

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ**  
**PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO**  
**PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA**

**LETÍCIA COUTINHO**

**MODELAGEM MATEMÁTICA E RACIOCÍNIO PROPORCIONAL NA**  
**EDUCAÇÃO INFANTIL**

**LONDRINA**

**2020**

**LETÍCIA COUTINHO**

**MODELAGEM MATEMÁTICA E RACIOCÍNIO PROPORCIONAL NA  
EDUCAÇÃO INFANTIL**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, como requisito parcial para a obtenção do título de mestre.

Linha de pesquisa: Formação de Professores e Construção do Conhecimento Matemático.

Orientador: Prof. Dr. Emerson Tortola

**LONDRINA  
2020**

## TERMO DE LICENCIAMENTO

Esta Dissertação está licenciada sob uma Licença Creative Commons *atribuição uso não-comercial/compartilhamento sob a mesma licença 4.0 Brasil*. Para ver uma cópia desta licença, visite o endereço <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/> ou envie uma carta para Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, Califórnia 94105, USA.



Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
Biblioteca UTFPR - Câmpus Londrina

C871m Coutinho, Letícia

Modelagem matemática e raciocínio proporcional na educação infantil /  
Letícia Coutinho. - Londrina : [s.n.], 2020.  
153 f. : il. ; 30 cm.

Orientador: Prof. Dr. Emerson Tortola.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná.  
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática. Londrina, 2020.  
Bibliografia: f. 136-143.

1. Modelos matemáticos. 2. Raciocínio. 3. Matemática - Estudo e ensino. 4. Educação infantil. I. Tortola, Emerson, orient. II. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. III. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática. IV. Título.

CDD: 510.7



**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO**

**Universidade Tecnológica Federal do Paraná**  
Programa de Mestrado Profissional em Ensino  
de Matemática - PPGMAT  
Mestrado Profissional  
Câmpus Londrina/Cornélio Procópio



---

**TERMO DE APROVAÇÃO**

**"MODELAGEM MATEMÁTICA E RACIOCÍNIO PROPORCIONAL NA  
EDUCAÇÃO INFANTIL**

**por**

**Letícia Coutinho**

Dissertação de Mestrado e o seu produto educacional **“Modelagem Matemática e Raciocínio Proporcional: orientações para professores da Educação Infantil”** apresentados no dia 13 de julho de 2020 como requisito parcial para a obtenção do título de MESTRE EM ENSINO DE MATEMÁTICA, pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Câmpus Londrina e Cornélio Procópio. A mestranda foi arguida pela Banca Examinadora composta pelos professores abaixo assinados. Após deliberação, a Banca Examinadora considerou o trabalho **APROVADO** (Aprovado ou Reprovado).

---

**Prof. Dr. Emerson Tortola (UTFPR - Toledo)**

Orientador

---

**Prof<sup>a</sup> Dra. Lourdes Maria Werle de Almeida (UEL - Londrina)**

Membro Titular

---

**Prof<sup>a</sup> Dra. Karina Alessandra Pessôa da Silva (UTFPR - Londrina)**

Membro Titular

---

**Prof.<sup>a</sup> Dra. Línlya Natássia Sachs Camerlengo de Barbosa**

Coordenadora do Programa de  
Mestrado Profissional em Ensino de Matemática  
.UTFPR Câmpus Londrina/ Cornélio Procópio.

O termo de aprovação assinado encontra-se arquivado na secretaria do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática.

Dedico este trabalho aos meus filhos Ana  
Julia e Victor; aos meus pais: Sueli e  
Coutinho (In memorian); à minha irmã  
Dayane e à minha sobrinha Lorena.

## AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus por estar comigo em todas as ocasiões, principalmente nos momentos de estudo para o desenvolvimento desta pesquisa. Tiveram momentos de alegria e de dificuldade, mas eu sabia que o Senhor estava comigo o tempo todo e que me ajudaria superar cada etapa a ser realizada.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Emerson Tortola, pela amizade sincera, compreensão, confiança, dedicação, companheirismo e pelas cuidadosas contribuições para este trabalho, afinal, competência o define. Obrigada por acreditar em minha capacidade para elaboração deste trabalho.

Às professoras membros da banca de avaliação, Karina Alessandra Pessoa da Silva e Lourdes Maria Werle de Almeida, por aceitarem gentilmente compor a banca examinadora e pelas valiosas contribuições. Obrigada por serem pesquisadoras inspiradoras na área da Educação Matemática e por desenvolver belíssimas pesquisas na Modelagem Matemática.

Às minhas amigas de trabalho, que foram fundamentais nesse processo de conhecimento, me animando e acreditando no meu potencial. Meu agradecimento especial a Juliana, Rosalina, Danielle, Marisa, Dani Musial, Cícera, Sheila, Isabela, Daiane, Elisângela, Cristiani, que compartilharam comigo, momentos de angústia, ansiedade, medo, porém de aprendizado e superação. Enfim, a todos os meus amigos que ficaram felizes com meu crescimento profissional.

Às professoras Gislaine, Cristiane e Amanda, que, com muito carinho aceitaram a proposta de eu desenvolver as atividades em sua turma. Obrigada pela parceira, pela paciência e por não medir esforços para que tudo ocorresse da melhor maneira possível.

Aos alunos pequeninos, que participaram e permitiram que pesquisa acontecesse, pois meio de suas interações, dedicação, empenho e entusiasmo nas atividades propostas, acreditamos ter obtido bons resultados.

À minha amiga Meire, diretora do Cmei onde foram desenvolvidas as atividades. Obrigada pela amizade, pelo apoio, pelos conselhos e por todo o carinho que tem por mim.

À Prefeitura Municipal de Campo Mourão, principalmente à Secretaria de Educação, por partilhar comigo a realização desse sonho.

À nutricionista Simone que aceitou nosso convite em participar da atividade sobre alimentação saudável.

Aos meus amigos de graduação e a todos os professores da vida acadêmica, principalmente aos professores do Departamento de Matemática da Unespar de Campo Mourão, que sempre me incentivaram a estudar e pela felicidade demonstrada ao ver meu crescimento profissional.

Aos professores e colegas do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (PPGMAT) que compartilharam momentos de conhecimento, de alegrias e angústias durante os anos de participação no programa. Meu agradecimento especial aos meus amigos Milena e Elvis que estiveram comigo em todos os momentos, compartilhando ideias e conhecimento para que juntos pudéssemos aprender.

Ao Grupo de Estudos e pesquisa em Educação e Educação Matemática (GEPEEM), que compartilhou comigo momentos de estudo e de conhecimento que auxiliaram no desenvolvimento da pesquisa.

Às minhas amigas Cristiana e Mirian (minhas irmãs de orientação), companheiras de viagem, de estudos e de muitas gargalhadas. Pelas sugestões para a pesquisa, pela amizade louca e sincera, pelo apoio e companheirismo.

À minha família que, além de toda paciência e amor, acreditou que eu venceria mais essa etapa de minha vida. Meu agradecimento especial à minha irmã Dayane, que foi uma das incentivadoras para eu realizar o mestrado e, à minha mãe que sempre me apoiou nos estudos, além de não medir esforços em me auxiliar nos cuidados com meus filhos e ajudar nas tarefas diárias enquanto eu estava ausente.

Em especial, aos meus filhos Victor e Ana Julia, que me incentivaram a seguir em frente e, por fazer acreditar em meu potencial. Obrigada por contribuir com os detalhes do layout do produto educacional, por todo o amor, respeito, carinho, compreensão e pelos abraços apertados e sinceros.

A todos que contribuíram direta ou indiretamente para que esta pesquisa fosse desenvolvida. Agradeço por cada palavra de afeto, por cada gesto de carinho, por cada mensagem e pelas orações. Obrigada e que Deus proteja vocês sempre.



COUTINHO, Letícia. **Modelagem matemática e raciocínio proporcional na Educação Infantil**. 2020. 153 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Londrina, 2020.

## RESUMO

Esta pesquisa teve como objetivo investigar *como se dá o desenvolvimento do raciocínio proporcional em atividades de modelagem matemática desenvolvidas por alunos da Educação Infantil?* Para isso, foram desenvolvidas cinco atividades de modelagem matemática, dentre as quais três foram analisadas. Essas atividades foram desenvolvidas em uma turma de Maternal III, com alunos de 3 e 4 anos, de um Centro Municipal de Educação Infantil, público, localizado em uma cidade do Centro-Ocidental Paranaense. Consideramos a Modelagem Matemática com uma alternativa pedagógica que permite abordar matematicamente situações não essencialmente matemáticas. Nesse contexto, mais que uma resposta para o problema, busca-se encorajar os alunos a desenvolver e explorar ideias matemáticas que possam ser utilizadas na compreensão de situações do mundo real. Para a coleta de dados, usamos uma filmadora, alguns gravadores de áudio e dois celulares, com o objetivo de registrar as falas e expressões gestuais dos alunos, além de um diário de campo da professora pesquisadora, onde anotou a cada atividade suas impressões e os acontecimentos que mais lhe chamaram atenção, e dos registros escritos produzidos pelos alunos. Para a análise das atividades nos pautamos em uma abordagem qualitativa dos dados, buscando compreensões acerca da questão de pesquisa. Os resultados sinalizaram que alunos da Educação Infantil têm condições de resolver problemas e construir modelos matemáticos de acordo com experiências que possuem, a partir de suas interações com outras crianças e adultos, e que, nas atividades de modelagem matemática, eles manifestaram ideias e formas de pensar que indicam a mobilização ou desenvolvimento do raciocínio proporcional, como quantidades e covariação, partilha e comparação, unitização, 5 fontes de significado para  $a/b$ , medição e raciocínio relativo.

**Palavras-chave:** Educação Matemática. Modelagem Matemática. Raciocínio Proporcional. Educação Infantil.

COUTINHO, Letícia. **Mathematical modeling and proportional reasoning in Early Childhood Education**. 2020. 153 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Londrina, 2020.

### ABSTRACT

This research aimed to investigate *how the development of proportional reasoning occurs in activities of mathematical modeling developed by students of Early Childhood Education?* For that, five mathematical modeling activities were developed, among which three were analyzed. These activities were developed in a class of Maternal III, with students of 3 and 4 years old, from a Municipal Center for Early Childhood Education, public, located in a city in the Center-Western region of Paraná. We consider Mathematical Modeling as a pedagogical alternative that allows us to approach mathematically situations that are not essentially mathematical. In this context, more than an answer to the problem, it seeks to encourage students to develop and explore mathematical ideas that can be used to understand real-world situations. For data collection, we used a camcorder, some audio recorders and two cell phones, in order to record students' speeches and gestures, as well as a field diary of the researcher teacher, where she wrote down her impressions and events that most caught his attention, and the written records produced by the students. For the analysis of the activities we are guided by a qualitative approach to the data, seeking understandings about the research question. The results signaled that Early Childhood Education students are able to solve problems and build mathematical models according to their experiences, based on their interactions with other children and adults, and that, in mathematical modeling activities, they expressed ideas and ways of think that they indicate the mobilization or development of proportional reasoning, such as quantities and covariation, sharing and comparison, unitization, 5 sources of meaning for  $a/b$ , measurement and relative reasoning.

**Keywords:** Mathematical Education. Mathematical Modeling. Proportional Reasoning. Child Education.

## SUMÁRIO

<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>12</b>
<b>1 ENSINO DE MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO INFANTIL .....</b>	<b>18</b>
<b>2 MODELAGEM MATEMÁTICA .....</b>	<b>22</b>
2.1 MODELAGEM MATEMÁTICA E MODELOS NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA.....	22
2.2 A PRÁTICA DE MODELAGEM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO INFANTIL.....	31
<b>3 RACIOCÍNIO PROPORCIONAL .....</b>	<b>41</b>
3.1 RACIOCÍNIO PROPORCIONAL NO CONTEXTO ESCOLAR.....	41
3.2 ASPECTOS DO RACIOCÍNIO PROPORCIONAL.....	43
3.3 RACIOCÍNIO PROPORCIONAL NA EDUCAÇÃO INFANTIL .....	49
<b>4 ASPECTOS METODOLÓGICOS E CONTEXTO DA PESQUISA.....</b>	<b>55</b>
4.1 NATUREZA DA PESQUISA .....	55
4.2 OS SUJEITOS DA PESQUISA.....	56
4.3 AS ATIVIDADES E SEUS ENCAMINHAMENTOS .....	57
4.4 SOBRE A COLETA DE DADOS .....	59
4.5 SOBRE A ANÁLISE DOS DADOS .....	59
4.6 SOBRE O PRODUTO EDUCACIONAL .....	61
<b>5 ANÁLISE DAS ATIVIDADES .....</b>	<b>62</b>
5.1 DESCRIÇÃO DA ATIVIDADE 1: BRIGADEIRO, QUANTO MAIOR MELHOR?.....	62
5.2 ANÁLISE DA ATIVIDADE 1: BRIGADEIRO, QUANTO MAIOR MELHOR? .....	73
5.3 DESCRIÇÃO DA ATIVIDADE 2: BALANÇAR OU EQUILIBRAR NA GANGORRA? .....	81
5.4 ANÁLISE DA ATIVIDADE 2: BALANÇAR OU EQUILIBRAR NA GANGORRA?.....	92
5.5 DESCRIÇÃO DA ATIVIDADE 3: QUANTO COME O CACHORRO? .....	101
5.6 ANÁLISE DA ATIVIDADE 3: QUANTO COME O CACHORRO? .....	112
5.7 ANÁLISE GLOBAL .....	126
<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>133</b>

<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>136</b>
<b>APÊNDICE A – MODELO DE TERMO DE CONSENTIMENTO ASSINADO PELOS PAIS OU RESPONSÁVEIS .....</b>	<b>145</b>
<b>APÊNDICE B – CAPA E LINK PARA O PRODUTO EDUCACIONAL .....</b>	<b>147</b>
<b>APÊNDICE C – DESCRIÇÃO DA ATIVIDADE SOBRE BOLHAS DE SABÃO .....</b>	<b>148</b>
<b>APÊNDICE D – DESCRIÇÃO DA ATIVIDADE SOBRE ALIMENTAÇÃO SAUDÁVEL .....</b>	<b>151</b>

## INTRODUÇÃO

A Educação Infantil é a primeira etapa da Educação Básica e abrange crianças com idades entre 0 e 5 anos e 11 meses, sendo obrigatória a partir dos 4 anos, de acordo com a Lei nº 12.796/13. Vem se consolidando sob uma perspectiva em que o processo educacional está associado ao educar e ao cuidar, visto que é o primeiro contato com o ensino formal na vida de uma criança. Porém, nesse momento é necessário acolher as vivências e os conhecimentos construídos pelas crianças em suas interações familiares e no contexto de sua comunidade e articulá-los às práticas pedagógicas do professor (BRASIL, 2018).

O ensino na Educação Infantil, segundo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), deve levar em consideração dois eixos estruturantes, interações e brincadeiras. Esses eixos proporcionam aprendizagens necessárias para o desenvolvimento das crianças, pois o brincar configura o cerne da infância, e as interações que essa atividade proporciona resultam em experiências nas quais as crianças podem construir e apropriar-se de conhecimentos.

A Educação Infantil, segundo a BNCC, deve garantir seis direitos de aprendizagem e desenvolvimento: conviver, brincar, participar, explorar, expressar e conhecer-se. Esses direitos estão relacionados à concepção de que a criança é um ser que observa, questiona, constrói conhecimentos e se apropria do conhecimento sistematizado por meio das interações com o mundo físico e social.

Em suma, os alunos devem conviver com outras crianças e adultos; brincar cotidianamente de diferentes formas, em diferentes espaços, ampliando seus conhecimentos; participar das atividades propostas pelo professor e tomar decisões a respeito das atividades cotidianas, como as brincadeiras; explorar movimentos, gestos, sons, texturas, cores, palavras, elementos da natureza, ampliando seus saberes sobre a cultura; expressar suas necessidades, descobertas, dúvidas, etc.; e conhecer-se, de modo a construir sua identidade pessoal, social e cultural.

Essa concepção defendida pela BNCC, porém, não deve ser interpretada como um processo de desenvolvimento natural ou espontâneo, pelo contrário, sinaliza a necessidade da intencionalidade educativa nas práticas pedagógicas na Educação Infantil (BRASIL, 2018).

Entretanto, mesmo com tais orientações, ainda é comum o uso de atividades mecanizadas, reprodução de exercícios fotocopiados, realização de muitas atividades impressas que, além de limitar o movimento e a interação entre as crianças, “suprimem e

impedem o desenvolvimento das capacidades que devem ser construídas e potencializadas nesta etapa” (AGUIAR; PALMA, 2018, p. 3).

Uma prática frequente que merece ser discutida e repensada é a antecipação e a formalização de conteúdos, pois a Matemática na Educação Infantil

não deve limitar-se à identificação e nomeação de números, formas geométricas básicas e sequências numéricas, antecipando atividades desenvolvidas no ensino nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Nesta perspectiva, compreendemos que essa prática não possibilita nas crianças o desenvolvimento e construção de noções e conceitos matemáticos, ou de outras áreas de conhecimento (AGUIAR; PALMA, 2018, p. 1).

Ou seja, nessa etapa de escolaridade ao invés de priorizar a formalização de noções e conceitos matemáticos, que é objetivo do Ensino Fundamental em diante (BRASIL, 2018), deve-se oportunizar a construção de noções básicas por meio de situações-problema que incentivem a autonomia e a interação com as demais crianças. As práticas pedagógicas da Educação Infantil devem contemplar por meio de brincadeiras e atividades lúdicas questões associadas às experiências das crianças, uma vez que em suas atividades cotidianas elas

se deparam frequentemente com conhecimentos matemáticos (contagem, ordenação, relações entre quantidades, dimensões, medidas, comparação de pesos e de comprimentos, avaliação de distâncias, reconhecimento de formas geométricas, conhecimento e reconhecimento de numerais cardinais e ordinais etc.) (BRASIL, 2018, p. 41).

Trabalhando dessa maneira, os professores podem colocar as crianças para pensar sobre situações em que elas têm condições de discutir, refletir, opinar, valorizando também os conhecimentos adquiridos a partir de suas vivências fora da escola. Para isso o professor precisa (re)conhecer as crianças como alunos que, embora jovens, são histórica e socialmente constituídos, ou melhor dizendo, em constituição, mas não exclusivamente por conhecimentos elencados em um currículo.

Dessa forma, a prática do professor da Educação Infantil deve se inspirar em atitudes que visam a problematização e a investigação de situações associadas ou provenientes de suas vivências. Atividades de modelagem matemática podem ser uma alternativa pertinente à tal prática, condizente com essas atitudes.

De acordo com Almeida, Silva e Vertuan (2012), Modelagem Matemática é uma alternativa pedagógica que visa abordar por meio da Matemática, situações não essencialmente matemáticas. Nesse sentido, “coloca o aluno frente a situações autênticas que ele presencia, ou pode vir a presenciar em sua vida, e o leva a interpretá-las com o auxílio da matemática” (TORTOLA; ALMEIDA, 2016, p. 85).

Atividades de modelagem matemática, portanto, vão para além da resolução de problemas, “são atividades reveladoras do pensamento que exigem que as próprias crianças desenvolvam interpretações matemáticas das situações” (FOX, 2006, p. 225). Elas valorizam as experiências e os conhecimentos dos alunos e, dessa maneira, eles têm a oportunidade de dar sentido às situações estudadas e têm condições de matematizá-las. Além disso, o uso de contextos do mundo real pode instigar os alunos a se interessar pela matemática e a utilizá-la para dar sentido ao mundo físico e social (FOX, 2006), já que problemas exteriores à sala de aula nem sempre estão completos e bem definidos, havendo a necessidade de buscar mais informações para compreendê-los (TORTOLA; ALMEIDA, 2016).

Tendo em vista que a Modelagem Matemática prioriza situações de acordo com as vivências dos alunos e os encorajam não só a fornecer uma resposta, mas também a explicar seu raciocínio (FOX, 2006), consideramos que a Educação Infantil é o momento oportuno para abordar as primeiras noções que servirão como base para a construção do conhecimento matemático, especificamente de raciocínios que devem ser desenvolvidos ao longo da vida escolar do aluno e que constituirão sua maneira de ver o mundo e de pensar matematicamente.

Há na literatura várias discussões em relação aos tipos de pensamentos e/ou raciocínios matemáticos e sobre como podem ser desenvolvidos ao longo do contexto escolar.

O pensamento ou raciocínio algébrico, por exemplo, está relacionado à identificação de padrões ou regularidades que aparecem na matemática, os quais podem ser reconhecidos, expandidos ou generalizados. Pode ser explorado por meio da investigação de sequências de números e/ou imagens e, mais tarde, por meio de relações como  $a + b = b + a$ , isto é, sendo  $a$  e  $b$  números naturais a ordem das parcelas não altera a soma (PERES, 2018). Está relacionado, ainda, ao pensamento ou raciocínio funcional, por meio do qual as primeiras regularidades podem ser estabelecidas ao utilizar, por exemplo, uma tabela para descrever um conjunto de dados, abordando ideias associadas à função (GAITA; WILHELMI, 2019).

O pensamento ou raciocínio geométrico contempla desde as primeiras interações das crianças com objetos do mundo físico, reconhecendo o espaço ao seu redor, a partir de percepções visuais e táteis, caracterizando e classificando intuitivamente os objetos de acordo com sua forma, tamanho, posição, cor, até “a exploração consciente do espaço, a comparação de elementos observados e o estabelecimento de relações entre eles. Além disso, pressupõe conhecer propriedades de figuras, construir modelos, elaborar conclusões (BARBOSA, 2011, p. 27).

O pensamento ou raciocínio proporcional, por sua vez, é “utilizado para descrever conceitos e pensamentos requeridos para a compreensão de taxas, razões e proporções”

(NORTON, 2005, p. 17). Está associado à “consideração de um número em termos relativos, ao invés de termos absolutos” (ONTARIO, 2012, p. 3) e está intimamente ligado ao estabelecimento de relações de natureza multiplicativa (NORTON, 2005) e, portanto, é necessário para o entendimento de porcentagens, taxas de variação, trigonometria, álgebra e outras vertentes da matemática. É sobre esse raciocínio<sup>1</sup> que nos debruçamos nesta pesquisa.

O conceito de raciocínio proporcional vai muito além de mecanização de estratégias formais de resolução de problemas, estando associado à capacidade de analisar, de forma consciente, as relações entre quantidades, evidenciada por argumentos e explicações sobre as relações proporcionais (COSTA; PONTE, 2008, p. 66).

Com base nas considerações de Costa e Ponte (2008), acreditamos que o desenvolvimento do raciocínio proporcional, particularmente na Educação Infantil, deve partir do princípio de valorizar as estratégias utilizadas pelos alunos na resolução de problemas, uma vez que, de acordo com os autores, eles já conseguem resolver situações-problema que envolvem relações proporcionais no seu dia-a-dia, antes mesmo do ensino formal, recorrendo a estratégias intuitivas, de caráter informal, ainda que geralmente aditivas. Caso contrário, eles tendem a utilizar estratégias formais, ensinadas na escola, muitas vezes, porém, sem compreender o que estão fazendo, o que pode acarretar o uso de regras e mecanismos sem necessidade, descreditando seu conhecimento intuitivo.

“Embora o raciocínio proporcional possa ser desenvolvido antes e fora da escola, é nela que os conhecimentos iniciais e espontâneos se tornam sistematizados e mais efetivos” (SPINILLO, 1994, p. 113). Dessa forma, os professores da Educação Infantil devem estar preparados para formalizar noções que as crianças trazem de seu cotidiano e propiciar a construção de novos conhecimentos, preparando os alunos para futuras formalizações. Isso pode se dar por meio de jogos, brincadeiras e outras atividades lúdicas baseadas em experiências dos alunos.

Consideramos, portanto, que atividades de modelagem matemática podem ser utilizadas para auxiliar no desenvolvimento do raciocínio proporcional, uma vez que primam pela problematização e investigação de situações associadas às experiências dos alunos, além deles ser encorajados a desenvolver uma gama de estratégias de resolução de problemas e a refletir sobre suas próprias ideias (FOX, 2006).

---

<sup>1</sup> Como os termos Pensamento Proporcional e Raciocínio Proporcional são utilizados com frequência na literatura como sinônimos, e devido ao termo raciocínio ser utilizado no senso comum para indicar formas de pensamento com mais liberdade e espontaneidade, porém sem descartar a capacidade de interpretar, elaborar e verificar hipóteses, justificar ideias e argumentar, como consideramos que é o caso dos alunos da Educação Infantil, optamos neste texto pelo uso do termo Raciocínio Proporcional.



Nesse contexto, nossa pesquisa tem como objetivo investigar a questão: *Como se dá o desenvolvimento do raciocínio proporcional em atividades de modelagem matemática desenvolvidas por alunos da Educação Infantil?*

Entendemos que ao propor essa questão para investigação, buscamos fomentar o uso da Modelagem Matemática como alternativa pedagógica para a Educação Infantil e que, por meio dela, é possível explorar nos encaminhamentos dos alunos o desenvolvimento de ideias e formas de pensar características do raciocínio proporcional.

Para isso foram desenvolvidas cinco atividades de modelagem matemática com 17 alunos de uma turma de maternal III, com 3 e 4 anos, em um Centro Municipal de Educação Infantil, público, localizado no Centro Ocidental Paranaense. Dentre essas cinco atividades, escolhemos três para analisar, levando em consideração os momentos de familiarização de alunos com a modelagem matemática conforme sugerem Almeida, Silva e Vertuan (2012). As outras duas são descritas sucintamente nos Apêndices C e D.

Os resultados desta pesquisa foram utilizados para a confecção de um produto educacional, que consiste em um material pedagógico<sup>2</sup> com atividades e orientações para professores que pretendem trabalhar com modelagem matemática e explorar o raciocínio proporcional. Nesse material pedagógico, descrevemos e fundamentamos teoricamente as três atividades analisadas e fazemos sugestões e orientações quanto ao encaminhamento delas em sala de aula, tomando como base a experiência que vivenciamos e que deu origem aos dados desta pesquisa. Desse modo, com esse material pedagógico pretendemos fornecer um norte para o professor da Educação Infantil que deseja incluir atividades de modelagem matemática em suas práticas e criar condições para seus alunos desenvolver o raciocínio proporcional. Também deixamos como sugestões as outras duas atividades desenvolvidas, contextualizando uma possível problemática e deixando a cargo do professor o desenvolvimento. Ressaltamos que as sugestões dadas não precisam ser seguidas à risca, inclusive, é interessante que o professor se aventure em novos encaminhamentos em conformidade com as resoluções de seus alunos. Nos anexos desse material pedagógico disponibilizamos, ainda, alguns moldes, figuras e imagens que podem ser impressas pelos professores quando for desenvolver qualquer uma dessas atividades em sala de aula.

A dissertação está estruturada da seguinte forma: introdução, cinco capítulos e considerações finais. Na introdução apresentamos o tema e a justificativa por sua escolha, a questão que orientará o desenvolvimento da pesquisa e o contexto em que foi realizada. No

---

<sup>2</sup> O produto educacional pode ser acessado por meio do link: <https://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/>. Depois de clicar no link, você pode digitar o nome da autora ao lado da lupa em: “buscar no repositório”.

Capítulo 1 abordamos o Ensino de Matemática na Educação Infantil, apontando algumas especificidades. No Capítulo 2 tratamos sobre Modelagem e modelos matemáticos no âmbito da Educação Matemática e da Educação Infantil, discutimos nosso entendimento e apresentamos alguns trabalhos desenvolvidos nesse contexto. No Capítulo 3 discutimos o raciocínio proporcional e apontamos aspectos que podem ser utilizados para identificar ou auxiliar na sua mobilização ou desenvolvimento, particularmente na Educação Infantil. No Capítulo 4 apresentamos o contexto da pesquisa e nossas opções metodológicas. No Capítulo 5 fazemos a descrição, análise e discussão de três das cinco atividades de modelagem matemática desenvolvidas pelos alunos. E, por fim, nas Considerações Finais apresentamos resultados da pesquisa e suas implicações para o uso da Modelagem Matemática e para a identificação, mobilização e/ou desenvolvimento do raciocínio proporcional no contexto na Educação Infantil.

## 1 ENSINO DE MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO INFANTIL

A matemática na Educação Infantil tem suas especificidades devido à faixa etária dos alunos e pelo fato do currículo escolar ser trabalhado de acordo com dois eixos estruturantes: interações e brincadeiras (BRASIL, 2018), ou seja, para trabalhar qualquer ideia, noção ou conteúdo deve-se considerar esses dois eixos.

A interação durante o brincar caracteriza o cotidiano da infância, trazendo consigo muitas aprendizagens e potenciais para o desenvolvimento integral das crianças. Ao observar as interações e a brincadeira entre as crianças e delas com os adultos, é possível identificar, por exemplo, a expressão dos afetos, a mediação das frustrações, a resolução de conflitos e a regulação das emoções (BRASIL, 2018, p. 35).

Segundo Azevedo e Passos (2012), o ensino da Matemática na Educação Infantil deve acontecer de maneira livre por meio de brincadeiras, desde que possuam intencionalidade pedagógica, ou seja, é preciso um olhar atento por parte do professor para identificar situações do cotidiano do aluno que podem ser exploradas matematicamente valorizando suas potencialidades, despertando seu interesse e proporcionando o desenvolvimento de diferentes linguagens.

Nesse contexto, propomos no âmbito desta pesquisa o uso da modelagem matemática como prática para a Educação Infantil, pois permite que os alunos vivenciem situações que exigem o seu envolvimento para resolvê-las, valorizando o contexto em que vivem e suas experiências com ele, proporcionando o uso da linguagem matemática para abordar conceitos matemáticos enquanto problematizam e investigam situações associadas ao seu cotidiano, às suas vivências (ENGLISH, 2006; FOX, 2006; TORTOLA, ALMEIDA; 2016).

Mas, assim como outras atividades desenvolvidas nesse contexto, atividades de modelagem matemática devem levar em consideração as particularidades da Educação Infantil, tanto no que diz respeito às ideias e conceitos que precisam ser ensinados, quanto em relação à forma de ensinar.

As autoras Azevedo e Passos (2012) destacam que o desafio nessa etapa de escolaridade é um ensino que possibilite ao aluno a construção de noções e conceitos matemáticos por meio do que mais faz: brincar. Em resposta a esse desafio, as autoras propõem o uso de brinquedos, materiais pedagógicos e jogos, que são típicos do ensino durante a infância.

Além dos jogos e brincadeiras, Grando e Moreira (2012, p. 122) citam a “leitura e dramatização de histórias infantis, exploração e movimentação no espaço e organização de

informações” como atividades a se explorar no ensino de matemática na Educação Infantil, pois além de ser vivenciadas corporalmente pelos alunos, valorizam a oralidade e a expressão e podem ser o ponto de partida para o professor incentivar o registro escrito.

A oralidade é o principal meio que os alunos utilizam para se comunicar, é por meio dela que eles se expressam, expõem suas ideias, dúvidas e opiniões, resolvem problemas, compartilham conhecimento. Já o registro escrito permite a eles além de externalizar seus pensamentos, organizar suas ideias, o que favorece a aprendizagem e auxilia o professor na elaboração das próximas tarefas, partindo do que já sabem.

Dentre os registros escritos utilizados na Educação Infantil, destaca-se o registro pictórico, que diz muito a respeito do conhecimento de mundo que os alunos possuem, além de auxiliar no desenvolvimento da noção espacial e da proporcionalidade. Esse registro não deve ser considerado como pronto e acabado, podendo ser revisado após a interação e a socialização dos alunos com demais colegas e professores, fazendo com que tenham consciência de suas ações.

Segundo Saiz (2006, p. 143) por meio das interações que ocorrem entre a criança e objetos, pessoas ou lugares e das atividades que acontecem no ambiente em que está inserida, ela desenvolve noções espaciais, já que essas noções são exploradas desde os primeiros movimentos das crianças e que continuam ao longo de sua infância e da adolescência, sendo assim, elas “vão aprendendo a organizar seus deslocamentos em um espaço cada vez mais amplo e elaborando seus diversos conceitos sobre o espaço”.

Smole (2000) afirma que a geometria na Educação Infantil não pode se restringir à identificação de formas geométricas, é preciso auxiliar os alunos na organização do esquema corporal, orientação e percepção, pois o corpo passa a ser um ponto de referência para se situar e situar os objetos em seu espaço e tempo. Essas abordagens são importantes para que posteriormente os alunos possam abandonar esse sistema de referências egocêntrico e descrever localizações em relação a outros referenciais, sejam eles pessoas, objetos, lugares, etc.

No que se refere ao conceito de número, Moreno (2006, p. 47) sugere que, para alunos da Educação Infantil e do 1º ano do Ensino Fundamental, seja utilizada uma linguagem que tenha como ponto de partida a teoria de conjuntos, pois segundo o autor “por meio das relações lógicas aplicadas sobre conjuntos de elementos (inclusão de classes e relações assimétricas)”, os alunos se apropriam do conceito de número e o compreendem como a síntese entre as operações de classificação e de seriação.

Para trabalhar com classificação e seriação, Souza e Lima (2013) aconselham o uso de brinquedos, sucatas, objetos coloridos, blocos lógicos, enfim, objetos que podem despertar o interesse dos alunos e os permitam tocar, mexer, manipular. Dessa forma, por meio de observações e orientações do professor, os alunos podem conhecer e se familiarizar com atributos dos objetos, observando semelhanças e diferenças entre eles, quando organizados em um determinado conjunto, dando início aos processos de classificação e seriação.

Na aprendizagem da matemática e na construção do número é fundamental que a criança se aproprie dos conceitos que antecedam à escrita do número [...]. Daí a necessidade da construção dos conceitos de classificação, seriação, inclusão, conservação e outros (WERNER, 2008, p. 6).

Conforme Souza e Lima (2013) a classificação está associada a dois tipos de relações: a de pertinência e a de inclusão de classes. A relação de pertinência está ligada à classificação por meio da relação entre cada elemento com a classe a que pertence, por meio da observação os objetos ou materiais são separados por semelhanças, por exemplo, cor, forma, tipo. Já a relação de inclusão de classes ocorre quando é formada uma subclasse considerando uma classe anterior, ou seja, é estabelecida uma relação entre parte e todo, depois de separar peças por cor, por exemplo, o aluno cria uma subclasse para separar as peças por formas. Ao proporcionar atividades que envolvem a separação do todo, os alunos, de acordo com Leonardo (2017), aprendem sobre a divisão do todo em partes, e que para formar o todo novamente precisam juntar as partes, trabalhando assim o conceito de classificação.

A classificação auxilia o aluno a organizar a realidade que o cerca e é por meio da classificação que ele adquire a “capacidade de separar objetos, pessoas, fatos ou ideias em classes ou grupos, utilizando como critério uma ou várias características comuns” (SOUZA; LIMA, 2013, p. 23898).

A seriação, por sua vez, refere-se à comparação entre objetos, pessoas ou animais, buscando atributos que os diferem e consiste em ordenar objetos de acordo com um desses atributos, seja, por exemplo, de forma crescente (do menor para o maior), ou decrescente (do maior para o menor) originando posteriormente uma sequência (LEONARDO, 2017).

Para Moreno (2006) nas atividades diárias em sala de aula, os conceitos de classificações e seriações são trabalhados com frequência. Classificando e seriando os alunos estabelecem relações qualitativas, e não quantitativas, sobre os objetos.

Quando uma criança guarda um quebra-cabeças na caixa do quebra-cabeças ou os pincéis na caixa dos pincéis, está fazendo uma classificação, embora não esteja consciente disso. Do mesmo modo, quando faz “torres” com cubos de tamanhos diferentes, está fazendo uma seriação que garante a estabilidade da construção (MORENO, 2006, p. 47-48).

Percebe-se que “antes de qualquer aprendizagem escolar, as crianças podem resolver problemas a seu modo” (MORENO, 2006, p. 55), ainda que usando estratégias e recursos de maneira inconsciente, assim, é importante trabalhar com problemas desde cedo, antes que os alunos possuam soluções preestabelecidas para resolvê-los, para que tomem consciência de ações, atitudes e formas de agir diante de determinados problemas e sejam desafiados a buscar novas estratégias para novos problemas.

Qual seria o obstáculo que um aluno pode enfrentar se os problemas que lhe são oferecidos são sempre os mesmos? Por que se empenharia na busca de novos modos de resolução se com o que sabe consegue resolver? Como poderia decidir quais procedimentos utilizar se o professor lhe “dita” o que deve fazer? (MORENO, 2006, p. 51).

Esses questionamentos nos fazem refletir como deve ser o ensino de matemática na Educação Infantil, uma vez que, segundo Moreno (2006), os alunos não aprendem matemática somente resolvendo problemas, é preciso provocar reflexões sobre as diferentes resoluções desenvolvidas e comunicadas por eles e por seus colegas, verificando a validade e pertinência aos problemas propostos.

A validação das respostas e/ou procedimentos é importante para a aprendizagem da matemática, visto que é por meio dela que os alunos reconhecem os resultados como válidos, falsos ou insuficientes e estratégias como eficazes ou não. Dessa forma, quando suas estratégias não resultar em resultados válidos, os alunos têm a necessidade de buscar novos procedimentos para que a resolução satisfaça às condições do problema (MORENO, 2006). “Problematizar situações simples e do cotidiano da criança mostra-se uma prática pedagógica interessante, pois coloca a criança no movimento do pensamento matemático (GRANDO; MOREIRA, 2012, p. 122). Desta forma, acreditamos que a Modelagem Matemática é uma alternativa que oportuniza esse pensar matemático aos alunos.

A Modelagem Matemática permite ir além da resolução de problemas, pois oportuniza a comunicação de ideias durante a busca pela solução do problema, assim progressivamente eles avaliam e revisam suas formas de pensar (ENGLISH, 2006).

Além disso, atividades de modelagem matemática exigem que as próprias crianças desenvolvam interpretações matemáticas das situações. Portanto, escolhemos a Modelagem Matemática para desenvolver o raciocínio proporcional com alunos da Educação Infantil, pois por meio de problemas desafiadores e relevantes, os alunos são encorajados a desenvolver e explorar ideias matemáticas que tenham significado não somente no contexto escolar mas no mundo real (FOX, 2006).

## 2 MODELAGEM MATEMÁTICA

Neste capítulo apresentamos nosso entendimento sobre Modelagem Matemática e sobre modelos matemáticos, que estão alinhados à perspectiva da Educação Matemática, e de como atividades de Modelagem podem ser desenvolvidas no âmbito escolar desde os primeiros anos escolares. Discutimos, ainda, algumas características, ações e procedimentos dessas atividades, além de abordar especificidades da Modelagem Matemática quando trabalhada com alunos da Educação Infantil, olhando para pesquisas desenvolvidas nesse contexto.

### 2.1 MODELAGEM MATEMÁTICA E MODELOS NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Na literatura nos deparamos com vários entendimentos de Modelagem Matemática e em relação ao seu uso no contexto educacional. Esses entendimentos refletem os olhares de cada pesquisador, que vêm revestidos de suas experiências, interesses e concepções, e contribuem para a compreensão do que chamamos Modelagem Matemática na perspectiva da Educação Matemática. Para o presente estudo nos fundamentamos no entendimento de Almeida, Silva e Vertuan (2012) que propõem a Modelagem Matemática como uma alternativa pedagógica às práticas escolares, que engloba a investigação de uma situação-problema não essencialmente matemática, na qual os alunos buscam na matemática subsídios para solucionar um problema definido.

Almeida, Silva e Vertuan (2012) explicam que a Modelagem Matemática, ou abreviadamente Modelagem, está relacionada com um “modo”, uma “maneira” de trabalhar com atividades em aulas de matemática. Tem a intencionalidade de envolver os alunos com situações autênticas que eles tenham presenciado ou possam vir a presenciar em sua vida (TORTOLA; ALMEIDA, 2016).

As discussões sobre modelagem no âmbito da Educação Matemática, contemplam reflexões acerca do ensino de matemática, em defesa de uma alternativa pedagógica que oportunize aos educadores criar oportunidades de aprendizagem, potencializando habilidades que esperamos que os alunos venham a desenvolver, como resolver problemas e raciocinar matematicamente (ENGLISH, 2006; FOX, 2006; BRASIL, 2018).

Considerando que habilidades expressam aprendizagens que devem ser asseguradas aos alunos nos diferentes contextos escolares (BRASIL, 2018), consideramos que os educadores, desde os primeiros anos escolares, precisam alinhar atividades de modelagem matemática às atividades que desenvolvem habitualmente em sua prática de sala de aula, uma vez que, de acordo com Fox (2006, p. 223), atividades de modelagem matemática “são atividades reveladoras do pensamento, que exigem que as próprias crianças desenvolvam interpretações matemáticas das situações”.

Essas interpretações envolvem a análise de uma situação-problema e o uso de procedimentos e conceitos matemáticos, que são acionados com a finalidade de determinar para a problemática uma solução. Almeida, Silva e Vertuan (2012) descrevem esse delineamento como a síntese de uma atividade de modelagem matemática, cuja problemática a ser estudada consiste na situação inicial, e a solução do problema, geralmente apresentada a partir da produção de um modelo matemático, na situação final. Os procedimentos e conceitos que orientam a passagem da situação inicial à situação final são descritos pelos autores em quatro fases: inteiração; matematização; resolução; e interpretação de resultados e validação.

A inteiração é a fase em que os alunos se familiarizam com o tema a ser estudado; buscam conhecer características e especificidades da situação. Nessa fase, os alunos cercam-se de informações que são obtidas por meio de coleta de dados qualitativos e quantitativos, seja por contato direto ou indireto. “A inteiração conduz a formulação do problema e a definição de metas para sua resolução” (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p. 15). Essa formulação está relacionada a algo que se pretende investigar, ao mesmo tempo em que requer que alguns aspectos sejam conhecidos. E mesmo que seja uma fase inicial, ela pode se estender durante toda a atividade, uma vez que novas informações podem ser necessárias.

A matematização está relacionada ao momento em que a matemática é acionada para auxiliar na interpretação e na resolução da situação-problema, ou seja, a situação que inicialmente é discutida em termos de uma linguagem natural, sob o ponto de vista do fenômeno, agora é descrita e analisada com o auxílio da linguagem matemática. Nessa transição de linguagens as descrições e análises matemáticas são realizadas por meio da identificação e seleção de variáveis, formulação de hipóteses e realização de simplificações (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012).

A resolução, por sua vez, refere-se à busca por uma solução ao problema sob investigação, que geralmente se dá por meio da construção de um modelo matemático, que permite descrever a situação, analisar matematicamente aspectos importantes em relação ao



problema e fornecer uma resposta. Além disso, o modelo matemático elaborado também pode ser útil em realizar previsões acerca do problema em estudo.

E, por fim, a fase interpretação de resultados e validação, consiste na análise, interpretação e verificação do modelo matemático e de seus resultados. Permite dizer se o modelo obtido é adequado e condizente com a situação estudada. Nessa fase, o objetivo não é olhar isoladamente para a resolução matemática associada ao problema, mas sim considerá-la tanto em relação aos procedimentos empreendidos, quanto à sua adequação para a situação (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012).

Essas fases não precisam acontecer necessariamente na ordem apresentada, pois segundo Almeida, Silva e Vertuan (2012) elas podem ser revisitadas a qualquer momento durante o desenvolvimento da atividade, conforme as necessidades que se apresentar.

Além das quatro fases, Fox (2006) acrescenta a importância de uma plenária em que os alunos apresentam aos seus colegas os modelos que criaram, momento que oferece oportunidades para desenvolver a linguagem oral, sua expressividade, a comunicação de ideias, observar e refletir sobre as diferentes opiniões apresentadas, gerando questionamentos, diálogo, e favorecendo o desenvolvimento do senso crítico.

Em termos práticos, consideremos uma situação em que se deseja problematizar e investigar como organizar os brinquedos utilizados em um Centro Municipal de Educação Infantil, conforme experiência relatada por Rezende, Coutinho e Tortola (2019), atividade desenvolvida com crianças com idades entre 4 e 5 anos.

Para que os alunos tomassem ciência sobre o modo que os brinquedos são organizados e para que a situação fosse problematizada, os alunos foram direcionados ao almoxarifado, local onde os brinquedos ficam guardados. Em seguida escolheram alguns brinquedos para brincar e, em uma roda de conversa, eles comentaram sobre a necessidade de organizar os brinquedos, pois foi difícil manuseá-los da forma como estavam dispostos, misturados em alguns recipientes. Essas ações foram orientadas no sentido de fazer com que os alunos se familiarizassem com a situação, conhecessem algumas informações e definissem o problema para a investigação e caracterizam a fase que Almeida, Silva e Vertuan (2012) definiram como *inteiração*.

A problemática foi pensada inicialmente em termos de uma linguagem natural, ou seja, no contexto da situação-problema – organizar os brinquedos para facilitar o manuseio –, porém os alunos foram instigados a usar a matemática para pensar sobre ela e resolvê-la, isto é, por meio de uma roda de conversa, eles foram levados a concluir que não bastava separar e alocar os brinquedos em recipientes, para organizá-los eles precisavam observar suas

características, compará-los e classificá-los segundo suas semelhanças e/ou diferenças. Esse novo olhar para a situação-problema, em termos da matemática e de sua linguagem, caracteriza a fase de *matematização*, conforme Almeida, Silva e Vertuan (2012).

Após a análise e a comparação das características dos brinquedos, os alunos definiram critérios que foram adotados por eles para a organização, isto é, que serviram como base para classificá-los. Os brinquedos foram classificados em cinco classes. A primeira foi constituída por bonecas – pelo fato de ser o tipo de brinquedo em maior quantidade; a segunda por carrinhos; a terceira por brinquedos relacionados à cozinha; a quarta por brinquedos que produziam sons; e a quinta pelos brinquedos restantes: monstrinhos, itens de salão de beleza, ursinhos, peças de quebra-cabeça, entre outros. Para essa última organização, os alunos não estabeleceram um critério específico, porque havia cinco recipientes disponíveis para alocar os brinquedos e, por isso, colocaram no último recipiente brinquedos com características diversas, que não atendiam aos critérios anteriores. Essa classificação que os alunos fizeram, segundo os critérios que definiram, foi registrada por meio de desenhos e, com o auxílio da professora, da escrita de algumas palavras. Essa organização dos brinquedos caracteriza a fase de *resolução*, definida por Almeida, Silva e Vertuan (2012).

Em uma conversa posterior à organização dos brinquedos, eles tiveram a oportunidade de falar sobre a atividade que desenvolveram, de exibir seus desenhos e registros e avaliá-los, pensando, inclusive, se os critérios definidos serviriam para a organização dos brinquedos que estavam alocados nos outros recipientes. Os alunos consideraram tal organização satisfatória, mostrando-se convencidos de que dessa forma, o manuseio dos brinquedos foi facilitado e eles se tornaram mais acessíveis. Inclusive, os autores Rezende, Coutinho e Tortola (2019), comparam a organização dos alunos à organização que observamos em lojas de departamento, nas quais os brinquedos são alocados nas prateleiras segundo suas características, assim como os alunos fizeram, podendo ser essa a inspiração da organização realizada por eles. Essas ações de falar a respeito da atividade que desenvolveram, de avaliar a organização por meio da comparação e classificação dos brinquedos em termos da situação-problema – para facilitar o manuseio – e de ponderar sobre seu uso nesse e em outros contextos caracterizam a fase que Almeida, Silva e Vertuan (2012) definiram como *interpretação de resultados e validação* e a plenária indicada por Fox (2006).

Nessa atividade, a situação inicial foi definida pela desorganização dos brinquedos, que estavam alocados em recipientes de modo que dificultavam o seu manuseio; e a situação final foi caracterizada pela organização dos brinquedos, classificados em cinco recipientes,

conforme critérios definidos pelos alunos. O Quadro 1 ilustra com uma síntese o desenvolvimento da atividade.

**Quadro 1:** Síntese da atividade Organização dos brinquedos



**Fonte:** Elaborado com base nos registros de Rezende, Coutinho e Tortola (2019).

O Quadro 1 mostra que a situação final foi caracterizada pela organização dos brinquedos em recipientes, conforme comparação de suas características e classificação a partir dos critérios definidos. Os alunos apresentaram essa organização por meio de desenhos que explicam o conteúdo de cada classe, a professora fez uso de algumas palavras para indicá-la. Esses registros podem ser interpretados como modelos matemáticos para a organização dos brinquedos.

Um modelo matemático é “um sistema conceitual, descritivo ou explicativo, expresso por meio de uma linguagem ou uma estrutura matemática” e são elaborados de acordo com alguma finalidade, seja para “prever o comportamento de um fenômeno, ser demonstrativo de algo (como uma maquete), ter um fim pedagógico (auxiliar na ilustração de algum conceito), ser descritivo de algo, entre outras” (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p. 13). Nessa atividade por exemplo, os modelos matemáticos, constituídos pelos desenhos e registros escritos, revelam os critérios adotados pelos alunos para a classificação dos brinquedos, com o intuito de ser descritivo de algo, ou seja, de descrever uma maneira de organizar os brinquedos. Os alunos, inclusive, poderiam ter pensado outras formas de organizar os brinquedos, como por exemplo, por tamanho ou por cor (REZENDE; COUTINHO; TORTOLA, 2019), o que descreveria uma nova forma de organizar os brinquedos.

Segundo Tortola (2012, p. 30), os modelos matemáticos “nos permitem aprender, desenvolver e aplicar conceitos matemáticos relevantes, além de compreender como se dá esse entendimento”. Na situação apresentada, sobre a organização dos brinquedos, pode-se dizer que os alunos aprenderam, desenvolveram e aplicaram no estudo de uma situação que faz parte de sua rotina noções associadas aos conceitos de comparação e de classificação, ao observar características dos brinquedos e, em virtude delas, decidir por separá-los ou agrupá-los em uma classe.

Outros exemplos de modelos matemáticos podem ser encontrados na literatura em diferentes níveis de escolaridade. Na pesquisa de Silva (2017), por exemplo, alunos do Ensino Superior, no Curso de Licenciatura em Química e que cursavam uma disciplina de Cálculo Diferencial e Integral 1, definiram um problema sobre ebulição de uma solução e o resolveram usando expressões algébricas, com auxílio do software Curve Expert. O Quadro 2 apresenta a problemática e o modelo matemático obtido pelos alunos.

**Quadro 2:** Modelo matemático produzido por alunos do Ensino Superior

Problemática: Dependendo da quantidade de soluto, qual será a temperatura de ebulição?

Modelo matemático:  $y = 86,9 x^{0,05}$ , em que  $y$  é a temperatura (em °C) da solução de acordo com a quantidade de soluto  $x$ , em gramas, de cloreto de sódio.

**Fonte:** Elaborado com base nos registros de Silva (2017)

Na pesquisa de Almeida e Silva (2010), encontramos alguns modelos matemáticos elaborados por alunos do Ensino Médio sobre temas diversos, dentre os quais destacamos


dois. Para o tema sobre o acúmulo de pratos no ‘lambe’ do restaurante, os alunos escreveram o modelo exponencial  $P(t) = 69,9 \cdot (1,6)^t$ , onde  $t$  é o tempo e  $P(t)$  o número de pratos sujos no instante  $t$ . Para o tema sobre redução da taxa de analfabetismo no Brasil, os alunos encontraram uma função definida por partes, conforme mostra o modelo matemático a seguir:

$$R(i) = \begin{cases} -2,7i^2 + 3i + 66 & \text{para } 1 \leq i < 5 \\ -\frac{2}{3}i + \frac{49}{3} & \text{para } 5 \leq i < 8 \end{cases},$$

onde  $R(i)$  é taxa de analfabetismo no Brasil no ano  $i$  (em %).

Tortola e Almeida (2013), por sua vez, apresentam modelos matemáticos elaborados por alunos de um 4º ano do Ensino Fundamental, utilizando registros numéricos, figurais e linguagem natural, como mostra o Quadro 3.

### Quadro 3: Situação-problema e resolução de alunos do 4º ano do Ensino Fundamental




**Seu espaço na sala de aula**

Uma sala de aula é ocupada por estudantes, pelo professor e por objetos que fazem parte do ambiente escolar, como cadeiras, carteiras e armários. Para que você permaneça em um ambiente mais agradável, existe uma lei que determina que em uma sala de aula cada estudante tem direito a uma área de 1 metro quadrado ( $m^2$ ).


**VAMOS ESTUDAR...**


---

Quantos alunos cabem na sua sala de aula?




**Situação-problema**



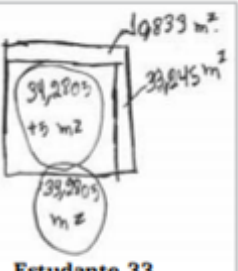


R: na sala de aula cabem  
na 39 alunos,

**Estudante 21**

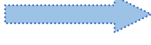


**Estudante 30**



**Estudante 33**

**Resolução**



**Fonte:** Elaborado com base nos registros de Tortola e Almeida (2013)

Os modelos matemáticos presentes na literatura, quando comparados, sinalizam diferentes características de acordo com o nível de escolaridade dos alunos que os elaboraram, nos permitindo, inclusive, falar de particularidades. No caso da Educação Infantil, interesse de nossa pesquisa, observamos como especificidades desse nível de escolaridade o uso de

recursos tais como desenhos, colagens, pintura, entre outros (ANTONIAZZI, 2016; TORTOLA, 2016).

Todavia, é um equívoco dizer que os modelos produzidos em um contexto escolar são melhores ou mais ou menos sofisticados dos que os produzidos em outros (TORTOLA, 2016), pois cada um utiliza os conhecimentos e recursos que lhe estão disponíveis, condizentes com sua série e idade.

Porém, o desenvolvimento de atividades de Modelagem e conseqüentemente os modelos elaborados, em sua maioria, são ainda destinados a alunos dos Anos finais do Ensino Fundamental, Ensino Médio, Educação de Jovens e Adultos e Ensino Superior (SILVA; KLÜBER, 2012). Tortola (2016) explica que esse fato pode estar relacionado ao motivo de que a maioria dos pesquisadores que realizam pesquisas e divulgam seus resultados em trabalhos científicos está vinculada a universidades e, por manter sua prática de pesquisa voltada a seus interesses, quase sempre relacionados com as atividades que desenvolvem, os trabalhos acabam, predominantemente, divulgando experiências realizadas a partir dos anos finais do Ensino Fundamental. Outro suposto motivo apontado pelo autor é a falta de conhecimento da prática pedagógica e da matemática abordada na Educação Infantil, gerando uma falsa ideia, com base nos modelos apresentados na literatura, que produzir modelos é uma atividade muito complexa ou até mesmo muito difícil para alunos que estão no início de sua jornada escolar (TORTOLA, 2016).

A Modelagem Matemática, porém, propicia aos alunos oportunidades para trabalhar com seus conhecimentos matemáticos, sob seu ponto de vista de interpretação do problema (FOX, 2006). Não podemos, de forma alguma, compreender a Modelagem nos anos iniciais do Ensino Fundamental ou na Educação Infantil como uma adaptação dos conteúdos de séries posteriores, ela deve ser orientada pelo professor de modo a abordar conteúdos condizentes com idade e série dos alunos (TORTOLA, 2016).

Nessa perspectiva, há vários estudos que defendem a implementação da Modelagem Matemática desde os primeiros anos escolares (ENGLISH, 2006; 2009; FOX, 2006; TORTOLA, 2012; 2016), uma vez que reconhecem que “as crianças trazem para a escola poderosas experiências, conhecimentos matemáticos, habilidades e disposições” (FOX, 2006, p. 221), adquiridos no contexto familiar, por meio de brincadeiras e interações com o mundo (MENDES; FILHO; PIRES, 2011), que podem ser utilizados na análise e interpretação de situações-problema associadas a suas vivências, como atividades de modelagem propõem.

Dessa forma, corroboramos com tais autores que sugerem que a Modelagem Matemática seja inserida nas práticas escolares desde os primeiros anos, com as devidas

adequações. Como na Educação Infantil as aulas não são separadas por disciplinas, mas por dois eixos estruturantes, interações e brincadeiras, nos quais estão concentrados os conteúdos que devem ser ensinados aos alunos (BRASIL, 2018), as atividades de modelagem matemática desenvolvidas nesse contexto devem ser alinhadas a esses dois eixos, isto é, devem prezar pelas interações entre os alunos e por ações investigativas que não descaracterize o brincar.

Nesse contexto, o uso da modelagem pode auxiliar no desenvolvimento de estratégias e de raciocínios, já que atividades de modelagem não determinam um caminho a seguir para a resolução de uma situação-problema, elas requer um esforço dos alunos de modo que sintam necessidade de refletir sobre suas próprias ideias (FOX, 2006).

Além disso, o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática na Educação Infantil é essencial para que explorações posteriores sejam mais produtivas e que a intimidade com a Modelagem Matemática possa proporcionar aos alunos o entendimento e a familiaridade com a investigação de situações-problema e a produção e interpretação de modelos matemáticos.

Entretanto, mediante os argumentos colocados, como os educadores da Educação Infantil podem trazer atividades de modelagem matemática para a prática da sala de aula, alinhando-as aos conteúdos previstos no plano de trabalho docente e à faixa etária dos alunos, respeitando e valorizando suas vivências?

Sugerimos a inserção de atividades de modelagem matemática por meio dos três momentos de familiarização de acordo com Almeida, Silva e Vertuan (2012), ou seja, a inserção pode acontecer de forma gradativa com o intuito de propiciar aos alunos intimidade com o desenvolvimento desse tipo de atividades e a lidar com situações que exigem reflexão.

Em um primeiro momento o professor pode propor aos alunos um tema para ser estudado e, a partir desse tema, apontar um problema, o qual deve ser investigado por eles. O professor pode fornecer os dados e informações necessários para solucionar o problema, e os alunos assumem a responsabilidade de analisar essas informações, realizar simplificações, definir hipóteses e variáveis, fazer a transição da linguagem natural do fenômeno para uma linguagem matemática e, por fim, de obter e validar um modelo matemático, que indica uma resposta para o problema proposto inicialmente.

Em um segundo momento, o professor pode escolher um tema e apresentar um problema a ser investigado pelos alunos, a responsabilidade deles é de complementar ou realizar a coleta de dados e analisar as informações necessárias para solucionar o problema.

Nessas referidas atividades, os alunos são mais responsáveis pela condução e produção do modelo matemático, interpretando-o e verificando se ele é pertinente à situação inicial.

Em um terceiro momento, o professor pode deixar à cargo dos alunos escolher um tema e identificar um problema a ser investigado. Os alunos são responsáveis por todas as ações características de uma atividade de modelagem matemática, mas são orientados pelo professor sempre que necessário.

Essa inserção gradual tem o intuito de promover a familiarização dos alunos com esse tipo de atividade e, além disso, pode “contribuir para o desenvolvimento de uma atitude investigativa em relação às situações-problema selecionadas para estudo” (TORTOLA, 2012, p. 64-65). Enfim, para que os alunos sintam-se familiarizados com as ações e os procedimentos da Modelagem Matemática aconselha-se propor situações que os levem a refletir sobre o desenvolvimento da atividade de modelagem e sobre a função dos modelos em diferentes contextos e que façam o deslocamento “da condição de expectador passivo para ‘artesão’ ativo enquanto aprende fazer modelagem” (SILVA, 2017, p. 137).

## 2.2 A PRÁTICA DE MODELAGEM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO INFANTIL

As discussões em relação à Modelagem Matemática no âmbito da Educação Infantil são recentes. De fato, Silva (2013) relata o estranhamento de alguns colegas ao direcionar sua pesquisa de mestrado nesse contexto. Segundo a autora, esse estranhamento está relacionado com a concepção de que a Modelagem na Educação Matemática está mais voltada a alunos de graduação ou adultos, e não a crianças. Essa concepção pode ser justificada pelo fato da maioria das pesquisas brasileiras sobre Modelagem Matemática na Educação Matemática, ser realizada nos anos finais do Ensino Fundamental, Ensino Médio, Educação de Jovens e Adultos e Ensino Superior (SILVA; KLÜBER, 2012). Porém, hoje, dissertações sobre Modelagem Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental (TORTOLA, 2012; 2016; MUNDIM, 2015; TEODORO, 2018) e na Educação Infantil (SILVA, 2013), podem ser encontradas.

Em sua prática com a Modelagem Matemática, a autora Silva (2013) revelou que, a partir de questionamentos realizados por ela as crianças foram incentivadas a falar e, por meio das ideias levantadas, se apropriaram de conceitos que não conheciam ou que, muitas vezes, passavam despercebidos.



Dessa forma, a “Modelagem pode ser inserida já nos primeiros anos escolares, pois esse nível de ensino é a base para que as próximas aprendizagens [...]” (SILVA; KLÜBER, 2012, p. 239) e sua inserção nesse contexto é um meio de ver a necessidade de utilizar a matemática em seus problemas cotidianos e desmitificar que a matemática é um conhecimento necessário somente para o futuro escolar, sem relação alguma com a sociedade (SILVA; KLÜBER, 2012).

Diante desse cenário da Modelagem Matemática, alguns pesquisadores têm se dedicado a investigá-la nos primeiros anos escolares, tanto em âmbito nacional, quanto internacional (ENGLISH, 2006; 2009; FOX, 2006; TORTOLA, 2012; 2016), pelo fato de acreditar que as crianças já possuem condições de resolver problemas à sua maneira, utilizando conhecimentos condizentes com sua idade e série escolar.

Fox (2006) apresentou justificativas para desenvolver atividades de modelagem matemática desde a primeira infância, baseadas em orientações, documentos curriculares e recomendações feitas pelo Conselho Nacional de Professores de Matemática (NCTM) e Associação Nacional para a Educação de Crianças Pequenas (NAEYC). Como uma das orientações discutidas pela autora é incentivar e aprimorar o interesse natural das crianças pela matemática e sua disposição de usá-la para dar sentido ao seu mundo físico e social, acredita-se que a Modelagem Matemática é uma alternativa que atende a essa orientação, uma vez que valoriza os conhecimentos das crianças, os encaminhamentos e estratégias pensadas por elas para a resolução de problemas e fomenta os processos de raciocínio.

Para Tortola (2012, p. 7) a Modelagem Matemática potencializa o ensino e a aprendizagem da Matemática favorecendo o uso da linguagem matemática e demais linguagens utilizadas pelos alunos no cotidiano, contribui para que os “[...] estudantes se tornem cidadãos críticos, capazes de participar ativamente nas tomadas de decisões em prol da sociedade”.

Segundo English (2009, p. 162) as crianças devem aprender a lidar com situações complexas e que façam sentido para elas de modo que sejam capazes de matematizá-las significativamente e “que envolvam mais do que apenas contagens e medidas simples”. Para a autora situações complexas são situações da vida real e que se baseiam no conhecimento e experiências existentes das crianças, sem distinção de disciplinas. Nesse estudo, a autora aborda o caráter interdisciplinar da Modelagem Matemática, uma vez que promove discussões que vão para além da matemática, incorporando outras disciplinas e sendo uma boa sugestão para orientar o trabalho de projetos interdisciplinares.

Percebe-se que nos últimos anos há uma movimentação de olhar para esses níveis de escolaridade que englobam os primeiros anos escolares. Observamos que recentemente foram desenvolvidas várias pesquisas contemplando Modelagem Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental, contudo, ainda são poucas as que contemplam a Modelagem Matemática na Educação Infantil.

De fato, ao pesquisarmos os termos Modelagem Matemática, Educação Infantil, crianças e/ou suas combinações no Google Acadêmico e no Banco de Teses e Dissertações da Capes encontramos apenas 02 dissertações, sendo uma de Silva (2013) e a outra de Belo (2016) e encontramos 02 artigos em periódicos, um de Belo e Burak (2020) e outro de Marcondes e Silva (2019).

Ao pesquisar os mesmos termos em eventos paranaenses, nacionais e internacionais de Educação Matemática, tais como Encontro Paranaense de Educação Matemática (EPREM), Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM), Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEM), ou em eventos específicos da Modelagem Matemática como The International Conference on Teaching Mathematical Modelling and Applications (ICTMA), Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática (CNMEM) e o Encontro Paranaense de Modelagem na Educação Matemática (EPMEM), nos últimos cinco anos, encontramos os seguintes trabalhos, organizados no Quadro 4.

**Quadro 4:** Trabalhos sobre Modelagem Matemática e Educação Infantil

Evento e ano de realização	Quantidade de trabalhos e Modalidade	Título do trabalho	Autores
<b>Eventos sobre Modelagem Matemática</b>			
Encontro Paranaense de Modelagem na Educação Matemática (EPMEM)			
EPMEM 2018	03 Práticas de sala de aula	Atividade de modelagem matemática na Educação Infantil	Milleny Dos Santos Aguetoni, Olavo José Luiz Junior, Elenice Josefa Kolancko Setti
		Modelagem Matemática na Educação Infantil: uma atividade com brigadeiros	Leticia Coutinho, Emerson Tortola, Karina Alessandra Pessoa da Silva
		Práticas de alimentação saudável na Educação Infantil a partir da Modelagem Matemática	Cristina Machado Ruiz, Marli Schmitt Zanella
EPMEM 2016	01 Minicurso	Modelagem Matemática na formação de conceitos e na construção dos conteúdos matemáticos na educação infantil	Dionísio Burak, Marinês Ávila de Chaves Kaviatkovski

	01 Relato de Experiência	Atividades de classificação envolvendo modelagem matemática na educação infantil: um relato de experiência	Marli Guimarães da Silva, Carlos César Gonçalves
<b>Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática (CNMEM)</b>			
CNMEM 2019	01 Relato de experiência	Ensino de matemática na Educação Infantil: uma experiência por meio da modelagem matemática	Ana Caroline Zampirolli, Lilian Akemi Kato
	02 Comunicações Científicas	Investigando padrões em atividades de Modelagem Matemática na Educação Infantil	Mirian Ferreira Rezende, Cristiana Fadin, Emerson Tortola
		Análise de práticas discursivas com Modelagem Matemática na Educação Infantil por alunos do curso de Pedagogia	Laécio Nobre de Macedo, Daniel Santos de Carvalho, Elizabeth Gomes Souza
<b>Eventos sobre Educação Matemática, com a Modelagem Matemática como eixo temático</b>			
<b>Encontro Paranaense de Educação Matemática</b>			
EPREM 2019	01 Comunicação Científica	Modelagem Matemática e raciocínio proporcional na Educação Infantil	Letícia Coutinho, Emerson Tortola
<b>Encontro Nacional de Educação Matemática</b>			
ENEM 2019	01 Relato de Experiência	Depois de brincar, vamos guardar! Uma atividade de Modelagem Matemática na Educação Infantil	Mirian Ferreira Rezende, Letícia Coutinho, Emerson Tortola

**Fonte:** Dos autores


O Quadro 4 mostra que existem poucas pesquisas que abrangem a Modelagem Matemática na Educação Infantil, tanto nacionalmente quanto internacionalmente, o que corrobora com os apontamentos de Silva e Klüber (2012) pois apenas 10 trabalhos foram localizados em 06 eventos em um período de 05 anos. Em relação às edições 2015 e 2017 da CNMEM, 2015 e 2017 do EPREM, 2016 do ENEM, 2015 e 2018 do SIPEM e 2015, 2017 e 2019 do ICTMA, constatamos que não houve nenhum trabalho publicado sobre Modelagem Matemática na Educação Infantil.

Para além desses trabalhos, encontrados nesse período, vale a pena citar o trabalho de Carvalho, Oliveira e Luna (2012), publicado no 3º Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, que embora não esteja dentre os eventos procurados, está disponível na internet e foi um dos primeiros trabalhos sobre Modelagem Matemática desenvolvido na Educação Infantil.

Ainda que sejam poucos os trabalhos encontrados na literatura, eles nos ajudam a entender como se dá a prática de Modelagem Matemática nessa etapa de escolaridade. Vejamos algumas delas.

Marcondes e Silva (2019), por exemplo, realizaram um estudo com 12 crianças de 3 e 4 anos e compartilharam o entendimento de Modelagem como uma metodologia de ensino baseado na concepção de Burak (2004). Ressaltaram ser essa sua primeira experiência educativa com Modelagem Matemática com alunos dessa faixa etária, citando dinamismo, ludicidade, interação e interdisciplinaridade como características observadas. O tema escolhido pelos alunos foi Masha, uma personagem de desenho animado que tem um urso como amigo. O Quadro 5 mostra uma síntese das ações desenvolvidas pelos alunos durante a prática da modelagem.

**Quadro 5:** Ações de crianças de 3 e 4 anos em uma atividade de modelagem matemática

	Tema escolhido pelos alunos Masha e o Urso
	Pesquisa com a família e, também, na sala por meio de um episódio da animação/desenho.
	<p style="text-align: center;">Problemas</p> <p>O amigo da Masha é um urso? Existem muitos ursos? Todos são grandes? Podemos construir a casa da Masha? Que formas ela tem? Qual seu tamanho?</p>
	Solução dos problemas por meio de brincadeiras, comparação e classificação de ursos, construção de uma casinha com noções espaciais e de medidas.
	Diálogo no término da resolução de cada problema.

**Fonte:** Elaborado com base nos registros de Marcondes e Silva (2019)

#### Segundo as autoras

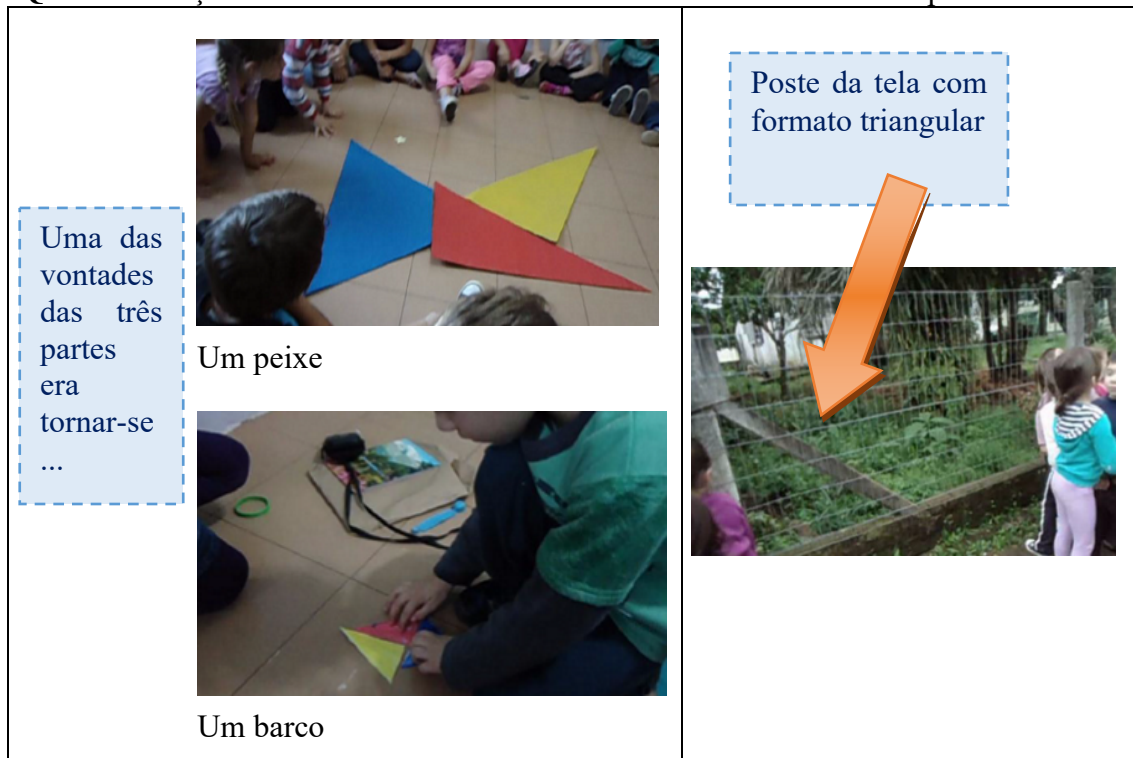
a linguagem e os conceitos referentes à Matemática foram muito utilizados, pois possibilitaram comparar e classificar as situações, assim como identificar as semelhanças e diferenças existentes, localizar-se no ambiente com noções de longe/perto, lado direito/lado esquerdo, entre outros (MARCONDES; SILVA, 2019, p. 82).

Ruiz e Zanella (2018) discutem uma proposta de quatro práticas de Modelagem Matemática para sala de aula da Educação Infantil, envolvendo o tema alimentação saudável, devido ao desperdício de alimentos durante as refeições. A primeira teve como intuito conhecer como os alunos se alimentam em casa, para isso, elaboraram um questionário para que os pais respondessem junto com seus filhos por meio de recortes que indicam quais alimentos eles consomem diariamente. Essa atividade permitiu que fossem discutidas “quantidades adequadas, diferença entre os diversos tipos de alimentos, bem como a

necessidade de cada um para o nosso organismo” (RUIZ; ZANELLA, 2018, p. 3). A segunda foi desenvolvida por meio da contação da história “A cesta da dona Maricota”, com o objetivo de aguçar a curiosidade e o interesse nos alunos em aprender por meio dessa prática que é comum na Educação Infantil. A terceira atividade foi relacionada com a construção da pirâmide alimentar com alimentos reais, incentivando os alunos a identificar e comparar com a alimentação diária de cada um. A quarta atividade também teve o envolvimento da família, os alunos fizeram o plantio de sementes em copinhos descartáveis e depois levaram para casa para ser cuidadas juntamente com os pais. Essas atividades abordaram conceitos matemáticos como noção espacial, formas geométricas, pesos e medidas.

Silva (2013), por sua vez, desenvolveu uma pesquisa de mestrado com alunos de 4 e 5 anos. A pesquisadora desenvolveu seis situações de aprendizagem, todas propostas com base na contação da história denominada “Três partes” de Kozminski (1992) e com objetivos relacionados a formas geométricas, de modo que os alunos pudessem identificar, comparar, construir novas formas geométricas a partir das três que foram disponibilizadas e relacioná-las com objetos do dia a dia, tais como: pássaro, peixe, gangorra, escorregador, barco, casa, avião, que pertenciam à história narrada. Os alunos brincaram de massinha de modelar, de blocos lógicos, porém com objetivo pedagógico envolvendo o formato dos blocos (diferente/igual, maior/menor, cores). Os alunos também fizeram registros (desenhos, garatujas e rabiscos) para representar o que entenderam sobre a história. O Quadro 6 ilustra ações realizadas pelos alunos na atividade.

**Quadro 6:** Ações dos alunos na atividade envolvendo a história “Três partes”



**Fonte:** Elaborado com base nos registros de Silva (2013)

Essa atividade de modelagem matemática oportunizou aos alunos a discussão de algumas formas geométricas, a exploração de noções de classificação e seriação e de ideias de adição e subtração. Além disso favoreceu que essas situações “fossem desenvolvidas de maneira lúdica, interativa e instigante, onde as brincadeiras, os jogos e o divertimento das crianças estiveram presentes” (SILVA, 2013, p. 126-127).

Já Carvalho, Oliveira e Luna (2012) desenvolveram uma atividade com um tema que diz respeito à proteção solar e as próprias professoras pesquisadoras formularam a situação-problema e levaram as informações necessárias para a sua resolução, porém para que a problemática fosse compreendida e respondida pelos alunos, vários questionamentos foram feitos por meio de uma roda de conversa, prática recorrente na Educação Infantil.

Foram expostos na roda alguns objetos de proteção solar, entre eles o guarda-sol, boné, protetor solar, chapéu e óculos de sol, e, após questionamento sobre a utilidade deles, elas foram convidadas para investigar quais objetos entre o guarda-sol, boné e protetor solar os colegas da turma utilizavam para se proteger do sol (CARVALHO; OLIVEIRA; LUNA, 2012, p. 10).

Os alunos também produziram um cartaz com imagens dos objetos para fazer a socialização de quais cada um utilizava, sendo colada uma ficha com nome e foto dos alunos acima de cada imagem selecionada, formando as barras do gráfico. Após a elaboração do gráfico, os alunos visualizaram, interpretaram e discutiram as informações apresentadas, tais

como: qual era o objeto mais utilizado, qual a quantidade de colegas que utilizava os três objetos (guarda-sol, boné e protetor solar) e o que significa a notação numérica abaixo de cada barra.

As crianças produziram aproximações com os modelos matemáticos acerca da medida do tempo, número como código, tratamento da informação e um pensamento reflexivo sobre a importância da proteção solar para nossa saúde, através da observação, experimentação e discussão (CARVALHO; OLIVEIRA; LUNA, 2012, p. 11).

Essas pesquisas mostram que é possível utilizar a Modelagem Matemática na Educação Infantil, partindo de temas vinculados à vida diária das crianças, tais como brincadeiras, contação de histórias, desenhos animados, cuidados com nossa saúde. Dessa forma os alunos sentiram-se motivados a participar, compartilharam suas vivências e se envolveram nas soluções para o problema.

Nas práticas de Modelagem Matemática na Educação Infantil relatadas na literatura, percebemos especificidades em relação ao uso dessa alternativa pedagógica nesse contexto, que requer dos professores e alunos (re)posicionamentos nos atos de ensinar e de aprender.

Marcondes e Silva (2019), por exemplo, defendem que atividades de Modelagem na Educação Infantil devem valorizar as experiências e interesses dos alunos, considerando inclusive situações e dúvidas de sua rotina, para as quais, segundo os autores, as práticas pedagógicas devem ser direcionadas. Entre os elementos que compõem a rotina, Bilória e Metzner (2013) citam os horários de alimentação, higiene, calendário, chamada, roda de música, oração, descanso, atividades lúdicas e exploração de diversos materiais, ou seja, atividades que estimulem o desenvolvimento da criança, levando em consideração as suas necessidades. Está associada a atividades recorrentes, mas nem por isso precisam ser repetitivas. “Portanto, a rotina pode e deve sofrer modificações e inovações quantas vezes for necessárias durante o ano letivo”. Propor atividades que contemplem a rotina dos alunos possibilita que eles se orientem “na relação espaço/tempo, reconhecendo seu andamento, dando sugestões e propondo mudanças” (BILÓRIA; METZNER, 2013, p. 5).

Ao decidir trabalhar com atividades de Modelagem, o professor pode se deparar com a indecisão dos alunos em relação à escolha do tema ou pode acontecer dos alunos escolher “[...] diversos assuntos sem ter clareza de qual querem exatamente, porém o educador, de acordo com seu nível de experiência, pode realizar ações para que seja decidido um só tema ou trabalhar vários temas ao mesmo tempo” (MARCONDES; SILVA, 2019, p. 79). Após o tema ser definido, é necessário que todas as outras ações no desenvolvimento da atividade de

modelagem matemática sejam estimuladas por meio de questionamentos, favorecendo a socialização de suas respostas e experiências.

Tendo em vista que os alunos aprendem por meio da interação e do compartilhamento de experiências com os indivíduos com os quais convivem, “é provável que o ambiente de Modelagem favoreça situações de debate acerca de temas sociais, oportunizando a interação de crianças com conhecimentos matemáticos e com outras ciências desde a fase inicial da sua escolaridade” (CARVALHO; OLIVEIRA; LUNA, 2012, p. 4).

[...] entendemos a importância do trabalho com a Modelagem no sentido de favorecer o compartilhamento dos percursos individuais e a troca de saberes por meio da reflexão e análise de diversas formas de conhecimento, não apenas as teorias e as práticas matemáticas, mas também as vivências diferenciadas através de debates sociais no cotidiano (CARVALHO; OLIVEIRA; LUNA, 2012, p. 4).

As autoras Carvalho, Oliveira e Luna (2012) ressaltam também que nesse momento, o contato visual/visualização é necessário para que os alunos compreendam o que se está dizendo ou discutindo, assim como o uso de materiais, objetos manipuláveis, que podem auxiliar na aprendizagem dos alunos.

Outra observação é que as brincadeiras devem ganhar seu espaço em atividades de Modelagem, pois segundo Silva (2013) as brincadeiras auxiliam os alunos na expressão de seus desejos, nas relações aluno/aluno, aluno/professor, na criatividade, no desenvolvimento de sua autonomia. Para isso o professor, na qualidade de mediador, deve dar condições para os alunos explorar seus conhecimentos matemáticos, mas por meio de ações que não descartem a ludicidade e o brincar, que incentivem os alunos a participar.

Silva (2013) indica também a contação de histórias como um fator contribuinte para o desenvolvimento dessas atividades, pois auxilia no desenvolvimento da linguagem oral e escrita, da leitura, ampliando o vocabulário dos alunos e desenvolvendo novos conceitos matemáticos e não matemáticos, podendo ser uma forma de levar os alunos a compreender a situação-problema e participar da investigação.

Segundo Fox (2006) é preciso encorajar as crianças a se ver como matemáticas, estimulando seu interesse e desenvolvendo habilidades em resolver problemas e investigação por meio de atividades relevantes e desafiadoras. Dessa forma, “as atividades de modelagem matemática são expressas em contextos autênticos que fornecem situações reais em que as crianças podem desenvolver seu pensamento matemático” (FOX, 2006, p. 225).

É com esse pensamento em mente que consideramos a Modelagem Matemática como uma boa alternativa para se implementar nas práticas pedagógicas da Educação Infantil, pois coloca os alunos frente a situações de seu cotidiano em que noções que eles possuem podem



ser discutidas, exploradas e formalizadas e novos conhecimentos e formas de pensar podem ser apreendidos. Dessa forma, propusemo-nos a pesquisar a identificação, mobilização e/ou desenvolvimento do raciocínio proporcional em atividades de modelagem matemática na Educação Infantil, momento em que as primeiras relações multiplicativas surgem e passam a ser colocadas em comparação com as relações aditivas estabelecidas até então, assim como surgem (ou passam a ser percebidas) situações em que há a necessidade de se pensar os números em termos relativos e não apenas em termos absolutos, evocando as primeiras ideias e noções associadas à proporcionalidade.

### 3 RACIOCÍNIO PROPORCIONAL

Neste capítulo abordamos o raciocínio proporcional, discutimos aspectos que refletem ideias e formas de pensar que sinalizam sua identificação, mobilização e/ou desenvolvimento. Lançamos também um olhar sobre esse raciocínio no contexto da Educação Infantil.

#### 3.1 RACIOCÍNIO PROPORCIONAL NO CONTEXTO ESCOLAR

O raciocínio proporcional é abordado em vários documentos curriculares como a Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018), Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (BRASIL, 1997, 1998) e Diretrizes Curriculares da Educação Básica para a disciplina de Matemática do Estado do Paraná (PARANÁ, 2008). Esses documentos indicam a necessidade e a importância de desenvolver o raciocínio proporcional, dentro e fora do ambiente escolar.

O raciocínio proporcional está presente em diversas áreas do conhecimento, tais como ciência, música, geografia, e em várias situações e atividades cotidianas,

auxilia no cálculo das melhores compras, investimentos e análise de impostos, auxilia também ao trabalhar com desenhos e mapas, conversão de medidas ou monetárias, aumento ou redução de alguma receita ou para criar várias concentrações de misturas e soluções (ONTARIO, 2012, p. 4).

Está relacionado, portanto, à medição, a relações multiplicativas, a comparações entre quantidades ou valores, à consideração de um número em termos relativos, ao invés de termos absolutos (ONTARIO, 2012). É “utilizado para descrever conceitos e pensamentos requeridos para a compreensão de taxas, razões e proporções” (NORTON, 2005, p. 17), que auxiliam no entendimento da trigonometria, da álgebra e outras vertentes da matemática.

Vale pontuar que raciocínio proporcional não é sinônimo de proporcionalidade (LAMON, 2005), mas deve ser a condição necessária para a compreensão de contextos e aplicações baseadas na proporcionalidade (LAMON, 2012) e “são muitos os fenômenos da realidade que podem ser descritos por modelos de proporcionalidade e, por isso, o apelo à utilização do raciocínio proporcional é frequente no nosso dia a dia” (COSTA; PONTE, 2008, p. 65).

A proporcionalidade, por exemplo, deve estar presente no estudo de: operações com os números naturais; representação fracionária dos números racionais; áreas; funções; probabilidade etc. Além disso, essa noção também se evidencia em muitas ações cotidianas e de outras áreas do conhecimento, como vendas e trocas mercantis, balanços químicos, representações gráficas etc. (BRASIL, 2018, p. 266).

Em concordância com Cyrino *et al.* (2014), o raciocínio proporcional é considerado pivô na aprendizagem da Matemática escolar, uma vez que serve como base para a compreensão de ideais e conceitos matemáticos importantes, tais como a álgebra, funções e geometria (CYRINO *et al.*; 2014).

Nesse sentido, é importante que os professores oportunizem aos alunos já na Educação Infantil problemas que envolvam proporcionalidade, sob diferentes aspectos (LAMON, 2012; CYRINO *et al.*, 2014; MENDUNI-BORTOLOTTI; BARBOSA, 2018), incentivando-os a elaborar e justificar estratégias, sem a preocupação ou a obrigação de usar regras ou fórmulas, isto é, sem a necessidade da memorização de mecanismos.

Assim, é interessante que desde os primeiros anos escolares os professores explorem algumas noções intuitivas que levem ao desenvolvimento desse raciocínio. Ou seja, que criem e oportunizem situações e experiências nas quais os alunos possam manifestar ideias e formas de pensar que remetam ao raciocínio proporcional, fazendo com que compreendam o contexto do problema e evitem o uso de regras e algoritmos sem entender o que estão fazendo.

Silva, Cândido e Souza (2018) afirmam que situações de valor omissivo e comparação entre duas razões estão presentes no cotidiano das crianças e podem ser entendidas por elas e, por isso o raciocínio proporcional pode ser inserido nas etapas iniciais de ensino. Esses autores destacam que as ilustrações podem facilitar o entendimento das crianças nas resoluções de problema que envolvem o raciocínio proporcional.

Cyrino *et al.* (2014) afirmam que faltam planejamento e estratégias para que o ensino de matemática promova a mobilização ou o desenvolvimento de aspectos subjacentes a esse raciocínio em sala de aula. De acordo com os autores, o raciocínio proporcional pode ser desenvolvido quando algumas ideias e formas de pensar são mobilizadas, sendo algumas delas associadas às frações e seus subconstrutos, porcentagem, proporcionalidade, números racionais e função.

Essas ideias e formas de pensar estão inclusas nos descritores que podem ser utilizados para identificar a manifestação e/ou desenvolvimento do raciocínio proporcional que Maranhão e Machado (2011) destacam, são eles: utilizar multiplicação e divisão para resolver problemas envolvendo ideias de razão e proporção; fazer comparações numéricas e não numéricas envolvendo os racionais; trabalhar com classes de equivalência de frações;

distinguir situações proporcionais e não proporcionais; usar ideia de covariação; representar razões por meio de gráficos, tabelas, símbolos, desenhos, ou diagramas; relacionar proporcionalidade com ideias de medidas de comprimento, superfície, volume, ou massa; desenhar ou representar em escala; diferenciar grandezas diretamente proporcionais das inversamente proporcionais, entre outros.

Para Lamon (2012) mobilizar ou desenvolver o raciocínio proporcional implica em compreender os números racionais e os conceitos multiplicativos relacionados a eles. Na Educação Infantil, essa compreensão pode ser desenvolvida por meio de situações que desenvolvem noções informais de taxa, razão e proporção, transformação de quantidades, trabalhar com medidas, quantificar informações qualitativas (ENGLISH, 2006).

Tendo em vista essas considerações, pensamos ser a Modelagem Matemática uma boa alternativa para abordar aspectos do raciocínio proporcional na Educação Infantil, uma vez que atividades dessa natureza prezam pela abordagem da matemática por meio da problematização e investigação de situações provenientes e/ou inspiradas nas experiências dos alunos, valorizando suas estratégias e conhecimentos.

Cabe aos professores fazer a articulação de um ou mais desses aspectos nas atividades propostas para que sejam contemplados em sua prática. Escolher práticas não tradicionais para explorar o raciocínio proporcional requer do professor

um repertório expressivo de conhecimentos que lhe permitam ir além de indicar procedimentos de cálculo, fazer as adequações necessárias ao nível de compreensão dos alunos e favorecer algumas articulações dessas noções com outros conteúdos já estudados (SILVA; CÂNDIDO; SOUZA, 2018, p. 23-24).

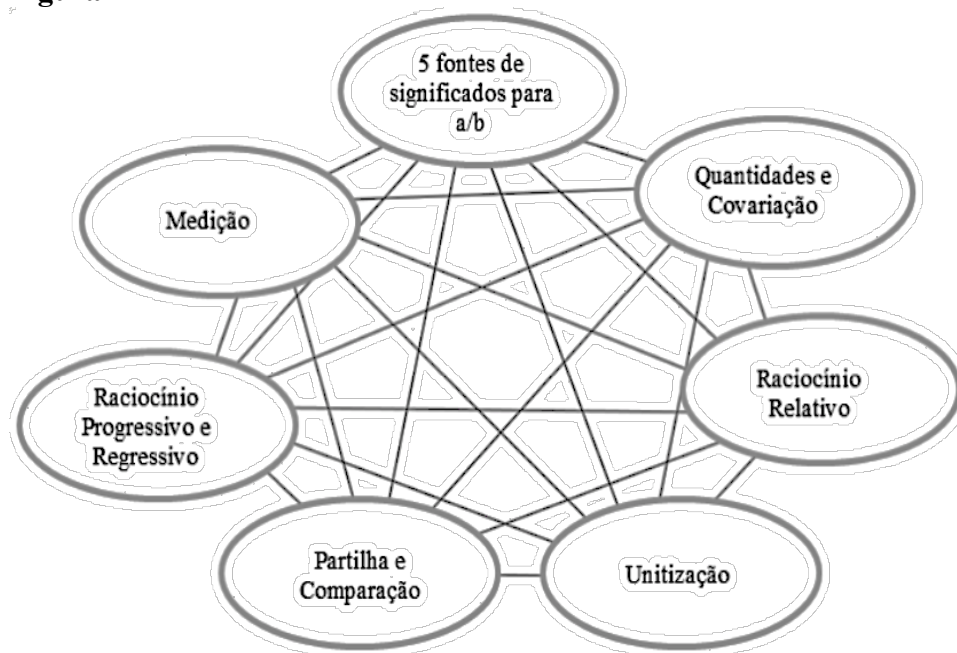
Todavia, para abordar tais aspectos vale a pena investir no entendimento de cada um deles, para que possam ser explorados no âmbito das atividades. Por isso, reservamos a seção seguinte para discuti-los.

### 3.2 ASPECTOS DO RACIOCÍNIO PROPORCIONAL

Diante das várias possibilidades de ideias e formas de pensar que podem remeter ao raciocínio proporcional, Lamon (2012) as sistematizou em sete aspectos que podem ser interpretados como elementos necessários para a mobilização ou desenvolvimento do raciocínio proporcional. São eles: 5 fontes de significado para  $a/b$ , Medição, Raciocínio

Progressivo e Regressivo, Partilha e Comparação, Unitização, Raciocínio Relativo, Quantidades e Covariação e estão apresentados na Figura 1.

**Figura 1:** Rede Lamon



**Fonte:** Lamon (2012, p. 10)

Os elementos apresentados na Figura 1, são organizados por Lamon (2012) em uma rede, constituída por sete balões, que indicam aspectos do conhecimento matemático que sinalizam a mobilização e/ou desenvolvimento do raciocínio proporcional, e por segmentos que ligam esses balões, mostrando que, embora cada balão apresente pontualmente um conceito, eles estão interligados em uma rede, representando diversas ideias e conceitos do conhecimento matemático que são constituídos pelos alunos por meio de diferentes vivências ao longo de sua trajetória escolar (CYRINO *et al.*, 2014). Esses segmentos que se entrecruzam formando “nós”, podem ser interpretados como diferentes caminhos, formas de pensar matematicamente, que levam a compreensão de conceitos e ideias associadas ao raciocínio proporcional.

Diante dessa interpretação, vale a pena entender cada um desses aspectos associados à mobilização e/ou desenvolvimento do raciocínio proporcional, presentes na rede de Lamon (2012).

As *5 fontes de significados para a/b* indicam a necessidade de se compreender as diferentes formas de interpretar o registro de um número racional, escrito na forma  $a/b$ , em diferentes contextos, ou seja, as frações e seus subconstitutos. Segundo Lamon (2012), esse

registro pode indicar cinco fontes de significados (subconstrutos): relação parte-todo (medida), razão, taxa, quociente e operador.

- Relação parte-todo: mede a relação multiplicativa de uma parte com o todo ao qual ela pertence,  $a/b$  indica  $a$  partes tomadas de  $b$  partes, ou seja, “o número de partes iguais da unidade, considerados com relação ao total de partes iguais em que o inteiro foi dividido” (OLIVEIRA, 2014, p. 64). Como medida, esse número racional  $a/b$  quantifica diretamente uma qualidade, tal como comprimento ou área. Considere, por exemplo, que um intervalo de comprimento 1 esteja particionado em  $b$  subintervalos menores, indicados por  $1/b$ , a interpretação medida para a representação fracionária  $a/b$  é:  $a$  intervalos de medida  $1/b$  (LAMON, 2012).
- Razão: compara de forma multiplicativa duas quantidades de mesma medida, por exemplo, “em uma sala de aula que tem 20 meninas e 30 meninos, podemos dizer que a razão do número de meninas para o número de meninos é  $2/3$  [...]. Isso significa que para cada 2 meninas temos 3 meninos” (CYRINO *et al.*, 2014, p. 44).
- Taxa: pode ser entendida como uma extensão do subconstruto razão, quantifica uma relação entre duas grandezas, como a velocidade, que é a quantificação de um movimento, ou seja, de um deslocamento em relação ao tempo.
- Quociente: mede quanto uma pessoa recebe quando um número de objetos é dividido em um certo número de pessoas.
- Operador: define uma estrutura multiplicativa de números racionais, de modo a medir alguma mudança de uma quantidade em um estado anterior, o que nos dá a ideia de função linear, pois ao considerar  $f(x) = a/b \cdot x$ , com  $b \neq 0$ ,  $a/b$  transforma o todo  $x$ , quando aplicado a um número. Em relação a grandezas contínuas, o operador tem o objetivo de “encolher” ou de “esticar”, de “reduzir” ou de “ampliar” (BOTTA; ONUCHIC, 1997). Por exemplo, ao encher uma piscina retangular, observa-se que a cada 2 horas a altura da piscina coberta por água aumenta 15 centímetros.  $15/2$  é o operador que deve ser utilizado para descrever a altura que a piscina está coberta por água ao longo do tempo (medido em horas), ou seja,  $f(x) = 15/2 \cdot x$ , sendo  $x$  o tempo (medido em horas) e  $f(x)$  a altura da piscina coberta por água. Se as dimensões da piscina fossem menores, provavelmente levaria menos de 2 horas para que a altura da água atingisse 15 centímetros. Isso *reduziria* o tempo de enchimento da piscina.

De acordo com Lamon (2012), o raciocínio proporcional está intimamente ligado a essas diferentes fontes de significado para o registro  $a/b$  e, por isso é importante vivenciá-las

em diferentes situações. Na Educação Infantil, esses diferentes significados devem estar atrelados a noções informais e intuitivas, exploradas por meio de situações cotidianas que os alunos vivenciam. Assim, os alunos terão a oportunidade de compreender os números racionais e, conseqüentemente, mobilizar ou desenvolver o raciocínio proporcional (CYRINO *et al.*, 2014).

“A ideia de medida, ou de *medição*, está presente na constituição do conhecimento da representação fracionária dos números racionais e conseqüentemente está na base do desenvolvimento/mobilização do Raciocínio Proporcional” (CYRINO *et al.*, 2014, p. 52).

Medir significa comparar grandezas de mesma natureza. Medir, por exemplo, a altura de uma pessoa em dois momentos distintos de seu crescimento caracteriza uma mudança, uma variação na medida. Essa variação representa a diferença entre a altura final e a altura inicial, em termos absolutos, e que “resulta em uma quantidade numérica, uma medida linear, indicada por unidades como centímetros, milímetros, metros, etc.” (CYRINO *et al.*, 2014, p. 53) e “baseia-se na visualização e quantificação direta de objetos (quantidades discretas ou contínuas)” (OLIVEIRA, 2016, p.4).

Pensando nesse exemplo, poderíamos comparar essa quantidade linear (variação em dois momentos distintos) com a altura inicial da pessoa, isso resultaria em uma taxa de crescimento, ou seja, uma variação relativa.

Ao trabalhar com medições na Educação Infantil é preciso partir de medidas não padronizadas (palmo, pé, mão, passo, dedo), para que posteriormente as crianças possam perceber a necessidade das medidas padronizadas (LOPES; GRANDO, 2012).

Cotidianamente as crianças convivem com situações em que aparecem expressões como: muito pesado, mais baixo, é grande demais, está correndo demais, está correndo muito, muito quente, é perto, etc. Essas noções antecedem o ato de medir e são fundamentais à construção do conceito de medida (LORENZATO, 2017, p. 59-60).

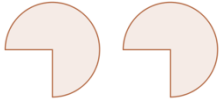
No exemplo dado, poderíamos usar um barbante, ou outro material similar, para mostrar a variação da altura da pessoa para as crianças e, somente depois de compreendida a ideia de medir, introduzir unidades de medida formais.

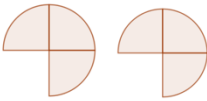
O *Raciocínio Progressivo e Regressivo* pode ser entendido como um:

procedimento mental que envolve calcular de maneira progressiva, a partir de uma fração qualquer, as relações de proporcionalidade equivalentes ao inteiro (à unidade referencial) e em seguida encontrar relações proporcionais para outras frações quaisquer desse inteiro, a partir dessas relações já encontradas, ou vice-versa (OLIVEIRA, 2014, p. 62).

Na Figura 2, colocamos um exemplo para compreender como esse raciocínio acontece em uma determinada situação.

**Figura 2:** Exemplo de raciocínio progressivo e regressivo

Se  representa  $\frac{3}{4}$  de uma unidade, quanto será  $1\frac{1}{2}$ ?

Considerando  ou seja,  $\frac{3}{4}$  como 6 seções, então duas dessas seções representam  $\frac{1}{4}$  e 8 delas  $\frac{4}{4}$ , isto é, 1 inteiro. Sendo assim  $1\frac{1}{2}$  corresponde a 12 seções.

Resumindo:

6 seções	→	$\frac{3}{4}$ unidade
2 seções	→	$\frac{1}{4}$ unidade
8 seções	→	$\frac{4}{4}$ unidade
12 seções	→	$1\frac{1}{2}$ unidades

**Fonte:** Elaborado com base nos registros de Soares (2016)

Outro exemplo é apresentado por Oliveira (2014, p. 128) com o enunciado: “Se 6 chocolates custam R\$ 0,93, quanto custam 22 chocolates?”. Uma estratégia possível é encontrar, primeiramente, o preço de 1 chocolate (se 6 chocolates custam R\$ 0,93, então 1 chocolate custa aproximadamente R\$ 0,15, para ser mais exato  $0,93 / 6 = 0,155$ ). Sabendo o preço de um chocolate é possível encontrar o valor do total de chocolates solicitados, ou seja, de 22 chocolates, para isso é preciso multiplicar 0,155 (preço unitário dos chocolates) por 22 (quantia desejada de chocolates) o que resulta no valor de R\$ 3,41 ( $0,155 \times 22 = 3,41$ ). Essa estratégia coloca em evidência o raciocínio progressivo e regressivo, uma vez que o valor de um inteiro (1 chocolate) foi calculado a partir de relações de proporcionalidade e, em seguida, relações proporcionais foram utilizadas para determinar o valor de 22 chocolates, as quais poderiam ser utilizadas para calcular o valor de quaisquer outras quantidades.

A *partilha e comparação* é outro aspecto associado ao raciocínio proporcional por Lamon (2012). A partilha, ou divisão equitativa, refere-se ao ato de dividir uma quantidade, seja ela discreta ou contínua, em seções disjuntas, finitas e iguais, ou seja, dividir de modo que as partes resultantes não se sobreponham e todas façam parte da unidade (LAMON, 2012;



CYRINO *et al.*, 2014). Esse procedimento associado à comparação permite que sejam estabelecidas relações entre as partes e entre as partes e o todo, procedimentos frequentemente utilizados na escrita do registro fracionário. Essa ideia de efetuar divisões em uma unidade, podendo em seguida estabelecer comparações entre as partes resultantes está também relacionada à medição.

Uma situação que abrange esse aspecto é: Seis embalagens iguais contêm 30 pratos de papelão para doces e salgados. Quantos pratos há em cada embalagem?

Há várias formas de resolver essa situação. Pode-se pensar que se seis embalagens iguais têm 30 pratos, metade das embalagens tem metade da quantidade de pratos, ou seja, 3 embalagens têm 15 pratos. Logo, para descobrir a quantidade de pratos de uma embalagem é só dividir 15 por 3, que resulta em 5 e indica que cada embalagem tem 5 pratos.

Outra forma de pensar essa situação seria dividir 30 por 6, ou multiplicar 30 por  $1/6$  (inverso de 6, ou ainda, porque dentre as seis embalagens iguais, queremos saber a quantidade de pratos que tem em apenas uma). Sabendo que a unidade a ser particionada é o 30, é possível até mesmo fazer um registro como o que segue.

5	5	5	5	5	5
---	---	---	---	---	---

Cada parte corresponde a  $1/6$  de 30, portanto, cada embalagem tem 5 pratos.

Na Educação Infantil essa situação poderia ser abordada utilizando estruturas aditivas (SOARES, 2016), ou seja, distribuindo um prato para cada aluno, de um total de 6 alunos, depois mais um, e mais um, até completar os cinco pratos por aluno. Essa estratégia auxilia os alunos a compreender a partilha, ou divisão em partes iguais, de modo que eles entendam que eles podem distribuir, um, dois, ou cinco para cada um desde que todos recebam a mesma quantidade (divisão equitativa), o que se constituirá futuramente no uso de estruturas multiplicativas.

A *unitização* pode ser compreendida como um processo de reorganizar uma unidade em subconjuntos de diferentes tamanhos (OLIVEIRA, 2014). Ou seja, é a reorganização ou (re)agrupamento de uma grandeza em subgrupos que preservam a mesma quantidade total, cujos inteiros ou unidades referenciais permanecem iguais, porém representados por formas fracionárias diferentes (CYRINO *et al.*, 2014). Com esse entendimento a unitização está intimamente ligada ao conceito de frações equivalentes. As frações equivalentes  $12/8$  e  $6/4$ , por exemplo, indicam uma reorganização da quantidade relativa  $12/8$  em subunidades de tamanhos equivalentes, resultando em  $6/4$ , compreende-se, assim, que  $12/8 = 6/4$  e, portanto, representam a mesma quantidade (CYRINO *et al.*, 2014).

Por meio do *raciocínio relativo*, de acordo com Cyrino *et al.* (2014, p. 54)

os indivíduos são capazes de mensurar quantidades mais complexas, abstratas, que não podem ser medidas diretamente com a utilização de instrumentos específicos ou contagem imediata, são quantidades resultantes de comparações/relações entre grandezas de naturezas por vezes distintas como velocidade, densidade, inclinações, concentração, etc.

Vamos retomar o exemplo de comparar a altura de uma pessoa em dois momentos distintos, dado para o aspecto medição. A diferença na altura da pessoa pode ser determinada tanto em termos absolutos, por meio de uma medida linear, indicada por unidades como centímetros, milímetros, metros, etc. (cresceu 20 cm, por exemplo), quanto em termos relativos, ao determinar uma taxa de crescimento comparando a variação da altura com a altura inicial da pessoa, indicando uma variação relativa (cresceu 13% em relação à sua inicial, por exemplo). Essa última forma de medir envolve o raciocínio relativo, pois essa taxa não é determinada diretamente por um instrumento de medida ou pela contagem.

O aspecto *quantidades e covariação* indica a capacidade que os alunos têm em “identificar e mensurar quantidades, além de perceber de que maneira essas quantidades variam (covariam) quando relacionadas” (CYRINO *et al.*, 2014, p. 54). Por exemplo, duas pilhas, iguais, custam R\$ 5,00, quanto pagaria por 6 dessas pilhas? Inicialmente os alunos podem usar estratégias aditivas, ou seja, poderiam efetuar a soma  $5 + 5 + 5 = 15$ , mas futuramente é importante que os alunos compreendam a relação de covariação, tendo em vista que ao comprar o triplo de duas pilhas, o valor a pagar também irá triplicar. Termos como multiplicar, dobrar, triplicar, etc. implicam na compreensão de que as grandezas envolvidas nos problemas podem variar em conjunto (VIANA; MIRANDA, 2016).

São nesses aspectos, pontuados por Lamon (2012), explicados e exemplificados nessa seção, que nos pautamos para investigar as manifestações do raciocínio proporcional nas ideias e formas de pensar apresentadas pelos alunos da Educação Infantil em seus encaminhamentos para as atividades de modelagem matemática.

### 3.3 RACIOCÍNIO PROPORCIONAL NA EDUCAÇÃO INFANTIL

Devido às dificuldades apresentadas pelos alunos ao resolver problemas envolvendo raciocínio proporcional, especificamente alunos de 6º ano do Ensino Fundamental (COSTA; PONTE, 2008), alguns pesquisadores como Ponte *et al.* (2010), Spinillo (1994) recomendam

que a exploração de conceitos, ideias e situações envolvendo esse raciocínio matemático se efetive em sala de aula desde os primeiros anos de escolaridade.

As dificuldades dos alunos são notórias na interpretação de enunciados das tarefas (não conseguindo muitas vezes distinguir as situações de proporcionalidade direta das que não o são) e na sua tendência para mecanizar algoritmos sem os compreender e para os aplicar mesmo em situações em que não são adequados (como, por exemplo, em questões envolvendo a comparação de duas razões) (COSTA; PONTE, 2008, p. 65).

O ensino sobre proporção, por exemplo, é ensinado para alunos entre 11 e 12 anos, como um tópico matemático presente no currículo escolar, ou seja, é abordado apenas como um conteúdo e não como um conceito a ser compreendido, ou raciocínio a ser desenvolvido. Além disso, esse ensino, em geral, é caracterizado pelo “uso de procedimentos mecânicos e a aplicação de exercícios de fixação” (SPINILLO, 1994, p. 110).

A crítica sobre o ensino do conceito de proporcionalidade em específico, mostra que “a pergunta crucial, entretanto, não reside no *quando*, mas no *como* introduzir este conceito de forma cognitivamente proveitosa” (SPINILLO, 1994, p. 112), de modo a mobilizar ou desenvolver o raciocínio proporcional. A autora cita algumas possibilidades para os primeiros anos escolares.

Primeiramente, o ensino de proporcionalidade “poderia enfatizar menos a quantificação numérica e privilegiar formas qualitativas de raciocínio baseadas em estimativas e habilidades perceptuais” (SPINILLO, 1994, p. 112), abordando comparações qualitativas como “maior/menor que” e “igual a” por meio de materiais diversos, contemplando quantidades contínuas e discretas.

Outro modo seria, promover atividades que envolvem o conceito de “metade” e julgar a equivalência ou não equivalência entre várias situações.

Uma terceira possibilidade seria explorar as relações de primeira e de segunda ordem, para que os alunos saibam diferenciá-las, para isso “o professor precisa explicitar, discutir e refletir acerca das relações envolvidas no Raciocínio Proporcional com seus alunos” (SPINILLO, 1994, p. 112).

Por fim, uma quarta possibilidade é, durante as atividades, o professor explorar as justificativas, critérios e estratégias que os alunos pensaram e empreenderam. “O professor precisa compreender as diferentes formas de raciocinar de seus alunos” (SPINILLO, 1994, p. 113), para isso, o aluno precisa explicitar seu raciocínio e com essa ação, o aluno o coloca como objeto de reflexão, podendo ser utilizado em outras situações, tornando-se base para formas de raciocínio mais sofisticadas.

Além dessas possibilidades, se pensarmos especificamente no contexto da Educação Infantil, observa-se que

é preciso que as crianças sejam mais expostas a situações em que elas explorem noções informais de taxa, razão e proporção, quantifiquem informações qualitativas, transformem quantidades e lidem com quantidades que não são acessíveis (e, conseqüentemente, devem ser medidas indiretamente) (ENGLISH, 2006, p. 304).

As crianças precisam também participar de atividades que promovam diferentes estratégias de resolução de uma situação-problema, tendo como ponto de partida estratégias mais intuitivas. Além disso, “o professor deve propor aos seus alunos problemas de vários tipos. A diversificação das tarefas é necessária para que os alunos desenvolvam a necessária flexibilidade no seu raciocínio proporcional” (COSTA; PONTE, 2008, p. 67).

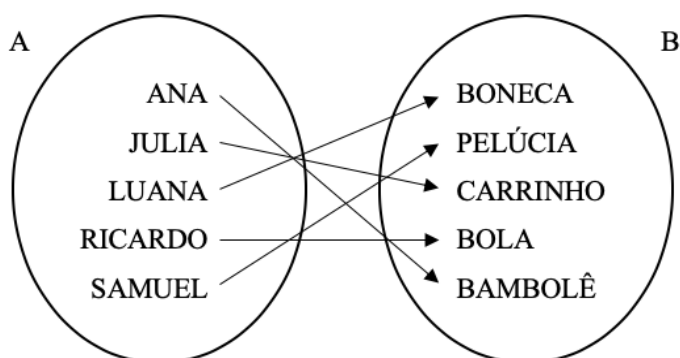
Spinillo (1994) defende que existe um trajeto pelo qual os alunos devem percorrer partindo do informal e do intuitivo para, enfim, chegar na formalização e no uso de algoritmos.

Pensamos que essa informalidade, na Educação Infantil, pode iniciar, por exemplo, com a exploração de algumas situações a partir das quais os alunos podem se familiarizar com noções sobre medidas e grandezas e analisar relações existentes entre elas. Essas situações podem auxiliar na compreensão de uma relação constante entre duas grandezas (invariância) e da noção de que ambas variam em conjunto (covariância) (PONTE *et al.*, 2010).

Nesse contexto, “a noção intuitiva de função pode ser explorada por meio da resolução de problemas envolvendo a variação proporcional direta [ou indireta] entre duas grandezas (sem utilizar a regra de três)” (BRASIL, 2018, p. 293). A fim de evitar o uso demasiado da regra de três, outras maneiras de abordar as relações existentes entre duas grandezas podem ser exploradas. Ponte *et al.* (2010), por exemplo, sugere que a proporcionalidade direta seja ensinada por meio da observação de regularidades ou da função linear. Essa abordagem pode ser utilizada desde os primeiros anos escolares, uma vez que o professor tem condições de explorar adições sucessivas na relação estabelecida entre as grandezas (OLIVEIRA; SANTOS, 2000).

Os professores podem também explorar algumas noções de função por meio de brincadeiras ou tarefas diárias realizadas na escola, como no momento em que os alunos partilham os brinquedos. Se o professor coloca como condição que cada aluno da sala de aula deverá brincar com um único brinquedo, essa correspondência entre aluno e brinquedo pode ser discutida e pensada como uma relação entre dois conjuntos, o primeiro correspondendo aos alunos e o segundo aos brinquedos disponíveis. Dessa maneira podem ser exploradas noções de conjuntos e relações entre seus elementos. A Figura 3 ilustra essa situação.

**Figura 3:** Correspondência entre alunos e brinquedos



**Fonte:** Dos autores

A Figura 3 mostra que para todo elemento pertencente ao conjunto A, sem exceção, existe um único elemento correspondente pertencente ao conjunto B. Na linguagem matemática, podemos definir essa relação como uma função, ou seja, “dados dois conjuntos não vazios A e B, uma relação (ou correspondência) que associa a cada elemento  $x \in A$ , um único elemento  $y \in B$  recebe o nome de função de A em B” (IEZZI *et al.*, 2013, p. 40).

Ponte *et al.* (2010) afirmam que a exploração intuitiva da proporcionalidade como função linear logo desde os primeiros anos de escolaridade é um aspecto inovador e que devido à essa exploração os alunos adquirem precedência sobre a noção de igualdade entre razões e, posteriormente, não têm a necessidade de usar mecanismos como “multiplicar cruzado” para situações que envolvem proporcionalidade direta.

Durante as brincadeiras, ainda, pode-se trabalhar com a

razão unitária, também conhecida por “quanto para um”, identificada como a estratégia mais intuitiva atendendo ao facto de os alunos a usarem desde os primeiros anos de escolaridade (cálculo de razões unitárias em problemas de divisão e cálculo de múltiplos das razões unitárias em problemas de multiplicação) (PONTE *et al.*, 2010, p. 5).

Outros momentos corriqueiros também podem ser aproveitados pelo professor da Educação Infantil para trabalhar quantidades com os alunos. Uma situação é o momento da chamada que, geralmente, é feita por meio de fotos ou músicas, em uma roda de conversa. O professor pode explorar a relação parte-todo comparando a quantidade de meninos na sala de aula com o total de alunos. Nesse caso, a fração  $6/18$ , por exemplo, indicaria que de um total de 18 alunos, 6 são meninos.

Comparar quantidades de objetos de dois conjuntos, por estimativa e/ou por correspondência (um a um, dois a dois, entre outros), para indicar “tem mais”, “tem menos” ou “tem a mesma quantidade”, indicando, quando for o caso, quantos a mais e quantos a menos (BRASIL, 2018, p. 281).

Nesse contexto, o professor pode também explorar a razão entre meninos e meninas na sala de aula. Tomando o exemplo anterior, teríamos a razão 6/12, indicando que na sala de aula estudam 6 meninos e 12 meninas, ou ainda, que a cada menino há duas meninas. Essas abordagens são interessantes pois, por meio delas, os alunos vão se familiarizando com relações de primeira ordem (LAMON, 2012).

Outras situações ou estratégias que exploram o raciocínio proporcional e podem ser utilizadas nos primeiros anos escolares são encontradas na literatura. Tortola (2012), por exemplo, desenvolveu com alunos de um 4º ano do Ensino Fundamental, uma atividade de modelagem matemática que relacionou as moedas dólar e real, sendo o problema norteador da investigação, escolhido pelos alunos, “como se determina o valor do dólar em reais?”. Aparentemente a resolução se resume em multiplicações, porém os alunos usaram estratégias que evidenciam a mobilização do raciocínio proporcional, sinalizando que identificaram as grandezas envolvidas e como elas se relacionam, remetendo ao aspecto “quantidades e covariação” do raciocínio proporcional, apontado por Lamon (2012). A Figura 4 mostra o registro dos alunos para essa situação.

**Figura 4:** Multiplicações sucessivas para o cálculo do câmbio Dólar-Real

Handwritten student work showing the calculation of the exchange rate for 3 dollars. The work is written in purple ink and includes three lines of calculations: "1 dolar = R\$ 1,86", "2 dolares = R\$ 2 x R\$ 1,86", and "3 dolares = 3 x R\$ 1,86 =". To the left of the first line is a purple arrow labeled "2 x" pointing to the second line, and another purple arrow labeled "3 x" pointing to the third line. To the right of the second line is a purple arrow labeled "x 2" pointing to the third line, and another purple arrow labeled "x 3" pointing to the final result.

**Fonte:** Elaborado com base nos registros de Tortola (2012, p. 125)

Além disso, ao elaborar o modelo matemático os alunos produziram o texto: “*Você pega o valor do dólar e multiplica o valor de um dólar, e vai dar o dólar em real*”, o que indica que eles entenderam como ambas grandezas variam (covariância). Os alunos também perceberam que a regra  $\text{US\$ } 1,00 = \text{R\$ } 1,86$  nem sempre é válida, pois o dólar sofre alterações no decorrer dos dias. A produção desse modelo matemático contribuiu para que os desenvolvessem a “[...] noção de função, a multiplicação e a ideia de proporcionalidade, conceitos estes que possibilitaram a estruturação matemática da função linear por meio da linguagem natural. Além disso, envolveu a multiplicação de Números Racionais [...]” (TORTOLA, 2012, p. 127). Esse estudo corrobora com a ideia de que há várias maneiras por meio das quais os alunos podem se expressar, usando estratégias condizentes com sua idade e partindo de temas que podem lhes provocar interesse.

Em um estudo realizado com alunos entre 10 e 14 anos, Costa e Ponte (2008) verificaram que mesmo antes do ensino formal da proporcionalidade direta, a maioria dos alunos conseguiu realizar corretamente atividades propostas que presumiam a utilização do raciocínio proporcional. Os autores ressaltaram que muitos alunos usaram estratégias aditivas, entretanto, vários outros usaram estratégias multiplicativas, o que significa um salto em relação ao desenvolvimento desse raciocínio, visto que uma das estratégias mais usadas pelas crianças e adolescentes na resolução dessas atividades é de natureza aditiva (COSTA; PONTE, 2008). No entanto, à medida que as aulas vão avançando é preciso incentivar diferentes estratégias, entre elas estratégias multiplicativas, funcionais e escalares, as quais serão possíveis com o desenvolvimento e exploração do raciocínio proporcional em sala de aula, já na Educação Infantil, respeitando suas especificidades e características.

Na próxima seção, iremos apresentar os aspectos metodológicos e o contexto da pesquisa, destacando alguns aspectos que consideramos relevantes para compreender o cenário de investigação.

## 4 ASPECTOS METODOLÓGICOS E CONTEXTO DA PESQUISA

Neste capítulo abordamos o contexto em que a pesquisa foi realizada, apresentando a turma participante, as atividades e o modo como foram desenvolvidas, e como os dados foram coletados e analisados. Também trazemos alguns aspectos teóricos sobre os quais nos pautamos para seu delineamento e apresentamos nossa ideia para o produto educacional.

### 4.1 NATUREZA DA PESQUISA

Ao propor para investigação a questão principal “*Como se dá o desenvolvimento do raciocínio proporcional em atividades de modelagem matemática desenvolvidas por alunos da Educação Infantil?*” em nossa pesquisa, nos propusemos também destacar os aspectos da Modelagem Matemática que promovem o raciocínio proporcional e divulgar os resultados por meio de um material pedagógico, que contém orientações para professores que pretendem trabalhar com atividades de modelagem matemática e explorar o raciocínio proporcional.

O foco de nossa pesquisa não está na quantificação de dados, mas na compreensão dos resultados e nas implicações que eles têm para o campo da Educação Matemática, particularmente para a Modelagem Matemática no contexto da Educação Infantil. Diante do exposto, consideramos que nossa pesquisa tem natureza qualitativa (LUDKE; ANDRÉ, 2014), com caráter interpretativo.

O termo interpretativo é utilizado por reconhecermos que a pesquisa não é neutra (BOGDAN; BIKLEN, 1982) e, embora tomemos todos os cuidados para intervir o menos possível no ambiente e na ocorrência dos eventos que resultaram em nossos dados – as atividades de modelagem matemática –, os resultados da pesquisa são interpretações de cunho pessoal, e refletem nosso olhar sobre os registros, ações e encaminhamentos dos alunos para as atividades propostas.



## 4.2 OS SUJEITOS DA PESQUISA

Envolveram-se na pesquisa, além da professora pesquisadora, duas professoras regentes, uma estagiária e dezessete alunos, com idades que variavam entre 3 e 4 anos. Na ocasião, os alunos frequentavam uma turma de Maternal III de um Centro Municipal de Educação Infantil (CMEI), público, localizado em uma cidade no Centro Ocidental do Paraná. Por funcionar em tempo integral, os alunos ficavam no CMEI das 07h30min até as 17h30min.

A professora pesquisadora trabalha no mesmo CMEI onde realizou a pesquisa, em uma turma de Maternal I, com alunos de 1 e 2 anos, porém no momento da coleta de dados atuava em outra turma, de Maternal III, com alunos de 3 e 4 anos. As professoras regentes dessa turma gentilmente cederam um espaço de suas aulas para o desenvolvimento da pesquisa. As atividades de modelagem matemática foram desenvolvidas com as crianças em períodos em que a professora pesquisadora não estava exercendo regência em sua turma.

Ao iniciar a coleta dos dados a turma tinha 19 alunos, porém no decorrer da pesquisa uma aluna foi matriculada e 01 aluno foi transferido. Entre os alunos, um deles possui paralisia cerebral e contava com o acompanhamento da estagiária e dependia de seu auxílio e/ou das professoras. Como necessitava de atendimento diferenciado, muitas vezes se ausentou da sala de aula. Dentre os 19 responsáveis pelos alunos, 17 assinaram autorização (modelo no Apêndice A) para que fizéssemos uso de imagens, falas e registros escritos produzidos por eles – que são os que apresentamos e analisamos neste texto –, todavia, todos os presentes participaram do desenvolvimento das atividades, já que a direção da escola autorizou que as atividades fossem desenvolvidas.

Os alunos, em sua maioria, foram participativos, as professoras regentes e a estagiária da turma mostraram-se comprometidas e dispostas a auxiliar no que fosse preciso. Uma das professoras regentes, inclusive, inteirou-se com os temas das atividades antes de ser desenvolvidas, para que planejasse suas aulas de acordo com o tema que abordaríamos.

Tanto alunos, quanto professoras, portanto, mostraram-se dispostos a participar e colaborar com o desenvolvimento das atividades de modelagem matemática e da pesquisa.

### 4.3 AS ATIVIDADES E SEUS ENCAMINHAMENTOS

Cinco atividades de modelagem matemática foram desenvolvidas com os alunos e tiveram como temas assuntos diversos: brigadeiro, alimentação saudável, gangorra, bolhas de sabão e alimentação de cachorros. Dentre essas cinco atividades, escolhemos três para fazer a análise: brigadeiro, gangorra e alimentação de cachorros. As outras duas não foram analisadas nesta dissertação, mas fazemos uma breve descrição das atividades sobre bolhas de sabão no Apêndice C e sobre alimentação saudável no Apêndice D.

Durante o desenvolvimento das atividades buscamos promover discussões a respeito das estratégias utilizadas pelos alunos para a resolução das situações-problema, incentivando-os a comunicar suas ideias e a revisar seus encaminhamentos, a fim de observar elementos que pudessem indicar aspectos do raciocínio proporcional.

As atividades de modelagem matemática foram inseridas de forma gradual, pois de acordo com Almeida, Silva e Vertuan (2012) os alunos precisam se familiarizar com o desenvolvimento de atividades de modelagem, para que eles desenvolvam essa habilidade. Para isso, os autores sugerem três momentos para que os alunos se habituem com esse desenvolvimento e adquiram autonomia na resolução de problemas. Organizamos nossas atividades de acordo com esses momentos.

As atividades sobre brigadeiros e alimentação saudável foram desenvolvidas de acordo com o que Almeida, Silva e Vertuan (2012) especificam como primeiro momento de familiarização. Nesse primeiro momento o professor é responsável por apresentar o tema e a situação-problema com os dados e as informações necessárias, e por mediar e fazer intervenções, quando necessárias, no desenvolvimento da atividade.

A atividade sobre brigadeiros foi a primeira atividade de modelagem matemática desenvolvida pelos alunos e, para seu desenvolvimento, a turma foi organizada em três grupos, sendo um grupo com cinco alunos e dois grupos com seis alunos. A atividade foi desenvolvida em sala de aula e os materiais disponíveis foram: achocolatado, manteiga, leite condensado, granulado (ingredientes para o brigadeiro), panela, colher, forminhas para colocar os brigadeiros, pratos descartáveis, imagens de brigadeiro, giz de cera, foto de cada criança, cola e papel kraft. Nessa atividade, os alunos investigaram como determinar o tamanho ideal de um brigadeiro para que todos da turma pudessem saborear pelo menos um.

A atividade sobre alimentação saudável foi a segunda a ser desenvolvida. Foi realizada em sala de aula e os materiais disponibilizados para os alunos foram: variedade de legumes e

verduras (batata, pepino, couve, repolho, alface, abobrinha verde, abóbora cabotiá, cenoura, brócolis, chuchu, batata doce), frutas (laranja, mamão, kiwi, banana, maçã), pacote de arroz, macarrão, trigo, massinha de modelar, pratos de papelão descartáveis, lata de óleo, castanha de caju, manteiga, bambolês e imagens de legumes, verduras, carboidratos, proteínas e grãos leguminosas. Os alunos foram organizados em três grupos, sendo dois grupos com quatro alunos e um grupo com cinco alunos. O objetivo dessa atividade foi montar um prato saudável considerado adequado para a idade deles.

As atividades sobre bolhas de sabão e gangorra foram realizadas de acordo com o segundo momento de familiarização com a modelagem matemática. Esse momento é caracterizado pela independência dos alunos ao definir “procedimentos extramatemáticos e matemáticos adequados para a realização da investigação” (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p. 26). O professor ainda é o responsável por sugerir aos alunos o tema e o problema a ser investigado, mas cabe aos alunos, em grupos, além de resolver o problema, coletar novas informações, quando necessárias, para complementar as informações ofertadas pelo professor.

A atividade com o tema bolhas de sabão foi desenvolvida em dois ambientes diferentes: a sala de aula para confeccionar a receita, e o solário do parque para as crianças brincar com as bolhas de sabão. Os materiais utilizados foram: glicerina, jarra com água, detergente, colher e suas respectivas imagens impressas, cartolina, cola, copos descartáveis, palitos de sorvetes, anel da tampinha de garrafa pet, cola quente, papel kraft. Organizamos a sala de aula em dois grupos, um com seis alunos e outro grupo com cinco alunos. A atividade teve como objetivo determinar a quantidade de ingredientes (água, detergente e glicerina) a ser usados na receita.

A atividade sobre a gangorra também foi realizada em três partes e em dois ambientes: na sala de aula e no parque do CMEI. Na primeira parte, sala de aula, foi realizada uma roda de conversa com os alunos para que eles expusessem suas brincadeiras preferidas e para a professora pesquisadora apresentar o tema para eles. Na segunda parte, no parque do CMEI, os alunos puderam investigar os fatores relevantes para uma gangorra estar em movimento, conforme interesse deles. Na terceira parte, novamente em sala de aula, os alunos foram organizados em três grupos com quatro alunos cada e realizaram atividades acerca das observações realizadas no parque a fim de responder o problema. Para essa atividade foram utilizados colchonetes, as duas gangorras disponíveis no parque, pacote de arroz de cinco quilogramas e pacotes de feijão de um quilograma cada, papel sulfite, cola, cartolinas, lápis de cor e imagens de gangorras em movimento e em equilíbrio.

A quinta e última atividade foi desenvolvida conforme o terceiro momento de familiarização sugerido por Almeida, Silva e Vertuan (2012) e teve como tema a alimentação de um cachorro de médio e grande porte. Nesse momento, a responsabilidade dos alunos já começa desde a escolha do tema e definição do que investigar. As ações realizadas pelos alunos são basicamente as mesmas nos três momentos, o que os diferem é a independência que lhes é ofertada a cada momento. O espaço utilizado para o desenvolvimento dessa atividade foi a sala de aula, os materiais trazidos pelos alunos foram: fotos dos animais que eles possuem em casa, e os materiais disponibilizados pela professora pesquisadora foram: imagens impressas de gatos, cachorros e pássaros, potes de sorvete, ração para cachorro, cartolinas, imagens de recipientes para colocar ração, cola, massinha de modelar, pratinhos de plástico, EVA picado na cor marrom. Os alunos foram dispostos em três grupos, com quatro alunos cada e investigaram quantas refeições são necessárias para alimentar um cão adulto de médio e grande porte e qual a quantidade de ração que devemos dar em cada refeição.

#### 4.4 SOBRE A COLETA DE DADOS

Para coletarmos os dados para nossa pesquisa usamos uma filmadora, três gravadores de áudio e dois celulares, com o objetivo de registrar as expressões, as falas e as imagens dos alunos desenvolvendo as atividades.

Além desses materiais utilizamos um diário de campo, em que a pesquisadora fez anotações consideradas interessantes para a análise das atividades, anotando reações dos alunos e suas impressões sobre o desenvolvimento das atividades.

Por fim, recolhemos os registros escritos produzidos pelos alunos, para analisarmos os encaminhamentos para as atividades de modelagem matemática a fim de encontrar indícios do raciocínio proporcional.

#### 4.5 SOBRE A ANÁLISE DOS DADOS

As análises das atividades foram realizadas com a intenção de buscar nos encaminhamentos dos alunos da Educação Infantil para as atividades de modelagem

matemática indícios de manifestação do raciocínio proporcional, conforme nosso interesse de pesquisa. Nossas inferências e argumentações estão pautadas nos referenciais teóricos apresentados, Ensino de Matemática na Educação Infantil, Modelagem Matemática e Raciocínio Proporcional.

Neste relatório de pesquisa apresentamos a análise detalhada de três das atividades desenvolvidas: brigadeiro, gangorra e alimentação de cachorros. As atividades foram desenvolvidas de acordo com os momentos de familiarização que Almeida, Silva e Vertuan, (2012) sugerem. Dessa forma, optamos por analisar uma atividade de cada momento, sendo a do brigadeiro, a atividade de primeiro momento, a da gangorra, de segundo momento e a alimentação de cachorros de terceiro momento.

Decidimos por realizar dois tipos de análises: análises locais, com um olhar específico para cada atividade, e uma análise global, a partir da qual olhamos para as manifestações do raciocínio proporcional em alunos da Educação Infantil ao desenvolver atividades de modelagem matemática.

Como as análises locais referem-se a particularidades de cada atividade, descrevemos primeiramente cada uma delas, conforme nossos registros e impressões sobre as três atividades selecionadas, destacando os principais encaminhamentos e discussões. Essas descrições são apresentadas no Capítulo 5. Em seguida, sinalizamos trechos em que identificamos ideias e formas de pensar que inferimos remeter aos aspectos que, segundo Lamon (2012), indicam a mobilização ou desenvolvimento – manifestações – do raciocínio proporcional. Por fim, produzimos textos que apresentamos também no Capítulo 5, após a descrição da atividade correspondente, que sistematiza e apresenta as manifestações do raciocínio proporcional nas referidas atividades. Buscamos pontuar as situações das atividades em que identificamos indícios do raciocínio proporcional, contextualizando-as e explicando essa mobilização com base nos aspectos apresentados por Lamon (2012).

Com a intenção de manter a identidade dos alunos preservada, denotamos nas descrições e análises os alunos da seguinte forma: A1 o primeiro aluno de uma lista em que os alunos foram organizados em ordem alfabética, A2 o segundo aluno da lista, e assim por diante, até o código A17. Para a professora pesquisadora atribuímos o código P, para as professoras regentes da sala de aula R1 e R2 respectivamente e para a estagiária atribuímos o código E.

#### 4.6 SOBRE O PRODUTO EDUCACIONAL

Uma das características da pesquisa no mestrado profissional é a elaboração de um produto de natureza educativa, que visa a “melhoria do ensino na área específica, sugerindo-se fortemente que, em forma e conteúdo”, esse material possa ser utilizado por outros profissionais (MOREIRA, 2004, p. 134).

Com o intuito de divulgar nossa pesquisa e, especialmente, as atividades de modelagem matemática desenvolvidas e discussões acerca da mobilização e/ou desenvolvimento do raciocínio proporcional, elaboramos o produto educacional intitulado “Modelagem Matemática e Raciocínio Proporcional: orientações para professores da Educação Infantil”, conforme capa apresentada no Apêndice B.

No produto educacional realizamos uma fundamentação teórica sobre modelagem na Educação Matemática, para que os professores a conheçam como uma alternativa para suas práticas em sala de aula (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012), e sobre raciocínio proporcional no contexto escolar, para que tenham subsídios para identificar, mobilizar e/ou promover o seu desenvolvimento. Em seguida, descrevemos as três atividades analisadas nesta dissertação: Brigadeiro, quanto maior melhor? Balançar ou Equilibrar na Gangorra? Quanto come o Cachorro? E fazemos sugestões e orientações quanto ao encaminhamento delas em sala de aula, tomando como base a experiência que vivenciamos e que deu origem aos dados desta pesquisa. Desse modo, com esse material pedagógico pretendemos fornecer um norte para o professor da Educação Infantil que deseja incluir atividades de modelagem matemática em suas práticas e criar condições para seus alunos desenvolver o raciocínio proporcional.

Deixamos como sugestões as outras duas atividades desenvolvidas: ‘Bolhas de Sabão: diversão na certa’ e ‘Vamos cuidar da alimentação?’ Contextualizamos uma possível problemática e deixamos a cargo do professor o desenvolvimento. Ressaltamos que as sugestões dadas não precisam ser seguidas à risca, inclusive, é interessante que o professor se aventure em novos encaminhamentos em conformidade com as resoluções de seus alunos.

Nos anexos desse material pedagógico disponibilizamos, ainda, alguns moldes, figuras e imagens que podem ser impressas pelos professores quando for desenvolver qualquer uma dessas atividades em sala de aula.

Acreditamos que a apresentação dessas atividades pode despertar o interesse em professores em modificar e/ou inovar suas práticas pedagógicas na Educação Infantil.

## 5 ANÁLISE DAS ATIVIDADES

Neste capítulo olhamos particularmente para três atividades de modelagem matemática desenvolvidas com os alunos da Educação Infantil, com o intuito de apresentar as descrições e as análises dos dados coletados no decorrer da pesquisa, com foco em identificar nos encaminhamentos dos alunos os aspectos apontados por Lamon (2012), que sinalizam manifestações do raciocínio proporcional.

### 5.1 DESCRIÇÃO DA ATIVIDADE 1: BRIGADEIRO, QUANTO MAIOR MELHOR?

Essa atividade foi desenvolvida em todo o período de aula do dia 09 de maio de 2019, porém o tempo de desenvolvimento da atividade em si durou aproximadamente 02 horas e 30 minutos, pois respeitamos e participamos da rotina diária dos alunos: café da manhã, almoço, descanso, lanche da tarde e jantar. A atividade foi desenvolvida de acordo com o primeiro momento de familiarização dos alunos com a Modelagem Matemática, ou seja, a professora pesquisadora apresentou a situação-problema com os dados e informações necessárias (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012) e fez a mediação / orientação durante o desenvolvimento da atividade. A atividade foi orientada na maioria das vezes por questionamentos e foi dessa forma que a professora pesquisadora fez o convite (BARBOSA, 2003) aos alunos para que eles investigassem a situação problematizada. Por meio da empolgação das respostas e das experiências que socializaram na conversa inicial ficou evidente o interesse dos alunos pelo tema, conforme mostra a Figura 5.

**Figura 5:** Motivação dos alunos pelo tema



**Fonte:** Dos autores

O tema foi escolhido pela professora pesquisadora pelo fato de ser comum a comemoração de aniversários de crianças em casa e/ou na escola e por ser o brigadeiro um dos doces mais requisitados nessas festas. De fato, a maioria dos alunos já tinham familiaridade com o tema, dizendo que já tiveram festa de aniversário e que a residência deles já foi um local de comemoração. Ao questionar-lhes o que há em festas de aniversário, o brigadeiro foi uma das primeiras respostas que os alunos disseram. Essas ações realizadas no sentido de informar-se sobre a situação, cercar-se de informações, constituem a fase de interação, sistematizada por Almeida, Silva e Vertuan (2012).

A professora pesquisadora questionou os alunos sobre o tamanho dos brigadeiros, se todos sempre têm o mesmo tamanho, levando-os a perceber que em uma festa, geralmente, possuem tamanhos parecidos, mas que podem variar de festa para festa, mas uma coisa é certa, se você gosta de brigadeiro, não é legal ficar sem comer pelo menos um. Sendo assim, a seguinte problemática foi proposta para investigação: “Qual o tamanho adequado do brigadeiro para a sua turma?” A única condição colocada foi que todos os alunos tivessem a opção de comer pelo menos um doce.

Organizamos os alunos em grupos e eles tiveram que criar e testar estratégias para confeccionar pelo menos um brigadeiro para cada aluno. Mas antes disso, os alunos tiveram que colocar a mão na massa para fazer o brigadeiro.

Foram apresentadas algumas imagens do doce, momento em que as alunas A9 e A12 disseram gostar de chocolate apontando para o brigadeiro, o que denota o conhecimento delas sobre pelo menos um de seus ingredientes. Em seguida, a professora pesquisadora convidou os alunos a preparar uma receita de brigadeiro e a professora regente R2 ressaltou a importância de misturar bem os três ingredientes: leite condensado, achocolatado e margarina, conforme a transcrição e a Figura 6, apresentadas na sequência.

**R2:** *Tem que mexer bem para misturar bem os ingredientes, porque senão fica tudo oh cheio de “farelinhos”, senão a gente fica sentindo o gosto da manteiga separado do gosto do chocolate.*



**Figura 6:** Mistura dos ingredientes



**Fonte:** Dos autores

Para que a massa do brigadeiro fosse preparada foi necessário recorrer à contagem, pois foi preciso contar a quantidade de colheres de achocolatado e de margarina que seria usada na receita.

Segundo Carvalho (2012) a contagem envolve dois esquemas de ação: a correspondência termo a termo e a adição. A correspondência termo a termo precede e dá espaço à compreensão das complexas relações assimétricas: ‘mais que’, ‘menos que’ e o conceito de adição está relacionado à iteração de  $1(+1)$  que auxilia na compreensão do conjunto dos números naturais, pois as crianças precisam aprender que 4 é  $3+1$ , por isso 4 é sucessor do 3, e assim por diante.

As crianças geralmente necessitam verbalizar a sequência numérica e apontar os objetos enquanto quantificam devido à dificuldade de ordená-los mentalmente, caso contrário, podem cometer equívocos.

Muitas vezes observamos na pré-escola que a mão vai mais rápido que a boca ou o contrário, isto é, não podem estabelecer uma correspondência termo a termo entre cada objeto e uma palavra-número e, portanto, o resultado da conta é errado (MORENO, 2006, p. 56).

Dessa forma, o professor deve atribuir a cada um dos objetos uma e somente uma palavra-número, respeitando ao mesmo tempo a ordem convencional da série. Assim, a professora pesquisadora contou, em voz alta e junto com os alunos, a quantidade necessária de cada ingrediente que seria usada na receita, especificando a unidade de medida de cada ingrediente: leite condensado, quantidade medida em caixa; margarina e achocolatado, quantidades medidas em colheres. Nesse momento a professora pesquisadora também explorou a relação entre quantidades, no sentido de questionar quanto de cada ingrediente

seria necessário para fazer duas receitas, por exemplo. Essas ações fizeram com que os alunos participassem da produção da massa do brigadeiro e observassem a importância de cada ingrediente e de suas respectivas medidas para o preparo dar certo, além, claro, de outros fatores como tempo, temperatura e manuseio no fogo.

Com a intenção de fazer com que os alunos percebessem que a mistura dos ingredientes não era suficiente para que os brigadeiros ficassem prontos, a professora pesquisadora os questionou se a massa estava pronta para a degustação, conforme transcrição a seguir.

*P: Já dá para comer o brigadeiro assim?*

*A8 e A4: Não.*

*A2: Sim.*

*P: É assim que é o brigadeiro?*

*A7: (Balança a cabeça que não).*

*A8 e A6: Não.*

*P: O que precisa para fazer?*

*A2: Esquentar.*

*P: Vamos colocar no fogão então.*

Observamos que além da fala, foi frequente o uso de gestos pelos alunos para se comunicar, para explicar ou complementar o que queriam dizer. Isso se justifica pois nessa faixa etária é comum os alunos usar o corpo como forma de expressão. Usam, assim, “intencionalmente (com criatividade, controle e adequação) como instrumento de interação com o outro e com o meio” (BRASIL, 2018, p. 52).

Após misturada a massa do brigadeiro, os alunos foram direcionados à cozinha para que as cozinheiras finalizassem o preparo da massa, conforme mostra a Figura 7. Esta finalização se deu por meio do aquecimento da mistura da massa em fogo baixo até desgrudar da panela e o manuseio foi realizado pelas cozinheiras, devido aos perigos causados pelo fogo. Aproveitamos o momento para chamar a atenção dos alunos para esses perigos e da importância desse manuseio ser realizado por um adulto.

**Figura 7:** Deslocamento dos alunos até a cozinha



**Fonte:** Dos autores

Depois que a massa do brigadeiro foi ao fogo e chegou ao ponto esperado, foi necessário deixá-la esfriar, para que pudesse ser enrolada, de modo que os brigadeiros fossem confeccionados. Consciente desse tempo de espera para o resfriamento da massa, a professora pesquisadora levou para a sala de aula outras massas de brigadeiros, já prontas e frias, para que a confecção das “bolinhas” fosse iniciada. A professora pesquisadora, então, conversou com os alunos sobre como enrolar os brigadeiros e os fez pensar sobre a necessidade de cuidar do tamanho das bolinhas, conforme diálogo a seguir.

*P: Aqui já está a massa pronta, está durinha, eu vou dar a massa do brigadeiro e daí todo mundo tem que comer, não pode ficar ninguém sem comer.*

*P: Para fazer o brigadeiro é preciso passar um pouquinho de manteiga na mão para não grudar. Passa a manteiga na mão daí a gente vai pegar um pouquinho [da massa] e agora o que a gente faz?*

*A8: Tem que enrolar para colocar no papelzinho.*

*P: E para enrolar o que precisa?*

*A8: Precisa da massa.*

*P: E o que mais? Precisa da mãozinha. Daí faz igual a A8 falou, olha o movimento da minha mãozinha. O que estou fazendo aqui?*

*A6: Uma bola.*

*P: Daí a gente pode passar no granulado e comer, ou, não precisa do granulado.*

A colocação feita pela professora, *todo mundo tem que comer*, retoma o problema da atividade: Qual o tamanho adequado do brigadeiro para a sua turma? Os alunos foram organizados em três grupos, dois deles com seis alunos e um grupo com cinco alunos. O intuito de organizar os alunos em grupos nesse momento foi permitir que eles criassem estratégias ou usassem alguma ideia já conhecida para dividir a massa do brigadeiro que a

professora pesquisadora disponibilizou em cada grupo, conforme mostram a Figura 8 e o diálogo a seguir. Lembramos que a única condição estabelecida foi que nenhum aluno ficasse sem a opção de comer pelo menos uma bolinha de brigadeiro.

**Figura 8:** Distribuição da massa de brigadeiro por grupo



**Fonte:** Dos autores

*P: Agora olha o que vocês terão que fazer, pegar isso aqui [aponta para a massa do brigadeiro] que eu deixei na mesa e vão ter que dividir com os amigos para fazer as bolinhas. Podem começar.*

A condição estabelecida pela professora pesquisadora coloca os alunos frente à necessidade de pensar matematicamente a situação-problema, uma vez que eles deveriam ter o cuidado de dividir a massa de maneira que cada aluno recebesse uma quantidade. Essa fase de uma atividade de modelagem matemática, que consiste no uso da linguagem matemática para descrever e/ou interpretar a situação, é chamada de *matematização* (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012). Nessa fase foram colocadas em evidência as variáveis envolvidas na problemática (tamanho e quantidade de brigadeiros), hipóteses foram formuladas (e se o brigadeiro for feito desse tamanho, terá massa suficiente para fazer um para cada aluno?) e simplificações foram realizadas (os brigadeiros, preferencialmente, devem ter o mesmo tamanho). O diálogo a seguir ilustra essa fase e mostra como ela influencia no encaminhamento da atividade, particularmente, no que se refere à decisão de um grupo de fazer “bolinhas menores”.

*R2: A7 olha o tanto que você pegou, você não acha bastante?*

*R2: Divide ao meio, divide com a amiga [...] você pegou bastante.*

*P: Olha só o tamanho do brigadeiro do A7, olha aqui o tamanho, será que se fizermos brigadeiros grandes, todo mundo vai conseguir comer?*

*A3: Sim.*

*P: Vai comer A3? Tem que fazer grande assim? Ou menor?*

*A17: Menor.*

*P: Isso A17 tem que fazer bolinhas pequenas.*

Essa mediação tanto da professora pesquisadora, quanto da professora regente R2, fez com que os alunos constatassem que tinha colega sem massa de brigadeiro, ou seja, enquanto um colega tinha muita massa, outros não tinham nada, ou quase nada. Assim sendo, os alunos perceberam que quanto mais massa utilizassem, maior seria o brigadeiro, conforme mostra a Figura 9.

**Figura 9:** Brigadeiro grande feito pelo aluno A7



**Fonte:** Dos autores

Além do brigadeiro exposto na Figura 9, feito por A7, os alunos fizeram brigadeiros de diferentes tamanhos, até determinar o tamanho que eles consideraram ideal para que todos pudessem comer pelo menos um brigadeiro. Essas ações de testar um tamanho, constatar que está muito grande (ou pequeno) e remodelar o brigadeiro, sinalizam a fase de *resolução* (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012), momento em que os alunos empreendem suas estratégias para resolver o problema.

Ao determinar um tamanho para o brigadeiro que consideraram adequado às condições colocadas pela professora pesquisadora, os alunos obtiveram um modelo, físico, do tamanho que deveriam ser confeccionados os brigadeiros, ou seja, ao olhar para aquele brigadeiro pronto em suas mãos, poderiam se basear em seu tamanho para confeccionar outros brigadeiros.

O registro desse tamanho de brigadeiro indica o modelo matemático para a situação-problema, uma vez que descreve por meio de uma linguagem ou estrutura matemática o fenômeno sob investigação, ou seja, o tamanho do brigadeiro e, após elaborado, passa a ser

demonstrativo de qual tamanho deve ter os outros brigadeiros, em conformidade com as colocações de Almeida, Silva e Vertuan (2012). Em geral, esse registro é feito por meio de desenhos, pinturas, recortes, colagens, entre outros (ANTONIAZZI, 2016).

Para essa situação em particular os alunos conseguiram a partir do modelo físico reproduzir os tamanhos dos brigadeiros e não sentiram necessidade de fazer um registro. Porém, consideramos importante que os alunos façam o registro dos modelos matemáticos elaborados por eles, pois por meio dos registros os alunos externalizam seus pensamentos e organizam suas ideias e, dessa forma, são levados a retomar a situação-problema e os procedimentos que levaram à resolução. Essa necessidade de registrar a resolução por meio de um modelo matemático não surgiu espontaneamente dos alunos e acreditamos que nessa idade isso dificilmente acontecerá, portanto, cabe ao professor incentivar que esse registro seja feito para que o aluno possa compreender a atividade de modelagem e desenvolver a linguagem matemática.

Embora na ocasião o registro não tenha sido realizado pelos alunos, a professora pesquisadora também desenvolveu essa atividade no ano anterior (2018), com outra turma de Maternal III, e ainda que não sejam os mesmos alunos, como possuíam a mesma faixa etária e se encontravam no mesmo contexto escolar, suas resoluções podem nos dar uma ideia de como esse registro pode ser realizado. A figura 10 mostra como esses alunos registraram seus modelos matemáticos.

**Figura 10:** Modelos matemáticos produzidos pelos alunos de uma turma de 2018



**Fonte:** Dos autores

Depois que os alunos fizeram a confecção e degustação dos brigadeiros, a professora regente R2 registrou em um painel da sala de aula quantos brigadeiros cada aluno comeu, pois usaríamos essa informação na confecção de um cartaz. Nesse momento, a aluna A9 falou que não comeu nenhum brigadeiro e, ao ser questionada sobre o motivo, ela explicou que não comeu porque não gosta de brigadeiro. Após a professora regente R2 registrar a quantidade que cada um comeu, os alunos fizeram a pintura de imagens de brigadeiros de acordo com a quantidade que informaram, conforme Figura 11.

**Figura 11:** Representações da quantidade de brigadeiros consumida pelos alunos



**Fonte:** Dos autores

A Figura 11 mostra que os alunos relacionaram a quantidade de brigadeiros que comeram com os dedos da mão, corroborando com a ideia de que na Educação Infantil é

importante que os alunos utilizem seu próprio corpo para aprender, pois os “[...] gestos corporais também são uma forma de comunicação e, para as crianças, torna-se um meio de fazer mais explícita a intenção de sua fala” (GRANDO; MOREIRA, 2012, p. 132).

Em uma conversa com os alunos sobre os estudos e ações realizados até então (cores, ingredientes, formas do brigadeiro), a aluna A8 estabeleceu relação entre o formato do brigadeiro com algo que “*rola*”, uma característica importante, que será utilizada futuramente pelos alunos para diferenciar poliedros de não poliedros, por exemplo. Para explorar um pouco mais essa ideia, a professora pesquisadora questionou aos alunos quais outros objetos também possuíam essa característica ou esse formato, a aluna A2 direcionou o olhar para a parede e respondeu “*os bolinhos*”, conforme mostra a Figura 12.

**Figura 12:** Objeto com o formato similar ao do brigadeiro



**Fonte:** Dos autores

Além dos “bolinhos” a professora pesquisadora visualizou algumas formas geométricas na parede e perguntou para os alunos se eles as conheciam e vários alunos sinalizaram conhecê-las, conforme diálogo a seguir.

*A17: “Formas”.*

*P: Isso A17, como são chamadas?*

*A9: Quadrado.*

*A2: O círculo.*

*A9: O triângulo.*

*A14: O quadrado.*

Como os alunos tinham conhecimento de algumas formas geométricas, a professora pesquisadora comentou que além delas existem outras formas e a esfera é uma delas, que é a



forma que lembram as bolinhas de brigadeiro. Deu como exemplo também “*aquelas bolinhas coloridas da piscina de bolinhas*”, brinquedo que também é frequentemente utilizado em festas de aniversário.

Após a discussão dessas informações, a professora pesquisadora convidou os alunos para colar as imagens de brigadeiros que pintaram e que indicavam a quantidade de bolinhas que cada um comeu, em um cartaz coletivo (Figura 13). Dessa forma os alunos puderam visualizar a quantidade que cada um comeu, podendo comparar e verificar se todos comeram, condição inicial da atividade.

**Figura 13:** Cartaz “Quantos brigadeiros cada um comeu”



**Fonte:** Dos autores

Essa ação caracteriza a fase de *interpretação de resultados e validação* (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012), momento em que os alunos puderam verificar se a condição inicial de cada um ter a opção de comer pelo menos um brigadeiro foi satisfeita e se o tamanho do brigadeiro confeccionado por eles foi adequado para que a turma toda pudesse saborear o doce.

Por meio desse cartaz, a professora pesquisadora chamou a atenção para a quantidade que cada um comeu, destacando que alguns alunos comeram mais unidades do que outros, porém, ressaltou que os que comeram mais, comeram brigadeiros menores, já que ao dividir a massa de brigadeiro entre os colegas do grupo fizeram uma divisão próxima de uma divisão equitativa, ou seja, todos os alunos tinham quantidades muito próximas de massa para fazer os brigadeiros, consideradas por eles iguais, todavia, enquanto alguns fizeram mais brigadeiros

com sua quantidade de massa, conseqüentemente, em tamanhos menores, outros fizeram menos brigadeiros, em tamanhos maiores.

## 5.2 ANÁLISE DA ATIVIDADE 1: BRIGADEIRO, QUANTO MAIOR MELHOR?

A ideia apresentada pelo problema da situação foi determinar a partir de uma quantidade de massa qual o tamanho adequado para as ‘bolinhas’ de brigadeiro, de modo que todos os alunos da sala tivessem a opção de comer pelo menos um brigadeiro.

Nossa intenção com essa questão foi que os alunos compreendessem que não importa a quantidade de bolinhas que façam, desde que todas tenham o mesmo tamanho e todos comam a mesma quantidade de bolinhas, todos comerão a mesma quantidade de massa em relação ao total, ideia relacionada à *unitização*. Com essa ação de fazer bolinhas de diferentes tamanhos também esperávamos que os alunos chegassem à conclusão de que quanto maior as bolinhas, menor seria o número de brigadeiros, uma vez que se tratam de grandezas inversamente proporcionais, entender essa relação entre o tamanho e o número de brigadeiros sugere a mobilização do aspecto *quantidades e covariação*.

Vejamos, todavia, quais foram os encaminhamentos dos alunos.

Logo no início da aula, quando a professora pesquisadora propôs organizar os 17 alunos em grupos, observamos a abordagem da primeira noção matemática identificada, a correspondência biunívoca. Após a proposta da organização dos alunos em grupos, a professora regente R2 logo se prontificou a fazer a contagem dos alunos para que eles, junto com ela, conferissem a quantidade total de alunos presentes nesse dia.

Como os alunos, em sua maioria, sabiam contar apenas até dez, a professora regente R2 os auxiliou na contagem, para isso foi colocando a mão na cabeça de cada aluno, e a cada toque ela pronunciou um número, de acordo com a sequência numérica dos números naturais. Essa ação de corresponder a cada aluno um número pronunciado, “denota a correspondência biunívoca que deve ser aprendida pelos alunos ao contar quantidades, ou seja, não se pode contar um colega duas vezes, nem deixar colega algum sem contar” (COUTINHO; TORTOLA; SILVA, 2018, p. 8).

A ideia de correspondência biunívoca está relacionada a muitas das ações que fazemos envolvendo números, tais como: comparação de quantidades, contagem (a cada objeto contado fazer corresponder um único número falado) e mais tarde, também será utilizada na compreensão do conceito de função (SMOLE, 2019).

Essa maneira de pensar a sequência numérica, estabelecida pela correspondência biunívoca entre alunos e numerais nos leva a inferir a mobilização do aspecto do raciocínio proporcional *quantidades e covariação* (LAMON, 2012), pois os alunos perceberam as duas grandezas envolvidas na situação e como elas variam quando relacionadas (CYRINO *et al.*, 2014): 1 toque para cada aluno, ou seja, 17 toques no total indicam 17 alunos em sala de aula. Essa ideia é importante para a compreensão do processo de quantificação e do sistema de numeração decimal.

Após a contagem dos alunos, esse aspecto foi mobilizado novamente, de maneira similar, quando a professora regente R2 distribuiu um pratinho para cada aluno, dizendo “*Não perde e nem estraga, porque vai dar um para cada um, 17 pratinhos, 17 crianças. É um para cada um*”. Esse trecho revela a intenção da professora regente de fazer com que os alunos identifiquem e compreendam a relação entre número de alunos e número de pratinhos. Ela ainda frisa que serão distribuídos 17 pratinhos, pois há na sala de aula 17 crianças. E reforça a ideia de que “*é um para cada um*”. Dessa forma, ao compreender essa relação entre as grandezas e como ambas variam, são fáceis conclusões do tipo: para 15 alunos são necessários 15 pratinhos; ou para 18 alunos, 18 pratinhos. Nesse ponto a regra de como as grandezas covariam ficou clara, “*é um para cada um*”, ou seja, a quantidade de pratinhos que será usada depende da quantidade de alunos que tem em sala de aula.

Nesse momento, podem ser exploradas observações do tipo: quanto menor a quantidade de alunos, menor o número de pratinhos que serão utilizados. Dito de outra forma: quanto maior a quantidade de alunos maior a quantidade de pratinhos. Outro tipo de observação que pode ser feita é: se aumentam dois alunos, aumentam dois pratinhos, e assim por diante.

Distribuídos os pratinhos para os alunos, a professora pesquisadora colocou um pratinho com massa de brigadeiro em cada grupo e desafiou os alunos a repartir com os colegas. “*Eu vou deixar o pratinho na mesa e vocês terão que repartir entre vocês*”. Todavia, não foi especificado como eles deveriam fazer essa repartição, justamente com a intenção de investigar como eles iriam proceder. Os alunos, então, pegaram quantidades de massa livremente, fazendo com que enquanto alguns tivessem muita massa, outros não tinham quase nada.

Ao visualizar a divisão da massa de brigadeiro entre os integrantes de um grupo, a professora regente R2 considerou que ela não estava coerente com a problemática da situação, pois alguns alunos estavam com muita massa, tanto em relação aos colegas, quanto em relação à quantidade de massa distribuída, como mostra a Figura 14.

**Figura 14:** Confeção de um brigadeiro grande



**Fonte:** Dos autores

Diante dessa constatação a professora regente R2 sugeriu a alguns alunos que dividissem sua massa com outros que tinham menos: *“Divide ao meio, divide com a amiga [...], você pegou bastante”*. A fala da professora sinaliza sua preocupação em fazer com que os alunos percebam a sua quantidade, mas em relação ao total distribuído e em relação à quantidade dos outros. Inferimos que essa fala é uma tentativa da professora de mobilizar nos alunos uma das 5 fontes de significado para  $a/b$ , que indica o raciocínio proporcional, especificamente a relação parte-todo. Ela espera que os alunos visualizem que ao pegar essa quantidade de massa, sobra muito pouco em relação ao total distribuído, assim como sua parte se mostra maior quando comparada às partes dos outros. Isso quer dizer que se os brigadeiros fossem produzidos no tamanho apresentado pela Figura 14, sobraria pouca massa para os outros, correndo o risco de colegas ficar sem massa, contrariando às condições da situação-problema. E nesse caso, foi o que aconteceu nesse primeiro momento.

Por outro lado, em outros grupos alguns alunos pegaram inicialmente pouca massa, dificultando a confecção dos brigadeiros, como mostra o diálogo a seguir.

**A14:** *Eu não consigo.*

**P:** *Pega um pouquinho mais A14. Agora faz a bolinha.*

**P:** *É assim mesmo, deixa eu ver, fez bolinha? Deixa eu passar mais manteiga.*

**A16:** *Eu não consigo.*

**R2:** *Isso, tem que fazer a bolinha A12, pega mais, porque você pegou pouco, olha o tantinho que você pegou. [...] tem gente fazendo brigadeirão e tem gente fazendo brigadeirinho. Tem que fazer um brigadeiro mais ou menos.*

Nesse diálogo, além de provocar os alunos a comparar suas partes de massa, caso particular da relação parte-todo (parte-parte), inferimos que a professora regente R2, buscou

a mobilização de outro aspecto do raciocínio proporcional, *partilha e comparação*, apontando evidências de seu desejo de observar uma divisão equitativa ao dizer “*Brigadeiro mais ou menos*”, o que interpretamos como uma tentativa de dizer o brigadeiro não pode ser nem tão grande, nem tão pequeno, olhem nos tamanhos dos brigadeiros dos colegas, os tamanhos não podem ser tão diferentes, eles têm que ser aproximadamente iguais.

Desse modo, enquanto mediadora, a professora pesquisadora provocou a reflexão sobre o tamanho dos brigadeiros que estavam sendo confeccionados “*Se fizermos brigadeiros grandes, todo mundo vai conseguir comer? [...] Tem que fazer grande assim?*” A aluna A17 respondeu que teriam que ser bolinhas menores, o que sinaliza que a aluna deve ter mobilizado, pelo menos dois aspectos, *relação parte-todo*, ao observar que a massa não ia ser suficiente para fazer bolinhas tão grandes para todos, e *quantidades e covariação*, ao concluir que as bolinhas precisavam ser menores, para que mais bolinhas fossem feitas. Essa conclusão se explorada pode auxiliar os alunos a identificar o comportamento de grandezas inversamente proporcionais. Outros alunos, como A8, também chegaram a essa conclusão e sinalizaram a mobilização desses aspectos. A8, porém, pontuou outra relação entre grandezas que podem ser consideradas diretamente proporcionais, ao dizer que para fazer brigadeiros maiores “*precisa mais ingredientes*”, ou seja, quanto mais brigadeiros produzidos, mais massa precisa ser feita e, conseqüentemente, maior quantidade de ingredientes. Essas situações podem auxiliar na diferenciação de grandezas diretamente proporcionais de grandezas inversamente proporcionais, contribuindo para o desenvolvimento do raciocínio proporcional, particularmente no que diz respeito ao aspecto *quantidades e covariação*.

Essas situações levaram os alunos a discutir e refletir sobre os tamanhos dos brigadeiros. Se inicialmente eles pegaram uma quantidade de massa sem pensar no que restaria para os outros, ou seja, sem se preocupar com sua parte em relação ao todo, o desenvolvimento da atividade foi lhes direcionando para a conclusão de que para resolver o problema eles deveriam fazer bolinhas de mesmo tamanho, como observamos nas festas de aniversário – o que valida essa estratégia –, provocando a mobilização do aspecto *partilha (divisão equitativa) e comparação* (LAMON, 2012; CYRINO *et al.*, 2014), esperado pela professora regente R2 desde o início da atividade.

Todavia, para chegar a essa conclusão, os alunos tiveram que explorar vários tamanhos para as bolinhas de brigadeiro. Ao perceber que ao dividir a massa de brigadeiro igualmente entre os colegas, eles poderiam fazer quantas bolinhas quisessem e do tamanho que desejassem – dentro do possível –, que o seu total de massa não ia mudar, e que duas bolinhas menores podem equivaler a uma bolinha maior, outro aspecto do raciocínio

proporcional foi acionado, a “*unitização*” (LAMON, 2012), uma vez que essas diferentes tentativas de tamanho, nada mais foram do que maneiras de reorganizar a massa de brigadeiro por meio de bolinhas, ou seja, a quantidade total de massa disponibilizada em cada grupo foi mantida (OLIVEIRA, 2014).

A Figura 15 mostra brigadeiros de diferentes tamanhos produzidos por um aluno, que junto aos brigadeiros produzidos pelos integrantes de seu grupo constituem a quantidade de massa de brigadeiro recebida.

**Figura 15:** Brigadeiros de diferentes tamanhos



**Fonte:** Dos autores

O aspecto *unitização* também foi mobilizado no momento em que foi confeccionado um cartaz sobre a quantidade de brigadeiros que cada aluno comeu, uma vez que a massa disponibilizada aos alunos foi organizada em quarenta e dois brigadeiros, uma forma diferente de representar o todo referencial. A Figura 16 mostra a quantidade total de massa disponibilizada aos grupos de alunos.

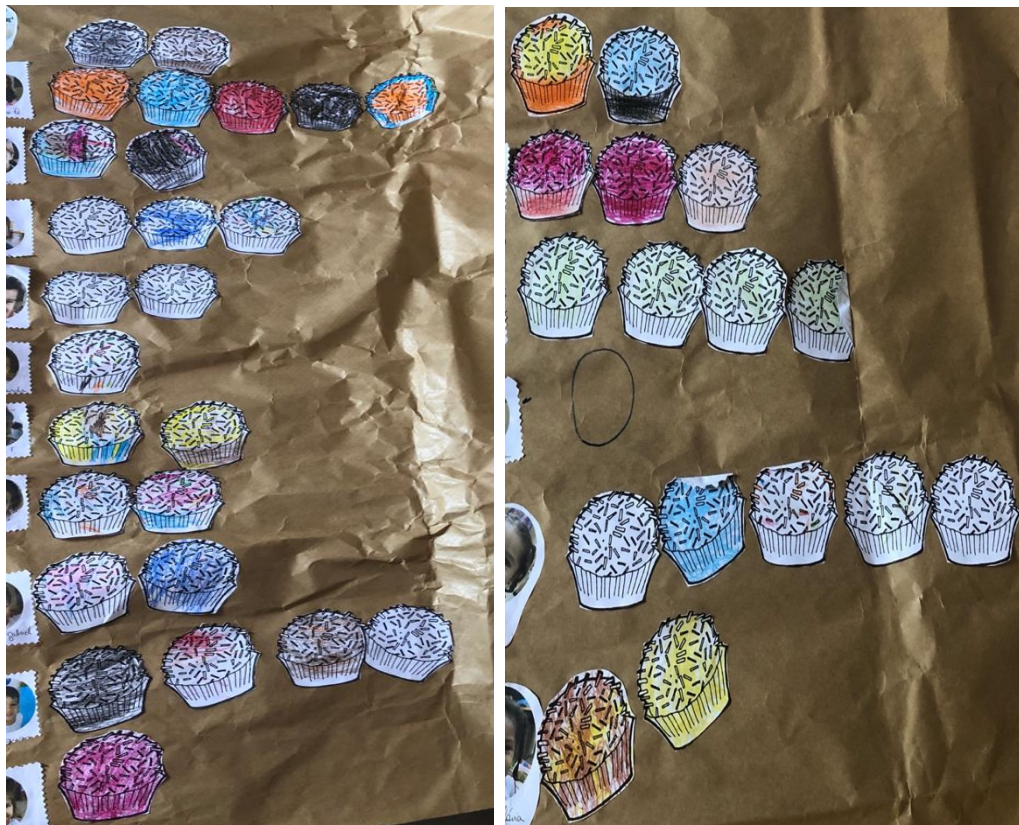
**Figura 16:** Massa disponibilizada aos alunos



**Fonte:** Dos autores

A Figura 17 mostra o cartaz no qual os alunos registraram os quarenta e dois brigadeiros confeccionados a partir da massa distribuída.

**Figura 17:** Gráfico pictórico de barras horizontal



**Fonte:** Dos autores

À esquerda do cartaz a professora pesquisadora colocou a foto de cada aluno e à direita da foto os alunos colaram imagens de brigadeiro que pintaram, indicando a quantidade

que cada um comeu, ou seja, para cada brigadeiro degustado, uma imagem de brigadeiro foi colada (novamente foi explorada a noção de correspondência biunívoca e os alunos foram levados a mobilizar o aspecto *quantidades e covariação*). Nesse momento alguns registros numéricos foram realizados, escrevendo os números que indicam as quantidades de brigadeiros degustados ou de imagens de brigadeiro coladas.

Em conversa com os alunos sobre o cartaz, a professora pesquisadora enfatizou que a quantidade de massa que eles utilizaram resultou na quantidade de brigadeiros que eles indicaram, por meio das colagens, no cartaz, ressaltando que embora alguns alunos indicaram que comeram 4 ou 5 brigadeiros isso não significa que eles comeram mais massa do que quem indicou que comeu 1 ou 2 brigadeiros, pois o total de massa de brigadeiro degustado por cada aluno se manteve. Mais uma vez o aspecto do raciocínio proporcional *unitização* foi mobilizado para a compreensão dessa situação.

Dessa forma, todos alunos determinaram um tamanho que consideraram adequado para produzir os brigadeiros, sem deixar nenhum aluno sem a opção de comer. Ressaltamos que devido à aluna A9 não gostar de brigadeiro, no gráfico pictórico indicamos por “0” (zero) sua quantidade, explicando para eles o que esse símbolo significa e como / quando pode ser utilizado.

Enfim, a atividade de modelagem matemática com o tema brigadeiros despertou interesse, entusiasmo e curiosidade dos alunos pelo tema. Durante o desenvolvimento da atividade os alunos interagiram com a professora pesquisadora e com as professoras regentes, compartilharam informações entre eles e deixaram explícitos os conhecimentos acerca da situação estudada. A atividade proporcionou, ainda, a discussão e a exploração de várias noções matemáticas que podem e devem ser abordadas na Educação Infantil, como correspondência biunívoca, contagem, formas geométricas, divisão, além disso, oportunizou aos alunos mobilizar aspectos que sinalizam manifestações do raciocínio proporcional, sendo eles: quantidades e covariação, relação parte-todo (e relação parte-parte), que é uma das 5 fontes de significado para  $a/b$ , partilha e comparação e unitização.

No Quadro 7 fizemos uma síntese dos aspectos do raciocínio proporcional (LAMON, 2012) que foram acionados e em quais situações isso aconteceu no desenvolvimento da atividade.



**Quadro 7:** Aspectos do raciocínio proporcional mobilizados na atividade do brigadeiro

Aspecto do raciocínio proporcional (LAMON, 2012)	Situações em que o aspecto foi mobilizado
Quantidades e covariação	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Ao contar o número de alunos a professora tocou um aluno a cada número que recitou (exploração do processo de quantificação e do sistema de numeração decimal usando a correspondência biunívoca);</li> <li>• Distribuição dos pratinhos para os alunos “<i>é um para cada um</i>”, “<i>17 crianças, 17 pratinhos</i>” (exploração do processo de quantificação e do sistema de numeração decimal usando a correspondência biunívoca);</li> <li>• Percepção da aluna A17 sobre ter que fazer bolinhas menores para que todos pudessem comer (grandezas inversamente proporcionais);</li> <li>• Percepção da aluna A8 que para fazer brigadeiros maiores ela “<i>precisa de mais ingredientes</i>” (grandezas diretamente proporcionais);</li> <li>• Confecção do cartaz, no qual os alunos colaram imagens de brigadeiros de acordo com a quantidade que cada um comeu “1 brigadeiro, 1 imagem”, “5 brigadeiros, 5 imagens” (correspondência biunívoca).</li> </ul>
5 fontes de significado para a/b	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Comparação entre as quantidades de massa que cada aluno pegou “<i>olha o tantinho que você pegou</i>” “<i>tem gente fazendo brigadeirão, tem gente fazendo brigadeirinho</i>” (caso particular da relação parte-todo, isto é, parte-parte).</li> </ul>
Partilha e comparação	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Entendimento dos alunos que os tamanhos dos brigadeiros têm que ser aproximadamente iguais “<i>brigadeiro mais ou menos</i>”, “<i>nem tão grande, nem tão pequeno</i>” (a partir da comparação da sua quantidade de massa com as quantidades dos colegas e das orientações das professoras os alunos realizaram a partilha da massa, visando uma divisão equitativa).</li> </ul>
Unitização	<ul style="list-style-type: none"> <li>• A partir da quantidade de massa que cada aluno recebeu, eles fizeram os brigadeiros (a quantidade de massa de cada aluno se mantém independente do número de bolinhas que fizeram);</li> <li>• A partir da quantidade de massa total os alunos fizeram 42 brigadeiros (reorganização da massa em bolinhas, independente do tamanho);</li> <li>• Discussão de que os alunos que comeram 4 brigadeiros comeram a mesma quantidade de massa que os alunos que comeram 2 brigadeiros, pois todos receberam a mesma quantidade de massa (como a quantidade de massa de cada aluno se mantém independente do número de bolinhas que fizeram, 4 bolinhas menores equivalem a 2 bolinhas maiores).</li> </ul>

**Fonte:** Dos autores

Essa síntese mostra que a atividade de modelagem matemática com o tema brigadeiros proporcionou várias situações, levantadas tanto pelos alunos quanto pela professora pesquisadora e professoras regentes, que permitiram abordar aspectos do raciocínio proporcional, sem fazer uso de regras ou fórmulas, mostrando-se com várias possibilidades de mobilização e desenvolvimento de tal raciocínio.

### 5.3 DESCRIÇÃO DA ATIVIDADE 2: BALANÇAR OU EQUILIBRAR NA GANGORRA?

A atividade com o tema ‘Gangorra’ foi realizada no dia 06 de junho de 2019, ela possibilitou aos alunos que vivenciassem o segundo momento de inserção de atividades de modelagem matemática sugerido por Almeida, Silva e Vertuan (2012), o tema foi escolhido por conta da professora pesquisadora conhecer o envolvimento dos alunos desse CMEI com esse brinquedo.

Primeiramente, no período da manhã, a professora pesquisadora fez uma roda de conversa em sala de aula com os 12 alunos presentes, para levantar informações sobre o conhecimento dos alunos acerca do tema, para isso fez alguns questionamentos: “*O que vocês fazem aqui na escola?*”, “*Quais brincadeiras vocês mais gostam de brincar aqui na escola?*”. Entre as diversas respostas, como: pintar as mãozinhas, brincar de lata, fazer atividades, dançar, brincar com massinha, uma aluna disse “*escorrega de escorregar*” (escorregador), a professora pesquisadora questionou onde fica esse brinquedo e os alunos responderam “no parquinho” – um dos alunos indicou também o bosque da cidade, ambiente não escolar, mostrando que reconhecem o brinquedo em outros ambientes também. Diante disso, a professora pesquisadora questionou os alunos sobre quais outros brinquedos têm no parquinho da escola e com quais eles gostam de brincar, as respostas foram: balanço e gangorra, assim a professora pesquisadora falou que eles iriam brincar na gangorra e por meio do brincar eles iriam aprender muitas coisas. Por meio dessa conversa inicial ficou visível que o tema era conhecido pelos alunos.

Em seguida fomos ao parque para observação e participação dos alunos na brincadeira da gangorra. As ações de destinar um tempo para que os alunos pudessem brincar e de fazer uma roda de conversa com os alunos, tiveram o objetivo de fazer com que eles se familiarizassem com a situação, conhecessem algumas informações e definissem o problema

para a investigação. Ações que caracterizam a fase *inteiração* (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012).

Após brincar por algum tempo, para que os alunos pudessem definir o problema a ser estudado, a professora pesquisadora convidou dois alunos para subir na gangorra, como mostra a Figura 18.

**Figura 18:** Convite para a definição do problema



**Fonte:** Dos autores

Durante a brincadeira a professora pesquisadora questionou: “*O que é mais legal nessa brincadeira?*” E provocou: “*ficar parado?*” Uma aluna respondeu que não, e disse que o legal é balançar. Com essa resposta, começamos nossas explorações para que os alunos compreendessem quais fatores são necessários para que a gangorra fique em movimento assim como os que fazem com que a gangorra fique parada ou em equilíbrio. Definindo assim, o problema a ser estudado.

Quando a professora pesquisadora questionou “*quantas crianças precisam ir na gangorra para que ela balance?*” A aluna A17 respondeu rapidamente que são necessárias duas crianças. E quando questionou se “*uma criança consegue balançar sozinha?*” os alunos balançaram a cabeça sinalizando que não. Diante dessa reação, a professora pesquisadora perguntou: “*O que precisa então?*” A aluna A8 respondeu “*precisa de mais amiguinhos*” indicando um conhecimento numérico acerca de quantidades como 1 e 2. Nesse instante a aluna teve um novo olhar para a situação-problema e começou analisá-la em termos matemáticos. A situação que estava descrita pela linguagem natural passa a ser interpretada

com o auxílio da linguagem matemática, essa transição entre linguagens é denominada *matematização* segundo Almeida, Silva e Vertuan (2012).

Depois a professora pesquisadora se sentou em um dos lados da gangorra, enquanto no outro lado sentou uma aluna, A17. Quando perguntou o que aconteceu, o aluno A5 disse que a professora “*ficou sentada*”, termo utilizado pelo aluno na tentativa de indicar que a professora ficou em uma posição a partir da qual ela não conseguiria levantar-se para fazer o movimento de sobe e desce na gangorra. Essa atitude da professora pesquisadora mostrou aos alunos que quando há uma diferença considerável entre os pesos das duas pessoas que estão na gangorra, esta permanecerá parada (estática).

O interessante é que o aluno A10 percebeu que sua amiga estava no lado mais leve da gangorra e tentou ajudá-la como mostra a Figura 19. Acreditamos que a ideia desse aluno foi baixar a amiga para que a professora subisse, ou seja, para que a gangorra entrasse em movimento.

**Figura 19:** Tentativa de baixar um dos lados da gangorra



**Fonte:** Dos autores

Diante dessa situação a professora pesquisadora explorou noções de altura, a partir da comparação entre a altura em que se encontrava e a altura de A17 por meio de perguntas como “*quem está mais alta?*” (A própria aluna respondeu que ela estava mais alta). “*Por que ela está mais alta do que eu?*” O aluno A5 respondeu “*você é muito grande do que ela*”, ou seja, você é mais pesada que ela, ficando nítido que o aluno relacionou a posição da professora com o peso dela e, por isso a aluna, estava na posição mais alta.

A professora pesquisadora convidou outros alunos para subir na gangorra e questionou quem estava na posição mais alta e se era possível ficar mais alto do que aquela posição. A

aluna A17 disse que não seria possível, sinalizando que os alunos têm ideia de qual é a altura máxima que cada lado da gangorra pode chegar em relação ao solo, assim como também conhecem a altura mínima e a relação entre elas, ou seja, que quando a altura de um lado é máxima a altura do outro lado é mínima. Isso ficou claro quando a professora pesquisadora pediu para os alunos observar a posição que estava a aluna A2 (que estava próxima ao chão) e questionou: “*tem como ela ir mais para baixo?*” A aluna A17 disse que não, em seguida a professora questionou “*se A2 não pode baixar mais, A8 pode ir mais para cima?*” Novamente a aluna A17 disse que não, ou seja, se não era possível que um dos lados da gangorra descesse mais, logo o outro lado também não poderia subir além daquela altura em relação ao solo, por fim, a professora disse “*isso acontece porque tem uma altura máxima que a gangorra atinge, é o limite*”, conforme mostra a Figura 20.

**Figura 20:** Altura máxima da gangorra em relação ao solo



**Fonte:** Dos autores

A professora pesquisadora também explorou a gangorra parada/em equilíbrio, para isso, colocou duas crianças na gangorra de modo que ela ficasse equilibrada e perguntou “*quem está mais alto?*” A aluna A17 respondeu rapidamente “*a aluna A2 e a aluna A8*”, essa fala demonstrou que a aluna interpretou que as duas estão na mesma posição, na mesma altura em relação ao solo, logo para a aluna uma das colegas estava tão alta quanto a outra, que foi a maneira que encontrou para dizer que nenhuma delas estava mais alta, pois estavam na mesma posição em relação ao chão, ou seja, a gangorra estava em equilíbrio.

Na Educação Infantil é interessante que os alunos possam experimentar diversas situações, façam tentativas para a construção de novos saberes. A fim de explorar um pouco

mais essas ideias de estar mais alto que ou mais baixo que, mais pesado que ou mais leve que, e está ou não está em equilíbrio, a professora pesquisadora propôs algumas investigações utilizando pacotes de alimentos ao invés de crianças.

Os alunos começaram tentando deixar a gangorra em equilíbrio, para isso testaram diversas possibilidades. Em uma situação eles colocaram dois pacotes de feijão em um lado da gangorra e um pacote de feijão do outro lado da gangorra, o que fez com que o lado com dois pacotes, mais pesado, se posicionasse próximo ao chão. Ao observar a tentativa dos alunos a professora pediu para que eles tirassem um pacote de feijão do lado mais pesado e observassem o que aconteceria, assim os alunos puderam perceber que ao tirar um pacote de um lado, o deixamos mais leve, e que se deixarmos a mesma quantidade de pacotes nos dois lados, eles colocam a gangorra em equilíbrio.

Em outra situação a professora colocou em um dos lados da gangorra um pacote de arroz (de cinco quilogramas). Por iniciativa própria o aluno A5 pegou um pacote de feijão (de um quilograma) e colocou do outro lado da gangorra. A professora pediu para que os alunos soltassem a gangorra e observassem o que aconteceria, o aluno A5 disse que o lado dele ficou alto, a professora o questionou por que isso aconteceu e ele respondeu: “porque caiu a gangorra” e ao perguntar “*por que caiu só este lado da gangorra?*” obteve como resposta de A8: “*Porque este aqui (referindo-se ao pacote de arroz) está muito grande*”. A professora pesquisadora confirmou: “*porque o pacote de arroz é mais pesado que o pacote de feijão*”. A Figura 21 ilustra essa situação.

**Figura 21:** Professora apontando o lado mais pesado da gangorra



**Fonte:** Dos autores

Diante disso, a professora pesquisadora questionou os alunos a respeito do que precisava ser feito para deixar a gangorra na posição de equilíbrio, a aluna A8 respondeu

“colocar mais um pacote de feijão”, a pedido da aluna a professora pesquisadora colocou mais um pacote de feijão, mas a gangorra permaneceu em desequilíbrio. O aluno A5 sugeriu tirar o pacote de arroz, a professora pesquisadora aceitou o pedido e, além disso, deixou um pacote de feijão em cada lado, deixando a gangorra em equilíbrio, como mostra a Figura 22.

**Figura 22:** Estratégias na tentativa de equilibrar a gangorra



**Fonte:** Dos autores

Para que os alunos pensassem outras estratégias a professora regente R2 insistiu em deixar o pacote de arroz e perguntou o que poderia ser feito para que a gangorra ficasse equilibrada nessa condição, a aluna A2 disse que “*esse tem que erguer* (apontando para o lado do pacote de arroz) e *esse abaixar* (apontando para o lado do pacote de feijão)”, assim a aluna A17 propôs colocar mais pacotes de feijão, até a gangorra ficar em equilíbrio, como mostra a Figura 23.

**Figura 23:** Gangorra equilibrada com alimentos



**Fonte:** Dos autores

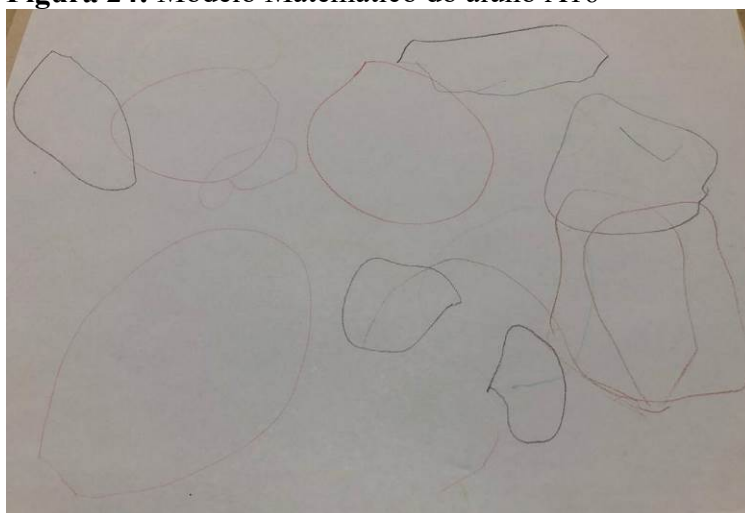
Foram necessários cinco pacotes de feijão em um lado para equilibrar a gangorra com um pacote de arroz de outro lado. Por fim, a professora contou para os alunos que o pacote de arroz tem cinco quilogramas e cada pacote de feijão tem um quilograma, por isso tivemos que usar cinco pacotes de feijão e um pacote de arroz para acontecer o equilíbrio.

No período da tarde a professora pesquisadora trabalhou em sala de aula, visto que os alunos foram organizados em grupos para registrar suas investigações. Como os alunos afirmaram inicialmente que a diversão da brincadeira da gangorra reside no movimento de balançar, a professora pesquisadora questionou os alunos sobre o que era necessário para a gangorra estar em movimento. A aluna A17 respondeu que é preciso ter duas pessoas e a partir da resposta da aluna a professora pesquisadora incentivou os alunos a pensar sobre a posição que as pessoas precisam estar para a gangorra se movimentar. Os alunos concluíram que é preciso alternar as posições dos lados, ou seja, nas palavras dos alunos, ora um lado tem que estar em cima, ora tem que estar embaixo, ou ainda, enquanto um lado sobe, o outro desce.

A professora pesquisadora orientou os alunos que registrassem suas conclusões, o que aprenderam na atividade no parque por meio de um desenho. Esses desenhos podem ser entendidos como modelos matemáticos do movimento (ou das posições) da gangorra, que indicam a *resolução* da situação-problema (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012).

A Figura 24 mostra o desenho, modelo matemático, feito pelo aluno A16.

**Figura 24:** Modelo Matemático do aluno A16



**Fonte:** Dos autores

Ao ser questionado sobre seu desenho, A16 além de explicar, indicando reconhecer os elementos de uma gangorra, mostrou que tem também conhecimento sobre as cores.



**R1:** Faz a gangorra igual lá do parque. Como ela é?

**A2:** De Vermelho.

**P:** O que você fez aqui meu anjo?

**A16:** Bolinhas.

**P:** E essas bolinhas são o que?

**A16:** Vermelho.

**P:** Mas tinha bolinha lá na gangorra?

**A16:** Sim.

**R1:** Ah entendi, são os assentos.

**P:** A16 esses são os lugares para as pessoas se sentar?

**A16:** Sim.

Segundo o aluno A16 seu desenho mostra que as gangorras têm vários assentos, representados por “bolinhas” e, quando questionado acerca das crianças nas gangorras, ele disse que as crianças estavam lá fora brincando, o que mostra que o aluno reconheceu que se brinca na gangorra no ambiente externo do CMEI, porém não considerou importante registrar as crianças em seu modelo matemático.

A Figura 25 mostra o desenho, modelo matemático representando o equilíbrio de gangorras, feito pela aluna A2.

**Figura 25:** Modelo Matemático da aluna A2



**Fonte:** Dos autores

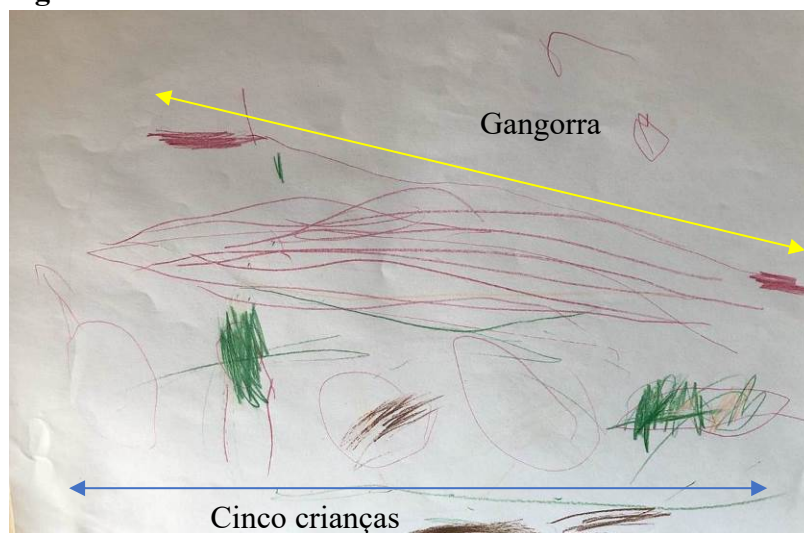
Segundo A2 seu desenho indica quatro gangorras nas cores amarela, preta, alaranjada e rosa, todas elas em equilíbrio, já a cor vermelha representa o muro do parque e dois lugares para sentar. O muro do parque foi o primeiro desenho que a aluna fez, considerando que o muro é alto, como poderia alguém sentar nele? Acreditamos que a atitude de A2 em desenhar um muro com lugares para sentar representa o que ela sabe, o que ela já vivenciou, pois de

acordo com Grando e Moreira (2012) as crianças não iniciam o desenho de acordo com o que vê, mas sim com o que ela sabe sobre o objeto. Desse modo, ela pode ter desenhado o muro dessa forma, pois ao pensar no parque, ela lembra que ele seu espaço é delimitado pelo muro, e os assentos podem se justificar tanto pela atividade realizada, uma vez que cada gangorra apresentava dois lugares para sentar, ou em outras experiências, em que já sentou ou viu pessoas sentadas em um muro.

Ao analisar os modelos matemáticos produzidos por A16 e por A2, observamos que embora eles não descrevam o movimento das gangorras, eles indicam a posição de equilíbrio delas, também discutida durante a atividade.

A aluna A8, por sua vez, prezou por indicar por meio de seu desenho o movimento da gangorra, como mostra a Figura 26.

**Figura 26:** Modelo matemático da aluna A8

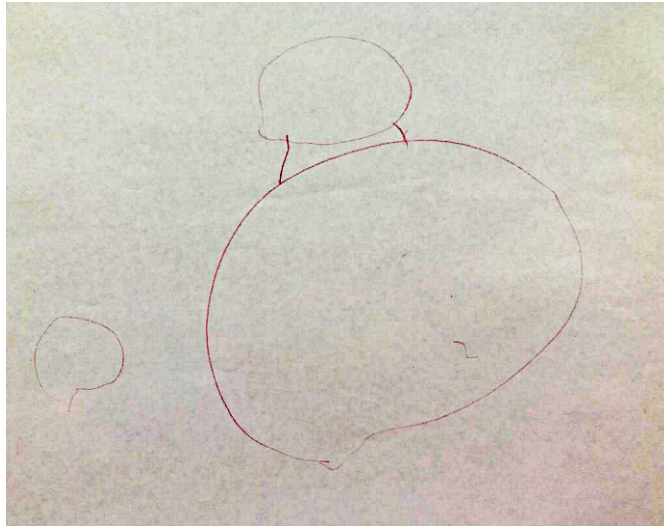


**Fonte:** Dos autores

Na Figura 26, a seta amarela indica a gangorra que a aluna A8 desenhou. Essa gangorra encontra-se na posição inclinada em que um lado está mais alto do que o outro, a aluna A8 desenhou também cinco crianças (quatro meninos e uma menina), indicadas pela seta azul, que segundo ela estavam brincando na gangorra. A aluna também mostrou compreensão sobre a altura dos lados da gangorra, pois ao ser questionada pela professora pesquisadora ela apontou indicando qual lado estava mais baixo e qual estava mais alto. Além da fala, a aluna fez uso de gestos corporais para explicar o modelo matemático que produziu. Os gestos corporais segundo Grando e Moreira (2012) também são uma maneira que as crianças encontram para se comunicar.

A Figura 27 apresenta o desenho, modelo matemático, produzido pelo aluno A10.

**Figura 27:** Modelo Matemático do aluno A10

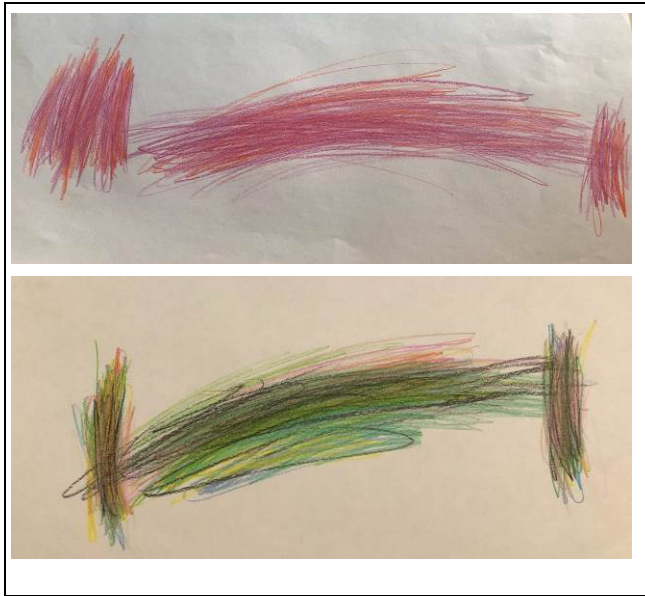


**Fonte:** Dos autores

Ao explicar o registro dele, o aluno disse “*grande e pequeno*”. Para verificar se ele sabia identificar os dois tamanhos, a professora pesquisadora questionou qual era o maior e qual era o menor, em seguida o aluno apontou e disse “*esse é grande e esse é pequeno*”. O gesto corporal que o aluno usou foi “um meio de fazer mais explícita a intenção de sua fala” (GRANDO; MOREIRA, 2012, p. 132). A professora pesquisadora questionou também o que representavam aqueles dois círculos, o aluno A10, convicto, respondeu que é uma gangorra. Acreditamos que o registro do aluno indica uma gangorra com dois lados em que há diferença de pesos, o que está de acordo com as discussões realizadas e pode ser interpretado de duas formas. Por um lado, pode ilustrar uma situação em que a gangorra provavelmente não estaria em movimento, pois um lado está mais pesado que outro. Por outro lado, o aluno pode também ter relacionado o movimento da gangorra à falta de equilíbrio, o que leva a pesos diferentes. Uma conversa mais detalhada com o aluno nesse caso poderia esclarecer isso.

Por fim, a aluna A17 produziu dois desenhos, modelos matemáticos, usando os dois lados da folha, como mostra a Figura 28.

**Figura 28:** Modelos Matemáticos da aluna A17



**Fonte:** Dos autores

Ao ser questionada sobre seus modelos matemáticos, sobre o porquê de sua gangorra estar “torta”, A17 respondeu: “*porque eles (as crianças) estão balançando*”, mostrando que a aluna compreendeu que ao balançar existe uma variação da altura em ambos os lados da gangorra.

Após a produção dos modelos matemáticos, a professora pesquisadora propôs uma atividade em que apresentou várias imagens de personagens brincando em gangorras, algumas delas em equilíbrio, outras não, os alunos organizaram as imagens em dois cartazes, como mostra a Figura 29, conforme a situação de equilíbrio ou não.

**Figura 29:** Interpretação das posições das gangorras



**Fonte:** Dos autores

Essa confecção dos cartazes ofereceu subsídios para a *interpretação de resultados e validação* do modelo matemático, (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012) a fim de determinar se a resolução obtida foi pertinente ou não em relação ao contexto do problema. Os alunos tiveram a percepção de que os modelos que eles produziram ficaram muito parecidos com os apresentados nas imagens fornecidas pela professora pesquisadora e com as gangorras do parque do CMEI, dessa forma, ficaram satisfeitos com os modelos matemáticos elaborados para representar o movimento (ou posições) da gangorra.

#### 5.4 ANÁLISE DA ATIVIDADE 2: BALANÇAR OU EQUILIBRAR NA GANGORRA?

No desenvolvimento da atividade sobre a gangorra, os alunos investigaram os fatores que determinam seu movimento e seu equilíbrio. A partir de uma conversa no parque os alunos brincaram e investigaram diversas situações com a orientação da professora pesquisadora, que levou à produção de modelos matemáticos, registrados por meio de desenhos, do movimento (ou das posições) da gangorra.

Nossa intenção com o desenvolvimento dessa atividade, foi que os alunos percebessem as relações entre grandezas, como o que acontece com os lados da gangorra quando um deles sobe? Ou o que acontece quando os pesos das pessoas são muito diferentes? Ou são iguais? Etc. Vejamos os encaminhamentos dos alunos.

Para problematizar a situação, a professora pesquisadora pediu para que uma aluna subisse em um dos lados da gangorra e perguntou se ela conseguiria balançar sozinha. Em resposta a esse questionamento, A8 falou que precisava de mais crianças para que a brincadeira funcionasse, essa maneira de pensar sobre a quantidade de crianças nos leva a inferir a mobilização do aspecto do raciocínio proporcional *quantidades e covariação* (LAMON, 2012), pois a aluna demonstrou compreensão de que com apenas uma criança seu lado da gangorra não sairia do chão, ou seja, não haveria variação nas alturas de ambos os lados da gangorra.

Para fomentar as discussões, a professora pesquisadora subiu em um dos lados e do outro lado sentou-se uma aluna. Imediatamente, o lado em que a professora pesquisadora estava desceu todo, deixando a aluna no alto. Embora agora houvesse mais que uma criança na gangorra, a diferença de pesos entre a professora e a aluna fez com que não houvesse movimento, mostrando que quando um lado é muito mais pesado que o outro, ele se posiciona

próximo ao chão. O aluno A10, ao observar a situação, tentou abaixar o lado da gangorra em que estava a colega, como mostra a Figura 30.

**Figura 30:** Tentativa de baixar o lado mais alto da gangorra



**Fonte:** Dos autores

Ao perceber que a colega estava “presa” nas alturas, o aluno tentou somar seu peso ao dela para que o seu lado pudesse abaixar e, conseqüentemente, a gangorra balançar e a brincadeira acontecer, pois da maneira que a Figura 30 mostra, o movimento da gangorra ficou impossibilitado. Isso mostra que o aluno tem ideia de como covariam peso e posição da gangorra, ou seja, para abaixar esse lado precisa de mais peso, o que denota a capacidade do aluno de identificar e mensurar quantidades, além de perceber como essas quantidades estão associadas (CYRINO *et al.*, 2014), o que remete, segundo Lamon (2012) em sua rede, ao aspecto *quantidades e covariação*.

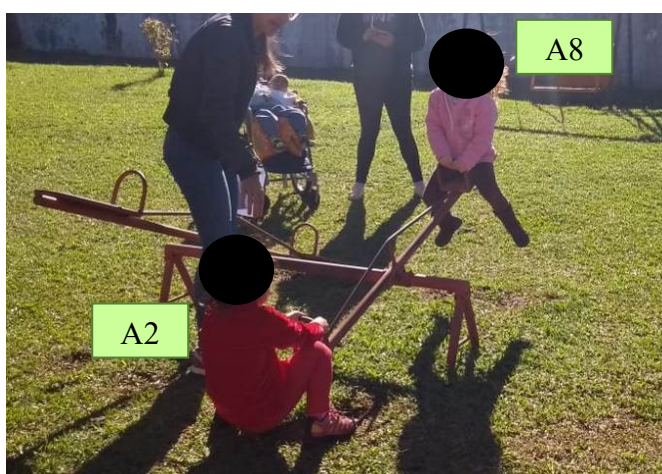
O aluno A5 ao ver o aluno A10 tentando ajudar a colega, concluiu que para que a brincadeira funcionasse “*tem que ser [...] criança só na gangorra*”, ou seja, A5 quis dizer que o balanço aconteceria se somente crianças brincassem, atrelando o funcionamento da gangorra com a proximidade dos pesos das pessoas em cada lado, o que é reafirmado quando fala para a professora pesquisadora a comparação que fez entre o peso dela e da aluna “*porque você é muito grande [maior] do que ela*”. Portanto, para acontecer o movimento de balanço os pesos das pessoas nos dois lados da gangorra deveriam ser próximos, sendo inviável, por exemplo, a brincadeira entre um adulto e uma criança, pois a diferença de pesos é muito grande, conforme constatou o aluno A5. Essa constatação pode ser interpretada como indício para dois aspectos do raciocínio proporcional: *raciocínio relativo* e *partilha e comparação* (LAMON, 2012).

O primeiro foi sinalizado quando o aluno observou que o peso da professora é maior que o da aluna, e mesmo com a ajuda do colega, seu lado da gangorra não desceu. Isso o levou a concluir que com a professora e uma criança (ou duas, de acordo com suas observações) não é possível a gangorra balançar. Ou seja, ele conseguiu estabelecer sem realizar medições com instrumentos de medida uma comparação entre a relação do peso da professora com seu lado da gangorra e a relação do peso da aluna com seu lado da gangorra e, de acordo com Cyrino *et al.* (2014, p. 54), o raciocínio relativo remete a mensurar “quantidades resultantes de comparações/relações entre grandezas de naturezas por vezes distintas”.

Esse raciocínio, que fez com que o aluno concluísse que com a professora a gangorra não balançaria, o levou a pensar em uma solução ou consequência, que foi que apenas crianças poderiam brincar, pois só com duas crianças a gangorra balançaria, pois as crianças apresentam pesos próximos, o que sugere a ideia de *partilha e comparação*, uma vez que se configura como uma distribuição equitativa (ou pelo menos que se aproximaria a isso). Esse procedimento associado à comparação permite que sejam estabelecidas relações entre as partes e entre as partes e o todo (LAMON, 2012; CYRINO *et al.*, 2014).

Aproveitando essa situação, a professora pesquisadora também abordou a altura máxima da gangorra, ou seja, chamou a atenção dos alunos que existe um limite de altura que cada lado da gangorra pode atingir, como ilustra a Figura 31.

**Figura 31:** Altura máxima de um dos lados da gangorra



**Fonte:** Dos autores

Quando a professora regente questionou se a aluna A2 conseguiria descer mais que aquela posição, a aluna A17 respondeu que não, em seguida a professora regente rebateu: “se

*A2 não pode ir mais para baixo, a aluna A8 pode ir mais para cima?”*. A aluna A17 respondeu novamente que não, e professora pesquisadora explicou, então, que isso acontece porque tem uma altura máxima que a gangorra atinge e disse que essa era o seu “limite” de altura. Esses questionamentos realizados pela professora regente, fez com que professora pesquisadora chamasse a atenção dos alunos para o fato de que existe uma altura máxima, assim como existe também uma altura mínima. Se analisarmos atentamente esses limitantes, indo um pouco além das discussões feitas com os alunos, observaremos que a soma das alturas de ambos os lados da gangorra em relação ao chão, independente da posição é constante, o que sinaliza o aspecto *unitização*. Segundo Lamon (2012), Cyrino *et al.* (2014) e Oliveira (2014) a unitização refere-se a um processo de reorganizar grandezas, as agrupando ou reagrupando de outras maneiras conservando a quantidade total. Embora as crianças não consigam ter formulado essa conjectura tal qual sinalizamos, elas conseguiram entender que quando um lado atinge sua altura máxima, o outro atinge sua altura mínima, o que pode ser interpretado como um dos primeiros indícios da mobilização desse aspecto.

Existe, sobretudo, uma posição da gangorra em particular, que pode também ser um indício do aspecto *unitização*, que a professora pesquisadora considerou importante a ser abordada, a posição em que a gangorra se encontra em equilíbrio. Nesse caso, as alturas em ambos os lados tendem a ser iguais. A professora pesquisadora iniciou a discussão dessa posição ainda com A2 e A8 na gangorra, questionando quem estava mais alta. Quando A5 respondeu “*A2 e A8*”, a professora pesquisadora explicou “*isso, as duas estão na mesma posição. Assim, a gente fala que está em equilíbrio*”, como sugere a Figura 32.

**Figura 32:** Gangorra em equilíbrio



**Fonte:** Dos autores



Para explicar sobre o equilíbrio de outro modo, a professora pesquisadora propôs usar pacotes de arroz e de feijão, conforme mostra a Figura 33.

**Figura 33:** Tentativa de equilíbrio



**Fonte:** Dos autores

Algumas tentativas de deixar a gangorra em equilíbrio foram feitas, inicialmente, colocando um pacote de arroz de um lado e um de feijão do outro lado, os alunos perceberam que a gangorra não ficou em equilíbrio. Sugestões como: “colocar mais pacote de arroz e de feijão” (Aluna A8), “colocar mais um feijão” (Aluna A17) e “tirar o arroz grande” (Aluno A5), sugerem a compreensão da necessidade de se deixar um dos lados mais pesado, no caso o lado que estava o pacote de feijão, ou de deixar o outro lado mais leve, no caso, o lado que estava o pacote de arroz. Essa compreensão se mostra como um indício do aspecto *quantidades e covariação*, que se confirma quando A2 afirma que para a gangorra ficar em equilíbrio “esse tem que erguer (lado mais pesado) e esse abaixar (lado mais leve)”, pois mostra que os alunos compreenderam como as grandezas peso e altura se relacionam e como elas variam.

A partir do momento em que a professora pesquisadora revelou os pesos dos pacotes de alimentos, os alunos puderam usar esses pesos como parâmetro de comparação, e compreenderam o porquê sua posição permaneceu inalterada quando colocaram apenas um pacote de feijão de um quilograma do lado mais leve da gangorra, que já tinha um pacote de feijão. Como do outro lado havia um pacote de arroz de cinco quilogramas, usaram a relação aditiva (colocar mais um) e foram colocando os pacotes de feijão um a um até encontrar o equilíbrio, os cinco quilogramas (como sugeriu a aluna A17). Esse tipo de raciocínio é o ponto de partida para que os alunos compreendam posteriormente relações multiplicativas,

que é uma das ideias mais importantes do raciocínio proporcional (VAN DE WALLE, 2009). Essa possibilidade de comparar os pesos, contando diretamente, caracteriza o aspecto *medição* (LAMON, 2012; CYRINO *et al.*, 2014; OLIVEIRA, 2016). A Figura 34 mostra a gangorra em equilíbrio, com cinco pacotes de feijão de um lado (à esquerda) e um pacote de arroz do outro (à direita).

**Figura 34:** Gangorra equilibrada com os alimentos



**Fonte:** Dos autores

Ao retornar para a sala de aula, os alunos registraram suas conclusões por meio de desenhos e observamos alguns indícios de mobilização dos aspectos já citados. A aluna A11, por exemplo, ao ser questionada sobre seu desenho (Figura 35), falou que sua gangorra estava parada (representada pela linha horizontal), ou seja, a aluna compreendeu a ideia de equilíbrio e a relação existente entre as grandezas (peso e altura), sinalizando os aspectos *unitização* e *quantidades e covariação*.

**Figura 35:** Modelo matemático da aluna A11



**Fonte:** Dos autores

O aluno A5, ao explicar seu desenho, sinalizou sua compreensão sobre o comportamento de grandezas diretamente proporcionais, conforme mostra o diálogo a seguir:

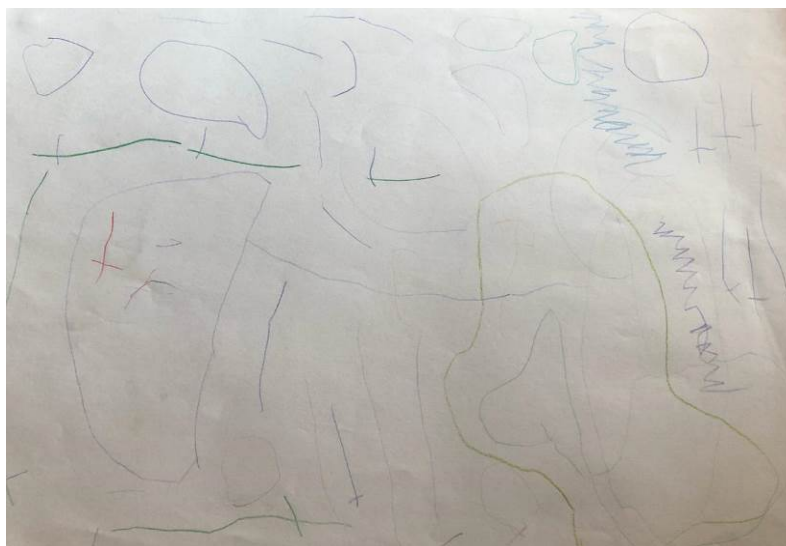
*A5: Eu vou fazer mais porque precisa de mais pessoas.*

*P: Precisa de mais pessoas para fazer o quê?*

*A5: Porque eu vou fazer mais gangorras.*

Esse aluno indicou em seu modelo matemático (Figura 36), duas grandezas (pessoas e gangorra) e como elas se relacionam, indicando que quanto mais gangorras, mais pessoas são necessárias para balançar.

**Figura 36: Relação entre gangorras e pessoas**



**Fonte:** Dos autores

A professora pesquisadora questionou o que os “círculos” representavam e por que uns eram menores e outros maiores, e o aluno A5 respondeu: “*é porque tem que ser uma pessoa magrela e uma pessoa forte*”, ou seja, o aluno ilustrou a ideia de que sem impulso, se os pesos for iguais, a balança ficaria em equilíbrio e nenhum movimento ocorreria. Por outro lado, podemos observar que a diferença nos tamanhos dos desenhos não é significativa, pois ele compreendeu que pesos discrepantes também não permitem movimento, o lado mais pesado descerá e permanecerá próximo ao chão. Essas conclusões sinalizam a mobilização do *raciocínio relativo* (LAMON, 2012).

A atividade de modelagem matemática relacionada à gangorra, mostrou-se como uma alternativa para explorar o raciocínio proporcional, pois além de promover a problematização

e a investigação de uma situação que tem como tema um brinquedo onde brincam com frequência, fez com que os alunos construíssem e apropriassem de conhecimentos por meio de suas ações, estratégias e interações com colegas e professoras, o que possibilitou aprendizagens, desenvolvimento e socialização.

Diante de todas as explorações realizadas, os alunos deixaram claro que o legal da brincadeira é balançar, demonstraram interesse, entusiasmo e curiosidade pelo tema.

Com a atividade da gangorra identificamos a abordagem de alguns aspectos do raciocínio proporcional, apontados por Lamon (2012), como quantidades e covariação, raciocínio relativo, partilha e comparação, unitização e medição, uma vez que os alunos compararam, mediram e relacionaram quantidades relativas a diferentes grandezas (peso e altura) e reconheceram diferentes maneiras de expressar uma mesma quantidade (CYRINO *et al.*, 2014). No Quadro 8 fizemos um resumo dos aspectos do raciocínio proporcional que foram acionados e em quais situações isso aconteceu no desenvolvimento da atividade.

**Quadro 8:** Aspectos do raciocínio proporcional mobilizados na atividade da gangorra

Aspecto do raciocínio proporcional (LAMON, 2012)	Situações em que o aspecto foi mobilizado
Quantidades e covariação	<ul style="list-style-type: none"> <li>• A8 percebeu que precisa ter mais que uma criança na gangorra para balançar (com apenas uma criança seu lado da gangorra não sai do chão, ou seja, não há variação nas alturas de ambos os lados da gangorra);</li> <li>• Professora pesquisadora sobe em um dos lados da gangorra, com A17 do outro lado, a gangorra não se move, “<i>você é muito grande do que ela</i>” (aluna A5) (compreensão de que quando há discrepância entre os pesos dos dois lados a gangorra não balança);</li> <li>• Tentativa de A10 de abaixar o lado da gangorra no qual estava sua colega A17, que é muito mais leve que a professora pesquisadora (entendimento de que quanto mais pesado um lado da gangorra mais baixa será a altura dele, até atingir a altura mínima, no caso o chão, ou de que quanto mais leve um lado, maior será sua altura, até atingir a altura máxima);</li> <li>• Tentativa dos alunos em deixar a gangorra em equilíbrio “<i>colocar mais um feijão</i>” (Aluna A17), “<i>tirar o arroz grande</i>” (Aluno A5) (identificação de qual lado da gangorra tem que subir ou descer para que a gangorra fique em equilíbrio);</li> <li>• Explicação da aluna 11 para seu modelo matemático que descreve uma gangorra em equilíbrio (percepção da relação existente entre as grandezas peso e altura);</li> <li>• Percepção do aluno A5 que precisa desenhar mais pessoas para a quantidade de gangorras que desenhou (grandezas diretamente proporcionais).</li> </ul>
Raciocínio Relativo	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Percepção dos alunos sobre a inviabilidade da</li> </ul>

	<p>brincadeira entre um adulto e uma criança (constatação da diferença de pesos entre a professora pesquisadora e a aluna A17 a partir da observação da imobilidade da gangorra);</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Para evitar que a gangorra fique em estado de equilíbrio o aluno A5 desenhou círculos de diferentes tamanhos, para indicar uma “<i>pessoa magrela</i>” e uma “<i>pessoa forte</i>” (o aluno percebeu que para ficar em equilíbrio os pesos de ambos os lados das gangorras têm que ser iguais).</li> </ul>
Partilha e comparação	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Compreensão da aluna A17 sobre a funcionalidade da brincadeira, “<i>tem que ser só crianças na gangorra</i>” (percepção da necessidade de existir uma proximidade entre os pesos de ambos os lados da gangorra, como os pesos de duas crianças).</li> </ul>
Unitização	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Exploração da questão “<i>se A2 não pode ir mais para baixo, A8 pode ir mais para cima?</i>” (compreensão de que existe uma altura máxima e uma altura mínima que os lados da gangorra podem atingir, e que variação de um lado se dá em conformidade com o outro, ou seja, a soma das alturas de ambos os lados da gangorra em relação ao chão, independente da posição é constante);</li> <li>• A5 respondeu que A2 e A8 estão mais altas, no momento em que a gangorra ficou em equilíbrio (Não distinção de qual aluna está mais alta quando a gangorra está em equilíbrio, pois as alturas de ambos os lados são iguais);</li> <li>• Percepção dos alunos sobre as alturas dos lados da gangorra quando foi colocado um pacote de arroz de cinco quilogramas e cinco pacotes de feijão de um quilograma (exploração de que as alturas em ambos os lados ficaram iguais);</li> <li>• Modelo matemático da aluna A11 (desenhou uma linha horizontal para indicar que a gangorra está em equilíbrio).</li> </ul>
Medição	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Os alunos usaram a relação aditiva (+1) para colocar os pacotes de feijão de um lado da gangorra até ela ficar em equilíbrio quando há no outro lado um pacote de arroz (comparação de pesos, contagem direta).</li> </ul>

**Fonte:** Dos autores

Essa síntese mostra que durante a atividade foram discutidos o movimento e algumas posições específicas das gangorras, como quando ela fica em equilíbrio. Essas discussões levaram os alunos a mobilizar vários aspectos do raciocínio proporcional, sem a necessidade de usar mecanismos prontos.

### 5.5 DESCRIÇÃO DA ATIVIDADE 3: QUANTO COME O CACHORRO?

A atividade aconteceu em dois encontros, iniciou na manhã do dia 29 de agosto de 2019 e foi finalizada no dia 05 de setembro de 2019, ou seja, foi necessário 1 dia e meio de aula, porém a atividade em si teve duração de aproximadamente 2 horas e 30 minutos, pois assim como nas outras atividades, respeitamos toda a rotina escolar dos alunos. No primeiro encontro, os alunos estavam muito agitados, dessa forma decidimos dar continuidade em um segundo encontro. Nesses dois encontros, os alunos foram organizados em três grupos.

Em uma conversa com a professora pesquisadora em 06 de junho de 2019, os alunos sugeriram dois temas: meios de transporte e animais, porém pensamos que estudar dois temas simultaneamente provocaria confusão para os alunos da Educação Infantil, entendendo que seria mais produtivo estudar um tema por vez. Todavia, devido às atividades do CMEI teríamos condições de estudar apenas um deles, por isso pedimos que os alunos escolhessem um dentre os dois temas indicados. A decisão do tema a ser estudado foi determinada por meio de votação, sendo que de um total de 12 alunos, 8 escolheram estudar sobre os animais. Definir o tema a priori foi relevante pois, devido à faixa etária dos alunos sabíamos que eles precisavam do auxílio de seus familiares, da professora pesquisadora, das regentes R1 e R2 e da estagiária E na coleta de dados e informações.

A atividade foi desenvolvida de acordo com o terceiro momento de familiarização com a Modelagem Matemática (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012). O que diferenciou essa atividade das demais que desenvolvemos anteriormente foi a independência que oportunizamos aos alunos, ou seja, durante todo o desenvolvimento da atividade os alunos foram responsáveis por decisões e ações características de uma atividade de modelagem matemática, com a orientação e mediação da professora pesquisadora e da professora regente R2, quando necessário.

Para a coleta de dados solicitamos aos alunos que trouxessem fotos dos animais de estimação e informações sobre os cuidados que se deve ter com eles, para essa tarefa, pedimos auxílio dos familiares. Alguns alunos trouxeram na data solicitada, outros disseram ter animais, mas não conseguiram trazer as fotos para a sala de aula, visto que essa coleta de dados não dependia exclusivamente deles, necessitando da ajuda dos responsáveis para que isso acontecesse. A Figura 37 ilustra a professora pesquisadora mostrando as fotos dos animais que os alunos levaram.

**Figura 37:** Conhecendo os animais dos alunos



**Fonte:** Dos alunos

Os alunos escolheram esse tema, pois afirmaram gostar de animais e demonstraram curiosidade sobre os cuidados necessários que se deve ter com eles. Ao iniciar a atividade a professora regente R2 explicou que todos os animais que convivem conosco são chamados de domésticos. Nesse instante, os alunos demonstraram conhecimento sobre alguns desses animais, a aluna A17 citou o cachorro, a aluna A2 citou o gato e a sua cachorrinha de estimação, a “*Pitucha*” e o aluno A7 falou da “*Alana*”, sua cachorra. Além desses animais, o pintinho e o papagaio foram citados, sendo assim a professora pesquisadora desfrutou desses exemplos e questionou se é qualquer animal que pode viver dentro de nossa casa, os alunos ficaram em silêncio, dessa maneira a professora R2 tentou explicar conforme o diálogo a seguir.

**R2:** *Será que podemos ter um cavalo dentro da casa?*

**Maioria dos alunos:** *Não.*

**A2:** *Só pode no sítio.*

**P:** *Dá para ter um elefante na casa?*

**A17:** *Ele é muito barulhento.*

**P:** *Mas o cachorro também faz [barulho] ao latir.*

**A2:** *O elefante é muito grande. Não cabe ele, ele é muito gordo.*

**P:** *Isso [...].*

Após a exemplificação de animais que não são domésticos, a professora pesquisadora retomou a discussão sobre os animais domésticos, que são animais que convivem conosco, e que geralmente ficam no quintal, em um lugar seguro. Alguns alunos interagiram com a pesquisadora e demonstraram conhecimento a respeito do tema, conforme mostra o diálogo a seguir.

**A17:** *Meu pai fez uma casinha para o meu cachorro.*

[...]

**A5:** *A minha tia construiu uma casinha para o cachorro dela, porque ele é muito grande.*

**R2:** *E a casinha que ela construiu é grande ou pequena?*

**A5:** *Grande.*

**P:** *Então se eu tiver um cachorro grande eu posso fazer uma casa pequenininha para ele?*

**Maioria dos alunos:** *Não.*

**A5:** *Tem que fazer uma casinha grande.*

**A2:** *Tem que fazer uma casa grandona.*

Em seguida, os alunos falaram sobre seus animais, suas características, tais como, sexo, cor e tamanho. Usufruindo da colocação dos alunos, discutimos algumas das semelhanças e diferenças entre os animais dos alunos, destacando os animais mamíferos, e diferenciando de outros, conforme o diálogo a seguir.

**R2:** *Lembra que a gente falou dos animais mamíferos? Que nascem da barriguinha da mamãe e depois eles mamam?*

**P:** *As tetinhas são para amamentar os filhotes. Olha a Pitucha da aluna A2.*

**A8:** *O coelho bota ovo?*

**R2:** *Não, eles são mamíferos.*

[...]

**R2:** *O passarinho diferente do cachorro e do gatinho, não mama na mamãe dele, ele nasce do ovo. Os filhotinhos que mamam na mamãe são os que nascem da barriguinha. Os que nascem igual a galinha, o passarinho...*

**A2:** *O pintinho.*

**R2:** *[Os] que nascem do ovo, não mamam na mamãe.*

Em seguida, a professora pesquisadora questionou quais cuidados são primordiais quando se têm animais em casa, a aluna A17 respondeu rapidamente “o gato tem que dar ração e o cachorro também”, além do gato e do cachorro citados pela aluna, a professora pesquisadora citou o cavalo, que se alimenta de capim, ração e milho. Como o aluno A3 tinha levado uma fotografia de passarinhos, a professora regente R2 perguntou para ele qual era a alimentação que seus passarinhos tinham, e o aluno respondeu conforme mostra o diálogo.

**R2:** *A3, o que seu avô dá para os passarinhos [...] comer?*

**A3:** *Ração.*

**R2:** *Como é a ração deles? É grandona?*

**A4:** *É tipo uma semente.*

**P:** *Sabe como se chama a semente que dá para o passarinho? [...] O nome é alpiste.*



A professora pesquisadora ressaltou que além da alimentação, outros cuidados são importantes e a aluna A3 citou a água. Lembramos aos alunos que a água deve ser trocada todos os dias e os potinhos dos animais devem ser lavados. O diálogo a seguir mostra o conhecimento do aluno A5 em relação à vacinação, outro cuidado necessário que se deve ter com os animais.

*P: O pratinho dos animais também tem que lavar, para não dar bichinhos.*

*A5: Para não dar dor de barriga. Daí tem que tomar a vacina [...].*

*P: O que você falou A5?*

*A5: Que tem que tomar toda a vacina depois.*

*P: Isso [...]. É importante também dar vacina nos animais, levar ao veterinário.*

*A5: Para [...] não ficar doente.*

*A2: Meu cachorro já tomou já.*

Por meio desse diálogo, é possível perceber que os alunos buscam os conhecimentos adquiridos fora do contexto escolar para trazer para a sala de aula, pois primeiramente o aluno demonstrou conhecimento sobre a vacinação como um remédio para a dor de barriga e depois ele afirmou que também pode ser um meio de prevenir doenças. Diante disso, inferimos que ele, ou algum amigo ou familiar já tenha experienciado essa situação, de vacinar seu animal de estimação. Por meio da coleta de dados realizada pelos alunos juntamente com suas famílias, os alunos trouxeram fotos de seus animais de estimação e informações a respeito deles, tais como: características físicas, tipos de alimentação, cuidados necessários, etc. Os alunos também tomaram ciência dos animais que podem ter em casa e da variedade de animais que se tem no mundo, como os mamíferos, por exemplo. Todas essas ações caracterizam a fase de *interação* (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN; 2012), pois oportunizaram aos alunos a familiarização com a situação estudada.

Nesse momento, a professora pesquisadora investigou se os alunos sabiam qual é a primeira fonte de alimentação dos filhotes de cachorro, tendo em vista que o leite materno possui os nutrientes necessários para o bom desenvolvimento dos filhotes e ajuda na prevenção de algumas doenças. O diálogo a seguir mostra a abordagem utilizada pela professora pesquisadora para explicar isso.

*P: E quando os filhotes nascem? [...] eles já comem ração?*

*Alguns alunos falaram que sim, outros não.*

*[...]*

*P: Quando a gente nasce a gente já come comidinha?*

*A5: Sim.*

*P: Quando o bebê nasce, ele se alimenta do que?*

*R2: O aluno A5 tem uma irmãzinha que nasceu agora [...] não é?*

*A5: (Balança a cabeça que sim).*

*P: Do que sua irmãzinha se alimenta A5?*

*A5: Ela se alimenta de leite, mamando na minha mãe.*

*A2: Tem bebê [...] que já tomou leite do peito da mãe.*

*P: [...] Olha o gatinho pequenininho mamando na mamãe gata (mostrou a foto que a aluna A18 levou).*

*P: Conforme eles vão crescendo eles vão comendo ração.*

*A17: Professora quando eles são pequenininhos e eles acordam os homens tem que colocar ração para comer porque daí vai crescendo o cachorro.*

*[...]*

*A5: O cachorro da minha tia dorme quando está de noite e quando ele acorda minha tia dá ração para ele e ele está crescendo.*

Por meio da fala da aluna A17 e do aluno A5, a professora pesquisadora percebeu uma oportunidade dessa experiência ser a problemática, ou seja, os alunos poderiam investigar: *qual a quantidade de ração e quantas vezes por dia seriam necessárias para alimentar um cachorro de médio e de grande porte?* Já que a maioria das fotografias que os alunos levaram estava relacionada a cachorros com essas características. Iniciamos, então, as discussões em busca de solucionar o problema, tais como comparar os tamanhos dos dois cachorros mostrados nas fotos, discutir com qual frequência é preciso alimentar os cachorros, além de entender qual deles come mais e qual come menos. Os alunos, em sua maioria acertaram qual o maior cachorro e, além disso, o aluno A5 indicou que ele deve comer mais “*porque ele tem que crescer mais*”.

Em relação à quantidade mínima de vezes que devemos ofertar alimento/ração para os cachorros, os alunos no início permaneceram em silêncio. Tentamos exemplificar de acordo com a nossa alimentação, assim a professora R2 fez o questionamento “*e se vocês só almoçar?*”, de modo que os alunos pudessem refletir sobre a necessidade de se alimentar mais vezes por dia, e pensar se uma refeição por dia seria suficiente. A aluna A2 mostrou para a regente R2 a foto de sua cachorrinha e a professora R2 perguntou quantas vezes ela come por dia, a aluna respondeu de acordo com o diálogo a seguir.

*A2: Um, dois, três.*

*P: Vocês dão ração de manhã e quando mais? Cedo...*

*A2: Amanhã, domingo, segunda feira.*

*[...]*

*P: Será que a gente precisa dar ração só de manhã para a Pitucha, por exemplo? Se eu dar ração só de manhã será que é suficiente? Dar uma vez apenas por dia?*

*A17: Não, tem que dar ração todo dia.*

Conforme o diálogo, a aluna A2 fez a contagem referindo-se à quantidade de vezes que a cachorrinha dela se alimenta por dia, a aluna relacionou cada numeral à uma refeição que lembrou ou conjecturou. A aluna também demonstrou conhecimento sobre alguns dias da semana, ou seja, a aluna mostrou ter noção de tempo, sendo assim a pesquisadora perguntou novamente sobre a quantidade de vezes que devemos dar ração para os cachorros, a aluna A17 também respondeu em relação aos dias de semana, referindo-se que devemos dar ração todos os dias, demonstrando a compreensão de que o cachorro não pode ficar nenhum dia sem alimento. Essas ações caracterizam a fase *matematização*, cuja problemática foi tratada por meio da linguagem matemática, isto é, as variáveis envolvidas na problemática foram definidas (quantidade de ração e quantidade de vezes ao alimentar cachorros de médio e grande porte), hipóteses foram formuladas (a ração deve ser ofertada todos os dias da semana, e, preferencialmente, mais de uma vez por dia) e simplificações realizadas (oferecer ração somente de manhã é suficiente? Quantas vezes devemos ofertar?).

“Desde muito pequenas, elas procuram se situar em diversos espaços (rua, bairro, cidade etc.) e tempos (dia e noite; hoje, ontem e amanhã etc.)” (BRASIL, 2018).

Visto que os alunos estavam com dificuldades para responder o número de refeições por dia, a pesquisadora decidiu dar um exemplo em relação a quantidade de refeições que eles fazem no CMEI, para auxiliar e impulsionar os alunos a desenvolver estratégias e conhecimentos próprios para resolver o problema.

Na Educação Infantil é preciso que o professor enquanto mediador atraia a atenção dos alunos para que eles se concentrem na tentativa de usar seus conhecimentos para resolver o problema, pois nessa etapa de escolaridade é natural que os alunos se distraiam com mais facilidade, por conta da idade e tempo de concentração. A professora pesquisadora, então, conversou com os alunos sobre a quantidade de refeições que os alunos realizam no CMEI, e os fez pensar sobre a necessidade de alimentar o cachorro mais de uma vez por dia, conforme diálogo a seguir.

*P: A gente toma café da manhã, almoça, come o lanchinho da tarde, e a gente janta aqui na escola. Aqui na escola a gente faz 04 refeições. Será se eu dar ração só uma vez no dia, tá bom?*

*A2 e A17: Não.*

*P: O que precisa? Dar mais vezes ou não?*

*A17: Sim.*

*P: Isso.*

Dessa forma, ao explorar as refeições que os alunos fazem no CMEI, os alunos puderam usar essa informação como base para pensar se uma única refeição por dia seria suficiente ou não para alimentar o cachorro, porém nesse instante eles ainda não definiram a quantidade de refeições.

A professora pesquisadora tentou fazer com que os alunos refletissem sobre as quantidades de ração que um cachorro de médio porte e um de grande porte se alimentam, se as quantidades são iguais, se uma é menor ou maior que a outra, e se existe diferença, o por que dela. O aluno A5 logo falou que eles não comem a mesma quantidade e justificou dizendo “*porque ele é muito grande*”, inferimos que por meio dessa justificativa, o aluno quis dizer que o cachorro maior deve comer mais devido ao seu tamanho, sendo assim a pesquisadora acrescentou que o cachorro de maior porte “*precisa comer mais [...] para ter energia*”.

*A17: Professora eu dou umas 3 vezes por dia para a minha cachorra.*

*P: Quais horários que você dá ração para ela?*

*A17: De manhã e à noite.*

*P: Então é duas vezes. Igual eu, eu dou cedo e quando chego aqui da escola, à tarde. Que daí ele vai encher a barriguinha e dormir bem gostoso, tomar água.*

*R2: Agora eu que tenho gato, eu dou de manhã antes de vir para a escola, daí quando vou para a casa almoçar eu coloco mais um pouquinho para a tarde, e a noite quando eu chego eu...*

*A2: (Interrompeu e concluiu) Coloca mais um pouquinho.*

Durante essa conversa, a aluna A17 deu uma resposta bem consistente, relacionada ao dia a dia da vida alimentar de sua cachorrinha, sendo assim, acreditamos que esse conhecimento direcionou à resolução da problemática. Ficou determinado alimentar o cachorro de médio porte duas vezes por dia, e o de grande porte, mais de duas, porém ainda faltava determinar a quantidade de ração que deveríamos dar para cada um deles. Para isso a pesquisadora mostrou potes de iogurte e de sorvete, para decidir qual pote usar para o cachorro de médio e para o de grande porte, além da quantidade de ração a ser colocada em cada um deles, conforme a Figura 38 e a transcrição apresentada na sequência.

**Figura 38:** Potes disponíveis



**Fonte:** Dos autores

*P: Para vocês dar ração para o cachorro grande, vocês pegariam um potinho deste aqui (mostrou o pote de iogurte)?*

*A5: Interrompeu e falou “não”.*

*P: Ou pegariam este aqui (mostrou o pote de sorvete)?*

*A5: Sim.*

*[...]*

*A17: Este (apontou para o pote de sorvete com o dedo indicador).*

*P: Esse aqui (pote de iogurte) é pequenininho para ele comer, daí ia precisar de mais [potinhos].*

*A17: Precisa de um pote mais um pouquinho grande.*

*A2: E se colocar, coloca de novo (fez gestos).*

Quando a pesquisadora mostrou o pote de iogurte, a aluna A17 falou que era necessário um pote maior, ou seja, a aluna demonstrou conhecimento de que o pote pequeno não tem capacidade suficiente para abranger a quantidade de ração que ela acreditava ser ideal para alimentar o cachorro. Já a aluna A2 compreendeu que o pote pequeno pode ser utilizado, porém é necessário ofertar mais vezes, “só dá um pouco mais de trabalho, porque eu teria que esperar ele comer para colocar de novo, esperar ele comer para colocar de novo”, disse a pesquisadora. Dessa forma, todos decidiram usar o pote maior, por conta da praticidade e indisponibilidade de tempo para colocar diversas vezes por dia.

Em seguida, escolhemos a Pitucha, cachorrinha da aluna A2 para representar o cachorro de médio porte e a Alana, cachorra do aluno A7 para representar o cachorro de grande porte, conforme mostra a Figura 39. Em seguida, discutimos a quantidade de ração

necessária para alimentar o cachorro em uma refeição. O diálogo a seguir mostra a decisão dos alunos.

**Figura 39:** Pitucha à esquerda e a Alana, à direita



**Fonte:** Dos autores

*P: Vamos dar ração para a Pitucha, vou pegar um potinho desse pequeno, será que vai dar? Vou passar aqui, será que dá para a Pitucha comer?*

*A1: Sim.*

*P: Ou será que precisa de mais?*

*A5: A gente precisa de mais.*

*A8: Precisa da mão para a Pitucha da aluna A2, né?*

*P: Você quer colocar com a mãozinha? Isso aqui tá bom ou quer colocar mais?*

*A8, A5: Colocar mais.*

*P: Um, dois, três, quatro, cinco.*

*[...]*

*P: Foi 1 potinho e 5 mãozinhas.*

Os alunos usaram as mãos como instrumento de medida para determinar a quantidade de ração que eles acharam suficiente para alimentar a cachorrinha Pitucha. Para definir a quantidade de ração que a Alana, cachorra do A7 iria comer, a professora pesquisadora questionou se teriam que colocar mais ou menos ração do que a da Pitucha, a aluna A2 respondeu que precisaria de mais e justificou pelo fato dela comer bastante ração. Os alunos também utilizaram as mãos para colocar a ração no pote conforme mostra a Figura 40, e decidiram que 11 mãozinhas seriam suficientes.

**Figura 40:** Quantidade de ração para a Alana



**Fonte:** Dos autores

Após a definição dessas quantidades, a professora regente R2 propôs aos alunos que brincassem em ser donos de um cachorro e, para isso, eles deveriam fazer a ração usando massinha de modelar. Essa brincadeira representada pela Figura 41 proporcionou aos alunos relacionar o tamanho do pratinho com o tamanho do brinquedo que representava o cachorro que eles escolheram, pois tanto a professora regente R2 e a professora pesquisadora questionaram aos alunos sobre essa relação de acordo com o que eles tinham representado. Um desses questionamentos foi *“será que o cachorro grande vai conseguir comer nesse pratinho pequeno?”*, o aluno A14 respondeu *“cachorro pequeno”*, ou seja, o aluno quis dizer que naquele pratinho pequeno seria o cachorro pequeno que iria se alimentar, sendo assim, o aluno fez a identificação das grandezas envolvidas (tamanho do cachorro e do pratinho) e percebeu como elas se relacionavam: prato pequeno, cachorro pequeno.

**Figura 41:** Brincando de fazer ração com massinha de modelar



**Fonte:** Dos autores

Na sequência dessa brincadeira, a professora pesquisadora disponibilizou alguns materiais como cartolinas, recortes em E.V.A na cor marrom para representar a ração, figuras de potes pequenos e grandes, assim como imagens impressas de cachorros de médio e de grande porte. Esses materiais foram usados na confecção do cartaz em que cada grupo elaborou um modelo matemático que representava a quantidade de vezes que devemos alimentar os cachorros de médio e de grande porte por dia e a quantidade de ração ofertada em cada refeição. Para isso, foi necessário verificar se os alunos tinham compreendido o contexto de toda a situação, sendo assim a professora pesquisadora questionou os alunos sobre o tamanho do pote que foi usado nas duas situações, conforme mostra o diálogo a seguir e a Figura 42.

*P: O cachorrinho vai comer no recipiente pequeno ou no grande?*

*A5, A17: Pequeno.*

*P: Então pequeno com pequeno. O cachorro grande vai comer no...*

*A3, A5: Grande.*

*A2: Grande com grande.*

**Figura 42:** Elaboração dos modelos matemáticos da alimentação do cachorro de médio e grande porte



**Fonte:** Dos autores

A Figura 42 mostra a *resolução* dos alunos para a problemática “*qual a quantidade de ração e quantas vezes por dia precisamos alimentar um cachorro de médio porte? E um cachorro de grande porte?*” Os potes verdes indicam a quantidade de vezes que se deve oferecer a ração para os cachorros e a quantidade de ração é indicada pelos E.V.A. picados. Os registros constituem os modelos matemáticos dos alunos para a alimentação desses tipos de cachorros, pois servem como referência para alimentar outros cachorros também desses tipos. Durante a produção dos modelos matemáticos, a professora pesquisadora como



mediadora fez alguns questionamentos, conforme diálogo a seguir, para que os alunos verificassem se o modelo estava condizente com a situação-problema.

*P: Agora vamos ver o trabalhinho do grupo da aluna A2. Quantas vezes vocês dão ração para o cachorrinho?*

*A2: 1,2,3,4,5,6.*

*P: Não. Os potinhos de ração, quantos potinhos de ração?*

*Todos: 1,2,3. Isso, 3.*

*P: E o cachorro grande, quantos potinhos de ração ele come por dia?*

*A2: 1,2.*

*[...]*

*P: Qual tem mais ração?*

*A2: Esse (aponta para o pote maior).*

*P: Isso, [...] a gente tem que dar mais ração para o cachorro grande.*

A validação desses modelos se deu por meio da experiência que os alunos tinham a respeito da alimentação do cachorro, a aluna A17 ressaltou que um pote ela oferta pela manhã e o outro a noite, o aluno A5 também falou que precisava de mais do que um pote, ou seja, os modelos que produziram estavam de acordo com suas experiências.

## 5.6 ANÁLISE DA ATIVIDADE 3: QUANTO COME O CACHORRO?

A terceira atividade teve o tema escolhido pelos alunos. O interesse pelo tema animais por parte de alunos com essa faixa etária foi sinalizado por Tortola (2016) ao analisar as sugestões de temas para atividades de modelagem matemática por alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Esse interesse pode se justificar pelo apreço que as crianças têm por seus animais de estimação. Diante dessa indicação de tema, conversamos com os alunos para descobrir o que conheciam a respeito do assunto e para definir um problema para estudo. Observamos nas discussões um direcionamento em particular pelos cuidados com a alimentação dos cachorros, já que era o animal de estimação da maioria. Nesse contexto, definimos junto aos alunos a problemática: *qual a quantidade de ração e quantas vezes por dia precisamos alimentar um cachorro de médio porte? E um cachorro de grande porte?* Esses tamanhos foram definidos a partir das fotos que os alunos trouxeram para a aula.

Ao definir essa questão como norteadora da atividade, imaginamos que os alunos estabeleceriam relações do tipo: “se eu alimentar o cachorro menos/mais vezes no dia, eu

preciso colocar mais/menos ração”, “um cachorro maior/menor provavelmente comerá mais/menos ração”, que estão associadas ao raciocínio proporcional a partir da manifestação do aspecto *quantidades e covariação*. Entretanto, esperamos, sobretudo, a manifestação do aspecto *medição*, uma vez que a questão os direcionou para mensurar quantidades.

A seguir apresentamos os encaminhamentos dos alunos para essa atividade.

No início das discussões, quando a professora pesquisadora mostrou aos alunos as fotos que trouxeram dos animais que possuíam em suas casas: gato, cachorro e passarinhos, ela questionou se todos os animais podem conviver no mesmo ambiente que nós, dando como exemplos o cavalo e o elefante especificamente (professora regente R2), a aluna A2 logo falou “o elefante é muito grande. Não cabe ele, ele é muito gordo”. Essa fala da aluna é um indício de que ela mobilizou o *raciocínio relativo* (LAMON, 2012), pois ao relacionar o tamanho do elefante com a área (espaço) de uma casa ou com o tamanho dela e das pessoas com que convive, ela fez uma comparação entre grandezas de naturezas distintas, sem o uso de instrumentos específicos, ou sem realizar uma comparação direta ou contagem imediata (colocando a casa e o elefante lado a lado, por exemplo), o que mostra que ela foi capaz de mensurar e comparar quantidades abstratas (CYRINO *et al.*, 2014).

Em seguida, foi discutido que os animais domésticos não precisam viver necessariamente dentro de casa, para isso devem ter um lugar seguro e apropriado para ficar e para dormir. Quando os alunos contaram suas experiências, eles sinalizaram algumas relações entre os tamanhos dos cachorros e os tamanhos de suas “casinhas”, como chamaram, conforme mostra o diálogo a seguir.

*A17: Meu pai fez uma casinha para o meu cachorro.*

*[...]*

*A5: A minha tia construiu uma casinha para o cachorro dela, porque ele é muito grande.*

*R2: E a casinha que ela construiu é grande ou pequena?*

*A5: Grande.*

*P: Então se eu tiver um cachorro grande eu posso fazer uma casa pequenininha para ele?*

*Maioria dos alunos: Não.*

*A5: Tem que fazer uma casinha grande.*

*A2: Tem que fazer uma casa grandona (indicando por gestos também).*

*P: Por que eu não posso?*

*A5: Porque ele é gigante.*

*P: E se eu fizer uma casinha pequena o que acontece?*

*A5: Ele morre.*

*R2: Ele vai conseguir entrar na casa?*

*A5: Não.*

*A2: Vai ter que colocar uma grande. [...] Se a minha Pituchinha tiver uma casinha pequenininha ela não vai conseguir entrar, vai ter que fazer uma grande.*

Por meio do diálogo, os alunos mostraram compreender que um cachorro grande precisa ter uma “casa grandona” (A2), e um cachorro pequeno precisa de uma “*casinha pequena*”, ou seja, que cada cachorro precisa de uma casa de acordo com seu tamanho. Essas relações evidenciadas pelos alunos remetem à ideia de grandezas diretamente proporcionais, ideia característica do aspecto *quantidades e covariação* (LAMON, 2012). Olhar para um cachorro e seu tamanho e saber indicar se ele precisa de uma casa grande ou pequena, ou maior/menor, também sinaliza a capacidade de mensurar sem medir diretamente com a utilização de instrumentos específicos, que está relacionada ao *raciocínio relativo* (LAMON, 2012; CYRINO *et al.*, 2014).

Ao referir-se sobre os tamanhos de alguns cachorros, os alunos quiseram mostrar de alguma forma o tamanho de seus animais de estimação. O gesto foi a maneira que encontraram para isso. A aluna A17 disse “*professora o tamanho da minha cachorra é assim oh*”, a Figura 43 mostra que a aluna se levantou e fez o gesto que indicava o tamanho de sua cachorra.

**Figura 43:** Gestos representativos



**Fonte:** Dos autores

A ação da aluna sinaliza a mobilização do aspecto *medição* (LAMON, 2012), uma vez que ela usou as mãos para indicar uma medida, o tamanho de sua cachorra. Embora ela não tenha utilizado um instrumento específico de medidas, seu gesto indicou que o tamanho da

sua cachorra vai da sua mão posicionada embaixo até sua mão posicionada em cima, uma medida não convencional, cuja variação permite mensurar o que deseja.

Quando questionados pela professora pesquisadora: “*será que ele (o cachorro) cresce para sempre?*” os alunos perceberam que cada cachorro atinge uma altura máxima quando adulto, independente da quantidade de ração que eles comem. Essa compreensão é também, de certa forma, um indício de mobilização do aspecto *quantidades e covariação*, que segundo Lamon (2012) e Cyrino *et al.* (2014) significa identificar e mensurar quantidades e compreender como elas se relacionam. Nesse caso, eles observaram que não adianta dar mais e mais ração para o cachorro, pois em algum momento de sua vida ele chegará em sua altura limite, sua altura máxima. A professora pesquisadora fez menção ao ser humano, dizendo que quando somos adultos “*a gente não come para crescer. A gente come para ter as vitaminas no corpo, para [...] ficar forte, saudável. Agora a criança sim, tem que comer para crescer*”, pois essas vitaminas nesse momento da vida ajudam a criança a crescer forte e saudável.

A professora ilustrou essa altura limite com a foto de dois cachorros adultos, conforme mostra a Figura 44.

**Figura 44:** Altura máxima dos cachorros



**Fonte:** Dos autores

A partir das imagens a professora pesquisadora questionou os alunos qual deles eles achavam que comia mais, em sua maioria eles responderam apontando para o cachorro maior, (à direita na Figura 44), sendo assim a professora regente R2 questionou com qual cachorro gastaríamos mais, o aluno A5 respondeu rapidamente “*esse*” (apontando o maior novamente). Como os alunos interpretaram situações que envolvem grandezas diretamente proporcionais, mostrando que eles têm noções de como as grandezas envolvidas (tamanho do cachorro, quantidade de comida e gastos com alimentação) se relacionam e como elas covariam,

inferimos que eles mobilizaram novamente o aspecto do raciocínio proporcional *quantidades e covariação* (LAMON, 2012; CYRINO *et al.*, 2014).

Voltando ao problema, os alunos precisavam determinar *qual a quantidade de ração e quantas vezes por dia precisamos alimentar um cachorro de médio porte? E um cachorro de grande porte?* A professora pesquisadora questionou se eles já tinham ajudado nessa tarefa e muitos sinalizaram que sim. Diante disso, fez alguns questionamentos na tentativa de auxiliar na compreensão e resolução do problema.

Em relação à quantidade de refeições por dia, os alunos apresentam um pouco de dificuldade para estabelecer um número. Eles começaram com uma refeição, quando a aluna A17 falou que quando os cachorros são pequenos eles devem comer quando acordam para crescer. Com base nessa fala, a professora pesquisadora questionou se uma refeição seria suficiente, a aluna A17 logo respondeu “*não, tem que dar ração todo dia*”, a aluna A2 respondeu de maneira similar “*amanhã, domingo, segunda feira*”, ou seja, as alunas mostraram conhecimento dos dias da semana, porém ficaram confusas em decidir se uma refeição bastava.

Diante disso a professora pesquisadora mencionou a quantidade de refeições que nós, seres humanos, fazemos, mas no contexto das crianças, como mostra o diálogo a seguir.

*P: A gente toma café da manhã, almoça, come o lanchinho da tarde, e a gente janta aqui na escola. Aqui na escola a gente faz 04 refeições. Será se eu dar ração só uma vez no dia, tá bom?*

**Maioria dos alunos:** Não.

*P: O que precisa? Dar mais vezes ou não?*

*A17: Sim.*

*P: Isso.*

A intenção da fala da professora pesquisadora foi fazer com que os alunos compreendessem que comer uma vez por dia não é saudável, que é importante organizar a alimentação do dia em várias refeições – como já havia discutido com os alunos na atividade “Alimentação Saudável”, o que sugere a ideia de *unitização*. Após essa exploração, a aluna A17 falou “*professora eu dou umas 3 vezes por dia para a minha cachorra*”, a aluna A2 levantou-se da carteira e mostrou a foto de sua cachorrinha, a professora R2 aproveitou o momento e perguntou quantas vezes ela comia por dia e a aluna respondeu “*um, dois, três*”. Em seguida, a professora pesquisadora conversou com os alunos sobre essa organização, conforme mostra o diálogo a seguir.

*P: Quais horários que você dá ração para ela?*

*A17: De manhã e à noite.*

*P: Então é duas vezes. Igual eu, eu dou cedo e quando chego aqui da escola, à tarde.*

*R2: Agora eu que tenho gato, eu dou de manhã antes de vir para a escola, daí quando vou para a casa almoçar eu coloco mais um pouquinho para a tarde, e a noite quando eu chego eu...*

*A2: Coloca mais um pouquinho.*

Pelo diálogo não sabemos ao certo se a aluna A17 fez a contagem de forma equivocada ou se ela esqueceu de mencionar o outro momento em que ela ofertava a ração para sua cachorra, pois ela falou que ofertava a alimentação 3 vezes por dia, porém citou apenas o período da manhã e da noite.

Em meio a essa discussão, a professora pesquisadora achou interessante mencionar a diferença entre a alimentação de um filhote e a de um adulto, ressaltou que o filhote come em menor quantidade, porém come mais vezes por dia, já o adulto come em porções maiores, porém distribuídas em menos vezes. Exemplificou também sobre a alimentação do gato que come um pouquinho em cada refeição, porém come muitas vezes por dia. Essa exploração lembra o aspecto *unitização*, porém se mostra como uma oportunidade de explorar com os alunos a ideia de grandezas inversamente proporcionais, pois se a quantidade de ração ofertada em cada refeição é pequena devemos oferecer mais vezes, ou seja, implementar mais refeições no dia, assim o aspecto *quantidades e covariação* (LAMON, 2012) foi acionado, pois os alunos identificaram e mensuraram as quantidades envolvidas, além de perceber de que maneira essas quantidades se relacionam (CYRINO *et al.*, 2014).

Em relação à quantidade de ração por refeição, a professora pesquisadora discutiu com os alunos sobre os tamanhos dos recipientes (vasilhas ou potes) que poderiam ser utilizados para alimentar os cachorros. A professora pesquisadora mostrou dois potes um de iogurte (170 gramas) e um de sorvete (2 litros) e perguntou: *“para dar ração para o cachorro grande, vocês pegariam um potinho deste aqui (indicando o pote de iogurte) ou...? O aluno A5 interrompendo a fala da professora falou que não e a aluna A17 explicou: “precisa de um pote mais um pouquinho grande”, sinalizando a manifestação do aspecto quantidades e covariação, isto é, se precisa colocar mais ração, precisa de um pote maior, sendo assim a professora pesquisadora mostrou o pote de sorvete como uma possibilidade.*

A aluna A2, porém, repensou a utilização do pote menor, ressaltando que é possível colocar ração nele, só teria que colocar mais vezes *“e se colocar! Coloca de novo”* (fez gestos com a mão como se estivesse colocando ração no pote). A aluna A2 apresentou indícios da

*unitização*, aspecto caracterizado por Lamon (2012), Cyrino *et al.* (2014) e Oliveira (2014) como um processo de reorganizar grandezas, agrupando ou reagrupando-as de outras maneiras, conservando a quantidade total. Nesse caso, a aluna compreendeu que a quantidade ofertada em um pote maior poderia ser ofertada em vários potes menores, ou seja, o total de ração seria o mesmo, porém organizado de formas diferentes. O aspecto *quantidades e covariação* também foi acionado, uma vez que está relacionado à capacidade da aluna identificar e mensurar quantidades, além de perceber como estão relacionadas, no caso a aluna deixou claro que compreendeu que um pote maior corresponde a vários potes pequenos, ou vice e versa. A frase “*e se colocar! Coloca de novo*” revela também que ela usou a relação aditiva (colocar mais um). Esse tipo de raciocínio é o ponto de partida para compreender posteriormente relações multiplicativas, que é uma das ideias mais importantes do raciocínio proporcional (VAN DE WALLE, 2009).

Após essas discussões, a professora pesquisadora orientou os alunos a determinar por meio de um acordo a quantidade de vezes que devemos alimentar os cachorros e a quantidade de ração que devemos colocar em cada refeição. Para ajudar foram definidas duas cachorras para ilustrar a situação-problema: a Pitucha, cachorra de médio porte da aluna A2 e a Alana, cachorra de grande porte do aluno A7. Os alunos definiram com base em suas discussões que um cachorro de médio porte precisava ser alimentado 2 vezes por dia e um cachorro de grande porte precisava ser alimentado 3 vezes por dia, ou mais. A partir dessa definição restava determinar a quantidade de ração por refeição. Quando se fala em uma quantidade de ração por refeição, sugere-se que seja feita uma distribuição da quantidade de ração que será dada ao cachorro no dia, o que remete ao raciocínio proporcional em seu aspecto *partilha e comparação* (LAMON, 2012; CYRINO *et al.*, 2014), por se aproximar de uma tentativa de realizar uma divisão equitativa.

Para auxiliar os alunos, a professora pesquisadora mostrou um potinho de iogurte cheio de ração e perguntou se essa quantidade seria suficiente para alimentar a Pitucha (cachorra de médio porte), a maioria dos alunos respondeu que sim, sendo assim a professora pesquisadora passou em cada grupo para mostrar a quantidade, e questionou se precisaria de mais, o aluno A5 disse que sim e a aluna A8 sugeriu:

*A8: Precisa da mão para a Pitucha da aluna A2, né?”*

*P: Você quer colocar com a mãozinha? Isso aqui tá bom ou quer colocar mais?*

*A8, A5: Colocar mais.*

*A8: Sim.*

*P: Vocês lembram quantos potinhos desse aqui eu coloquei?*

*A17: Um.*

*P: E quantas mãozinhas?*

*A8: (Fez gestos mostrando uma mão, depois mostrou as duas).*

*P: Foi 1 potinho e 5 mãozinhas.*

*P: Agora vamos decidir a quantidade de ração que vamos dar para a cachorra do aluno A7? Vocês acham que eu vou ter que colocar mais ou menos do que a da Pitucha?*

*A2: Mais.*

*P: Por quê?*

*A2: Porque ela come bastante ração.*

Por meio do diálogo podemos observar que a aluna A8 sugeriu a utilização de sua mão como instrumento de medida e que os gestos estão presentes na comunicação dela com a professora pesquisadora. Ao responder o questionamento a aluna A8 mostrou suas duas mãos, inferimos que a aluna quis dizer que fez uso delas como medida da quantidade de ração e para contar quantas vezes (mãozinhas) foram necessárias.

Ao contar a quantidade de mãozinhas necessárias para alimentar o cachorro de médio e grande porte, a professora regente R2 e a professora pesquisadora auxiliaram na contagem, a cada mãozinha colocada no pote de sorvete, elas recitavam a sequência dos números naturais junto com os alunos, iniciando a partir do 1, isso denota a correspondência biunívoca que deve ser aprendida pelos alunos ao contar quantidades, ou seja, não podemos relacionar a mesma mãozinha a números iguais, nem deixar mãozinha alguma sem contar, portanto a cada mãozinha colocada, um número foi enunciado. Nesse contexto, o aspecto *quantidades e covariação* (LAMON, 2012; CYRINO *et al.*, 2014) foi acionado, pois os alunos identificaram a quantidade de ração de acordo com as mãozinhas que eles colocaram. Inicialmente os alunos usaram estratégias aditivas, ou seja, para contar efetuaram a soma  $1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5$ , mas futuramente é importante que os alunos compreendam a relação de covariação, tendo em vista que ao colocar cinco mãozinhas, a quantidade de ração irá quintuplicar.

Além desse aspecto, o aspecto *medição* (LAMON, 2012; CYRINO *et al.*, 2014; OLIVEIRA, 2016) também foi acionado, pois os alunos fizeram a visualização e quantificação direta de objetos, ou seja, usaram as mãos para quantificar a ração que deveria ser colocada para cada cachorro, ou seja, usaram as mãos como instrumento de medida não padronizado, como mostra a Figura 45.



**Figura 45:** Contagem das mãozinhas



**Fonte:** Dos autores

Por fim, ficou decidido que a quantidade de ração adequada para alimentar o cachorro de médio porte foi 1 potinho de iogurte mais 5 mãozinhas dos alunos e para alimentar o cachorro de grande porte, 11 mãozinhas de ração.

Após essa decisão dos alunos, a professora pesquisadora propôs que os alunos organizassem suas ideias sobre o desenvolvimento da atividade em um cartaz, para isso ela disponibilizou uma cartolina para cada grupo, recortes em E.V.A na cor marrom, para representar a ração, figuras de potes pequenos e grandes, assim como imagens impressas de cachorros de médio e de grande porte. A professora pesquisadora fez ainda uma síntese para auxiliar os alunos na elaboração do modelo matemático, conforme mostra o diálogo a seguir.

*P: Nós temos aqui dois recipientes para colocar ração, o recipiente pequeno e esse aqui...*

***Maioria dos alunos:** Grande.*

*P: O cachorrinho vai comer no recipiente pequeno ou no grande?*

*A5, A17: Pequeno.*

*P: Então pequeno com pequeno. O cachorro grande vai comer no...*

*A3, A5: Grande.*

*A2: Grande com grande.*

Essa conversa mostrou que os alunos realizaram uma classificação, uma vez que a organização feita pelos alunos pode ser entendida como um caso de pertinência, pois por meio da observação os objetos ou materiais foram separados por semelhanças (SOUZA; LIMA, 2013), nesse caso, por meio da observação de imagens de cachorros de médio e de grande porte e da observação de potes de iogurte e de sorvete, os alunos separaram as imagens por semelhanças de tamanho, ou seja, o cachorro menor com o pote menor e o cachorro maior

com o pote maior. Essa classificação remete também ao aspecto *quantidades e covariação* (LAMON, 2012; CYRINO *et al.*, 2014), pois mostra que os alunos compreenderam que quanto maior o cachorro, mais ração ele irá comer e, conseqüentemente, maior deve ser o pote para colocar essa ração. Foi dessa maneira que os alunos organizaram as ideias nos cartazes, como mostra a Figura 46.

**Figura 46:** Grupos na elaboração dos modelos matemáticos



**Fonte:** Dos autores

Os alunos usaram a colagem para auxiliar nessa elaboração, além de usar estratégias próprias para a resolução do problema. Sendo assim, os grupos 1, 2 e 3, respectivamente, elaboraram os modelos matemáticos para a alimentação de cachorros de médio e de grande porte, conforme mostra a Figura 47, condizente com a situação-problema e com as discussões realizadas no decorrer da atividade.

**Figura 47:** Modelos Matemáticos produzidos pelos grupos 1, 2 e 3



**Fonte:** Dos autores

Após a elaboração dos modelos matemáticos, foi realizada a *interpretação de resultados e validação* por meio de conversas em cada grupo. A intenção da mediação da professora pesquisadora foi verificar se os alunos tinham compreendido a relação entre o tamanho dos potes e o tamanho dos cachorros, e a relação entre o tamanho do cachorro e a quantidade de ração que deve ser ofertada. O diálogo a seguir ilustra com um trecho da conversa com os integrantes do grupo 3, conforme mostra o diálogo a seguir.

*P: O pequenininho vai no cachorro pequeno ou no grande?*

*A11: (Apontou para o pote pequeno).*

*A16: Pequeno.*

*P: Isso [...].*

Ao mesmo tempo os alunos puderam expor como fizeram e explicar por que decidiram colocar aquelas quantidades, porém como se trata da Educação Infantil, geralmente os alunos interagem mais quando são questionados, dessa forma a professora pesquisadora questionou os integrantes do grupo 2, conforme diálogo a seguir.

*P: Vamos ver o grupo do aluno A5?! Teu cachorrinho pequeno come quantas vezes no dia? Conta aí para mim.*

*Todos juntos: 1, 2, 3.*

*P: E o seu cachorrão? Isso A17, mostra de novo.*

*A17: 1, 2.*

*P: E qual tem mais ração?*

*A17: (Apontou os potes do cachorro maior).*

*P: Isso A17 nesses dois. Isso significa que [...] o cachorro grande a gente tem que colocar mais quantidade, mais ração.*

Ao falar “*conta aí para mim*” a professora pesquisadora quis dizer para a aluna indicar no cartaz a quantidade de vezes que o cachorro de médio porte comeria por dia, com base no seu modelo, sendo assim a aluna A17 usou a ideia de correspondência biunívoca, ou seja, contou de modo que cada pote correspondeu a um número enunciado. Essa atitude tomada pela professora pesquisadora está atrelada ao fato da necessidade que as crianças têm de verbalizar a sequência numérica e apontar as imagens, por exemplo, enquanto quantificam. Assim, devido à dificuldade que as crianças têm de ordenar os números mentalmente, é preciso incentivá-las a apontar e falar, ao mesmo tempo, para que a mão não vá mais rápido que a boca ou o contrário (MORENO, 2006).

Ao questionar sobre essas quantidades, a aluna A2, integrante do grupo 1 demonstrou agilidade em fazer a contagem, realizando a correspondência biunívoca entre cada pote correspondente a um número enunciado.

Nos três grupos, os alunos colocaram três potes pequenos com quantidades menores de ração para o cachorro de médio porte e para o cachorro de grande porte colocaram dois potes grandes com mais ração. Se retomarmos as discussões dos alunos, observaremos que eles definiram anteriormente alimentar o cachorro de médio porte duas vezes por dia e o cachorro de grande porte três vezes por dia, porém no momento da elaboração do modelo matemático indicaram o contrário. Pela Figura 47, que mostra os modelos matemáticos dos alunos, observamos que os alunos decidiram aumentar a quantidade de refeições para alimentar o cachorro médio, colocando quantidades menores de ração. Para o cachorro de grande porte, por sua vez, decidiram alimentar menos vezes por dia e colocar mais ração em cada refeição.

Observamos que os alunos durante a produção do modelo matemático, quiseram usar todo o material que disponibilizamos nos grupos, porém ressaltamos que eles poderiam usar apenas o que julgassem necessário. Talvez isso se dê pelo fato de que quando trabalhamos com atividades mais tradicionais geralmente nós, educadores na Educação Infantil, disponibilizamos o que será usado, não é de praxe, os alunos selecionar os materiais.

Enfim, a atividade de modelagem matemática com o tema animais foi relacionada a convivência das famílias dos alunos, ou seja, eles demonstraram proximidade e intimidade com o tema que foi escolhido por eles. Durante o desenvolvimento da atividade os alunos compartilharam as experiências que eles tinham a respeito do tema e da situação-problema. A atividade proporcionou, ainda, a discussão e a exploração de várias noções matemáticas que podem e devem ser abordadas na Educação Infantil, como correspondência biunívoca, classificação, contagem, além disso, oportunizou aos alunos mobilizar aspectos que sinalizam manifestações do raciocínio proporcional, sendo eles: quantidades e covariação, medição, unitização, raciocínio relativo e partilha e comparação.

No Quadro 9 fizemos uma síntese dos aspectos do raciocínio proporcional (LAMON, 2012) que foram acionados e em quais situações isso aconteceu no desenvolvimento da atividade.

**Quadro 9:** Aspectos do raciocínio proporcional mobilizados na atividade da alimentação do cachorro

Aspecto do raciocínio proporcional (LAMON, 2012)	Situações em que o aspecto foi mobilizado
Quantidades e covariação	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Alunos afirmam que quanto maior o cachorro, maior deve ser a casinha dele (grandezas diretamente proporcionais);</li> <li>• Percepção de que quando os cachorros atingem a altura máxima, a quantidade de ração não influencia em seu crescimento (compreensão de que aumentar a quantidade de ração não implica em crescer mais);</li> <li>• Comparação entre dois cachorros de diferentes tamanhos (exploração da relação entre tamanho do cachorro, quantidade de comida e gastos com alimentação: cachorro grande come mais ração e, conseqüentemente, há mais gastos);</li> <li>• Entendimento da relação entre número de refeições por dia e quantidade de ração por refeição, “quanto menos ração por refeição, mais refeições são necessárias” (grandezas inversamente proporcionais);</li> <li>• Decisão sobre a quantidade de ração para alimentar o cachorro de médio porte, usando as mãos para contar (exploração do processo de quantificação e do sistema de numeração decimal usando a correspondência biunívoca);</li> <li>• Discussão sobre o pote adequado para alimentar o cachorro grande “<i>precisa de um pote mais um pouquinho grande</i>” (compreensão de que para colocar mais ração, precisa de um pote maior);</li> <li>• Estratégia da aluna A2 em utilizar o pote menor para alimentar o cachorro grande, “<i>e se colocar! Coloca de novo</i>” (grandezas inversamente proporcionais);</li> <li>• Compreensão da relação entre o cachorro menor com o pote menor e cachorro maior com o pote maior (organização de acordo com as semelhanças de tamanho).</li> </ul>
Raciocínio relativo	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Compreensão de que o cavalo e o elefante são animais que não podem viver dentro de casa conosco, “<i>o elefante é muito grande. Não cabe ele, ele é muito gordo</i>” (aluna A2) (a aluna relacionou o tamanho do elefante com a área ou espaço de uma casa, sem usar instrumentos de medida específicos);</li> <li>• Visualização dos alunos que o cachorro grande deve ter uma casa grande/maior e o cachorro pequeno uma casa pequena/menor (organização de acordo com as semelhanças de tamanho).</li> </ul>
Partilha e comparação	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Discussão sobre a divisão da quantidade total de ração ofertada por dia em mais porções (porções semelhantes que remetem à divisão equitativa).</li> </ul>
Unitização	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Discussão sobre algumas formas de organizar a quantidade total de ração oferecida em um dia (comer em menor quantidade, porém comer mais vezes por dia ou comer em porções maiores, porém distribuídas em menos vezes);</li> <li>• Discussão sobre a inviabilidade de comer tudo de uma vez (organização da alimentação do dia em várias refeições, tanto para animais quanto para pessoas);</li> </ul>

Medição	<ul style="list-style-type: none"><li>• Decisão sobre a quantidade de ração para alimentar o cachorro de médio porte, usando as mãos (exploração do processo de quantificação e do sistema de numeração decimal usando a correspondência biunívoca);</li><li>• Estratégia da aluna A17 para indicar o tamanho de sua cachorra por meio de gestos (uso das mãos para expressar uma medida).</li></ul>
---------	--

**Fonte:** Dos autores

Esse quadro síntese mostra algumas possibilidades nessa atividade de mobilização e/ou desenvolvimento de aspectos do raciocínio proporcional conforme pontuados por Lamon (2012). Muitos desses aspectos foram acionados de acordo com a compreensão e compartilhamentos de ideias e conhecimentos dos alunos.

## 5.7 ANÁLISE GLOBAL

Para a análise global, vamos olhar os resultados obtidos a partir da análise das três atividades, as quais nominamos “Atividade 1: Brigadeiro, quanto maior melhor?”, “Atividade 2: Balançar ou equilibrar na gangorra” e “Atividade 3: Quanto come o cachorro?”, desenvolvidas em conformidade com os momentos de familiarização com atividades de modelagem matemática sugeridos por Almeida, Silva e Vertuan (2012) e, abordar particularmente como se deram as manifestações e, por conseguinte, o desenvolvimento do raciocínio proporcional em alunos da Educação Infantil ao desenvolver atividades de modelagem matemática, destacando as potencialidades dessa alternativa pedagógica. Para isso, fizemos uma síntese sobre os indícios de mobilização do raciocínio proporcional observados e organizamos no quadro 10.

**Quadro 10:** Índícios de mobilização do raciocínio proporcional por alunos da Educação Infantil em atividades de modelagem matemática

Aspecto do raciocínio proporcional (LAMON, 2012)	Atividade 1: Brigadeiro, quanto maior melhor?	Atividade 2: Balançar ou equilibrar na gangorra?	Atividade 3: Quanto come o cachorro?
5 fontes de significado para a/b	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Comparação entre as quantidades de massa que cada aluno pegou “<i>olha o tantinho que você pegou</i>” “<i>tem gente fazendo brigadeirão, tem gente fazendo brigadeirinho</i>” (caso particular da relação parte-todo, isto é, parte-parte).</li> </ul>		
Medição		<ul style="list-style-type: none"> <li>• Os alunos usaram a relação aditiva (+1) para colocar os pacotes de feijão de um lado da gangorra até ela ficar em equilíbrio quando há no outro lado um pacote de arroz (comparação de pesos, contagem direta).</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Decisão sobre a quantidade de ração para alimentar o cachorro de médio porte, usando as mãos (exploração do processo de quantificação e do sistema de numeração decimal usando a correspondência biunívoca);</li> <li>• Estratégia da aluna A17 para indicar o tamanho de sua cachorra por meio de gestos (uso das mãos para expressar uma medida).</li> </ul>
Partilha e Comparação	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Entendimento dos alunos que os tamanhos dos brigadeiros têm que ser aproximadamente iguais “<i>brigadeiro mais ou menos</i>”, “<i>nem tão grande, nem tão pequeno</i>” (a partir da comparação da sua quantidade de massa com as quantidades dos colegas e das orientações das professoras os alunos realizaram a partilha da massa, visando uma divisão equitativa).</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Compreensão da aluna A17 sobre a funcionalidade da brincadeira, “<i>tem que ser só crianças na gangorra</i>” (percepção da necessidade de existir uma proximidade entre os pesos de ambos os lados da gangorra, como os pesos de duas crianças).</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Discussão sobre a divisão da quantidade total de ração ofertada por dia em mais porções (porções semelhantes que remetem à divisão equitativa).</li> </ul>
Unitização	<ul style="list-style-type: none"> <li>• A partir da quantidade de massa que cada aluno recebeu, eles fizeram os brigadeiros (a quantidade de massa de cada aluno se mantém independente do número de bolinhas</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Exploração da questão “<i>se A2 não pode ir mais para baixo, A8 pode ir mais para cima?</i>” (compreensão de que existe uma altura máxima e uma altura mínima que os lados da gangorra podem atingir, e que</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Discussão sobre algumas formas de organizar a quantidade total de ração oferecida em um dia (comer em menor quantidade, porém comer mais vezes por dia ou comer em porções maiores, porém distribuídas em</li> </ul>



	<p>que fizeram);</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• A partir da quantidade de massa total os alunos fizeram 42 brigadeiros (reorganização da massa em bolinhas, independente do tamanho);</li> <li>• Discussão de que os alunos que comeram 4 brigadeiros comeram a mesma quantidade de massa que os alunos que comeram 2 brigadeiros, pois todos receberam a mesma quantidade de massa (como a quantidade de massa de cada aluno se mantém independente do número de bolinhas que fizeram, 4 bolinhas menores equivalem a 2 bolinhas maiores).</li> </ul>	<p>variação de um lado se dá em conformidade com o outro, ou seja, a soma das alturas de ambos os lados da gangorra em relação ao chão, independente da posição é constante);</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• A5 respondeu que A2 e A8 estão mais altas, no momento em que a gangorra ficou em equilíbrio (Não distinção de qual aluna está mais alta quando a gangorra está em equilíbrio, pois as alturas de ambos os lados são iguais);</li> <li>• Percepção dos alunos sobre as alturas dos lados da gangorra quando foi colocado um pacote de arroz de cinco quilogramas e cinco pacotes de feijão de um quilograma (exploração de que as alturas em ambos os lados ficaram iguais);</li> <li>• Modelo matemático da aluna A11 (desenhou uma linha horizontal para indicar que a gangorra está em equilíbrio).</li> </ul>	<p>menos vezes);</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Discussão sobre a inviabilidade de comer tudo de uma vez (organização da alimentação do dia em várias refeições, tanto para animais quanto para pessoas);</li> </ul>
Raciocínio Relativo		<ul style="list-style-type: none"> <li>• Percepção dos alunos sobre a inviabilidade da brincadeira entre um adulto e uma criança (constatação da diferença de pesos entre a professora pesquisadora e a aluna A17 a partir da observação da imobilidade da gangorra);</li> <li>• Para evitar que a gangorra fique em estado de equilíbrio o aluno A5 desenhou círculos de diferentes tamanhos, para indicar uma “<i>pessoa magrela</i>” e uma “<i>pessoa forte</i>” (o aluno percebeu que para ficar em equilíbrio os pesos de ambos os lados das gangorras têm que ser iguais).</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Compreensão de que o cavalo e o elefante são animais que não podem viver dentro de casa conosco, “<i>o elefante é muito grande. Não cabe ele, ele é muito gordo</i>” (aluna A2) (a aluna relacionou o tamanho do elefante com a área ou espaço de uma casa, sem usar instrumentos de medida específicos);</li> <li>• Visualização dos alunos que o cachorro grande deve ter uma casa grande/maior e o cachorro pequeno uma casa pequena/menor (organização de acordo com as semelhanças de tamanho).</li> </ul>
Quantidades e Covariação	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Ao contar o número de alunos a professora tocou um aluno a cada número que recitou (exploração do</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• A8 percebeu que precisa ter mais que uma criança na gangorra para balancear (com apenas uma criança seu lado da gangorra</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Alunos afirmam que quanto maior o cachorro, maior deve ser a casinha dele (grandezas diretamente proporcionais);</li> </ul>

	<p>processo de quantificação e do sistema de numeração decimal usando a correspondência biunívoca);</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Distribuição dos pratinhos para os alunos “<i>é um para cada um</i>”, “<i>17 crianças, 17 pratinhos</i>” (exploração do processo de quantificação e do sistema de numeração decimal usando a correspondência biunívoca);</li> <li>• Percepção da aluna A17 sobre ter que fazer bolinhas menores para que todos pudessem comer (grandezas inversamente proporcionais);</li> <li>• Percepção da aluna A8 que para fazer brigadeiros maiores ela “<i>precisa de mais ingredientes</i>” (grandezas diretamente proporcionais);</li> <li>• Confecção do cartaz, no qual os alunos colaram imagens de brigadeiros de acordo com a quantidade que cada um comeu “1 brigadeiro, 1 imagem”, “5 brigadeiros, 5 imagens” (correspondência biunívoca).</li> </ul>	<p>não sai do chão, ou seja, não há variação nas alturas de ambos os lados da gangorra);</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Professora pesquisadora sobe em um dos lados da gangorra, com A17 do outro lado, a gangorra não se move, “<i>you are very big like her</i>” (aluna A5) (compreensão de que quando há discrepância entre os pesos dos dois lados a gangorra não balança);</li> <li>• Tentativa de A10 de abaixar o lado da gangorra no qual estava sua colega A17, que é muito mais leve que a professora pesquisadora (entendimento de que quanto mais pesado um lado da gangorra mais baixa será a altura dele, até atingir a altura mínima, no caso o chão, ou de que quanto mais leve um lado, maior será sua altura, até atingir a altura máxima);</li> <li>• Tentativa dos alunos em deixar a gangorra em equilíbrio “<i>put more beans</i>” (Aluna A17), “<i>take the big rice</i>” (Aluno A5) (identificação de qual lado da gangorra tem que subir ou descer para que a gangorra fique em equilíbrio);</li> <li>• Explicação da aluna 11 para seu modelo matemático que descreve uma gangorra em equilíbrio (percepção da relação existente entre as grandezas peso e altura);</li> <li>• Percepção do aluno A5 que precisa desenhar mais pessoas para a quantidade de gangorras que desenhou (grandezas diretamente proporcionais).</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Percepção de que quando os cachorros atingem a altura máxima, a quantidade de ração não influencia em seu crescimento (compreensão de que aumentar a quantidade de ração não implica em crescer mais);</li> <li>• Comparação entre dois cachorros de diferentes tamanhos (exploração da relação entre tamanho do cachorro, quantidade de comida e gastos com alimentação: cachorro grande come mais ração e, conseqüentemente, há mais gastos);</li> <li>• Entendimento da relação entre número de refeições por dia e quantidade de ração por refeição, “quanto menos ração por refeição, mais refeições são necessárias” (grandezas inversamente proporcionais);</li> <li>• Decisão sobre a quantidade de ração para alimentar o cachorro de médio porte, usando as mãos para contar (exploração do processo de quantificação e do sistema de numeração decimal usando a correspondência biunívoca);</li> <li>• Discussão sobre o pote adequado para alimentar o cachorro grande “<i>needs a bigger bowl</i>” (compreensão de que para colocar mais ração, precisa de um pote maior);</li> <li>• Estratégia da aluna A2 em utilizar o pote menor para alimentar o cachorro grande, “<i>and put it! Put it again</i>” (grandezas inversamente proporcionais);</li> <li>• Compreensão da relação entre o cachorro menor com o pote menor e cachorro maior com o pote maior (organização de acordo com as semelhanças de tamanho).</li> </ul>
--	--	---	---

Fonte: Dos autores

O quadro revela que seis dos sete aspectos sistematizados por LAMON (2012) foram mobilizados pelos alunos durante as atividades de modelagem matemática. O aspecto *quantidades e covariação* foi mobilizado nas três atividades analisadas, o que indica que os alunos identificaram e mensuraram quantidades e perceberam como elas se relacionavam. Já o *raciocínio relativo* foi mobilizado na segunda e na terceira atividade, quando os alunos fizeram comparações e relacionaram quantidades relativas a diferentes grandezas. O aspecto *unitização* foi mobilizado no desenvolvimento das três atividades e, por meio dele os alunos (re)conheceram diferentes maneiras de expressar uma mesma quantidade. A *medição* foi mobilizada na segunda e na terceira atividade e oportunizou aos alunos criar estratégias para medir e fazer comparações sem usar instrumentos de medida padronizados, recorrendo aos gestos, uso das mãos e o uso da relação aditiva. O aspecto *5 fontes de significado para  $a/b$*  foi mobilizado na primeira atividade, quando os alunos compararam as quantidades de massa de brigadeiro que cada um pegou, abordando assim a relação parte-parte, caso particular da relação parte-todo. Por fim, o aspecto *partilha e comparação* foi mobilizado no desenvolvimento das três atividades, quando os alunos fizeram a distribuição da massa do brigadeiro, visando uma divisão equitativa; ao perceber que duas crianças devem ter pesos próximos para que a gangorra balance e para a compreensão de que a quantidade total de ração ofertada por dia para um cachorro pode ser reorganizada em mais porções semelhantes.

Em relação ao *raciocínio progressivo e regressivo*, não encontramos indícios de sua mobilização pelos alunos nas atividades analisadas, porém identificamos situações que podem ser exploradas pelo professor para provocar sua mobilização. Na atividade do brigadeiro, por exemplo, poderia ser discutida a quantidade necessária de cada ingrediente para fazer duas ou mais receitas. De maneira similar, na atividade da gangorra, ao explorar o equilíbrio usando um pacote de arroz de cinco quilogramas de um lado e cinco pacotes de feijão de um quilograma do outro, poderiam ser usadas relações proporcionais para determinar a quantidade de pacotes de feijão necessária para equilibrar dois ou três pacotes de arroz, por exemplo. Já na atividade sobre a alimentação do cachorro, poderia ser mobilizado a partir da investigação da quantidade de ração necessária para alimentar dois ou mais cachorros.

As atividades de modelagem matemática desenvolvidas e analisadas mostraram grande potencial para a mobilização e/ou desenvolvimento do raciocínio proporcional. A *inteiração* oportunizou aos alunos que conhecessem algumas informações e definissem o problema, como aconteceu na atividade da gangorra, quando a aluna A8 disse que precisava de mais amiguinhos para que a gangorra balançasse, ou seja, a aluna teve um olhar na direção de um problema observado na situação. Na atividade sobre a alimentação do cachorro, ao

inteirar-se de forma direta por meio das fotos que os alunos trouxeram dos animais que possuíam em suas casas, a aluna A2 relacionou o tamanho do elefante com a área (espaço) de uma casa ou com o tamanho dela e das pessoas com que convive, mobilizando assim o aspecto *raciocínio relativo*. As ações na *inteiração* permitiram também, que os alunos tivessem a compreensão que um cachorro grande precisa ter uma “*casa grandona*” (A2), e um cachorro pequeno precisa de uma “*casinha pequena*”, ou seja, que cada cachorro precisa de uma casa de acordo com seu tamanho e, além disso, quanto maior o cachorro maior será a casinha deles. Sabe-se que na sala de aula, não tinha nem o cachorro e nem sua casa para os alunos pudessem fazer a comparação entre as grandezas: tamanho do cachorro e tamanho da casa, desta forma, a aluna A2 fez essa comparação sem medir diretamente com a utilização de instrumentos específicos, ou seja, ela olhou para um cachorro e seu tamanho na fotografia e soube indicar se ele precisa de uma casa grande ou pequena, ou maior/menor. E por fim, a *inteiração* auxiliou os alunos a compreender que cada cachorro atinge uma altura máxima quando adulto, independente da quantidade de ração que eles comem.

A *matematização* auxiliou os alunos a lançar um olhar matemático para as situações, levando-os a identificar as variáveis envolvidas e como elas se relacionavam, conforme discutido na atividade dos brigadeiros de que quanto maior as bolinhas, menor seria o número de brigadeiros ou na atividade da alimentação do cachorro, na qual os alunos concluíram que “*se eu alimentar o cachorro menos vezes no dia, eu preciso colocar mais ração por vez*” e que “*um cachorro maior provavelmente comerá mais ração*”.

A *resolução* permitiu que os alunos fizessem a análise de dados relevantes de cada situação e resolvessem a problemática. Na atividade dos brigadeiros, a resolução auxiliou os alunos a perceber que o tamanho do brigadeiro confeccionado por eles, interferia na quantidade total de brigadeiros, brigadeiros maiores resultaria em uma quantidade menor de bolinhas, proporcionou também a compreensão de que a unidade referencial (massa total distribuída aos alunos) poderia reorganizada de outras maneiras representando a mesma quantidade. Já na atividade da gangorra auxiliou os alunos a pensar sobre os fatores que fazem com que a gangorra fique em equilíbrio ou em movimento.

Por fim, a *interpretação de resultados e validação* permitiu que os alunos pudessem ver a proximidade entre os modelos matemáticos elaborados por eles com os elaborados por outros, e refletissem sobre a viabilidade de seu uso em outras situações, por exemplo, o tamanho determinado pelos alunos serve como molde para a produção dos outros brigadeiros (COUTINHO; TORTOLA; SILVA, 2018). Os modelos que os alunos produziram sobre as posições da gangorra ficaram muito parecidos com os apresentados nas imagens fornecidas

pela professora pesquisadora e com as gangorras do parque do CMEI. E na atividade sobre a alimentação do cachorro, os alunos conversaram e analisaram os cartazes confeccionados para explicitar a relação entre o tamanho dos potes e o tamanho dos cachorros, e a relação entre o tamanho do cachorro e a quantidade de ração que deve ser ofertada.

Para além dessas ideias e conceitos associados ao raciocínio proporcional, outros conteúdos e conceitos matemáticos também foram abordados por meio das atividades de modelagem matemática desenvolvidas, tais como a classificação, noção espacial, formas geométricas, pesos e medidas, conceito de número, compreensão do conjunto dos números naturais, escrita de quantidades usando símbolos matemáticos, seriação, noções de quantidade “mais / menos”, “maior / menor”, noções sobre geometria espacial, sendo abordada a semelhança das bolinhas de brigadeiro com a esfera, etc.

Além disso, as atividades de modelagem promoveram discussões que envolvem outros assuntos tais como: identificação e nomeação das cores; animais domésticos; conhecimento de uma das classes de animais vertebrados – os mamíferos; a escrita de palavras; ciclo de vida do ser humano e dos animais, hábitos e itens de higiene usados pelas cozinheiras e pela nutricionista; entre outros, o que nos mostra como a Modelagem Matemática pode ser uma boa alternativa para orientar o trabalho de projetos interdisciplinares (ENGLISH, 2009).

Portanto, acreditamos que por meio das atividades de modelagem matemática, os alunos foram encorajados a desenvolver e explorar o raciocínio proporcional não somente para ter significado no contexto escolar, mas no contexto em que vive.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nossa pesquisa fundamentou-se principalmente em questões teóricas associadas ao Ensino de Matemática na Educação Infantil, à Modelagem Matemática na perspectiva da Educação Matemática e ao Raciocínio Proporcional, com a intenção de investigar *como se dá o desenvolvimento do raciocínio proporcional em atividades de modelagem matemática desenvolvidas por alunos da Educação Infantil?*

Na fundamentação de nosso trabalho consideramos a Modelagem Matemática como uma alternativa para as práticas de sala de aula, em diferentes níveis de escolaridade (ENGLISH, 2003; FOX, 2006; ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012; TORTOLA; ALMEIDA, 2013).

Constatamos na literatura a existência de poucas pesquisas que prezam pela investigação da modelagem matemática no contexto da Educação Infantil, seja por conta da idade, seja pelos conhecimentos iniciais dos alunos em relação à matemática (SILVA; KLÜBER, 2012). Em contraposição à essa constatação, observamos uma defesa de que a Educação Infantil é um ambiente promissor, em que os alunos usam de estratégias e ideias próprias, sem o uso de mecanismos e procedimentos prontos e automatizados (GRANDO; MOREIRA, 2012) e, por isso, mostra-se como uma etapa oportuna para o desenvolvimento de ideias e conceitos, formas de pensar e raciocinar, características importantes para o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática.

Sendo assim, nos propomos investigar o desenvolvimento do raciocínio proporcional na Educação Infantil, por meio de atividades de modelagem matemática, visto que ele é considerado uma base para a compreensão de porcentagens, taxas de variação, trigonometria, funções, geometria, álgebra e outras vertentes da matemática (CYRINO *et al.*, 2014; LAMON, 2012; NORTON, 2005).

Para isso foi necessário compreender que ensinar matemática na Educação Infantil requer considerar suas particularidades, usar estratégias que favoreçam a aprendizagem desses alunos, como contação de histórias, uso de jogos e brincadeiras, ludicidade, registros por meio de desenhos, garatujas e rabiscos, uso de gestos, valorização das experiências e interesses dos alunos, compreensão sobre a rotina escolar, uso de materiais e objetos manipuláveis, manter o contato visual, entre outras. No desenvolvimento de atividades de modelagem matemática na Educação Infantil, essas características também devem ser consideradas (MARCONDES; SILVA, 2019; CARVALHO; OLIVEIRA; SILVA, 2013; LUNA, 2012). Em nossa pesquisa,

especificamente, as atividades desenvolvidas mostraram que ludicidade, linguagem gestual, interação entre alunos e entre alunos e professores, valorização das experiências e interesses dos alunos, brincadeiras, interdisciplinaridade e situações da rotina estiveram presentes.

Nesse contexto, a visualização e a experimentação foram imprescindíveis. Na atividade do brigadeiro, por exemplo, os alunos confeccionaram diferentes tamanhos de brigadeiros até chegar à conclusão de que não adiantava fazer brigadeiros maiores, pois cada um recebeu a mesma quantidade de massa; na atividade da gangorra os alunos testaram diferentes situações que levou à conclusão de que a gangorra só se movimenta quando os pesos das crianças que estão nos dois lados são próximos, caso haja discrepância nos pesos ela não se movimentará, assim como quando a gangorra entra em equilíbrio, ou seja, quando os pesos das crianças que estão nos dois lados são iguais, porém, nesse caso a gangorra ainda pode se movimentar caso haja algum impulso; na atividade sobre a alimentação dos cachorros, por meio da comparação de objetos (potes de iogurte e sorvete) os alunos determinaram a quantidade de ração que deveria ser colocada para cada cachorro.

As estratégias utilizadas pelos alunos como a comunicação de ideias, explicações, uso de gestos, registros pictóricos, observação e reflexão sobre as diferentes opiniões apresentadas nas três atividades de modelagem matemática, geraram questionamentos, diálogo e foram favoráveis para o desenvolvimento do raciocínio proporcional.

Observamos atitudes e ações espontâneas, em resposta a situações oportunizadas pelas atividades de modelagem matemática, sinalizando a liberdade de encaminhamentos que essas atividades proporcionam aos alunos e a intencionalidade pedagógica que permeia a busca pela resolução dos problemas. Os alunos desenvolveram as atividades sem fazer o uso de regras ou fórmulas, utilizaram estratégias próprias e intuitivas, recorreram aos gestos, às relações aditivas, às suas vivências, mostrando que eles conseguem resolver situações-problema que envolvem relações proporcionais no seu dia-a-dia, antes mesmo do ensino formal (COSTA; PONTE, 2008). Buscamos sempre valorizar essas estratégias, corrigindo ou adequando-as quando necessário e ensinando novas a partir delas, formalizando essas formas de pensar e introduzindo a linguagem matemática.

Diante disso, acreditamos que nossa pesquisa promoveu experiências nas quais as crianças fizeram observações, manipularam objetos, investigaram e resolveram situações-problema de seu entorno usando a matemática, buscando meios próprios e formas de pensar sem, necessariamente, fazer uso de mecanismos prontos e pré-determinados. Os alunos demonstraram entusiasmo, interesse, empenho e atuaram nas ações que exigiram tanto individualidade, quanto coletividade. Dessa forma, acreditamos que os alunos ampliaram seus

conhecimentos do mundo físico e sociocultural, por meio da matemática, de maneira lúdica e divertida.

Os resultados que apresentamos neste relatório de pesquisa foram utilizados na confecção do produto educacional “Modelagem Matemática e Raciocínio Proporcional: orientações para professores da Educação Infantil”, um material pedagógico no qual as atividades de modelagem desenvolvidas são sugeridas como atividades com potencial para ensinar e aprender matemática na Educação Infantil e, com as devidas orientações, mobilizar e/ou desenvolver o raciocínio proporcional.

É importante ressaltar que os resultados observados não devem ser interpretados como um ponto final desta investigação, pelo contrário, devem ser pensados como um ponto de partida para novos estudos sobre as temáticas abordadas. Para aqueles pesquisadores que queiram trabalhar com a Modelagem Matemática na Educação Infantil, o nosso trabalho elucidou algumas possibilidades de implementar essa alternativa nesse nível de escolaridade, pelo fato de acreditarmos que as crianças possuem condições de resolver problemas à sua maneira, utilizando conhecimentos condizentes com sua idade e série escolar (ENGLISH, 2006; 2009; FOX, 2006; TORTOLA, 2012; 2016).

Por fim, gostaríamos de pontuar que o desenvolvimento desta pesquisa mostrou o quão gratificante e produtivo pode ser o trabalho com atividades de modelagem matemática na Educação Infantil e o potencial que essas atividades têm para criar situações em que o raciocínio proporcional pode ser explorado – assim como outras ideias e conceitos matemáticos –, além de valorizar os conhecimentos e experiências dos alunos e prezar pelo seu engajamento. Esperamos que nossa pesquisa possa contribuir para a compreensão do modo que alunos da Educação Infantil desenvolvem atividades de modelagem matemática e como se dá o desenvolvimento do raciocínio proporcional nesse contexto.



## REFERÊNCIAS

- AGUETONI, M. S.; J.; O. J. L.; SETTI, E. J. K. Atividade de Modelagem Matemática na Educação Infantil. In: ENCONTRO PARANAENSE DE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2018, Cascavel. **Anais...** Cascavel: SBEM, 2018.
- AGUIAR; C. A; PALMA, R. C. D. O espaço e a matemática na educação infantil. In: ENCONTRO MATO-GROSSENSE DE PROFESSORES QUE ENSINAM MATEMÁTICA, 1., 2018, Tangará da Serra. **Anais...** Tangará da Serra, SBEM, 2018.
- ALMEIDA, L. W.; SILVA, A. Por uma Educação Matemática Crítica: a Modelagem Matemática como alternativa. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 12, n. 2, 2010, p. 221-241.
- ALMEIDA, L. W.; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na Educação Básica**. São Paulo: Contexto, 2012.
- ANTONIAZZI, N. N. *et al.* Artes visuais: educação infantil. In: ENCONTRO CIENTÍFICO CULTURAL INTERINSTITUCIONAL, 14., 2016, Cascavel. **Anais...** Cascavel, FAG, 2016.
- AZEVEDO, P. D.; PASSOS, C. L. B. Professoras da Educação Infantil discutindo a Educação Matemática na infância: o processo de constituição de um grupo. In: CARVALHO, M. A. B. (Org.). **Matemática e Educação Infantil: investigações e possibilidades de práticas pedagógicas**. Petrópolis, Vozes, 2012. p. 52-81.
- BARBOSA, C. P. **O pensamento geométrico em movimento: um estudo com professores que lecionam matemática nos anos iniciais do ensino fundamental de uma escola pública de ouro preto**. 187 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto, Minas Gerais, 2011.
- BARBOSA, J. C. Modelagem matemática na sala de aula. **Perspectiva**, Erechim, v. 27, n. 98, p. 65-74, jun. 2003.
- BELO, C. B. **Modelagem Matemática na Educação Infantil: Contribuições para a Formação da Criança**. 150 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Naturais e Matemática Instituição de Ensino) – Universidade Estadual do Centro-Oeste, Guarapuava, 2016.

BELO, C. B.; BURAK, D. A Modelagem Matemática na Educação Infantil: uma experiência vivida. **Revista Educação Matemática Debate**, Montes Claros, v. 4, e202016, p. 1-22, 2020.

BILÓRIA, J. F.; METZNER, A. C. A importância da rotina na Educação Infantil. **Revista Fafibe On-Line**, Bebedouro, v. 6, n. 6, nov. 2013. Disponível em: <<http://www.unifafibe.com.br/revistasonline/arquivos/revistafafibeonline/sumario/28/11122013185355.pdf>>. Acesso em: 23 nov. 2019.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S.K. **Qualitative research for education**. Boston: Allyn and Bacon, 1982.

BOTTA, L.; ONUCHIC, L.R. Uma nova visão sobre o ensino e a aprendizagem dos números racionais. **Revista de Educação Matemática**, São Paulo, v.5, n.3, p. 5-8, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática (1º e 2º ciclos do Ensino Fundamental)**. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática (3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental)**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BURAK, D. Modelagem Matemática e a sala de aula. In: ENCONTRO PARANAENSE DE MODELAGEM EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 01, 2004, Londrina. **Anais...** Londrina: UEL, 2004.

BURAK, D.; KAVIATKOVSKI, M. A. C. Modelagem Matemática na formação de conceitos e construção dos conteúdos matemáticos na Educação Infantil. In: ENCONTRO PARANAENSE DE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7., 2016, Londrina. **Anais...** Londrina: SBEM, 2016.

CARVALHO, M. Aprender a contar e resolver problemas matemáticos na Educação Infantil. In: CARVALHO, M.; BAIRRAL, M. A. (orgs). **Matemática e Educação Infantil: investigações e possibilidades de práticas pedagógicas**. Petrópolis: Vozes, 2012, p. 145-159.

CARVALHO, L. S. S.; OLIVEIRA, L. A.; LUNA, A. V. A. Modelagem Matemática na Educação Infantil: um estudo sobre a proteção solar com crianças de três anos. In: Simpósio

Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 3., Fortaleza. **Anais...** Recife: SIPEMAT, 2012.

COSTA, S.; PONTE, J. P. O raciocínio proporcional dos alunos do 2.º ciclo do ensino básico. **Revista da Educação**, Lisboa, v.16, n. 2, p. 65-100, 2008.

COUTINHO, L.; TORTOLA, E. Modelagem matemática e raciocínio proporcional na Educação Infantil. In: ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 15., 2019, Londrina. **Anais...** Londrina: SBEM, 2019.

COUTINHO, L.; TORTOLA, E.; SILVA, K. A. P. Modelagem matemática na educação infantil: uma atividade com brigadeiros. In: ENCONTRO PARANAENSE DE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2018, Cascavel. **Anais...** Cascavel: SBEM, 2018.

CYRINO, M. C. C. T. *et al.* **Formação de professores em comunidades de prática: frações e raciocínio proporcional.** Londrina: UEL, 2014.

ENGLISH, L. D. Mathematical modelling with Young learners. In: LAMON, S. J.; PARKER, W. A.; HOUSTON, S. K. (Eds.). **Mathematical Modelling: a way of life.** Chichester: Horwood Publishing, 2003, p. 3-18.

ENGLISH, L. D. Mathematical modeling in the primary school: children's construction of a consumer guide. **Educational Studies in Mathematics**, v. 63, n. 3, p. 303-323, 2006.

ENGLISH, L. D. Promoting interdisciplinarity through mathematical modelling. **ZDM**, v. 41, n. 1-2, p. 161-181, 2009.

FOX, J. A justification for Mathematical Modelling Experiences in the Preparatory Classroom. In: GROOTENBOER, PETER AND ZEVENBERGEN, ROBYN AND CHINNAPPAN, MOHAN (Eds.). **Proceedings 29th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia**, p. 221-228, Canberra, Australia, 2006.

GAITA, R.; WILHELMI, M. R. Developing Elementary Algebraic Reasoning through Counting with Patterns Activities. **BOLEMA: Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, n. 63, p. 269-289, 2019.

GRANDO, R. C.; MOREIRA, K. G. Como crianças tão pequenas, cuja maioria não sabe ler nem escrever, podem resolver problemas de matemática? In: CARVALHO, M.; BAIRRAL, M. A. (orgs.). **Matemática e Educação Infantil: investigações e possibilidades de práticas pedagógicas.** Petrópolis, Vozes, 2012. p. 121- 143.

IEZZI, G. *et al.* **Matemática: ciência e aplicações**. 7 ed. São Paulo: Saraiva, 2013.

KOZMINSKI, E. L. **As três partes**. São Paulo: Editora Ática, 1992.

LAMON, S. J. **Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers**. 3th edition. New York: Routledge, 2012.

LAMON, S. J. **Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers**. 2nd edition. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, 2005.

LEONARDO, P. P. **Construção do conceito de número: um caderno didático-pedagógico para professores**. Joinville: UDESC, 2017. Disponível em: <[https://educapes.capes.gov.br/bitstream/capes/204104/2/PE%20PPGECMT\\_Pamela%20Paola%20Leonardo.pdf](https://educapes.capes.gov.br/bitstream/capes/204104/2/PE%20PPGECMT_Pamela%20Paola%20Leonardo.pdf)>. Acesso em 23 nov. 2019.

LOPES, C. E.; GRANDO, R. C. Resolução de problemas na educação matemática para a infância. In: ENCONTRO NACIONAL DE DIDÁTICA E PRÁTICAS DE ENSINO, 16., 2012, Campinas. **Anais...** Campinas: SBEM, 2012.

LORENZATO, S. **Educação Infantil e Percepção Matemática**. Campinas: Autores Associados, 2017. (Coleção Formação de Professores).

LUDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em Educação: abordagens qualitativas**. 2. ed. Rio de Janeiro: E. P.U., 2014.

MACEDO, L. N.; CARVALHO, D. S.; SOUZA, E. G. Análise de práticas discursivas com Modelagem Matemática na Educação Infantil por alunos do curso de Pedagogia. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11., 2019, Belo Horizonte. **Anais...** Belo Horizonte: UFMG, 2019.

MARANHÃO; C; MACHADO, S. Uma meta-análise de pesquisas sobre o pensamento proporcional. **Educar em Revista**, Curitiba, n. Especial 1/2011, p. 141-156, 2011.

MARCONDES, C. F.; SILVA, V. S. Modelagem matemática na educação infantil: considerações a partir de uma prática educativa com crianças de 3 e 4 anos. **Revista de Educação Matemática**, São Paulo, v. 16, n. 21, p. 71-87, 2019.

MENDES, I. A.; FILHO, A. S.; PIRES, M. A. L. M. **Práticas matemáticas em atividades didáticas para os anos iniciais**. São Paulo: Livraria da Física, 2011.

MENDUNI-BORTOLOTTI, R. D.; BARBOSA, J. C. Matemática para o ensino do conceito de proporcionalidade a partir de um estudo do conceito. **Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, São Paulo, v. 20, n. 1, p. 269-293, 2018.

MOREIRA, M. A. O mestrado (profissional) em ensino. *Revista Brasileira de Pós-Graduação*, Brasília, v. 1, n. 1. p. 131-142, 2004.

MORENO, B. R. de. O Ensino do número e do Sistema de numeração na educação infantil e na 1ª série. In: Mabel Panizza (Org.). **Ensinar matemática na Educação Infantil e nas series iniciais: análises e propostas**. Porto Alegre: Artmed, 2006. p. 43-73.

NORTON, S. J. The construction of proportional reasoning. In: CHICK, H. L.; VINCENT, J. L. (Eds.). **Proceedings of 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**. Melbourne: PME, 2005. v. 4. p. 17-24.

OLIVEIRA, L. M. C. P. Raciocínio proporcional em um problema envolvendo relações de proporcionalidade: aspectos evidenciados na cop-paem. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12., 2016, São Paulo. **Anais...** São Paulo: SBEM, 2016.

OLIVEIRA, L. M. C. P. **Aprendizagens no Empreendimento Estudo do Raciocínio Proporcional**. 2014. 206f. Dissertação. Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014.

OLIVEIRA, I. A. F. G.; SANTOS, M. C. **O ensino fundamental e a resolução de problemas de proporção simples: uma análise das estratégias**. 2000. Disponível em: <<http://23reuniao.anped.org.br/textos/1913T.PDF>>. Acesso em: 09 set. 2019.

ONTARIO MINISTRY OF EDUCATION. **Paying Attention to Proportional Reasoning: Support Document for Paying Attention to Mathematical Education**. Toronto: Queen's Printer for Ontario, 2012.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação do Paraná. Secretaria de Educação Básica. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica: matemática**. Curitiba: SEED, 2008.

PONTE, J. P. *et al.* **O desenvolvimento do conceito de proporcionalidade directa pela exploração de regularidades**. Tarefas para o 1.º e o 2.º Ciclos do Ensino Básico Materiais de

Apoio ao Professor. 2010. Disponível em: <[http://www.apm.pt/files/\\_Materiais\\_Proportionalidade\\_\\_\(IMLNA\)\\_4cfc0dcb29b46.pdf](http://www.apm.pt/files/_Materiais_Proportionalidade__(IMLNA)_4cfc0dcb29b46.pdf)>. Acesso em 9 set. 2019.

REZENDE, M. F.; COUTINHO, L.; TORTOLA, E. Depois de brincar, vamos guardar! Uma atividade de modelagem matemática na Educação Infantil. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13., 2019, Cuiabá. **Anais...** Cuiabá: SBEM, 2019.

REZENDE, M. F. FADIN, C.; TORTOLA, E. Investigando padrões em atividades de Modelagem Matemática na Educação Infantil. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11., 2019, Belo Horizonte. **Anais...** Belo Horizonte: UFMG, 2019.

RUIZ, C. M.; ZANELLA, M. S. Práticas de alimentação saudável na educação infantil a partir da modelagem matemática. In: ENCONTRO PARANAENSE DE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2018, Cascavel. **Anais...** Cascavel: SBEM, 2018.

SAIZ, I. E. A direita...de quem? Localização especial na educação infantil e nas series iniciais. In: Mabel Panizza (Org.). **Ensinar matemática na Educação Infantil e nas series iniciais: análises e propostas.** Porto Alegre: Artmed, 2006. p. 143-165.

SILVA, K. A. P. Modelagem matemática em sala de aula: caracterização de um ambiente educacional. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, Campo Mourão, v. 6, p. 135-157, 2017.

SILVA, P. F. **Modelagem Matemática na Educação Infantil: uma estratégia de ensino com crianças da faixa etária de 4 a 5 anos.** 172 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas) – Centro Universitário Univates, Lajeado, 2013.

SILVA, A. F. G. CÂNDIDO, A. S. SOUZA, V. H. G. Raciocínio proporcional: um estudo sobre as estratégias de estudantes de Pedagogia ao resolverem diferentes situações. **Acta Scientiae**, Canoas, v.20, n.1, p. 20-35, jan./fev. 2018.

SILVA, M. G.; GONÇALVES, C. C. Atividades de classificação envolvendo modelagem matemática na educação infantil: um relato de experiência. In: ENCONTRO PARANAENSE DE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7., 2016, Londrina. **Anais...** Londrina: SBEM, 2016.

SILVA, V. KLÜBER, T. E. Modelagem matemática nos anos iniciais do ensino fundamental: uma investigação imperativa. **Revista Eletrônica de Educação**, São Carlos, UFSCar, v. 6, n. 2, p. 228-249, nov. 2012. Disponível em:< <http://www.reveduc.ufscar.br>>. Acesso em: 14 ago. 2019.

SMOLE, K. C. S. **A matemática na educação infantil: a teoria das inteligências múltiplas na prática escolar.** Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 2000.

SOARES, M. A. S. **Proporcionalidade um conceito formador e unificador da matemática:** uma análise de materiais que expressam fases do currículo da educação básica. 2016. 250 f. Tese (Doutorado em Educação nas Ciências). Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul, Ijuí, 2016.

SOUZA, T. C.; LIMA, A. C. C. D. A linguagem matemática no cotidiano infantil. In: CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO EDUCERE, 11., 2013, Curitiba. **Anais...** Curitiba: PUC, 2013. p. 23893-23906.

SPINILLO, A. G. Raciocínio proporcional em crianças: Considerações acerca de alternativas educacionais. **Revista Pro-Posições**, Campinas, v. 5, n. 1, p. 109-114, 1994.

TORTOLA, E. **Configurações de modelagem matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental.** 2016. 306 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.

TORTOLA, E. **Os usos da linguagem em atividades de Modelagem Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental.** 168 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2012.

TORTOLA, E.; ALMEIDA, L. M. W. Um olhar sobre os usos da linguagem por alunos dos anos iniciais do ensino fundamental em atividades de modelagem matemática. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, Campo Mourão, v. 5, p. 83-105, 2016.

TORTOLA, E.; ALMEIDA, L. M. W. Reflexões a respeito do uso da modelagem matemática em aulas nos anos iniciais do Ensino Fundamental. **Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos**, Brasília, v. 94, n. 237, p. 619-642, maio/ago. 2013.

VAN DE WALLE, J. **Matemática no ensino fundamental:** formação de professores e aplicação em sala de aula. 6ª ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

VIANA, O. A.; MIRANDA, J. A. O raciocínio proporcional e as estratégias de resolução de problemas de valor omissivo e de comparação. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 11, n. 1, p. 194-213, jul. 2016. Disponível em: <<https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2016v11n1p194>>. Acesso em: 08 set. 2019.

WERNER, H. M. L. Secretaria de Estado da Educação. Superintendência de Educação. Diretoria de Políticas e Programas Educacionais Programa de Desenvolvimento Educacional – PDE. **O processo da construção do número, o lúdico e TICs como recursos metodológicos para criança com deficiência intelectual**. Curitiba: SEED / Paranaguá: FAFIP, 2008. (Cadernos PDE). Disponível em: <<http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/2443-6.pdf>>. Acesso em: 23 nov. 2019.

ZAMPIROLI, A. C.; KATO, L. A. Ensino de matemática na Educação Infantil: uma experiência por meio da modelagem matemática. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11., 2019, Belo Horizonte. **Anais...** Belo Horizonte: UFMG, 2019.



**APÊNDICES**

## APÊNDICE A – MODELO DE TERMO DE CONSENTIMENTO ASSINADO PELOS PAIS OU RESPONSÁVEIS

### TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (TCLE)

Prezados Pais:

Gostaríamos de convidar seu filho (a) ou a criança sob sua responsabilidade para participar da pesquisa que refere-se à **Modelagem matemática e raciocínio proporcional na Educação Infantil**, a ser realizada em sala de aula, no Centro Municipal de Educação Infantil Amor Perfeito [Avenida Manoel Nogueira, 1622 – (44) 3523-1837].

O objetivo da pesquisa é investigar o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática que envolvem raciocínio proporcional na Educação Infantil, além disso objetiva-se também: fomentar o uso da Modelagem Matemática como alternativa pedagógica na Educação Infantil; promover discussões a respeito das estratégias utilizadas pelos alunos para a resolução de situações-problema; identificar indícios de raciocínio proporcional durante o desenvolvimento de atividades de modelagem; refletir sobre o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática na Educação Infantil e sobre o raciocínio proporcional nesse contexto, divulgando os resultados por meio de um produto educacional (possivelmente um recurso digital).

A participação do seu filho (a) é muito importante e ela se daria da seguinte forma: na participação e realização das atividades propostas as quais, a partir destas, serão realizados gravação de vídeos, áudios, fotografias e registro escritos dos alunos. Esclarecemos que a participação de seu filho (a) é totalmente voluntária, podendo o(a) senhor(a) solicitar a recusa ou desistência de participação da criança a qualquer momento, sem que isto acarrete qualquer ônus ou prejuízo à criança. Esclarecemos, também, que as informações de seu filho (a) sob sua responsabilidade serão utilizadas somente para os fins desta pesquisa e serão tratadas com o mais absoluto sigilo e confidencialidade, de modo a preservar a identidade da criança. A utilização dos dados coletados servirá para a análise de indícios sobre raciocínio proporcional emergidos nas atividades de modelagem matemática, o qual será apresentado como publicações científicas: dissertação e artigos.

Esclarecemos ainda, que nem o(a) senhor(a) e nem a criança sob sua responsabilidade pagarão ou serão remunerados (as) pela participação.

Os benefícios esperados são de contribuir de forma significativa para a aprendizagem dos alunos, buscando por uma metodologia que abrange situações reais, colaborando para melhor compreensão dos conceitos estudados e instigando-os a ter diferentes raciocínios matemáticos.

Informamos que esta pesquisa atende e respeita os direitos previstos no Estatuto da Criança e do Adolescente- ECA, Lei Federal nº 8069 de 13 de julho de 1990, sendo eles: à vida, à saúde, à alimentação, à educação, ao esporte, ao lazer, à profissionalização, à cultura, à dignidade, ao respeito, à liberdade e à convivência familiar e comunitária. Garantimos também que será atendido o Artigo 18 do ECA: “É dever de todos velar pela dignidade da criança e do adolescente, pondo-os a salvo de qualquer tratamento desumano, violento, aterrorizante, vexatório ou constrangedor”.

Caso o(a) senhor(a) tenha dúvidas ou necessite de maiores esclarecimentos poderá nos contatar Letícia Coutinho, pelos telefones: (44) 3810-1140, (44) 99925-0602, via e-mail: [let\\_coutinho@hotmail.com](mailto:let_coutinho@hotmail.com).

Você pode assinalar o campo a seguir, para receber o resultado desta pesquisa, caso seja de seu interesse:

( ) quero receber os resultados da pesquisa (e-mail para envio: \_\_\_\_\_)

( ) não quero receber os resultados da pesquisa

Este termo deverá ser preenchido em duas vias de igual teor, sendo uma delas devidamente preenchida, assinada e entregue ao (à) senhor(a) .

### CONSENTIMENTO

Eu declaro ter conhecimento das informações contidas neste documento e ter recebido respostas claras às minhas questões a propósito da minha participação direta (ou indireta) na pesquisa e, adicionalmente, declaro ter compreendido o objetivo, a natureza, os riscos e benefícios deste estudo.

Após reflexão e um tempo razoável, eu decidi, livre e voluntariamente, autorizar meu (a) filho (a) a participar deste estudo. Estou consciente que posso deixar o projeto a qualquer momento, sem nenhum prejuízo.

Nome completo do(a) aluno(a): \_\_\_\_\_

Data de Nascimento: \_\_\_\_\_

Responsável pelo (a) aluno (a): \_\_\_\_\_

RG: \_\_\_\_\_ Telefone: ( ) \_\_\_\_\_

Endereço: \_\_\_\_\_

CEP: \_\_\_\_\_ Cidade: \_\_\_\_\_ Estado: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_  
Assinatura do Responsável

Data: \_\_\_/\_\_\_/\_\_\_

Eu declaro ter apresentado os objetivos do estudo, explicando sua natureza, riscos e benefícios e ter tirado as dúvidas da família.

\_\_\_\_\_  
Assinatura da pesquisadora

Data: \_\_\_/\_\_\_/\_\_\_

**Pesquisadora:** Leticia Coutinho – aluna do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Campus Londrina.

**Orientador:** Prof. Dr. Emerson Tortola – Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Câmpus Toledo.

## APÊNDICE B – CAPA E LINK PARA O PRODUTO EDUCACIONAL



O produto educacional está disponível no seguinte endereço: <https://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/>. Depois de clicar no link, digite o título do produto ou o nome da autora ao lado da lupa em: “buscar no repositório”.

## APÊNDICE C – DESCRIÇÃO DA ATIVIDADE SOBRE BOLHAS DE SABÃO

Atualmente muitos brinquedos são industrializados, privando as crianças da sensação de criar, desta forma, nos propusemos a estudar com os alunos o tema “Bolhas de Sabão”, com o objetivo de resgatar e inseri-la na infância das crianças do século XXI.

A atividade foi desenvolvida de acordo com o segundo momento de familiarização de uma atividade de Modelagem Matemática segundo Almeida, Silva e Vertuan (2012) e realizada em dois ambientes diferentes: a sala de aula para confeccionar a receita e o solário do parque para as crianças brincar com as bolhas de sabão.

Em sala de aula, fizemos uma roda de conversa com os 12 alunos que estavam presentes em sala de aula. A intenção dessa conversa inicial era obter informações sobre o que os alunos conheciam sobre a brincadeira “Bolhas de sabão”. Nesse momento, os alunos fizeram a exposição de seus conhecimentos e, com base neles a professora pesquisadora iniciou as discussões sobre como fazer a receita para obter as bolhas de sabão. Para isso, apresentou os três ingredientes (água, detergente e glicerina) e colocou cada um deles em um copo descartável, transparente conforme mostra a Figura a seguir:

Copos para colocar cada ingrediente



**Fonte:** Dos autores

A receita que utilizamos para fazer as bolhas de sabão foi a seguinte:

---

### *Ingredientes da Bolha de Sabão*

---

- 1 copo (200ml) transparente quase completo de água;
- 3 colheres de sopa de detergente concentrado;
- 1 colher de chá de glicerina ou glicerol vegetal.

**Fonte:** Adaptada pelos autores. Receita original disponível em:  
<https://www.receitasnestle.com.br/receitas/brigadeiro-nescau-20>

Após conhecer os ingredientes e quantidades, a professora pesquisadora fez alguns questionamentos para que os alunos pudessem fazer comparações:

- ✓ *Qual copo tem mais líquido?*
- ✓ *Quanto a mais?*

Todas as discussões foram feitas a partir das marcações nos copos, explorando aspectos do raciocínio proporcional. A Figura a seguir, mostra o momento em que estávamos comparando a quantidade de água e detergente e verificamos que a quantidade de água é seis vezes mais do que a de detergente, pois foi preciso colocar 6 vezes a quantidade de detergente para que a marcação feita no copo à direita ficasse igual a marcação do copo à esquerda.

#### Comparação entre a água e detergente



**Fonte:** Dos autores

Depois de fazermos as comparações, misturamos todos os ingredientes e reservamos essa mistura para que pudéssemos confeccionar um cartaz para registrar as quantidades utilizadas. Para isso, os alunos foram organizados em dois grupos e como um aluno não participou deste momento, a sala ficou organizada da seguinte forma: um grupo com seis alunos e o outro com cinco alunos. A Figura a seguir mostra o momento em que os alunos confeccionaram os cartazes.

#### Confeção dos cartazes



**Fonte:** Dos autores

Após a confecção dos cartazes, discutimos sobre as quantidades de cada ingrediente e em seguida, distribuímos um copo descartável para cada aluno. Nesse copo colocamos a mistura e ofertamos um soprador (canudo ou palito de sorvete com argolinha da garrafa descartável) para ser utilizados como brinquedo, conforme mostra a Figura a seguir.

#### Brinquedo para fazer bolhas de sabão



**Fonte:** Dos autores

No solário próximo ao parque, os alunos testaram a receita e brincaram livremente. Nesse momento, os alunos fizeram bolhas de sabão e perceberam os diferentes tamanhos das bolhas de sabão que foram formadas.

Consideramos que a brincadeira “Bolhas de sabão” possibilitou o desenvolvimento da coordenação visual e motora, podendo ser configurada como uma boa oportunidade para explorar e desenvolver conceitos matemáticos, particularmente associados ao raciocínio proporcional.

## APÊNDICE D – DESCRIÇÃO DA ATIVIDADE SOBRE ALIMENTAÇÃO SAUDÁVEL

A atividade sobre alimentação saudável foi desenvolvida de acordo com o primeiro momento de familiarização de uma atividade de Modelagem Matemática segundo Almeida, Silva e Vertuan (2012).

Na parte da manhã, foi realizada em sala de aula e iniciada por meio de uma roda de conversa, em que conhecemos o que os alunos mais gostam de comer, discutimos quais desses são saudáveis e quais não são, conversamos sobre a alimentação realizada na escola, quais tipos de alimentos são ofertados, quais pratos eles mais gostam etc. Em seguida, apresentamos diversos alimentos conforme mostra a Figura a seguir e explicamos quais os benefícios de cada um deles.

### Exploração dos alimentos



**Fonte:** Dos autores

Depois de explorar os alimentos, foi discutido sobre quais daqueles alimentos estavam inclusos nas refeições que os alunos faziam no Cmei, se eles sabiam quem é a pessoa que planejava o cardápio e quem fazia a comida para eles. Em seguida, apresentamos a nutricionista e as cozinheiras, momento em que a nutricionista falou sobre a importância de ter um prato com vários tipos de alimentos e dos cuidados de higiene que as cozinheiras têm ao preparar as refeições, e as cozinheiras falaram sobre o cardápio do dia.



Conversamos também sobre os alimentos que podemos comer cru, os que precisam cozinhar, os que podemos comer com casca, destacando as vitaminas que cada alimento tem e qual grupo ele pertence: carboidratos, proteínas, verduras e legumes, grãos e leguminosas e as gorduras boas. Discutimos sobre o alimento que deve ter em maior quantidade no prato, qual deve ter menos, ou seja, como podemos organizar esse prato contemplando vários tipos de alimentos.

Em seguida, colocamos todos os alimentos em algumas carteiras e propomos aos alunos uma atividade prática, onde eles teriam que organizar esses alimentos em grupos, sendo assim usamos bambolês de cores diferentes para representar cada grupo, conforme mostra a Figura a seguir.

#### Organização dos alunos em grupos



**Fonte:** Dos autores

Na parte da tarde, fizemos discussões sobre algumas combinações dos alimentos em um prato, explorando as porções de cada grupo alimentar nas refeições das crianças. Em seguida, disponibilizamos imagens de alimentos para que os alunos pudessem organizá-las em um prato, para que eles compreendessem as quantidades que precisavam comer de cada grupo alimentar, conforme um exemplo mostrado na Figura a seguir.

Prato elaborado pelo aluno A3



**Fonte:** Dos autores

Por fim, a professora pesquisadora solicitou aos alunos que representassem o prato que eles elaboraram usando massinha de modelar usando as mesmas cores dos bambolês, já que cada cor representava um grupo de alimentos, ou seja, os pratos deveriam conter as cores amarela, azul, verde, vermelha e preta, enfim todos teriam um prato colorido.