

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
CAMPUS CORNÉLIO PROCÓPIO
DIRETORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA
MESTRADO EM ENGENHARIA ELÉTRICA**

FABIO HENRIQUE BUSQUIM PEREIRA

**SÍNTESE E VALIDAÇÃO DE COMPENSADORES "ANTI-WINDUP" PARA UM
SISTEMA MULTIVARIÁVEL DE MISTURA DE LIQUÍDOS**

DISSERTAÇÃO

**CORNÉLIO PROCÓPIO
2019**

FABIO HENRIQUE BUSQUIM PEREIRA

SÍNTESE E VALIDAÇÃO DE COMPENSADORES "ANTI WINDUP" PARA UM SISTEMA MULTIVARIÁVEL DE MISTURA DE LIQUÍDOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do título de “Mestre em Engenharia Elétrica”

Orientador: Prof. Dr. Cristiano Marcos Agulhari

CORNÉLIO PROCÓPIO
2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

P436 Pereira, Fábio Henrique Busquim

Síntese e validação de compensadores "antiwindup" para um sistema multivariável de mistura de Líquidos / Fábio Henrique Busquim Pereira. – 2019.
105 p. : il. color. ; 31 cm.

Orientador: Cristiano Marcos Agulhari.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica. Cornélio Procópio, 2019.
Bibliografia: p. 87-91.

1. Controladores elétricos. 2. Sistemas lineares invariantes no tempo. 3. Líquidos. 4. Engenharia Elétrica – Dissertações. I. Agulhari, Cristiano Marcos, orient. II. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica. III. Título.

CDD (22. ed.) 621.3

Biblioteca da UTFPR - Câmpus Cornélio Procópio

Bibliotecário/Documentalista responsável:
Romeu Righetti de Araujo – CRB-9/1676

TERMO DE APROVAÇÃO

Título da Dissertação Nº 057:

“Síntese e Validação de Compensadores Antiwindup para Sistemas Multivariáveis”.

por

Fabio Henrique Busquim Pereira

Orientador: Prof. Dr. Cristiano Marcos Agulhari

Esta dissertação foi apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de MESTRE EM ENGENHARIA ELÉTRICA – Área de Concentração: Sistemas Eletrônicos Industriais, pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica – PPGEE – da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR – Câmpus Cornélio Procópio, às 09 horas do dia 28 de junho de 2019. O trabalho foi _____ pela Banca Examinadora, composta pelos professores:

Prof. Dr. Cristiano Marcos Agulhari
Presidente

Prof. Dr. Jeferson Vieira Flores
UFRGS

Prof. Dr. Wagner Endo
UTFPR-CP

Visto da coordenação:

Prof. Dr. Alessandro do Nascimento Vargas
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica
UTFPR Câmpus Cornélio Procópio

A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do Programa.

Agradecimentos

Agradeço a Deus pelo dom da paciência, perseverança e entendimento que permitiram o meu crescimento durante o curso.

Agradeço a minha esposa Regiane, e aos meus filhos Pedro, Felipe e Benjamin (que acabou de chegar) pelo apoio, paciência e perdão devido aos momentos ausentes.

Agradeço a minha mãe Terezinha que sempre acreditou em mim, me apoiando em todo o percurso, e a minha irmã Letícia pelo apoio e disposição em me ajudar quando necessário.

Agradeço ao meu orientador Prof.Dr. Cristiano M. Agulhari pelos conselhos e soluções essenciais para a conclusão deste trabalho e ao Prof. Dr. Wagner Endo sempre disposto em ajudar.

Agradeço aos meus companheiros de trabalho do IFSP de Avaré, que sacrificaram os seus horários para que fosse possível a realização deste curso.

*"Até os adolescentes podem esgotar-se,
e jovens robustos podem cambalear,
mas aqueles que contam com o Senhor
renovam suas forças;
Ele dá-lhes asas de águia.
Correm sem se cansar,
vão para a frente sem se fatigar.
(Bíblia Sagrada, Isaías 40, 30s)*

Resumo

PEREIRA, Fabio Henrique Busquim. Síntese e validação de compensadores antiwindup para um sistema multivariável de mistura de líquidos. 2019. 105 f. Dissertação – Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2019.

A principal contribuição deste trabalho é a aplicação e análise de controladores lineares, em conjunto com compensadores "antiwindup", em um sistema físico. O sistema é um processo multivariável cujo objetivo é controlar, pela variação das vazões de líquido frio e quente, o nível e a temperatura de um fluido em um tanque de mistura. Como o sistema é não-linear, duas abordagens distintas são utilizadas. Primeiramente, um modelo linear e invariante no tempo é utilizado para gerar um controlador e um compensador antiwindup também invariantes no tempo. A segunda abordagem consiste em modelar o sistema como linear e dependente de parâmetros variantes no tempo e computar, como consequência, um controlador e um compensador antiwindup também variantes no tempo. Os resultados de simulações teóricas e ensaios práticos permitem validar e verificar a influência do antiwindup na malha de controle, demonstrando-se eficaz.

Palavras-chave: compensador. antiwindup. multivariável.

Abstract

PEREIRA, Fabio Henrique Busquim. Synthesis and validation of antiwindup compensators for a multivariable liquid mixing system. 2019. 105 f. Dissertação – Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2019.

The main contribution of this work is the application and analysis of linear controllers, along with antiwindup compensators, in a physical system. The considered system is a multivariate process aimed to control the level and temperature of a fluid in a mixing tank by varying the flows of cold and hot liquid. Since the system is nonlinear, two distinct approaches are used. First, a linear and time invariant model is used to generate a controller and an antiwindup compensator also time invariant. The second approach is to model the system as linear and dependent on time-varying parameters and to compute, as a consequence, a controller and a compensator antiwindup also variants in time. The results of theoretical simulations and practical tests allow to validate and verify the influence of antiwindup on the closed-loop control, proving to be effective.

Keywords: compensator. antiwindup. multivariable.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Estrutura de controle para seguimento de referência	38
Figura 2 – Transformação Fracional Linear	40
Figura 3 – Sistema com a inclusão do back-calculation	43
Figura 4 – Diagrama do sistema multivariável.	47
Figura 5 – Planta didática disponível na instituição	48
Figura 6 – Vazão da bomba de água fria em relação a tensão aplicada	51
Figura 7 – Vazão da bomba de água quente em relação a tensão aplicada	52
Figura 8 – Ensaio para obtenção da taxa de escoamento	53
Figura 9 – Diagrama de controle	59
Figura 10 – Relações de entrada e saída do limitador aplicado ao controle linear	61
Figura 11 – Estrutura de controle aplicada aos ensaios	65
Figura 12 – Diagrama do controle LPV	67
Figura 13 – Estrutura de controle aplicado ao sistema com parâmetros variantes	72
Figura 14 – Resposta obtida durante simulação na saída do limitador = 10	76
Figura 15 – Resposta obtida durante ensaio na saída do limitador = 10	77
Figura 16 – Resposta obtida durante simulação na saída do limitador = 15	78
Figura 17 – Resposta obtida durante ensaio na saída do limitador = 15	79
Figura 18 – Nível e temperatura com limitador = 15	80
Figura 19 – Saturações na ausência do compensador	81
Figura 20 – Saturações com a utilização do compensador estático (5.32).	82
Figura 21 – Saturações com o compensador $E_c(\theta(t))$ (5.34)	83
Figura 22 – Resposta para o segmento de referência de Nível e temperatura	84

Lista de tabelas

Tabela 1 – Tensão \times Velocidade da bomba de água fria	51
Tabela 2 – Tensão \times Velocidade da bomba de água quente	52
Tabela 3 – Valores dos elementos das equações (4.20) e (4.21)	55

Lista de abreviaturas e siglas

AWBT	Antiwindup and Bumpless Transfer
CP	Controlador Programável
LMI	Linear Matrix Inequality
LPV	Linear Parameter Varying
LQR	Linear Quadratic Regulator
MIMO	Multiple Input Multiple Output
PID	Proporcional - Integral - Derivativo
SISO	Single Input Single Output

Lista de símbolos

α_i	Parâmetro variável conforme o valor de $\theta_1(t)$
β	Variável de otimização para maximização
δ	Pertubação desconhecida sobre o sistema
\mathcal{H}_∞	Norma infinita de um sistema
ι_p	Parâmetro variável conforme valor de $\theta_2(t)$
L_2	Norma vetorial definida para um vetor complexo
\in	Pertence
γ	Limite de magnitude para o sistema em malha fechada
$\psi(\cdot)$	Diferença entre o sinal saturado e o gerado pelo controlador
$\varepsilon(\cdot)$	Algoritmo elipsoide utilizado para identificar factibilidade
Ξ_0	Conjunto de limites ou condições iniciais do sistema
μ	Variável de otimização para minimização
σ	Parâmetro que limita o ganho máximo para cálculo do compensador
\star	Bloco simétrico
$\theta(t)$	Parâmetro variante do sistema
u_l	Valor de entrada limitado
ξ	Vetor de estados $\in \mathfrak{R}^{n+n_c}$
ζ	Escalar aplicada na LMI (3.20)

Sumário

1	INTRODUÇÃO	23
1.1	OBJETIVOS	24
1.1.1	Objetivo Geral	24
1.1.2	Objetivos específicos	25
1.2	JUSTIFICATIVA	25
1.3	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	25
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	27
3	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	37
3.1	REGULADOR QUADRÁTICO LINEAR	37
3.2	SISTEMAS LINEARES AOS PARÂMETROS VARIANTES	39
3.3	CONTROLADOR BASEADO NA NORMA \mathcal{H}_∞	40
3.4	SATURAÇÃO	42
3.5	SÍNTESE DO COMPENSADOR	44
4	IDENTIFICAÇÃO DO SISTEMA	47
4.1	MODELAGEM DO SISTEMA	47
4.2	DADOS DO SISTEMA	50
4.3	LINEARIZAÇÃO DO SISTEMA	54
4.4	MODELAGEM DO SISTEMA LPV	55
5	SÍNTESE DO CONTROLADOR E COMPENSADOR	59
5.1	OBTENÇÃO DO CONTROLADOR LINEAR	59
5.1.1	Ganhos do controlador linear	62
5.2	SÍNTESE DO COMPENSADOR	62
5.3	OBTENÇÃO DO CONTROLADOR LPV	66
5.3.1	Ganhos do controlador LPV	67
5.4	OBTENÇÃO DO COMPENSADOR SOBRE SISTEMA LPV	69
6	RESULTADOS FINAIS	75
6.1	RESULTADOS SOBRE O SISTEMA LINEAR	75
6.2	RESULTADOS SOBRE O SISTEMA QUASI-LPV	75
	CONCLUSÃO	85
	REFERÊNCIAS	87

APÊNDICES	93
APÊNDICE A – ALGORITMO UTILIZADO PARA OBTENÇÃO DO CONTROLADOR E COMPENSADOR LINEAR	95
APÊNDICE B – ALGORITMO UTILIZADO PARA OBTENÇÃO DO CONTROLADOR E COMPENSADOR LPV	99

1 INTRODUÇÃO

Nos processos industriais de forma geral, é necessária a aplicação de sistemas de controle que são responsáveis pela qualidade e quantidade de produtos produzidos, além da segurança para os funcionários e minimização de impactos contra o meio ambiente. Apesar da não-linearidade presente na maioria dos processos industriais, é comum aproximá-los para dinâmicas lineares, devido a uma grande gama de ferramentas para analisar estes sistemas e à facilidade de projetar o controlador que será aplicado. Os atuadores que estão sujeitos a estes sistemas tem limitações em velocidade e magnitude, como exemplo pode-se citar o limite de tensão em um atuador elétrico, a velocidade de vazão e limite de volume em um atuador hidráulico (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2007). Tais restrições afetam o desempenho dos sistemas onde estão inseridos, caso sejam negligenciados, podem trazer consequências negativas para a segurança dos agentes envolvidos e risco ao meio ambiente (TARBOURICH; TURNER, 2009). Como exemplo pode-se citar o acidente na estação de energia nuclear em Chernobyl e acidentes com aeronaves (HUSSAIN; REHAN, 2016).

Todo sistema físico está sujeito a limitações no atuador, e quando a saturação ocorre, ou seja, quando o atuador chega em seu limite de trabalho, a planta recebe um valor diferente do calculado pelo controlador, de forma que os estados do controlador são atualizados erroneamente. Esta condição é conhecida como windup do controlador (KOTHARE et al., 1994). Mesmo para o controle moderno multivariável, a palavra “windup” ainda representa o fato de que um controlador projetado ignorando a saturação pode muitas vezes se confundir com a resposta inesperada da planta saturada e induzir perda de desempenho em malha fechada e possivelmente estabilidade (GALEANI et al., 2009).

Quando são desenvolvidos controladores para um processo estável, é possível garantir a estabilidade do processo enquanto as variáveis de estado se encontrarem na região linear (ASTROM; RUNDQWIST, 1989). Mesmo que o controlador seja projetado de forma a garantir a estabilidade, é possível que variações bruscas no valor de referência, ou mesmo perturbações na região de operação, cause problemas em situações práticas, como saturações na operação dos atuadores (GLATTFELDER; SCHAUFELBERGER, 1983). Ao sair da região linear do saturador, a estabilidade pode ser perdida podendo gerar degradação total de desempenho do sistema. A fim de garantir que os estados permaneçam dentro da região pré-determinada de estabilidade, uma das técnicas conhecidas na literatura consiste em projetar um compensador denominado antiwindup, em conjunto com o controlador estabilizante, para garantir a estabilidade do sistema em questão.

Várias técnicas para o cálculo do compensador antiwindup têm sido desenvolvidas desde o início dos anos 90. Apesar da existência de vários métodos para encontrar o compensador, o que há de comum entre elas é a busca pela estabilidade global, quando o sistema é estável, e pela estabilidade local, quando o sistema é instável (TARBOURICH; TURNER, 2009). Nos últimos anos, a maioria das técnicas desenvolvidas para encontrar o ganho do compensador tem se baseado na abordagem por LMIs, pode-se citar Grimm et al. (2003), Junior e Tarbouriech (2005) e Ran et al. (2015). No Capítulo 2 será concedida uma breve revisão dos trabalhos pesquisados.

Além da representação linearizada já comentada, certas classes de sistemas não-lineares podem ser modeladas como linear e dependentes de parâmetros variantes no tempo. A vantagem é que esses modelos se aproximam melhor das dinâmicas não-lineares, porém as técnicas de controle acabam sendo mais complexas (SHAMMA, 2012).

No presente trabalho, é implementado o compensador antiwindup em uma planta didática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Tal equipamento é composto por uma malha de temperatura e nível, sendo as variáveis reguladoras a vazão de água fria e quente, contendo também como variável perturbadora a vazão de saída do reservatório. O objetivo do controle é garantir que tanto o nível quanto a temperatura do líquido no reservatório se mantenham estabilizados em determinados valores de referência. A planta se trata de um sistema não-linear, e trabalhos anteriores mostraram que a saturação dos atuadores é um problema responsável por uma considerável degradação de desempenho do processo (ANDRADE, 2016).

Em estudos anteriores, o compensador antiwindup foi inicialmente projetado para atuar em conjunto com controladores PID (Proporcional-Integral-Derivativo). A saturação neste tipo de controlador se dá principalmente pela ação integral pois, ao tentar realizar a correção do erro, pode gerar valores de saída com magnitudes maiores do que as admitidas pelo atuador (JR; TARBOURIECH; REGINATTO, 2002).

Neste trabalho, será adotado o procedimento em duas etapas, no qual se encontra um controlador para o processo que atue de forma linear, e caso haja saturação, o compensador antiwindup atua para reduzir seus efeitos.

1.1 OBJETIVOS

1.1.1 Objetivo Geral

O objetivo principal deste trabalho é realizar, a partir de condições suficientes, a síntese de um compensador antiwindup que será utilizado no controle do nível e temperatura de um reservatório, afim de minimizar as saturações dos atuadores e oscilações da variável controlada sobre a referência desejada.

1.1.2 Objetivos específicos

Os objetivos específicos deste trabalho são:

- Apresentar um procedimento para a obtenção do compensador para o modelo linear;
- Simular e analisar seu comportamento sobre o sistema modelado, verificando sua atuação sobre a saturação;
- Aplicar o compensador em conjunto ao controlador sobre o sistema MIMO em questão, afim de verificar sua influência sobre a saturação e sobre as variáveis principais do sistema;
- Apresentar condições de síntese para sistemas LPV ou quasi-LPV;
- Realizar a aplicação do compensador em conjunto a um controlador com ganhos escalonados;

1.2 JUSTIFICATIVA

Esta dissertação utiliza a modelagem do sistema realizada no trabalho de [Andrade \(2016\)](#), para poder encontrar os ganhos do compensador, sendo esta uma colaboração ao desenvolvimento de pesquisa sobre o equipamento presente na instituição. Além disso, se verificou pelo trabalho de [Andrade \(2016\)](#) que houve oscilações das variáveis controladas sobre a referência, sendo que neste trabalho se buscará minimizar esta oscilação com o auxílio do compensador, garantindo assim, um melhor desempenho.

1.3 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

A dissertação está organizada da seguinte maneira: no Capítulo II será apresentada uma breve revisão teórica sobre pesquisas realizadas tratando o efeito windup, no Capítulo III será apresentada a fundamentação teórica utilizada para que fosse possível encontrar o controlador e compensador, no Capítulo IV será mostrado como foi realizada a identificação do sistema linear e com parâmetros variantes. No Capítulo V serão apresentadas as etapas necessárias para encontrar o controlador e compensador, sendo no Capítulo VI, demonstrado os resultados alcançados. Por fim, a proposta para continuidade do trabalho é descrita.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Nesta seção será apresentado como o efeito windup tem sido tratado no meio acadêmico desde os primeiros estudos sobre o tema até os dias atuais.

No artigo de [Doyle, Smith e Enns \(1987\)](#) são apresentadas técnicas de síntese antiwindup e os efeitos provocados na malha de controle, sendo sugerida uma modificação no antiwindup convencional. Neste trabalho é demonstrado, através de exemplos, como polos lentos influenciam o surgimento e como evitar o efeito windup. A principal forma é utilizar um compensador antiwindup convencional que garanta um ganho e uma largura de banda maior do que o sistema principal. Para sistemas MIMO o autor sugere um sistema antiwindup modificado em que o sinal de controle é realimentado no controlador baseado nas informações da norma infinito da saída do controlador, afim de evitar um grande sobressinal na variável de processo.

Até final dos anos 80, o fenômeno windup não havia sido tratado do ponto de vista teórico para sistema MIMO, sendo que em [Kapasouris, Athans e Stein \(1988\)](#) é introduzida uma melhora para sistemas estáveis em malha aberta que são expostos a múltiplas saturações. A idéia é introduzir uma malha supervisora em que a lei de controle é modificada de acordo com a largura do distúrbio em amplitude, buscando assegurar estabilidade e um comportamento linear. O autor expõe que a saturação no sinal de controle altera a direção do vetor de controle, propondo como solução um ganho variável que multiplica o erro, nomeado governador de erro, que evitará que algum estado se associe com um integrador ou polo lento.

Em [Astrom e Rundqwist \(1989\)](#), devido ao conhecimento somente prático na época, Astrom realiza um estudo teórico sobre este efeito não-linear e como tratá-lo. A primeira forma apresentada é utilizando o algoritmo *back-calculation*, que compara a saída do controlador com a saída do atuador e retorna esta informação para a entrada do integrador. A partir desta informação, aplica-se um ganho que controla o tempo para reinício da integração, evitando com que a saída cresça demasiadamente. Tal processo só ocorre se houver a saturação, caso contrário, não afeta o controle original. Outro método proposto é a integração condicional, que consiste em permitir a atuação do termo integral somente se o valor da saída do processo estiver dentro da banda proporcional. Os dois métodos concedem respostas bem próximas podendo ser combinadas para lidar com os problemas de saturação.

Em [Campo, Morari e Nett \(1989\)](#) é realizado uma abordagem teórica sobre compensadores antiwindup e bumpless transfer (AWBT) para sistemas lineares invariantes no tempo, concedendo um procedimento para a escolha do compensador entre as técnicas

estudadas, conforme as informações obtidas do sistema. Neste artigo, é apresentado um resumo dos principais objetivos do AWBT como:

- Estabilização: o sistema deve permanecer estável quando ocorre limitações e substituições entre o controle manual para o automático;
- Posicionamento dos estados: deve-se evitar o efeito windup e transientes excessivos, já que essas condições, fazem com que o controlador não esteja com os estados corretamente atualizados;
- Sensibilidade a ruídos: evitar ruídos de medição sobre o limitador que atrapalhem o desempenho nominal;
- Sensibilidade direcional: devem fornecer desempenho robusto com respeito a incertezas de entrada diagonal.

No trabalho de [Kothare e Morari \(1995\)](#) são desenvolvidas condições de estabilidade para um compensador que atuará tanto sobre o efeito windup quanto sob bumpless transfer, que está relacionado com o chaveamento entre o controle manual para automático, pela utilização do teorema da passividade com apropriada escolha dos multiplicadores, sendo que esta escolha pode otimizar critérios de desempenho usando otimização convexa pela desigualdades matriciais lineares (LMIs).

No artigo de [Marcopoli e Phillips \(1996\)](#) a questão da limitação dos atuadores é tratada através da abordagem de LMIs, em que são utilizadas duas etapas de projeto. Na primeira, é desenvolvido um controlador linear, na segunda, considerando as limitações do atuador, calcula-se um ganho estático que provoca uma perda de desempenho, conhecida na literatura como degradação de desempenho gracioso, em que se busca manter controlada a perda de estabilidade durante a saturação. Para sistemas MIMO, esta limitação não funciona muito bem devido à natureza direcional, que não é considerada nos métodos antiwindup tradicionais. As limitações no atuador mudam a magnitude e a direção do vetor de controle, levando a uma grave degradação de desempenho e instabilidade. Uma das técnicas utilizadas para evitar distúrbios direcionais é a operação de escala sobre o vetor de controle ou no sinal de realimentação que afeta somente a magnitude.

No artigo de [Saber, Lin e Teel \(1996\)](#) o problema de saturação em sistemas lineares é tratado *a priori* no projeto de controle, e de forma semiglobal para resolver alguns problemas de controle, tais como estabilização, rejeição de distúrbio adicionado na entrada e estabilização robusta relacionada a incertezas não lineares. Foram empregadas leis de realimentação com uma estrutura de baixo e alto ganho para resolver vários problemas de controle semiglobal, entre eles, a rejeição de distúrbio robusto semiglobal com realimentação de estados linear. Pelo ajuste do baixo ganho, se busca assegurar estabilidade assintótica e

domínio de atração em malha fechada de um determinado conjunto limitado. Pelo ajuste do alto ganho, pretende-se alcançar desempenho na estabilização.

Miyamoto e Vinnicombe (1996) propõe um controlador robusto, baseado na fatoração em coprimos, de sistemas afetados por não-linearidade de saturação, sendo encontrado o controlador pela resolução do problema de otimização da norma \mathcal{H}_∞ , garantindo estabilidade não-linear. Em (TEEL; KAPOOR, 1997) é formalizada matematicamente a síntese do antiwindup, que resulta tanto em um algoritmo de síntese quanto em uma análise das propriedades de robustez e a relação com antiwindup ótimos.

Para processos com múltiplas entradas e saídas, Astrom e Wittenmark (1997) apresenta alguns métodos baseados na teoria de espaço de estados. Na abordagem por observador leva em consideração a realimentação do estado da saída do atuador, sendo estimada quando não está disponível. A técnica de condicionamento consiste em computar um sinal de referência que iria saturar a saída. Foram realizadas simulações com os principais métodos expostos no artigo se destacando que o observador teve um bom desempenho, podendo ser aplicado a sistemas multivariáveis.

No trabalho de Barbu et al. (2000) é projetado um compensador antiwindup para sistemas lineares exponencialmente instáveis. Na técnica apresentada, caso o limite do atuador não seja atingido, o sistema opera com o controlador nominal e, caso este limite seja alcançado, o algoritmo preserva a estabilidade e fica restrito ao rastreamento da referência. Esta técnica é aplicada a sistemas lineares do tipo MIMO com modos exponencialmente instáveis sujeitos a saturação na velocidade e magnitude. Com esta abordagem, a estabilidade assintótica global não pode ser alcançada com o sistema saturado, pois na região de controlabilidade nula o sistema é limitado em direção, portanto, deve-se obter uma larga região de operação para o sistema em malha fechada sem sacrificar significativamente o desempenho.

Em Cao, Lin e Ward (2002) se objetiva o aumento do domínio de atração do sistema em malha fechada, fazendo uso de um procedimento de otimização iterativo com restrições de LMIs. Para aumentar a região de estabilidade, em Jr, Tarbouriech e Reginatto (2002) são desenvolvidas duas técnicas baseadas em LMIs para computar o compensador antiwindup, sendo a estabilidade baseada nas funções quadráticas e Lyapunov tipo Lur'e.

Em Grimm et al. (2003), são estudados sistemas de controle lineares sujeitos a saturações na entrada em que a estabilidade quadrática em malha fechada e o desempenho L_2 são utilizados como parâmetros para cálculo de uma matriz antiwindup com garantia de factibilidade. É demonstrado que se, e somente se a planta é assintoticamente estável, pode-se encontrar um compensador estático da mesma ordem da planta sempre factível para um ganho L_2 grande o suficiente, fornecida pela função de Lyapunov quase comum, entre a malha aberta e malha fechada sem restrições. Pela solução dos problemas de factibilidade das LMIs, é realizada a síntese de um aumento antiwindup com desempenho

L_2 desejado.

No artigo de [Junior e Tarbouriech \(2005\)](#) é proposto o cálculo de um ganho antiwindup que aumente a região de estabilidade quando o sistema está saturado, tratando o sistema como linear descentralizado, a partir de uma condição modificada pelo uso da função de Lyapunov. A abordagem faz uso direto na forma de LMIs podendo calcular o ganho como um problema de otimização convexo, sendo também aplicado quando há sistemas com atrasos no tempo. Sendo este artigo utilizado neste trabalho para a obtenção do compensador estático.

[Turner e Tarbouriech \(2006\)](#) tratam as saturações de sensores usando antiwindup como estratégia de projeto, focando em obter condições suficientes que garantam estabilidade global e ganho L_2 .

Em [Tarbouriech, Queinnec e Garcia \(2006\)](#) é tratado o problema da determinação da região de estabilidade para sistemas lineares com o atuador sujeito a restrições dinâmicas sucessivas e em amplitude através da estratégia antiwindup. Considerando uma realimentação de saída dinâmica com respeito ao sistema linear sem saturação, um método antiwindup é investigado para garantir estabilidade do sistema em malha fechada e as restrições da saída controlada para uma região de admissíveis estados iniciais tão largo quanto possível.

No artigo de [Walsh e Hayes \(2007\)](#) é apresentado um mecanismo de controle da taxa de transferência para uma rede de sensores sem fio 802.15.4. O consumo de energia dentro da rede é regulado usando técnicas antiwindup, minimizando assim a perda de energia, preservando simultaneamente a qualidade de serviço (QoS). Um esquema antiwindup de ordem completa foi concebido e testado experimentalmente na rede. O esquema exibe um bom controle de rastreamento, rejeição de distúrbios e maior vida útil da bateria.

No trabalho de [Garcia, Tarbouriech e Silva \(2007\)](#) é investigado o problema de sistemas de controle sujeito a saturações nos sensores e atuadores. Supondo que somente a saída da planta linear é medida, a síntese de realimentação de saída do controlador dinâmico é considerado. Baseado em algumas condições de setor generalizado e mudanças apropriada em variáveis, condições de síntese na forma de quasi-LMI são declaradas para o contexto global e local. Concentrando no resultado regional, um problema de otimização baseado em LMI para computar um controlador afim de enlargar a região de atração do sistema em malha-fechada é proposto.

[Galeani et al. \(2008\)](#) projetam um antiwindup para sistemas de controle com controladores estritamente próprio na presença de saturações de magnitude e velocidade. Usando uma condição generalizada de setor, é fornecido um procedimento baseado em LMI's para a construção de um ganho antiwindup linear que age nas equações de estado do controlador garantindo estabilidade em malha fechada e desempenho otimizado.

No artigo de [Flores, Eckhard e Jr \(2008\)](#) é investigado o problema de rastreamento de referência para um sistema linear sujeito a saturações. Considerando uma malha de realimentação de saída unitária, contendo uma ação integral, condições na forma de LMI é proposto para computar um ganho de realimentação de estados e um ganho antiwindup integrador. Estas condições asseguram que a trajetória do sistema em malha fechada são limitados em uma elipsoide invariante.

Em [Flores, Silva e Sbarbaro \(2009\)](#) é investigado o problema de rastreamento de referência periódica para sistemas lineares incertos sujeitos a saturações. De acordo com o modelo interno, uma malha de controle contendo os modos de ambas as referências e distúrbios adicionais é considerada. Desta estrutura, condições na forma de quasi-LMI são propostos para computar simultaneamente um ganho de realimentação de estados e um ganho antiwindup.

O trabalho de [Sbarbaro, Tomizuka e Barra \(2009\)](#) fornece uma análise de resposta em estado estável sobre um protótipo em que um controlador repetitivo é aplicado a uma classe de sistemas não lineares, sendo no caso, sistemas com saturação no atuador. Primeiro é mostrado que a solução do estado estável em malha fechada do sistema não-linear pode ser obtido pelo processo iterativo de Picard. Em segundo, as condições para obter resposta em estado estável limitado são analisados para não-linearidade de saturação comumente encontrado em aplicações mecatrônicas.

No artigo de [Flores et al. \(2010\)](#) é tratado o problema de rastreamento e rejeição de sinais periódicos para sistemas lineares sujeitos a saturações. Para assegurar o rastreamento e a rejeição, uma estrutura de controle repetitivo em espaço de estados modificada é considerada. Desta estrutura, condições na forma de quasi-LMI são propostos para computar simultaneamente um ganho de realimentação de estados e um ganho antiwindup. Um problema de otimização objetivando a maximização de um conjunto de admissíveis estados e/ou a maximização de um conjunto de admissíveis referências e distúrbios é proposto.

[Flores et al. \(2011\)](#) trata do problema de rastreamento e rejeição de sinais periódicos para sistemas lineares com múltiplas entradas e múltiplas saídas, sujeitos a saturações. Para assegurar o rastreamento e a rejeição, uma estrutura de controle repetitivo em espaço de estados modificada é considerada. Desta estrutura, condições na forma de quasi-LMI são propostos para computar simultaneamente um ganho de realimentação de estados e um ganho antiwindup. Fornecido que as referências e distúrbios pertencem a um certo conjunto admissível, estes ganhos garantem que a trajetória do sistema em malha fechada iniciam em uma elipsóide na região linear do sistema em malha fechada, onde a presença do controlador repetitivo assegura o rastreamento e a rejeição.

O artigo de [Li e Lin \(2012\)](#) propõe o chaveamento do compensador antiwindup conforme a saturação para o alargamento do domínio de atração do sistema em malha

fechada. Neste trabalho se propõe dividir um poliedro convexo em vários sub-poliedros convexos quando a saturação é m -dimensional, em que é definido um casco convexo de um subconjunto de realimentações auxiliares. Um ganho antiwindup é projetado para cada sub-poliedro pelo uso da função quadrática de Lyapunov sendo implementado quando o valor saturado cai dentro destes sub-poliedro.

No trabalho de [Wu e Lin \(2012\)](#), três ganhos antiwindup são projetados sendo um ativado antes da ocorrência da saturação no atuador, outro imediatamente na ocorrência e outro após a saturação ter alcançado certo nível. O projeto é baseado na minimização do ganho L_2 dos distúrbios para a saída controlada do sistema em malha fechada. Neste trabalho se compara o tradicional antiwindup que envolve uma malha simples para ativação imediata na ocorrência da saturação com a inovação de se projetar uma malha para ativação atrasada, antecipatória e imediata, demonstrando eficácia através de simulações, devido ao esquema de ativação utilizado.

[Rehan e Hong \(2013\)](#) propõe um compensador antiwindup com arquitetura desacoplada, em que a seleção de um componente dinâmico não-linear desempenha um papel fundamental no estabelecimento de uma arquitetura desacoplada equivalente. Usando a arquitetura desacoplada, uma função quadrática de Lyapunov, a condição Lipschitz, a condição de setor, e a redução do ganho L_2 , uma LMI com base em compensadores antiwindup é desenvolvido para sistemas com não-linearidade Lipschitz global. E pela significativa condição de setor, um compensador com arquitetura desacoplada para sistemas instáveis e caóticos, que simultaneamente garante uma região de estabilidade e desempenho para aplicações de rastreamento, é derivado.

[Valmórbida et al. \(2013\)](#) propõe um método de projeto antiwindup para sistemas que contenham duas fontes de não-linearidade, sendo a saturação no atuador e uma não-linearidade quadrática. Duas classes de sistemas são considerados: (1) A não-linearidade de saturação é aditiva à não-linearidade quadrática; (2) A não-linearidade da saturação é multiplicativa de uma matriz dependente do estado. O projeto do compensador é realizado afim de enlargar a região de atração no subespaço das variáveis da planta. Das condições teóricas alguns problemas de otimização convexa são propostos para computar o ganho do compensador antiwindup.

[Kiener, Lehmann e Johansson \(2014\)](#) investiga as conseqüências da saturação do atuador no comportamento da malha de controle acionado por eventos em termos de estabilidade e troca de informações. As propriedades de estabilidade são derivadas usando desigualdades matriciais lineares (LMIs) que mostram como a estabilidade da malha de controle acionado por evento depende da seleção do limiar do evento. Além disso, é mostrado que existe um limite inferior no tempo mínimo entre eventos, sendo também afetado pelo limite do evento. Como a saturação do atuador pode degradar gravemente o desempenho do sistema de malha fechada acionado por evento, o esquema é estendido

pela incorporação de um mecanismo anti-windup para superar esse problema.

O artigo de [Jr et al. \(2014\)](#) enfoca o problema do projeto antiwindup estático para uma classe de sistemas não-lineares multivariáveis sujeitos à saturação do atuador. A classe considerada considera todos os sistemas que são racionais nos estados ou que podem ser convenientemente representados por um sistema racional com restrições algébricas considerando algumas mudanças de variáveis. Mais precisamente, um método é proposto para calcular um ganho estático anti-windup que garanta a estabilidade regional para o sistema de malha fechada, assumindo que um controlador de realimentação dinâmica de saída seja previamente projetado para estabilizar o sistema não-linear. Os resultados são baseados em uma representação algébrica diferencial de sistemas racionais. Os efeitos da saturação de controle são levados em conta pela aplicação de uma condição de limite setorial generalizado. A partir desses elementos, as condições baseadas na LMI são planejadas para calcular um ganho antiwindup com o objetivo de ampliar a região de atração da malha fechada.

No artigo de [Ran et al. \(2015\)](#) é apresentado um método em que, diferente do projeto em duas etapas, os parâmetros do controlador nominal e do compensador antiwindup são realizados simultaneamente. O método propõe um esquema antiwindup atrasado que atuará somente quando a saturação atingir certo nível. É demonstrada a estabilidade global e a minimização do ganho de desempenho L_2 pela solução de LMIs. A motivação deste estudo é verificar a estabilidade e desempenho com o compensador quando a saída é levemente ou moderadamente saturada, deixando o controlador nominal atuando sozinho até que a saturação atinja um certo nível.

Em [Fezazi et al. \(2015\)](#) é realizada a síntese de um compensador antiwindup para sistemas com atrasos variantes no tempo. Mais precisamente, são propostas condições LMI que garantem a estabilidade do sistema em malha fechada, com um domínio ampliado de atração. Um elipsoide e um conjunto poliédrico são usados para ligar este domínio de atração, possibilitando derivar uma nova condição setorial. Além disso, um algoritmo é fornecido para otimizar o ganho antiwindup, reduzindo o conservadorismo.

[Ran, Wang e Dong \(2016\)](#) apresenta um método de projeto antiwindup para uma classe de sistemas não lineares incertos sujeitos a saturação do atuador e distúrbio externo. O controlador considerado incorpora tanto um controlador de rejeição de perturbação ativo quanto um compensador antiwindup. As incertezas dinâmicas e a perturbação externa são tratadas como um estado estendido da planta, e então são estimadas usando um observador de estado estendido e compensando-o na ação de controle, em tempo real. O compensador antiwindup produz um sinal baseado na diferença entre a saída do controlador e a saída saturada do atuador e, em seguida, aumenta o sinal para o controle para lidar com o fenômeno windup causado pela saturação do atuador. Primeiro, o autor mostra que, com a aplicação do controlador proposto, o sistema não linear considerado é assintoticamente

estável em uma região que inclui a origem. Então, no caso do controlador na forma linear, estabelece uma estrutura baseada na desigualdade matricial linear para calcular o ganho do observador de estado estendido e o ganho de compensador antiwindup que maximiza a estimativa do domínio de atração da malha fechada resultante sistema.

No artigo de [Qi et al. \(2017\)](#) é tratado o problema do projeto antiwindup para sistemas de chaveamento Markovianos estocásticos com modo dependente de atrasos variantes no tempo e não-linearidade de saturação. O compensador antiwindup é projetado de tal forma que o sistema resultante com atrasos variáveis no tempo e saturações no atuador é estocasticamente estável e o domínio de atração é maximizado. Condições suficientes para o problema correspondente são propostas em termos de desigualdades matriciais lineares.

Um problema de compensação antiwindup estático para sistemas de saltos markovianos com não-linearidade e múltiplos distúrbios (um distúrbio sendo um sinal de energia limitada, o outro gerado a partir de um sistema expresso em espaço de estado) é estudado no artigo de [Yao et al. \(2017\)](#). Sendo o primeiro objetivo projetar controladores hierárquicos anti-perturbação de compósitos estabilizadores baseados em observadores de perturbação na saída, na ausência de saturação do atuador, atenuando e rejeitando os dois distúrbios acima, respectivamente. O objetivo é então projetar ganhos de compensação antiwindup para os controladores acima mencionados, de tal forma que o sistema ainda possa ser estabilizado e as duas perturbações mencionadas acima possam ser continuamente atenuadas e rejeitadas, respectivamente, independentemente da saturação existir. Condições suficientes são derivadas para a existência dos ganhos desejados do observador de perturbação, matrizes de controladores e ganhos de compensação do antiwindup, garantindo performances prescritas.

[Qi et al. \(2018\)](#) considera o projeto antiwindup para sistemas de chaveamento semi-Markovianos estocásticos (S-MSSs) com não-linearidade de saturação e perturbação estocástica. No sistema em consideração, S-MSSs estocásticos com o processo semi-Markoviano podem descrever sistemas mais complexos em um processo de controle prático. A principal motivação deste resumo é que o sistema prático descrito pelos S-MSSs estocásticos sempre precisa considerar a saturação do atuador. Para lidar com esse tipo de problema complexo, condições suficientes para a análise da estabilidade estocástica são desenvolvidas pelo método da função de Lyapunov. Então, a estratégia antiwindup é construída para fazer o sistema dinâmico atingir a estabilidade e maximizar o domínio de atração.

Nesta seção foram apresentados alguns dos trabalhos que trataram o efeito windup, podendo ser notado que houve significativos avanços teóricos no tratamento deste tipo de não-linearidade nas últimas décadas, sendo ainda uma área de pesquisa de relevância. Alguns dos trabalhos que estão relacionados com a abordagem aqui realizada são ([CAO; LIN; WARD, 2002](#)), ([FLORES; ECKHARD; JR, 2008](#)), ([JR et al., 2014](#)) e ([FEZAZI et](#)

al., 2015). Na próxima seção será concedido uma explicação melhor da técnica utilizada nesta dissertação.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Das técnicas pesquisadas para síntese de um compensador antiwindup, a utilizada neste trabalho foi extraída do artigo de [Junior e Tarbouriech \(2005\)](#) em que se objetiva encontrar os ganhos com aumento da região de estabilidade para sistemas lineares com saturação na entrada. O procedimento é executado com a utilização de LMIs baseadas nas funções quadráticas de Lyapunov afim de obter condições de estabilidade. Para isso é necessário que o sistema estudado seja representado em espaço de estados, da forma:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\tag{3.1}$$

em que $x(t) \in \mathfrak{R}^n$ são os estados do sistema, $u(t) \in \mathfrak{R}^m$ são as entradas e $y(t) \in \mathfrak{R}^p$ são as saídas do sistema. A, B e C são matrizes de dimensões convenientes. O controlador dinâmico é representado em espaço de estados como:

$$\begin{aligned}\dot{x}_c(t) &= A_c x_c(t) + B_c y(t) \\ y_c(t) &= C_c x_c(t) + D_c y(t)\end{aligned}\tag{3.2}$$

em que $x_c(t) \in \mathfrak{R}^{n_c}$ são os estados do controlador, e $y_c(t) \in \mathfrak{R}^m$ são as saídas do controlador. A_c, B_c, C_c e D_c são matrizes de dimensões convenientes. Na seção 3.1 será abordado a teoria sobre o controlador LQR para sistemas lineares.

3.1 REGULADOR QUADRÁTICO LINEAR

Devido às dificuldades encontradas com alocação de polos em sistemas MIMO, como um controle adequado sobre uma das variáveis ou saturação em um dos atuadores, foram desenvolvidos na década de 50 controladores baseados na otimização de um índice de custo, que tem como objetivo minimizar o desvio acumulado entre o valor desejado e o valor medido. Um dos controladores com esta finalidade é o regulador linear quadrático que retorna o valor de ganho a ser utilizado na malha de controle, fazendo uso das matrizes ponderadas Q e R , junto à solução da equação de Riccati, sendo que esta ponderação influencia na importância relativa do erro e no consumo de energia dos sinais de controle ([PREREZ; SALA, 2004](#)). O desvio acumulado para um controle de processo contínuo no tempo pode ser dado por:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)]dt\tag{3.3}$$

Sendo a matriz $Q^{n \times n}$ semi-definida positiva, em que n se refere à quantidade de variáveis controladas e $R^{m \times m}$ definida positiva, em que m se refere à quantidade de atuadores. Os valores destas matrizes são relativas à importância que tem uma variável em relação a outra, para se obter um controle mais ponderado.

Na Figura 1, é ilustrado o sistema de controle que será utilizado neste trabalho considerando o seguimento de referência e que na saída $y(t)$, todos os estados estão disponíveis.

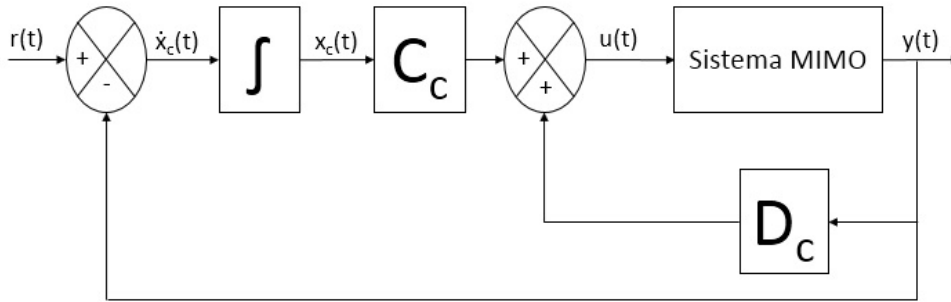


Figura 1 – Estrutura de controle para seguimento de referência

Fonte – Autoria Própria

Analisando a estrutura presente na Figura 1, verifica-se que $\dot{x}_c = r(t) - y(t)$, pode-se representar o controlador em espaço de estados como:

$$\begin{aligned} \dot{x}_c &= 0x_c(t) - Iy(t) + Ir(t) \\ y_c(t) &= C_c x_c(t) + D_c y(t) \end{aligned} \quad (3.4)$$

sendo $A_c = 0$, $B_c = -I$, e I a matriz identidade. Ao considerar que $u(t) = y_c(t)$ e $y(t) = Cx(t)$, na dinâmica apresentada em (3.1) e (3.4), obtêm-se:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax(t) + BD_c Cx(t) + BC_c x_c(t) \\ \dot{x}_c &= A_c x_c(t) + B_c Cx(t) + Ir(t) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Dessa forma o sistema aumentado pode ser representado em espaço de estados por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BD_c C & BC_c \\ B_c C & A_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} r(t) \quad (3.6)$$

$$\begin{bmatrix} y(t) \\ y_c(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & 0 \\ D_c C & C_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Devido à estrutura utilizada, A_c e B_c já estão determinados. Considerando que a matriz C é invertível, para determinar os valores de C_c e D_c , utilizando o comando LQR

do Matlab, basta não substituir $u(t)$ por $y_c(t)$ em (3.5) e escrever o sistema aumentado conforme mostrado em (3.8) (PREREZ; SALA, 2004).

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_c \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & 0 \\ B_c C & A_c \end{bmatrix}}_{\hat{A}} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}}_{\hat{B}} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} r(t) \quad (3.8)$$

Determinados os valores de $Q^{n+n_c \times n+n_c}$ e $R^{m \times m}$, aplica-se o comando apresentado em (3.9) no programa Matlab e serão retornados os valores de C_c e D_c em k , sendo $k = [D_c \ C_c]$, s a solução da equação de Riccati, e e os autovalores em malha fechada.

$$[k, s, e] = lqr(\hat{A}, \hat{B}, Q, R) \quad (3.9)$$

3.2 SISTEMAS LINEARES AOS PARÂMETROS VARIANTES

Sistemas lineares aos parâmetros variantes (LPV) são aqueles em que a representação do sistema dinâmico depende de parâmetros exógenos não-estacionários (MOHAMMADPOUR; SCHERER, 2012). Muitas vezes o sistema LPV é expresso como um modelo politópico devido à combinação de múltiplos modelos lineares invariantes no tempo (LTI) tendo os vértices na região de operação (FUJIMORI; LJUNG, 2006). Um sistema LPV pode ser representado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\theta(t))x(t) + B(\theta(t))u(t) \\ y(t) &= C(\theta(t))x(t) + D(\theta(t))u(t) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Sendo as matrizes A, B, C e D dependentes de parâmetros variantes no tempo $\theta(t)$.

Quando o parâmetro $\theta(t)$ depende de algum estado do sistema, este sistema recebe a denominação quasi-LPV, podendo o parâmetro $\theta(t)$ ser representado como $\theta(t) = [\theta'_x(x(t)) \ \theta'_p]$, em que (MOREIRA, 2008):

θ'_x são as variáveis endógenas, dependentes dos estados.

θ_p são as variáveis exógenas que não dependem da dinâmica interna do sistema.

Uma das formas de se obter a representação de sistemas a parâmetros variantes é construindo o modelo politópico, em que se escolhe pontos específicos de operação, sendo desejável o conhecimento da saída $y(t)$ e da entrada $u(t)$ (FUJIMORI; LJUNG, 2006). Com esta abordagem, as matrizes do modelo politópico quasi-LPV possuem a seguinte

característica:

$$A(\theta(t)) = \sum_{i=1}^m \alpha_i A_i(\theta_i), \quad B(\theta(t)) = \sum_{i=1}^m \alpha_i B_i(\theta_i) \quad (3.11)$$

$$C(\theta(t)) = \sum_{i=1}^m \alpha_i C_i(\theta_i), \quad D(\theta(t)) = \sum_{i=1}^m \alpha_i D_i(\theta_i)$$

Em que θ_i são os pontos específicos escolhidos do parâmetro variante, A_i , B_i , C_i e D_i são as matrizes constantes do modelo LTI local, e as variáveis α_i pertencem ao conjunto denominado simplex unitário, definido por:

$$\Lambda_m = \{ \alpha \in \mathbb{R}^m : \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0 \} \quad (3.12)$$

3.3 CONTROLADOR BASEADO NA NORMA \mathcal{H}_∞

A norma \mathcal{H}_∞ é uma medida associada à robustez de sistemas a efeitos como incertezas e ruídos, de forma que quanto menor sua norma, maior sua robustez. Assim, a síntese de controladores de forma a minimizar a norma \mathcal{H}_∞ do sistema controlado tem sido extensamente utilizada no contexto de controle robusto (OGATA, 2011).

Considerando h o sistema em malha fechada e δ uma perturbação desconhecida, é comum representar sistemas incertos ou afetados por ruído como mostrado na Figura 2, estrutura também conhecida como Transformação Fracional Linear (GREEN; LIMEBEER, 2012).

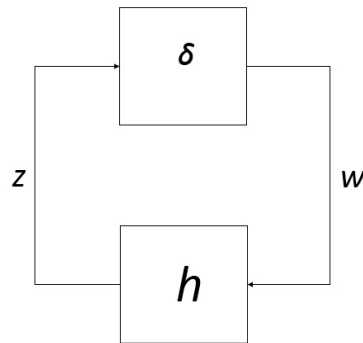


Figura 2 – Transformação Fracional Linear

Fonte – Adaptado de (GREEN; LIMEBEER, 2012)

De acordo com o teorema do pequeno ganho (BOYD et al., 1994), supondo que $h(s)$ seja estável, então a perturbação $\delta(s)$ não afeta sua estabilidade caso a seguinte condição seja satisfeita:

$$\sup_w \|h(jw)\|_2 < 1 \quad (3.13)$$

Caso δ seja estável e sua resposta em frequência seja limitada em magnitude, tal que:

$$\sup_w \|\delta(jw)\|_2 = \frac{1}{\gamma} \quad (3.14)$$

então a realimentação em malha fechada será estável se o controlador estabilizante pode ser encontrado tal que:

$$\sup_w \|h(jw)\|_2 < \gamma \quad (3.15)$$

Como neste trabalho o controlador baseado na norma \mathcal{H}_∞ será aplicado sobre um sistema quasi-LPV, considere o seguinte modelo de sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\theta(t))x(t) + B(\theta(t))u(t) + B_w(\theta(t))w(t) \\ z(t) &= C_z(\theta(t))x(t) + D_{zu}(\theta(t))u(t) + D_{zw}(\theta(t))w(t) \\ y &= C(\theta(t))x(t) \end{aligned} \quad (3.16)$$

No modelo (3.16), $z(t)$ são as variáveis controladas e $w(t) \in \mathfrak{R}^q$ as entradas exógenas do sistema. Por se tratar de um sistema quasi-LPV, a variável $\theta(t)$ não depende somente do tempo, mas também das variáveis do sistema, maiores detalhes serão concedidos no capítulo 4.4. Considerando que a interligação entre controlador e o sistema será a mesma apresentada na Figura 1, em que $y_c(t) = u(t)$ e a variável de estado do controlador será $x_c(t) = \int (r - y)dt$, e havendo perturbações externas, o sistema aumentado apresentado em (3.8) fica:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_c \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A(\theta(t)) & 0 \\ B_c C(\theta(t)) & 0 \end{bmatrix}}_{\hat{A}(\theta(t))} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} B(\theta(t)) \\ 0 \end{bmatrix}}_{\hat{B}(\theta(t))} u(t) + \begin{bmatrix} B_{wi}(\theta(t)) \\ 0 \end{bmatrix} w(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} r(t) \quad (3.17)$$

$$z(t) = C_{zi}(\theta(t)) \begin{bmatrix} x(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} + D_{zui}(\theta(t))u(t) + D_{zwi}(\theta(t))w(t) \quad (3.18)$$

$$\begin{bmatrix} y(t) \\ y_c(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C(\theta(t)) & 0 \\ D_c(\theta(t))C(\theta(t)) & C_c(\theta(t)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Obtendo a representação do sistema aumentado pelas equações (3.17), (3.18) e (3.19), o ganho do controlador $\mathbf{K}(\theta(t)) = [D_c(\theta(t)) \ C_c(\theta(t))]$ será obtido pela resolução da LMI (3.20), utilizada no trabalho de Andrade (2016), sendo esta LMI apresentada no Teorema 1, que é baseada em aplicações do Lema de Finsler nas condições básicas de estabilidade (OLIVEIRA; GEROMEL; BERNUSSOU, 2002; GEROMEL; KOROGUI;

BERNUSSOU, 2007). Os elementos na LMI denotados por \star correspondem a blocos simétricos.

Teorema 1 *Se existirem matrizes $P_i(\theta(t)) = P_i(\theta(t))' > 0, X(\theta(t)), F, H(\theta(t))$ e um escalar ζ de forma que:*

$$\begin{bmatrix} \hat{A}(\theta(t))F + \hat{B}(\theta(t))X(\theta(t)) + X(\theta(t))'\hat{B}(\theta(t))' - \dot{P}_i(\theta(t)) & \star & & & \\ P_i(\theta(t)) - F + \zeta(\hat{A}(\theta(t))F + \hat{B}(\theta(t))X(\theta(t))' & & -\zeta(F + F') & & \\ C_{zi}(\theta(t))F + D_{zui}(\theta(t))X(\theta(t)) & & & \zeta(C_{zi}(\theta(t))F + D_{zui}(\theta(t))X(\theta(t))) & \\ -H(\theta(t))'B_{wi}(\theta(t))' & & & & 0 \\ & \star & & \star & \\ & \star & & \star & \\ & -\gamma^2 I & & \star & \\ -H(\theta(t))'D_{zui}(\theta(t))' & & I + H(\theta(t)) + H(\theta(t))' & & \end{bmatrix} < 0 \quad (3.20)$$

sendo o ganho de realimentação $\mathbf{K}(\theta(t)) = X(\theta(t))F^{-1}$ quem estabiliza o sistema (3.17) - (3.19) e garante uma norma \mathcal{H}_∞ menor que γ .

3.4 SATURAÇÃO

Considere que a entrada do atuador esteja limitada entre:

$$-u_{l(i)} \leq u_{(i)} \leq u_{l(i)} \quad u_{l(i)} > 0, i = 1, \dots, m \quad (3.21)$$

Desta forma, quando a saída do controlador estiver dentro dos limites do atuador, tem-se que $u = y_c$, sendo y_c a saída do controlador. Porém, quando isso não ocorre surge a saturação do atuador em que a entrada do sistema se torna $u = sat(y_c)$ sendo:

$$sat(y_c) \triangleq sinal(y_c)min(|y_c|, u_l) \quad (3.22)$$

Quando surge a saturação, uma das formas de se evitar o efeito indesejável do windup é fazendo uso do tradicional *back-calculation* em que se compara a saída do atuador com a entrada e realimenta o sinal para o controlador através de um compensador, considerando o atuador representado por um sinal linear e por um bloco de saturação, resultando no diagrama do sistema mostrado na Figura 3.

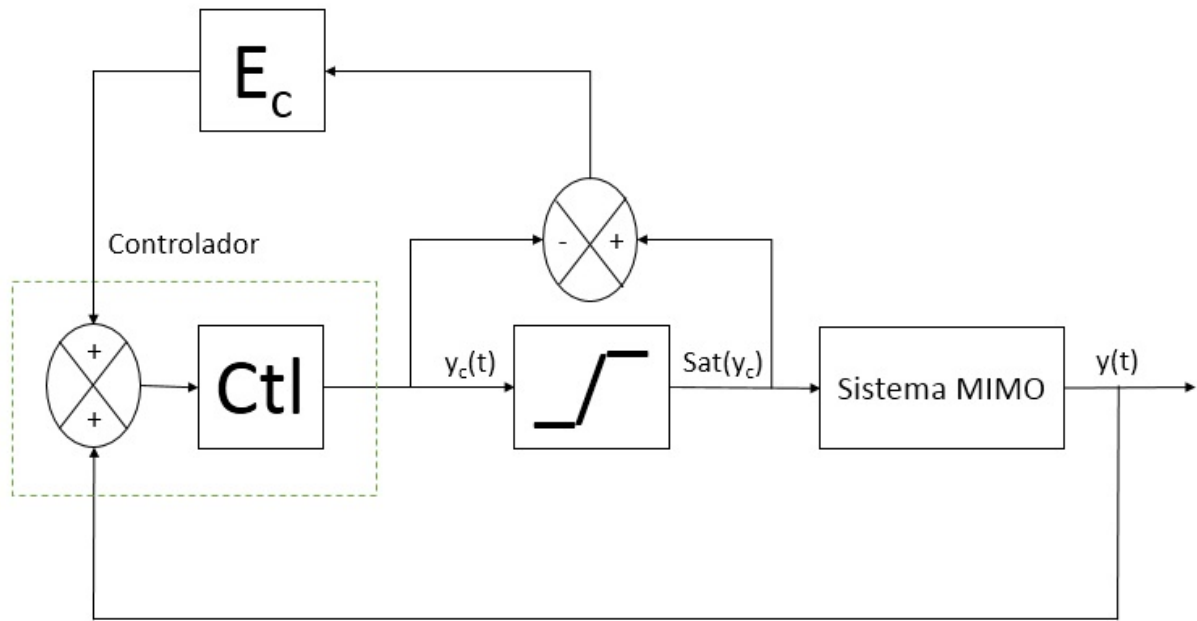


Figura 3 – Sistema com a inclusão do back-calculation

Fonte – Autoria Própria

A Figura 3 representa um sistema de controle genérico em que o controlador é representado por um bloco de comparação em conjunto com o controlador Ctl, podendo ser determinado pela técnica apresentada na Seção 3.1, e E_c é o chamado compensador antiwindup. Com a inclusão do *back-calculation*, atua em dois modos de operação: o modo normal, em que, se não ocorre a saturação, o compensador não interfere no controle; e o modo aumentado, em que há uma alteração na dinâmica do sistema de controle devido a atuação do compensador. Não existe necessidade de chaveamento do modo de trabalho, já que pela comparação de y_c com $sat(y_c)$, este chaveamento ocorre de forma natural. Quando o termo $E_c(sat(y_c) - y_c)$ atua sobre o sistema afim de minimizar o efeito windup, a dinâmica do sistema em malha fechada é alterada ficando (JUNIOR; TARBOURIECH, 2005; ASTROM; RUNDQWIST, 1989):

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= Ax + Bsat(y_c) \\
 y &= Cx \\
 \dot{x}_c &= A_c x_c + B_c y + E_c \psi(y_c) \\
 y_c &= C_c x_c + D_c y
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

Considerando a função $\psi(y_c) \triangleq sat(y_c) - y_c$, em que $\psi(y_c)$ corresponde a uma não linearidade descentralizada, sendo $\psi(y_c) = [\psi(y_{c(1)}) \dots \psi(y_{c(m)})]^T \forall i = 1, \dots, m$ (JUNIOR;

TARBOURIECH, 2005):

$$\psi(y_c) \triangleq \begin{cases} u_{l(i)} - y_{c(i)} & \text{Se } y_{c(i)} > u_{l(i)} \\ 0 & \text{Se } -u_{l(i)} \leq y_{c(i)} \\ -u_{l(i)} + y_{c(i)} & \text{Se } y_{c(i)} < u_{l(i)} \end{cases} \quad (3.24)$$

Substituindo y por Cx e y_c por $C_c x_c + D_c Cx$ na dinâmica do sistema e do controlador, obtém-se:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B(C_c x_c + D_c Cx + \psi(C_c x_c + D_c Cx)) \\ \dot{x}_c &= A_c x_c + B_c Cx + E_c \psi(C_c x_c + D_c Cx) \end{aligned} \quad (3.25)$$

Ao se considerar o vetor de estados $\xi = [x \ x_c]'$ e as matrizes:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} A + BD_c C & BC_c \\ B_c C & A_c \end{bmatrix} \\ \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{R} &= \begin{bmatrix} 0 \\ I_{nc} \end{bmatrix} \\ \mathbf{K} &= [D_c C \quad C_c] \end{aligned} \quad (3.26)$$

Desta forma o sistema em malha fechada é dado por:

$$\dot{\xi} = \mathbf{A}\xi + (\mathbf{B} + \mathbf{R}E_c)\psi(\mathbf{K}\xi) \quad (3.27)$$

Quando o sistema em malha fechada não possui saturação, a matriz \mathbf{A} é Hurwitz e o sistema é globalmente estável. O objetivo principal é determinar um compensador E_c que permita a menor perda de desempenho possível.

3.5 SÍNTESE DO COMPENSADOR

Pelos trabalhos realizados em Junior e Tarbouriech (2005), as condições de estabilidade são dadas a seguir.

Lema 1 *Considere a função $\psi(y_c)$ definida em (3.24). Se $\xi \in \mathcal{S}$, sendo \mathcal{S} conjunto poliedral definido por*

$$\mathcal{S} \triangleq \{\xi \in \mathbb{R}^{n+n_c}; |(K_{(i)} - G_{(i)})\xi| \leq u_{0(i)}, i = 1, \dots, m\} \quad (3.28)$$

para uma determinada matriz $G \in \mathbb{R}^{m \times (n+n_c)}$, sendo $K_{(i)}$ e $G_{(i)}$ a i -ésima linha de K e G , respectivamente, então a desigualdade

$$\psi(K\xi)'T[\psi(K\xi) - G\xi] \leq 0 \quad (3.29)$$

é verificada para qualquer matriz $T \in \mathbb{R}^{m \times m}$ diagonal e definida positiva.

Considere a função quadrática de Lyapunov dada por (BOYD et al., 1994):

$$V(\xi) = \xi'P\xi, \quad P = P' > 0, \quad P \in \mathfrak{R}^{(n+n_c) \times (n+n_c)} \quad (3.30)$$

Teorema 2 Se existir uma matriz definida positiva simétrica $W \in \mathfrak{R}^{(n+n_c) \times (n+n_c)}$, uma matriz $Y \in \mathfrak{R}^{m \times (n+n_c)}$, uma matriz $Z \in \mathfrak{R}^{n_c \times m}$ e uma matriz definida positiva diagonal $S \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ satisfazendo:

$$\begin{bmatrix} WA' + AW & BS + RZ - Y' \\ \star & -2S \end{bmatrix} < 0 \quad (3.31)$$

$$\begin{bmatrix} W & WK'_{(i)} - Y'_{(i)} \\ \star & u_{l(i)}^2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (3.32)$$

Então a matriz de ganho $E_c = ZS^{-1}$ é tal que a elipsoide $\varepsilon(P) = \{\xi \in \mathfrak{R}^{n+n_c}; \xi'P\xi \leq 1\}$, com $P = W^{-1}$, é uma região de estabilidade assintótica para o sistema. O elemento \star se refere a blocos simétricos.

Caso $G = K$, a condição (3.29) é verificada para todos os $\xi \in \mathfrak{R}^{n+n_c}$. Neste caso, se elimina a relação (3.32) e pela solução da LMI (3.33) se encontra o compensador $E_c = ZS^{-1}$ para o sistema (3.27) globalmente assintoticamente estável.

$$\begin{bmatrix} WA' + AW & BS + RZ - WK' \\ \star & -2S \end{bmatrix} < 0 \quad (3.33)$$

Com o intuito de incluir as condições iniciais Ξ_0 para as quais a estabilidade assintótica deve ser assegurada, ou de aumentar a região de estabilidade, pode-se incluir o seguinte problema de otimização (JUNIOR; TARBOURIECH, 2005):

$$\begin{aligned} & \min \mu \\ & W, Z, S, Y, \mu \\ (r) \quad & \begin{bmatrix} \mu & v_r' \\ v_r & W \end{bmatrix} \geq 0, \quad r = 1, \dots, n_r \end{aligned} \quad (3.34)$$

Se for considerado que $\mu = 1$, torna-se uma questão de verificar se as vértices v_r , que fazem parte das condições iniciais, são factíveis. Sendo:

$$\Xi_0 \triangleq Co\{v_1, \dots, v_{n_r}\}, \quad v_r \in \Re^{n+n_c} \quad (3.35)$$

Caso haja a intenção de ampliação da região de estabilidade, faz uso das LMIs acima junto com (3.31) e (3.32), pois, considerando $\beta = 1/\sqrt{\mu}$, a minimização de μ , implica em maximização de β , obtendo a inclusão de $\beta\Xi_0 \subset \varepsilon(P)$.

Considerando que $E_c(i, j) = Z_{i,j}S_{j,j}^{-1}$ e com a finalidade de limitar os ganhos do compensador, pode-se aplicar a LMI:

$$\begin{bmatrix} S_{(j,j)}\sigma & Z_{i,j} \\ Z_{i,j} & S_{(j,j)} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (3.36)$$

Com esta LMI se garante um limite para $E_{c(i,j)}$, como demonstrado em (JUNIOR; TARBOURIECH, 2005), aplicando o complemento de Schur, obtém-se $S_{(j,j)}\sigma - Z_{(i,j)}S_{(j,j)}^{-1}Z_{(i,j)} \geq 0$, isolando $S_{(j,j)}$, encontra-se $\sigma - Z_{(i,j)}S_{(j,j)}^{-1}Z_{(i,j)}S_{(j,j)}^{-1} \geq 0$, podendo concluir que $E_{c(i,j)}^2 \leq \sigma$.

No Capítulo 5 será apresentado o procedimento para obtenção de um compensador dependente de parâmetros.

4 IDENTIFICAÇÃO DO SISTEMA

Neste capítulo será apresentada a modelagem teórica e a identificação dos parâmetros do sistema através dos ensaios realizados. Serão realizadas duas abordagens para a modelagem do sistema, uma linearizada e a outra com parâmetros variantes, e para cada modelo, será obtido um controlador e compensador diferentes, sendo apresentados no capítulo 5.

4.1 MODELAGEM DO SISTEMA

Como esta dissertação utiliza o mesmo equipamento empregado no trabalho de [Andrade \(2016\)](#), foi utilizada a abordagem teórica para sua identificação, sendo o sistema representado na Figura 4.

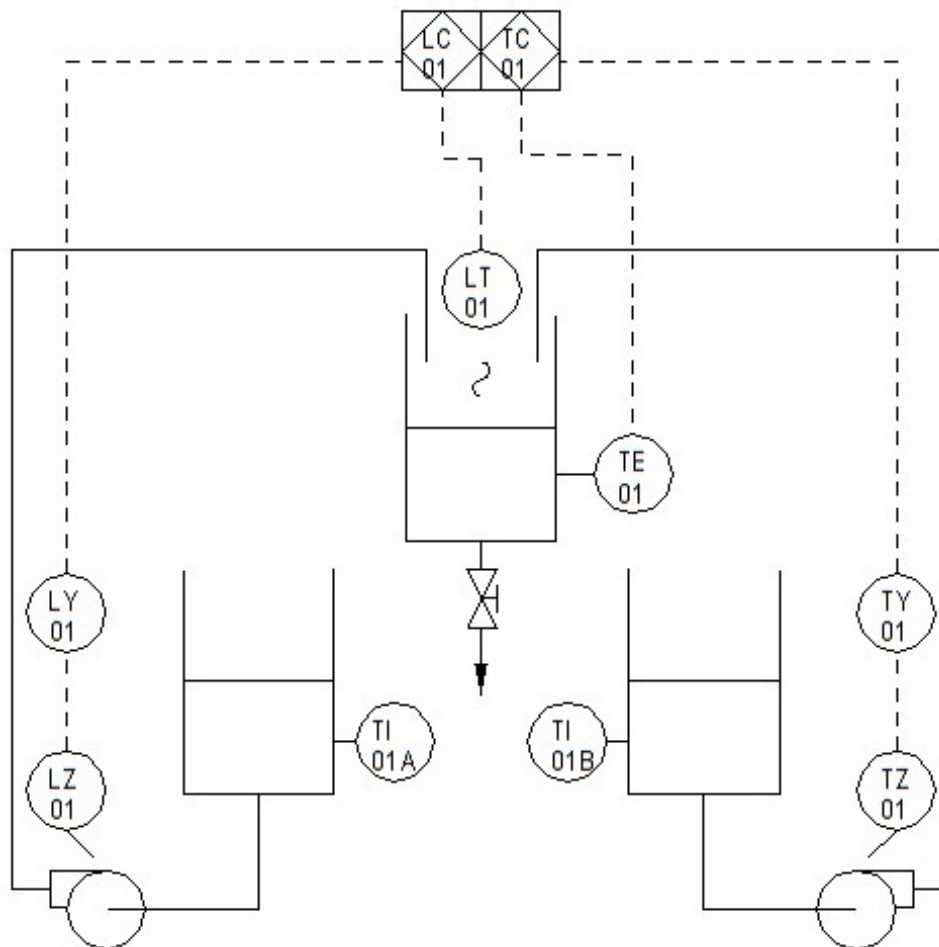


Figura 4 – Diagrama do sistema multivariável.

O sistema é composto por três tanques, sendo um tanque de água quente na temperatura de 50°C, no qual a bomba TZ-01 está conectada, e um tanque de água fria em que a bomba LZ-01 está conectada. A velocidade das bombas são manipuladas pelos conversores LY-01 e TY-01 que recebem um sinal de 0 a 10V do controlador com saída linear de 0 a 24V para as bombas. No tanque principal ocorre o controle multivariável em que o sensor ultrassônico LT-01 faz a leitura da altura do líquido e o sensor do tipo termorresistivo TE-01 faz a leitura da temperatura. Com isso, o objetivo do sistema é controlar tanto o nível de líquido quanto a sua temperatura, a partir do controle de fluxo de água fria e quente.

Os controladores LC-01 e TC-01 estão constituídos no CP CompactRio da National Instruments, sendo os sinais de controle para as bombas e dos sensores compartilhado pelos controladores, constituindo assim um controle centralizado. Toda a comunicação entre os equipamentos é realizada via sinais analógicos de 0 a 10V. Na Figura 5 são mostrados os principais componentes onde o módulo de controle é o local onde ocorre o processo e os dois reservatórios principais armazenam a água quente e fria.

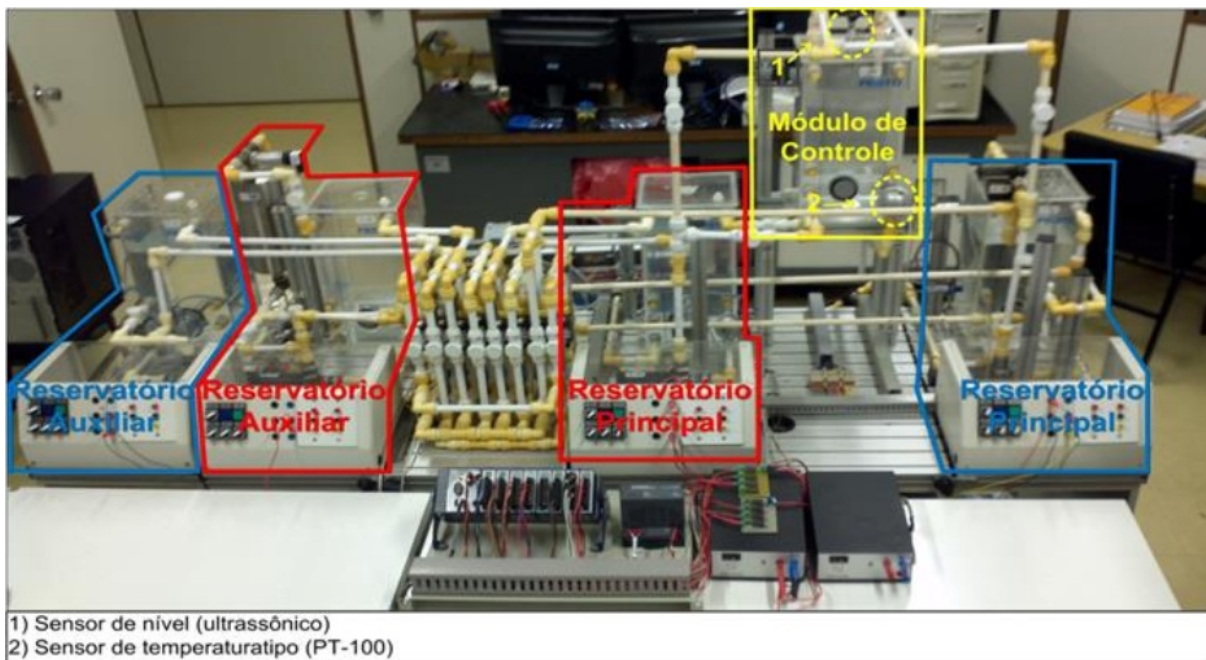


Figura 5 – Planta didática disponível na instituição

Fonte – (ANDRADE, 2016)

Para calcular os ganhos do controlador foi necessário determinar as dinâmicas de nível e temperatura. A dinâmica do nível foi obtida baseado no trabalho de (CORRIOU, 2004), sendo o processo estável em regime permanente, e levando em consideração o

balanço de massa ao redor do tanque, tem-se:

$$\Phi \frac{dh}{dt} = f_i(t) - f_o(t) \quad (4.1)$$

Sendo:

Φ a área interna do tanque em mm^2 ;

$h(t)$ a altura do líquido no reservatório em mm ;

$f_i(t)$ a vazão de entrada em mm^3/s ;

$f_o(t)$ a vazão de saída em mm^3/s ;

A vazão de saída $f_o(t)$ depende da altura ($h(t)$) do líquido no reservatório, e o seu fluxo é limitado pela resistência (R_o) apresentada devido ao diâmetro da tubulação de escoamento, podendo esta relação ser aproximada por $f_o = \frac{h(t)}{R_o}$ (SOUZA et al., 2014).

Como há controle sobre a vazão de entrada através das bombas e não há sobre a saída, as duas vazões de entrada são as variáveis manipuladas do sistema, sendo a vazão de saída considerada uma variável de perturbação. Isolando a altura, obtém-se a dinâmica do sistema dada por:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{\Phi} (f_{af}(t) + f_{aq}(t) - \frac{h(t)}{R_o}) \quad (4.2)$$

Sendo:

$f_{af}(t)$ a vazão de entrada de água fria em mm^3/s ;

$f_{aq}(t)$ a vazão de entrada de água quente em mm^3/s ;

Para encontrar a dinâmica da temperatura, esta foi considerada um processo estável com a mesma vazão de entrada e saída, bem como a mesma densidade e capacidade de aquecimento. A relação neste tipo de sistema para controle de temperatura é dado por (SMITH; CORRIPIO, 1997):

$$f(t)\rho C_p(T_i - T(t)) = \Phi h(t)\rho C_v \frac{dT}{dt} \quad (4.3)$$

Sendo:

$f(t)$ a vazão volumétrica dada em mm^3/s ;

ρ a densidade do líquido em kg/mm^3 ;

C_p a capacidade de aquecimento do líquido sob pressão constante em cal ;

T_i a temperatura de entrada no reservatório principal em $^{\circ}C$;

$T(t)$ a temperatura de saída do reservatório principal em $^{\circ}C$;

Φ a área interna do tanque em mm^2 ;

$h(t)$ a altura do líquido em mm ;

C_v a capacidade de aquecimento do líquido sob volume constante em cal ;

Como o líquido utilizado será água, tem-se que $C_p = C_v = 1$. Como há duas entradas e uma única saída, a equação (4.3) fica:

$$f_{af}(T_{af} - T(t)) + f_{aq}(t)(T_{aq} - T(t)) = \Phi h(t) \frac{dT}{dt} \quad (4.4)$$

Isolando a derivada, obtêm-se a dinâmica da temperatura dada por:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{\Phi h(t)} (f_{af}(T_{af} - T(t)) + f_{aq}(t)(T_{aq} - T(t))) \quad (4.5)$$

Neste trabalho, a vazão através das bombas de água quente e fria foram aproximadas de uma equação afim, em que se relaciona vazão com a tensão aplicada sendo:

$$f_{af}(t) = a_f V_{af}(t) + b_f \quad (4.6)$$

$$f_{aq}(t) = a_q V_{aq}(t) + b_q \quad (4.7)$$

onde:

a_f e a_q são os coeficientes angulares da vazão de água fria e quente;

b_f e b_q são os coeficientes lineares;

$V_{af}(t)$ e $V_{aq}(t)$ são as tensões de controle aplicado as bombas de água fria e quente;

4.2 DADOS DO SISTEMA

Como não há sensor que mede a vazão de entrada, foram realizados ensaios com as bombas afim de relacionar a vazão de entrada com a tensão aplicada.

Os ensaios foram realizados considerando que os tanques de água quente e água fria estavam cheios inicialmente, pois foi verificado que a diminuição do nível destes tanques, afeta a curva de vazão quando em tensões abaixo de 6V.

O intervalo de trabalho das bombas para a determinação da vazão foi de 4 a 8V, sendo a informação da altura do reservatório registrada a cada 1 segundo e alterado o valor de tensão a cada 0.5V. Com a válvula na saída do tanque fechada e considerando os tanques inicialmente cheios, foi determinado um valor de tensão da bomba, e registrado o tempo para a variação do nível. Como o aumento da altura do líquido em relação ao tempo

se aproximou de uma função afim para cada valor de tensão considerado, foi possível obter a velocidade pela derivada da altura em relação ao tempo. Desta forma, a velocidade encontrada para cada valor de tensão aplicado a bomba de água fria se encontra na Tabela 1.

Tabela 1 – Tensão × Velocidade da bomba de água fria

Tensão(V)	Velocidade(mm/s)
4	0
4,5	0,1575
5	0,6599
5,5	1,3614
6	1,5805
6,5	1,8637
7	2,1826
7,5	2,6041
8	2,8797

Considerando que a área medida foi de $\Phi = 33250mm^2$, a curva que relaciona a vazão e tensão da bomba de água fria é mostrada na Figura 6.

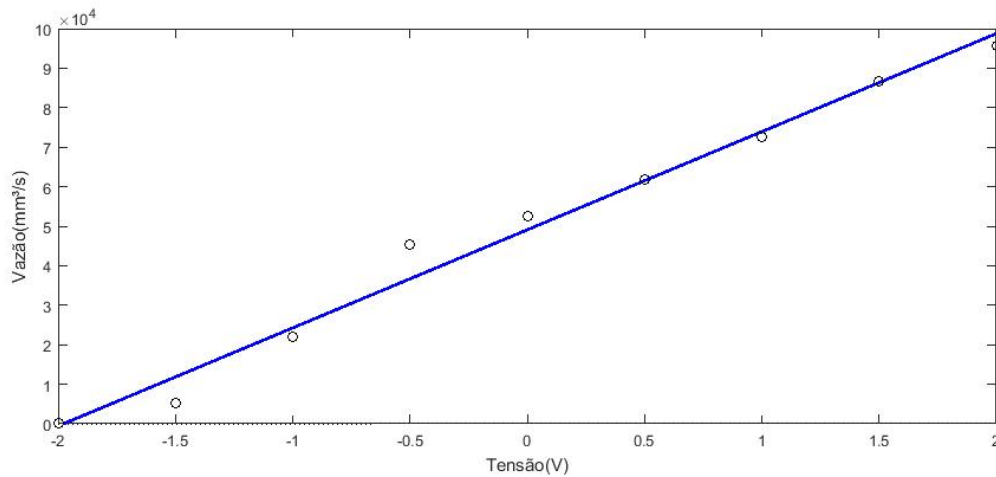


Figura 6 – Vazão da bomba de água fria em relação a tensão aplicada

Fonte – Autoria Própria

Nota-se que o intervalo de tensão de 4 a 8V foi renormalizado para o intervalo de -2 a 2, para que não haja preocupação em incluir o deslocamento no cálculo do controlador, e facilitar as comparações com a simulação no Matlab. Com base neste gráfico foi obtida a equação que relaciona a tensão e vazão sendo:

$$f_{af} = 24834V_{af} + 49097 \quad (4.8)$$

Para a vazão de água quente foi utilizado o mesmo procedimento, sendo as velocidades encontradas registradas na Tabela 2.

Tabela 2 – Tensão \times Velocidade da bomba de água quente

Tensão(V)	Velocidade(mm/s)
4	0
4,5	0,1281
5	0,6421
5,5	1,1452
6	1,6278
6,5	2,0026
7	2,1997
7,5	2,7084
8	2,9959

Com estes dados e utilizando a informação da área se obtém a relação entre vazão e tensão plotado na Figura 7.

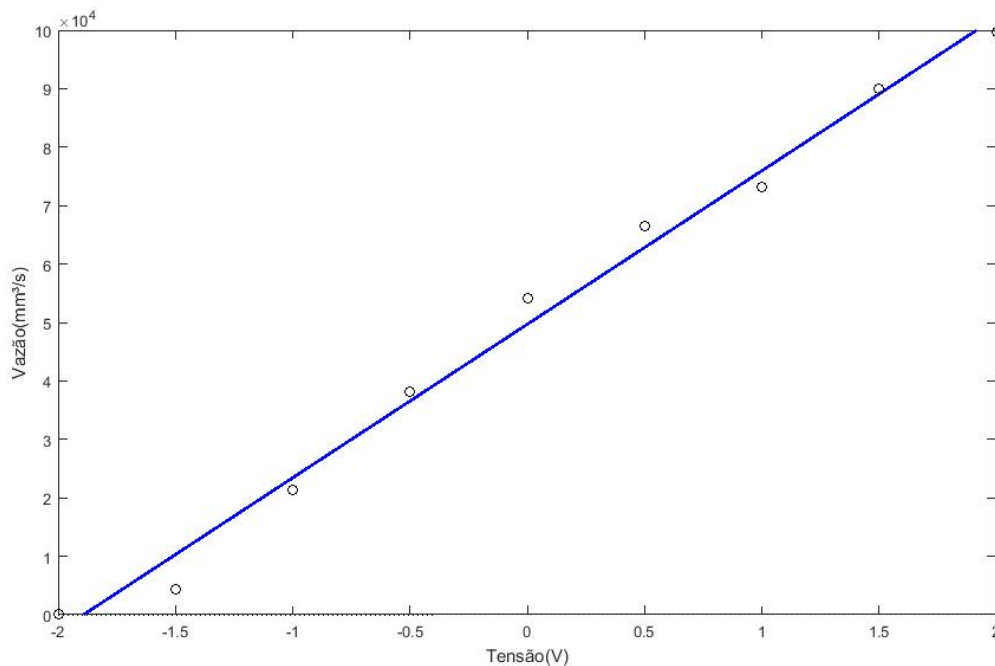


Figura 7 – Vazão da bomba de água quente em relação a tensão aplicada

Fonte – Autoria Própria

A equação que representa a vazão de água quente é portanto dada em (4.9). Nota-se que esta variável também foi renormalizada para um intervalo de tensão de -2 a 2V.

$$f_{aq} = 26264V_{aq} + 49690 \quad (4.9)$$

A vazão de saída foi verificada pelo tempo de escoamento do líquido, considerando o tanque inicialmente cheio, e a redução da altura do líquido é mostrada na Figura 8.

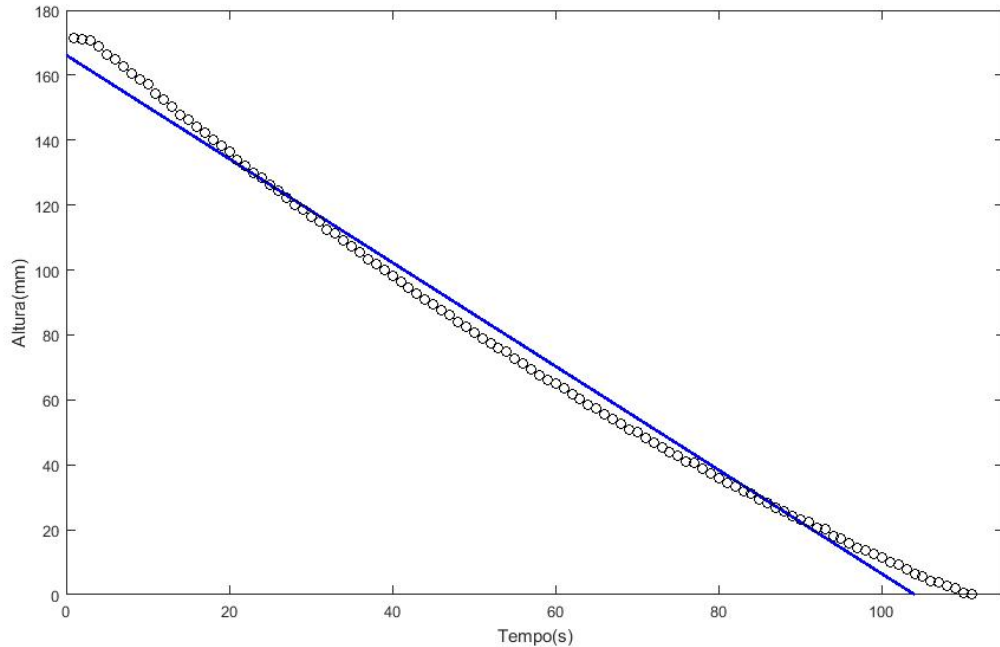


Figura 8 – Ensaio para obtenção da taxa de escoamento

Fonte – Autoria Própria

Baseado nas informações apresentadas no gráfico, pela aproximação do escoamento por uma equação linear obtém-se:

$$h(t) = -1,5977t + 166,19 \quad (4.10)$$

Em que:

$h(t)$ a altura do líquido no tanque;

t o tempo de escoamento em segundos;

Por esta aproximação, verifica-se que a velocidade de escoamento é constante como a área interna do tanque, podendo aproximar a vazão de saída a um valor constante obtendo:

$$f_o = 53123,53 \text{ mm}^3/\text{s} \quad (4.11)$$

sendo possível encontrar o valor da resistência R_o , considerando a altura máxima e a vazão de saída encontrada. Foi considerado um fluxo constante pelo fato de ser utilizado, para a síntese do controlador, uma representação linearizada, já que pela abordagem LQR se faz

necessário que o sistema seja linear. Com estes dados obtidos a equação (4.2) e (4.5) são representados como:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{33250}((24834V_{af} + 49097) + (26264V_{aq} + 49690) - \frac{h(t)}{0,0032}) \quad (4.12)$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{33250h(t)}((24834V_{af} + 49097)(24 - T(t)) + (26264V_{aq} + 49690)(50 - T(t))) \quad (4.13)$$

Na próxima seção será demonstrado o procedimento adotado para encontrar o sistema linearizado que foi aplicado sobre o processo em questão.

4.3 LINEARIZAÇÃO DO SISTEMA

Como a dinâmica do sistema é não-linear, uma primeira abordagem para realizar a síntese do sistema de controle é aplicar a linearização da dinâmica do sistema sobre a referência desejada. Considere o modelo linear dado por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u) \\ y &= g(x, u) \end{aligned} \quad (4.14)$$

Um modelo não-linear pode ser aproximado do linear ao redor de um ponto de equilíbrio (x_0, u_0) , sendo representado como (CHEN, 1999):

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= A\bar{x} + B\bar{u} \\ \bar{y} &= C\bar{x} + D\bar{u} \end{aligned} \quad (4.15)$$

sendo $\bar{x} = x - x_0$ e $\bar{u} = u - u_0$ representam a evolução da variável em torno do ponto específico, e os elementos das matrizes correspondentes são componentes jacobianos da função não-linear:

$$a_{i,j} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{(x_0, u_0)} \quad i, j = 1, \dots, n \quad (4.16)$$

$$b_{i,j} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial u_j} \right|_{(x_0, u_0)} \quad i = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, m \quad (4.17)$$

$$c_{i,j} = \left. \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right|_{(x_0, u_0)} \quad i = 1, \dots, p \quad j = 1, \dots, n \quad (4.18)$$

$$d_{i,j} = \left. \frac{\partial g_i}{\partial u_j} \right|_{(x_0, u_0)} \quad i = 1, \dots, p \quad j = 1, \dots, m \quad (4.19)$$

Substituindo as equações (4.6) e (4.7), na equação (4.2) e (4.5), e aplicando a linearização obtêm-se as matrizes.

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\Phi R_o} & 0 \\ -\frac{1}{\Phi h_0^2} [f_{af0}(T_{af} - T_0) + f_{aq0}(T_{aq} - T_0)] & -\frac{1}{\Phi h_0} (f_{af0} + f_{aq0}) \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{a_f}{\Phi} & \frac{a_q}{\Phi} \\ \frac{1}{\Phi h_0} [a_f(T_{af} - T_0)] & \frac{1}{\Phi h_0} [a_q(T_{aq} - T_0)] \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

O ponto de operação escolhido para a altura e temperatura são $h_0 = 100mm$ e $T_0 = 35^\circ C$, com a tensão de controle escolhida $V_{af0} = V_{aq0} = 0$ para as bombas de água fria e quente, o ponto de operação das vazões de entrada são $f_{af0} = 49097mm^3/s$ e $f_{aq0} = 49690mm^3/s$. Na tabela 3 estão informados os valores presentes na Equação (4.20) e (4.21), junto com os dados apresentados neste parágrafo.

Tabela 3 – Valores dos elementos das equações (4.20) e (4.21)

Elementos	Valores
a_f	24834
a_q	26264
f_{af0}	49097
f_{aq0}	49690
h_0	100
Φ	33250
T_0	35
T_{af}	24
T_{aq}	50

Com os valores da Tabela 3 se obtém a dinâmica apresentada em (4.22).

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} -0,0094 & 0 \\ -0,0006 & -0,0297 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0,7469 & 0,7899 \\ -0,0822 & 0,1185 \end{bmatrix} u(t) \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned} \quad (4.22)$$

4.4 MODELAGEM DO SISTEMA LPV

Na dinâmica da temperatura apresentada em (4.5) estão presentes as duas variáveis principais do sistema, a altura($h(t)$) e a temperatura($T(t)$). Uma das possíveis modelagens

LPV para as equações (4.2) e (4.5) consiste em definir os parâmetros, $\theta_1 = \frac{1}{h}$ e $\theta_2 = T$ (ARAÚJO, 2006). O sistema ficou sendo representado como:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{h} \\ \dot{T} \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{\Phi R_o} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A(\theta(t))} \begin{bmatrix} h(t) \\ T(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{a_f}{\Phi} & \frac{a_q}{\Phi} \\ \frac{\theta_1(t)a_f(T_{af}-\theta_2(t))}{\Phi} & \frac{\theta_1(t)a_q(T_{aq}-\theta_2(t))}{\Phi} \end{bmatrix}}_{B(\theta(t))} \begin{bmatrix} V_{af} + \frac{b_f}{a_f} \\ V_{aq} + \frac{b_q}{a_q} \end{bmatrix} \\ y &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C(\theta(t))} \begin{bmatrix} h \\ T \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.23)$$

O intervalo considerado da altura para encontrar a faixa de variação de θ_1 está entre 1 e 170mm, enquanto que para θ_2 , de 24 a 50°C, assim, θ_1 e θ_2 variam entre:

$$\theta_{1m} = \frac{1}{170} \leq \theta_1 \leq \theta_{1M} = 1 \quad \theta_{2m} = 24 \leq \theta_2 \leq \theta_{2M} = 50 \quad (4.24)$$

Como serão considerados somente os valores mínimos e máximos de θ para representar o sistema, é necessário utilizar dois simplexes unitários (abordagem multi-simplex), definidos por $\alpha \in \Lambda_2$ e $\iota \in \Lambda_2$. Portanto,

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 &= 1 & \iota_1 + \iota_2 &= 1 \\ \alpha_2 &= 1 - \alpha_1 & \iota_2 &= 1 - \iota_1 \end{aligned} \quad (4.25)$$

Realizando a associação $\theta_1 = \alpha_1\theta_{1m} + \alpha_2\theta_{1M}$ e $\theta_2 = \iota_1\theta_{2m} + \iota_2\theta_{2M}$, pode-se representar $B(\theta(t))$ como:

$$B(\theta(t)) = \alpha_1\iota_1B_{11}(\theta_{1m}, \theta_{2m}) + \alpha_1\iota_2B_{12}(\theta_{1m}, \theta_{2M}) + \alpha_2\iota_1B_{21}(\theta_{1M}, \theta_{2m}) + \alpha_2\iota_2B_{22}(\theta_{1M}, \theta_{2M}) \quad (4.26)$$

Para que seja possível a execução do controlador e compensador dependente de parâmetros, o parâmetro α e ι foram obtidos da seguinte maneira:

$$\alpha_1 = \frac{\theta_1 - \theta_{1M}}{\theta_{1m} - \theta_{1M}} \quad \iota_1 = \frac{\theta_2 - \theta_{2M}}{\theta_{2m} - \theta_{2M}} \quad (4.27)$$

Para obter o sistema aumentado (3.17) foi utilizada a equação (4.23) com os valores apresentados na Tabela 3, junto com os limitantes de θ_1 e θ_2 apresentados em (4.24). Dessa

forma foram obtidas as matrizes $\hat{A}(\theta(t))$ e $\hat{B}(\theta(t))$ sendo:

$$\hat{A}(\theta(t)) = \begin{bmatrix} -0,0094 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned} \hat{B}(\theta(t)) = & \alpha_{1\iota_1} \begin{bmatrix} 0,74689 & 0,78989 \\ 0 & 20,5373 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_{2\iota_1} \begin{bmatrix} 0,74689 & 0,78989 \\ -19,4191 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ & + \alpha_{1\iota_2} \begin{bmatrix} 0,74689 & 0,78989 \\ 0 & 0,12081 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_{2\iota_2} \begin{bmatrix} 0,74689 & 0,78989 \\ -0,11423 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.29) \end{aligned}$$

No capítulo 5 será apresentado a obtenção dos controladores a partir do modelo linearizado e LPV do sistema.

5 SÍNTESE DO CONTROLADOR E COMPENSADOR

Os detalhes para a síntese do controlador e compensador, tanto utilizando o modelo linearizado quando o modelo LPV, são apresentados neste capítulo. Na Seção 5.1, é apresentada a obtenção do controlador linear, onde são informados os valores obtidos do controlador, representados de forma adequada afim de encontrar, na Seção 5.2, o compensador antiwindup. Na Seção 5.3, é sintetizado o controlador LPV, e na Seção 5.4 é informado o procedimento necessário para a obtenção do compensador junto com os parâmetros alterados para testar sua ação quando o sistema está em malha fechada.

5.1 OBTENÇÃO DO CONTROLADOR LINEAR

Seja $y(t) = x(t)$ a saída do sistema e $r(t)$ a referência de controle. Como resultado, tem-se $\dot{x}_c(t) = r(t) - y(t)$, e a lei de controle é dada portanto por:

$$u = -D_c x - C_c x_c \quad (5.1)$$

O diagrama de blocos que representa o sistema de controle é apresentado na Figura 9.

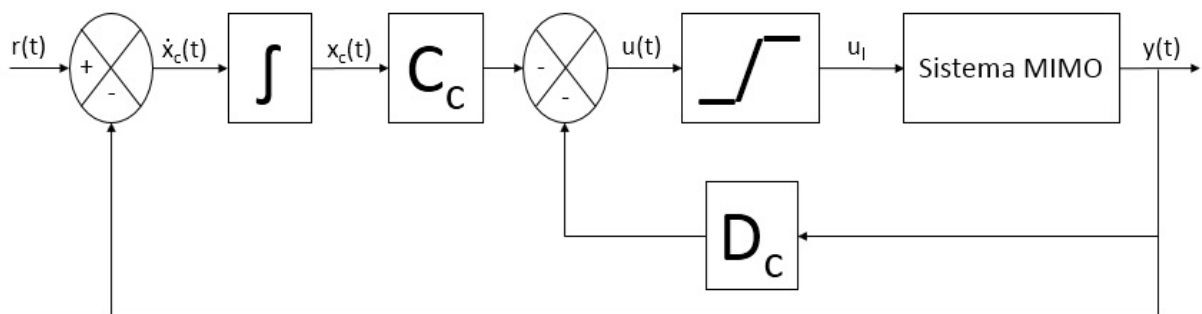


Figura 9 – Diagrama de controle

Fonte – Autoria Própria

O limitador mostrado na Figura 9 foi desenvolvido na linguagem bloco de funções em duas etapas. A primeira consiste em limitar o valor do intervalo, e na segunda, realizar a relação entre o intervalo e a tensão enviada para os atuadores. As duas etapas foram separadas em dois blocos distintos no CP, sendo relatados nos Algoritmos 1 e 2 a seguir.

Algoritmo 1: Programa do limitador

Entrada: u_{af}, u_{aq}

Saída: l_{af}, l_{aq}

se $u_{af} \geq u_l$ **então**

| $l_{af} = u_l$

senão

| **se** $u_{af} \leq -u_l$ **então**

| | $l_{af} = -u_l$

| **senão**

| | $l_{af} = u_{af}$

| **fim**

fim

se $u_{aq} \geq u_l$ **então**

| $l_{aq} = u_l$

senão

| **se** $u_{aq} \leq -u_l$ **então**

| | $l_{aq} = -u_l$

| **senão**

| | $l_{aq} = u_{aq}$

| **fim**

fim

Algoritmo 2: Relação entre saída limitada e tensão de controle

Entrada: l_{af}, l_{aq}

Saída: v_{af}, v_{aq}

$$v_{af} = \frac{l_{af} \cdot v_{span}}{2 \cdot u_l} + 6 \quad v_{aq} = \frac{l_{aq} \cdot v_{span}}{2 \cdot u_l} + 6 \quad (5.2)$$

Sendo:

l_{af} e l_{aq} o valor limitado para o controle da tensão na bomba de água fria e quente;

v_{span} se refere a diferença entre o valor superior e inferior da tensão de controle das bombas;

Com o Algoritmo 1 se consegue limitar o valor que será relacionado com a tensão de saída do controlador, os valores de entrada e saída deste algoritmo serão utilizados na função (3.24), conforme exista diferença entre entrada e saída, a função (3.24) regula a utilização do compensador.

Como a faixa de trabalho das tensões de controle será a mesma para todos os controladores, o Algoritmo 2 utiliza a informação de saída do Algoritmo 1 e relaciona com um valor de tensão entre 4 a 8V, sendo alterado a resolução de trabalho conforme o valor de limite escolhido para o algoritmo 1. Para o controlador linear foram utilizados dois valores para os limitadores, sendo 10 e 15. Na Figura 10 se verifica a relação existente entre a entrada u_{af} e u_{aq} do Algoritmo 1, com a saída V_{af} e V_{aq} do Algoritmo 2, para os valores limitantes 10 e 15.

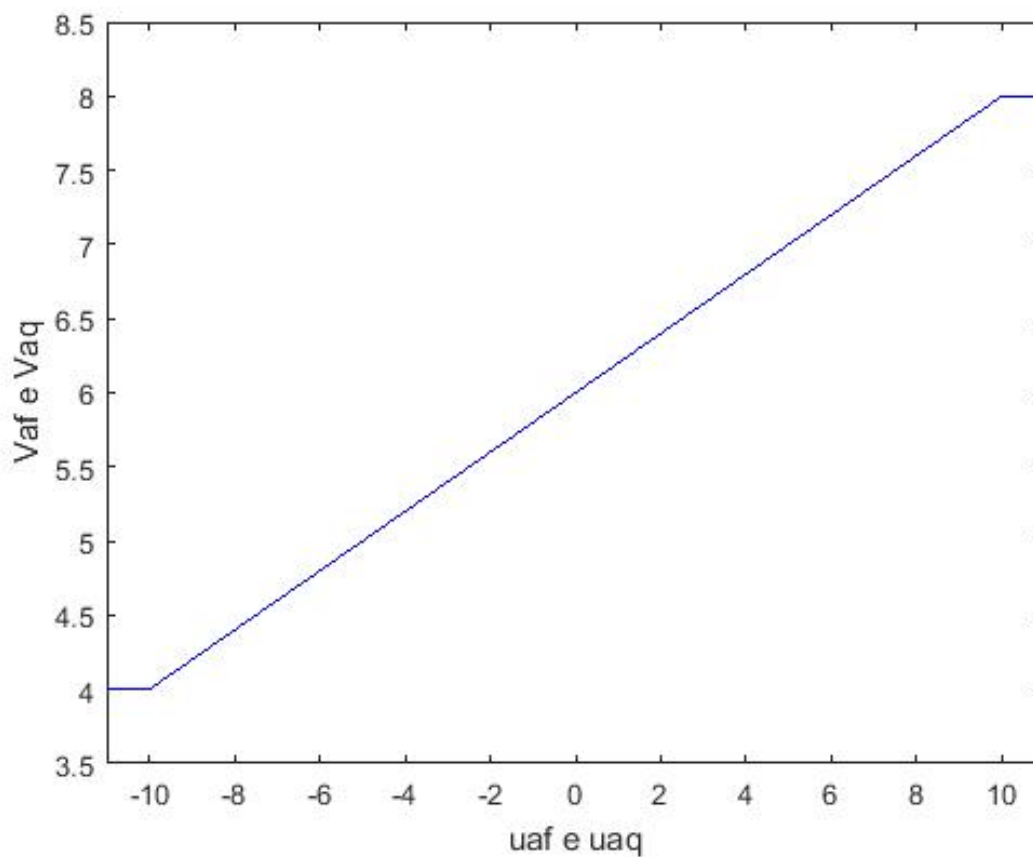
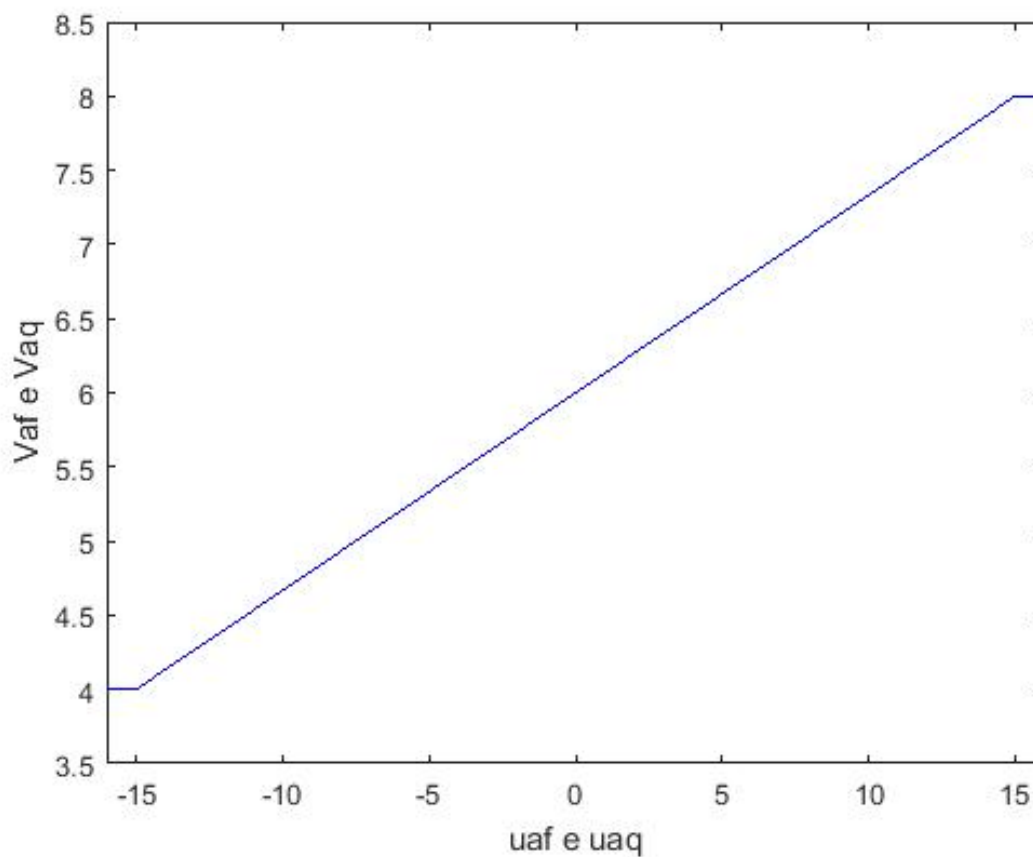
(a) Relações entre a entrada e saída do limitador $u_l = 10$ (b) Relações entre a entrada e saída do limitador $u_l = 15$

Figura 10 – Relações de entrada e saída do limitador aplicado ao controle linear

5.1.1 Ganhos do controlador linear

Com o auxílio do comando `lqr`, apresentado em (3.9), no programa Matlab, e fazendo uso das matrizes do sistema aumentado com $Q \in \mathfrak{R}^{(n+n_c) \times (n+n_c)}$, e $R \in \mathfrak{R}^{(m \times m)}$, sendo Q e R matrizes identidades, obtém-se os ganhos necessários para o sistema de controle.

Utilizando as matrizes presentes em (4.22) no sistema aumentado apresentado em (3.8), e com o auxílio do comando (3.9), foram obtidos os ganhos D_c e C_c , sendo aplicados na lei de controle (5.1), desta forma o controlador pode ser representado como:

$$\begin{aligned} \dot{x}_c(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x_c(t) + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} y(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} r(t) \\ y_c(t) &= \begin{bmatrix} 0,7026 & -0,7116 \\ 0,7116 & 0,7026 \end{bmatrix} x_c(t) + \begin{bmatrix} -1,2223 & 2,6634 \\ -1,1511 & -2,5540 \end{bmatrix} y(t) \end{aligned} \quad (5.3)$$

Como o foco do trabalho é o compensador, não foi dada atenção a escolha dos valores das matrizes Q e R , sendo utilizado a matriz identidade. Os polos do sistema em malha fechada resultantes são $-0,9162 \pm j0,4981$ e $-0,2752 \pm j0,2556$. Com a representação apresentada em (4.22) e (5.3), pode-se realizar a síntese do compensador.

5.2 SÍNTESE DO COMPENSADOR

O compensador utilizado para trabalhar com o controlador linear da Seção 5.1, foi obtido de duas formas: no primeiro momento considerando somente dois vértices de condições iniciais, que poderiam ocorrer de forma mais frequente, foram realizados testes com valores limitantes de $u_l = 2$ a $u_l = 10$, sendo que os melhores resultados foram obtidos com $u_l = 10$ e que é demonstrado neste trabalho; no segundo momento, foi considerado quatro vértices fazendo referência aos valores limitantes do sistema, sendo realizado testes com $u_l = 2$ a $u_l = 15$, sendo demonstrado somente os melhores resultados obtidos com $u_l = 15$. Tanto para $u_l = 10$ como $u_l = 15$ foi resolvido o problema de maximização através da LMI (3.34).

Com a obtenção das matrizes do sistema (4.22) e do controlador (5.3), as matrizes apresentadas em (3.26) foram construídas para serem aplicadas nas LMIs (3.31) e (3.32). Com a intenção de verificar a influência das condições iniciais possíveis no cálculo do compensador, foram consideradas a altura ($h(t)$), a temperatura ($T(t)$) e os estados do

controlador $x_h(t)$ e $x_T(t)$ aplicadas em (3.34), sendo:

$$v = \begin{bmatrix} h(t) \\ T(t) \\ x_h(t) \\ x_T(t) \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

Em que $x_h(t) = \int(r_h(t) - h(t))dt$ e $x_T(t) = \int(r_T(t) - T(t))dt$ onde $r_h(t)$ e $r_T(t)$ são, respectivamente, as referências da altura e temperatura. Considerando o valor limite do limitador $u_l = 10$, foram realizados testes utilizando as vértices (v) apresentadas em (5.5).

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 24 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 24 \\ 100 \\ 11 \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

Neste trabalho todos os resultados obtidos partiram de uma entrada em degrau, e as vértices apresentadas em (5.5) se referem ao momento antes (v_1) e depois (v_2) da aplicação deste sinal de entrada no sistema em malha fechada.

A partir da resolução das LMI's (3.31), (3.32), (3.34), considerando também diferentes valores limites de ganho máximo σ na LMI (3.36), foram computados os compensadores apresentados em (5.6) e (5.8). As LMIs (5.7) e (5.9) se referem a matriz P encontrada com base no teorema 2 em relação aos compensadores (5.6) e (5.8).

- $u_l = 10, \sigma = 1$

$$E_c = \begin{bmatrix} 0,3609 & 0,3437 \\ -0,5963 & 0,5813 \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

$$P = \begin{bmatrix} 0.0120 & -0.0005 & -0.0023 & 0.0001 \\ -0.0005 & 0.0339 & -0.0006 & -0.0052 \\ -0.0023 & -0.0006 & 0.0078 & 0.0001 \\ 0.0001 & -0.0052 & 0.0001 & 0.0078 \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

- $u_l = 10$ e $\sigma = 100$

$$E_c = \begin{bmatrix} 5,7753 & 5,4256 \\ -6,0826 & 5,7344 \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

$$P = \begin{bmatrix} 0.0229 & -0.0015 & -0.0068 & 0.0004 \\ -0.0015 & 0.0828 & -0.0016 & -0.0184 \\ -0.0068 & -0.0016 & 0.0110 & 0.0003 \\ 0.0004 & -0.0184 & 0.0003 & 0.0129 \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

A LMI (3.36) foi necessária devido as limitações apresentadas pelo CP, em que um valor muito alto de ganho do compensador fazia com que o controlador não funciona-se de forma adequada devido a limitações de processamento.

Foram realizados testes considerando os limites das grandezas físicas envolvidas, sendo a faixa da altura (h) entre 0 e 170mm, e da temperatura entre 24 e 50°C. Utilizando a informação dos limites das variáveis, foram considerados os vértices apresentados em (5.10).

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 24 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 50 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} 170 \\ 24 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_4 = \begin{bmatrix} 170 \\ 50 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

Levando em consideração os limites das variáveis apresentadas em (5.10), e o valor limite do limitador $u_l = 15$, e adotando o mesmo procedimento aplicado para encontrar o compensador com $u_l = 10$, foram encontrados os compensadores e as respectivas matrizes P :

- $u_l = 15$ e $\sigma = 1$

$$E_c = \begin{bmatrix} 0,3769 & 0,3878 \\ -0,6279 & 0,6132 \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

$$P = \begin{bmatrix} 0.0048 & -0.0004 & -0.0008 & 0.0000 \\ -0.0004 & 0.0140 & 0.0000 & -0.0021 \\ -0.0008 & 0.0000 & 0.0038 & 0.0000 \\ 0.0000 & -0.0021 & 0.0000 & 0.0035 \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

- $u_l = 15$ e $\sigma = 100$

$$E_c = \begin{bmatrix} 5,5652 & 5,8910 \\ -6,1436 & 6,3644 \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

$$P = \begin{bmatrix} 0.0083 & -0.0017 & -0.0025 & 0.0003 \\ -0.0017 & 0.0347 & 0.0003 & -0.0074 \\ -0.0025 & 0.0003 & 0.0057 & -0.0001 \\ 0.0003 & -0.0074 & -0.0001 & 0.0059 \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

- $u_l = 15$ e $\sigma = 10000$

$$E_c = \begin{bmatrix} 18,9035 & 36,7491 \\ -18,8448 & 35,6150 \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

$$P = \begin{bmatrix} 0.0142 & -0.0035 & -0.0061 & 0.0006 \\ -0.0035 & 0.0705 & 0.0001 & -0.0170 \\ -0.0061 & 0.0001 & 0.0100 & 0.0001 \\ 0.0006 & -0.0170 & 0.0001 & 0.0102 \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

Após a obtenção dos valores do compensador, foram realizadas simulações e ensaios comparando os resultados. Para a simulação foi utilizado somente um bloco limitador entre controlador e o modelo do sistema, para o ensaio prático foi utilizada a estrutura de controle ilustrada na Figura 11.

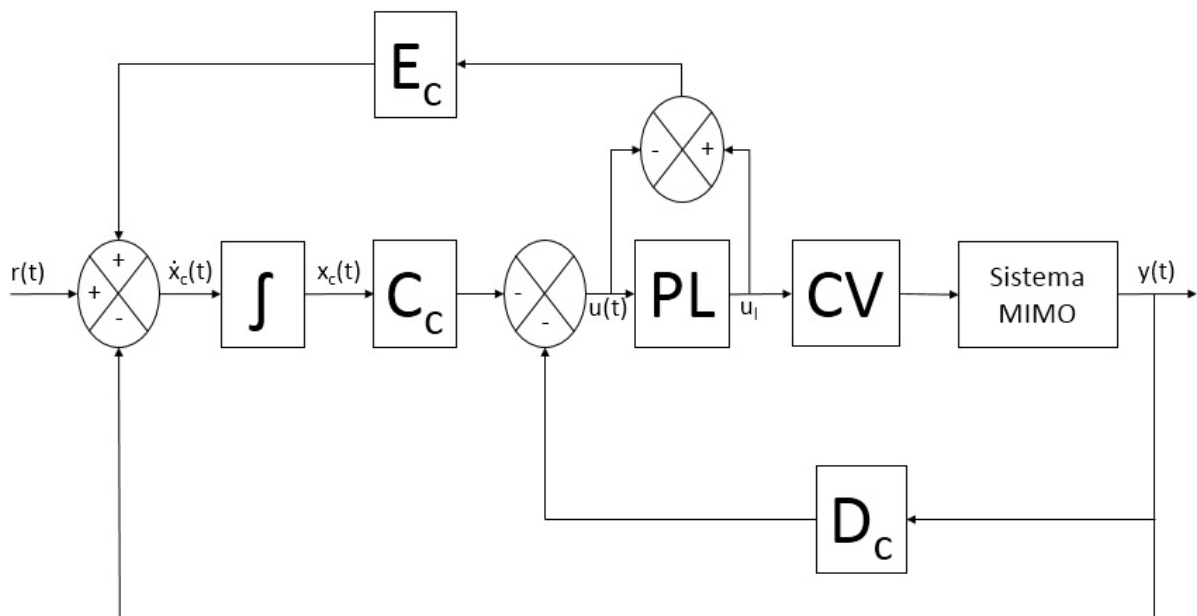


Figura 11 – Estrutura de controle aplicada aos ensaios

Fonte – Autoria Própria

O diagrama apresentado na Figura 11 foi desenvolvido no programa Labview. A informação da saída do sistema MIMO foi coletada através do módulo de entrada analógica do CP CompactRio, esta informação foi reestruturada na forma de um vetor linha, sendo

comparada com a referência e multiplicada com o bloco D_c . Os blocos D_c , C_c e E_c foram montados na forma de matrizes 2×2 . Foram utilizados dois integradores, um para cada variável do controlador. O bloco **PL** contém o Algoritmo 1, que limita o sinal de controle. As variáveis u e u_l são comparadas e, caso sejam diferentes, a informação é multiplicada pelo bloco E_c sendo realimentada antes do integrador. O bloco **CV** implementa o Algoritmo 2, em que ocorre a relação entre o valor gerado pelo controlador e o sinal aplicado aos atuadores. O valor resultante do bloco **CV** é enviado para o módulo de saída analógica, que age sobre os atuadores.

Pode-se resumir as etapas necessárias para a obtenção do compensador antiwindup para um sistema linear neste trabalho da seguinte forma:

- Obter a dinâmica do processo;
- Obter a dinâmica do controlador;
- Construir as matrizes disponíveis em (3.26);
- Verificar as condições iniciais possíveis ou valores limites das grandezas controladas;
- Resolver o problema de otimização/factibilidade (3.34) sob as restrições (3.31), (3.32) e (3.36);

Para a resolução das LMIs foram utilizados os pacotes computacionais Sedumi e Yalmip (STURM, 1999; LÖFBERG, 2004) junto com Matlab.

5.3 OBTENÇÃO DO CONTROLADOR LPV

Considerando que todos os estados do sistema estão disponíveis na saída, pode-se considerar $y(t) = x(t)$, e sendo $\dot{x}_c(t) = r(t) - x(t)$, em que $r(t)$ é a referência de seguimento, a lei de controle é dada por:

$$u(t) = - \sum_{i=1}^2 \sum_{p=1}^2 \alpha_i \iota_p D_{c_{\alpha_i, \iota_p}} x(t) - \sum_{i=1}^2 \sum_{p=1}^2 \alpha_i \iota_p C_{c_{\alpha_i, \iota_p}} x_c(t) \quad (5.17)$$

Sendo α_i e ι_p parâmetros variantes no tempo, definidos conforme (3.12) e (4.25), e que dependem tanto da altura $h(t)$ quanto da temperatura $T(t)$. O diagrama de blocos que representa o sistema é dado por:

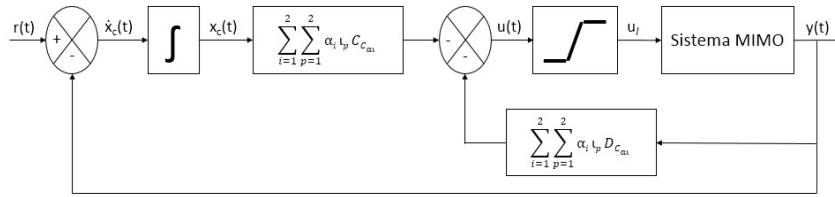


Figura 12 – Diagrama do controle LPV

Fonte – Autoria Própria

O limitador apresentado na figura 12 tem a mesma estrutura do capítulo 5.1 sendo utilizado dois algoritmos em blocos distintos no controlador.

5.3.1 Ganhos do controlador LPV

A matriz $B_{wi}(\theta(t))$ presente na equação (3.17) e as matrizes $C_{zi}(\theta(t))$, $D_{zui}(\theta(t))$ e $D_{zwi}(\theta(t))$ presentes na equação (3.18), foram obtidas do trabalho de Andrade (2016), em que o autor aplica a técnica da transformação fracional linear para obter tais matrizes. Tal técnica não será tratada nesta dissertação, podendo ser consultado o trabalho citado neste parágrafo. Os valores das matrizes citadas são:

$$B_{wi}(\theta(t)) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,539 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

$$C_{zi}(\theta(t)) = \begin{bmatrix} -2,161 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0,2885 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

$$D_{zui}(\theta(t)) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

$$D_{zwi}(\theta(t)) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

O controlador dependente de parâmetros é sintetizado pela aplicação do Teorema 1. Neste teorema, é proposta a condição (3.20) que depende da variável $\dot{P}_i(\theta(t))$. Tal derivada

pode ser computada aplicando, por exemplo, o procedimento apresentado em [Agulhari, Oliveira e Peres \(2012\)](#), sendo necessário o conhecimento dos limitantes das taxas de variação dos parâmetros $\theta(t)$. Neste trabalho, a condição (3.20), bem como o cômputo de $\dot{P}_i(\theta(t))$, são programados utilizando o pacote computacional ROLMIP ([AGULHARI; OLIVEIRA; PERES, 2012](#)), considerando os limitantes

$$P_{lim} = \begin{bmatrix} -10 & 10 \\ -10 & 10 \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

Substituindo as matrizes (4.28), (4.29), (5.18) a (5.21) na LMI (3.20), e considerando $\zeta = 1$, foi possível obter os ganhos do controlador $D_c(\theta(t))$ e $C_c(\theta(t))$ em que:

$$\begin{aligned} D_c(\alpha, \iota) = & \alpha_1 \iota_1 \begin{bmatrix} -6,8096 & -0,48576 \\ -0,01472 & -0,15631 \end{bmatrix} + \alpha_2 \iota_1 \begin{bmatrix} 0,011156 & 0,16712 \\ -6,4657 & -0,75489 \end{bmatrix} \\ & + \alpha_1 \iota_2 \begin{bmatrix} -6,8359 & -1,2636 \\ -0,034863 & -0,17323 \end{bmatrix} + \alpha_2 \iota_2 \begin{bmatrix} 0,028885 & 0,19902 \\ -6,5136 & -1,4671 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.23)$$

$$\begin{aligned} C_c(\alpha, \iota) = & \alpha_1 \iota_1 \begin{bmatrix} 2,7224 & 0,3285 \\ 0,059894 & 0,095394 \end{bmatrix} + \alpha_2 \iota_1 \begin{bmatrix} -0,065282 & -0,10488 \\ 2,6908 & 0,49689 \end{bmatrix} \\ & + \alpha_1 \iota_2 \begin{bmatrix} 3,0045 & 0,76703 \\ 0,078961 & 0,11149 \end{bmatrix} + \alpha_2 \iota_2 \begin{bmatrix} -0,09529 & -0,13389 \\ 2,976 & 0,93168 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.24)$$

Para a resolução da LMI (3.20) foram utilizados os pacotes computacionais SEDUMI e ROLMIP ([STURM, 1999; AGULHARI; OLIVEIRA; PERES, 2012](#)) em conjunto com o programa MATLAB.

Com as informações do controlador sendo obtidas, e do sistema LPV em (4.23), pode-se construir as matrizes apresentadas em (3.26) dependente de parâmetros sendo:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\theta(\mathbf{t})) &= \begin{bmatrix} A(\theta(t)) + B(\theta(t))D_c(\theta(t))C(\theta(t)) & B(\theta(t))C_c(\theta(t)) \\ B_c(\theta(t))C(\theta(t)) & A_c(\theta(t)) \end{bmatrix} \\ \mathbf{B}(\theta(\mathbf{t})) &= \hat{B}(\theta(t)) \\ \mathbf{R}(\theta(\mathbf{t})) &= \begin{bmatrix} 0 \\ I_{nc} \end{bmatrix} \\ \mathbf{K}(\theta(\mathbf{t})) &= [D_c(\theta(t))C(\theta(t)) \quad C_c(\theta(t))] \end{aligned} \quad (5.25)$$

Construída as matrizes apresentadas em (5.25) pode-se obter o compensador para o sistema em malha fechada, como apresentado na seção a seguir.

5.4 OBTENÇÃO DO COMPENSADOR SOBRE SISTEMA LPV

Para a aplicação do compensador sobre o sistema com a modelagem LPV, será necessário realizar modificações nas LMI's (3.31) e (3.32), para que seja possível obter compensadores antiwindup para sistemas LPV. Tal modificação é apresentada no Teorema 3.

Teorema 3 *Se existir uma matriz simétrica definida positiva $W(\theta(t)) \in \mathbb{R}^{(n+n_c) \times (n+n_c)}$, matrizes $Y \in \mathbb{R}^{m \times (n+n_c)}$ e $Z \in \mathbb{R}^{n_c \times m}$, e uma matriz diagonal definida positiva $S \in \mathbb{R}^{m \times m}$ que satisfaçam as condições*

$$\begin{bmatrix} W(\theta(t))\mathbf{A}'(\theta(t)) + \mathbf{A}(\theta(t))W(\theta(t)) - \dot{W}(\theta(t)) & \mathbf{B}(\theta(t))S + RZ(\theta(t)) - Y'(\theta(t)) \\ \star & -2S \end{bmatrix} < 0, \quad (5.26)$$

$$\begin{bmatrix} W(\theta(t)) & W(\theta(t))K'_{(i)}(\theta(t)) - Y'_{(i)}(\theta(t)) \\ \star & u_{\ell(i)}^2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad (5.27)$$

então o compensador antiwindup $E_c(\theta(t)) = Z(\theta(t))S^{-1}$ garante que o elipsoide variante no tempo $\mathcal{E}(P(\theta(t))) = \{\xi \in \mathbb{R}^{n+n_c}; \xi'P(\theta(t))\xi \leq 1\}$, com $P(\theta(t)) = W^{-1}(\theta(t))$, é uma região de estabilidade assintótica para o sistema (3.23) quando dependente de parâmetros.

Prova: A condição (5.27) implica que o conjunto $\mathcal{E}(P(\theta(t)))$ está contido no conjunto poliedral \mathcal{S} , definido em (3.28), com $G = Y(\theta(t))P(\theta(t))$. Portanto, de acordo com o Lema 1, para todo $\xi(t) \in \mathcal{E}(P(\theta(t)))$ e para todo $\theta(t) \in \Lambda_N$, a função

$$\psi(K(\theta(t))\xi(t)) = K(\theta(t))\xi(t) - \text{sat}(K(\theta(t))\xi(t))$$

satisfaz a condição de setor (3.29).

Considere a função de Lyapunov $V(\xi(t))$ dada por

$$V(\xi(t)) = \xi(t)'P(\theta(t))\xi(t), \quad (5.28)$$

cuja derivada temporal resulta em

$$\begin{aligned} \dot{V}(\xi(t)) &= \xi(t)'(\mathbf{A}'(\theta(t))P(\theta(t)) + P(\theta(t))\mathbf{A}(\theta(t)) + \dot{P}(\theta(t)))\xi(t) \\ &\quad - 2\xi(t)'P(\theta(t))(\mathbf{B}(\theta(t)) + RE_c(\theta(t)))\psi(K(\theta(t))\xi(t)). \end{aligned} \quad (5.29)$$

Pela aplicação da condição de setor (3.29), tem-se que

$$\dot{V}(\xi(t)) \leq \dot{V}(\xi(t)) - 2\psi(K(\theta(t))\xi(t))'T\psi(K(\theta(t))\xi(t)) + 2\psi(K(\theta(t))\xi(t))'TG(\theta(t))\xi(t) \quad (5.30)$$

para qualquer $\xi(t) \in \mathcal{E}(P(\theta(t)))$.

O lado direito da desigualdade (5.30) pode ser reescrito como

$$\begin{bmatrix} \xi(t) \\ -\psi(K(\theta(t))\xi(t)) \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} M_1(\theta(t)) & M_2(\theta(t)) \\ M_2'(\theta(t)) & M_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(t) \\ -\psi(K(\alpha(t))\xi(t)) \end{bmatrix}, \quad (5.31)$$

sendo

$$\begin{aligned} M_1(\theta(t)) &= A'(\theta(t))P(\theta(t)) + P(\theta(t))A(\theta(t)) + \dot{P}(\theta(t)) \\ M_2(\theta(t)) &= P(\theta(t))B(\theta(t)) + P(\theta(t))RE_c(\theta(t)) - G'(\theta(t))T \\ M_3 &= -2T \end{aligned}$$

A multiplicação de (5.26) à esquerda e à direita por

$$\begin{bmatrix} P(\theta(t)) & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix},$$

seguida das substituições

$$W(\theta(t)) = P^{-1}(\theta(t)), \quad S = T^{-1}, \quad Z(\theta(t)) = E_c(\theta(t))T^{-1}$$

resulta em¹

$$\begin{bmatrix} M_1(\theta(t)) & M_2(\theta(t)) \\ M_2'(\theta(t)) & M_3 \end{bmatrix} < 0.$$

Portanto, se a condição (5.26) é satisfeita, então $\dot{V}(\xi(t)) < 0$. Como tal afirmação é válida $\forall \xi(t) \in \mathcal{E}(P(\theta(t))), \xi(t) \neq 0, \forall \theta(t) \in \Lambda_N$, então $\mathcal{E}(P(\theta(t)))$ é uma região contrativa e positivamente invariante para o sistema (3.27), concluindo a prova. ■

As LMI's (5.26) e (5.27) precisam ser executadas para cada combinação de (α, ι) . No apêndice B é demonstrado como se realiza este procedimento.

Para o sistema LPV (4.23) foram obtidos dois compensadores, um sendo dependente e o outro sem a dependência de parâmetros. Durante os ensaios verificou-se que o valor do limitador $u_l = 15$ resultou em saturações constantes, não sendo possível verificar uma melhora perceptível do sistema na presença do compensador, mesmo com as LMIs dando factíveis. Com $u_l = 25$ não havia saturação, portanto o compensador não era necessário para os ensaios realizados, por estes motivos, os dois compensadores que foram encontrados utilizaram $u_l = 20$ no algoritmo para cálculo do compensador e $\sigma = 100^2$.

Sendo $\theta(t) \triangleq [\theta_1(t), \theta_2(t)]$, para o compensador sem a dependência foi considerado W e Z independentes dos parâmetros (portanto $\dot{W} = 0$) e Y dependente apenas de θ_1 , pois com Y independente não foi possível calcular o compensador. Os parâmetros $\theta_i(t)$,

¹ Note que $W^{-1}(\theta(t))\dot{W}(\theta(t))W^{-1}(\theta(t)) = -\dot{P}(\theta(t))$.

foram definidos nas relações apresentadas em (4.24). Com a aplicação das LMI's (5.26) e (5.27) foi possível obter o compensador (5.32). Em (5.33) é possível ver a matriz P resultante pela utilização do teorema 3.

$$E_c = \begin{bmatrix} -18,3638 & -8,8078 \\ -6,5737 & -6,3511 \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

$$P = 10^{12} \begin{bmatrix} 0,0432 & 0,1070 & -0,1665 & -0,2034 \\ 0,1070 & 3,8864 & -0,5183 & -1,4926 \\ -0,1665 & -0,5183 & 0,7204 & 0,8978 \\ -0,2034 & -1,4926 & 0,8978 & 1,4618 \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

Para a obtenção do compensador dependente de parâmetros, foi considerado $W(\theta_1(t), \theta_2(t))$, $Z(\theta_1(t), \theta_2(t))$, $Y(\theta_1(t), 0)$ e $\dot{W}(\theta_1(t), \theta_2(t))$. O cálculo de $\dot{W}(\theta_1(t), \theta_2(t))$ foi realizado utilizando o pacote computacional ROLMIP (AGULHARI; OLIVEIRA; PERES, 2012) precisando, para isso, dos valores limitantes

$$\dot{W}_{lim} = \begin{bmatrix} -0,1 & 0,1 \\ -0,1 & 0,1 \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

Com a aplicação das LMI's (5.26) e (5.27) foi possível obter o compensador (5.35), sendo a $W(\alpha(t), \iota(t))$ resultante mostrada em (5.36).

$$E_c(\alpha(t), \iota(t)) = \alpha_1 \iota_1 \begin{bmatrix} -9,61173 & -40,1951 \\ -3,39998 & 11,3682 \end{bmatrix} + \alpha_2 \iota_1 \begin{bmatrix} 10,9796 & -15,0699 \\ -11,8030 & -1,51714 \end{bmatrix} \\ + \alpha_1 \iota_2 \begin{bmatrix} -17,1979 & 17,3909 \\ 0,661788 & -18,1034 \end{bmatrix} + \alpha_2 \iota_2 \begin{bmatrix} -38,7993 & -11,3980 \\ 10,9867 & -4,1285 \end{bmatrix} \quad (5.35)$$

$$\begin{aligned}
W(\alpha(t), \iota(t)) = & \\
& \alpha_{1l_1} \begin{bmatrix} 7.9298 \cdot 10^{-10} & -2.1254 \cdot 10^{-12} & 2.1335 \cdot 10^{-10} & -1.951 \cdot 10^{-11} \\ -2.1254 \cdot 10^{-12} & 9.2767 \cdot 10^{-13} & -2.011 \cdot 10^{-12} & 1.8023 \cdot 10^{-12} \\ 2.1335 \cdot 10^{-10} & -2.011 \cdot 10^{-12} & 7.09 \cdot 10^{-11} & -1.4615 \cdot 10^{-11} \\ -1.951 \cdot 10^{-11} & 1.8023 \cdot 10^{-12} & -1.4615 \cdot 10^{-11} & 8.5491 \cdot 10^{-12} \end{bmatrix} \\
& + \alpha_{2l_1} \begin{bmatrix} 1.244 \cdot 10^{-09} & 1.9899 \cdot 10^{-12} & 3.0169 \cdot 10^{-10} & -9.2844 \cdot 10^{-12} \\ 1.9899 \cdot 10^{-12} & 1.0095 \cdot 10^{-12} & -8.3453 \cdot 10^{-13} & 1.7843 \cdot 10^{-12} \\ 3.0169 \cdot 10^{-10} & -8.3453 \cdot 10^{-13} & 8.9355 \cdot 10^{-11} & -1.3576 \cdot 10^{-11} \\ -9.2844 \cdot 10^{-12} & 1.7843 \cdot 10^{-12} & -1.3576 \cdot 10^{-11} & 9.8384 \cdot 10^{-12} \end{bmatrix} \\
& + \alpha_{1l_2} \begin{bmatrix} 4.7454 \cdot 10^{-10} & -2.4256 \cdot 10^{-12} & 1.3476 \cdot 10^{-10} & -1.1369 \cdot 10^{-11} \\ -2.4256 \cdot 10^{-12} & 4.7987 \cdot 10^{-13} & -2.31 \cdot 10^{-12} & 1.2663 \cdot 10^{-12} \\ 1.3476 \cdot 10^{-10} & -2.31 \cdot 10^{-12} & 5.0696 \cdot 10^{-11} & -1.1358 \cdot 10^{-11} \\ -1.1369 \cdot 10^{-11} & 1.2663 \cdot 10^{-12} & -1.1358 \cdot 10^{-11} & 7.1627 \cdot 10^{-12} \end{bmatrix} \\
& + \alpha_{2l_2} \begin{bmatrix} 6.799 \cdot 10^{-10} & 4.0198 \cdot 10^{-13} & 1.7666 \cdot 10^{-10} & -1.0107 \cdot 10^{-11} \\ 4.0198 \cdot 10^{-13} & 3.2524 \cdot 10^{-13} & -9.0627 \cdot 10^{-13} & 8.9158 \cdot 10^{-13} \\ 1.7666 \cdot 10^{-10} & -9.0627 \cdot 10^{-13} & 5.3488 \cdot 10^{-11} & -7.7731 \cdot 10^{-12} \\ -1.0107 \cdot 10^{-11} & 8.9158 \cdot 10^{-13} & -7.7731 \cdot 10^{-12} & 4.7716 \cdot 10^{-12} \end{bmatrix} \quad (5.36)
\end{aligned}$$

Após obtidos os valores do compensador, foram realizados ensaios comparando os resultados. Para o ensaio foi utilizado a estrutura de controle ilustrado na Figura 13. Nesta estrutura os ganhos do controlador e compensador são modificados conforme a altura e temperatura variam. Os blocos **PL** e **CV** são os mesmos apresentados na Figura 11.

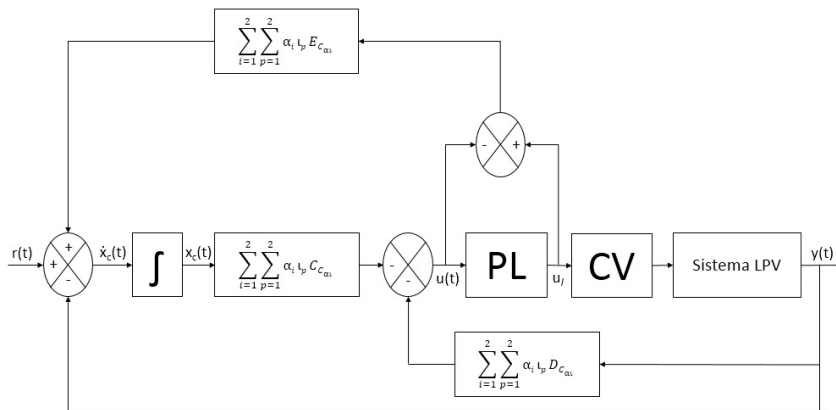


Figura 13 – Estrutura de controle aplicado ao sistema com parâmetros variantes

Fonte – Autoria Própria

Pode-se resumir as etapas necessárias para a obtenção do compensador antiwindup desta seção da seguinte forma:

- Obter a dinâmica do sistema LPV ou quasi-LPV;
- Obter a dinâmica do controlador;
- Construir as matrizes disponíveis em (5.25);
- Resolver as restrições (5.26) e (5.27);

Para a resolução das LMIs foi utilizado os pacotes computacionais SEDUMI e ROLMIP (STURM, 1999; AGULHARI; OLIVEIRA; PERES, 2012) junto com Matlab.

6 RESULTADOS FINAIS

6.1 RESULTADOS SOBRE O SISTEMA LINEAR

Primeiramente, foram realizadas simulações com o sistema em malha fechada considerando a presença e ausência do compensador antiwindup na malha de controle. Com o limitador em 10, a saída do controlador permaneceu saturado durante 90 segundos; ao se utilizar os ganhos encontrados em (5.6) e (5.8), o tempo de saturação foi reduzido para 32 segundos em ambos os casos. Esta diferença pode ser vista na Figura 14.

No ensaio prático sem a utilização do compensador, foi observado um comportamento semelhante à simulação, surgindo saturações durante 90 segundos. Considerando a aplicação dos compensadores (5.6) e (5.8) na malha de controle, o melhor resultado foi observado com o compensador (5.8), em que a saturação possui uma duração de 63 segundos, e voltando a apresentar uma breve saturação em 195 segundos, conforme mostrado na Figura 15.

Para os resultados da simulação sem o compensador, considerando o limitador em $u_l = 15$, o tempo de saturação diminuiu para 57 segundos. Ao utilizar o compensador independente do limite aplicado (compensadores (5.11), (5.13) e (5.15)), houve uma redução para 18 segundos conforme pode se verificar na Figura 16.

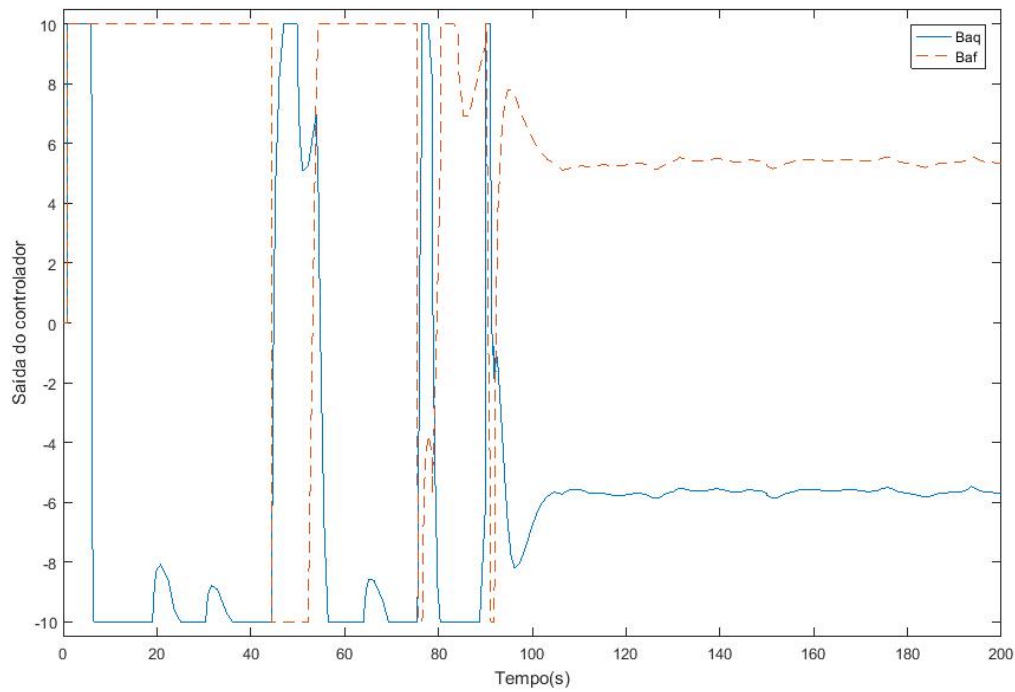
Durante o ensaio prático, a ausência do compensador resultou em saturações de até 90 segundos, voltando a saturar brevemente em 168. Ao utilizar o compensador E_c apresentado em (5.15), que foi o compensador que apresentou o melhor resultado, o tempo de saturação foi reduzido para 23 segundos, conforme apresentado na Figura 17.

Com a aplicação do antiwindup, além da redução no tempo de saturação, se verifica a diminuição de ruídos no controle do nível e da temperatura, como pode ser comparado na Figura 18, devido à menor oscilação dos atuadores e à operação predominante na região linear dos atuadores.

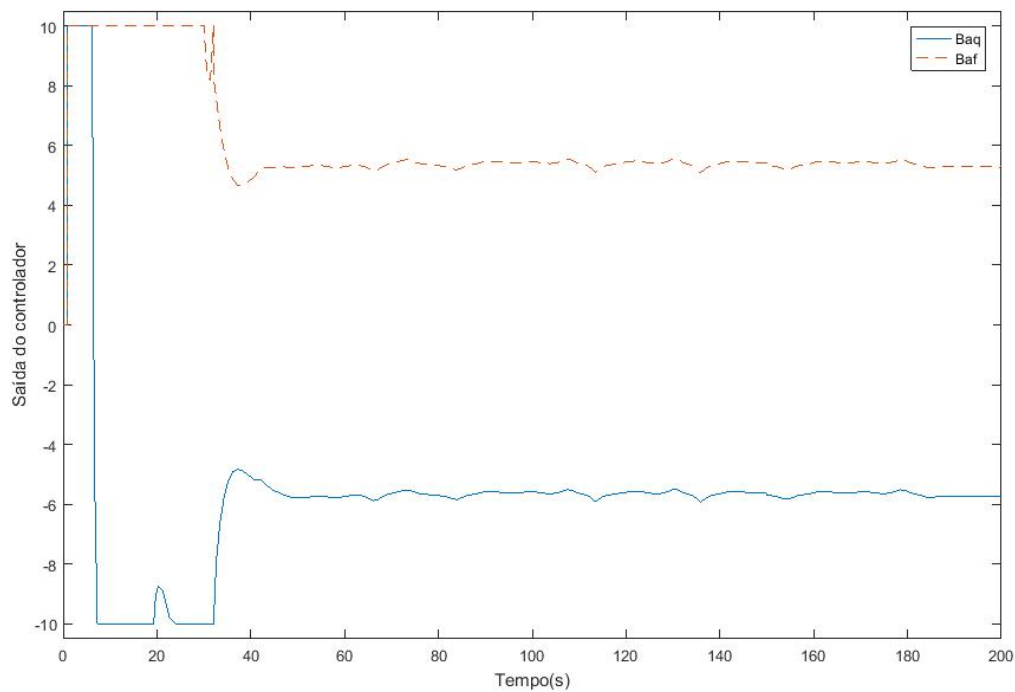
Mediante os resultados encontrados, verifica-se a importância do compensador atuando junto com controladores lineares, garantindo uma recuperação mais ágil do sistema de controle.

6.2 RESULTADOS SOBRE O SISTEMA QUASI-LPV

Todos os ensaios foram realizados considerando o limitador $u_l = 20$ e utilizando os mesmos controladores apresentados em (5.23) e (5.24). Considerando o controle do



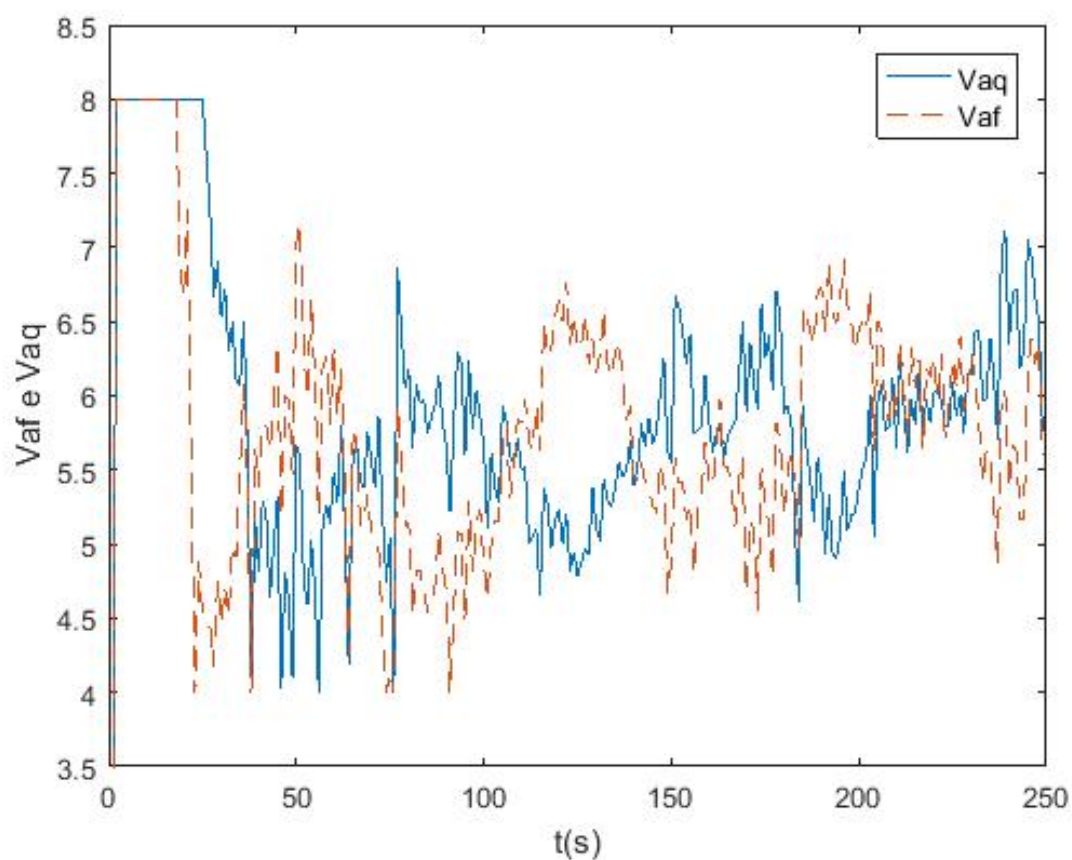
(a) Resposta sem compensador



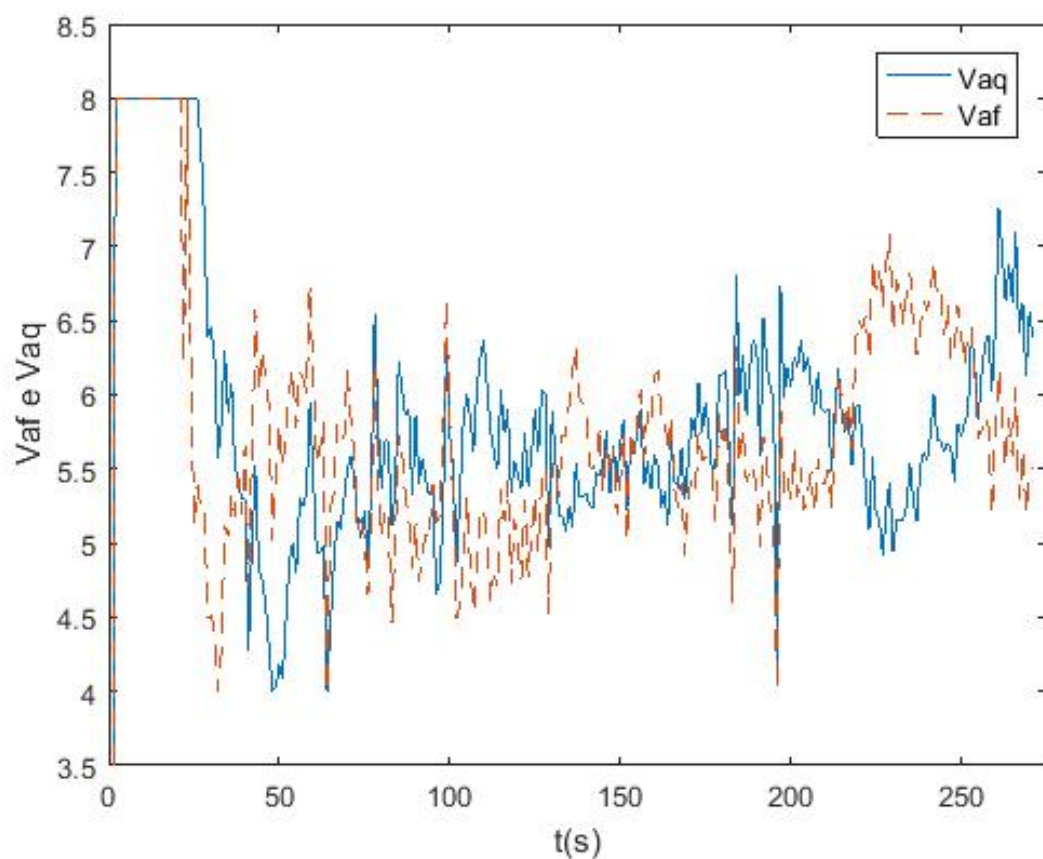
(b) Resposta com os compensadores (5.6) e (5.8)

Figura 14 – Resposta obtida durante simulação na saída do limitador = 10

Fonte – Autoria Própria

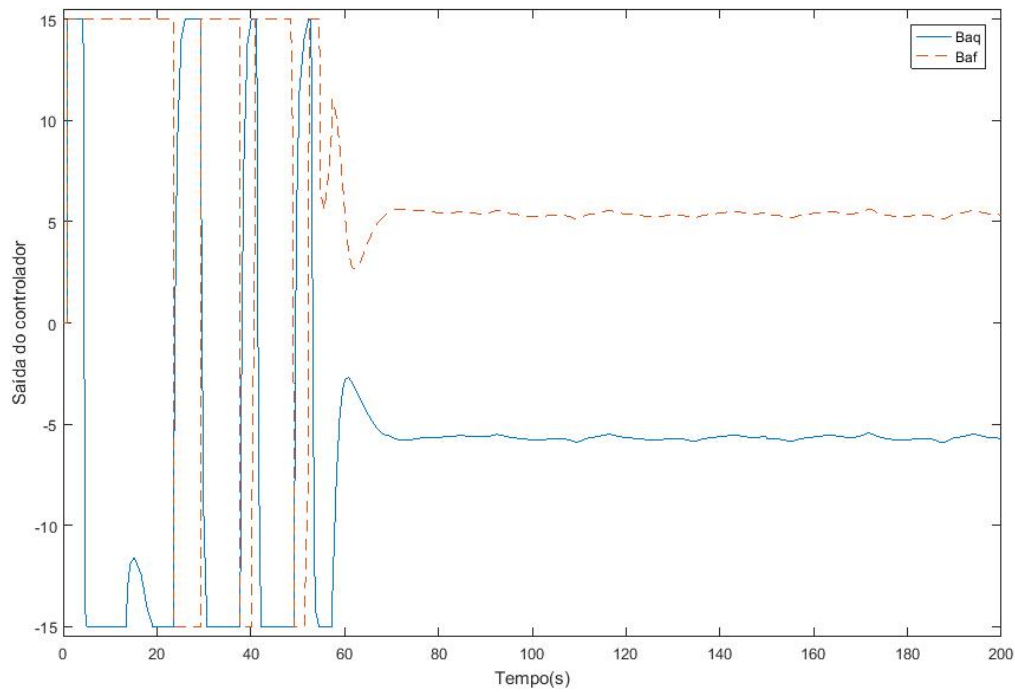


(a) Resposta sem compensador

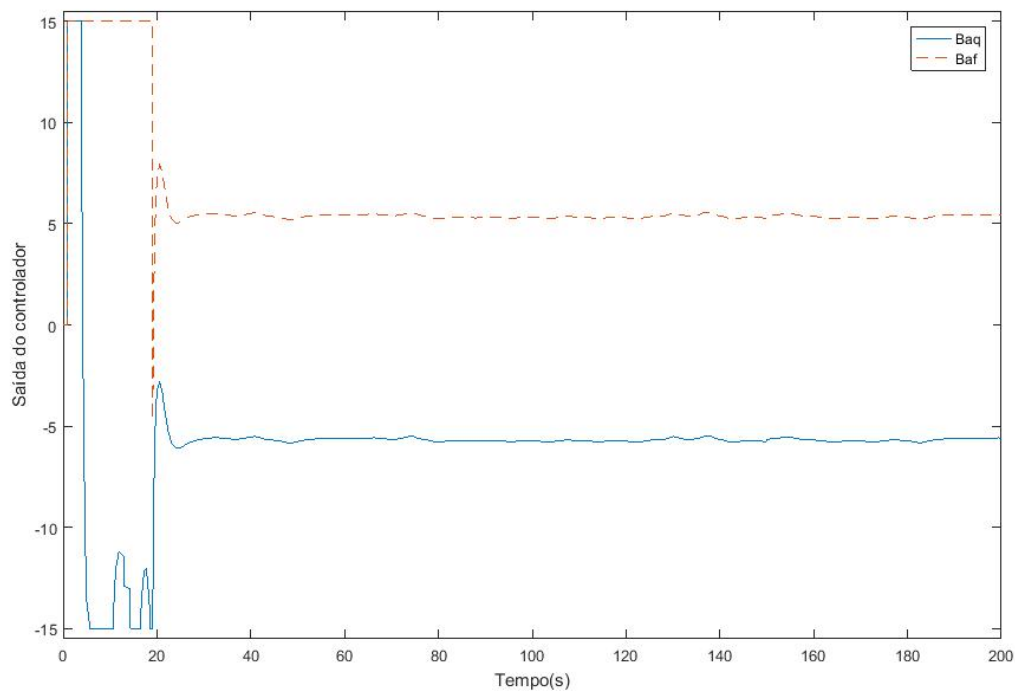


(b) Resposta com o compensador (5.8)

Figura 15 – Resposta obtida durante ensaio na saída do limitador = 10



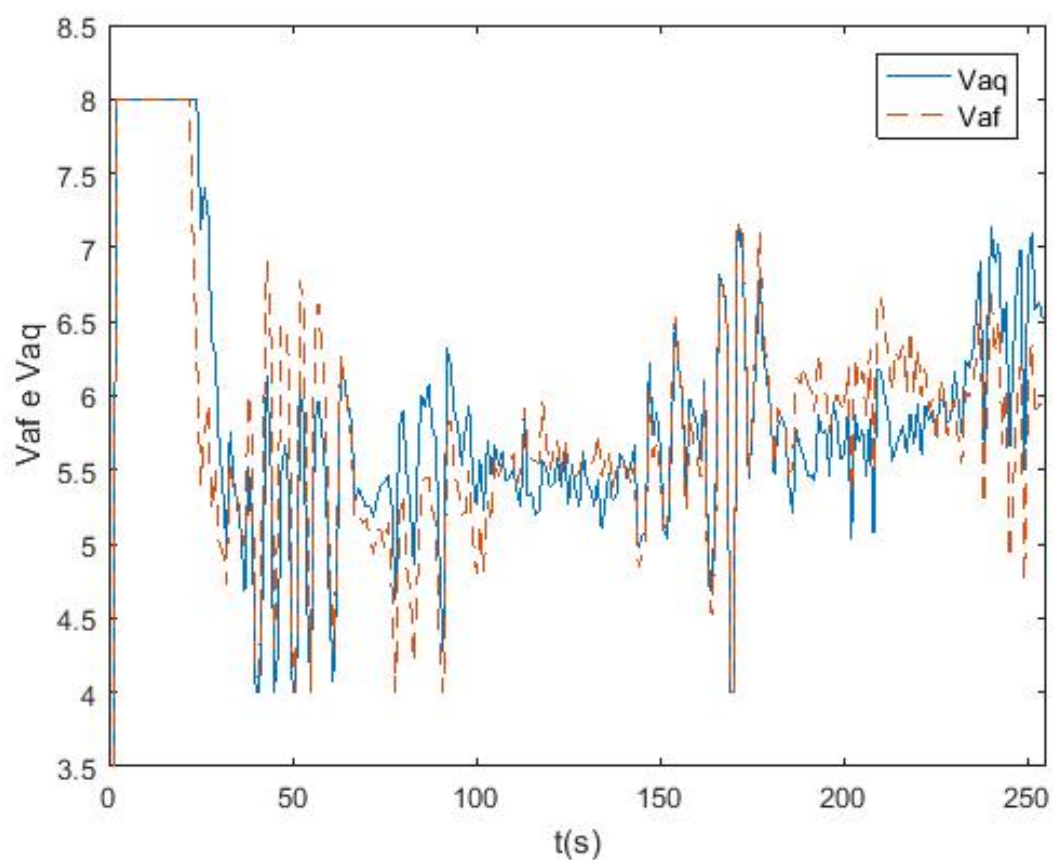
(a) Resposta sem compensador



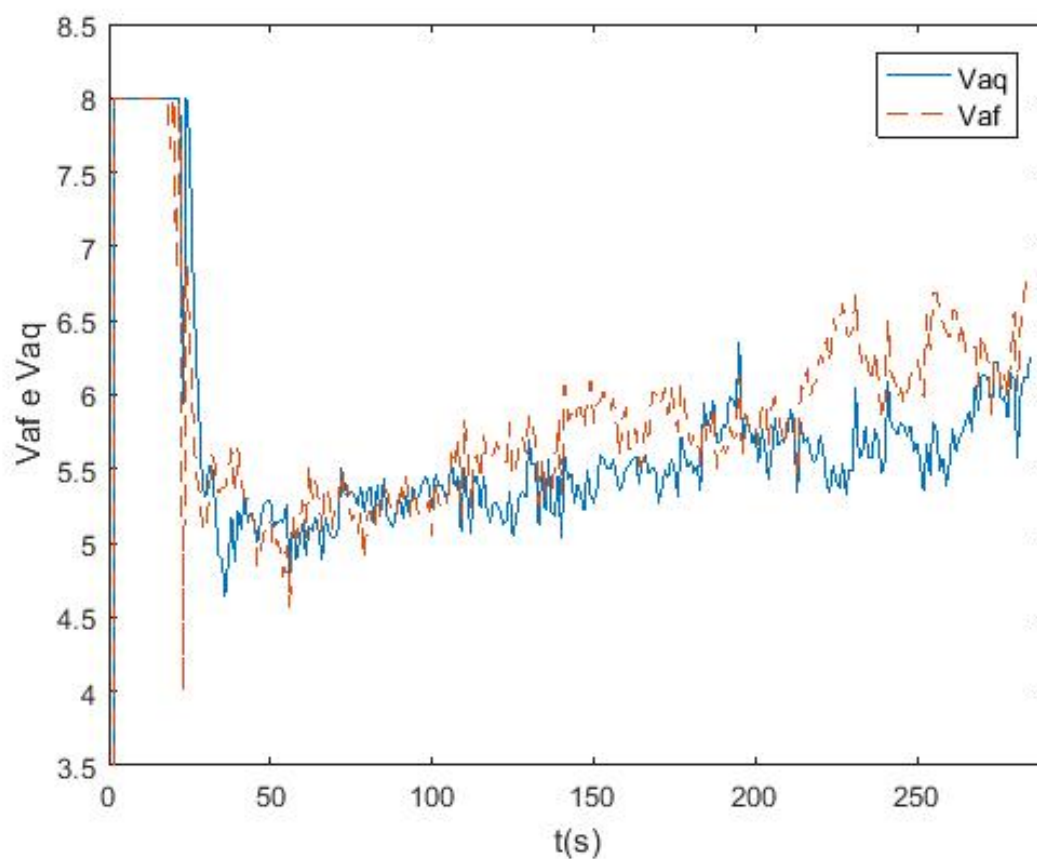
(b) Resposta com os compensadores (5.11), (5.13) e (5.15)

Figura 16 – Resposta obtida durante simulação na saída do limitador = 15

Fonte – Autoria Própria

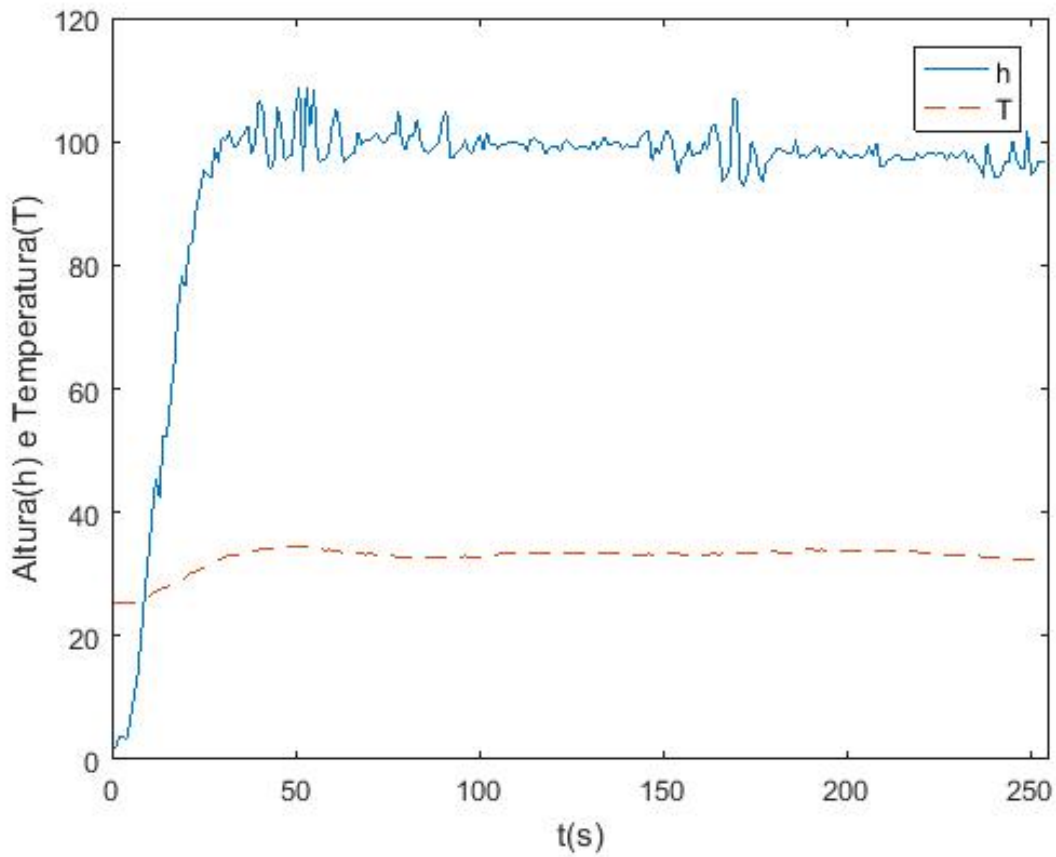


(a) Resposta sem compensador

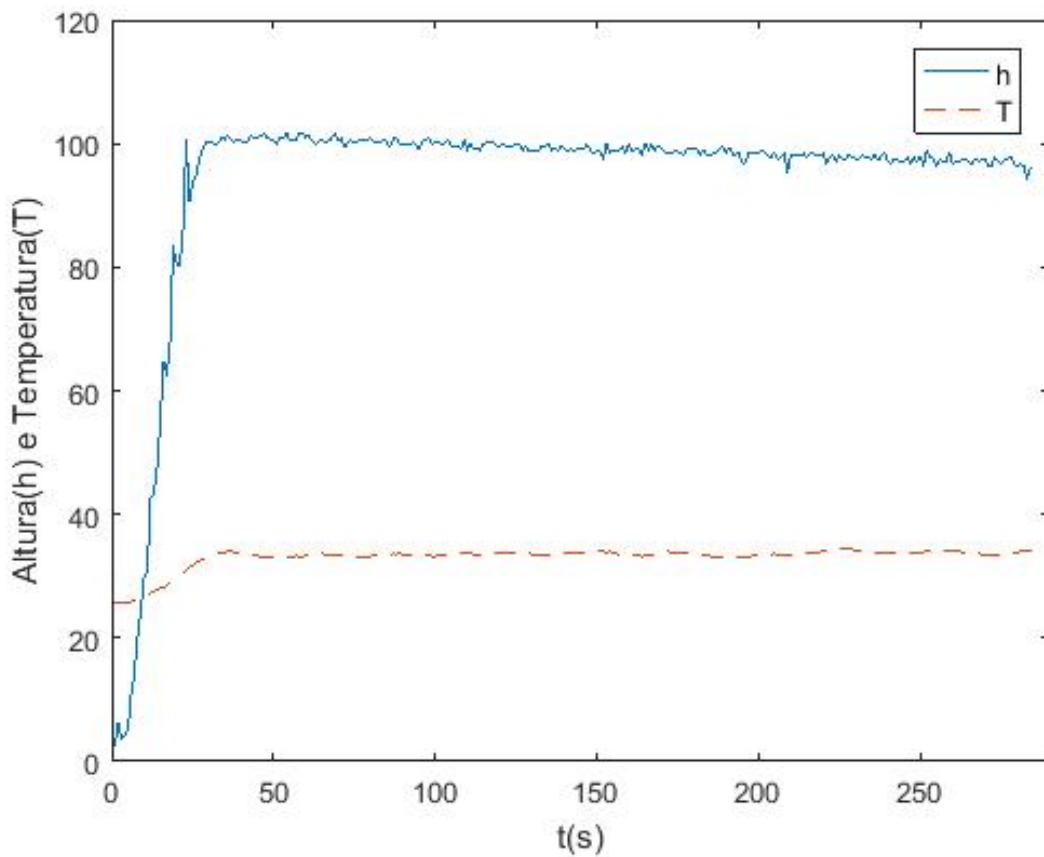


(b) Resposta com o compensador (5.15)

Figura 17 – Resposta obtida durante ensaio na saída do limitador = 15



(a) Resposta sem compensador



(b) Resposta com compensador

Figura 18 – Nível e temperatura com limitador = 15

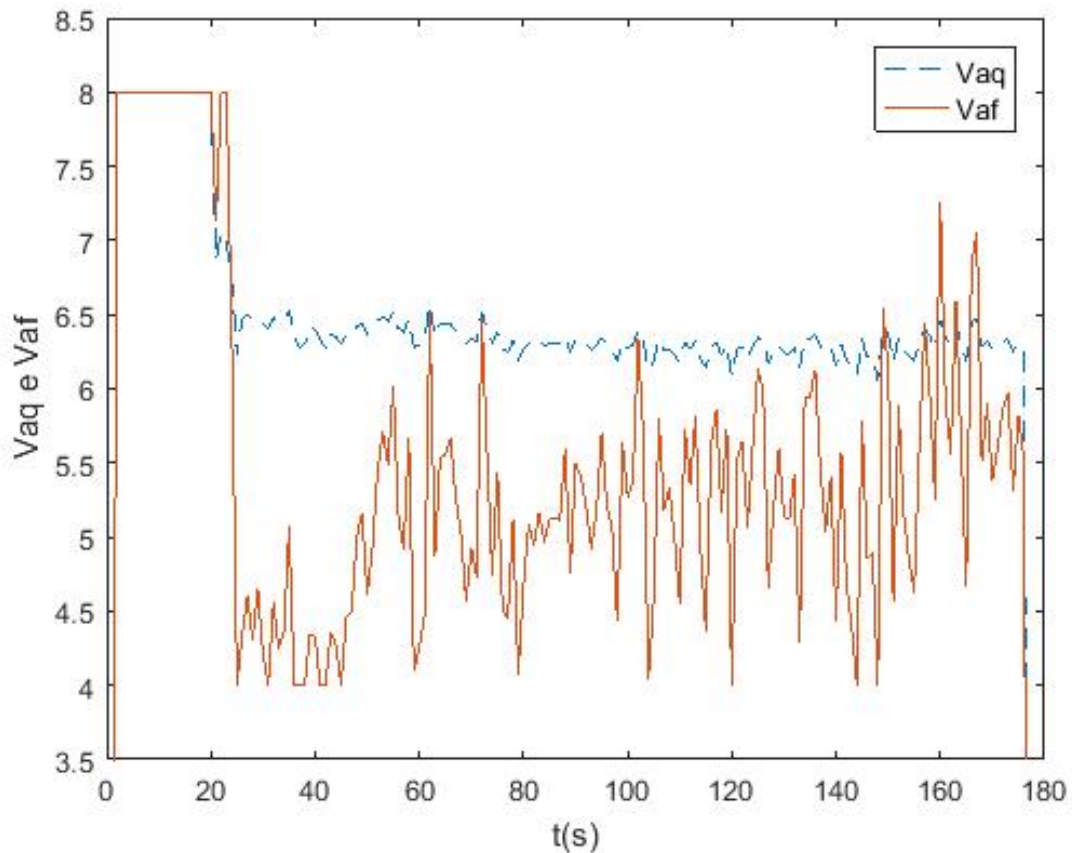


Figura 19 – Saturações na ausência do compensador

Fonte – Autoria Própria

sistema sem o compensador ocorreram saturações nas tensões de controle enviadas para as bombas B_{af} e B_{aq} , de forma constante até 45 segundos, voltando a surgir de forma menos frequente até o instante de 148 segundos, como observado na Figura 19.

Ao se utilizar o compensador estático (5.32), sem a dependência de parâmetros, as saturações foram constantes até o instante de 45 segundos, voltando a surgir no instante de 68 segundos, conforme mostra a Figura 20. Mesmo que a duração da saturação inicial tenha sido igual ao da Figura 19, nota-se claramente que houve menos saturações durante o mesmo intervalo de tempo, com a utilização do compensador, ao se comparar a Figura 19 com a 20.

Ao se considerar o compensador apresentado em (5.34), houve diminuição das saturações em relação ao da Figura 19, mas não foi mais eficaz que o compensador estático (5.32). Isto pode ser devido ao maior conservadorismo adotado ao calcular $\dot{W}(\theta(t))$ com os limites apresentados em (5.34), devido a pequena faixa de variação da região de estabilidade considerada. Pode-se observar pelos resultados da Figura 21 que as saturações foram constantes até o instante de 44 segundos, sendo menos frequentes até o instante de 93 segundos.

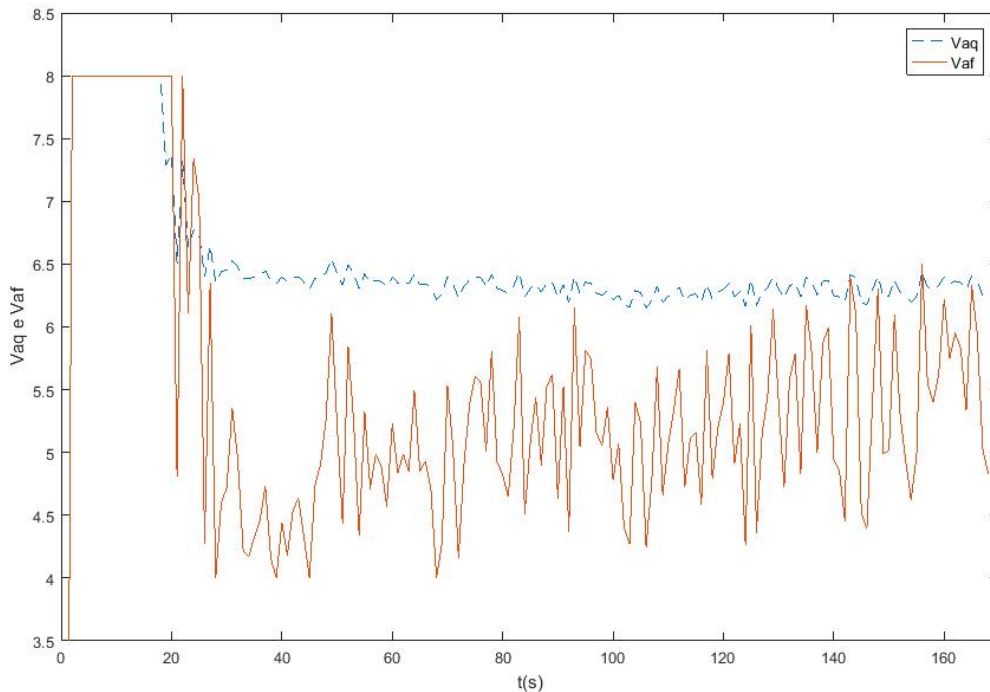


Figura 20 – Saturações com a utilização do compensador estático (5.32).

Fonte – Autoria Própria

Diferente do sistema linear, não é perceptível a diminuição de perturbações com a utilização do compensador sobre as variáveis altura($h(t)$) e temperatura($T(t)$) ao se comparar os resultados obtidos utilizando somente o controlador, Figura 22a, e o efeito combinado com o compensador (5.32), Figura 22b, considerando as mesmas referências sendo 85mm para a altura e 40°C para a temperatura.

Com os resultados obtidos, verifica-se que o compensador foi eficaz ao diminuir o tempo em que o sistema quasi-LPV fica saturado, podendo o compensador ser escolhido entre estático e dependente de parâmetros conforme a estratégia de controle utilizada, garantindo assim maior tempo dos atuadores trabalhando na região linear de operação.

Em resumo, tanto os resultados simulados quanto os resultados práticos mostram que a inclusão do compensador antiwindup melhora a qualidade do sistema de controle, garantindo que o mesmo opere na região linear durante um maior intervalo de tempo. Para o sistema em questão, não houve diferença perceptível entre o compensador estático sintetizado a partir do modelo linearizado, e os compensadores tanto estático quanto dependente de parâmetros obtidos a partir da modelagem quasi-LPV. Como a representação quasi-LPV contém o modelo linearizado, era esperado que este último de fato não gerasse resultados melhores. De maneira semelhante, esperava-se que os compensadores dependentes de parâmetros apresentassem um desempenho equivalente ou melhor do que os compensadores estáticos.

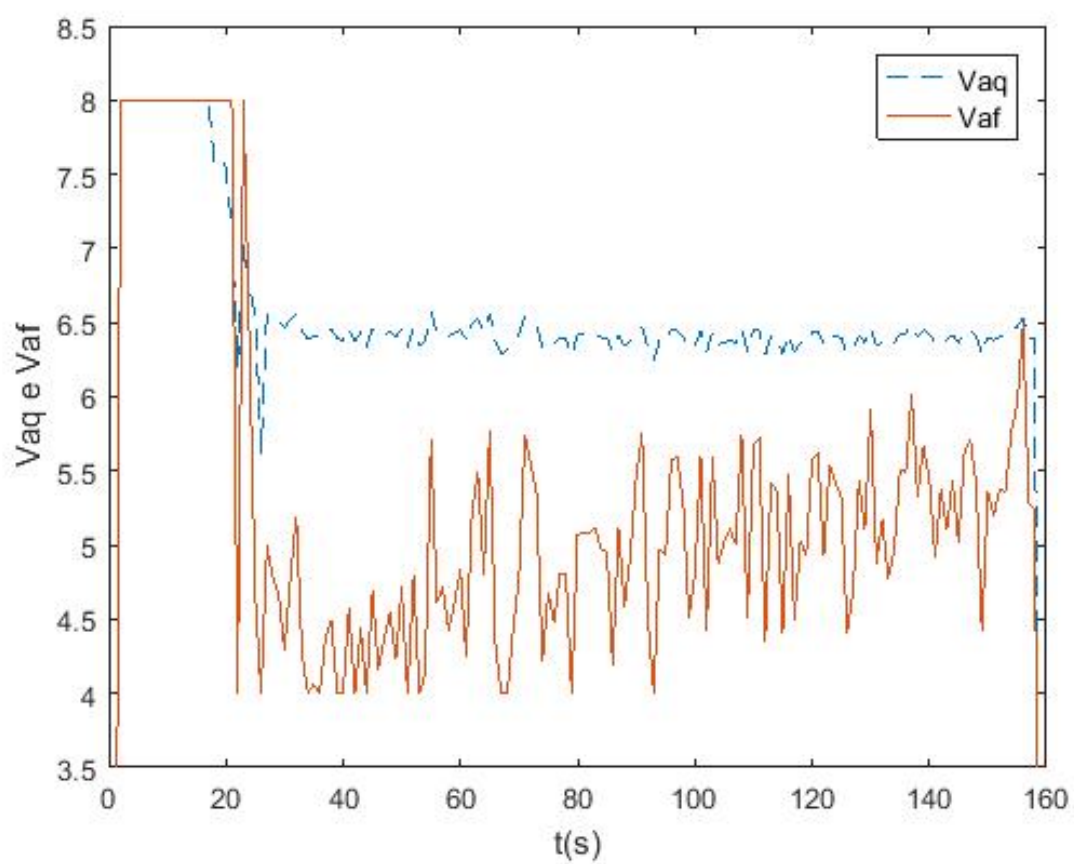
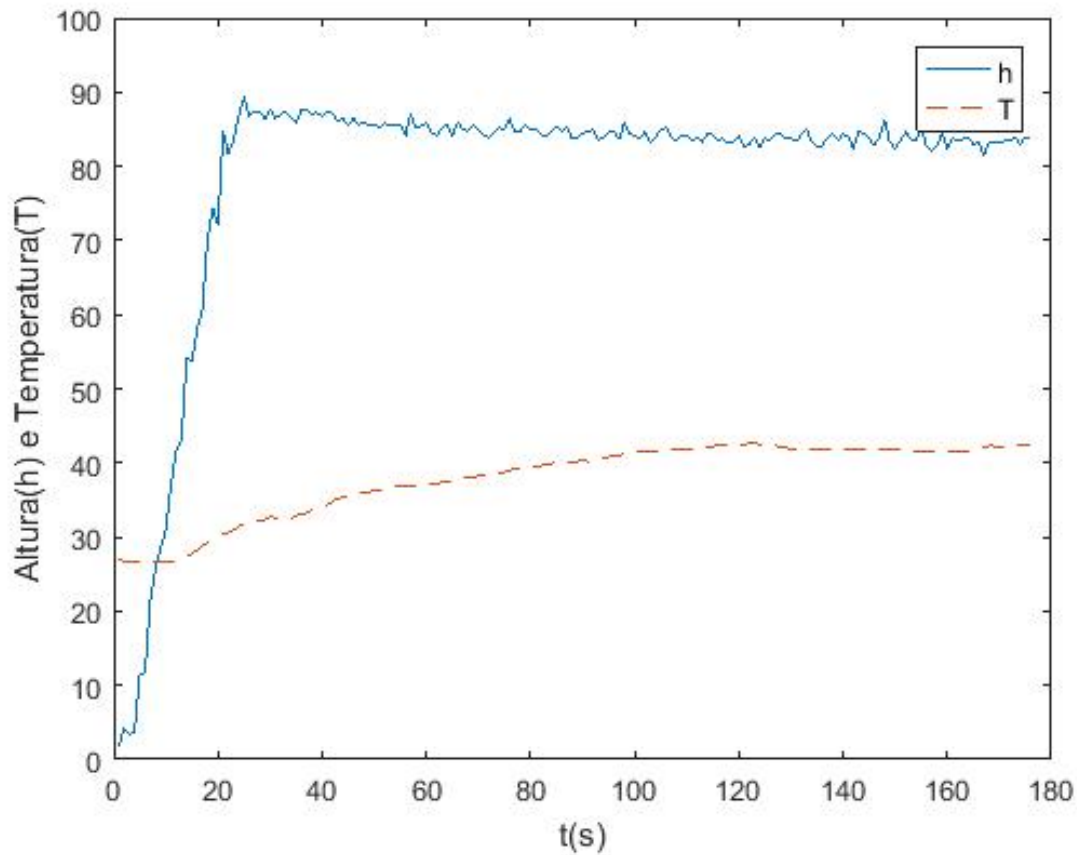
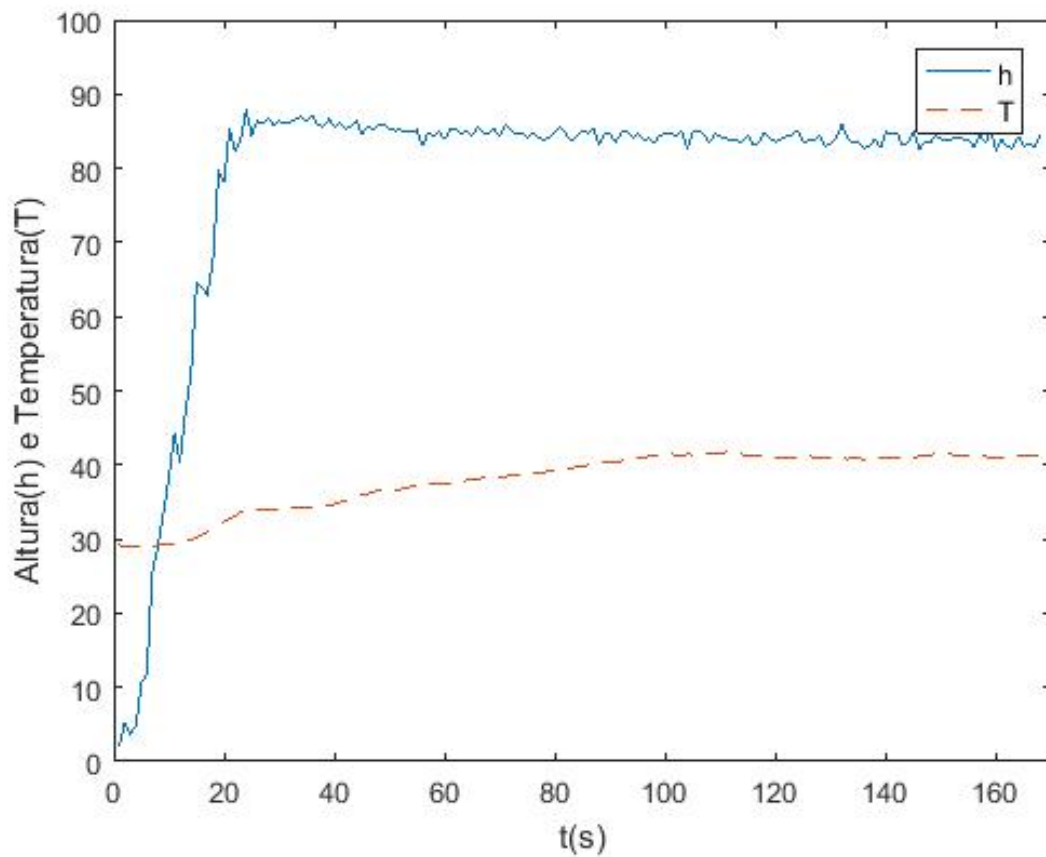


Figura 21 – Saturações com o compensador $E_c(\theta(t))(5.34)$

Fonte – Autoria Própria



(a) Resposta sem compensador



(b) Resposta com compensador

Figura 22 – Resposta para o segmento de referência de Nível e temperatura

CONCLUSÃO

Foi realizada a síntese de um controlador linear, utilizando o modelo linearizado do sistema junto com a abordagem LQR, e de um controlador com ganhos escalonados, utilizando o modelo LPV do sistema com a teoria de controle robusto, minimizando a norma \mathcal{H}_∞ . Para o controlador linear foram encontrados compensadores estáticos a fim de minimizar as saturações, sendo realizadas simulações e ensaios para obter o melhor resultado. Para o controlador LPV foi encontrado um compensador estático e um dinâmico, sendo esse último usando uma condição proposta nesse trabalho.

Com a utilização do compensador no processo aqui estudado, verificou-se que houve estabilidade garantida do controle, reduzindo as saturações e diminuindo ruídos nas variáveis controladas. Na utilização do controlador escalonado, não houve tanta percepção de como a escolha do compensador aplicado, minimiza as perturbações sobre a variável controlada. Pelos ensaios realizados com o controlador linear, percebe-se a melhora nas condições de trabalho dos atuadores, como a qualidade dos resultados na saída do sistema de controle.

Vários trabalhos estudam as perturbações causadas pelo efeito windup e pelo chaveamento entre o controle manual para o automático, desenvolvendo assim, um único compensador para lidar com estas perturbações, como proposta de trabalhos futuros, recomenda-se o estudo deste chaveamento, conhecido como bumpless transfer, e como evitá-lo. Além disso, propõe-se validar a condição proposta de antiwindup dependente de parâmetros em sistemas que não possuam todos os estados disponíveis na saída e adaptação para sistemas com atrasos na entrada. O presente estudo pretende contribuir com trabalhos futuros, facilitando esta etapa, em que é necessário encontrar o compensador para a aplicação do sistema de controle.

Referências

AGULHARI, C. M.; OLIVEIRA, R.; PERES, P. L. Robust lmi parser: A computational package to construct lmi conditions for uncertain systems. In: SN. *XIX Brazilian Conference on Automation (CBA 2012)*. [S.l.], 2012. p. 2298–2305. Citado 3 vezes nas páginas 68, 71 e 73.

ANDRADE, L. H. S. d. *Técnicas de controle robusto misto H_2/H_∞ aplicadas a um sistema multivariável não-linear*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2016. Citado 6 vezes nas páginas 24, 25, 41, 47, 48 e 67.

ARAÚJO, L. O. d. *Identificação e Controle de Algumas Classes de Sistemas Não-estacionários*. Dissertação (Mestrado) — Instituto Militar de Engenharia, 2006. Citado na página 56.

ASTROM, K. J.; RUNDQWIST, L. Integrator windup and how to avoid it. *Lund Institute of Technology*, p. 1693–1698, 1989. Citado 3 vezes nas páginas 23, 27 e 43.

ASTROM, K. J.; WITTENMARK, B. *Computer-Controlled Systems: Theory and Design*. third. [S.l.]: Prentice Hall, 1997. Citado na página 29.

BARBU, C. et al. A anti-windup for exponentially unstable linear systems with inputs limited in magnitude and rate. In: *Proceedings of the American Control Conference*. [S.l.: s.n.], 2000. p. 1230–1234. Citado na página 29.

BOYD, S. et al. *Linear matrix inequalities in system and control theory*. [S.l.]: SIAM, 1994. Citado 2 vezes nas páginas 40 e 45.

CAMPO, P. J.; MORARI, M.; NETT, C. N. Multivariable anti-windup and bumpless transfer: A general theory. In: *American Control Conference*. [S.l.]: IEEE, 1989. Citado na página 27.

CAO, Y.-Y.; LIN, Z.; WARD, D. G. An antiwindup to enlarging domain of attraction for linear systems to actuator saturation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 47, p. 140–145, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 34.

CHEN, C.-T. *Linear System: Theory and Design*. third. [S.l.]: Oxford University Press, 1999. Citado na página 54.

CORRIOU, J.-P. *Process Control: Theory and applications*. [S.l.]: Springer-Verlag London, 2004. Citado na página 48.

DOYLE, J. C.; SMITH, R. S.; ENNS, D. F. Control of plants with input saturation nonlinearities. In: *American Control Conference*. [S.l.]: IEEE, 1987. Citado na página 27.

FEZAZI, N. E. et al. Delay dependent anti-windup synthesis for time-varying delay systems with saturating actuators. *International Journal of Computer Applications, Foundation of Computer Science*, v. 111, n. 1, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 35.

- FLORES, J.; ECKHARD, D.; JR, J. G. da S. On the tracking problem for linear systems subject to control saturation. *IFAC Proceedings Volumes*, Elsevier, v. 41, n. 2, p. 14168–14173, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 34.
- FLORES, J. et al. Robust repetitive control with saturating actuators: a lmi approach. In: IEEE. *Proceedings of the 2010 American Control Conference*. [S.l.], 2010. p. 4259–4264. Citado na página 31.
- FLORES, J. V.; SILVA, J. G. da; SBARBARO, D. Robust periodic reference tracking for uncertain linear systems subject to control saturations. In: IEEE. *Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control (CDC) held jointly with 2009 28th Chinese Control Conference*. [S.l.], 2009. p. 7960–7965. Citado na página 31.
- FLORES, J. V. et al. Repetitive control design for mimo systems with saturating actuators. *IEEE Transactions on Automatic Control*, IEEE, v. 57, n. 1, p. 192–198, 2011. Citado na página 31.
- FUJIMORI, A.; LJUNG, L. Parameter estimation of polytopic models for a linear parameter varying aircraft system. *Transactions Of The Japan Society For Aeronautical And Space Sciences*, v. 49, p. 129–136, november 2006. Citado na página 39.
- GALEANI, S. et al. A magnitude and rate saturation model and its use in the solution of a static anti-windup problem. *Systems & Control Letters*, Elsevier, v. 57, n. 1, p. 1–9, 2008. Citado na página 30.
- GALEANI, S. et al. A tutorial on modern anti-windup design. *European Journal of Control*, Elsevier, v. 15, n. 3-4, p. 418–440, 2009. Citado na página 23.
- GARCIA, G.; TARBOURIECH, S.; SILVA, J. M. G. da. Dynamic output controller design for linear systems with actuator and sensor saturation. In: IEEE. *2007 American Control Conference*. [S.l.], 2007. p. 5834–5839. Citado na página 30.
- GEROMEL, J. C.; KOROGUI, R. H.; BERNUSSOU, J. \mathcal{H}_2 and robust output feedback control for continuous time polytopic systems. *IET Control Theory & Applications*, IET, v. 1, n. 5, p. 1541–1549, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 41 e 42.
- GLATTFELDER, A. F.; SCHAUFELBERGER, W. Stability analysis of single loop control systems with saturation and antireset-windup circuits. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 28, n. 12, p. 1074–1081, dezembro 1983. Citado na página 23.
- GREEN, M.; LIMEBEER, D. J. *Linear robust control*. [S.l.]: Courier Corporation, 2012. Citado na página 40.
- GRIMM, G. et al. Antiwindup for stable linear systems with input saturation: An lmi-based synthesis. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 48, n. 9, p. 1509–1524, september 2003. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 29.
- HUSSAIN, M.; REHAN, M. Nonlinear time-delay anti-windup compensator synthesis for nonlinear time-delay systems: A delay-range-dependent approach. *Neurocomputing*, n. 186, p. 54–65, 2016. Citado na página 23.
- JR, J. G. da S. et al. Static anti-windup design for a class of nonlinear systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Wiley Online Library, v. 24, n. 5, p. 793–810, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 34.

- JR, J. Gomes da S.; TARBOURIECH, S.; REGINATTO, R. Analysis of regions of stability for linear systems with saturating inputs through an anti-windup scheme. In: *IEEE International Symposium on Computer Aided Control System Design Proceedings*. [S.l.: s.n.], 2002. p. 1106–1111. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 29.
- JUNIOR, J. M. G. d. S.; TARBOURIECH, S. Antiwindup design with guaranteed regions of stability: An lmi-based approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 50, n. 1, p. 106–111, january 2005. Citado 7 vezes nas páginas 24, 30, 37, 43, 44, 45 e 46.
- KAPASOURIS, P.; ATHANS, M.; STEIN, G. Design of feedback control systems for stable plants with saturating actuators. *Massachusetts Institute of Technology*, 1988. Citado na página 27.
- KIENER, G. A.; LEHMANN, D.; JOHANSSON, K. H. Actuator saturation and anti-windup compensation in event-triggered control. *Discrete event dynamic systems*, Springer, v. 24, n. 2, p. 173–197, 2014. Citado na página 32.
- KOTHARE, M. V. et al. A unified framework for the study of anti-windup designs. *Automatica*, v. 30, n. 12, p. 1869–1883, 1994. Citado na página 23.
- KOTHARE, M. V.; MORARI, M. Multiplier theory for stability analysis of anti-windup control systems. In: *Conference on Decision and Control*. [S.l.: s.n.], 1995. p. 3767–3772. Citado na página 28.
- LÖFBERG, J. Y. A toolbox for modeling and optimization in matlab. In: IEEE (Ed.). *Computer Aided Control Systems Design*. [S.l.]: IEEE International Symposium on, 2004. p. 284–289. Citado na página 66.
- LI, Y.; LIN, Z. Design of saturation-based switching anti-windup gains for the enlargement of the domain of attraction. *IEEE Transactions on Automatic Control*, IEEE, v. 58, n. 7, p. 1810–1816, 2012. Citado na página 31.
- MARCOPOLI, V. R.; PHILLIPS, S. M. Analysis and synthesis tools for a class of actuator-limited multivariable control systems: A linear matrix inequality approach. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, v. 6, p. 1045 – 1063, 1996. Citado na página 28.
- MIYAMOTO, S.; VINNICOMBE, G. Robust control of plants with saturation nonlinearity based on coprime factor representations. In: *Conference on Decision and Control*. [S.l.: s.n.], 1996. p. 2838–2840. Citado na página 29.
- MOHAMMADPOUR, J.; SCHERER, C. W. *Control of Linear Parameter Varying Systems with Applications*. [S.l.]: Springer New York Dordrecht Heidelberg London, 2012. Citado na página 39.
- MOREIRA, W. J. *Identificação Linear a Parâmetros Variantes no Tempo de Sistemas Não-Lineares*. Dissertação (Mestrado) — Instituto Militar de Engenharia, 2008. Citado na página 39.
- OGATA, K. *Engenharia de controle moderno.[Sl]*. [S.l.]: Pearson Education do Brasil, 2011. Citado na página 40.

- OLIVEIRA, M. C. D.; GEROMEL, J. C.; BERNUSSOU, J. Extended h_2 and h_∞ norm characterizations and controller parametrizations for discrete-time systems. *International Journal of Control*, Taylor & Francis, v. 75, n. 9, p. 666–679, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 41 e 42.
- PREREZ, P. A.; SALA, A. *Multivariable control systems: an engineering approach*. [S.l.: s.n.], 2004. Citado 2 vezes nas páginas 37 e 39.
- QI, W. et al. Anti-windup design for stochastic markovian switching systems with mode-dependent time-varying delays and saturation nonlinearity. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, Elsevier, v. 26, p. 201–211, 2017. Citado na página 34.
- QI, W. et al. Anti-windup design for saturated semi-markovian switching systems with stochastic disturbance. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, IEEE, 2018. Citado na página 34.
- RAN, M.; WANG, Q.; DONG, C. Anti-windup design for uncertain nonlinear systems subject to actuator saturation and external disturbance. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Wiley Online Library, v. 26, n. 15, p. 3421–3438, 2016. Citado na página 33.
- RAN, M. et al. Simultaneous linear and anti-windup controller synthesis: Delayed activation case. *Asian Journal of Control*, v. 17, n. 3, p. 1027–1038, may 2015. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 33.
- REHAN, M.; HONG, K.-S. Decoupled-architecture-based nonlinear anti-windup design for a class of nonlinear systems. *Nonlinear Dynamics*, Springer, v. 73, n. 3, p. 1955–1967, 2013. Citado na página 32.
- SABERI, A.; LIN, Z.; TEEL, A. R. Control of linear systems with saturating actuators. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 41, n. 3, p. 368–378, march 1996. Citado na página 28.
- SBARBARO, D.; TOMIZUKA, M.; BARRA, B. L. de la. Repetitive control system under actuator saturation and windup prevention. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, American Society of Mechanical Engineers, v. 131, n. 4, p. 044505, 2009. Citado na página 31.
- SHAMMA, J. S. An overview of lpv systems. In: *Control of linear parameter varying systems with applications*. [S.l.]: Springer, 2012. p. 3–26. Citado na página 24.
- SKOGESTAD, S.; POSTLETHWAITE, I. *Multivariable feedback control: analysis and design*. [S.l.]: Wiley New York, 2007. v. 2. Citado na página 23.
- SMITH, C. A.; CORRIPIO, A. B. *Principles and Practice of Automatic Process Control*. 2. ed. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1997. Citado na página 49.
- SOUZA, A. C. Z. et al. *Projetos, simulações e experiências de laboratório em sistemas de controle*. 1. ed. [S.l.]: Interciência Ltda, 2014. Citado na página 49.
- STURM, J. F. Using sedumi 1.02, a matlab toolbox for optimization over symmetric cones. In: FRANCIS, T. . (Ed.). *Optimization methods and software*. [S.l.: s.n.], 1999. v. 11, n. 1-4, p. 625–653. Citado 3 vezes nas páginas 66, 68 e 73.

- TARBOURICH, S.; TURNER, M. Anti-windup design: an overview of some recent advances and open problems. *IET Control Theory Appl.*, v. 3, n. 1, p. 1–19, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 24.
- TARBOURIECH, S.; QUEINNEC, I.; GARCIA, G. Stability region enlargement through anti-windup strategy for linear systems with dynamics restricted actuator. *International journal of systems science*, Taylor & Francis, v. 37, n. 2, p. 79–90, 2006. Citado na página 30.
- TEEL, A. R.; KAPOOR, N. The l_2 anti-windup problem: Its definition and solution. In: *European Control Conference*. [S.l.: s.n.], 1997. p. 1897–1902. Citado na página 29.
- TURNER, M. C.; TARBOURIECH, S. Anti-windup for linear systems with sensor saturation: sufficient conditions for global stability and l_2 gain. In: IEEE. *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control*. [S.l.], 2006. p. 5418–5423. Citado na página 30.
- VALMÓRBIDA, G. et al. Anti-windup design for saturating quadratic systems. *Systems & Control Letters*, Elsevier, v. 62, n. 5, p. 367–376, 2013. Citado na página 32.
- WALSH, M.; HAYES, M. A robust throughput rate control mechanism for an 802.15.4 wireless sensor network—an anti-windup approach. In: IEEE. *2007 American Control Conference*. [S.l.], 2007. p. 3071–3076. Citado na página 30.
- WU, X.; LIN, Z. Design of multiple anti-windup loops for multiple activations. *Science China Information Sciences*, Springer, v. 55, n. 9, p. 1925–1934, 2012. Citado na página 32.
- YAO, X. et al. Static anti-windup design for nonlinear markovian jump systems with multiple disturbances. *Information Sciences*, Elsevier, v. 418, p. 169–183, 2017. Citado na página 34.

Apêndices

APÊNDICE A – Algoritmo utilizado para obtenção do controlador e compensador linear

```

clc; clear all;

n = 2;    %ordem do sistema
nc = 2;   %ordem do controlador
m = 2;    %quantidade de entradas
nr = 4;   %quantidade de condições iniciais e/ou limites
ref = 2;  %quantidade de referências

%Dados do processo

s = 33250;    %Área do modulo
h = 100;      %Referência de altura
Taf = 24;     %Temperatura da água fria
T = 35;       %Referência de temperatura
Taq = 50;     %Temperatura de água quente
fo = 53123.53; %Vazão de escoamento
hmax = 170;   %Altura máxima permitida no tanque principal
Rqo = hmax/fo; %Resistência de escoamento

%Relação entre vazão e tensão de controle das bombas
af = 24834; bf = 49097; aq = 26264; bq = 49690; Vaf = 0; Vaq = 0;

%Matrizes do sistema

a11 = -1/(s*Rqo); a12 = 0;
a21 = -(af*Vaf+bf)*(Taf-T)/(s*h^2))+(-(aq*Vaq+bq)*(Taq-T)/(s*h^2));
a22 = -(af*Vaf+bf)/(s*h))+(-(aq*Vaq+bq)/(s*h));

A = [a11 a12; a21 a22];

```

```
b11 = af/s; b12 = aq/s; b21 = af*(Taf-T)/(s*h); b22 = aq*(Taq-T)/(s*h)
```

```
B = [b11 b12; b21 b22];
```

```
C = [1 0; 0 1];
```

```
D = [0 0; 0 0];
```

```
%Sistema aumentado com servo sistema
```

```
Atil = [A zeros(n,nc); -C zeros(n,nc)];
```

```
Btil = [B; zeros(n,m)];
```

```
Ctil = [C zeros(n,nc); zeros(ref,n) eye(ref)];
```

```
Dtil = [D; zeros(n,m)];
```

```
%Cálculo do controlador-----
```

```
SYStil = ss(Atil,Btil,Ctil,Dtil);
```

```
Qtil = [1 0 0 0; 0 1 0 0; 0 0 1 0; 0 0 0 1];
```

```
Rtil = [1 0; 0 1];
```

```
[ktil, Stil, Etil] = lqr(SYStil,Qtil,Rtil);
```

```
ktil=-ktil;
```

```
%Representacao do controlador-----
```

```
Ac = zeros(nc,nc);
```

```
Bc = -C;
```

```
Cc = ktil(1:n,n+1:n+ref);
```

```
Dc = ktil(1:n,1:n);
```

```
%Sistema em malha fechada-----
```

```
AA = [A+B*Dc*C B*Cc; Bc*C Ac];
```

```
BB = [B; zeros(nc,m)];
```

```
R = [zeros(n,nc); eye(nc)];
```

```
K = [Dc*C Cc];
```

```
u0 = 15; %Limite de controle
```

```
V{1} = [0; 24; 0; 0];
```

```
V{2} = [170; 50; 0; 0];
```

```

V{3} = [170;24;0;0];
V{4} = [0;50;0;0];

%Cálculo do compensador
W = sdpvar(n+nc,n+nc,'sym');
S = sdpvar(m,m,'diag');
Z = sdpvar(nc,m,'full');
Y = sdpvar(m,n+nc,'full');
mi = sdpvar(1,1);

LMIs = [];

LMIs = [LMIs, W>0];
LMIs = [LMIs, S>0];

T11 = W*AA'+AA*W;
T12 = BB*S+R*Z-Y';
%T12 = BB*S+R*Z-W*K'; %para sistema estável
T21 = T12';
T22 = -2*S;

T = [T11 T12; T21 T22];

LMIs = [LMIs, T<0];

% %LMI (13) do artigo de Gomes
for i=1:m
for j = 1:2
T11 = W;
T12 = W*K(i,:) - Y(i,:);
T21 = T12';
T22 = u0^2;
T = [T11 T12; T21 T22];
LMIs = [LMIs, T >= 0];
end
end

%LMI (19) do artigo de Gomes

```

```
for r = 1:nr
T11 = mi;
T12 = V{r}';
T21 = V{r};
T22 = W;
T = [T11 T12;T21 T22];
LMIs = [LMIs, T >= 0];
end

%-----Limitando ganho do compensador-----
tal = 10^2; %valor desejado de limite  $E_c(i,j)^2 \leq tal$ 
for i = 1:2
for j = 1:2
T11 = S(j,j)*tal;
T12 = Z(i,j);
T21 = Z(i,j);
T22 = S(j,j);
T = [T11 T12;T21 T22];
LMIs = [LMIs,T >= 0];
end
end
%-----

solvesdp(LMIs);
checkset(LMIs);

Ec = double(Z)*inv(double(S))
```

APÊNDICE B – Algoritmo utilizado para obtenção do controlador e compensador LPV

```

clc; clear all;

n = 2; %ordem dos estados
nc = 2; %ordem do controlador
m = 2; %quantidade de entradas
ref = 2; %quantidade de referencias

%Dados do processo

s = 33250; %Área do modulo
hm = 1; %Altura mínima
hM = 170; %Altura máxima
Taf = 24; %Temperatura da água do tanque de água fria
Tm = 24; %Temperatura mínima no tanque principal
TM = 50; %Temperatura máxima no tanque principal
Taq = 50; %Temperatura da água do tanque de água fria
fo = 53123.53; %vazão de escoamento considerando tanque principal cheio

%Parâmetros para cálculo da vazão conforme tensão de controle aplicado as
%bombas

af = 24834; bf = 49097; aq = 26264; bq = 49690;

%Resistência a passagem do líquido na saída do tanque principal
Rqo = hM/fo;

%Modelagem do sistema LPV-----

%Matrizes A(theta), B(theta) e Bwi

A1 = [-1/(Rqo*s) 0;
0 0];

```

```

%alpha1*betha1
B1 = [af/s aq/s;
af*(Taf-Tm)/(s*hm) aq*(Taq-Tm)/(s*hm)];

B{1} = {[1 0],[1 0],B1};

%alpha1*betha2
B2 = [af/s aq/s;
af*(Taf-Tm)/(s*hM) aq*(Taq-Tm)/(s*hM)];

B{2} = {[1 0],[0 1],B2};

%alpha2*betha1
B3 = [af/s aq/s;
af*(Taf-TM)/(s*hm) aq*(Taq-TM)/(s*hm)];

B{3} = {[0 1],[1 0],B3};

%alpha2*betha2
B4 = [af/s aq/s;
af*(Taf-TM)/(s*hM) aq*(Taq-TM)/(s*hM)];

B{4} = {[0 1],[0 1],B4};

Bb = rolmipvar(B,'B',[2 2],[1 1]);

C = [1 0;0 1];

D = [0 0;0 0];

Bwi = [1; 0.539; 0; 0];

%Valores de z inf

Czi = [-2.161 0 0 0; 1 0 0.2885 0; 1 0 1 1; 0 0 0 0];

Dzui = zeros(n+nc,n);

Dzwi = zeros(n+nc,1);

```

```

%Sistema aumentado com servo sistema
Atil = [A1 zeros(n,nc);-C zeros(n,nc)];
Btil = [Bb; zeros(n,m)];
Ctil = [C zeros(n,nc); zeros(ref,n) eye(ref)];
Dtil = [D; zeros(n,m)];
%-----

%Calculo do controlador-----

%Minimização da norma Hinf

%Parâmetros da matriz T

G = rolmipvar(n+nc,n+nc, 'G', 'full', 0,0);
Z = rolmipvar(n,n+nc, 'Z', 'full', [2 2],[1 1]);
xi = 1;
Pinf = rolmipvar(n+nc,n+nc, 'P', 'sym', 2,1);
dotbounds{1} = [-10 10; -10 10]; dotbounds{2} = [-10 10; -10 10];
dotbounds{3} = [-10 10; -10 10]; dotbounds{4} = [-10 10; -10 10];
dotP = diff(Pinf,'dotP',dotbounds);
Hinf = rolmipvar(1, 1, 'H', 'full', 2,1);
gama_quad = sdpvar(1,1);

%Cálculo da LMI

LMIs = [];

T11 = Atil*G + G'*Atil' + Btil*Z + Z'*Btil' - dotP;
T21 = Pinf - G + xi*(Atil*G + Btil*Z)';
T22 = -xi*(G+G');
T31 = Czi*G + Dzui*Z;
T32 = xi*(Czi*G + Dzui*Z);
T33 = -gama_quad*eye(4);
T41 = -Hinf'*Bwi';
T42 = zeros(1,n+nc);
T43 = -Hinf'*Dzwi';
T44 = eye(1)+Hinf+Hinf';

```

```

T = [T11 T21' T31' T41';
T21 T22 T32' T42';
T31 T32 T33 T43';
T41 T42 T43 T44];
LMIs = [LMIs, T < 0];

solvesdp(LMIs, [], sdpsettings('solver', 'sedumi'));
[p, d] = checkset(LMIs)
if (min(p) > -1e-6)
gamamin = sqrt(double(gama_quad))

aux = Z([1 0], [1 0]);
Z11 = double(aux{1});

aux = Z([1 0], [0 1]);
Z12 = double(aux{1});

aux = Z([0 1], [1 0]);
Z21 = double(aux{1});

aux = Z([0 1], [0 1]);
Z22 = double(aux{1});

K11 = Z11*inv(double(G));
K12 = Z12*inv(double(G));
K21 = Z21*inv(double(G));
K22 = Z22*inv(double(G));

ktil = double(Z)*inv(double(G));
end

%Representacao do controlador-----
Ac = zeros(nc,nc);
Bc = -C;

Ccm{1} = {[1 0], [1 0], K11(1:n, n+1:n+ref)};
Ccm{2} = {[1 0], [0 1], K12(1:n, n+1:n+ref)};

```

```

Ccm{3} = {[0 1],[1 0],K21(1:n,n+1:n+ref)};
Ccm{4} = {[0 1],[0 1],K22(1:n,n+1:n+ref)};
Cc = rolmipvar(Ccm,'Cc',[2 2],[1 1]);

```

```

Dcm{1} = {[1 0],[1 0],K11(1:n,1:n)};
Dcm{2} = {[1 0],[0 1],K12(1:n,1:n)};
Dcm{3} = {[0 1],[1 0],K21(1:n,1:n)};
Dcm{4} = {[0 1],[0 1],K22(1:n,1:n)};
Dc = rolmipvar(Dcm,'Dc',[2 2],[1 1]);

```

```

%Sistema em malha fechada-----

```

```

AA = [A1+Bb*Dc*C Bb*Cc;Bc*C Ac];
BB = [Bb;zeros(nc,m)];
R = [zeros(n,nc);eye(nc)];
K = [Dc*C Cc];
k = coefs(K);

```

```

%Calculo do compensador-----

```

```

%Cálculo de dotW

```

```

W = rolmipvar(n+nc,n+nc,'W','sym',[2 2],[1 1]);
dotbounds{1} = [-1 1; -1 1]*0.1; dotbounds{2} = [-1 1; -1 1]*0.1;
dotbounds{3} = [-1 1; -1 1]*0.1; dotbounds{4} = [-1 1; -1 1]*0.1;
dotW = diff(W,'dotW',dotbounds);

```

```

%Parâmetros das LMI's

```

```

u0 = 20; %Valor do limitador
S = rolmipvar(m,m,'S','diag',0,0);
Z = rolmipvar(nc,m,'Z','full',[2 2],[1 1]);
Y = rolmipvar(m,n+nc,'Y','full',2,1);

```

```

%Cálculo das LMI's

```

```

LMIs = [];

```

```

LMIs = [LMIs, W>0];
LMIs = [LMIs, S>0];

```

```

T11 = W*AA'+AA*W-dotW;
T12 = BB*S+R*Z-Y';
T21 = T12';
T22 = -2*S;

T = [T11 T12; T21 T22];

LMIs = [LMIs, T<0];

Yc = coefs(Y);

%LMI (13) do artigo de Gomes
for j=1:size(k,2)
for i = 1:size(Yc,2)
for p = 1:m
T11 = W;
T12 = W*k{j}(i,:) - Yc{p}(i,:);
T21 = T12';
T22 = u0^2;
T = [T11 T12; T21 T22];
LMIs = [LMIs, T >= 0];
end
end
end

%Limitando ganho do compensador

Sc=coefs(S);
Zc = coefs(Z);
tal = 100^2; %valor desejado de limite  $E_c(i,j)^2 \leq tal$ 
for p = 1:size(Zc,2)
for i = 1:size(Sc,1)
for j = 1:size(Sc,2)
T11 = Sc(j,j)*tal;
T12 = Zc{p}(i,j); %Zc(i,j);
T21 = Zc{p}(i,j); %Zc(i,j);
T22 = Sc(j,j);
T = [T11 T12;T21 T22];
LMIs = [LMIs,T >= 0];

```



```
end  
end  
end
```

```
%Solução das LMI's e cálculo do compensador Ec
```

```
solvesdp(LMIs)  
checkset(LMIs)
```

```
Ec = double(Z)*inv(double(S))
```

```
%-----
```