grafo C_4 ou a um caminho.*¹

Demonstração. Observe que $P_m \times P_n$ é isomorfo ao grafo C_4 quando $m = n = 2$, e é isomorfo a um caminho quando $m = 1$ ou $n = 1$. Nos demais casos, pelo menos um entre P_m ou P_n tem diâmetro pelo menos dois e estes casos estão cobertos pelo Teorema 4.2. \square

Corolário 4.4. *O grafo $C_m \times P_n$ com m par e $n \geq 2$ não é arco-íris crítico.*¹

Demonstração. Segue do Teorema 4.2, já que $rc(C_m) = \text{diam}(C_m) \geq 2$ quando m é par. \square

O Teorema 4.5 apresenta condições necessárias e suficientes para que o produto cartesiano $G \times K_n$ seja arco-íris crítico.

Teorema 4.5. *Seja G um grafo conexo tal que $rc(G) = \text{diam}(G) \geq 1$. O grafo $G \times K_n$ é arco-íris crítico se, e somente se, $n = 1$ e G é arco-íris crítico, ou $G \times K_n$ é isomorfo ao grafo C_4 .*

Demonstração. Note que $rc(G \times K_n) = \text{diam}(G) + 1$ pelos Teoremas 2.6(a) e 2.21. Se $n = 1$, então $G \times K_1$ é isomorfo ao grafo G . Observe também que $G \times K_n$ é isomorfo ao grafo C_4 se $n = 1$ e $G = C_4$, ou se G e K_n são isomorfos ao K_2 . Temos então a necessidade.

Vamos mostrar a suficiência. Considere $n \geq 2$ tal que $G \times K_n$ não é isomorfo ao grafo C_4 . Considere também $V(G) = \{v_0, \dots, v_{m-1}\}$ e $V(K_n) = \{u_0, \dots, u_{n-1}\}$. Vamos provar que o grafo $G \times K_n$ não é arco-íris crítico, independente de G ser arco-íris crítico ou não.

Nós podemos assumir sem perda de generalidade que $n \geq 3$, pois:

- se $n = 2$ e $\text{diam}(G) \geq 2$, então $G \times K_n$ não é arco-íris crítico pelo Teorema 4.2;
- se $n = 2$ e $\text{diam}(G) = 1$, então $G = K_m$ (portanto, G é conexo) e $m \geq 3$ (caso contrário, $K_m \times K_n$ seria isomorfo ao ciclo C_4). Neste caso, podemos trocar os papéis de K_m e K_n .

Seja ϕ uma coloração arco-íris de G usando o conjunto de cores $\{0, \dots, \text{diam}(G) - 1\}$. Além disso, seja $\phi_j((x, u_j)(y, u_j)) = \phi(xy)$ para todo $(x, u_j)(y, u_j) \in G''(j)$, para todo j . Seja ψ uma coloração de arestas de $G \times K_n$ dada por:

$$\psi(e) = \begin{cases} 0, & \text{se } e \in E(K'_n(0)) \setminus \{(v_0, u_0)(v_0, u_2)\} \text{ ou } e \in E(K'_n(i)), \forall i > 0; \\ 1 + \phi_j(e), & \text{se } e = (v_0, u_0)(v_0, u_2) \text{ ou } e \in E(G''(j)), \forall j. \end{cases}$$

¹ A criticalidade arco-íris desta classe de grafos já havia sido considerada por K. S. Rao e R. Murali no trabalho *Rainbow Critical Graphs*, em uma revista predatória, em 2014. Porém os autores afirmaram que estes grafos são arco-íris críticos.

Observe que esta é uma coloração arco-íris para o grafo $G \times K_n$ usando $rc(G \times K_n) = \text{diam}(G) + 1$ cores. Agora vamos mostrar que dada a aresta $f = (v_0, u_0)(v_0, u_1) \in E(K'_n(0))$, existe um caminho arco-íris entre qualquer par de vértices (v_p, u_q) e (v_r, u_s) em $(G \times K_n) - f$. Assuma, sem perda de generalidade, que $p \leq r$. Há três casos:

1. se $f = (v_p, u_q)(v_r, u_s)$, então o caminho arco-íris entre (v_p, u_q) e (v_r, u_s) em $(G \times K_n) - f$ é $(v_0, u_0)(v_0, u_2)(v_0, u_1)$;
2. se $f \neq (v_p, u_q)(v_r, u_s)$, $p = r$ ou $q = s$, então $(v_p, u_q), (v_r, u_s) \in V(K'_n(i))$ ou $(v_p, u_q), (v_r, u_s) \in V(G''(j))$, para o mesmo i ou j , e o caminho arco-íris entre (v_p, u_q) e (v_r, u_s) permanece o mesmo;
3. nos demais casos, temos que $r > p$ e portanto $r > 0$, logo $\psi((v_r, u_q)(v_r, u_s)) = 0$ e o caminho arco-íris entre (v_p, u_q) e (v_r, u_s) em $(G \times K_n) - f$ é o caminho arco-íris entre (v_p, u_q) e (v_r, u_q) em $G''(q)$ concatenado com o caminho $(v_r, u_q)(v_r, u_s)$. \square

O Teorema 4.5 tem como consequência direta os Corolários 4.6, 4.7 e 4.8.

Corolário 4.6. *O grafo $P_m \times K_n$, m e n maiores que 1, é arco-íris crítico se, e somente se, é isomorfo ao P_m , K_n ou ao C_4 .*

Corolário 4.7. *O grafo $C_m \times K_n$ tal que $n \geq 1$ e m é par, $m \geq 4$, é arco-íris crítico se, e somente se, $n = 1$.*

Corolário 4.8. *O grafo $K_m \times K_n$ tal que $m \geq 1$ e $n \geq 2$ é arco-íris crítico se, e somente se, é isomorfo ao C_4 ou ao grafo completo.*

A criticalidade arco-íris do produto cartesiano de ciclos pares com caminhos ou ciclos pares com grafos completos já foi considerada nos Corolários 4.4 e 4.7. No Teorema 4.9 é considerada a criticalidade arco-íris do produto cartesiano de dois ciclos pares.

Teorema 4.9. *Sejam $m, n \geq 4$ inteiros pares. O grafo $C_m \times C_n$ não é arco-íris crítico.*

Demonstração. Como m e n são pares, pelos Teoremas 2.21 e 2.6(b), que $rc(C_m \times C_n) = (m + n)/2$. Vamos provar que, existe uma coloração ϕ usando $(m + n)/2$ cores para o grafo $C_m \times C_n$, tal que após a remoção de uma aresta f ainda existe caminho arco-íris entre qualquer par de vértices do grafo.

Sejam $C_m: v_0v_1 \dots v_{m-1}v_0$ e $C_n: u_0u_1 \dots u_{n-1}u_0$ tal que $m \geq 4$, e ϕ a coloração de arestas para $C_m \times C_n$ definida por:

$$\phi(e) = \begin{cases} j \bmod \left(\frac{n}{2}\right), & \text{se } e = (v_i, u_j)(v_i, u_{(j+1) \bmod n}) \in \\ & E(C'_n(i)), \forall i \forall j; \\ \frac{n}{2} + \left((i + j) \bmod \left(\frac{m}{2}\right)\right), & \text{se } e = (v_i, u_j)(v_{(i+1) \bmod m}, u_j) \in \\ & E(C''_m(j)), \forall i \forall j. \end{cases}$$

Observe que ϕ é uma coloração arco-íris para o grafo $C_m \times C_n$, dado que as cores utilizadas em $C'_n(i)$ são distintas das cores utilizadas em $C''_m(j)$, para quaisquer i e j . Seja $f = (v_0, u_0)(v_0, u_1) \in E(C'_n(0))$, vamos mostrar que existe um caminho arco-íris entre qualquer par de vértices (v_p, u_q) e (v_r, u_s) em $(C_m \times C_n) - f$, supondo sem perda de generalidade que $p \leq r$. Seja Y um caminho arco-íris entre (v_p, u_q) e (v_r, u_s) em $(C_m \times C_n)$ definido pela concatenação de um caminho mínimo entre (v_p, u_q) e (v_r, u_q) em $C''_m(q)$ com um caminho mínimo entre (v_r, u_q) e (v_r, u_s) em $C'_n(r)$. Se $p = r = 0$ e se Y contém a aresta f , então um caminho arco-íris entre (v_0, u_q) e (v_0, u_s) em $(C_m \times C_n) - f$ pode ser obtido substituindo-se a aresta f em Y pelo caminho $(v_0, u_0)(v_1, u_0)(v_1, u_1)(v_0, u_1)$ ou por seu reverso $(v_0, u_1)(v_1, u_1)(v_1, u_0)(v_0, u_0)$. Para os demais casos, o caminho Y não contém a aresta f e, portanto, é um caminho arco-íris entre os vértices (v_p, u_q) e (v_r, u_s) . \square

Teorema 4.10. *Considere dois inteiros $m \geq 3$ e $n \geq 1$ e seja G um grafo m -panela. Então, o grafo $G \times P_n$ é arco-íris crítico se, e somente se, $n = 1$.²*

Demonstração. Se $n \geq 2$, então $G \times P_n$ não é arco-íris crítico pela Proposição 2.9 e pelo Teorema 4.2, visto que $rc(G) = diam(G) \geq 2$. Portanto, temos a suficiência.

Vamos mostrar a necessidade. Se $n = 1$, então $G \times P_n$ é isomorfo ao grafo G e então resta então mostrar que G é arco-íris crítico. Seja f uma aresta de G . Se f é uma ponte em G , então $rc(G - f) = \infty > rc(G)$. Agora, vamos mostrar que $rc(G - f) > rc(G)$ quando f é uma aresta do ciclo de G . Neste caso, $G - f$ é isomorfo a uma árvore com m arestas. Então, $rc(G - f) = m > rc(G) = \lfloor m/2 \rfloor + 1$, para todo $m \geq 3$. \square

² A criticalidade arco-íris desta classe de grafos já havia sido considerada por K. S. Rao, R. Murali e S. R. Rajendra no trabalho *Rainbow and Strong Rainbow Criticalness of some Standard Graphs* em uma revista predatória, em 2015. Porém, os autores afirmaram que estes grafos não são arco-íris críticos.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, são determinados o número de conexão arco-íris e o número de conexão arco-íris forte dos grafos sombras de caminhos (Teorema 3.1), cobras triangulares triplas (Teorema 3.4), circulantes $C_{2k}^{1,k}$ (Teorema 3.7) e junção $G + K_m$ quando G tem $rc(G) \leq 2$ (Teorema 3.8). Também foram determinados os números de conexão arco-íris dos grafos junção de *sunlet* (R_n) com G quando $|V(G)| \geq n - 1$ (Teorema 3.12) e de cografos com três vértices pendentes (Teorema 3.14). Foram encontrados limitantes superiores para o número de conexão arco-íris dos grafos cobras (Teorema 3.6), de junção de dois grafos com vértice universal (Teorema 3.9) e de junção $R_n + K_m$ quando $m \leq n - 2$ (Corolário 3.13). Também são apresentadas condições necessárias e suficientes para a criticalidade dos grafos leques (Teorema 4.1), dos produtos cartesianos de $G \times P_n$ (Teorema 4.2) quando $rc(G) = diam(G) \geq 2$ ou quando G é uma panela (Teorema 4.10), $G \times K_m$ quando $rc(G) = diam(G) \geq 1$ (Teorema 4.5) e de $C_m \times C_n$, quando m e n são pares (Teorema 4.9). Ressalta-se que as provas dos resultados sobre o número de conexão arco-íris são algorítmicas e delas pode-se extrair algoritmos polinomiais para a coloração arco-íris (forte) ótima ou com o número de cores igual ao limitante superior estabelecido, de acordo com cada caso.

Em relação à classe dos grafos sombras, determinar o número de conexão arco-íris e o número de conexão arco-íris forte ainda é um problema em aberto. Neste trabalho, estes parâmetros foram apresentados para os grafos da subclasse sombras de caminho. Como trabalho futuro, é interessante investigar o número de conexão arco-íris e o número de conexão arco-íris forte dos grafos sombras de ciclo e sombras de completo.

Embora os grafos cobras $S(\ell, k, n)$ sejam uma família de grafos cujo número de conexão arco-íris não foi determinado, neste trabalho apresentamos um limitante superior para o número de conexão arco-íris destes grafos, como mostra o Teorema 3.6. Podemos observar que quando ℓ é um inteiro par, o limitante superior apresentado restringe significativamente os possíveis valores para o número de conexão arco-íris ($diam(S(\ell, k, n))$ ou $diam(S(\ell, k, n)) + 1$). Mesmo para os casos em que ℓ é um inteiro ímpar, o número de conexão arco-íris ficou restrito a apenas três possibilidades ($rc(S(\ell, k, n)) \in \{diam(S(\ell, k, n)), diam(S(\ell, k, n)) + 1, diam(S(\ell, k, n)) + 2\}$). Na subclasse dos grafos $S(\ell, 3, n)$, onde $\ell = \{1, 2\}$, o número de conexão arco-íris é igual ao diâmetro do grafo. Quando $\ell = 3$, o número de conexão arco-íris é maior que o diâmetro do grafo somente quando $n = 3$. É interessante investigar se é verdade que, quanto maior for ℓ , haverá mais valores de n para os quais $rc(S(\ell, k, n)) \geq diam(S(\ell, k, n)) + 1$.

Quanto aos grafos circulantes, determinar o número de conexão arco-íris e o número de conexão arco-íris forte ainda é um problema em aberto. Neste trabalho, estes parâmetros foram apresentados para os grafos $C_{2k}^{1,k}$. Como trabalho futuro, é interessante investigar o número de conexão arco-íris e o número de conexão arco-íris em potências de ciclo.

Existe uma relação direta entre o diâmetro de um grafo G e o seu número de conexão

arco-íris, dada pela desigualdade $diam(G) \leq rc(G)$. Considerando que os grafos de junção têm diâmetro limitado a 2, é de se esperar que o número de conexão arco-íris desses grafos seja pequeno quando não há vértices pendentes. Índícios para isto foram apresentadas nos Teoremas 3.8, 3.9 e 3.10. Pode-se observar pelo Corolário 3.15 que o número de pontes é determinante para o número de conexão arco-íris de alguns grafos de junção, a exemplo dos cografos. Como trabalho futuro é interessante determinar o número de conexão arco-íris dos grafos de junção. Observe que, quando não há pontes e o grafo não é completo, existem apenas dois valores possíveis para o número de conexão arco-íris dos grafos de junção: 2 ou 3. Esta restrição foi imposta pelo Teorema 3.10.

Seja $C_n \times G$, tal que $n \geq 5$ ímpar e G pertence à união das classes de grafos: caminhos, grafos completos e ciclos pares. Pelos Teoremas 2.26, 3.16 e 3.17, sabemos que $rc(C_n \times G) = diam(C_n \times G)$. Portanto, podemos generalizar o Teorema 2.21 de forma que, se para cada grafo G_i do produto cartesiano $G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$ que for um ciclo ímpar, existir um grafo G_j pertencente à união das classes de grafos: caminhos, grafos completos e ciclos pares; e para cada G_j não pertencente à união das classes citadas tenha $rc(G_j) = diam(G_j)$, então

$$rc(G) = \sum_{i=1}^n rc(G_i).$$

Um *caminho hamiltoniano* em um grafo G é um caminho que contém todos os vértices de G . É interessante investigar condições necessárias e suficientes para que o grafo $G + K_1$ seja arco-íris crítico quando G tem um caminho hamiltoniano. Note que se G tem um caminho hamiltoniano, então $G + K_1$ tem um leque $F_{|V(G)|}$ como subgrafo gerador e $rc(G + K_1) \leq 3$ pelo Teorema 2.14. Pode-se concluir que se G tem um caminho hamiltoniano e $rc(G + K_1) = 3$, então pelo Teorema 2.14, $|V(G)| \geq 7$ e $G + K_1$ não é arco-íris crítico pelo Teorema 4.1. Resta considerar os casos em que $rc(G + K_1) \in \{1, 2\}$. Se $rc(G + K_1) = 1$, pelo Teorema 2.6(a) $G + K_1$ é um grafo completo, então $G + K_1$ é arco-íris crítico pela Proposição 2.29. Então resta considerar o caso em que $rc(G + K_1) = 2$. Quando G tem um caminho hamiltoniano e $rc(G) = 2$, conclui-se que $rc(G + K_1) = 2$, pois basta manter a mesma coloração arco-íris nas arestas do grafo G e reutilizar uma das duas cores para colorir as arestas da junção. Suponha que G tem uma coloração arco-íris com as cores 0 e 1 e que as arestas da junção foram coloridas com cor 0. Sejam v_0 e v_1 dois vértices consecutivos em um caminho hamiltoniano em G e x o vértice do grafo K_1 . Ao remover a aresta v_0x , $G + K_1$ ainda tem uma coloração arco-íris com duas cores. Observe que é suficiente garantir um caminho arco-íris entre v_0 e x já que os caminhos arco-íris entre os demais pares de vértices estão preservados. Para tanto, se a aresta v_0v_1 estiver colorida com cor 1, pinte v_1x com cor 1 e vice-versa. Portanto $G + K_1$ não é arco-íris crítico. Como trabalhos futuros sugere-se o estudo da criticalidade arco-íris de grafos junção $G + K_1$ nos casos em que G tem um caminho hamiltoniano (ou seja, $G + K_1$ tem um leque como subgrafo), $rc(G + K_1) = 2$ e $rc(G) \geq 3$.

Quanto à criticalidade arco-íris em grafos resultantes de produto cartesiano, pode-se observar que, nos casos estudados, os grafos são arco-íris críticos somente em casos muito es-

pecíficos. O Quadro 3 resume os resultados quanto à criticalidade arco-íris de grafos resultantes de produto cartesiano de caminhos, ciclos e grafos completos. Entretanto, observe que o problema permanece em aberto quando pelo menos um dos grafos é um ciclo ímpar.

Quadro 3 – Criticalidade arco-íris de grafos resultantes de produto cartesiano

x		K_n	P_n	C_n	
				n ímpar	n par
C_m	m par	Corolário 4.7	Corolário 4.4	Em aberto	Teorema 4.9
	m ímpar	Em aberto	Em aberto	Em aberto	
P_m		Corolário 4.6	Corolário 4.3		
K_m		Corolário 4.8			

Fonte: Autoria própria

REFERÊNCIAS

- ANANTH, P.; NASRE, M.; SARPATWAR, K. K. Rainbow connectivity: Hardness and tractability. In: **IARCS Annual Conference on Foundations of Software Technology and Theoretical Computer Science (FSTTCS 2011)**. Dagstuhl, Germany: [s.n.], 2011. (Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs), v. 13), p. 241–251.
- ANITHA, R.; LEKSHMI, R. S. N-sun decomposition of complete, complete bipartite and some harary graphs. **International Journal of Computational and Mathematical Sciences**, Citeseer, v. 2, n. 1, p. 33–38, 2008.
- ARORA, S.; BARAK, B. **Complexity theory: A modern approach**. [S.l.]: Cambridge University Press Cambridge, 2009.
- BRANDSTÄDT, A.; LE, V. B.; SPINRAD, J. P. **Graph classes: a survey**. [S.l.]: SIAM, 1999.
- CARO, Y. *et al.* On rainbow connection. **Electrononic Journal of Combinatorics**, v. 15, 2008. R57.
- CHAKRABORTY, S. *et al.* Hardness and algorithms for rainbow connectivity. **Journal of Combinatorial Optimization**, v. 21, p. 330–347, 2011.
- CHANDRAN, L. S.; RAJENDRAPRASAD, D. Rainbow colouring of split and threshold graphs. In: SPRINGER. **International Computing and Combinatorics Conference**. [S.l.], 2012. p. 181–192.
- CHARTRAND, G. *et al.* Rainbow connection in graphs. **Mathematica Bohemica**, Institute of Mathematics, Academy of Sciences of the Czech Republic, v. 133, n. 1, p. 85–98, 2008.
- _____. The rainbow connectivity of a graph. **Networks: An International Journal**, Wiley Online Library, v. 54, n. 2, p. 75–81, 2009.
- CHARTRAND, G.; OKAMOTO, F.; ZHANG, P. Rainbow trees in graphs and generalized connectivity. **Networks: An International Journal**, Wiley Online Library, v. 55, n. 4, p. 360–367, 2010.
- CHARTRAND, G.; ZHANG, P. **Chromatic graph theory**. [S.l.]: CRC press, 2009.
- CORNEIL, D. G.; LERCHS, H.; BURLINGHAM, L. S. Complement reducible graphs. **Discrete Applied Mathematics**, v. 3, n. 3, p. 163–174, 1981.
- D'ALMEIDA, D. G. **Coloração Arco-íris para Cografos**. 2018. Undergraduate thesis. Federal University of Technology – Paraná (UTFPR), Ponta Grossa. Disponível em: <<http://repositorio.roca.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/10416>>.
- DUDEK, A.; FRIEZE, A. M.; TSOURAKAKIS, C. E. Rainbow connection of random regular graphs. **SIAM Journal on Discrete Mathematics**, SIAM, v. 29, n. 4, p. 2255–2266, 2015.
- EHARD, S.; GLOCK, S.; JOOS, F. A rainbow blow-up lemma for almost optimally bounded edge-colourings. **Acta Mathematica Universitatis Comenianae**, v. 88, n. 3, p. 643–649, 2019. ISSN 0862-9544.

KRIVELEVICH, M.; YUSTER, R. The rainbow connection of a graph is (at most) reciprocal to its minimum degree. **Journal of Graph Theory**, Wiley Online Library, v. 63, n. 3, p. 185–191, 2009.

LAURI, J. Chasing the rainbow connection: Hardness, algorithms, and bounds. Tampere University of Technology, 2016.

LI, S.; LI, X. Note on the complexity of deciding the rainbow connectedness for bipartite graphs. **arXiv preprint arXiv:1109.5534**, 2011.

LI, S.; LI, X.; SHI, Y. Note on the complexity of deciding the rainbow (vertex-) connectedness for bipartite graphs. **Applied Mathematics and Computation**, Elsevier, v. 258, p. 155–161, 2015.

LI, X.; SUN, Y. Characterize graphs with rainbow connection number $m-2$ and rainbow connection numbers of some graph operations. **Preprint**, 2010.

_____. **Rainbow connections of graphs**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012.

LO, I. Y. Some bounds on the rainbow connection number of 3-, 4- and 5-connected graphs. **arXiv preprint arXiv:1212.5934**, 2012.

MONTGOMERY, R.; POKROVSKIY, A.; SUDAKOV, B. Decompositions into spanning rainbow structures. **Proceedings of the London Mathematical Society**, Wiley Online Library, v. 119, n. 4, p. 899–959, 2019.

PRABHA, R.; RAJASINGH, I. Rainbow colouring of crown graphs. **Journal of Computer and Mathematical Sciences Vol**, v. 3, n. 3, p. 248–421, 2012.

ROCHA, A. **Coloração arco-íris em grafos resultantes de produto cartesiano**. 2017. Undergraduate thesis. Federal University of Technology – Paraná (UTFPR), Ponta Grossa. Disponível em: <<http://repositorio.roca.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/8330>>.

ROCHA, A.; ALMEIDA, S. M. Coloração arco-íris em grafos resultantes de produto cartesiano. In: **Proc. 37th Congress of the Brazilian Computer Society (CSBC '17/II ETC)**. São Paulo: [s.n.], 2017. p. 83–86. ISSN 2175-2761. Disponível em: <<http://csbc2017.mackenzie.br/public/files/2-etc/artigos/16.pdf>>.

_____. Criticalidade arco-íris dos grafos resultantes de produto cartesiano de ciclos e caminhos. In: **Anais do II Workshop de Pesquisa em Computação dos Campos Gerais**. Ponta Grossa, PR: [s.n.], 2017. Disponível em: <http://www.wpcg.pro.br/wpcg2017/papers/paper_26>.

_____. Criticalidade arco-íris em rodas e leques. In: **Anais do 3º Workshop de Pesquisa em Computação dos Campos Gerais**. Ponta Grossa, PR: [s.n.], 2019. Disponível em: <http://www.wpcg.pro.br/wpcg2019/papers/paper_27>.

SCHIERMEYER, I. Rainbow connection in graphs with minimum degree three. In: SPRINGER. **International Workshop on Combinatorial Algorithms**. [S.l.], 2009. p. 432–437.

_____. Bounds for the rainbow connection number of graphs. **Discussiones Mathematicae Graph Theory**, De Gruyter Open, v. 31, n. 2, p. 387–395, 2011.

SEPTYANTO, F.; SUGENG, K. A. Rainbow connections of graph joins. **Australasian Journal of Combinatorics**, CENTRE DISCRETE MATHEMATICS & COMPUTING DEPT MATHEMATICS, UNIV QUEENSLAND . . . , v. 69, n. 3, p. 375–381, 2017.

SY, S.; MEDIKA, G. H.; YULIANTI, L. The rainbow connection of fan and sun. **Applied Mathematical Sciences**, v. 7, n. 64, p. 3155–3159, 2013.

WALLIS, W. D. **Magic graphs**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2001.

ÍNDICE

- k -coloração arco-íris, 16
- árvore
 - arco-íris, 16
 - geradora, 18
- adjacentes, 12
- arco-íris
 - conectividade, 15
 - conexo, 15
 - crítico, 13
- aresta
 - crítico, 13
- arestas, 12
 - de junção, 19
 - múltiplas, 12
- caminho, 12
 - arco-íris, 12
 - hamiltoniano, 53
- caminho mínimo, 13
- cografo, 19
- cografos, 28
- coloração
 - arco-íris, 14
 - forte, 14
 - de arestas, 12
 - própria, 12
- coloração de arestas
 - arco-íris, 12
 - não própria, 12
- componente conexa, 17
- concatenação, 18
- conectividade, 15
 - arco-íris, 15
- conjunto
 - independente, 17
- diâmetro, 18
- distância, 18
- emparelhamento perfeito, 19
- extremos, 12
- grafo, 12
 - k -partido completo, 18
 - m -sombra, 31
 - árvore, 18
 - aresta-conectividade, 15
 - aresta-conexo, 15
 - bipartido, 18
 - bipartido completo, 18
 - caminho, 18
 - ciclo, 18
 - circulante, 38
 - cobra, 32
 - cobra triangular, 34
 - dupla, 34
 - tripla, 34
 - completo, 17
 - conexo, 12
 - de junção, 19
 - desconexo, 12
 - estrela, 19
 - leque, 19
 - panela, 19
 - roda, 19
 - simples, 12
 - threshold, 19, 28
 - trivial, 17
 - vértice-conexo, 15
 - vazio, 17
- grau, 17
- isomorfismo, 18
- junção, 18
- laço, 12

multigrafo, 12

número de conexão arco-íris, 13, 14
forte, 13, 14

ponte, 17

Problema da Coloração Arco-íris, 13

produto cartesiano, 19

subdivisão de aresta, 32

subgrafo, 17

induzido, 17

sunlet, 19

união, 18

vértice

-crítico, 13

isolado, 17

pendente, 17

universal, 17

vértices, 12

vizinhos, 12