UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

GEOVANE PEREIRA DO NASCIMENTO

PROGRESSÕES ARITMÉTICAS, GEOMÉTRICAS, HARMÔNICAS: APLICAÇÕES E PROPOSTAS DE ATIVIDADES

DISSERTAÇÃO

CORNÉLIO PROCÓPIO

2017

GEOVANE PEREIRA DO NASCIMENTO

PROGRESSÕES ARITMÉTICAS, GEOMÉTRICAS, HARMÔNICAS: APLICAÇÕES E PROPOSTAS DE ATIVIDADES

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do grau de “Mestre”.

Orientador: Douglas Azevedo Sant Anna, Dr.

Co-orientadores:Thiago Pinguelo de Andrade, Dr.

CORNÉLIO PROCÓPIO

2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

N244 Nascimento, Geovane Pereira do

Progressões aritméticas, geométricas, harmônicas : aplicações e propostas de atividades / Geovane Pereira do Nascimento. – 2017.
98 f. : il. color. ; 31 cm.

Orientador: Douglas Azevedo Sant'Anna.
Coorientador: Thiago Pinguello de Andrade.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Cornélio Procópio, 2017.
Bibliografia: p. 97-98.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Sequências (Matemática). 3. Séries geométricas. 4. Matemática – Dissertações. I. Sant'Anna, Douglas Azevedo, orient. II. Andrade, Thiago Pinguello de, coorient. III. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. IV. Título.

CDD (22. ed.) 510

Biblioteca da UTFPR - Câmpus Cornélio Procópio
(Bibliotecário/Documentalista: Romeu Righetti de Araujo – CRB-9/1676)

Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Diretoria de Pesquisa e Pós-Graduação-Câmpus Cornélio Procópio
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Título da Dissertação Nº. 004

"Progressões aritméticas, geométricas, harmônicas: aplicações e propostas de atividades."

por

Geovane Pereira do Nascimento

Esta dissertação foi apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre, pelo Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR - Câmpus Cornélio Procópio, às 15h00min do dia 28 de agosto de 2017. O trabalho foi _______________ pela Banca Examinadora, composta pelos doutores:

Prof. Douglas Azevedo Sant'Anna, Dr.
(Presidente - UTFPR/CP)

Profa. Nazira Hanna Harb, Dra.
(UTFPR/LD)

Prof. Victor Simões Barbosa, Dr.
(UFSC/Joinville)

Visto da coordenação:

Profª. Michele Cristina Valentino, Dra.
(Coordenadora do PROFMAT-CP)

"A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do PROFMAT/UTFPR-CP"

Ao meu pai, Seu João; à minha mãe, Dona Rosemari.

AGRADECIMENTOS

- Agradeço aos meus alunos da Escola Estadual Dr Ernesto Fonseca que se empenharam em realizar as atividades propostas nesse trabalho, pois sem a colaboração deles esse trabalho nao teria sentido e efeito.
- Agradeço a minha turma, pelos ótimos momentos que vivemos juntos, de aprendizagem e principalmente de amizades, com eles passei os sábados mais produtivos da minha vida.
- À CAPES pela recomendação do PROFMAT por meio do parecer do Conselho Técnico Científico da Educação Superior e pelo incentivo financeiro.
- À Sociedade Brasileira de Matemática que na busca da melhoria do ensino de Matemática na Educação Básica viabilizou a implementação do PROFMAT.
- Aos meus professores e orientadores Douglas e Thiago pelas orientações e contribuições no meu trabalho, meus sinceros agradecimentos.

A Matemática é a honra do espírito humano. (Leibniz)

RESUMO

Nascimento, Geovane Pereira do. PROGRESSÕES ARITMÉTICAS, GEOMÉTRICAS, HARMÔNICAS: APLICAÇÕES E PROPOSTAS DE ATIVIDADES. 98 f. Dissertação – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2017.

Este trabalho apresenta uma proposta de abordagem que permite ao professor do ensino médio tratar do conceito de sequências de números reais, em especial P.A., P.G. e P.H.. Buscamos ilustrar as aplicações dessas sequências e elaborar um material com exemplos aplicáveis em diferentes contextos de tais conteúdos, baseado na metodologia Resolução de Problemas. Propõe a construção do conhecimento por meio de atividades desenvolvidas em aulas diferenciadas.

Palavras-chave: Ensino de matemática, Sequências de números reais, Progressões.

ABSTRACT

Nascimento, Geovane Pereira do. ARITHMETIC, GEOMETRIC, HARMONIC PROGRESSIONS: APPLICATIONS AND ACTIVITIES PROPOSALS . 98 f. Dissertação – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2017.

This work presents a proposal of an approach that allows high school teachers to deal with the concept of real number sequences, especially P.A., P.G. and P.H. . We illustrate the applications of these sequences and elaborate a material with applicable examples in different contexts based on the methodology of Problem Solving which proposes the construction of knowledge through activities developed in differentiated classes.

Keywords: Mathematics Teaching, Real-Number Sequences, Progressions

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO E OBJETIVOS

O processo de ensino e aprendizagem da matemática na atualidade está sendo uma tarefa complexa, tanto relacionada à como o professor ensina, que de um modo geral, aborda aulas que enfatizam a reprodução de algoritmos, quanto pela falta de interesse e motivação dos alunos. Nesse sentido, buscar outras abordagens metodológicas para modificar o processo de ensino e aprendizagem pode ser uma boa alternativa para mudar essa realidade.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO , 1999) a matemática no ensino médio tem um valor formativo, que ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, e possui uma importância relevante na vida cotidiana do aluno. É interessante que o professor de matemática trabalhe em suas aulas com diversas metodologias de ensino como: Resolução de Problemas, História da Matemática, Tecnologias da Informação, Jogos, Etnomatemática e a Investigação Matemática.

Com esta percepção, este trabalho visa a Resolução de Problemas como metodologia para o ensino das progressões, a qual ensina o aluno aprender a aprender, ou seja, o aluno cria sua autonomia para resolver as situações que são propostas, construindo seu próprio conhecimento, não esperando uma resposta já pronta dada pelo professor.

As progressões aritméticas e geométricas são conteúdos indispensáveis no Ensino Médio. No entanto, no decorrer da experiência profissional, notou-se que esses temas são abordados geralmente de maneira tradicional, por meio de fórmulas que são apenas ditas aos alunos e alguns exercícios que reproduzem exemplos do quadro.

Utilizando a Resolução de Problemas, na aprendizagem da matemática, mais especificamente nos conteúdos aqui ditos, permitem ao aluno colocar-se diante de problemas a serem resolvidos por si próprio, possibilitando o uso do raciocínio lógico e não apenas a utilização das fórmulas. Adicionalmente este trabalho possui como objetivo a introdução às Sequências

Infinitas de Números Reais. Em particular, progressões aritméticas, geométricas e séries associadas a estas, buscando sempre que possível, ilustrar suas aplicações e elaborar um material com exemplos aplicáveis em diferentes contextos de tais conteúdos, para servir de material de apoio, tanto para discentes quanto docentes, baseado na metodologia Resolução de Problemas.

Buscamos por meio desse trabalho averiguar as possíveis contribuições de um ensino baseado na resolução de problemas; observar a motivação dos alunos em aprender progressões por meio de uma metodologia diferenciada e compreender as vantagens e desvantagens deste método.

A resolução de problemas, de acordo com (POLYA, 1995, pg.3) , é uma atividade prática, como nadar, esquiar ou tocar piano, podendo aprendê-la por meio de imitação e prática. Quando se deseja nadar é necessário entrar na água, da mesma maneira, para tornar-se bons solucionadores de problemas, deve-se que resolve-los.

Segundo (ARAÚJO; LEITE, 2010) , seguindo a ideia acima,

> [...]o conhecimento matemático ganha significado quando os alunos se defrontam com situações desafiadoras e trabalham para desenvolver estratégias de resolução. Daí a importância de tomar a resolução de problemas como ponto de partida da atividade matemática e não mais como uma série de exercícios para aferir se os alunos apreenderam determinado conteúdo ou não. (ARAÚJO; LEITE, 2010)

Assim, (POLYA, 1995) define quatro momentos principais para a resolução de um problema: compreender o problema, elaborar um plano, executar o plano e fazer o retrospecto ou verificação.

Neste contexto, (ALMEIDA, 2012) diz que se o estudo das progressões aritméticas e geométricas for bem explorado em sala de aula, pode estimular no aluno a capacidade de conjecturar e generalizar. A pesquisa com generalização de padrões tem sido o trabalho de muitos pesquisadores, as portuguesas (VALE; PIMENTEL, 2005) são grandes exemplos, no qual julgam importante a generalização, para que os alunos criem expressões algébricas ou recursos que conduzam a estas, desenvolvendo as suas capacidades de raciocínio algébrico.

Destaca-se então que para o Ensino Médio a resolução de problemas que recorra ao trabalho investigativo é o percurso ideal para o estudo das progressões. Dessa maneira, (MILANI, 2011) realizou um trabalho em que utiliza a Resolução De Problemas como ferramenta oara a aprendizagem de Progressões Aritméticas E Geométricas no ensino médio no qual obteve um resultado positivo com seu trabalho, concluindo que a Resolução de Problemas pode levar o aluno a pensar e construir seu próprio conhecimento.

Outro exemplo é o trabalho de (MÓL; PEREIRA, 2012) que descreveram uma prática pedagógica sobre uma atividade de Progressão Aritmética, utilizando resolução de problemas que foi realizada em duas turmas do 1ª ano do Ensino Médio e como conclusão afirmaram que os alunos mudaram suas concepções a respeito dos problemas propostos.

Algumas dissertações do Mestrado Profissional em Matemática PROFMAT foram bastante utilizadas como referência para esse trabalho. (MARTINS, 2013) da Universidade Federal da Bahia realizou um trabalho sobre sequências, progressões e séries fazendo uma aborgagem para o ensino médio. Outro trabalho interessante pesquisado foi realizado por (MANTOVANI, 2015) que teve uma abordagem acerca de atividades sobre as progressões aritméticas por meio do reconhecimento de padrões.

A utilização da resolução de problemas no processo de ensino aprendizagem das progressões é um tema bastante explorado na literatura, portanto, destaca-se que é uma literatura vasta, porém nesse trabalho foram apresentados apenas alguns dos autores.

O capítulo 1 traz a introdução das sequências infinitas de números reais, mostra como podemos determinar a lei de formação de uma sequência, abordando alguns exemplos e problemas aplicáveis em diferentes contextos.

No capítulo 2 faremos um estudo sobre as progressões aritméticas. Apresentaremos a definição de uma progressão aritmética; as representações especiais que podemos utilizar para facilitar a resolução de problemas que envolvam essas sequências; abordaremos a interpolação de meios aritméticos; demonstração do termo geral; as propriedades principais e a fórmula que calcula a soma dos n primeiros termos de uma P.A.. Relataremos ainda uma aplicação em sala de aula realizada em uma turma da 1ª série ensino médio e traremos uma proposta de atividade para sala de aula.

No capítulo 3 apresentaremos as progressões geométricas. Vamos mostrar a definição dessa progressão, termo geral, classificação de acordo com a razão, algumas representações especiais, interpolação de meios geométricos, soma dos n primeiros termos de uma P.G. finita, e uma expressão que determina o limite da soma dos infinitos termos dessas sequências. Abordaremos alguns exemplos e problemas aplicáveis de progressão geométrica envolvendo essas propriedades e conceitos. Relataremos a aplicação de uma atividade em uma turma da 1ª série do ensino médio e traremos uma proposta de atividade para sala de aula

No capítulo 4 faremos uma abordagem de dois tipos de triângulos que possuem características muito interessantes e que estão relacionados com as progressões. Estudaremos o triângulo de Sierpisnki que é obtido por meio de um processo iterativo e relaciona o número de triângulos, o comprimento dos lados, o perímetro de cada triângulo, perímetro total do triângulo, a área de um triângulo e a área total do triângulo com as progressões geométricas. Apresentaremos o triângulo de Kepler que não é apresentado nos livros didáticos da rede pública estadual. O triângulo de Kepler é um triângulo retângulo formado por três quadrados cujas áreas estão em progressão geométrica de razão ϕ. Ou seja, esse triângulo além de estar relacionado com P.G. faz uma conexão com o número áureo. Apresentaremos uma proposta de atividade sobre o triângulo de Sierpinski que poderá ser trabalhada em sala de aula pelo professor. Observamos que para se trabalhar com esses dois triângulos os alunos deverão dominar os conteúdos das progressões e ter uma boa noção de geometria plana, pois isso facilitará a resolução das atividades.

No capítulo 5 apresentaremos uma importante relação existente entre um triângulo escaleno com lados em progressão aritmética de razão igual a 1 e generalizaremos para um triângulo em P.A. com razão igual a r. Faremos a demonstração de várias relações obtidas em um triângulo cujos comprimentos dos lados são dados por α, β e γ opostos aos ângulos A, B e C respectivamente.
Finalizaremos o capítulo 5 com dois problemas interessantes, relacionando Geometria Plana e Progressão Geométrica. Num deles o objetivo é determinar a razão de uma P.G. e encontrar os ângulos internos de um triângulo retângulo, sabendo que os lados desse triângulo formam uma progressão geométrica. No segundo problema o objetivo é determinar a variação da razão da P.G. e de um ãngulo interno formado pelo maior e pelo menor lado desse triângulo, sabendo os lados de um triângulo estão em progressão geométrica.

1.1 SEQUÊNCIAS

Nesta seção temos o interesse de introduzir os conceitos básicos de sequências (ou sucessões) via exemplos ilustrativos. Adicionalmente, introduziremos a noção de sequência de números reais; apresentaremos três tipos de lei de formação que uma sequência pode apresentar e abordaremos alguns exemplos e problemas aplicáveis de sequências numéricas.

Em muitas situações do nosso cotidiano nos deparamos com a ideia de sequência ou sucessão. Podemos apresentar as sequências por meio de leis de formação, constatando o padrão de comportamento comum a determinada situação e, muitas delas, conseguimos determinar o padrão utililizado intuitivamente. Considere os seguintes exemplos.

Exemplo 1.1. *Determine os três elementos seguintes em cada sequência abaixo, se possível:*

(a) Janeiro, fevereiro, março, ...

Solução. Abril, maio, junho.

(b) Domingo, segunda, terça, ...

Solução. Quarta, quinta, sexta.

(c) $1, 2, 4, 8, 16, ...$

Solução. $32, 64, 128$.

(d) $1, 4, 9, 16, 25, ...$

Solução. $36, 49, 64$.

(e) $18, ...$

Solução. Impossível determinar, pois não há características suficientes para determinar os próximos termos.

Em todas essas situações do exemplo acima observamos certa ordem nos elementos das sequências. Esses elementos são também chamados termos da sequência. No item (b) da sequência dos dias da semana temos: 1º termo: domingo; 2ºtermo: segunda; ... ; 7º termo: sábado. Se representarmos o 1º termo por a_1 (lê-se a índice um ou a um), o 2º termo por a_2, o 3º por a_3 e assim por diante, até o termo de ordem n ou n-ésimo termo (a_n) essa sequência pode ser representada por $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$.

Nesse exemplo, temos:

$a_1 =$ domingo

$a_3 =$ terça

$a_5 =$ quinta

$a_7 =$ sábado.

1.1.1 SEQUÊNCIAS DE NÚMEROS REAIS

Uma sequência ou sucessão de números reais é uma função definida em $\mathbb{N} = \{1,2,3,...\}$ e tomando valores no conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais. Ou seja, uma sequência de números reais é uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ cujo domínio é o conjunto dos números naturais e o contra domínio é o conjunto dos números reais. Assim cada elemento $n \in \mathbb{N}$ corresponde um único número real a_n. Os elementos a_n são os termos da sequência, e as notações para a sequência são: $(a_1,a_2,a_3,...,a_n)$ ou (a_n) ou $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dessa forma, $f(1) = a_1, f(2) = a_2, f(3) = a_3,..., f(n) = a_n$. O índice n indica a posição do elemento da sequência. Desse modo, o primeiro termo é indicado por a_1, o segundo termo é indicado por a_2 e o n-ésimo termo é indicado por a_n.

1.1.2 LEI DE FORMAÇÃO DE UMA SEQUÊNCIA

Quando conhecemos o primeiro termo de uma sequência e uma regra que permite determinar cada termo a_n a partir do termo antecedente a_{n-1}, dizemos que explicitamos a sequência por recorrência.

Exemplo 1.2. *Determine os cinco primeiros termos das sequências $(a_n), n \in \mathbb{N}$ e $(b_n), n \in \mathbb{N}$ definidas pelas leis de recorrências a seguir:*

$$(a) \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 4a_n + 2 \end{cases}.$$

Solução.

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_2 &= 4a_1 + 2 = 6 \\ a_3 &= 4a_2 + 2 = 26 \\ a_4 &= 4a_3 + 2 = 106 \\ a_5 &= 4a_4 + 2 = 426. \end{aligned}$$

Portanto $a_n = (1,6,26,106,426,...)$,

$$(b) \begin{cases} b_1 = 1 \\ b_n = 5.b_{n-1} \end{cases}.$$

Solução.

$$\begin{aligned} b_1 &= 1 \\ b_2 &= 5.b_1 = 5 \\ b_3 &= 5.b_2 = 25 \\ b_4 &= 5.b_3 = 125 \\ b_5 &= 5.b_4 = 625. \end{aligned}$$

Portanto $b_n = (1, 5, 25, 125, 625, ...)$.

Exemplo 1.3. *Descreva por meio de uma fórmula de recorrência cada uma das sequências abaixo:*

(a) $a_n = (1, 5, 13, 29, 61, ...)$.

Solução.

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_2 &= 2a_1 + 3 = 5 \\ a_3 &= 2a_2 + 3 = 13 \\ a_4 &= 2a_3 + 3 = 29 \\ a_5 &= 2a_4 + 3 = 61. \end{aligned}$$

Observamos que cada termo da sequência a partir do segundo termo é obtido pelo dobro do termo anterior adicionado de 3 unidades. Logo, temos que a fórmula de recorrência que descreve essa sequência é dada por $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = 2a_{n-1} + 3, \forall n \geq 2 \end{cases}$.

(b) $b_n = (7, 14, 21, 28, 35, ...)$.

Solução. Observamos que cada termo da sequência b_n a partir do segundo termo é obtido somando o termo imediatamente anterior com 7 unidades. Assim a fórmula de recorrência que descreve essa sequência é dada por $\begin{cases} b_1 = 7 \\ b_n = b_{n-1} + 7, \forall n \geq 2 \end{cases}$.

(c) $c_n = (1, 4, 16, 64, 256, ...)$.

Solução. Na sequência c_n cada termo a partir do segundo é obtido pelo produto do termo imediatamente anterior por 4. Assim a fórmula de recorrência que descreve essa sequência é dada por $\begin{cases} c_1 = 1 \\ c_n = 4c_{n-1}, \forall n \geq 2 \end{cases}$.

Podemos também definir uma sequência expressando cada termo em função de sua posição. É dada uma fórmula que expresssa a_n em função de n.

Exemplo 1.4. *Determine os cinco primeiros termos das sequências dadas pelas seguintes leis:*

(a) $a_n = n^3$, $n \in \mathbb{N}$.

Solução. Nesse caso, a sequência é formada pelos cubos dos naturais, isto é,

$$\begin{aligned} a_1 &= 1^3 = 1 \\ a_2 &= 2^3 = 8 \\ a_3 &= 3^3 = 27 \\ a_4 &= 4^3 = 64 \\ a_5 &= 5^3 = 125. \end{aligned}$$

Portanto $a_n = (1, 8, 27, 64, 125, ...)$.

(b) $b_n = 5n - 2$, $n \in \mathbb{N}$.

Solução.

$$\begin{aligned} b_1 &= 5.1 - 2 = 3 \\ b_2 &= 5.2 - 2 = 8 \\ b_3 &= 5.3 - 2 = 13 \\ b_4 &= 5.4 - 2 = 18 \\ b_5 &= 5.5 - 2 = 23. \end{aligned}$$

Portanto $b_n = (3, 8, 13, 18, 23, ...)$.

E por fim podemos determinar uma sequência por propriedade dos termos. É dada uma propriedade que os termos da sequência devem apresentar.

Exemplo 1.5. *Escrever os dez termos iniciais da sequência infinita f formada pelos números primos positivos colocados em ordem crescente.*

Solução. $f = (2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, ...)$.

2 PROGRESSÕES ARITMÉTICAS

Iniciamos o capítulo sobre as progressões aritméticas indicando que as referências utilizadas como base para as definições, exemplos e problemas apresentados e discutidos neste capítulo foram Longen (2004), Paiva (1999), Dante (2014), Iezzi e Hazzan (2004) .

Nesse capítulo introduziremos os conceitos de progressões aritméticas, incluíndo-se aí as definições de razão e termo geral, bem como as classificações de acordo com a razão além de algumas representações especiais. Outros pontos que abordaremos também são os de interpolação de meios aritméticos, soma dos n primeiros termos e produtos dos n primeiros termos. Alguns exemplos ilustrativos e problemas aplicáveis de progressão aritmética envolvendo essas propriedades e conceitos também serão trabalhados.

2.1 DEFINIÇÕES BÁSICAS

Nessa seção apresentaremos a definição de uma progressão aritmética; mostraremos como essas sequências são classificadas de acordo com a razão e faremos a demonstração do termo geral da P.A. que nos permite encontrar qualquer termo da sequência dados primeiro termo e razão. Apresentaremos ainda nessa seção alguns exemplos e problemas envolvendo essas ideias inicias de progressão aritmética.

Progressão aritmética (P.A.) é uma sequência finita ou infinita em que cada termo, a partir do segundo, é obtido somando-se o termo anterior a uma constante, a qual é chamada de razão da P.A. e é indicada por r. São exemplos de progressões aritméticas:

$$\begin{aligned}(a_n) &= (7,10,13,16),\\ (b_n) &= (11,11,11),\\ (c_n) &= (49,39,29,19,9,...),\\ (d_n) &= (12,23,34,45,56,67),\\ (e_n) &= (-4,-6,-8,-10,-12,...).\end{aligned}$$

Claramente, a sequência (a_n) tem razão 3; (b_n) razão 0, (c_n) razão -10; (d_n) razão 11 e por fim a sequência (e_n) razão igual a -2.

Definição 2.1. *Diremos que uma sequência de números reais (a_n) é uma progressão aritmética (P.A.) de razão $r \in \mathbb{R}$ se*

$$a_{n+1} = a_n + r,$$

para todo natural n. Isto é,

$$a_2 = a_1 + r,\ a_3 = a_2 + r,\ a_4 = a_3 + r, \ldots,\ a_{n+1} = a_n + r.$$

Levando em conta a definição acima apresentada, vamos mostrar que numa P.A., todos os termos são completamente caracterizados pelo primeiro termo, isto é, a_1 e pela razão r. De fato, supondo conhecidos a_1 e a razão r, segue da definição 2.1 que se (a_n) é uma PA de razão r, então valem

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + r, \\ a_3 &= a_2 + r = a_1 + 2r, \\ a_4 &= a_3 + r = a_1 + 3r, \\ &\vdots \\ a_n &= a_1 + (n-1)\,r. \end{aligned}$$

Dos fatos apresentados com base na definição, concluímos que

Teorema 2.2. *Seja (a_n) uma P.A.. Dados $n > k > 0$ tem-se $a_n = a_k + (n-k)\,r$.*

Demonstração. Como a_n é uma P.A., $a_n - a_{n-1} = r$, para todo $n > 1$. Como

$$a_n - a_k = a_n - a_{n-1} + a_{n-1} - a_{n-2} + a_{n+2} +, \ldots, + a_{k+1} - a_k = \underbrace{r + r + \ldots + r}_{n-k} = (n-k)r.$$

Portanto

$$a_n = a_k + (n-k)r.$$

Problema 2.3. *Em uma progressão aritmética, o quinto termo é igual a* 28 *e o décimo sexto termo vale* 72*. Determine o nono termo desta progressão aritmética.*

Solução. Temos pelo teorema 2.2 que

$$a_{16} = a_5 + (16-5)r.$$

Segue que

$$\begin{aligned} 72 &= 28+11r \\ r &= 4. \end{aligned}$$

Assim,

$$a_9 = a_5 + (9-5)4 = 28+4.4 = 44.$$

As progressões aritméticas são classificadas de acordo com a sua razão.

Definição 2.4. *Dizemos que uma P.A. (a_n) é crescente quando cada termo é maior que o termo anterior, isto é,*

$$a_n > a_{n-1},\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Note que, neste caso $r > 0$.

Dizemos que uma P.A. (a_n) é decrescente quando cada termo é menor que o termo anterior, isto é,

$$a_n < a_{n-1},\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Neste caso temos que $r < 0$.

Por fim, dizemos que uma P.A. (a_n) é constante ocorrer de todos os termos coincidirem, isto é, quando $r = 0$, ou seja, $a_n = a_{n+1}$ para todo n natural.

Problema 2.5. *Um atleta nadou, hoje 300 metros. Nos próximos dias, ele pretende aumentar gradativamente essa marca nadando, a cada dia, uma mesma distância a mais do que nadou no dia anterior. No 12 dia, ele quer nadar 2500 metros. Determine a distância que ele deverá nadar a mais por dia e a distância que ele deverá nadar no 7 dia.*

Solução. A distância que o atleta nada descreve uma progressão aritmética na qual $a_1 = 300$ e $a_{12} = 2500$. Devemos encontrar a razão dessa P.A..
Temos pelo teorema 2.2 que

$$a_{12} = a_1 + 11r.$$

Assim,

$$\begin{aligned} 2500 &= 300+11r \\ 2200 &= 11r \\ r &= 200. \end{aligned}$$

Por fim, basta encontrar o sétimo termo dessa P.A. para saber a distância que ele nadará no sétimo dia.
Segue que

$$\begin{aligned} a_7 &= a_1 + 6r \\ a_7 &= 300 + 1200 \\ a_7 &= 1500. \end{aligned}$$

2.2 REPRESENTAÇÕES ESPECIAIS DE UMA P.A

Muitas vezes para a resolução de certos problemas, é de grande utilidade representar genericamente uma progressão aritmética. A vantagem das representações especiais é diminuir a quantidade de cálculos exigidos em algumas situações. As principais representações especiais seguem abaixo:
três termos em P.A.

$$(x - r, x, x + r);$$

quatro termos em P.A.

$$(x, x + r, x + 2r, x + 3r)$$

e cinco termos em P.A.

$$(x, x + r, x + 2r, x + 3r, x + 4r)$$

ou

$$(x - 2r, x - r, x, x + r, x + 2r).$$

Exemplo 2.6. *Obtenha uma P.A. de três termos tais que sua soma seja* 21 *e seu produto seja* 231 .

Solução. Empregando a notação especial para a P.A., temos o sistema de equações

$$\begin{cases} (x - r) + x + (x + r) = 21 \\ (x - r)x(x + r) = 231 \end{cases}.$$

Da primeira equação, segue que

$$\begin{aligned} (x - r) + x + (x + r) &= 21 \\ 3x &= 21 \\ x &= 7. \end{aligned}$$

Substituindo na segunda equação temos

$$\begin{aligned}(x-r)x(x+r) &= 231\\(7-r)7(7+r) &= 231\\49-r^2 &= 33\\r^2 &= 16\\r &= \pm 4.\end{aligned}$$

Assim a P.A. procurada é $(3,7,11)$ para $x=7$ e $r=4$ ou $(11,7,3)$ para $x=7$ e $r=-4$.

Exemplo 2.7. *Determine quatro números em progressão aritmética crescente, sabendo que sua soma é -2 e a soma de seus quadrados é* 6.

Solução. Um artifício para representar progressões aritméticas com um número par de termos é chamar os dois termos centrais de $x-y$ e $x+y$ pois assim a razão passa a ser: $(x+y)-(x-y)=x+y-x+y=2y$ Logo, $r=2y$. Portanto,a P.A. é dada por

$$\begin{cases}(x-3y,x-y,x+y,x+3y)=-2\\(x-3y)^2+(x-y)^2+(x+y)^2+(x+3y)^2=6\end{cases}.$$

Efetuando os cálculos, chegamos a:

$$\begin{cases}4x=-2\\4x^2+20y^2=6\end{cases}.$$

Da primeira equação temos que $x=-\frac{1}{2}$.
Substiutindo $x=-\frac{1}{2}$ na segunda equação temos $4\left(-\frac{1}{2}\right)^2+20y^2=6$.
Resolvendo a equação quadrática temos que $y=\pm\frac{1}{2}$.
Como a P.A. é crescente, então y é positivo. Assim $x=-\frac{1}{2}$ e $y=\frac{1}{2}$.
Daí, vem: $x-3y=-2; x-y=1; x+y=0; x+3y=1$.
Portanto a P.A. é dada por $(-2,-1,0,1)$ e sua razão é $r=1$.

2.2.1 INTERPOLAÇÃO ARITMÉTICA

Nessa subsessão abordaremos o conceito de Interpolação Arit mética que alguns autores definem como inserção ou intercalação e apresentaremos alguns exemplos e problemas envolvendo esse assunto.

Interpolar, intercalar ou inserir k meios aritméticos entre dois números a e b significa obter uma

P.A. de $k+2$ termos, cujo 1º termo seja a e o último termo seja b. Para isso, basta conhecermos a razão da P.A.

Problema 2.8. *Insira nove meios aritméticos entre* 15 *e* 45.

Solução. Devemos formar uma progressão aritmética onde $n = 9+2 = 11$, $a_1 = 15$ e $a_n = 45$. Temos pelo teorema 2.2 que

$$a_{11} = a_1 + (11-1)r.$$

Assim,

$$\begin{aligned} 45 &= 15+10r \\ 10r &= 30 \\ r &= 3. \end{aligned}$$

Inserindo os nove meios aritméticos obtemos a P.A.$(15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45)$.

Problema 2.9. *A produção mensal de uma montadora no primeiro semestre de um dado ano está em P.A. crescente. Em janeiro, a produção foi de* 12000 *carros e, em junho, de* 52000 *unidades. Qual foi a produção dessa montadora nos meses de fevereiro, março, abril e maio?*

Solução. O problema consiste em formar uma P.A. na qual $a_1 = 12000$ representa a produção de janeiro e $a_n = 52000$ representa a produção de junho. Note que $n = 6$ neste caso.
Devemos inicialmente calcular o valor da razão da P.A. Temos pelo teorema 2.2 que

$$a_6 = a_1 + (6-1)r.$$

Assim,

$$\begin{aligned} 52000 &= 12000+5r \\ 5r &= 40000 \\ r &= 8000. \end{aligned}$$

Então, teremos

$a_2 =$ produção de fevereiro $= 20000$,

$a_3 =$ produção de março $= 28000$,

$a_4 =$ produção de abril $= 36000$,

$a_5 =$ produção de maio $= 44000$.

Na realidade o que fizemos foi inserir ou interpolar quatro meios aritméticos entre 12000 e 52000.

Problema 2.10. *Quantos múltilpos de* 3 *há entre* 200 *e* 700*?*

Solução. A sequência dos múltiplos de 3 $(0,3,6,9,...)$ é uma P.A. de razão 3, mas o que nos interessa é estudar essa sequência entre 200 e 700.
O primeiro múltiplo de 3 maior que 200 é $a_1 = 201$.
O último múltiplo de 3 pertencente ao intervalo dado é 699, que indicaremos por a_n, pois não conhecemos sua posição na sequência.

Temos pelo teorema 2.2 que

$$699 = 201 + (n-1)3.$$

Assim,

$$\begin{aligned} 498 &= 3n-3 \\ 3n &= 501 \\ n &= 167. \end{aligned}$$

Portanto, existem 167 múltiplos de 3 entre 200 e 700.

2.2.2 PROPRIEDADES DAS PROGRESSÕES ARITMÉTICAS

Nessa subsessão abordaremos algumas propriedades das progressões aritméticas. Mostraremos a relação entre três números consecutivos em P.A., como determinar o termo médio de uma sequência em PA e como encontrar a soma de dois termos equidistantes dos extremos nesse tipo de progressão. Apresentaremos uma fórmula que permite calcular a soma dos n primeiros termos de uma P.A. e alguns problemas e exemplos de aplicações dessas propriedades.

Propriedade 2.11. *Dados três números a, b, e c em P.A, nessa ordem, o número b é a média aritmética dos números a e c, ou seja:*

$$b = \frac{a+c}{2}$$

ou

$$2b = a + c.$$

Demonstração. De fato, consideremos a P.A.(a,b,c), temos pela definição de progressão aritmética que a razão é dado por

$$a_{n+1} - a_n$$

ou seja,

$$b - a = c - b.$$

Segue que

$$\begin{aligned} b + b &= a + c \\ 2b &= a + c \\ b &= \frac{a+c}{2}. \end{aligned}$$

Exemplo 2.12. *Sabe-se que a sequência* $(10, x, -4, y)$ *é uma P.A.. Determine os valores de x e y e escreva a progressão aritmética correspondente.*

Solução. Temos pela propriedade 2.11 que

$$\frac{10 + (-4)}{2} = x.$$

Ou seja

$$\begin{aligned} 6 &= 2x \\ x &= 3. \end{aligned}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} 3 + y &= -4 \\ y &= -4 - 3 \\ y &= -7. \end{aligned}$$

Nesse caso, temos uma progressão aritmética finita de razão $= -7$, ou seja a P.A.$(10, 3, -4, -7)$.

Propriedade 2.13. *Em toda P.A. finita com número ímpar de termos, o termo médio (t_m) é a média aritmética dos extremos, ou seja,*

$$t_m = \frac{a_1 + a_n}{2}$$

ou

$$a_1 + a_n = 2t_m.$$

Exemplo 2.14. *Sabendo que a P.A.*$(25, 27, 29, \ldots)$ *possui* 33 *termos, determine o termo médio* *dessa progressão.*

Solução. Temos pelo teorema 2.2 que

$$a_{33} = a_1 + (33-1)r.$$

Segue que

$$\begin{aligned} a_{33} &= 25 + 32.2 \\ a_{33} &= 89. \end{aligned}$$

Logo, temos uma P.A. com primeiro termo igual a 25 e último termo igual a 89.
Temos pela propriedade 2.13 que

$$t_m = \frac{a_1 + a_n}{2}.$$

Segue que

$$\begin{aligned} t_m &= \frac{25+89}{2} \\ t_m &= 17. \end{aligned}$$

Propriedade 2.15. *Numa P.A. finita, a soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual à soma dos extremos, ou seja*

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \cdots = 2t_m$$

sendo t_m o termos médio (quando existe).

Demonstração. Seja a P.A.$(a_1, a_2, a_3, ..., a_k, a_{k+1}, a_{n-k}, ..., a_n)$ de razão r.
Os termos a_{k+1} e a_{n-k} são equidistantes dos extremos. Calculando a soma desses termos, temos: $a_{k+1} + a_{n-k} = a_1 + (k+1-1)r + a_1 + (n-k-1)r = a_1 + kr + a_1 + (n-1)r - kr = a_1 + a_1 + (n-1)r = a_1 + a_n$
Generalizando, temos que

$$a_m + a_n = a_k + a_p,$$

se

$$m + n = k + p.$$

Carl Friedrich Gauss(1777-1855) é considerado um dos maiores matemáticos de todos os tempos. Nascido em Brunswick, Alemanha, de família muito simples, foi uma criança prodígio. Gauss deu grandes contribuições nas áreas de astronomia, geodésia e eletrecidade. Conta-se que antes de completar 10 anos de idade, em uma aula, seu professor, querendo manter os alunos por um bom tempo em silêncio, pediu que somassem todos os números de 1 a 100, isto é

$$1+2+3+4+...+98+99+100.$$

Para surpresa do professor, depois de alguns minutos Gauss disse que a soma era 5050. Acompanhe o raciocínio:

$$(1+100)=101$$

$$(2+99)=101$$

$$(3+98)=101,$$

etc. Logo, temos 50 parcelas de cujo valor é 101.
Segue que

$$1+2+3+4+...+98+99+100=101.50=5050$$

Dos fatos apresentados com base na definição de P.A., concluímos o seguinte resultado geral sobre a soma dos termos de uma P.A.

Teorema 2.16. *A soma S_n dos n primeiros termos de uma P.A. (a_n) é dada pela expressão*

$$S_n = \frac{(a_1+a_n)n}{2},$$

para qualquer que seja n natural maior que 1.

Demonstração. Considere a P.A. de razão r

$$(a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-2}, a_{n-1}, a_n).$$

A soma dos seus n termos pode ser escrita como:

$$(a_1+a_2+a_3+...+a_{n-2}+a_{n-1}+a_n) \tag{1}$$

ou

$$(a_n+a_{n-1}+a_{n-2}+...+a_3+a_2+a_1). \tag{2}$$

Adicionando membro a membro as igualdades (1) e (2), temos

$$2S_n = (a_1+a_n)+(a_2+a_{n-1})+(a_3+a_{n-2})+...+(a_{n-2}+a_3)+(a_{n-1}+a_2)+(a_n+a_1).$$

Pela propriedade 2.15 temos que a soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual a soma dos extremos, isto é

$$(a_1+a_n)=(a_2+a_{n-1})=(a_3+a_{n-2})=...=(a_{n-2}+a_3)=(a_{n-1}+a_2)=(a_n+a_1).$$

Assim todas as n parcelas têm o mesmo valor. Logo como temos n parcelas, segue que

$$2S_n=(a_1+a_n)n$$

ou seja,

$$S_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}.$$

Problema 2.17. *Ao efetuar a soma das 50 primeiras parcelas da sequência* $(15,35,25,...)$ *, por distração Pedro não somou a 27ł parcela. Qual foi a soma encontrada por Pedro?*

Solução. Temos que a sequência é uma progressão aritmética onde $a_1=15$ e $r=10$. Devemos encontrar a soma das 50 primeiras parcelas dessa P.A. e subtrair a 27ł parcela dessa soma.
Cálculo do termo a_{50} :

$$\begin{aligned} a_{50} &= a_1+49r \\ a_{50} &= 15+49.10 \\ a_{50} &= 15+490=505. \end{aligned}$$

Cálculo do termo a_{27} :

$$\begin{aligned} a_{27} &= a_1+26r \\ a_{27} &= 15+26.10 \\ a_{27} &= 15+260=275. \end{aligned}$$

Cálculo da soma dos 50 primeiros termos:
Temos pelo teorema 2.16 que

$$S_{50}=\frac{(a_1+a_{50})50}{2}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} S_{50} &= \frac{(15+505)50}{2} \\ S_{50} &= 13000. \end{aligned}$$

Por fim a soma encontrada por Pedro é dada por

$$S_{50}-a_{27}=13000-275=12725.$$

Problema 2.18. *Qual o valor de x que satisfaz a igualdade*

$$x+2x+3x+...+14x = 840,$$

sabendo que os termos do primeiro membro da equação estão em P.A.?

Solução. O primeiro membro da igualdade corresponde a soma dos termos da P.A. $(x,2x,3x,...,14x)$ na qual $a_1 = x$, $a_n = 14x$ e $r = x$.
Temos pelo teorema 2.2 que

$$14x = x+(n-1)x.$$

Assim,

$$\begin{aligned} 13x &= nx - x \\ 14x &= nx \\ n &= 14. \end{aligned}$$

Temos pelo teorema 2.16 que

$$S_{14} = \frac{(a_1 + a_{14})14}{2}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} S_{14} &= \frac{(x+14x)14}{2} \\ 840 &= 7.15x \\ 840 &= 105x \\ x &= 8. \end{aligned}$$

Problema 2.19. *Determine a soma dos primeiros n números ímpares positivos, ou seja,*

$$1+3+5+7+...+2n-1.$$

Solução. Os primeiros n números ímpares positivos formam, para algum n natural a progressão aritmética finita $(1,3,5,7,...,2n-1)$ em que $a_1 = 1$ e $a_n = 2n-1$.
Temos pelo terorema 2.16 que

$$S_n = \frac{(1+(2n-1))n}{2}.$$

Assim,

$$S_n = \frac{2n^2}{2} = n^2.$$

2.2.3 PROPOSTA DE ATIVIDADES PARA SALA DE AULA

Nessa subseção apresentaremos uma proposta de atividades para a sala de aula envolvendo os conceitos das progressões aritméticas. Nela apresentamos problemas desafiadores que vão ajudar os alunos a desenvolver suas habilidades algébricas e o raciocínio lógico. Tais problemas poderão verificar se os alunos conseguem articular os conceitos de P.A. na resolução de problemas.

1) Numa caixa há 1500 bolinhas de gude. Retiram-se 10 bolinhas na primeira vez, 15 na segunda, 20 na terceira e assim sucessivamente na mesma razão. Quantas bolinhas de gude restarão na caixa após a décima sexta retirada?

Solução. A sequência formada pela retirada de bolinhas da caixa é representada por uma progressão aritmética na qual $a_1 = 10$ e $r = 5$, ou seja a P.A.$(10, 15, 20, 25, ...)$. O número de bolinhas retiradas na décima sexta retirada é dado por

$$a_{16} = 10 + (16 - 1)5 = 10 + 15.5 = 10 + 75 = 85.$$

Após a décima sexta retirada o número total de bolinhas retiradas é dado pela soma da P.A. $(10, 15, 20, ..., 85)$. Temos pelo teorema 2.16 que

$$S_{16} = \frac{(a_1 + a_{16})16}{2}.$$

Assim,

$$S_{16} = (10 + 85)8 = 760.$$

Portanto restarão na caixa $1500 - 760 = 740$ bolinhas de gude após a décima sexta retirada.

2)Os lados de um triângulo retângulo estão em P.A.. Sabendo-se que o perímetro desse triângulo é de 72 cm podemos afirmar que o maior cateto mede:

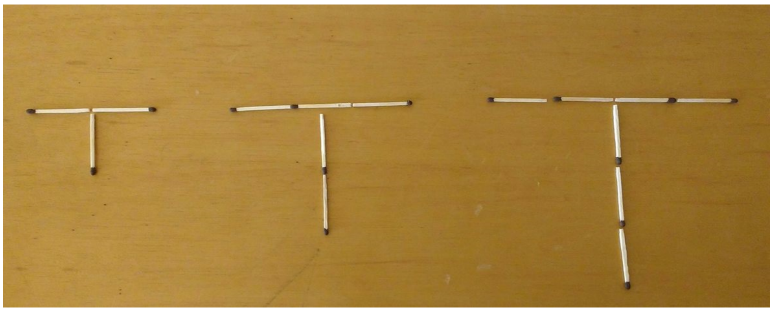
Solução. Sejam $x - r$, x e $x + r$ os lados do triângulo retângulo. Temos que

$$\begin{aligned}(x - r) + x + (x + r) &= 72\\ 3x &= 72\\ x &= 24.\end{aligned}$$

Portanto o maior cateto do triângulo retângulo tem comprimento igual a 24 cm.

3)Thiago possui uma certa quantidade de palitos de fósforo em mãos. Ele formou uma sequência com a letra inicial do seu nome conforme mostra a figura:

Figura 1: Sequência de letras T formada por palitos



Supondo que Thiago conseguiu formar 20 ”T”completos, seguindo o mesmo padrão de formação, responda os itens que seguem

(a) Quantos palitos possui o quinto, oitavo e décimo sexto ”T”respectivamente?

Solução. Pelo teorema 2.2 temos que

$$\begin{aligned} a_5 &= a_1 + 4r = 3 + 4.2 = 11 \\ a_8 &= a_1 + 7r = 3 + 7.2 = 17. \end{aligned}$$

e

$$a_{16} = a_1 + 15r = 3 + 15.2 = 33.$$

(b) Qual a diferença do número de palitos entre duas letras ”T”consecutivas nessa sequência?

Solução. A diferença entre duas letras ”T”consecutivas é de dois palitos.

(c) Qual o número de palitos usados por Thiago na n-ésima letra T?

Solução. Temos pelo teorema 2.2 que

$$a_n = 3 + (n-1)2 = 2n + 1.$$

(d) Qual a posição de uma letra T construída por Thiago sabendo que foram usados 19 palitos ?

Solução. Pelo item (c) temos que

$$\begin{aligned} 19 &= 2n + 1 \\ 2n &= 18 \\ n &= 9. \end{aligned}$$

(e) Quantos palitos possui o último ”T”dessa sequência?

Solução. Como Thiago construi 20 letras ”T”temos pelo teorema 2.2 que $a_{20} = a_1 + 19r = 3 + 19.2 = 41$.

(f) Qual a quantidade de palitos que Thiago possui em mãos?

Solução. A quantidade de palitos que Thiago possui é dado pela soma dos termos da P.A.$(3,5,7,...,41)$, na qual $a_1 = 3$, $r = 2$ e $a_n = 41$. Temos pelo teorema 2.16 que

$$S_{20} = \frac{(3+41)20}{2} = 440$$

palitos.

4) Um cinema possui 8 poltronas na primeira fileira, 10 poltronas na segunda e 12 na terceira; as demais fileiras se compõem na mesma sequência. Quantas fileiras são necessárias para o cinema ter um total de 532 poltronas?

Solução. O número de poltronas das fileiras do cinema formam a P.A.(8, 10, 12, ...) na qual $a_1 = 8$ e razão $r = 2$. Pelo teorema 2.2 temos que

$$a_n = 8 + (n-1)2 = 6 + 2n.$$

Pelo teorema 2.16 temos que

$$494 = \frac{(8+6+2n)n}{2}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} 988 &= (14+2n)n \\ 2n^2 + 14n - 988 &= 0 \\ n^2 + 7n - 494 &= 0. \end{aligned}$$

As raízes da equação do segundo grau acima são $n = 19$ e $n = -26$ (não convém).
Portanto são necessárias 19 fileiras.

2.2.4 APLICAÇÃO DA ATIVIDADE DE PROGRESSÃO ARITMÉTICA

Nessa subsessão relataremos a aplicação de uma atividade realizada em sala de aula envolvendo o conteúdo de progressão aritmética. A atividade foi aplicada na 1ª série A do Ensino Médio da Escola Dr Ernesto Fonseca, nas aulas de Matemática na segunda e terceira semana do mês de novembro de 2016. Foram utilizadas seis aulas para a realização dessa atividade.

Dominar as quatro operações, saber o método de resolução de uma equação de primeiro grau, ter conhecimento de potênciação e noção de sequência foram alguns dos pré-requisitos que os alunos deveriam saber para realizar a atividade proposta.

A metodologia da resolução de problemas foi abordada para a introdução dos conceitos de P.A. P.G., no entanto, para tal, foi elaborada uma atividade dividida nas seguintes etapas enumeradas abaixo.

1ª etapa: formação de grupos
Os alunos foram orientados a formar grupos de três ou quatro integrantes cada. Com a formação dos grupos, foi realizada uma etapa diagnóstica e representativa permitindo identificar as possíveis deficiências de aprendizagem e reconhecimento por parte dos alunos, podendo assim, obter uma orientação do ponto de partida da próxima aula.
Nessa etapa foi utilizado uma aula de 50 minutos. Foi trabalhado com os alunos algumas questões simples envolvendo as operações básicas com números inteiros, equações de primeiro grau, problemas de raciocínio lógico e algumas sequências.

2ªetapa: entrega da atividade (problema)-(papel do professor como mediador)
Nessa etapa foi disponibilizada uma lista de atividades para os alunos, envolvendo o conteúdo progressão aritmética, na qual havia uma imagem de uma sequência formada por palitos de fósforos.
Junto com a folha de atividades foi entregue para cada grupo uma caixa de fósforo contendo quarenta palitos de fósforo. A aplicação dessa atividade teve duração de duas aulas, totalizando cem minutos.

No item (a), utilizando os palitos de fósforo, os alunos deveriam reproduzir sobre a carteira a sequência de figuras. Em seguida, reconhecendo o padrão utilizado desenhar as duas próximas figuras da sequência.

No item (b) os alunos devem completar uma tabela com o número de triângulos e a quantidade de palitos usados em cada uma das nove primeiras figuras da sequência. Os alunos puderam utilizar os palitos de fósforo para para desenhar as figuras da sequência e preencher a tabela. Nesse item esperamos que os alunos consigam perceber intuitivamente a regularidade dessa sequência de figuras, para que o mesmo consiga responder os demais itens da atividade.

No item (c) os alunos devem responder qual é a diferença entre o número de palitos de duas figuras consecutivas. Esse item facilmente será respondido pelos alunos que acabaram de completar a tabela.

Ao responder os item (a), (b) e (c) espera-se que o alunos observem o comportamento geométrico da sequência de figuras e entenda a regularidade presente nessa sequência, observando que, para obter a figura seguinte, basta acrescentar mais dois palitos de fósforo formando um novo triângulo e obtendo, assim, uma figura com um triângulo a mais que a anterior.

No item (d) os alunos deveriam calcular o número de palitos de quatro figuras da sequência. Espera-se que os alunos entendam que o número de palitos utilizados para desenhar uma figura dessa sequência é dado pelo dobro da posição da figura adicionado de uma unidade, pois a quantidade de palitos que cada grupo possui não será suficiente para desenhar todas as figuras desse item.

No item (e) observando que a quantidade de palitos é dado em função do número de triângulos que desejamos desenhar, os alunos deveriam encontrar uma expressão algébrica que represente o número de palitos de uma figura de ordem qualquer.

No item (f) os alunos deveriam calcular o número de triângulos obtidos em cinco figuras, sabendo a quantidade de palitos que foram usados na construção de cada uma delas. Espera-se que os alunos tendo resolvido os itens anteriores, consigam perceber que para encontrar o número de triângulos de determinada figura, basta subrair uma unidade do número de palitos utilizados e dividir esse resultado por dois. Ou seja, usando a expressão encontrada no item (e) os alunos deveriam resolver uma equação do 1º grau em n para determinar o número de triângulos (ordem de uma figura) a partir do número de palitos usados na construção da mesma.

No item (g) os alunos deveriam determinar qual era o número máximo de triângulos que cada grupo conseguiria formar usando os quarenta palitos e ainda se todos palitos seriam utilizados. Espera-se que os alunos percebam rapidamente que a quantidade de palitos gasto sempre será um número ímpar, assim, não seriam utilizados todos os quarenta palitos.

3ªetapa: Análise e discussão dos resultados

Nessa etapa os alunos puderam discutir e trocar informações com os colegas, sendo que o professor participou da discussão e atuou como mediador dessa socialização dos trabalhos. Essa etapa aconteceu na aula seguinte à resolução das atividades e teve duração de 50 minutos.

Essa etapa foi iniciada com uma discussão sobre os resultados obtidos por cada grupo em todas as atividades, os quais foram apresentados no quadro. Como todos realizaram a mesma atividade, foi realizado um debate, onde cada grupo pode expressar a sua opinião e relatar as suas dificuldades.

Cada grupo pode explicar passo a passo aos demais grupos o método que utilizaram para resolver as questões e relatar o que acharam da atividade.

4ª etapa: formalização

Após um período de discussões, baseado na atividade proposta e resolução, foi feito uma formalização das soluções que os grupos apresentaram e as respectivas interpretações dos alunos sobre os conceitos trabalhados. Neste ponto foram relembrados e introduzidos os conceitos formais das progressões aritméticas, apresentando as propriedades, o termo geral e algumas demonstrações por meio de uma aula expositiva. Nessa etapa foram utilizados duas aulas, num total de cem minutos.

2.2.5 LISTA DE ATIVIDADE DE P.A.

A atividade de progressão aritmética foi realizada por 23 alunos, separados por grupos com 4 ou 5 integrantes cada.

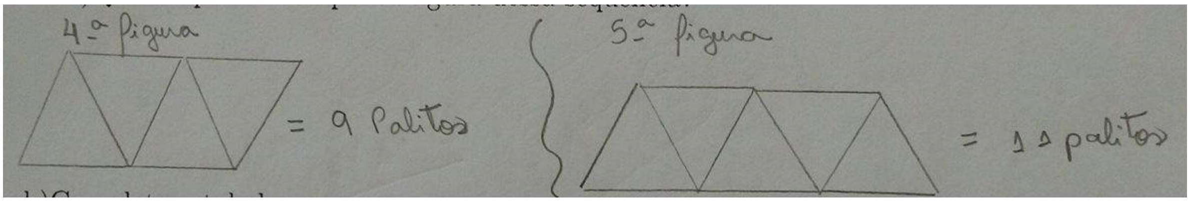
No item (a) todos os grupos desenharam corretamente a quarta e a quinta figura sobre a a carteira e na folha de atividade.

1)Observe as três primeiras figuras de uma sequência formada por palitos de fósforo e responda os itens abaixo

Figura 2: Sequência de triângulos formada por palitos

(a) Qual a quarta e a quinta figura dessa sequência?

Figura 3: Resposta item A



No item (b) como esperado todos os grupos conseguiram preencher a tabela corretamente relacionando o número de triângulos com a quantidade de palitos usados.

(b) Complete a tabela

Posição da figura	Número de triângulos	Número de palitos
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		

Figura 4: Resposta item B

Posição da figura	Número de triângulos	Número de palitos
1	1	3
2	2	5
3	3	7
4	4	9
5	5	11
6	6	13
7	7	15
8	8	17
9	9	19

(c) Qual a diferença no número de palitos entre duas figuras consecutivas?

No item (d) todos os alunos conseguiram responder o que foi pedido. Como esperado a maioria dos grupos reponderam esse item multiplicando a posição do número de triângulos que se desejava formar por dois e adicionando uma unidade a esse resultado. Outro grupo respondeu de maneira diferente. Para encontrar o número de palitos usados, eles somaram a posição da figura com a posição da figura sucessora, ou seja, a figura de posição n com a de posição $n+1$, resultando em $2n+1$ que é equivalente ao resultado encontrado pelos demais grupos.

(d) Quantos palitos serão necessários para formar 12, 35, 50 e 1000 triângulos?

Figura 5: Resposta item d - Grupo 1

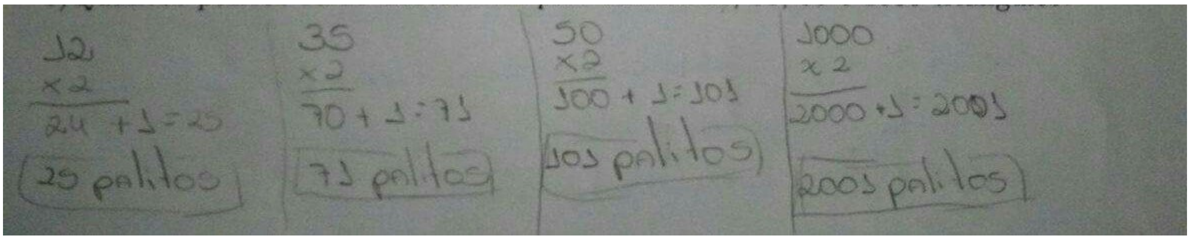
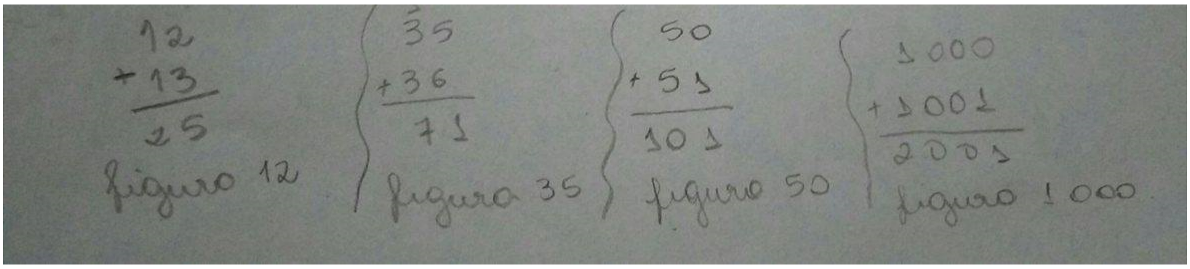
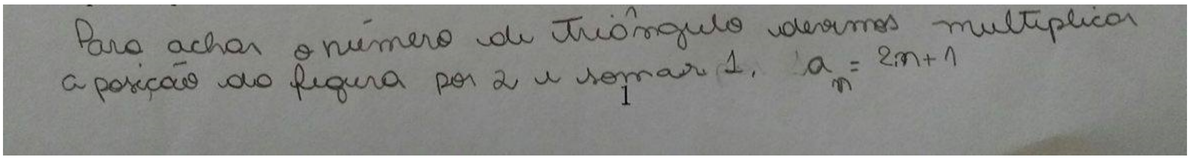


Figura 6: Resposta item d - Grupo 2



(e) Observe que o número necessário de palitos é dado em função do número de triângulos que se quer formar. Qual é o número de palitos usados para construir n triângulos?

Figura 7: Resposta item f



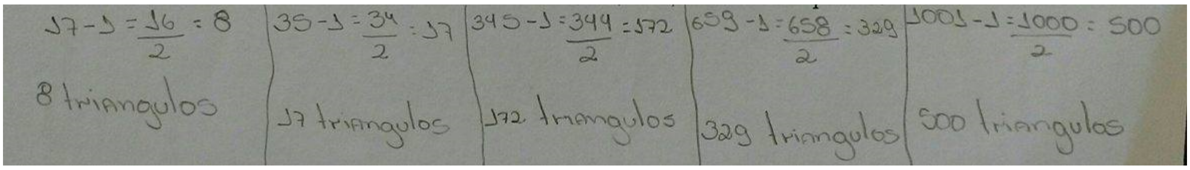
No item (f) como esperado os alunos conseguiram perceber que para encontrar o número de triângulos de determinada figura, bastava subrair uma unidade do número de palitos utilizados e dividir esse resultado por dois concluindo o item.

(f) Quantos triângulos podemos formar com 17, 35, 345, 659 e 1001 palitos?

(g) Qual o número máximo de triângulos que cada grupo poderá formar com os quarenta palitos? Serão utilizados todos os palitos?

No item (g) como esperado os alunos perceberam que a quantidade de palitos necessária para constuir determinada quantidade de triângulos sempre seria um número ímpar, logo não seria utilizado os quarenta palitos. Os alunos perceberam que seria gasto 39 palitos e

Figura 8: Resposta item F



que para determinar o número de triângulos que cada grupo conseguiria formar bastava subtrair uma unidade dessa quantidade e dividir o resultado por dois. Os alunos então encontraram a quantidade de triângulos construído, que foi de 19 triângulos. Todos os grupos conseguiram responder esse item sem apresentar dificuladade.

3 PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

Nesse capítulo apresentaremos as progressões geométricas. Vamos mostrar a definição dessa progressão, termo geral, classificação de acordo com a razão, algumas representações especiais, interpolação de meios geométricos, soma dos n primeiros termos de uma P.G. finita, e uma expressão que determina o limite da soma dos infinitos termos dessas sequências. Abordaremos alguns exemplos e problemas aplicáveis de progressão aritmética envolvendo essas propriedades e conceitos. As referências utilizadas como base para as definições, exemplos e problemas apresentados e discutidos neste capítulo foram Ribeiro (2012), Dante (2014), Giovanni e Bonjorno (2005), Iezzi et al. (2013).

3.1 DEFINIÇÕES BÁSICAS

Progressão Geométrica (P.G.) é uma sequência finita ou infinita em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao produto do termo anterior por uma constante real. Essa constante é chamada de razão da P.G. e é indicada por q. Ou seja, uma progressão geométrica é uma sequência na qual a taxa de crescimento relativo de cada termo para o seguinte é sempre a mesma. São exemplos de progressões geométricas:

$$
\begin{aligned}
(a_n) &= (1, 2, 4, 8, 16, ...) \\
(b_n) &= (6, 6, 6, 6, ...) \\
(c_n) &= (-3, -15, -75, -375, ...) \\
(d_n) &= (\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27} \frac{1}{81}, ...) \\
(e_n) &= (7, 0, 0, 0, 0, ...) \\
(f_n) &= (-1024, 512, -256, 128, -64, 32, ...).
\end{aligned}
$$

Claramente, a sequência (a_n) tem razão igual a 2; (b_n) razão igual a 1, (c_n) razão igual a 5; (d_n) razão igual a $\frac{1}{3}$; (e_n) razão igual a 0 e por fim a sequência (f_n) tem razão igual a $-\frac{1}{2}$.

Definição 3.1. *Diremos que uma sequência de números reais* (a_n) *é uma progressão geométrica (P.G.) de razão* $q \in \mathbb{R}$ *se*

$$a_{n+1} = a_n.q,$$

para todo natural n. Isto é,

$$a_2 = a_1q,\ a_3 = a_2q,\ a_4 = a_3q, ...,\ a_{n+1} = a_nq.$$

Levando em conta a definição acima apresentada, vamos mostrar que numa P.G ,todos os termos são completamente caracterizados pela razão q e pelo primeiro termo, isto é, a_1.

Teorema 3.2. *Se* (a_n) *é uma P.G. de razão* $q \in \mathbb{R}$*, então*

$$a_n = a_1.q^{(n-1)}$$

para todo n natural.

Demonstração. De fato consideremos as igualdades

$$a_2 = a_1q, a_3 = a_2q, a_4 = a_3q \cdots, a_n = a_{n-1}q.$$

Multiplicando essas $n-1$ igualdades membro a membro, temos

$$a_2a_3a_4 \cdots a_n = a_1a_2a_3a_4 \cdots a_{n-1}q^{n-1}.$$

Dividindo ambos os membros da igualdade por

$$a_2a_3a_4 \cdots a_{n-1}$$

temos que

$$a_n = a_1q^{n-1}.$$

Essa expressão acima é conhecida como a fórmula do termo geral da P.G. e nos permite conhecer qualquer termo da P.G. em função de a_1 e q. Assim, por exemplo, podemos escrever

$$a_7 = a_1q^6,$$

$$a_{15} = a_1q^{14}$$

e

$$a_{42} = a_1q^{41}.$$

Podemos ainda estender a definição do termo geral para $a_n = a_kq^{n-k}$.

Teorema 3.3. *Se a_n é uma P.G. e $n \geq K$ então $a_n = a_k q^{n-k}$.*

Demonstração. Como $a_n = a_1 q^{n-1}$ e $a_k = a_1 q^{k-1}$,
temos
$$\frac{a_n}{a_k} = q^{n-k}.$$
Logo
$$a_n = a_k q^{n-k}.$$

Exemplo 3.4. *Obtenha o nono e o décimo quarto termo da sequência* $(1,2,4,8,...)$.

Solução. A sequência acima é formada por uma progressão geométrica com primeiro termo $a_1 = 1$ e $q = 2$.
Temos pelo teorema 3.2 que $a_9 = a_1 q^8$ e $a_{14} = a_1 q^{13}$.
Assim,

$$\begin{aligned} a_9 &= 1.2^8 \\ a_9 &= 1.256 \\ a_9 &= 256. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} a_{14} &= 1.2^{13} \\ a_{14} &= 1.8192 \\ a_{14} &= 8192. \end{aligned}$$

Exemplo 3.5. *Em uma progressão geométrica crescente, o* 4 *termo é* 2 *e o* 9 *termo é* 13122. *Qual o valor do* 7 *termo dessa progressão?*

Solução. Temos pelo 3.3 que $a_9 = a_4 q^5$ (ao passar do 4 termo para o 9, avançamos 5 termos)

$$\begin{aligned} 13122 &= 54q^5 \\ 243 &= q^5 \\ q^5 &= 3^5 \\ q &= 3. \end{aligned}$$

E por fim

$$\begin{aligned} a_7 &= a_4 q^3 \\ a_7 &= 54.3^3 \\ a_7 &= 1458. \end{aligned}$$

Assim como ocorre com as progressões aritméticas as progressões geométricas também são classificadas de acordo com a sua razão.

Definição 3.6. *Dizemos que uma P.G. (a_n) é crescente quando cada termo é maior que o termo antecedente, isto é,*

$$a_n > a_{n-1},\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Isso ocorre quando $a_1 > 0$ e $q > 0$ ou $a_1 < 0$ e $0 < q < 1$.

Dizemos que uma P.G. (a_n) é decrescente quando cada termo é menor que o termo anterior, isto é,

$$a_n < a_{n-1},\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Isso ocorre quando $a_1 > 0$ e $0 < q < 1$, ou $a_1 < 0$ e $q > 1$.

Dizemos que uma P.G. (a_n) é constante se ocorrer de todos os termos coincidirem, ou seja, $a_n = a_{n+1}$ para todo n natural. Isso ocorre quando $q = 1$ e a_1 é qualquer termo real, ou $a_1 = 0$ e q é qualquer número real.

Dizemos que uma P.G. é alternada ou oscilante quando os termos são alternadamente positivos e negativos. Isso ocorre quando $q < 0$.

Dizemos que uma P.G. é estacionária quando a mesma for constante a partir do segundo termo. Isso ocorre quando $a_1 \neq 0$ e $q = 0$.

Exemplo 3.7. *Classifique as progressões geométricas abaixo de acordo com a razão de cada uma:*

a) P.G.$(3, 6, 12, 24, 48, ...)$

Solução. Temos $a_1 = 3$ e $q = 2$ logo a PG é crescente.

b)P.G.$(625, 125, 25, ...)$

Solução. Temos $a_1 = 625$ e $q = \frac{1}{5}$ logo a P.G. é decrescente.

c) P.G$(-7, -7, -7, ...)$.

Solução. Temos $a_1 = -7$ e $q = 1$ logo a P.G. é constante.

d)$(-6,18,-54,...)$

Solução. Temos $a_1 = -6$ e $q = 3$ logo a P.G. é alternada ou oscilante.

e)$(8,0,0,0,...)$

Solução. Como $a_1 = 0$ e $q = 0$ temos que a P.G. é estacionária.

f)P.G. $(-64,-32,-16,-8,-4,...)$

Solução. Temos $a_1 = -64$ e $q = -\frac{1}{2}$ logo a P.G. é crescente.

g) P.G.$(-4,-8,-16,...)$

Solução.temos $a_1 = -4$ e $q = -2$ logo a P.G. é decrescente.

h) P.G.$(0,0,0,...)$

Solução. temos $a_1 = 0$ e q qualquer número real, logo a P.G. é constante.

i)P.G.$(5,-10,20,...)$

Solução. Temos $a_1 = 5$ e $q = -2$ logo a P.G. é alternada ou oscilante.

Problema 3.8. *Uma empresa de telecomunicações planeja iniciar suas atividades em determinada região, comercializando programas de TV por assinatura. Sua meta para o primeiro ano de operações é vender 15 pacotes no primeiro mês, 30 pacotes no segundo mês, 60 pacotes no terceiro mês e assim por diante; isto é, em determinado mês o número de pacotes vendidos deve ser o dobro do número vendido no mês anterior. Considerando que essa meta seja alcançada, qual o número de pacotes de programas de TV por assinatura que serão vendidos no último mês do primeiro ano?*

Solução. Temos que a sequência de pacotes vendidos será

$$(15,30,60,120,240,...).$$

A sequência formada é uma P.G.cujo primeiro termo $a_1 = 15$ e $q = 2$. Assim, devemos encontrar o valor do número de pacotes vendidos no último mês do primeiro ano.
Temos pelo teorema 3.2 que

$$a_{12} = 15.2^{11}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} a_{12} &= 15.2048 \\ a_{12} &= 30720. \end{aligned}$$

Logo, o número de pacotes vendidos no último mês do primeiro ano é de 30720.

3.1.1 REPRESENTAÇÕES ESPECIAIS DE UMA PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

Muitas vezes para a resolução de certos problemas, é de grande utilidade representar genericamente uma progressão geométrica. A vantagem das representações especiais é diminuir a quantidade de cálculos exigidos em algumas situações. As principais representações especiais seguem abaixo:
três termos em P.G.,

$$(x, xq, xq^2),$$

ou

$$\left(\frac{x}{q}, x, xq\right);$$

quatro termos em P.G.

$$(x, xq, xq^2, xq^3)$$

e cinco termos em P.G.

$$(x, xq, xq^2, xq^3, xq^4)$$

ou

$$\left(\frac{x}{q^2}, \frac{x}{q}, x, xq, xq^2\right).$$

Exemplo 3.9. *Determine três números em P.G. de forma que o produto deles é* 729 *e a soma é* 39.

Solução. Neste tipo de problema sobre P.G. com três termos consecutivos, é conveniente representar a sequência na forma $\left(\frac{x}{q}, x, xq\right)$ em que o termo médio é x e a razão é q. Assim, temos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \frac{x}{q}.x.xq = 729 \\ \frac{x}{q} + x + xq = 39 \end{cases}.$$

Da primeira equação temos $x^3 = 729$ ou seja $x = 9$. Substituindo na segunda equação temos $\frac{9}{q} + 9 + 9q = 39$ ou seja, $3q^2 - 10q + 3 = 0$ Resolvendo a equação do segundo grau temos que $q = 3$ ou $q = \frac{1}{3}$. Então, para $x = 9$ e $q = 3$, temos: que os números são $(3, 9, 27)$. Para $x = 9$ e $q = \frac{1}{3}$, temos: que os números procurados são $3, 9, 27$. Portanto, os números procurados são $3, 9, 27$.

3.1.2 INTERPOLAÇÃO GEOMÉTRICA

Interpolar, intercalar ou inserir k meios geométricos entre dois números a e b significa obter uma P.G. de k+2 termos, cujo 1º termo seja a e o último termo seja b. Para isso, basta conhecermos a razão da P.G. Temos pelo termo geral da P.G. que

$$a_n = a_1 q^{n-1}.$$

Segue que

$$\begin{aligned} b &= aq^{(k+2)-1} \\ \frac{b}{a} &= q^{k+1} \\ q &= \pm \sqrt[k+1]{\frac{b}{a}}. \end{aligned}$$

Problema 3.10. *Interpole seis meios geométricos entre* 10 *e* 1280.

Solução. Devemos formar uma progressão geométrica na qual $a_1 = 10$, $a_n = 1280$ e $n = 8$. Temos pelo teorema 3.2 que

$$a_8 = a_1 q^7.$$

Assim,

$$\begin{aligned} 1280 &= 10q^7 \\ q^7 &= 128 \\ q &= 2. \end{aligned}$$

Interpolando os meios geométricos obtemos a P.G.$(10, 20, 40, 80, 160, 320, 640, 1280)$.

Problema 3.11. *No segundo semestre de 2015, a produção mensal de uma indústria cresceu em PG. Em julho, a produção foi de 1000 unidades e, em dezembro foi de 243.000 unidades. Qual foi a produção dessa indústria nos meses de agosto, setembro, outubro e novembro?*

Solução. Nessas condições, o problema consiste em formar uma P.G. na qual
$a_1 =$ produção de julho $= 1000$,
$a_n =$produção de dezembro $= 243000$,
$n = 6$.
Devemos inicialmente calcular o valor da razão q dessa progressão geométrica.

Temos pelo teorema 3.2 que
$$a_6 = a_1 q^5.$$

Assim,

$$\begin{aligned} 243000 &= 1000q^5 \\ q^5 &= 243 \\ q &= 3. \end{aligned}$$

Então, teremos $a_2 =$ produção de agosto $= 3000$,

$a_3 =$ produção de setembro $= 9000$,

$a_4 =$ produção de outubro $= 27000$, e $a_5 =$ produção de novembro $= 81000$.

Na realidade o que fizemos foi inserir ou interpolar quatro meios geométricos entre 1000 e 243000.

Problema 3.12. *Quantos meios geométricos devemos inserir entre* 1 *e* 4096 *de modo que a sequência obtida tenha razão 4?*

Solução. Nesse caso temos uma progressão geométrica na qual $a_1 = 1$, $a_n = 4096$ e $q = 4$. Devemos então encontrar o número de termos da P.G., ou seja o valor de n.
Temos pelo teorema 3.2 que
$$4096 = 1.4^{n-1}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} 4^6 &= 4^{n-1} \\ n-1 &= 6 \\ n &= 7. \end{aligned}$$

Então a P.G. deve ter 7 termos, ou seja devemos inserir 5 meios geométricos para que a sequência tenha razão igual a 4.

3.1.3 PROPRIEDADES DAS PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS

Nessa subseção vamos abordar algumas propriedades das progressões geométricas. Mostraremos a relação existente entre três números consecutivos dessas progressões; como determinar o produto de dois termos equidistantes dos extremos em uma P.G. finita e a relação existente entre o termo médio e os extremos de uma P.G. finita com número ímpar de termos. Introduziremos uma fórmula que permite calcular a soma dos n primeiros termos de uma P.G. finita; uma expressão que determina o limite da soma dos infinitos termos desse tipo de sequência; uma fórmula que determina o produto dos n primeiros termos e alguns problemas e exemplos aplicáveis dessas propriedades.

Propriedade 3.13. *Dados três números a, b, e c em P.G, nessa ordem, o número b é a média geométrica dos dos números a e c, ou seja:*

$$b^2 = a.c$$

ou

$$b = \sqrt{a.c}.$$

Demonstração. De fato, consideremos a P.G.(a,b,c), temos pela definição de progressão geométrica que a razão é dado por:

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$$
$$b^2 = a.c.$$

Propriedade 3.14. *Numa P.G. finita, o produto de dois termos equidistantes dos extremos é igual ao produto dos extremos, ou seja*

$$a_1a_n = a_2a_{n-1} = a_3a_{n-2} = \cdots = (t_m)^2$$

sendo t_m o termos médio (quando existe).

Generalizando, temos que

$$a_m.a_n = a_k.a_p,$$

se $m+n = k+p$. Isso explica a primeira propriedade, pois considerando três termos consecutivos

$$(..., a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, ...)$$

temos que

$$a_k^2 = a_{k-1}.a_{k+1},$$

pois

$$k+k = k-1+k+1.$$

Propriedade 3.15. *Em toda P.G. finita com número ímpar de termos, o termo médio (t_m) é a média geométrica dos extremos, ou seja:*

$$(t_m)^2 = a_1.a_n$$

ou

$$t_m = \sqrt{a_1.a_n}.$$

Exemplo 3.16. *Determine os valores de x e y e escreva a progressão geométrica correspondente sabendo que a sequência* $(25, x, 625, y)$ *é uma P.A..*

Solução. Pela propriedade 3.13 temos que

$$\frac{x}{25} = \frac{625}{x}.$$

Segue que

$$\begin{aligned} x^2 &= 15625 \\ x &= 125. \end{aligned}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} (625)^2 &= 125y \\ 390625 &= 125y \\ y &= 3125. \end{aligned}$$

Nesso caso, temos uma progressão geométrica finita de razão $= 5$, ou seja a P.G.$(25, 125, 625, 3125)$.

3.1.4 SOMA DOS *N* PRIMEIROS TERMOS DE UMA P.G.

Seja $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ uma P.G. A soma dos n primeiros termos dessa progressão pode ser escrita por

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n. \tag{3}$$

Multiplicando por $q (q \neq 0)$ os dois membros da igualdade acima e lembrando a formação dos elementos de uma P.G., vem

$$qS_n = q(a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n)$$

ou seja

$$qS_n = a_1q + a_2q + a_3q + ... + a_{n-2}q + a_{n-1}q + a_nq$$

segue que

$$qS_n = a_2 + a_3 + ... + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n + a_nq. \tag{4}$$

Subtraindo (3) de (4) obteremos

$$qS_n - S_n = (a_2 + a_3 + ... + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n + a_n q) - (a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n).$$

Temos pelo termo geral da PG que

$$a_n = a_1 q^{n-1}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} S_n(q-1) &= a_1 q^{n-1} q - a_1 \\ &= a_1 q^n - a_1, \end{aligned}$$

e, portanto,

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}.$$

Observe que, se q = 1, a fórmula deduzida não pode ser aplicada, pois anula o denominador. Nesse caso, todos os termos da P.G. são iguais e, para calcular a soma de seus n primeiros termos, basta fazer

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n = a_1 + a_1 + a_1 + ... + a_1$$

$$S_n = na_1$$

Problema 3.17. *Determine a soma dos termos da sequência* $(4, 8, 16, ..., 1024)$.

Solução. A sequência é formada por uma progressão geométrica finita com primeiro termo $a_1 = 4$, $a_n = 1024$ e $q = 2$. Primeiramente vamos determinar o número de termos da P.G.. Temos pelo teorema 3.2 que

$$1024 = 4.2^{n-1}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} 256 &= 2^{n-1} \\ 2^8 &= 2^{n-1} \\ n &= 9. \end{aligned}$$

Logo, devemos calcular a soma dos nove primeiros termos dessa progressão. Pela soma os n termos da P.A. temos

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} S_9 &= \frac{4(2^9-1)}{2-1} \\ S_9 &= 4.511 \\ S_9 &= 2044. \end{aligned}$$

Problema 3.18. *Os termos do primeiro membro da equação*

$$1+3+9+\cdots+x = 3280$$

formam uma progressão geométrica. Encontre o conjunto solução dessa equação.

Solução. O primeiro membro da equação é formado por uma PG., onde $a_1 = 1$, $q = 3$ e $a_n = x$. Temos pela soma dos n primeiros termos de uma P.G que

$$S_n = \frac{a_1(q^n-1)}{q-1}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} 3280 &= \frac{1(3^n-1)}{3-1} \\ 3^n-1 &= 6560 \\ 3^n &= 6561 \\ 3^n &= 3^8. \end{aligned}$$

Aplicando a propriedade de potência de mesma base concluímos que $n = 8$.
Logo, o primeiro membro da equação é uma P.G. de oito termos. Devemos encontrar o oitavo termo dessa PG.
Temos pelo teorema 3.2 que

$$a_8 = a_1 q^7.$$

Assim,

$$\begin{aligned} a_8 &= 1.3^7 \\ a_8 &= 2187. \end{aligned}$$

Portanto

$$S = 2187.$$

Problema 3.19. *Uma pessoa aposta na loteria durante seis semanas, de tal forma que, em cada semana, o valor da aposta é o dobro do valor da aposta da semana anterior. Se o valor* *da aposta da primeira semana é R 30,00, qual o total apostado após as seis semanas?*

Solução. A sequência formada pelo valor apostado a cada semana é uma PG na qual $a_1 = 30$, $q = 2$ e $n = 6$. Logo, pela soma dos n primeiros termos da P.G. o valor total apostado após seis semanas é dado por

$$S_6 = \frac{30(2^6 - 1)}{2 - 1}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} S_6 &= 30.63 \\ S_6 &= 1890,00. \end{aligned}$$

O símbolo $\sum$ é utilizado para representar uma soma. Ele é denominado somatório. Assim, por exemplo, a soma $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 10^2 = \sum\limits_{k=1}^{10} k^2$ (Lê-se: somatório dos quadrados dos números k, onde k varia de 1 até 10).

Problema 3.20. *Determine n tal que* $\sum\limits_{k=3}^{n} 2^k = 8184$.

Solução. Temos um somatório das potências de 2, com expoentes variando entre 3 e n, ou seja

$$2^3 + 2^4 + 2^5 + \cdots + 2^n = 8184.$$

O primeiro membro da equação acima é a soma de uma PG onde $a_1 = 2^3$, $q = 2$ e $a_n = 2^n$. Temos pela soma dos n primeiros termos de uma PG que

$$8184 = \frac{2^3(2^n - 1)}{2 - 1}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} 8184 &= 2^{n+3} - 8 \\ 2^{n+3} &= 2^{13}. \end{aligned}$$

Aplicando a propriedade de potência de mesma base segue que

$$\begin{aligned} n + 3 &= 13 \\ n &= 10. \end{aligned}$$

Teorema 3.21. *Numa progressão geométrica infinita, com* $0 < |q| < 1$*, o limite da soma de seus infinitos termos é dado por* $S_n = \frac{a_1}{1-q}$.

Demonstração. Vamos demonstrar esse teorema utilizando a fórmula da soma S_n dos n primeiros termos da P.G. finita, isto é:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q-1} = \frac{a_1 - a_1 q^n}{1-q} = \frac{a_1}{1-q} - \frac{a_1 q^n}{1-q}.$$

Na fórmula acima quando o número de termos n aumenta indefinidamente (tende ao infinito), a potência q^n se aproxima indefinidamente de zero (tende a zero), pois o número q está compreendido entre -1 e 1, ou seja $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$.

Assim,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q} - \frac{a_1.0}{1-q} = \frac{a_1}{1-q}.$$

Problema 3.22. *Determine o valor da soma*

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \cdots$$

Solução. As parcelas da soma formam uma PG infinita na qual $a_1 = \frac{1}{3}$ e $q = \frac{2}{3}$.

Como $0 < |\frac{2}{3}| < 1$, temos pelo teorema 3.21 que o valor da soma é dado por

$$S_n = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{2}{3}}.$$

Assim,

$$S_n = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} = 1.$$

Problema 3.23. *Determine a fração geratriz:*

(a) da dízima periódica simples $0,5555\ldots$

Solução. Temos que

$$0,5555\ldots = 0,5 + 0,05 + 0,005 + \ldots$$

As parcelas formam a PG infinita $(\frac{5}{10} + \frac{5}{10^2} + \frac{5}{10^3} + \ldots)$ na qual $a_1 = \frac{5}{10}$ e $q = \frac{1}{10}$. A fração correspondente a $0,5555\ldots$ é o valor da soma dos infinitos termos dessa PG.

Temos pelo teorema 3.21 que

$$S_n = \frac{\frac{5}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{5}{9}.$$

(b) da dízima periódica composta $0,6474747\ldots$

Solução. Temos que

$$0,6474747\ldots = 0,6 + 0,047 + 0,00047 + \ldots = \frac{6}{10} + \frac{47}{10^3} + \frac{47}{10^5} + \frac{47}{10^7} + \ldots$$

. Observamos que a sequência $(\frac{47}{10^3}, \frac{47}{10^5}, \frac{47}{10^7}, \ldots)$ é uma PG infinita, na qual $a_1 = \frac{47}{10^3}$ e $q = \frac{1}{10^2}$.

Temos pelo teorema 3.21 que
$$S_n = \frac{\frac{47}{1000}}{1-\frac{1}{100}}.$$
Assim,
$$S_n = \frac{\frac{47}{1000}}{\frac{99}{100}} = \frac{47}{990}.$$
Agora, vamos calcular:
$$0,6474747\ldots = \tfrac{6}{10} + \tfrac{47}{990} = \tfrac{594+47}{990} = \tfrac{641}{990}$$

Problema 3.24. *Resolva a equação*
$$x + \frac{x}{4} + \frac{x}{16} + \frac{x}{64} \ldots = 12,$$
na qual o primeiro membro é o limite da soma dos termos de uma PG infinita.

Solução. O primeiro membro da equação representa a soma dos termos da PG infinita
$$\left(x, \frac{x}{4}, \frac{x}{16}, \frac{x}{64} \ldots\right).$$
Temos pelo teorema 3.21 que
$$\frac{x}{1-\frac{1}{4}} = \frac{x}{\frac{3}{4}}.$$
Assim,
$$\begin{aligned} \frac{x}{\frac{3}{4}} &= 12 \\ x &= \frac{36}{4} = 9. \end{aligned}$$

3.1.5 PRODUTO DOS *N* PRIMEIROS TERMOS DE UMA PG

Uma interessante aplicação da soma dos termos de uma P.A. é na obtenção da expressão que define o produto dos n primeiros termos de uma P.G.

Sendo (a_n) uma P.G., o produto dos n primeiros termos dessa progressão é dado por
$$P_n = a_1 a_2 a_3 \cdots a_n$$
Usando a fórmula do termo geral da P.G., obtemos
$$P_n = a_1 a_1 q a_1 q^2 \cdots a_1 q^{n-1},$$

ou seja,

$$P_n = a_1 a_1 a_1 \cdots a_1 q q^2 q^3 \cdots q^{n-1}.$$

Logo,

$$P_n = (a_1)^n q^{1+2+3+\cdots+(n-1)}.$$

Observe que o expoente de q na expressão acima corresponde à soma dos $n-1$ termos da P.A.

$$(1,2,3,\cdots,n-1),$$

isto é,

$$\frac{[1+(n-1)].(n-1)}{2},$$

ou ainda,

$$\frac{n.(n-1)}{2}.$$

Assim,

$$P_n = a_1^n q^{\frac{n.(n-1)}{2}}.$$

Exemplo 3.25. *Determinar o valor do produto dos dez primeiros termos da sequência*

$$(2,1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},...).$$

Solução. A sequência acima é uma P.G. com $q = \frac{1}{2}$ e $n = 10$.
Pelo produto dos n primeiros termos de uma P.G temos

$$P_n = (a_1)^n.q^{\frac{n.(n-1)}{2}}.$$

Segue que

$$\begin{aligned} P_{10} &= (2)^{10}.\frac{1}{2}^{\frac{10.9}{2}} \\ P_{10} &= 2^{10}\frac{1}{2}^{45}. \end{aligned}$$

Aplicando as propriedade de multiplicação e divisão de potência de mesma base concluímos que

$$P_{10} = 2^{10}.2^{-45} = 2^{-35} = \frac{1}{2^{35}}.$$

3.1.6 APLICAÇÃO DA ATIVIDADE DE PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

Nessa subsessão relataremos a aplicação de uma atividade realizada em sala de aula envolvendo o conteúdo de progressão geométrica. A atividade foi aplicada na 1ª série A do Ensino Médio da Escola Dr Ernesto Fonseca, nas aulas de Matemática na terceira e quarta semana do mês de novembro de 2016. Foram utilizadas seis aulas para a realização dessa atividade.

Dominar as quatro operações, saber o método de resolução de uma equação de primeiro grau, ter conhecimento de potênciação e noção de sequência foram alguns dos pré-requisitos que os alunos deveriam saber para realizar a atividade proposta.

A metodologia da resolução de problemas foi abordada para a introdução dos conceitos de P.A. P.G., no entanto, para tal, foi elaborada uma atividade dividida nas seguintes etapas enumeradas abaixo.

1ª etapa: formação de grupos
Os alunos foram orientados a formar grupos de três ou quatro integrantes cada. Com a formação dos grupos, foi realizada uma etapa diagnóstica e representativa permitindo identificar as possíveis deficiências de aprendizagem e reconhecimento por parte dos alunos, podendo assim, obter uma orientação do ponto de partida da próxima aula.
Nessa etapa foi utilizado uma aula de 50 minutos. Foi trabalhado com os alunos algumas questões simples envolvendo as operações básicas com números inteiros, equações de primeiro grau, potências, problemas de raciocínio lógico e algumas sequências.

2ªetapa: entrega da atividade (problema)-(papel do professor como mediador)
Nessa etapa foi disponibilizada uma lista de atividades para os alunos, envolvendo o conteúdo progressão geométrica, na qual havia uma imagem de uma sequência de dobraduras realizadas em uma folha retangular.
Junto com a folha de atividades foi entregue para cada integrante dos grupos uma folha de sulfite A4. A aplicação dessa atividade teve duração de duas aulas, totalizando cem minutos.

Os alunos deveriam dobrar sucessivas vezes a folha retangular sempre pela metade e sempre paralelamente à largura do retângulo encontrado.

No item (a) os alunos deveriam ir dobrando a folha e completando a tabela com o respectivo número de retângulos que ficavam marcados sobre a folha. Para completar a tabela era necessário realizar cinco dobraduras na folha.

No item (b) os alunos deverão responder qual a quantidade de retângulos que ficarão marcados na folha se for realizado 6, 8, 9, e 10 dobraduras. Esperamos que os alunos percebam que o número de retângulos marcados na folha em cada dobradura segue uma certa regularidade. Ou seja, esperamos que ao realizar as dobraduras e completar a tabela do item (a) os alunos reconheçam o padrão da sequência formada pelo número de retângulos.
No item (c) os alunos deveriam explicar a relação entre a quantidade de retângulos formados por duas dobraduras consecutivas. Nesse item bastava o aluno relatar que a quantidade de retângulos de uma dobradura é o dobro da quantidade obtida na dobradura anterior. Esperamos que os alunos consigam perceber intuitivamente esse fato.

Ao responder os item (a), (b) e (c) espera-se que o alunos observem o comportamento da sequência formada pelo número de retângulos e entenda a regularidade presente nessa sequência. Esperamos que os alunos percebam que, para obter o número de retângulos de cada dobradura, basta multiplicar por dois a quantidade de retângulos obtida na dobradura anterior.

No item (d) os alunos deveriam determinar o número de dobraduras que devemos realizar na folha para obter 128, 2048 e 8192 retângulos marcados respectivamente.

No item (e) observando que a quantidade de retângulos marcados na folha é dado em função do número de dobraduras realizadas, os alunos deveriam generalizar uma expressão que determinasse o número de retângulos formados com n dobraduras.

No item (f) os alunos deveriam calcular o número de retângulos marcados na folha ao se realizar 50, 200 e 999 dobraduras respectivamente. Ou seja, usando a expressão encontrada no item (e) bastava substituir n pelo número da dobradura desejada para determinar o número de retângulos marcados.

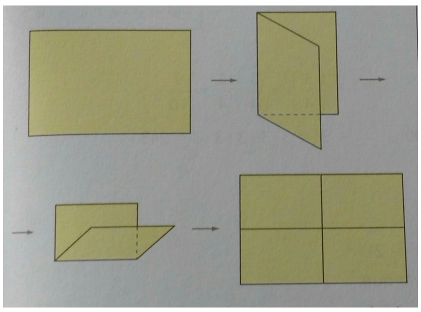
3ªetapa: Análise e discussão dos resultados
Nessa etapa os alunos puderam discutir e trocar informações com os colegas, sendo que o professor participou da discussão e atuou como mediador dessa socialização dos trabalhos. Essa etapa aconteceu na aula seguinte à resolução das atividades e teve duração de 50 minutos.

Essa etapa foi iniciada com uma discussão sobre os resultados obtidos por cada grupo em todas as atividades, os quais foram apresentados no quadro. Como todos realizaram a mesma atividade, foi realizado um debate, onde cada grupo pode expressar a sua opinião e relatar as suas dificuldades.
Cada grupo pode explicar passo a passo aos demais grupos o método que utilizaram para resolver as questões e relatar o que acharam da atividade.

4ª etapa: formalização
Após um período de discussões, baseado na atividade proposta e resolução, foi feito uma formalização das soluções que os grupos apresentaram e as respectivas interpretações dos alunos sobre os conceitos trabalhados. Neste ponto foram relembrados e introduzidos os conceitos formais das progressões geométricas, apresentando as propriedades, o termo geral e algumas demonstrações por meio de uma aula expositiva. Nessa etapa foram utilizados duas aulas, num total de cem minutos.
Abaixo segue a lista da atividade de P.G. aplicada em sala de aula.

1)Dobre uma folha retangular pela metade, paralelamente à sua largura e, em seguida, abra-a e anote o número de retângulos que aparecem marcados; continue dobrando sucessivamente o retângulo encontrado, sempre pela metade e no mesmo sentido. E, a cada etapa, abra totalmente a folha e anote a quantidade de retângulos menores que aparecem marcados nela. O esquema abaixo dá uma ideia do processo:

Figura 9: Esquema de dobradura em uma folha retangular



(a) Complete a seguinte tabela com os resultados obtidos. Vamos chamar de número de dobraduras a quantidade de vezes que o papel foi dobrado a cada etapa.

Tabela 1: Número de retângulos formados em função do número de dobraduras

Número de dobraduras	Número de retângulos
0	
1	
2	
3	
4	
5	

(b) Quantos retângulos ficarão marcados na folha se forem feitas 6, 8, 9 e 10 dobraduras respectivamente?

(c) O que podemos concluir em relação a quantidade de retângulos formados por duas dobraduras consecutivas?

(d) Quantas dobraduras devemos realizar na folha original para obtermos 128, 2048 e 8192 retângulos marcados respecitivamente?

(e) Observe que o número de retângulos marcados é dado em função do número de dobraduras que realizamos na folha original. Generalize, encontrando uma expressão que dá o número de retângulos para n dobraduras.

(f) Qual o número de retângulos marcados ao se realizar 50, 200 e 999 dobraduras respectivamente?

4 PROGRESSÕES E TRIÂNGULOS

Nesse capítulo vamos mostrar algumas conexões entre as Progressões e a Geometria Plana. Estudaremos o triângulo de Kepler que relaciona o número áureo as progressões geométricas e o triângulo de Sierpinski que também está relacionado a P.G.. Fazer esssa ligação entre a Geometria Plana e as progressões é de extrema importância em sala de aula, pois por meio dessa ligação os alunos terão uma visão maior da aplicação das progressões. Em sala de aula podem ser trabalhadas as atividades propostas sobre esses triângulos, podendo fazer com que o aluno também aprenda os conceitos de geometria plana. No triângulo de Kepler é utilizado o teorema de Pitágoras, que é um conteúdo importante que pode ser sempre trabalhado e relembrado em sala de aula. No triângulo de Sierpinski o professor pode explorar o conceito de triângulo equilátero, trabalhando atividades que envolvam a área, perímetro e altura, e ainda mostrar aos alunos quais as condições necessárias para que um triângulo seja equilátero.

4.0.1 TRIÂNGULO DE KEPLER

Considere um triângulo retângulo cujo cateto menor tem comprimento 1, cateto maior comprimento $\sqrt{\phi}$ e hipotenusa de comprimento ϕ. Pelo teorema de Pitágoras temos que $\phi^2 = \phi + 1$, ou seja, esse triângulo retângulo é formado por três quadrados cujas áreas estão em progressão geométrica de razão ϕ. Esse triângulo retângulo com tais características é chamado de Triângulo de Kepler em homenagem ao matemático e astrônomo Johannes Kepler(1571 - 1630) que demonstrou pela primeira vez que este triângulo é caracterizado por uma razão entre um cateto e a hipotenusa igual para a proporção áurea. Os triângulos Kepler deixaram esse matemático fascinado pois relacionam dois conceitos matemáticos importantes o teorema de Pitágoras e a relação dourada. Kepler chegou a fazer a seguinte citação: A geometria tem dois grandes tesouros: um é o teorema de Pitágoras; o outro, a divisão de um segmento em média e extrema razão. O primeiro pode ser comparado a uma medida de ouro; o segundo podemos chamar de joia preciosa. As áreas dos quadrados relacionados aos lados de um triângulo Kepler estão ligadas a proporção áurea $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. O triângulo de Kepler é um triângulo retângulo cujos lados estão em progressão geométrica e relacionados a proporção áurea. Seus lados estão portanto na razão $1 : \sqrt{\phi} : \phi$, ou seja $1 : 1,272... : 1,618...$

Construção de um triângulo de Kepler

Usando apenas uma régua e compasso, vamos construir primeiramente um retângulo dourado seguindo as instruções:

1)Construir um quadrado

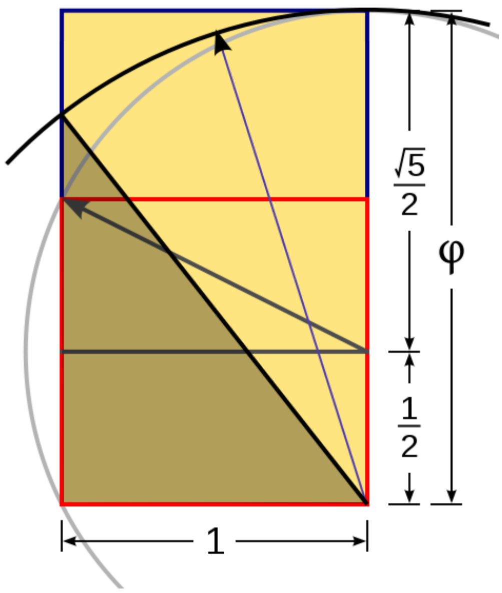
2)Desenhar uma linha a partir do ponto médio de um lado do quadrado para um dos cantos no lado oposto

3)Usar essa linha como raio para desenhar um arco de uma circunferência para definir a altura do retângulo

4)Completar o retângulo dourado

Em seguida use o maior lado do retângulo dourado para desenhar um arco de circunferência que intersecta o lado oposto do retângulo e define a hipotenusa do triângulo de Kepler.

Figura 10: Construção do triângulo de Kepler



Fonte:Internet(2017)

4.1 TRIÂNGULO DE SIERPINSKI

O Triângulo de Sierpinski é obtido por meio de um processo iterativo, ou seja, um processo de repetir uma ou mais ações. Esse triângulo foi estudado pelo matemático Waclav Sierpinski (1882-1969). Consideremos um triângulo equilátero. Na iteração 0, o triângulo está na forma original. A primeira iteração consiste em determinar o ponto médio dos três lados desse triângulo. Em seguida, unindo esses pontos médios, obtemos 4 novos triângulos equiláteros e congruentes entre si. Retiramos o triângulo central. Continuemos o processo unindo os pontos médios dos três novos triângulos formados, e assim sucessivamente.

Figura 11: Formação do triângulo de Sierpinski

Uma sugestão de atividade sobre progressões envolvendo o Triângulo de Sierpinski seria a atividade abaixo. Considerando um triângulo equilátero de lado L complete a tabela e responda os problemas propostos

Tabela 2: Resultados das iterações no triângulo de Sierpinski

Iteração	nº de Δ	Lado de um Δ	Perímetro de um Δ	Perímetro total	Área de um Δ
0	1	L	$3L$	$3L$	
1	3	$\frac{L}{2}$	$\frac{3L}{2}$	$\frac{9L}{2}$	
2	9	$\frac{L}{4}$	$\frac{3L}{4}$	$\frac{27L}{4}$	
3	27	$\frac{L}{8}$	$\frac{3L}{8}$	$\frac{81L}{8}$	
4	81	$\frac{L}{16}$	$\frac{3L}{16}$	$\frac{243L}{16}$	

1)Com base na tabela determine as sequências dos itens que seguem e encontre o termo geral (n-ésimo termo) de cada uma dessas sequências

(a) Sequência do número de triângulos formados em cada iteração

Solução.

$$a_n = (1, 3, 9, 27, 81, ...).$$

A sequência é uma P.G. com $a_0 = 1$ e $q = 3$, o n-ésimo termo é dado por

$$a_n = a_0 q^n = 1.3^n = 3^n.$$

(b) Sequência do comprimento do lado de um triângulo formado em cada iteração

Solução.

$$b_n = \left(L, \frac{L}{2}, \frac{L}{4}, \frac{L}{8}, \frac{L}{16}, \ldots\right).$$

A sequência é uma P.G. com $a_0 = L$ e $q = \frac{1}{2}$, o n-ésimo termo é dado por

$$a_n = a_0 q^n = L\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{L}{2^n}.$$

(c) Sequência do perímetro de um triângulo em cada iteração

Solução.

$$c_n = \left(3L, \frac{3L}{2}, \frac{3L}{4}, \frac{3L}{8}, \frac{3L}{16}, \ldots\right).$$

A sequência é uma P.G. com $a_0 = 3L$ e $q = \frac{1}{2}$, o n-ésimo termo é dado por

$$a_n = a_0 q^n = 3L\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{3L}{2^n}.$$

(d) Sequência do perímetro total dos triângulos formados em cada iteração

Solução.

$$d_n = \left(3L, \frac{9L}{2}, \frac{27L}{4}, \frac{81L}{8}, \frac{243L}{16}, \ldots\right).$$

A sequência é uma P.G. com $a_0 = 3L$ e $q = \frac{3}{2}$, o n-ésimo termo é dado por

$$a_n = a_0 q^n = 3L\left(\frac{3}{2}\right)^n = \frac{3^{n+1}L}{2^n}.$$

(e) Sequência da área de um triângulo em cada iteração

Solução.

$$e_n = \left(\frac{L^2\sqrt{3}}{4}, \frac{L^2\sqrt{3}}{16}, \frac{L^2\sqrt{3}}{64}, \frac{L^2\sqrt{3}}{256}, \frac{L^2\sqrt{3}}{1024}, \ldots\right).$$

A sequência é uma P.G. com $a_0 = \frac{L^2\sqrt{3}}{4}$ e $q = \frac{1}{4}$, o n-ésimo termo é dado por

$$a_n = a_0 q^n = \frac{L^2\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{L^2\sqrt{3}}{4^{n+1}}.$$

(f) Sequência da área total dos triângulos formados em cada iteração

Solução.

$$f_n = \left(\frac{L^2\sqrt{3}}{4}, \frac{3L^2\sqrt{3}}{16}, \frac{9L^2\sqrt{3}}{64}, \frac{27L^2\sqrt{3}}{256}, \frac{81L^2\sqrt{3}}{1024}, \ldots\right).$$

A sequência é uma P.G. com $a_0 = \frac{L^2\sqrt{3}}{4}$ e $q = \frac{3}{4}$, o n-ésimo termo é dado por

$$a_n = a_0 q^n = \frac{L^2\sqrt{3}}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{3^n L^2\sqrt{3}}{4^{n+1}}.$$

2)A partir de um triângulo equilátero foram feitas iterações relativas ao triângulo de Sierpinski. Determine

(a) a área total desse triângulo na sua sexta iteração se o lado do triângulo for de 50cm

Solução. Temos que $L = 50$ e $n = 6$ e pelo item f do problema anterior segue que

$$a_n = \frac{3^n L^2\sqrt{3}}{4^{n+1}},$$

assim

$$a_6 = \frac{3^6 50^2\sqrt{3}}{4^7} = \frac{1822500\sqrt{3}}{16384}.$$

(b) o perímetro total do triângulo na sua quinta iteração se o lado for de 20 cm

Solução. Temos que $L = 20$ e $n = 5$ e pelo item (d) do problema anterior segue que

$$a_n = \frac{3^{n+1}L}{2^n}$$

assim

$$a_5 = \frac{3^6 20}{2^5} = 455,625.$$

(c) o lado de um triângulo na décima terceira iteração se o lado do triângulo original for 17 cm

Solução. Temos que $L = 17$ e $n = 13$ e pelo item b do problema anterior segue que

$$a_n = \frac{L}{2^n}$$

assim

$$a_{13} = \frac{17}{2^{13}} = \frac{17}{8192}.$$

(d) o número de triângulos formados na oitava iteração de um triângulo equilátero de lado 30 cm

Solução. O número de triângulos formados em cada iteração não depende do comprimento do lado do triângulo original. Pelo item a do problema anterior segue que na oitava iteração o número de triângulos formados será dado por 3^8.

4.1.1 PROPOSTA DE ATIVIDADES PARA SALA DE AULA

Nessa subseção apresentamos uma proposta de atividades para a sala de aula envolvendo os conceitos das progressões geométricas. Nela apresentamos problemas desafiadores que vão ajudar os alunos a desenvolver suas habilidades algébricas e o raciocínio lógico. Tais problemas poderão verificar se os alunos conseguem articular os conceitos de P.G. na resolução de problemas.

1)O triângulo ABC da figura a seguir é equilátero de lado 40 cm. Unindo os pontos médios dos lados desse triângulo, obtemos o segundo triângulo PQR. Unindo os pontos médios dos lados do triângulo PQR, obtemos o terceiro triângulo STU, e assim sucessivamtente.

(a) Quanto mede o lado PQ do triângulo PQR? E os lados PR e RQ?
Solução. Ambos os lados do triângulo PQR tem comprimento igual a 20 cm.

(b) Qual o comprimento do lado ST do triângulo STU? E os lados SU e TU?
Solução. Ambos os lados do triângulo STU tem comprimento igual a 10 cm.

(c) Qual o perímetro dos triângulos ABC, PQR e STU?
Solução. Os perímetros dos triângulos é dado por 60 cm, 30 cm e 15 cm respectivamente.

(d) Escreva uma sequência numérica cujos termos são os perímetros dos triângulos ABC, PQR, STU e de mais três triângulos construídos seguindo o mesmo critério.
Solução.

$$(60,30,15,\frac{15}{2},\frac{15}{4},\frac{15}{8}).$$

(e) Como é classificada a sequência obtida no item acima?
Solução. A sequência representa uma progressão geométrica.

(f) Determine a soma dos perímetros dos infinitos triângulos construídos por esse processo.
Solução. O perímetro de todos esses triângulos formam a P.G. infinita

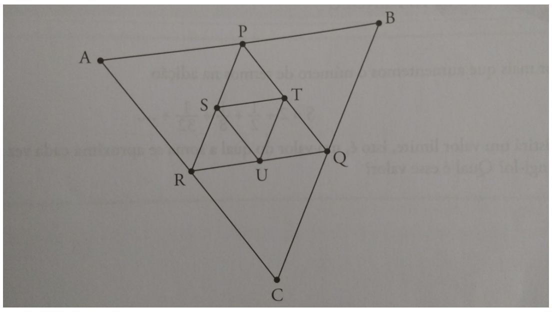
$$(60,30,15,\frac{15}{2},\frac{15}{4},\frac{15}{8},...)$$

na qual $a_1 = 60$ e $q = \frac{1}{2}$.

Temos pela soma dos infinitos termos de uma P.G. que

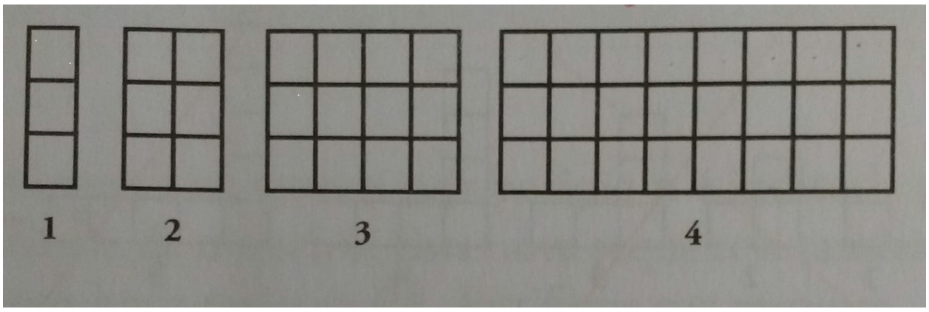
$$S_n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{60}{1-\frac{1}{2}} = 120cm.$$

Figura 12: Triângulos formados pelos pontos médios dos lados



2)Observe a sequência de figuras formada por quadrinhos e responda às questões propostas.

Figura 13: Sequência de quadradinhos



(a)Qual o número de quadradinhos da quinta figura dessa sequência? E da sexta figura?

Solução. O número de quadradinhos da quinta e sexta figura será de 24 e 48 quadradinhos respectivamente.

(b)Complete a tabela a seguir e encontre uma fórmula que possa ser utilizada para determinar um termo qualquer dessa sequência.

Solução.

Tabela 3: Relação da quantidade de quadradinhos pela posição da figura

Posição da figura	Cálculo	Quantidade de quadradinhos
1	3	3
2	$3.2 = 3.2^1$	6
3	$3.2.2 = 3.2^2$	12
4	$3.2.2.2 = 3.2^3$	24
...	...	...
n	3.2^{n-1}	3.2^{n-1}

(c) Qual a posição das figuras dessa sequência que são formadas por 384, 3072 e 12288 quadradinhos respectivamente?

Solução. Temos pela tabela que o termo geral dessa sequência é dado por 3.2^{n-1}.
Assim para 384 quadradinhos temos que

$$\begin{aligned} 3.2^{n-1} &= 384 \\ 2^{n-1} &= 128 \\ 2^{n-1} &= 2^7 \\ n &= 8. \end{aligned}$$

Para 3072 quadradinhos temos que

$$\begin{aligned} 3.2^{n-1} &= 3072 \\ 2^{n-1} &= 1024 \\ 2^{n-1} &= 2^{10} \\ n &= 11. \end{aligned}$$

E para 12288 quadradinhos temos que

$$\begin{aligned} 3.2^{n-1} &= 12288 \\ 2^{n-1} &= 4096 \\ 2^{n-1} &= 2^{12} \\ n &= 13. \end{aligned}$$

Portanto, as figuras dessa sequência formadas por 384, 3072 e 12288 quadradinhos ocupam as posições 8, 11 e 13 respectivamente.

3) Suponhamos que a população de uma cidade tenha uma taxa de crescimento constante e igual a 20 por cento ao ano. A população era de 40 mil habitantes no final de 2004.

(a) Calcule a população da cidade no fim de cada um dos cinco anos seguintes e escreva os resultados obtidos em forma de sequência.

Solução.

Tabela 4: Total da população em função do ano

Ano	Cálculo da população	Total da polulação
2004	$40000 = 40000.1,2^0$	40000
2005	$40000 + 0,2.40000 = 40000.1,2$	48000
2006	$40000.1,2 + 0,2.40000.1,2 = 40000.1,2^2$	57600
2007	$40000.1,2^2 + 0,2.40000.1,2^2 = 40000.1,2^3$	69120
2008	$40000.1,2^3 + 0,2.40000.1,2^3 = 40000.1,2^3$	82944
...	...	...
n	$40000.1,2^n$	$40000.1,2^n$

A população da cidade no fim dos anos seguintes formam a sequência $40000, 48000, 57600, 69120, 82944, ...$

(b) A sequência obtida é uma PG? Em caso afirmativo, qual é a razão?

Solução. Sim, a sequência é uma progressão geométrica de razão $q = 1,2$.

(c) Encontre uma fórmula que permita calcular a população dessa cidade daqui a n anos, contados a partir de 2007.

Solução. Pela tabela do item (a) temos que a fórmula que permite calcular a população dessa cidade daqui a n anos é dada por $40000.1,2^n$.

4) Suponha que o valor de um automóvel diminua a uma taxa constante de 10 por cento ao ano. Hoje, o valor desse automóvel é de R$ 30 mil.

(a) Calcule o valor desse automóvel daqui a quatro anos.

Solução.

Tabela 5: Valor do automóvel em função do tempo

Ano	Cálculo do valor do automóvel	Valor do automóvel
0	$30000 = 30000.0,9^0$	30000
1	$30000 - 0,1.30000 = 30000.0,9$	27000
2	$30000.0,9 - 0,1.30000.0,9 = 30000.0,9^2$	24300
3	$30000.0,9^2 - 0,1.30000.0,9^2 = 30000.0,9^3$	21870
4	$30000.0,9^3 - 0,1.30000.0,9^3 = 30000.0,9^4$	19683
...	...	...
n	$30000.0,9^n$	$30000.0,9^n$

Completando a tabela temos que o valor do automóvel daqui a quatro anos será de 19683 reais.

(b) Encontre uma fórmula que permita calcular o preço desse automóvel daqui a n anos.

Solução. Temos pela tabela do item (a) que a fórmula que permite calcular o valor desse automóvel daqui a n anos é dada por $30000.0,9^n$.

4.2 PROGRESSÃO HARMÔNICA

Nessa seção vamos abordar algumas propriedades das progressões harmônicas. Essas progressões não são trabalhadas no ensino médio, então não aplicamos nenhuma atividade sobre essas sequências em sala de aula. Mostraremos nesta seção a relação existente entre as progressões harmônicas e as progressões aritméticas; a interpolação de meios harmônicos e mostraremos alguns problemas e exemplos aplicáveis dessas sequências. Uma referência bastante utilizada nessa seção foi a dissertação de mestrado de (MARTINS, 2013).

Uma progressão harmônica (P.H.) é toda sequência finita ou infinita de termos não-nulos, tais que seus inversos formam uma progressão aritmética de primeira ordem. Eis alguns exemplos de progressões harmônicas:

$$\begin{aligned}
(a_n) &= \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \dots, \frac{1}{2n}, \dots\right) \\
(b_n) &= (3, 3, 3, 3, \dots) \\
(c_n) &= \left(\frac{-1}{18}, \frac{-1}{8}, \frac{1}{2}, \frac{1}{12}, \frac{1}{22}, \frac{1}{32}\right).
\end{aligned}$$

De fato as sequências acima são progressões harmônicas pois estão associadas as seguintes progressões aritméticas

$$\begin{aligned}(d_n) &= (2,4,6,...,2n,...)\\ (e_n) &= \left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},...\right)\\ (f_n) &= (-18,-8,2,12,22,32).\end{aligned}$$

Problema 4.1. *Determinar o décimo primeiro termo da progressão harmônica*

$$\left(\frac{1}{4},\frac{3}{11},\frac{3}{10},\frac{1}{3},...\right).$$

Solução. Se a sequência acima é uma progressão harmônica, então a sequência $(4,\frac{11}{3},\frac{10}{3},3,...)$ é uma P.A. pois seus termos são os inversos dos termos da P.H..
Cálculo da razão da PA

$$r=\frac{11}{3}-4=\frac{11-12}{3}=-\frac{1}{3}.$$

Cálculo do décimo primeiro termo da P.A.

$$a_{11}=a_1+10r=4+10\left(-\frac{1}{3}\right)=4-\frac{10}{3}=\frac{12-10}{3}=\frac{2}{3}.$$

Logo, o décimo primeiro termo da progressão harmônica é dado por $\frac{1}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{2}$.

4.2.1 INTERPOLAÇÃO DE MEIOS HARMÔNICOS

Interpolar, intercalar ou inserir k meios harmônicos entre dois números A e B significa obter uma progressão harmônica (a_n) de $k+2$ termos, cujo primeiro termo seja $a_1=A$ e o último termo seja $a_n=a_{k+2}=B$. Isso equivale a formar uma progressão aritmética b_n de $k+2$ termos onde o primeiro termo seja $b_1=\dfrac{1}{A}$ e o último termo seja $b_n=b_{k+2}=\dfrac{1}{B}$, que ja foi estudado na seção de P.A. Os k meios harmônicos procurados são os inversos dos k meios aritméticos obtidos.

Problema 4.2. *Insira quatro meios harmônicos entre* 7 *e* $\frac{14}{27}$.

Solução. Devemos formar uma progressão harmônica onde $a_1=7, a_n=a_6=\frac{14}{27}$ e $n=6$

Seja a_n uma PH com as características acima, então existe uma progressão aritmética b_n associada a essa PH. Logo, inserir quatro meios harmônicos entre 7 e $\dfrac{14}{27}$ é equivalente a interpolar quatro meios aritméticos entre $\frac{1}{7}$ e $\frac{27}{14}$

Logo, basta encontrar a P.A. associada e determinar o inverso de todos os seus termos e formar a PH pedida.

A PA associada tem $b_1 = \frac{1}{7}, b_6 = \frac{27}{14}$ e $n = 6$.

Temos pelo teorema 2.2 que

$$b_6 = b_1 + (6-1)r.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{27}{14} &= \frac{1}{7} + 5r \\ 5r &= \frac{25}{14} \\ r &= \frac{5}{14}. \end{aligned}$$

Logo, temos que os meios artiméticos são tais que:

$$\begin{aligned} b_2 &= b_1 + r = \frac{1}{7} + \frac{5}{14} = \frac{1}{2}, \\ b_3 &= b_2 + r = \frac{1}{2} + \frac{5}{14} = \frac{6}{7}, \\ b_4 &= b_3 + r = \frac{6}{7} + \frac{5}{14} = \frac{17}{14} \end{aligned}$$

e

$$b_5 = b_4 + r = \frac{17}{14} + \frac{5}{14} = \frac{11}{7}.$$

Portanto os meios harmônicos são $a_2 = 2, a_3 = \frac{7}{6}, a_4 = \frac{14}{17}$ e $a_5 = \frac{7}{11}$, de modo que a progressão harmônica procurada é $(7, 2, \frac{7}{6}, \frac{14}{17}, \frac{7}{11}, \frac{14}{27})$.

4.2.2 PROPRIEDADES DA PROGRESSÃO HARMÔNICA

Propriedade 4.3. *Em toda progressão harmônica, quaisquer três termos consecutivos são tais que o segundo é a média harmônica dos outros dois.*

Demonstração. Sejam a, h, b três termos de uma P.H.. Assim, pela definição de progressão harmônica, temos que $\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{h}, \frac{1}{b}\right)$ é uma P.A.. De acordo com as propriedades das progressões aritméticas, temos que vale a igualdade

$$\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2} = \frac{1}{h},$$

assim segue que

$$\frac{1}{h} = \frac{\frac{b+a}{ab}}{2}.$$

Logo

$$h = \frac{2ab}{a+b}.$$

Exemplo 4.4. *Determine o segundo termo de uma progressão harmônica sabendo que o primeiro termo é $\frac{1}{3}$ e que $a_3 = \frac{1}{4}$.*

Solução. Pela propriedade 4.3 temos que o segundo termo da progressão harmônica é dado por

$$a_2 = \frac{2\frac{1}{3}\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}} = \frac{2}{7}.$$

Propriedade 4.5. *Denominando por P o produto dos n primeiros termos de uma P.A. (b_n), temos que o produto dos n primeiros termos da progressão harmõnica associada a b_n é igual a $\frac{1}{P}$.*

Demonstração. Sendo $P = b_1 b_2 ... b_n$, onde $b_1, b_2, ..., b_n$ são os n termos da progressão aritmética b_n, temos que o produto dos n primeiros termos da P.H. (a_n) é tal que

$$a_1 a_2 ... a_n = \frac{1}{b_n}\frac{1}{b_2}...\frac{1}{b_n} = \frac{1}{b_1 b_2 ... b_n} = \frac{1}{P}.$$

5 TRIÂNGULOS E PROGRESSÕES

Neste capítulo abordaremos algumas relações existentes entre triângulos cujas construções estão baseadas em progressões aritméticas como, lados em PA ou ângulos em PA.

Trabalhar o tema de progressão aritmética juntamente com a geometria plana, especificamente com a geometria dos triângulos, pode ser uma abordagem que torna a aula mais produtiva, uma vez que por meio dessa união de conteúdos o professor poderá abordar diferentes assuntos, como por exemplo, calcular perímetro e área, explorar o conceito de triângulo escaleno e outros tipos de triângulos e explorar o cálculo de área de triângulos de outras maneiras, como por exemplo pela fórmula de Heron.

Para mais informações sobre os resultados encontrados nesta seção, indicamos as referências (BAILEY; GOSNELL, 2012; BEAUREGARD; SURYANARAYAN, 1998; ZELATOR, 2008) e referências nestes indicadas.

5.1 TRIÂNGULOS DE BRAHMAGUPTA

Nesta seção investigaremos uma classe de triângulos cujas medidas dos lados e ângulos estão relacionadas com progressões aritméticas.

Iniciaremos com um resultado que permite obter dados sobre a base e a altura de um triângulo sabendo-se que seus lados estão em P.A. e sua área é natural.

Teorema 5.1. *Se os comprimentos dos lados de um triângulo são inteiros e estão em P.A. de razão igual a 1 e a área é um número natural, então a base desse triângulo é um inteiro par e a altura, relativa a esta base, um inteiro múltiplo de 3.*

Demonstração. Sejam $t-1$, t e $t+1$ os comprimentos dos lados a, b e c do triângulo em P.A. de razão igual a 1. O semi perímetro desse triângulo é dado por $s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{t+(t+1)+(t-1)}{2} = \frac{3t}{2}$. Da geometria plana, temos pela fórmula de Heron que a área de um triângulo de lados a, b e c

e semi perimetro s é dada por

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Assim temos pela fórmula acima que

$$\begin{aligned}
A &= \sqrt{s(s-t)(s-(t+1))(s-(t-1))} \\
&= \sqrt{\frac{3t}{2}\left(\frac{3t}{2}-t\right)\left(\frac{3t}{2}-t-1\right)\left(\frac{3t}{2}-t+1\right)} \\
&= \sqrt{\frac{3t^2}{4}\frac{t^2-4}{4}}.
\end{aligned}$$

Logo, a área do triângulo é dada por

$$A = \frac{t}{2}\sqrt{3\left(\frac{t^2-4}{4}\right)}. \tag{5}$$

Elevando ambos membros da igualdade (5) ao quadrado segue que

$$\begin{aligned}
A^2 &= \frac{t^2}{4}.3\frac{(t^2-4)}{4} \\
&= \frac{3t^2(t^2-4)}{16},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$16A^2 = 3t^2(t^2-4). \tag{6}$$

Por outro lado sabemos que a área de um triângulo pode ser obtida pela fórmula $A = \frac{base.altura}{2} = \frac{th}{2}$. Logo, substituindo $A = \frac{t.h}{2}$ em (6), temos

$$\frac{16t^2h^2}{4} = 3t^2(t^2-4).$$

isto é,

$$4h^2 = 3(t^2-4). \tag{7}$$

Se ocorrese de t ser ímpar, então t^2-4 seria ímpar e (7) implicaria que $4h^2$ é ímpar (produto de ímpares é impar). Mas, isso é falso. Portanto t deve ser par $(t=2x)$.

Vamos agora justificar que h é natural. Como t deve ser par, segue que $t=2x$ para algum $x \in \mathbb{N}$. Substituindo em (7) obteremos

$$4h^2 = 3(4x^2-4)$$

se, e somente se

$$h^2 = 3(x^2-1). \tag{8}$$

Ainda como $A = \frac{t.h}{2} = \frac{2xh}{2} = xh$ concluímos que $h = \frac{A}{x} \in \mathbb{Q}$. Logo $h \in \mathbb{Q}$ e $h^2 \in \mathbb{N}$. Mais ainda, h é um múltiplo de 3 pois de (8) $3|h^2$, logo $3|hh$ e, por isto, $3|h$.
Agora, temos que a área do triângulo é $A = \frac{t.h}{2} = \frac{2xh}{2} = xh$, isto é $h = \frac{A}{x}$.
Voltando a equação (7), com $t = 2x$ temos que

$$\begin{aligned} 4h^2 &= 3(t^2-4) \\ &= 3.4(x^2-1). \end{aligned}$$

Assim,

$$h^2 = 3(x^2-1). \tag{9}$$

Temos que $h^2 = 3k$ (ver (9)).

De (9) temos que $3|h^2 = h.h$ e como 3 é primo segue que 3 divide h. Logo, h deve ser um inteiro múltiplo de 3. Assim, podemos escrever $h = 3y$.
Substituindo $h = 3y$ em (9) temos que

$$(3y)^2 = 3(x^2-1),$$

ou seja,

$$3y^2 = x^2-1,$$

Portanto, concluímos que $x^2 - 3y^2 = 1$.
Essa última é também conhecida de equação de Pell.

A seguir veremos que o resultado anterior pode ser generalizado.

Teorema 5.2. *Se os comprimentos dos lados de um triângulo são inteiros e estão em P.A. de razão igual a r inteiro e a área é um número natural, então a base desse triângulo é um inteiro par e a alutra um inteiro múltiplo de 3.*

Demonstração. Sejam $t-r$, t e $t+r$ os comprimentos dos lados do triângulo em P.A. de razão igual a 1. O semi perímetro do triângulo é dado por $s = \frac{t+(t+r)+(t-r)}{2} = \frac{3t}{2}$. Temos pela fórmula de Herón que a área do triângulo é dada por

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{s(s-r)(s-(t+r))(s-(t-r))} \\ &= \sqrt{\left(\frac{3t}{2}\right)\left(\frac{3t}{2}-t\right)\left(\frac{3t}{2}-t-r\right)\left(\frac{3t}{2}-t+r\right)} \\ &= \sqrt{\frac{3t^2(t+2r)(t-2r)}{16}}. \end{aligned}$$

Assim, temos que

$$A = \frac{t}{4}\sqrt{3(t+2r)(t-2r)}. \tag{10}$$

Elevando ambos os membros da igualdade acima ao quadrado temos

$$A^2 = \frac{3t^2(t+2r)(t-2r)}{16}.$$

Assim,

$$16A^2 = 3t^2(t^2-4r^2). \tag{11}$$

Sabendo que a área de um triângulo pode ser obtida pela fórmula $A = \frac{base.altura}{2}$ temos $A = \frac{t.h}{2}$ e substituindo essa última em (11), obtemos

$$16\left(\frac{t.h}{2}\right)^2 = 3t^2(t^2-4r^2),$$

ou seja,

$$4h^2 = 3(t^2-4r^2). \tag{12}$$

Sendo t e r inteiros se ocorresse de t ser ímpar, então t^2-4r^2 seria ímpar e (11) implicaria que $16A^2$ é ímpar (produto de ímpares é impar). Mas, isso é falso, pois se obtém $16A^2$ ímpar e A é inteiro. Portanto t deve ser par, ou seja, $(t = 2x)$.
Agora, temos que a área do triângulo é $A = \frac{t.h}{2} = \frac{2xh}{2} = xh$, isto é $h = \frac{A}{x}$.
Voltando a equação (12), com $t = 2x$ temos que

$$4h^2 = 3.4(x^2-r^2).$$

Assim,

$$h^2 = 3(x^2-r^2). \tag{13}$$

Temos que $h^2 = 3k$ (ver (13)). Mostraremos que h é inteiro. Como h é racional $(h = \frac{A}{x})$, temos que $h = \frac{p}{q}$, com $mdc(p,q) = 1$. Assim, $\sqrt{3}\sqrt{k} = h = \frac{p}{q}$.

Elevando ao quadrado $3kq^2 = p^2 \Rightarrow 3kqq = p^2$. Logo, q divide p^2, ou seja, $p^2 = qk_1$.

Por outro lado, pelo teorema de Bézout, existem inteiros r e s tais que $rp + sq = 1$. Multiplicando por p, temos $rp^2 + spq = p$. Como $p^2 = qk_1, rk_1q + spq = p$, ou seja, $(rk_1 + sp)q = p$. Portanto, q divide p. Sendo $mdc(p,q) = 1$, segue que $q = 1$. Finalmente, $h = p$ e assim h é inteiro.

Como 3 é primo e $3|h^2 = h.h$, então 3 divide h. Logo, h deve ser um inteiro múltiplo de 3. Assim, podemos escrever $h = 3y$

Substituindo $h = 3y$ em (13) obtemos:

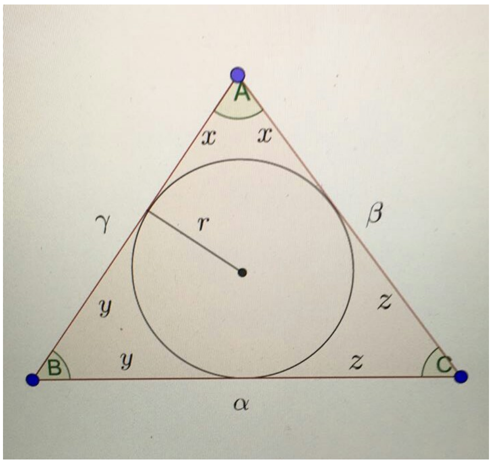
$$9y^2 \;=\; x^2 - 1,$$

e, portanto, $x^2 - 3y^2 = r^2$ que é a equação de Pell.

5.2 TRIÂNGULOS COM ÂNGULOS E LADOS EM PROGRESSÕES

Nesta seção são apresentadas algumas interessantes relações entre triângulos e progressões. Em particular, discutimos quando o lado e ângulo de um triângulo estão em progressão. Aqui investigaremos progressões aritméticas, geométricas e harmônicas. Iniciaremos a seção com um lema técnico o qual será de grande importância para os resultados a serem apresentados.

Figura 14: Triângulo ABC



Lema 5.3. *Em um triângulo cujos os lados possuem comprimento α, β e γ, com ângulos opostos A, B e C, respectivamente, e com perímetro 2τ, o raio do círculo inscrito é dado por*

$$r = \sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau}}.$$

Além disso, valem as relações:

$$\mathrm{tg}(A/2) = \frac{r}{\tau-\alpha},\ \mathrm{tg}(B/2) = \frac{r}{\tau-\beta},\ \mathrm{tg}(C/2) = \frac{r}{\tau-\gamma}.$$

Demonstração. Consideremos um triângulo cujos comprimentos dos lados são dados por α, β e γ opostos aos ângulos A, B e C, respectivamente, como indicado na figura abaixo. Consideremos ainda um círculo de raio r inscrito nesse triângulo. Denotaremos o perímetro desse triângulo por 2τ, ou seja $2\tau = \alpha + \beta + \gamma$. Sendo assim o semi-perímetro é dado por $\tau = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$.

Considere as seguintes relações

$$\begin{cases} x+y=\gamma \\ y+z=\alpha \\ x+z=\beta \end{cases}.$$

ou seja,

$$\begin{cases} x=\gamma-y \\ y=\alpha-z \\ z=\beta-x \end{cases}. \tag{14}$$

Por outro lado temos que $2\tau = 2x+2y+2z$, ou seja $\tau = x+y+z$. Deixando x, y e z em função de τ temos que

$$\begin{cases} x=\tau-y-z \\ y=\tau-x-z \\ z=\tau-x-y \end{cases}. \tag{15}$$

De (14) e (15) temos as seguintes relações $\gamma - y = \tau - y - z$, ou seja $z = \tau - \gamma$; $\alpha - z = \tau - x - z$, ou seja $x = \tau - \alpha$; $\beta - x = \tau - x - y$ ou seja $y = \tau - \beta$. Por outro lado

$$r = x\,\mathrm{tg}(A/2) = y\,\mathrm{tg}(B/2) = z\,\mathrm{tg}(C/2),$$

ou ainda

$$r = (\tau-\alpha)\,\mathrm{tg}(A/2) = (\tau-\beta)\mathrm{tg}(B/2) = (\tau-\gamma)\mathrm{tg}(C/2).$$

Logo temos que

$$\mathrm{tg}(A/2) = \frac{r}{\tau-\alpha},\ \mathrm{tg}(B/2) = \frac{r}{\tau-\beta},\ \mathrm{tg}(C/2) = \frac{r}{\tau-\gamma}. \tag{16}$$

Sabemos que a fórmula que determina a tangente da soma de dois ângulos a e b é dada por

$$tg(a+b) = \frac{tga+tgb}{1-tga.tgb},$$

onde a e b são tais que a, b, $a+b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, com k inteiro. Escolhendo $a = \frac{A}{2}$ e $b = \frac{B}{2}$, obtemos

$$\mathrm{tg}(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}) = \frac{\mathrm{tg}\frac{A}{2} + \mathrm{tg}\frac{B}{2}}{1-\mathrm{tg}\frac{A}{2}\mathrm{tg}(\frac{B}{2})}. \tag{17}$$

Por outro lado, como $A+B+C=180$, temos

$$A+B=90-\frac{C}{2}.$$

Logo,

$$\operatorname{tg}\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)=tg\left(90-\frac{C}{2}\right)=\operatorname{cotg}\left(\frac{C}{2}\right)=\frac{1}{\operatorname{tg}(\frac{C}{2})}. \tag{18}$$

Portanto

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}(\frac{B}{2})}=\frac{1}{\operatorname{tg}(\frac{C}{2})}.$$

Agrupando (16), (17) e (18) encontramos

$$\frac{\frac{r}{\tau-\alpha}+\frac{r}{\tau-\beta}}{1-\frac{r}{\tau-\alpha}\cdot\frac{r}{\tau-\beta}}=\frac{\tau-\gamma}{r},$$

ou seja,

$$\frac{(\tau-\alpha)r+(\tau-\beta)r}{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)-r^2}=\frac{\tau-\gamma}{r}.$$

Evidenciando r na última expressão, temos

$$r^2[3\tau-(\alpha+\beta+\gamma)] \quad = \quad (\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma).$$

Utilizando a relação para o semi-perímetro $\alpha+\beta+\gamma=2\tau$, podemos concluir que

$$r^2\tau=(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma).$$

Finalmente, encontramos r em função do semi-perímetro e dos lados do triângulo,

$$r=\sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau}}. \tag{19}$$

Portanto, temos provado o seguinte lema:

A seguir apresentamos outra relação envolvendo as progressões e a geometria de triângulos.

Teorema 5.4. *Em um triângulo a sequência* (α,β,γ) *dos comprimentos dos lados é uma progressão aritmética se, e somente se a sequência* $(cotg(\frac{A}{2}),cotg(\frac{B}{2}),cotg(\frac{C}{2}))$, *é também uma progressão aritmética.*

Demonstração. Numa P.A. finita com número ímpar de termos sabemos que o termo médio é

média aritmética dos extremos. Em particular, para a sequência de três termos (α,β,γ), temos que a sequência (α,β,γ) é uma P.A. se, e somente se, $2\beta=\alpha+\gamma$. De fato se $2\beta=\alpha+\gamma$, então $\beta+\beta=\alpha+\gamma$ e assim $\gamma-\beta=\beta-\alpha$, o que mostra que (α,β,γ) é uma P.A.. Do mesmo modo a sequência $(cotg(\frac{A}{2}),cotg(\frac{B}{2}),cotg(\frac{C}{2}))$ também é uma P.A. se, e somente se, $2cotg(\frac{B}{2})=cotg(\frac{A}{2})+cotg(\frac{C}{2})$.
Logo basta provarmos que $2\beta=\alpha+\gamma$ se, e somente se, $2cotg(\frac{B}{2})=cotg(\frac{A}{2})+cotg(\frac{C}{2})$.
Usando os resultados encontrados em (16) temos

$$\begin{aligned}
2cotg(\frac{B}{2}) &= cotg(\frac{A}{2})+cotg(\frac{C}{2})\\
2.\frac{1}{tg(\frac{B}{2})} &= \frac{1}{tg\frac{A}{2}}+\frac{1}{tg\frac{C}{2}}\\
2\frac{(\tau-\beta)}{r} &= \frac{(\tau-\alpha)}{r}+\frac{(\tau-\gamma)}{r}\\
2\tau-2\beta &= 2\tau-\alpha-\gamma\\
2\beta &= \alpha+\gamma.
\end{aligned}$$

Teorema 5.5. *A sequência (α,β,γ) do comprimento dos lados de um triângulo é uma P.A. se, e somente se,*

$$tg\frac{A}{2}tg\frac{C}{2}=\frac{1}{3}.$$

Demonstração. Basta provarmos que $2\beta=\alpha+\gamma$ se, e somente se, $tg\frac{A}{2}tg\frac{C}{2}=\frac{1}{3}$. Do Lema 5.3 temos que

$$tg\frac{A}{2}tg\frac{C}{2}=\frac{1}{3}$$

se, e somente se,

$$\left(\frac{r}{\tau-\alpha}\right)\left(\frac{r}{\tau-\gamma}\right)=\frac{1}{3},$$

isto é,

$$3r^2=(\tau-\alpha)(\tau-\gamma).$$

Ainda do lema 5.3 temos que $r^2=\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau}$. Assim,

$$3\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau}=(\tau-\alpha)(\tau-\gamma),$$

ou seja,

$$3\tau-3\beta=\tau.$$

Logo,

$$2\tau=3\beta.$$

Como 2τ representa o perímetro, isto é, $2\tau = \alpha+\beta+\gamma$, temos da equação anterior que

$$\alpha+\beta+\gamma = 3\beta.$$

Finalmente, podemos concluir que $tg\frac{A}{2}tg\frac{C}{2} = \frac{1}{3}$, se, e somente se, $\alpha+\gamma = 2\beta$.

A seguir, vamos mostrar algumas aplicações dos resultados vistos.

Teorema 5.6. *A sequência $(\alpha^2,\beta^2,\gamma^2)$, onde (α,β,γ) representa os lados de um triângulo é uma progressão aritmética se, e somente se, a sequência $(cotgA, cotgB, cotgC)$ também é uma P.A.*

Demonstração. Basta mostrar que

$$2cotgB = cotgA + cotgC$$

se, e somente se,

$$2\beta^2 = \alpha^2+\gamma^2.$$

Para isso, utilizaremos a identidade do meio-ângulo, que diz que

$$cotg\theta = \frac{cotg^2(\frac{\theta}{2})-1}{2cotg(\frac{\theta}{2})},$$

para todo ângulo θ que não seja da forma πk, onde k pertence aos inteiros. Assim, temos que $2cotgB = cotgA + cotgC$ é equivalente à

$$2\frac{cotg^2(\frac{B}{2})-1}{2cotg(\frac{B}{2})} = \frac{cotg^2(\frac{A}{2})-1}{2cotg(\frac{A}{2})} + \frac{cotg^2(\frac{C}{2})-1}{2cotg(\frac{C}{2})}.$$

Utilizando do Lema 5.3 temos que esta igualdade se torna

$$\frac{(\frac{\tau-\beta}{r})^2-1}{\frac{(\tau-\beta)}{r}} = \frac{(\frac{\tau-\alpha}{r})^2-1}{2\frac{(\tau-\alpha)}{r}} + \frac{(\frac{\tau-\gamma}{r})^2-1}{2\frac{(\tau-\gamma)}{r}}.$$

Agora, usando $\beta = 2\tau-(\alpha+\gamma)$ temos

$$\frac{\frac{(\tau-\beta)^2-r^2}{r^2}}{\frac{\tau-\beta}{r}} = \frac{\frac{(\tau-\alpha)^2-r^2}{r^2}}{2\frac{(\tau-\alpha)}{r}} + \frac{\frac{(\tau-\gamma)^2-r^2}{r^2}}{2\frac{(\tau-\gamma)}{r}}$$

$$\frac{(\tau-\beta)^2-r^2}{r(\tau-\beta)} = \frac{(\tau-\alpha)^2-r^2}{2r(\tau-\alpha)} + \frac{(\tau-\gamma)^2-r^2}{2r(\tau-\gamma)}$$

$$\frac{(\tau-\beta)^2-r^2}{(\tau-\beta)} = \frac{(\tau-\alpha)^2-r^2}{r(\tau-\alpha)} + \frac{(\tau-\gamma)^2-r^2}{r(\tau-\gamma)}.$$

De (19) temos que $r^2 = \frac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau}$.
Logo,

$$4(\tau-\beta) - \frac{(\tau-\alpha)(\tau-\gamma)}{\tau} = \frac{(\tau-\alpha)}{2} - \frac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{2\tau} + \frac{(\tau-\gamma)}{2} - \frac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)}{2\tau}.$$

Multiplicando por 2τ temos

$$2\tau(\tau-\beta) - 2(\tau-\alpha)(\tau-\gamma) = \tau(\tau-\alpha) - (\tau-\beta)(\tau-\gamma) + \tau(\tau-\gamma) - (\tau-\alpha)(\tau-\beta)$$

Ou seja,

$$2\tau(\tau-\beta) - 2(\tau-\alpha)(\tau-\gamma) = (\tau-\alpha)(\tau-(\tau-\beta)) + (\tau-\gamma)(\tau-(\tau-\beta))$$

$$2\tau(\tau-\beta) - 2(\tau-\alpha)(\tau-\gamma) = (\tau-\alpha)\beta + (\tau-\gamma)\beta) = \beta(2\tau-(\alpha+\gamma)) = \beta\beta = \beta^2.$$

Assim

$$-2\tau\beta + 2(\alpha+\gamma)\tau - 2\alpha\gamma - \beta^2 \quad = \quad 0.$$

Contudo, como $\alpha+\gamma = 2\tau-\beta$, segue que

$$-2\beta(2\tau) + (2\tau)^2 - 2\alpha\gamma - \beta^2 \quad = \quad 0.$$

Substituindo 2τ por $\alpha+\beta+\gamma$, temos

$$-2\beta(\alpha+\beta+\gamma) + (\alpha+\beta+\gamma)^2 - 2\alpha\gamma - \beta^2 = 0.$$

Aplicando a propriedade distributiva da multiplicação e desenvolvendo o termo ao quadrado temos

$$-2\beta\alpha - 2\beta^2 - 2\beta\gamma + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma - 2\alpha\gamma - \beta^2 = 0.$$

Logo, concluímos que $2cotgB = cotgA + cotgC$ se, e somente se,

$$2\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2.$$

Teorema 5.7. *Os únicos triângulos para os quais as sequências $(a_n) = (A,B,C)$ dos ângulos e $(b_n) = (\alpha,\beta,\gamma)$ dos comprimentos dos lados são progressões aritméticas são os triângulos equiláteros.*

Demonstração. Uma implicação da prova é trivial, se um triângulo é equilátero então temos que $A = B = C = \frac{\pi}{3}$ e $\alpha = \beta = \gamma$. Assim trivialmente ambas sequências (a_n) e (b_n) são progressoes aritméticas com razão igual a zero. Reciprocamente basta mostrarmos que se as sequências (a_n) e (b_n) são ambas P.A., então o triângulo deve ser equilátero.

De fato, pelo teorema 5.5 temos que se (b_n) é uma P.A. então

$$tg\frac{A}{2}tg\frac{C}{2} = \frac{1}{3}. \tag{20}$$

Por outro lado, sendo (a_n) P.A., temos que o termo médio B é a média entre A e C, isto é,

$$B = \frac{A+C}{2}. \tag{21}$$

Além disso, sendo a soma dos ângulos internos do triângulo igual a π, temos

$$A+B+C = \pi. \tag{22}$$

Isolando $A+C$ em (21) e (22), e comparando os termos, obtemos $\pi - B = 2B$, ou seja, $B = \frac{\pi}{3}$. Daí, concluímos de (21) que $A+C = \frac{2\pi}{3}$, e assim $C = \frac{2\pi}{3} - A$. Em seguida, substituindo este valor de C em (20), encontramos

$$tg\left(\frac{A}{2}\right)tg\left(\frac{\pi}{3} - \frac{A}{2}\right) = \frac{1}{3}.$$

Utilizando a fórmula que determina a tangente da diferença de dois ângulos a e b

$$tg(a-b) = \frac{tga - tgb}{1 + tga.tgb},$$

onde a e b são tais que a, b, $a+b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, obtemos

$$tg\left(\frac{A}{2}\right)\left[\frac{tg\frac{\pi}{3} - tg(\frac{A}{2})}{1 + tg\frac{\pi}{3}.tg(\frac{A}{2})}\right] = \frac{1}{3}.$$

Como $tg\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$, esta igualdade se torna

$$tg\left(\frac{A}{2}\right)\left[\frac{\sqrt{3} - tg\left(\frac{A}{2}\right)}{1 + \sqrt{3}.tg(\frac{A}{2})}\right] = \frac{1}{3},$$

ou seja,

$$3\sqrt{3}tg\left(\frac{A}{2}\right) - 3tg^2\left(\frac{A}{2}\right) = 1 + \sqrt{3}tg\left(\frac{A}{2}\right).$$

Reduzindo os termos semelhantes e igualando a zero, obtemos

$$3tg^2\left(\frac{A}{2}\right)-2\sqrt{3}tg\left(\frac{A}{2}\right)+1=0$$

isto é,

$$\left(\sqrt{3}tg\left(\frac{A}{2}\right)-1\right)^2=0.$$

Assim $tg(\frac{A}{2})=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Como $tg\frac{\pi}{3}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ e $\tan(x)$ é uma função periódica de período π, temos que $\frac{A}{2}=\frac{\pi}{6}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$. Multiplicando essa igualdade por 2, encontramos

$$\frac{A}{2}=\frac{\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}. \tag{23}$$

Como A é um ângulo interno de um triângulo, temos que $A>0$ e $A<\pi$. Logo, de (23), obtemos que $A=\frac{\pi}{3}$. Substituindo $A=\frac{\pi}{3}$ e $B=\frac{\pi}{3}$ em (22), temos que $C=\frac{\pi}{3}$. Portanto, o triângulo é equilátero.

Teorema 5.8. *Os únicos triângulos com as sequências (a_n) dos ângulos sendo P.A. e as sequências (b_n) dos comprimentos dos lados sendo P.G. são os equiláteros, i.e., P.A. com razão igual a zero e P.G. com razão igual a 1.*

Demonstração. Se um triângulo é equilátero é imediato que seus ângulos estão em P.A. com razão zero e seus lados em P.G. com razão 1. Logo, basta mostrarmos que se a sequência (a_n) é uma P.A. e a sequência (b_n) é uma P.G., então o triângulo é equilátero. Vimos na demostração do teorema 5.6 que se a_n é uma P.A., então o ângulo B é dado por $B=\frac{\pi}{3}$. Além disso, assumindo que b_n seja uma P.G., temos que $\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\gamma}{\beta}$, ou seja, $\beta^2=\alpha\gamma$. Agora pela lei dos senos, temos que

$$\frac{\alpha}{senA}=\frac{\beta}{senB}=\frac{\gamma}{senC}.$$

Substituindo $\beta=\frac{\pi}{3}$ nesta expressão, encontramos

$$\frac{\alpha}{senA}=\frac{2\beta}{\sqrt{3}}=\frac{\gamma}{senC},$$

ou seja, $\alpha=\frac{2\beta senA}{\sqrt{3}}$ e $\gamma=\frac{2\beta senC}{\sqrt{3}}$. Substituindo estes valores de α e β na equação $\beta^2=\alpha\gamma$, obtemos

$$\beta^2=\left(\frac{2\beta senA}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{2\beta senC}{\sqrt{3}}\right)=\frac{4}{3}\beta^2 senAsenC.$$

Dividindo ambos os lados desta equação por β^2, chegamos em

$$senAsenC = \frac{3}{4}. \tag{24}$$

Por outro lado, como $B = \frac{\pi}{3}$ e $A+B+C=\pi$, podemos concluir que

$$cos(A+C) = cos(\pi - B) = cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}.$$

Assim, usando o fato de que o cosseno da soma de dois arcos quaisquer a e b é determinado por $cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \mathrm{sen}(a)\mathrm{sen}(b)$, encontramos

$$cosAcosC - senAsenC = -\frac{1}{2}.$$

Como $senAsenC = \frac{3}{4}$, obtemos

$$cosAcosC - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2},$$

isto é,

$$cosAcosC = \frac{1}{4}. \tag{25}$$

Juntando (24) e (25), encontramos o sistema de equações

$$\begin{cases} senAsenC = \frac{3}{4} \\ cosAcosC = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Elevando ao quadrado cada equação deste sistema, ele se torna

$$\begin{cases} sen^2Asen^2C = \frac{9}{16} \\ cos^2Acos^2C = \frac{1}{16}. \end{cases}$$

Pela relação fundamental da trigonometria temos que $sen^2x + cos^2x = 1$, ou seja, $sen^2x = 1 - cos^2x$. Logo

$$\begin{cases} (1-cos^2A)(1-cos^2C) = \frac{9}{16} \\ cos^2Acos^2C = \frac{1}{16}. \end{cases}$$

Da primeira equação, temos que

$$1 - cos^2C - cos^2A + cos^2Acos^2C = \frac{9}{16}.$$

Substituindo a segunda equação na primeira, obtemos

$$1 - cos^2C - cos^2A + \frac{1}{16} = \frac{9}{16},$$

ou seja,

$$cos^2C + cos^2A = \frac{1}{2}.$$

Logo, obtemos o sistema

$$\begin{cases} cos^2C + cos^2A = \frac{1}{2} \\ cos^2Acos^2C = \frac{1}{16} \end{cases}. \tag{26}$$

Sendo S a soma de dois números reais e P o produto desses dois números, temos que os mesmos devem ser as duas raízes da equação quadrática $x^2 - Sx + P = 0$. Assim de acordo com o sistema (26), os números reais cos^2A e cos^2C devem ser as raízes da equação quadrática

$$\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 = x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} = 0.$$

Essa equação quadrática tem uma raíz dupla igual a $\frac{1}{4}$. Consequentemente, $cos^2A = cos^2C = \frac{1}{4}$, ou seja $cosA = \pm\frac{1}{2}$ e $cosC = \pm\frac{1}{2}$.

Olhando para a equação (25), concluímos que $cos(A)$ e $cos(B)$ possuem o mesmo sinal, isto é, $cosA = -\frac{1}{2}$ e $cosC = -\frac{1}{2}$ ou $cosA = \frac{1}{2}$ e $cosC = \frac{1}{2}$. O primeiro caso não pode ocorrer, pois sendo A e C ângulos internos de um triângulo e assumindo $cosA$ e $cosC$ valores negativos, devemos ter $\frac{\pi}{2} < A < \pi$ e $\frac{\pi}{2} < C < \pi$. Assim, teríamos $A+B+C = A+B+\frac{\pi}{3} > \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3} > \pi + \frac{\pi}{3}$, o que é uma contradição. Portanto, $cosA\frac{1}{2} = cosC$. Logo, o fato de $0 < A, C < \pi$ implica que $A = C = \frac{\pi}{3}$, ou seja, o triângulo é equilátero.

Teorema 5.9. *Os únicos triângulos retângulos que tem a sequência (b_n) dos comprimentos dos lados em P.A., são aqueles cujos comprimentos laterais são dados por $\alpha = 3\delta, \beta = 4\delta$ e $\gamma = 5\delta$, onde δ é um número real positivo.*

Demonstração. Se um triângulo é tal que seus lados medem $\alpha = 3\delta, \beta = 4\delta$ e $\gamma = 5\delta$, respectivamente, então é evidente que seus lados estão em P.A. de razão $r = \delta$. Além disso,

$$\alpha^2 + \beta^2 = (3\delta)^2 + (4\delta)^2 = 9\delta^2 + 16\delta^2 = 25\delta^2 = (5\delta)^2 = (\gamma)^2,$$

isto é, tal triângulo é retângulo. Reciprocamente, se um triângulo é retângulo e seus lados estão em P.A., então devemos ter

$$\begin{cases} \gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 \\ \beta = \frac{\alpha+\gamma}{2}. \end{cases} \tag{27}$$

Substituindo a segunda equação na primeira, obtemos

$$\gamma^2 = \alpha^2 + \left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)^2,$$

isto é,

$$4\gamma^2 = 4\alpha^2 + (\alpha+\gamma)^2.$$

Desenvolvendo o trinômio quadrado perfeito do segundo membro da iguladade e unindo os termos semelhantes obtemos

$$3\gamma^2 - 2\alpha\gamma - 5\alpha^2 = 0$$

e consequentemente,

$$(3\gamma - 5\alpha)(\gamma + \alpha) = 0.$$

Como $\alpha + \gamma > 0$, pois correspondem a soma de dois lados de um triângulo, devemos ter

$$3\gamma - 5\alpha = 0,$$

isto é,

$$\gamma = \frac{5\alpha}{3}.$$

Finalmente, considerando $\delta = \frac{\alpha}{3}$, temos que δ é um número real positivo, $\alpha = 3\delta$ e $\gamma = 5\delta$. Além disso, substituindo $\gamma = \frac{5\alpha}{3}$ na segunda equação de (27), encontramos

$$\beta = \frac{\alpha + \frac{5\alpha}{3}}{2} = \frac{\alpha}{2} + \frac{5\alpha}{6} = \frac{8\alpha}{6} = \frac{4\alpha}{3} = 4\delta.$$

Teorema 5.10. *A sequência dos comprimentos dos lados (α, β, γ) é uma progressão harmônica se, e somente se, a sequência $(sen^2(\frac{A}{2}), sen^2(\frac{B}{2}), sen^2(\frac{C}{2}))$, é também uma progressão harmônica.*

Demonstração. É suficiente provarmos que

$$\frac{2}{\beta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma} \tag{28}$$

se, e somente se,

$$\frac{2}{sen^2(\frac{B}{2})} = \frac{1}{sen^2(\frac{A}{2})} + \frac{1}{sen^2(\frac{C}{2})}. \tag{29}$$

Como $csc^2(x) = \frac{1}{sen^2(x)}$, temos que a equação (29) é equivalente a

$$2csc^2(\frac{B}{2}) = csc^2(\frac{A}{2}) + csc^2(\frac{C}{2}). \quad (30)$$

Por outro lado, dividindo a equação $sen^2x + cos^2x = 1$ por sen^2x, temos

$$\frac{sen^2x}{sen^2x} + \frac{cos^2x}{sen^2x} = \frac{1}{sen^2x},$$

isto é,

$$1 + cotg^2x = csc^2x. \quad (31)$$

Logo, agrupando (30) e (31), obtemos

$$2[1 + cotg^2\left(\frac{B}{2}\right)] = 1 + cotg^2\left(\frac{A}{2}\right) + 1 + cotg^2\left(\frac{C}{2}\right),$$

ou seja,

$$2 + 2cotg^2\left(\frac{B}{2}\right) = 2 + cotg^2\left(\frac{A}{2}\right) + cotg^2\left(\frac{C}{2}\right). \quad (32)$$

Utilizando o Lema 5.3, temos que a equação (32) se torna

$$\frac{2(\tau-\beta)^2}{r^2} = \frac{(\tau-\alpha)^2}{r^2} + \frac{(\tau-\gamma)^2}{r^2},$$

onde r é o raio do círculo inscrito no triângulo e 2τ o seu perímetro. Desenvolvendo os quadrados e multiplicando ambos membros da igualdade por r^2, temos

$$2\tau^2 - 4\tau\beta + 2\beta^2 = \tau^2 - 2\tau\alpha + \alpha^2 + \tau^2 - 2\tau\gamma + \gamma^2$$

isto é,

$$2\tau(\alpha + \gamma - 2\beta) = \alpha 2 + \gamma^2 - 2\beta^2.$$

Por outro lado, como $2\tau = \alpha + \beta + \gamma$, podemos reescrever a última equação na forma

$$(\alpha + \beta + \gamma)(\alpha + \gamma - 2\beta) = \alpha^2 + \gamma^2 + 2\beta^2.$$

Fazendo a distributiva, otemos que

$$\alpha^2 + \alpha\gamma - 2\alpha\beta + \alpha\gamma + \gamma^2 - 2\beta\gamma + \alpha\beta + \beta\gamma - 2\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\beta^2$$

e após simplificações chegamos em

$$2\alpha\gamma = \beta\gamma + \alpha\beta.$$

Finalmente, dividindo ambos membros desta igualdade por $\alpha\beta\gamma$ obtemos (28), ou seja,

$$\frac{2}{\beta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma}.$$

Utilizando os mesmos argumentos provamos que (29) implica em (28) e obtemos o resultado.

Teorema 5.11. *Em um triângulo cujo comprimentos dos lados são α, β e γ com ângulos opostos A, B e C, respectivamente, a sequência (a_n) dos ângulos desse triângulo é uma progressão aritmética se, e somente se, $B = \frac{\pi}{3}$. Além disso, se $\rho = \frac{2\tau}{\beta}$, com 2τ sendo o perímetro desse triângulo, então $2 < \rho \leq 3$.*

Demonstração. De fato, seja a P.A. $(a_n) = (A, B, C)$, onde A, B e C são os ângulos internos do triângulo. Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre π, temos

$$A + B + C = \pi. \tag{33}$$

Por outro lado, sendo a sequência (a_n) uma P.A. finita com número ímpar de termos, sabemos que o termo médio é média aritmética dos extremos, ou seja, $B = \frac{A+C}{2}$. Assim,

$$2B = A + C. \tag{34}$$

Substituindo (34) em (33), obtemos

$$B = \frac{\pi}{3}.$$

Reciprocamente, se $B = \frac{\pi}{3}$, então a igualdade $A + B + C = \pi$ implica que

$$A + C = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3},$$

isto é,

$$A + C = 2B = B + B.$$

Assim, $C - B = B - A$, ou seja, (A, B, C) é uma P.A.

Mostremos agora que se $\rho = \frac{2\tau}{\beta}$, então $2 < \rho \leq 3$. Como α, β, γ são lados de um triângulo, temos da desigualdade triangular que $\beta < \alpha + \gamma$. Logo,

$$2 = \frac{2\beta}{\beta} = \frac{\beta + \beta}{\beta} < \frac{\alpha + \beta + \gamma}{\beta} = \frac{2\tau}{\beta} = \rho,$$

ou seja, $\rho > 2$. Agora utilizando a lei dos cossenos com $B = \frac{\pi}{3}$, temos

$$\beta^2 = \alpha^2+\gamma^2-2\alpha\gamma\cos\frac{\pi}{3}=\alpha^2+\gamma^2-\alpha\gamma,$$

ou seja,

$$\beta^2+\alpha\gamma = \alpha^2+\gamma^2.$$

Adicionando $2\alpha\gamma$ em ambos membros desta igualdade, temos

$$\beta^2+3\alpha\gamma = (\alpha+\gamma)^2.$$

Denotando por S a soma de α e γ e por P o produto entre α e γ, a relação

$$\beta^2+3\alpha\gamma=(\alpha+\gamma)^2$$

se torna

$$P=\frac{S^2-\beta^2}{3}.$$

Além disso os números reais α e γ são as duas raízes da equação quadrática

$$x^2-Sx+P=0.$$

Uma vez que α e γ são raízes reais, o discriminante dessa equação deve ser não-nulo. Assim

$$(-S)^2-4.1.P\geq 0,$$

ou seja, $4\beta^2\geq S^2$. Como os dois membros da igualdade são números reais positivos podemos extrair a raíz quadrada de ambos e assim obtermos

$$2\beta\geq S. \tag{35}$$

Por outro lado, como 2τ é o perímetro do triângulo e $S=\alpha+\gamma$, temos

$$S=2\tau-\beta. \tag{36}$$

Agrupando (35) e (36), vemos que

$$3\beta \geq 2\tau.$$

Como $\beta>0$ podemos dividir ambos membros da desigualdade por β e obtermos

$$3\geq\frac{2\tau}{\beta}=\rho.$$

Teorema 5.12. *Sejam β e τ números reais positivos tais que $\rho = \frac{2\tau}{\beta} \in (2,3]$. Então existe um único triângulo cujos lados medem α, β, γ com $0 < \alpha \leq \beta \leq \gamma$, cujo perímetro é dado por 2τ e cujo ângulo oposto ao lado de comprimento β é dado por $B = \frac{\pi}{3}$. Além disso, os comprimentos dos outros lados são dados por $\alpha = \frac{\beta}{2}\left((\rho-1) - \sqrt{\frac{(3-\rho)(\rho+1)}{3}}\right)$ e $\gamma = \frac{\beta}{2}\left((\rho-1) + \sqrt{\frac{(3-\rho)(\rho+1)}{3}}\right)$ e os ângulos A e C satisfazem $senA = \frac{\sqrt{3}}{4}\left((\rho-1) - \sqrt{\frac{(3-\rho)(\rho+1)}{3}}\right)$ e $senC = \frac{\sqrt{3}}{4}\left((\rho-1) + \sqrt{\frac{(3-\rho)(\rho+1)}{3}}\right)$*

Demonstração. Para a existência de tal triângulo basta que seu perímetro 2τ seja maior que 2β. Em outras palavras, τ e β devem satisfazer $\beta + \beta < 2\tau = \alpha + \beta + \gamma$, isto é, deve valer a desigualdade triangular $\beta < \alpha + \gamma$. De fato isso ocorre, pois $\tau > 2$, implica que $\frac{2\tau}{\beta} > 2$, ou seja, $2\beta < 2\tau$.

Para demonstrarmos a unicidade de tal triângulo, mostraremos que os lados α e γ são unicamente determinados como funções dos valores β e ρ. Suponhamos então, sem perca de generalidade, que $0 < \alpha \leq \beta \leq \gamma$. Utlizando a Lei dos cossenos com $B = \frac{\pi}{3}$ como na demonstração do Teorema temos que α e γ são as duas raízes reais da equação quadrática

$$x^2 - Sx + P = 0,$$

onde $S = \alpha + \gamma$, $P = \alpha\gamma$ e

$$P = \frac{S^2 - \beta^2}{3}.$$

Logo, aplicando a fórmula de Bhaskara, encontramos

$$\alpha = \frac{S - \sqrt{S^2 - 4P}}{2}$$

e

$$\gamma = \frac{S + \sqrt{S^2 - 4P}}{2}.$$

Usando as relações $P = \frac{S^2 - \beta^2}{3}$ e $S = 2\tau - \beta$, temos que

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{2\tau - \beta - \sqrt{(2\tau - \beta)^2 - 4(\frac{S^2 - \beta^2}{3})}}{2} \\
&= \frac{2\tau - \beta - \sqrt{\frac{-(2\tau - \beta)^2 + 4\beta^2}{3}}}{2}.
\end{aligned}$$

Desenvolvendo o trinômio e juntando os termos semelhantes, encontramos

$$\alpha = \frac{2\tau - \beta - \sqrt{\frac{-4\tau^2+4\tau\beta+3\beta^2}{3}}}{2} = \frac{2\tau - \beta - \sqrt{\frac{(3\beta-2\tau)(\beta+2\tau)}{3}}}{2}.$$

Pondo β em evidência, obtemos

$$\alpha = \frac{\beta(\frac{2\tau}{\beta} - 1) - \sqrt{\frac{\beta^2(3-\frac{2\tau}{\beta})(1+\frac{2\tau}{\beta})}{3}}}{2}.$$

Utilizando a definição de ρ, temos

$$\alpha = \frac{\beta(\rho - 1) - \sqrt{\frac{\beta^2(3-\rho)(1+\rho)}{3}}}{2}.$$

Portanto,

$$\alpha = \frac{\beta}{2}\left((\rho-1) - \sqrt{\frac{(3-\rho)(1+\rho)}{3}}\right). \tag{37}$$

De modo análogo, obtemos

$$\gamma = \frac{\beta}{2}\left((\rho-1) + \sqrt{\frac{(3-\rho)(1+\rho)}{3}}\right). \tag{38}$$

As expressões para α e γ em (37) e (38), respectivamente, mostram que α e γ são unicamente determinados por β e ρ. Mostraremos agora as relações envolvendo os ângulos A e C. Pela lei dos senos, temos que

$$\frac{\alpha}{senA} = \frac{\beta}{senB} = \frac{\gamma}{senC} = 2R,$$

onde R é o raio da circunferência circunscrita ao triângulo. Tendo em vista que $B = \frac{\pi}{3}$ e sabendo que $sen\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, temos

$$\frac{\alpha}{senA} = \frac{\beta}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\gamma}{senC} = 2R.$$

Logo, obtemos

$$\frac{\alpha}{senA} = \frac{2\beta}{\sqrt{3}},$$

ou seja, $senA = \frac{\sqrt{3}\alpha}{2\beta}$. De modo análogo, temos que

$$senC = \frac{\sqrt{3}\gamma}{2\beta}.$$

Finalmente, usando as relações para α e γ em (37) e (38), respectivamente, temos que

$$senA = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\rho - 1) - \sqrt{\frac{(3-\rho)(1+\rho)}{3}}\right)$$

e

$$senC = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\rho - 1) + \sqrt{\frac{(3-\rho)(1+\rho)}{3}}\right).$$

Finalmente, mostraremos que os valores α e γ encontrados em (37) e (38) define de fato um triângulo com ângulo $B = \frac{\pi}{3}$. Para isso, devemos mostrar as desigualdades triângulares $\alpha + \beta > \gamma$, $\alpha + \gamma > \beta$, $\beta + \gamma > \alpha$. Utilizando as expressões para α e γ em (37) e (38) juntamente com juntamente com $2 < \rho \leq 3$ e a lei dos senos, podemos estabelecer que $B = \frac{\pi}{3}$. A terceira desigualdade é vista por inspeção tendo em vista que $\gamma \geq \beta \geq \alpha > 0$. Para a segunda desigualdade note que (37) e (38) implica que

$$\alpha + \gamma = \beta(\rho - 1) = \beta\left(\frac{2\tau}{\beta} - 1\right) = 2\tau - \beta.$$

Assim, $\alpha + \gamma > \beta$ se, e somente se $2\tau - \beta > \beta$, isto é, $2\tau > 2\beta$. Como $\beta > 0$ podemos dividir ambos membros desta desigualdade por β e assim obtermos $\frac{2\tau}{\beta} > 2$, ou seja, $\rho > 2$, o que é válido pois assumimos que ρ satisfaz a condição $2 < \rho \leq 3$. Vamos provar a desigualdade $\alpha + \beta > \gamma$. De (37) e (38) e do fato de β ser positivo temos que $\alpha + \beta > \gamma$ se, e somente se

Multiplicando ambos membros da desigualdade acima por 4 temos que ela é equivalente a

$$-\sqrt{(3-\rho)(1+\rho)} + 2\sqrt{3} > \sqrt{(3-\rho)(1+\rho)},$$

ou seja,

$$\sqrt{3} > \sqrt{(3-\rho)(1+\rho)}.$$

Elevando ambos membros da desigualdade ao quadrado obtemos então que $\alpha + \beta > \gamma$ é equivalente a

$$\rho(\rho - 2)^2 > 0.$$

A última desigualdade é verdadeira pois $\rho > 2$. Logo, $\alpha + \beta > \gamma$.

Corolário 5.13. *Nas mesmas condições dos Teoremas 5.11 e 5.12, temos:*

i) $\rho = \sqrt{3} + 1$ *se, e somente se, o triângulo é retângulo com* $A = \frac{\pi}{6}$, $B = \frac{\pi}{3}$ *e* $C = \frac{\pi}{2}$.

ii) $\rho = 3$ *se, e somente se, o triângulo é equilátero.*

Demonstração. Para demonstrarmos este corolário utilizaremos as equivalências:

(a) $0 < \alpha \leq \beta \leq \gamma$;

(b) $0 < A \leq B \leq C < \pi$;

(c) $0 < sen(A) \leq sen(B) = \frac{\sqrt{3}}{2} \leq sen(C) \leq 1$;

(d)

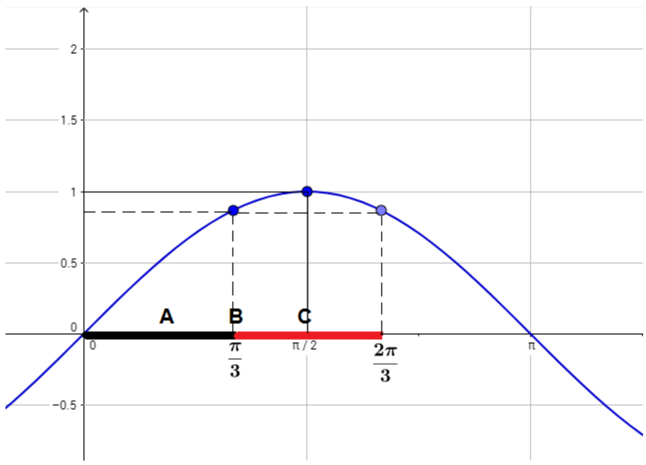
$$0 \leq \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\rho - 1 - \sqrt{\frac{(3-\rho)(1+\rho)}{3}}\right) \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \leq \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\rho - 1 + \sqrt{\frac{(3-\rho)(1+\rho)}{3}}\right).$$

Para a equivalência entre (b) e (c), note que $B = \frac{\pi}{3}$ e $A+B+C = \pi$. Logo, devemos ter $\frac{\pi}{3} < C < \frac{2\pi}{3}$ e $0 < A < \frac{\pi}{3}$, pois se $C > \frac{2\pi}{3}$, temos $B+C > \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = \pi$, o que não pode ocorrer. A desigualdade

$$0 < A \leq B = \frac{\pi}{3} \leq C \leq \frac{2\pi}{3}$$

garante a equivalência entre (b) e (c). Ver figura abaixo.

Figura 15: Equivalências



Observamos que se no primeiro sinal de menor ou igual em (d) vale a igualdade, então no segundo também vale. Reciprocamente, se no segundo sinal de menor ou igual vale a igualdade, então no primeiro também vale. Isto acontece precisamente quando $\rho = 3$ que corresponde ao caso de um triângulo equilátero, isto é, $A = B = C = \frac{\pi}{3}$. Além disso, na quarta desigualdade o sinal de igualdade é verdadeiro para $\rho = 1+\sqrt{3}$, o que corresponde ao caso $A = \frac{\pi}{6}$, $B = \frac{\pi}{3}$ e $C = \frac{\pi}{2}$.

Problema 5.14. *Os lados de um triângulo estão em progressão geométrica. Entre que valores pode variar a razão? Determine a variação de um ãngulo interno formado pelo maior e pelo menor lado desse triângulo.*

Solução. Sejam $\frac{x}{q}, x, xq$ com $q > 0$ os comprimentos dos lados do triângulo.

Pelas condições de existência de um triângulo devemos ter
$\frac{x}{q}+x>xq$, $\frac{x}{q}+xq>x$ e $x+xq>\frac{x}{q}$.
Da primeira desigualdade segue que

$$\frac{x}{q}+x>xq$$

multiplicando ambos membros da desigualdade por $\frac{q}{x}$ temos

$$1+q>q^2$$

ou seja

$$q^2-q-1<0.$$

As raízes da equação $q^2-q-1=0$ são $q=\frac{1+-\sqrt{5}}{2}$.
Logo $q^2-q-1<0$ para $\frac{1-\sqrt{5}}{2}<q<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
Da segunda desigualdade temos

$$\frac{x}{q}+xq>x$$

multiplicando ambos membros da desigualdade por $\frac{q}{x}$ temos

$$1+q^2>q$$

ou seja

$$q^2-q+1>0.$$

O discriminante da equação $q^2-q+1=0$ é dado por $\Delta=-3$, ou seja a equação não possui raízes reais e o coeficiente a da equação é positivo. Assim temos que $q^2-q+1>0$ para todo q real.
Da última desigualdade segue

$$x+xq>\frac{x}{q}$$

multiplicando ambos membros da desigualdade por $\frac{q}{x}$ temos

$$q+q^2>1$$

ou seja

$$q^2+q-1>0.$$

As raízes da equação $q^2+q-1=0$ são $\frac{-1+-\sqrt{5}}{2}$, mas como $q>0$ temos que $q^2+q-1>0$ vale desde que $q>\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.
Fazendo a intersecção das três desigualdades temos que os comprimentos dos lados de um triângulo são termos de uma P.G. de razão q se, e somente se $q^2-q-1<0$ para $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}<q<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Como estamos considerando apenas as razões maiores ou iguais a 1, temos que $1 \leq q < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Sendo α o ãngulo interno do triângulo formado pelo maior e pelo menor lado temos pela lei dos cossenos que

$$q^2 = 1 + q^4 - 2q^2 \cos\alpha.$$

ou seja

$$\cos\alpha = \frac{q^4 - q^2 + 1}{2q^2}.$$

Multiplicando ambos membros da equação acima por $2q^2$ segue que

$$q^4 - q^2 - 2q^2 \cos\alpha + 1 = 0. \tag{39}$$

Fazendo $q^2 = y$ na equação biquadrada acima temos que o discriminate da equação é dado por $\Delta = [-(2\cos\alpha + 1)]^2 - 4 = 4\cos^2 + 4\cos - 3$.
A equação biquadrada somente terá solução se $4\cos^2 + 4\cos - 3 \geq 0$, ou equivalentemente $\cos\alpha \geq \frac{1}{2}$.
Como trata-se de um triângulo $\alpha \leq 60$.

Problema 5.15. *Os lados de um triângulo retângulo formam uma progressão geométrica. Determine a razão dessa P.G. e os ângulos internos desse triângulo.*

Solução. Sejam $\frac{x}{q}, x, xq$ com $q > 1$ os comprimentos dos lados do triângulo retângulo. Pelo teorema de Pitágoras segue que

$$\begin{aligned} (xq)^2 &= (\frac{x}{q})^2 + x^2 \\ x^2q^2 &= (\frac{x^2}{q^2}) + x^2. \end{aligned}$$

Multiplicando ambos membros da igualdade por $\frac{q^2}{x^2}$ temos

$$q^4 - q^2 - 1 = 0.$$

Fazendo $y = q^2$ obtemos a equação $y^2 - y - 1 = 0$, cuja única solução positiva é $y = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e portanto $q = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$.

Aplicando o valor de q na equação 39 obtida no problema anterior obtém-se $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, ou $\alpha = 51,83$.
Consequentemente, os ângulos internos do triângulo retângulo que tem os lados em progressão

geométrica são: $90,51,83$ e $38,87$.

6 CONCLUSÃO

Esse trabalho teve uma importância bastante relevante para os alunos. Por meio desse trabalho os alunos puderam ter um olhar diferente acerca das progressões, observando que essas sequências possuem resultados interessantes e são aplicáveis em problemas do nosso cotidiano.

Concluímos que a matemática pode ser trabalhada de uma maneira diferenciada em sala de aula. Pudemos observar que é possível aprender os conteúdos de matemática em especial os trabalhados nesse trabalho de uma maneira que não seja movida somente pela reprodução de fórmulas.

A aplicação da atividade em sala de aula obteve um resultado positivo. Os alunos demonstraram bastante interesse em realizar as atividades propostas. O fato de ter trabalhado com os palitos de fósforo de início despertou a curiosidade dos alunos, que se sentiram desafiados em realizar a atividade. O interesse e envolvimento dos alunos foi fundamental para que a atividade fosse concluída de forma eficaz. Observamos por meio dos resultados obtidos pelos grupos nas folhas de atividades que a proposta de atividade atingiu o objetivo esperado, garantindo assim um grande envolvimento dos alunos e contribuindo para o aprendizado deles sobre o estudo das progressões aritméticas e geométricas.

Apresentamos ainda nesse trabalho uma conexão entre as progressões e a geometria plana, especificamente com a geometria dos triângulos. Relacionar esses dois conteúdos em sala de aula pode tornar a aula muito mais interessante e fazer com que o aluno aumente o seu conhecimento de uma maneira bem satisfatória.

Acreditamos que esse trabalho possa auxiliar docentes e alunos a ter uma visão mais de como associar a matemática ao cotidiano. Esperamos ainda que esse trabalho sirva de motivação para os professores trabalharem em sala de aula com os alunos esse tipo de atividade apresentadas no trabalho.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, E. A. M. de. **Progressões Aritméticas e geométricas: Praxeologias em Livros Didáticos de Matemática.** Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Mato Grosso, Cuiabá, 2012.

ARAÚJO, M. C. de S.; LEITE, A. Resolução de problemas x metodologia de ensino: Como trabalhar a matemática a partir da resolução de problemas? . 2010.

BAILEY, H.; GOSNELL, W. Heronian triangles with sides in arithmetic progression: An inradius perspective. **MATHEMATICS MAGAZINE**, v. 85, n. 4, p. 290–294, 2012.

BEAUREGARD, R.; SURYANARAYAN, E. R. The brahmagupta triangles. **THE COLLEGE MATHEMATICS JOURNAL**, v. 29, n. 1, p. 13–17, 1998.

DANTE, L. R. **Matemática Contexto e Aplicações**. São Paulo: Editora Ática, 2014.

GIOVANNI, J. R.; BONJORNO, J. ao R. **Matemática Completa 1ª série**. São Paulo: Editora FTD, 2005.

IEZZI, G. et al. **Matemática ciência e aplicações**. São Paulo: Editora Saraiva, 2013.

IEZZI, G.; HAZZAN, S. **Fundamentos de Matemática Elementar**. São Paulo: Editora Atual, 2004.

LONGEN, A. **Coleção Nova Didática Ensino Médio**. Curitiba: Editora Positivo, 2004.

MANTOVANI, H. **Atividades sobre progresões aritméticas através do reconhecimento de padrões.** Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2015.

MARTINS, D. P. **Sequências, Progressões e Séries: Uma abordagem para o Ensino Médio.** Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2013.

MILANI, W. N. **A Resolução de Problemas como ferramenta para a Aprendizagem de Progressões Aritméticas e Geométricas no Ensino Médio.** Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Ouro Preto, Minas Gerais, 2011.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO . **Parâmetros curriculares nacionais (ensino médio): bases legais**. Brasália: MEC/SEB, 1999.

MÓL, G. E. S.; PEREIRA, E. C. Utilizando a metodologia de resolução de problemas para o ensino de progressão aritmética. p. 1–9, 2012.

PAIVA, M. **Matemática :volume único**. São Paulo: Editora Moderna, 1999.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático.** Rio de Janeiro: Editora Interciência, 1995.

RIBEIRO, J. **Ciência, linguagem e tecnologia.** São Paulo: Editora Scipione, 2012.

VALE, I.; PIMENTEL, T. Padrões: um tema transversal no currículo. **Revista Educação e Matemática**, n. 85, p. 14–20, 2005.

ZELATOR, K. Triangle angles and sides in progression and the diophantine equation $x^2 + 3y^2 = z^2$. **arxiv**, 2008.