UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

THAIS MAYA KOGA

O FAZER MODELAGEM MATEMÁTICA EM UM CURSO DE LICENCIATURA EM QUÍMICA: ANÁLISE DE ESTRATÉGIAS E AÇÕES

DISSERTAÇÃO

LONDRINA
2020

THAIS MAYA KOGA

O FAZER MODELAGEM MATEMÁTICA EM UM CURSO DE LICENCIATURA EM QUÍMICA: ANÁLISE DE ESTRATÉGIAS E AÇÕES

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre.

Orientadora: Profa. Dra. Karina Alessandra Pessoa da Silva

LONDRINA

2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Biblioteca UTFPR - Câmpus Londrina

K78f Koga, Thais Maya
O fazer modelagem matemática em um curso de licenciatura em química: análise de estratégias e ações / Thais Maya Koga. - Londrina, 2020.
131 f. : il.; 30 cm.

Orientadora: Profa. Dra. Karina Alessandra Pessoa da Silva.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática. Londrina, 2020.
Bibliografia: 122-129.

1. Modelos matemáticos. 2. Semiótica. 3. Fenomenologia. 4. Heurística. 5. Matemática - Estudo e ensino. I. Silva, Karina Alessandra Pessoa da, orient. II. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. III. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática. IV. Título.

CDD: 510.7

Ficha catalográfica elaborada por Cristina Benedeti Guilhem - CRB: 9/911

TERMO DE APROVAÇÃO

"O FAZER MODELAGEM MATEMÁTICA EM UM CURSO DE LICENCIATURA EM QUÍMICA: ANÁLISE DE ESTRATÉGIAS E AÇÕES"

por

Thais Maya Koga

Dissertação de Mestrado e o seu produto educacional **"ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA PARA LICENCIATURA EM QUÍMICA"**, apresentados no dia 29 de maio de 2020, como requisito parcial para a obtenção do título de **MESTRE EM ENSINO DE MATEMÁTICA**, pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Câmpus Londrina e Cornélio Procópio. O(A) mestrando(a) foi arguido(a) pela Banca Examinadora composta pelos professores abaixo assinados. Após deliberação, a Banca Examinadora considerou o trabalho **APROVADO** (Aprovado ou Reprovado).

Prof(a). Dr(a). Karina Alessandra Pessôa da Silva (UTFPR - Londrina)
Orientador(a)

Prof(a). Dr(a). Andresa Maria Justulin (UTFPR – Cornélio Procópio)
Membro Titular

Prof(a). Dr(a). Lourdes Maria Werle de Almeida (UEL - Londrina)
Membro Titular

Profa. Dra. Marcele Tavares
Coordenadora do Programa de
Mestrado Profissional em Ensino de Matemática
UTFPR Câmpus Londrina/ Cornélio Procópio

A folha de aprovação assinada encontra-se arquivada na secretaria do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática.

Aos meus pais, Alice e Augusto, por sempre acreditarem em mim e por terem abdicado de suas vidas em prol das realizações e da felicidade de suas filhas.

À minha irmã Talita, por sua parceria e preocupação, seu auxilio, carinho e incentivo.

Aos meus tios Leonice e Pedro que sempre torceram e rezaram por mim.

À minha amada filha Ágatha, por todo amor, incentivo, apoio e compreensão. Nada disso teria sentido se você não existisse em minha vida.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, pelo dom da vida e por me permitir realizar mais este sonho. Obrigada por me permitir aprender, errar, acertar e crescer, por sua eterna compreensão e infinito amor, que me abençoou com forças e luz para não desistir e principalmente pela graça de pertencer a uma família tão especial.

Agradeço à minha família, mãe Alice e pai Augusto, por todas as lições de amor, companheirismo, amizade, dedicação e compreensão. Obrigada pela educação que me deram e pelo incentivo aos estudos, por doar o seu tempo e paciência para me auxiliar na educação da minha filha. Sinto-me orgulhosa e privilegiada por ter pais tão maravilhosos.

Agradeço à minha irmã querida Talita, sempre pronta a me ajudar e acompanhar em tudo, com muito carinho e compreensão até altas horas conferindo figuras, quadros e sumário. Obrigada por suprir minha ausência nos “deveres de mãe” na escola e em outros momentos por mim perdidos.

Agradeço à minha amada filha Ágatha, pelo seu sorriso, por saber me fazer feliz e me dar motivos para ser uma pessoa melhor. Obrigada por compreender os momentos de ausência, e todo amor incondicional.

Agradeço aos meus tios Leonice e Pedro que sempre acreditaram e me incentivaram a estudar, agradeço as orações e o apoio na caminhada.

Agradeço à professora Karina Alessandra Pessoa da Silva, pelo privilégio de uma orientação atenciosa, pelo profissionalismo e pela dedicação tão importantes para o meu crescimento. Obrigada pelo tempo em todas as vezes que nos reunimos, por todos os ensinamentos, por me apoiar a participar e me atualizar em eventos de Educação Matemática. Obrigada por acreditar em mim e por tornar possível a realização deste sonho, tenho certeza que não chegaria neste ponto sem o seu apoio e carinho.

Agradeço a honra de ter como banca examinadora, a professora Andresa Maria Justulin e a Professora Lourdes Maria Werle de Almeida, que tão gentilmente aceitaram participar, doaram seu tempo e conhecimento para a construção desta dissertação. O que aumentou a minha admiração, respeito e carinho pelas profissionais e pessoas maravilhosas que são. Muito obrigada.

Agradeço a minha gerente executiva Márcia Dallagnol, e Técnica Graziela Meireles pela confiança em meu trabalho, pelo apoio aos estudos do mestrado. Agradeço também as amigas que trabalham comigo, Mariana Beatriz, que socorreu e acalmou quando o texto de qualificação não queria ser formatado e Thais Ferreirinha, obrigada pelo incentivo e apoio cotidiano de vocês, com toda certeza fortaleceu minha caminhada até aqui.

Quero agradecer aos alunos da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I - 2018, da turma de Licenciatura em Química, por fazerem com que esta pesquisa fosse possível. Obrigada por dividirem comigo momentos importantes da formação de vocês.

Agradeço aos queridos amigos, Joice Pierobon, que me inspirou; Paulo Sérgio que me apoiou e Camila Ceron, que me fortaleceu, animou e dividiu momentos de lazer e aprendizagem. Além da parceria e incentivo, vocês fizeram das idas e voltas para UTFPR menos cansativas e mais agradáveis.

Obrigada professora Adriana Helena Borssoi e professora Elaine Cristina Ferruzzi por todas as discussões, reflexões e contribuições no grupo GEPMIT, que me permitiram atualizar os conhecimentos e ampliaram meus horizontes enquanto pesquisadora e professora. E a todos os meus colegas do grupo, em especial Rodrigo, Rafael, Arthur, Paulo, Leandro, Andreia, Robson, Luana e João pela companhia, conversas e risadas das sextas-feiras e dos jantares de eventos destes dois anos e meio.

Agradeço as minhas amigas e parceiras de longa data, Alessandra Fernandes e Alessandra Vila Verde, pelas risadas, sugestões e momentos de descontração.

Enfim, quero agradecer a todos aqueles que confiaram em mim, que de certa forma me incentivaram e contribuíram desde o processo seletivo, passando pela aprovação até a conclusão do Mestrado, foi um longo caminho percorrido. Por isso, o meu muito obrigada!

“Tenho a impressão de ter sido uma criança brincando à beira-mar, divertindo-me em descobrir uma pedrinha mais lisa ou uma concha mais bonita que as outras, enquanto o imenso oceano de verdade continua misterioso diante de meus olhos”.

(Isaac Newton)

KOGA, Thais Maya. **O fazer Modelagem Matemática em um curso de Licenciatura em Química: análise de estratégias e ações**. 2020. 131f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Londrina, 2020.

RESUMO

Nesta pesquisa apresentamos resultados para o objeto que nos propusemos a investigar: relações entre Estratégias Heurísticas no desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática e as categorias fenomenológicas da Semiótica Peirceana. Para tal, assumimos os pressupostos teóricos da Modelagem Matemática como alternativa pedagógica de Almeida, Silva e Vertuan (2012) e da Semiótica peirceana, em particular, as categorizações fenomenológicas no que se refere à análise de como o fenômeno aparece à mente dos estudantes de Licenciatura em Química. Com isso, trazemos uma interpretação semiótica do fazer Modelagem Matemática por alunos ao mostrarem saber como a situação-problema foi resolvida de maneira autônoma. Para tanto, desenvolvemos atividades de Modelagem Matemática na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I do curso de Licenciatura em Química da UTFPR. Sendo realizadas atividades de primeiro, segundo e de terceiro momentos de familiarização, essas atividades colaboraram com o desenvolvimento da pesquisa qualitativa interpretativa que resultou no produto educacional intitulado: Atividades de Modelagem Matemática para Licenciatura em Química. A análise dos signos produzidos e utilizados pelos estudantes nos permite inferir que há ações que são primeiras na fase de inteiração e requerem Estratégias Heurísticas mais gerais como a organização do material, além de ações segundas, quando se tem a corporificação da ideia e, portanto, a transformação da linguagem natural para a matemática evoca principalmente a estratégia “verifique aspectos funcionais” e finalmente ações terceiras, de ligação entre a qualidade e o fato, no desenvolvimento do modelo, interpretação e validação de resultados. Nessa categoria identificamos mais estratégias que nas demais, permitindo verificar uma aproximação entre aquilo que o professor explica e o que o aluno compreende.

Palavras-chave: Educação Matemática. Modelagem Matemática. Semiótica Peirceana. Categorias Fenomenológicas. Estratégias Heurísticas.

KOGA, Thais Maya. **Doing Mathematical Modelling in a Chemistry course: analysis of strategies and actions.** 2020. 131f. Dissertation Program of After-Degree in Mathematics Teaching - Federal Technological University of Parana. Londrina, 2020.

ABSTRACT

This study presents results concerning the analysed subject: relations between Heuristic Strategies in the development of Mathematical Modelling activities and the phenomenological categories of Peircean Semiotics. To that end, theoretical assumptions of Mathematical Modelling were used as a pedagogical alternative proposed by Almeida, Silva and Vertuan (2012), as well as the Peircean Semiotics, more particularly, the phenomenological categories regarding the analysis of how this phenomenon is perceived by undergraduate Chemistry students. Therefore, this work brings a semiotic interpretation of students' Mathematical Modelling doing process by letting them show how the situational problem was solved in an autonomous way. In order to do so, Mathematical Modelling activities were created in the discipline of Differential and Integral Calculus I of the UTFPR Chemistry course. Upon doing activities of first, second and third moments of familiarizing, these activities collaborated with the development of the interpretative qualitative research, which resulted in the educational product entitled: Mathematical Modelling Activities for Bachelor's Degree in Teaching of Chemistry. The analysis of the signs produced and used by students allows to infer that there are first actions in the interaction phase and require broader Heuristic Strategies, such as material organization, along with second actions, when there is the embodiment of an idea and, thus, the transformation from natural language into mathematics, which mainly evokes the strategy "verify functional aspects", and finally third actions, the link between quality and fact, in the development of the model, interpretation and validation of results. Compared to the others, the third category elicits more strategies, which enables an approximation between what the teacher explains and what the student fathoms.

Keywords: Mathematics Education. Mathematical Modelling. Peircean Semiotics. Phenomenological Categories. Heuristic Strategies.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

De forma geral, as pesquisas que norteiam a Educação Matemática buscam estreitar relações entre teoria e prática durante o processo de ensino e aprendizagem. Isso se deve ao fato de que a Matemática está diretamente relacionada com o desenvolvimento dos alicerces intelectuais que possibilitam, aos estudantes, o entendimento do mundo.

Todavia, Justulin (2014, p. 14) adverte que “O ensino de Matemática, nas escolas ainda hoje, parece distanciar-se de sua própria origem”, já que segundo a autora os alunos são submetidos à teoria matemática dissociada de sua aplicação, o que resulta em resolução por técnicas operatórias sem o desenvolvimento do pensamento matemático. Como uma consequência deste ensino mecanizado, Garzella (2013) apresenta o cenário do Ensino Superior com elevados índices de evasão, reprovação e baixo rendimento na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral das universidades brasileiras.

Freitas (2008) afirma que essa consequência pode ser de natureza cognitiva, didática ou epistemológica. Isso implica dizer, conforme o mesmo autor, que possivelmente os alunos tenham dificuldades de compreender as complexidades do Cálculo ou a metodologia de ensino não é a mais adequada, ou ainda, que as deficiências são anteriores ao ensino de Cálculo, isto é, em conteúdos básicos fundamentais que estruturam a base da disciplina.

Tal fato despertou uma inquietação, uma necessidade de investigar como alunos da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral entendem a Matemática quando a metodologia utilizada busca romper a barreira do método tradicional de ensino, estabelecendo, não apenas como uma contraposição de métodos, mas principalmente uma forma de se adequar o ensino da Matemática ao contexto atual, possibilitando a participação ativa dos estudantes.

Com isso, elencamos a Modelagem Matemática como alternativa pedagógica na intenção de estreitar as relações entre teoria e prática durante o processo de ensino e aprendizagem. Conforme os pressupostos de Almeida, Silva e Vertuan (2012), entendemos a Modelagem Matemática como uma tendência da Educação Matemática que possibilita uma abordagem matemática para situações-problema, não essencialmente matemáticas. Essa alternativa pedagógica está em consonância com a afirmação de Almeida, Fatori e Souza (2007, p. 48) de que "as aulas de Cálculo devem favorecer também a compreensão dos conceitos, a relação com a realidade, o uso de computadores e o trabalho em equipe".

No Brasil, pesquisas que articulam Modelagem Matemática e ensino de Cálculo têm sido desenvolvidas (CABRAL; CATAPANI, 2003; ALMEIDA; BRITO, 2005; ALMEIDA; FATORI; SOUZA, 2007; GARZELLA, 2013; ALMEIDA; SILVA, 2015; ALMEIDA; SILVA, 2017; VERTUAN; SILVA; BORSSOI, 2017; ALMEIDA; SILVA, 2018; SILVA; VERTUAN, 2018). Em particular o Grupo de Estudos e Pesquisas em Modelagem, Investigação e Tecnologia (GEPMIT)[1] tem empreendido esforços, desde 2016, no que concerne articular Modelagem Matemática e ensino de Cálculo (BORSSOI; SILVA; FERRUZI, 2016; SILVA, 2017a; SILVA, 2017b; SILVA, 2018).

Entretanto, nossa pesquisa traz como diferencial o estudo realizado por George Pólya a respeito das Estratégias Heurísticas[2], que são apresentadas como métodos de organização de ideias para a resolução de problemas com maior facilidade e autonomia. Assim como Stender e Kaiser (2017), Stender (2017, 2018, 2019), entendemos que as Estratégias Heurísticas são um importante recurso para o desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática por colaborarem com o processo de ensino e de aprendizagem no intuito de encorajar os alunos a realizar novas descobertas.

Pesquisas realizadas por Stender (2017, 2018) revelam que os encaminhamentos de atividades de Modelagem Matemática estão regados de Estratégias Heurísticas. O autor baseia-se no método de resolução de problemas de Pólya, no que diz respeito às estratégias e procedimentos para recordar conceitos, relacionar elementos entre si, além de habilidades que são utilizadas em uma determinada ordem.

---

[1] https://sites.google.com/view/gepmit. Acesso em: 03/11/2019.

[2] Segundo o dicionário online de Língua Portuguesa, a palavra heurística possui uma origem questionável, talvez do francês *heuristique:* relacionada com a ciência dedicada à descoberta de fatos; usado para descobrir ou investigar algo; diz-se de uma hipótese de trabalho adotada provisoriamente, método pedagógico que leva o aluno a aprender por si mesmo.

Essas estratégias, segundo Pólya (1945) exigem uma compreensão da tarefa, concepção de plano de execução, a execução propriamente dita e uma análise que nos permita determinar se alcançamos o nosso objetivo.

As Estratégias Heurísticas impedem que as resoluções aconteçam de maneira mecânica, definidas e fechadas, já que expondo os alunos a atividades de problematização, deles são requeridos diálogos e reflexões na busca de uma solução, corroborando em resultados positivos no processo de ensino e de aprendizagem.

De forma geral, ao utilizarem de Estratégias Heurísticas no desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática os alunos se valem de ações que podem ser primeiras, segundas e terceiras. Almeida, Silva e Vertuan (2011, p. 12) associam ações presentes em atividades de Modelagem Matemática a categorias fenomenológicas da Semiótica Peirceana. Para os autores:

> Como atividade de investigação, o desenvolvimento de uma atividade de Modelagem Matemática diz respeito a uma 'qualidade' (um fenômeno), uma 'reação' (a identificação de um problema e a definição de metas de resolução) e uma 'representação' (associada à solução para o problema identificado). Neste sentido podemos associar este desenvolvimento às categorias fenomenológicas estabelecidas por Peirce (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2011, p. 12).

A Semiótica Peirceana tem se mostrado como um quadro teórico que subsidia análises de atividades de Modelagem Matemática. Os integrantes do GEPMIT tem se fundamentado em pesquisas desenvolvidas pelo Grupo de Pesquisas sobre Modelagem Matemática e Educação Matemática (GRUPEMAT)[3] para desenvolver alguns estudos (SILVA; ARAKI; BORSSOI, 2018; ARAKI; SILVA, 2019; GÓIS; SILVA; DALTO, 2019; GÓIS, 2019; KOGA; SILVA; DALTO, 2019 e KOGA; SILVA, 2019). Nossa investigação está ancorada na Semiótica Peirceana, considerando sua categorização fenomenológica, uma vez que a teoria dos signos de Peirce (1972) fundamenta-se na ideia de que a cognição, o pensamento e até mesmo o ser humano possuem natureza essencialmente semiótica.

O termo signo deriva do latim "*signum*", do grego, o termo "*semeion"*, que vem de "*secnon*", raiz do verbo cortar – extrair parte de, pois, o signo era entendido como algo que se referia a uma coisa completa, maior e da qual ele

---

[3] http://www.uel.br/grupo-pesquisa/grupemat/index.html. Acesso em: 03/11/2019.

era extraído. Para Peirce (1972, p. 94) um signo “é aquilo que, sob certo aspecto ou modo representa algo para alguém”. Com isso, podemos inferir que na teoria de Peirce, o signo tem um efeito sobre o sujeito e o contexto em que está inserido.

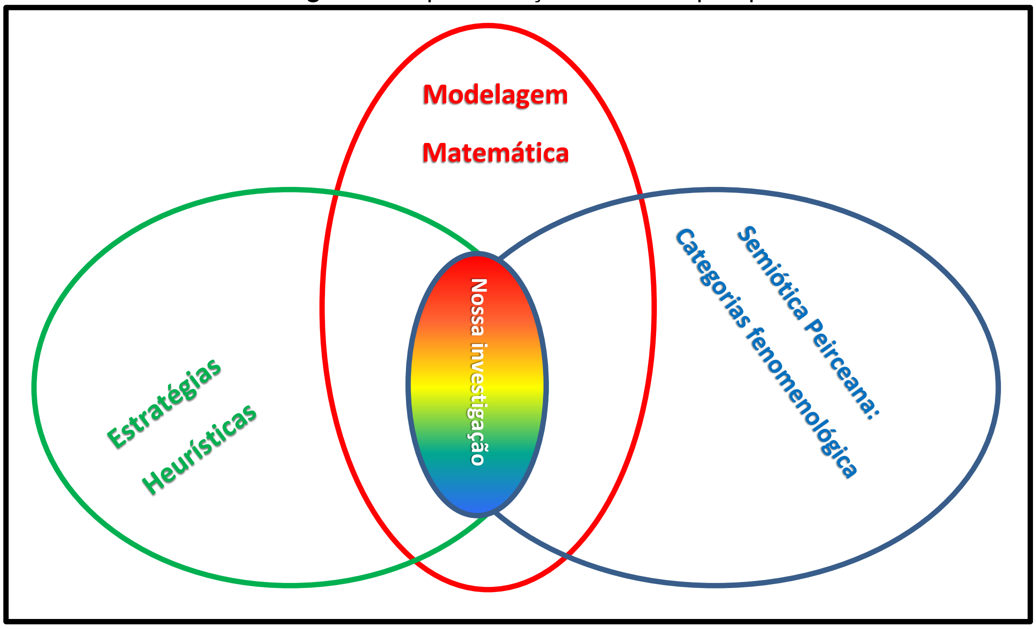
A análise de signo, assumida nesta pesquisa, é pautada na categorização fenomenológica de Peirce (1972) – Primeiridade, Secundidade e Terceiridade.

Em suma, a Primeiridade diz respeito ao acaso, trata-se da primeira percepção do objeto, para D’Amore (2015) é uma consciência imediata tal qual é. Pura qualidade de ser e de sentir. A Secundidade está relacionada à experiência, às ideias de dependência, determinação, dualidade, ação e reação, é a associação de uma matéria à qualidade, segundo Santaella (2012) a factualidade (Secundidade) está nessa corporificação material. Ainda para esta autora, a Terceiridade aproxima um primeiro e um segundo numa síntese intelectual, refere-se à generalidade, continuidade e crescimento, corresponde ao pensamento em signo, por meio do qual representamos e interpretamos o mundo.

Assim, fundamentadas em Almeida, Silva e Vertuan (2011) que afirmam que no desenvolvimento de uma atividade de Modelagem Matemática há ações que são primeiras outras que são segundas e requerem dos estudantes a formulação mental do problema e principalmente ações de mediação, consideradas terceiras, intentamos identificar as Estratégias Heurísticas pelos signos produzidos ou utilizados pelos alunos do curso de Licenciatura em Química, no desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática. Isso porque entendemos que por meio das categorias fenomenológicas e das Estratégias Heurísticas é possível inferirmos sobre o fazer Modelagem Matemática pelos sujeitos investigados.

Neste sentido, o interesse central de nossa investigação está nas intersecções entre Modelagem Matemática, Estratégias Heurísticas e Semiótica Peirceana (Figura 1).

Figura 1 - Apresentação de nossa pesquisa



Fonte: A autora.

Levando em consideração esses aportes teóricos, o nosso objetivo de pesquisa consiste em **apresentar relações entre Estratégias Heurísticas no desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática e as categorias fenomenológicas da Semiótica Peirceana.**

Com vistas a apresentar reflexões sobre este objetivo de pesquisa, orientamos as análises por questões específicas:

- Que signos são produzidos pelos alunos no desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática?
- Como as categorias fenomenológicas de Peirce se fazem presentes nas fases de uma atividade de Modelagem Matemática?
- Como os signos influenciam e ao mesmo tempo revelam as Estratégias Heurísticas em atividades de Modelagem Matemática?

Para isso, analisamos três atividades de Modelagem Matemática, em que os dados foram coletados pelos próprios sujeitos da pesquisa. De acordo com Silva, Almeida e Gerôlomo (2011) para que o aluno aprenda a desenvolver atividades de modelagem é necessário que "coloque a mão na massa", investigue e analise a situação inicial para então buscar uma solução.

Por conseguinte, tendo em vista o objetivo desta pesquisa, desenvolvemos um estudo na perspectiva qualitativa interpretativa, uma vez que nossos resultados surgiram a partir da compreensão e das interpretações dos signos produzidos ou utilizados pelos sujeitos da pesquisa.

Para tanto, organizamos o texto em quatro capítulos além desta Introdução, Considerações Finais, Referências e Apêndices.

Na Introdução, apresentamos aspectos concernentes aos propósitos desta investigação, além da justificativa, problemática em estudo e a estrutura do texto.

Em seguida, versamos a respeito da Modelagem Matemática como alternativa pedagógica, além de apresentar outras perspectivas a partir das quais a Modelagem tem sido utilizada em sala de aula, seus momentos de familiarização. Também apresentamos como as Estratégias Heurísticas são identificadas e colaboram com a autonomia do aluno.

No segundo capítulo abordamos a Semiótica, destacando a Semiótica de Peirce, as suas categorias fenomenológicas, além de dissertar a respeito de sua importância no âmbito da Educação Matemática.

No capítulo três estão delineados os aspectos metodológicos de nossa pesquisa, em que abordamos a caracterização, a contextualização e articulações existentes entre Modelagem Matemática e Semiótica Peirceana.

A análise de dados é apresentada no quarto capítulo, o qual é constituído por duas seções. Na primeira - Análises Específicas de cada uma das atividades, descrevemos e analisamos três atividades de Modelagem Matemática e na segunda – Análise Global dessas atividades, a fim de buscar relações entre Estratégias Heurísticas e as Categorias fenomenológicas da Semiótica Peirceana.

Nas Considerações Finais, elucidamos nossas reflexões acerca do estudo desenvolvido e apontamos uma sugestão para futuras pesquisas.

Finalizamos com as referências utilizadas na construção do texto.

CAPÍTULO 1
MODELAGEM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

INTRODUÇÃO

Neste capítulo dissertamos a respeito da Modelagem Matemática no contexto da Educação Matemática. Iniciamos com a apresentação do nosso entendimento sobre Modelagem Matemática como alternativa pedagógica, complementando com a apresentação dos momentos de familiarização dos alunos com atividades de Modelagem Matemática. Em seguida, abordamos as Estratégias Heurísticas utilizadas no desenvolvimento das mesmas.

1.1 MODELAGEM MATEMÁTICA COMO ALTERNATIVA PEDAGÓGICA

Para Biembengut e Hein (2005), a Matemática e a realidade são dois conjuntos disjuntos e a Modelagem é a ponte de ligação que os permitem interagir. Uma vez que é uma alternativa que possibilita aos alunos criar, construir, analisar, estabelecer relações entre conteúdos matemáticos e a sua vivência. Conforme Bassanezi (2002, p. 24): "A modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações de realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual".

Barbosa (2001) afirma que o registro histórico do desenvolvimento da Modelagem Matemática internacional e nacionalmente data do final de 1970, com as contribuições de matemáticos e pesquisadores advindos da Matemática Aplicada. Tais contribuições culminaram no desenvolvimento de uma nova tendência metodológica, conforme Blum e Niss (1991), que intuiu formular, modelar e resolver situações-problema decorrentes de situações cotidianas ou de situações relacionadas as outras áreas do conhecimento. Neste sentido, a realização da *Internacional Conferences on the teaching of Mathematical Modelling and Aplication* (ICTMA) em 1983, que possibilitou incentivar a pesquisa, o ensino e a prática da Modelagem Matemática, acelerou o crescimento de materiais de estudos e as produções acadêmicas possibilitando aos alunos desenvolver estratégias para a resolução dos problemas e assim motivar o aprendizado contínuo.

No cenário internacional, conforme pesquisa realizada por Stillman (2019), notamos que na Modelagem Matemática e aplicações na pesquisa educacional, existem diferentes linhas analíticas que estabelecem conceitos e categorizações interpretativas. As linhas teóricas de investigação relatadas pela autora são: Modelagem prescritiva – descreve ou prevê como algo que realmente vai funcionar; Ciclos de Modelagem – projetar duas tarefas semelhantes para que uma auxilie no progresso de outra; Competências de Modelagem – objetiva desenvolver as competências necessárias ou desejadas para progredir a Modelagem e Metacognição antecipada – diz respeito à avaliação do modelo. Tais linhas de pesquisa estão presentes em diversos países da Europa e da Ásia, nos quais a Modelagem Matemática é empreendida na sala de aula.

No Brasil nos deparamos com diferentes concepções de Modelagem Matemática enquanto uma prática educativa no contexto da Educação Matemática aceitas/praticadas pela comunidade acadêmica. Burak e Klüber (2008) apresentam: a de Burak (1987), que direciona suas investigações em modelagem para a Educação Básica; a de Barbosa (2001), que a concebe como um ambiente de aprendizagem; Bassanezi (2002) e Biembengut (1990, 1999), como um método de pesquisa, com algumas variações, para o ensino e para a aprendizagem inspirado na Matemática Aplicada; para Caldeira (2004), é um sistema de ensino e de aprendizagem e Almeida (2002), aborda a Modelagem Matemática em sala de aula como uma alternativa pedagógica para a construção do conhecimento.

Em face de tantas linhas teóricas e mesmo concepções se faz necessário expor o nosso entendimento a respeito dessa possibilidade didática para a aula de Matemática. Para nós, a Modelagem pode ser entendida como uma alternativa pedagógica que, segundo Almeida e Dias (2004), concerne na exploração de situações da vida real, na qual se aplica matemática a fim de potencializar os processos de ensino e aprendizagem, uma vez que se apresenta como uma forma de tirar o aluno da zona de conforto e despertar sua atenção para a criação de um conhecimento mais crítico em relação aos conteúdos matemáticos. Além disso, exige do professor conhecimentos matemáticos e extramatemáticos, já que a orientação é mais aberta e a avaliação mais complexa conforme salientam Blum et al. (2007).

Nas atividades de Modelagem Matemática são abordadas situações desafiadoras, sendo de responsabilidade do aluno, orientado pelo professor, utilizar conhecimentos anteriores, revisá-los, modificá-los, rejeitá-los, complementá-los e então redefini-los para uma situação desejada. Almeida, Silva e Vertuan (2012, p. 12) explicam que:

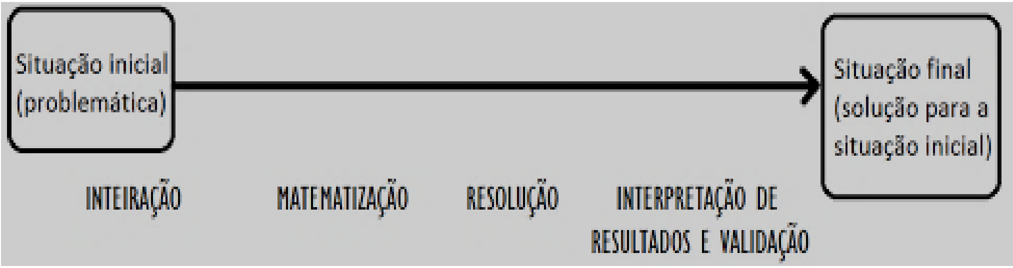
> [...] uma atividade de Modelagem Matemática pode ser descrita em termos de uma situação inicial (problemática), de uma situação final desejada (que representa uma solução para situação final) e de um conjunto de procedimentos e conceitos necessários para passar da situação inicial para a situação final.

Portanto, o aprendizado não decorre apenas da teoria matemática ou pela solução apresentada, mas pelas escolhas na matematização, que segundo Almeida (2018) dependem da adequação à situação-problema analisada e a outras tentativas com erros e acertos no encaminhamento da atividade.

Vale ressaltar, entretanto, conforme destacam Almeida e Vertuan (2011), que não há procedimentos pré-definidos ou soluções conhecidas, o que exige que o aluno realize o levantamento de informações e o uso de conceitos matemáticos e extramatemáticos para a obtenção do modelo matemático que representa, prevê ou explica a solução da situação-problema estudada. O modelo matemático é “um sistema conceitual, descritivo ou explicativo, expresso por meio de uma linguagem ou uma estrutura matemática e que tem por finalidade descrever ou explicar o comportamento de outro sistema” (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p.13).

Segundo Almeida, Silva e Vertuan (2012), a construção desse sistema conceitual demanda de encaminhamentos organizados em cinco fases: inteiração, matematização, resolução, interpretação de resultados e validação (figura 1.1). Os autores destacam, ainda, que estas fases podem não acontecer de forma linear, pois “os movimentos de “ida e vinda” entre elas caracterizam a dinamicidade da atividade” (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p. 17).

Figura 1.1 - Fases da Modelagem Matemática



Fonte: Almeida, Silva e Vertuan (2012, p. 15).

Na fase de inteiração, para Almeida, Silva e Vertuan (2012), ocorre a formulação do problema e a definição de metas para sua resolução por meio de dados quantitativos e qualitativos. Representa o primeiro contato com a situação, logo, a busca por informações é a sua principal característica. Para os autores, esta fase:

> [...] representa o primeiro contato com essa situação-problema que se pretende estudar com a finalidade de conhecer as características e especificidades da situação. A inteiração conduz a formulação do problema e a definição de metas para sua resolução, assim a escolha do tema e a busca de informações a seu respeito constituem o foco central nessa fase [...] (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p. 15).

Em seguida, a fase de matematização, considerada por Roux (2010), como uma aplicação de conceitos, procedimentos, relações ou métodos matemáticos a objetos. Além disso, segundo Almeida (2018) em atividades de Modelagem Matemática é a fase responsável pelo encaminhamento matemático ao problema não matemático, por meio de informações e hipóteses que orientam a resolução. Neste contexto, para Blum et al. (2007), o processo de aplicar a Matemática à situação-problema intui compreendê-lo. Assim, inferimos que há a elaboração de uma representação matemática, caracterizada por transformar a linguagem natural em linguagem matemática, “considerando esse processo de transição de linguagem, de visualização e de uso de símbolos para realizar descrições matemáticas” (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p. 16).

A dedução de um modelo matemático acontece na fase de resolução, pois para Almeida, Silva e Vertuan (2012, p. 13) seria “uma representação simplificada da realidade sob a ótica daqueles que a investigam”. O modelo matemático, independentemente do nível de ensino do estudante, segundo

Tortola e Almeida (2016), pode ser um gráfico, uma tabela, uma equação, ou quaisquer outras estruturas matemáticas que mantenham um nível de fidedignidade com o fenômeno sob investigação.

Por fim, a interpretação de resultados e a validação são fases avaliativas realizadas pelos envolvidos na atividade, a capacidade de avaliar o processo de construção de modelo e os diferentes contextos de aplicação são quesitos importantes:

> [...] a interpretação dos resultados pelo modelo implica a análise de uma resposta para o problema, a análise da resposta constitui um processo avaliativo realizado pelos envolvidos na atividade e implica uma validação da representação matemática associada ao problema, considerando tanto os procedimentos matemáticos quanto à adequação da representação para a situação (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p. 16).

Cabe ressaltar que a presença das fases de inteiração, matematização, resolução, interpretação de resultado e validação caracterizam uma atividade de Modelagem Matemática. Contudo, podem ocorrer de forma não-linear em relação a ordem em que são apresentadas. Segundo pesquisas realizadas por Scheller et al. (2017), nos encaminhamentos deste tipo de atividade os alunos percebem e aprendem, interpretam, compreendem e explicitam, validam informações e tomam decisões, apresentando desta forma, um processo cíclico, já que não finda com mero mapeamento de dados.

Estes ciclos são utilizados por pesquisadores, (BASSANEZI, 2002; GALBRAITH, 2012; SILVA; ALMEIDA, 2015; GREEFRATH; VORHÖLTER, 2016; ALMEIDA, 2020) na Educação Matemática como esquemas que indicam o caminho que modeladores podem percorrer para desenvolver uma atividade de Modelagem Matemática.

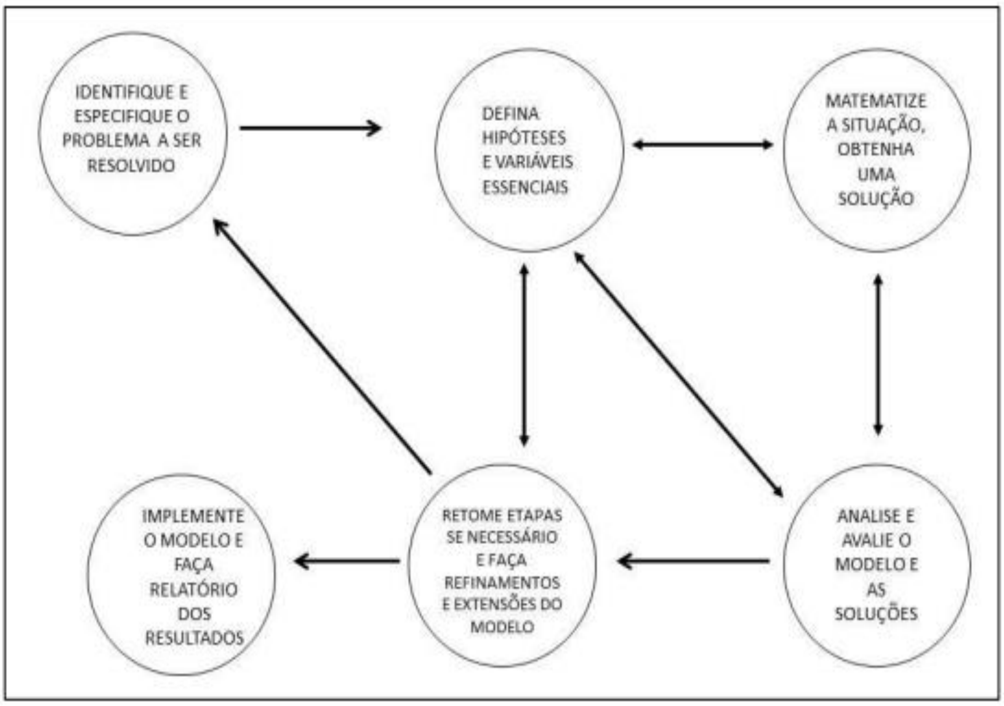
Então, consideramos, também, a compreensão de Blum e Niss (1991, p. 38-39) sobre uma atividade de Modelagem solicitar do modelador ações que articulem a situação real com conceitos da Matemática:

> [...] o ponto de partida é um problema também chamado de situação-problema real. Esta situação tem de ser simplificada, idealizada e estruturada, por meio de condições e pressupostos apropriados e também pelos interesses do modelador. Isto conduz a um modelo real da situação original que, por um lado, ainda contém traços essenciais da situação original, mas, por outro lado, já está

> esquematizado e (se possível) permite uma aproximação com aspectos matemáticos. O modelo real tem de ser matematizado, ou seja, os dados, conceitos, relações, condições e pressupostos são traduzidos em matemática. Assim, resulta um modelo matemático da situação original. [...] O processo de resolução do problema continua no contexto da matemática, e as conclusões fundamentam-se em cálculos, verificações e aplicação de métodos e resultados matemáticos conhecidos, bem como podem abranger o desenvolvimento de novos conceitos, etc. [...] De modo geral, alguns resultados matemáticos são obtidos. Estes resultados têm de ser re-traduzidos para o mundo real, ou seja, ser interpretados em relação à situação original. Ao fazê-lo, o modelador também valida o modelo, ou seja, decide se o utiliza para os fins para quais foi construído. Ao validar o modelo, discrepâncias de vários tipos podem ocorrer, o que pode conduzir a uma modificação do modelo ou a sua substituição por um novo. Em outras palavras, o processo de resolução de problemas pode exigir a volta ao ciclo várias vezes. Se, eventualmente, um modelo satisfatório foi encontrado, o modelador pode usá-lo como base para fazer previsões, tomar decisões ou ações. [...] (BLUM; NISS, 1991, p. 38-39).

Neste sentido, levando em consideração as assertivas a respeito do desenvolvimento de atividades de Modelagem de Blum e Niss (1991), apresentamos uma configuração (Figura 1.2) para a atividade de Modelagem Matemática baseada em Almeida (2020, p. 223):

Figura 1.2 - Ciclo de uma atividade de Modelagem Matemática



Fonte: Almeida (2020, p. 223).

A figura 1.2 traz a ideia defendida por Almeida (2020, p.223): “explicitar prováveis, ou talvez desejáveis, ações dos alunos quando desenvolvem uma atividade de modelagem matemática”, buscando identificar os fazeres dos alunos nas diferentes fases do ciclo associada ao desenvolvimento dessas atividades.

Mas, o sucesso da atividade está diretamente condicionado à singularidade da vida, pois como argumenta Almeida (2018), a qualidade de um resultado não pode ser julgada apenas pela correção matemática, mas também pelo melhor confronto com a realidade.

Assim, Crouch e Haines (2004) salientam sobre a relevância da experiência com a transição entre o problema do mundo real e o modelo matemático:

> Ter sucesso em modelagem matemática envolve a capacidade de mover-se entre o mundo real e o mundo da matemática, tendo ambos em mente. O modelador precisa considerar o problema do mundo real e decidir como matematizá-lo, decidindo quais aspectos do problema são relevantes para o mundo real e quais não (CROUCH; HAINES, 2004, p. 199 – tradução nossa).

Levando em consideração a importância da experiência em transpor a situação real ao problema investigado nos pautamos em Almeida, Silva e Vertuan (2012) no que se refere à inserção gradativa de atividades de Modelagem na sala de aula. Deste modo, há a familiarização com atividades de Modelagem em diferentes momentos, que são abordados na próxima seção.

1.2 MOMENTOS DE FAMILIARIZAÇÃO

Para Meyer, Caldeira e Malheiros (2011), a Modelagem Matemática desorganiza a ordem estabelecida na tradição dos currículos de Matemática em que se prioriza determinado tópico a ser ensinado, por meio de exercícios que buscam realizar um treinamento de habilidades, ou ainda, a fixação da aprendizagem. Contrariando esse tradicionalismo, os mesmos autores ainda defendem que, nas práticas de Modelagem, novos saberes matemáticos, são aprendidos ao passo que os velhos ganham novos significados.

Almeida, Silva e Vertuan (2012) sugerem uma familiarização com a Modelagem, de forma gradativa, em três diferentes momentos. Isso se deve ao fato de que, no desenvolvimento de atividades de modelagem, os alunos são colocados em contato com situações que, de forma geral, não são comuns à sala de aula, como é o caso do envolvimento com uma situação-problema e, em muitos casos, com a própria definição de um problema.

O professor é o responsável por apresentar a situação-problema e pela sua simplificação assim como fornecer os dados necessários para efetuar a análise deste, no primeiro momento de familiarização. Já no segundo momento, o professor também traz o problema, que pertence a outra área da realidade, mas fica a cargo do aluno, auxiliado pelo professor, a simplificação, a coleta de dados e a resolução do problema. O terceiro momento, quando a situação-problema é escolhida pelos alunos, estes devem definir o problema, coletar dados, simplificá-lo e resolvê-lo. Neste caso, o aluno participa de todas as fases, desde a escolha até a resolução do problema.

Almeida, Silva e Vertuan (2012), discorrem a respeito destes momentos em que o professor gradativamente perde o protagonismo em sala de aula, mas não a importância já que cabe a ele a mediação e a orientação do encaminhamento da atividade:

> - Em um primeiro momento, o professor coloca os alunos em contato com uma situação-problema, juntamente com os dados e as informações necessárias. A investigação do problema, a dedução, a análise e a utilização de um modelo matemático são acompanhadas pelo professor, de modo que as ações como definição de variáveis e de hipóteses, a simplificação, a transição para linguagem matemática, obtenção e validação do modelo bem como o seu uso para a análise da situação, são em certa medida, orientadas e avalizadas pelo professor.
> - Posteriormente, em um segundo momento, uma situação é sugerida pelo professor aos alunos, e estes, divididos em grupos, complementam a coleta de informações para a investigação da situação e realizam a definição de variáveis e a formulação de hipóteses simplificadoras, a obtenção e validação do modelo matemático e seu uso para a análise da situação. O que muda, essencialmente, do primeiro momento para o segundo é a independência do estudante no que se refere à definição de procedimentos extramatemáticos e matemáticos adequados para a realização da investigação.
> - Finalmente, no terceiro momento, os alunos divididos em grupos, são responsáveis pela condução de uma atividade de modelagem, cabendo a eles a identificação de uma situação-problema, a coleta e análise dos dados, as transições de linguagem, a identificação de conceitos matemáticos, a obtenção

> e validação do modelo e seu uso para a análise da situação, bem como a comunicação desta investigação para a comunidade escolar (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p. 26).

Os procedimentos efetuados pelos alunos no seu desenvolvimento estão associados aos métodos e às ações utilizadas para transitarem da situação inicial para a situação final. Pelo fato de que há a presença mais intensa do professor no primeiro e no segundo momento, no entanto, no terceiro momento, o aluno já possui a confiança, a independência, a autoridade para delimitar uma situação-problema e a busca, por meio da matemática, de uma solução. Por conseguinte, a cada momento de familiarização a autonomia e responsabilidade do aluno aumentam.

Considerando o fazer Modelagem Matemática que se constitui gradativamente nos apoiamos em Stender (2018) que identificou, no desenvolvimento de atividades de Modelagem, algumas técnicas para a resolução da situação-problema, denominadas de Estratégias Heurísticas. As Estratégias Heurísticas possibilitam ao aluno uma independência nos encaminhamentos de uma atividade de Modelagem e ao professor permitem analisar a forma como o aluno lida com o conhecimento matemático e extra matemático na construção do modelo.

1.3 ESTRATÉGIAS HEURÍSTICAS NA MODELAGEM MATEMÁTICA

O entendimento de heurística, criado por George Pólya[4] na Resolução de Problemas, é constituído por quatro fases principais: Compreensão do problema, Elaboração do Plano, Execução do Plano e Retrospectiva. Assim o autor sugere que, primeiro se deve compreender o problema, isto é, perceber claramente o que é necessário. Depois, deve-se observar os diversos itens inter-relacionados, como a incógnita está ligada aos dados, para assim inferir a respeito da ideia de resolução e estabelecimento de um plano. Terceiro passo é a execução do plano, seguindo as estratégias traçadas e verificando cada passo. Quarta e última fase, trata-se de um retrospecto da resolução completa, na qual, há a revisão e discussão dos resultados.

---

[4] George Pólya (1897 – 1985), segundo Costa e Silva (2013), foi um matemático húngaro que tem como sua maior contribuição, pesquisas relacionadas à heurística da resolução de problemas matemáticos, o seu legado ficou registrado em seu livro: How to Solve It.

Assim, é importante ressaltar que esse método de ensinar Matemática elaborado por Pólya, marcou o início da importância da Resolução de Problemas no processo de ensino e aprendizagem. Segundo Justulin (2017, p. 128):

> No ensino de Matemática, a resolução de problemas ganha impulso no século XX. No cenário internacional um dos pioneiros a destacar a importância da atividade de resolução de problemas foi George Pólya, em 1945, com seu livro how to solve it. Este autor estabeleceu algumas etapas, conhecidas como “passos de Pólya”, que uma pessoa que pretende resolver um problema deve percorrer (JUSTULIN, 2017, p.128).

A heurística foi baseada no comportamento humano ao resolver problemas em busca do plausível e do útil. Nas palavras de Pólya (2006, p.99) é o estudo dos caminhos e meios da descoberta e invenção, um modo de chegar à verdade por meio de novas descobertas:

> Heurística, Heurética ou “ars inveniendi” era o nome de um certo ramo de estudos, não bem delimitados, pertencente à Lógica, à Filosofia ou à Psicologia, muitas vezes delineado mas raramente apresentado com detalhes, hoje praticamente esquecido. O objetivo da Heurística é o estudo dos métodos e das regras da descoberta e da invenção (PÓLYA, 2006, p.99).

A *heuristic* formalizada por Pólya, ainda que outros pesquisadores também a utilizavam. Tem como objetivo de descobrir soluções para um problema, com foco no pensamento matemático, levando em consideração suas lógicas e psicológicas. Pois, para Pólya (2006, p. 4) “aprendermos a resolver problemas, resolvendo-os”.

Neste contexto, segundo Costa e Silva (2013, p. 10), os desdobramentos identificados ao estudar o método de resolução, possibilita ao professor conhecer as estratégias utilizadas pelos alunos:

> [...] o que aparece nas falas e atitudes do aluno são a recorrência às notações adequadas, símbolos e equacionamentos quando necessário, também o recurso às figuras no sentido de uma visualização dos dados e da compreensão da incógnita quando se trata de obter uma grandeza, tentativa e erro para certificar seu raciocínio é outra denotação de possível estratégia e por fim, identificamos poucas recorrências à aritmética como possibilidade para solucionar.
> Assim, concluímos que o aluno resolve problema matemático utilizando a estratégia de associar um conteúdo para facilitar sua

> compreensão e estabelecer o plano de execução (COSTA; SILVA 2013, p. 10).

Para Stender (2018), os procedimentos adotados por Pólya podem estar em consonância com os encaminhamentos de uma atividade de Modelagem Matemática, na qual se identifica uma situação-problema fora do ambiente escolar, mas sua resolução possa se dar mediante o uso da Matemática.

As Estratégias Heurísticas reveladas em atividades de Modelagem Matemática por Stender (2018, p. 316-317) estão organizadas em grupos:

> • organize seu material / entenda o problema: mude a representação da situação se útil, tentativa e erro, use simulações com ou sem computadores, discretize situações,
> • use a memória de trabalho de forma eficaz: combine itens complexos em supersignos, que representam o conceito de "pedaços", use simetria, divida seu problema em subproblemas,
> • pense grande: não pense dentro de limites dispensáveis, generalize a situação,
> • utilize o que você sabe: faça uso de analogias de outros problemas, procure a origem de novos problemas em problemas familiares, combine casos particulares para resolver casos gerais, use algoritmos quando possível,
> • aspectos funcionais: analise casos especiais ou extremos; a fim de otimizar, você precisa variar a quantidade de estímulo, discretizar a situação,
> • organize o trabalho: trabalhe por todos os lados, mantenha sua abordagem – mude sua abordagem – ambas no momento certo (STENDER, 2018, p. 316-317 – tradução nossa).

Assim, inferimos que as Estratégias Heurísticas utilizadas pelos alunos podem ser identificadas nos registros escritos, na fala, nos gestos e principalmente no desenvolvimento do modelo matemático, já que os encaminhamentos acontecem de maneira autônoma, cabendo ao professor o papel de orientador. Em sua pesquisa, Stender (2018) evidenciou o uso das Estratégias Heurísticas em atividades de Modelagem Matemática por meio de gravações em áudio e vídeo, além de registros e o acompanhamento do próprio pesquisador no desenvolvimento da atividade. O autor explica que as Estratégias Heurísticas comumente observadas na Resolução de Problemas podem ser associadas às atividades de Modelagem Matemática (quadro 1.1), por iniciarem com uma situação-problema a ser investigada.

Quadro 1.1 - Estratégias Heurísticas na Modelagem Matemática

Estratégias Heurísticas	**Identificação na Modelagem Matemática por Stender (2018)**
Organize seu material/ Entenda o problema	- Estruturação e organização do problema para alcançar uma representação do material dado, tornando-o acessível ao revelar os padrões e estruturas importantes (discretização). - Exploração da situação para o melhor entendimento e possíveis abordagens. Segundo Greefrath (2011), o uso de simulações permite a visualização do problema (simulações), e significa uma mudança representacional da informação dada (mudança de representação). - Nessa fase o aluno faz uma tentativa segundo o material disponível, ao final da construção do modelo ele decide por sucesso ou erro e retorna à fase anterior.
Use sua memória de trabalho de forma eficaz:	- Segundo Stender (2018) o uso de Supersigno, "signo que representa vários signos", intui utilizar a memória de maneira mais efetiva, já que podem ser observados na forma de um vetor, uma matriz, uma função, uma equivalência e assim por diante (supersignos). - Redução da complexidade da situação, pela simplificação para possibilitar uma descrição matemática (simetria). - Divida em subproblemas.
Pense grande	- Para Stender (2018) a generalização está relacionada ao fato de diminuir certas restrições do problema e então resolvê-lo de forma mais ampla. Já que para o autor diversas vezes ignorar limites comuns leva a soluções surpreendentes (generalização).
Use o que sabe	- O uso de analogias com outros problemas possibilita a aproximação com outros já conhecidos. Para Stender (2018), o uso de algoritmos pode combinar casos particulares para resolver o caso geral (analogia).
Verifique aspectos funcionais	- Essa estratégia depende do conhecimento funcional. Sendo realizada de várias maneiras (por derivação, tabelas, iteração…); mas a ideia principal, de examinar um intervalo inteiro de valores (e não somente um valor especial) e então identificar o melhor, está sempre presente (aspectos funcionais). - Segundo Stender (2018) a discretização é um método fundamental na matemática, que significa que uma situação contínua é transferida para sua contraparte discreta (discretização).
Organize seu trabalho	- Outra estratégia trazida pelo autor seria começar com o resultado, trabalhando de maneira invertida em busca de um ponto de partida. Stender (2018) adverte que, se existir diversas estradas divergindo a partir do ponto onde você se encontra, procure explorar um pouco cada estrada antes de se aventurar longe demais, pois qualquer uma pode levar a um beco sem saída (manter ou mudar a abordagem).

Fonte: Adaptado de Stender (2018).

Para Almeida (2020, p. 232) “as reflexões acerca das estratégias heurísticas dos alunos em atividades de modelagem matemática têm a intenção de sinalizar como estas estratégias influenciam o desenvolvimento das atividades” e são reconhecidas no processo de resolução de problemas em diferentes fases especificadas no ciclo, oportunizando aos alunos a compreensão de fenômenos de maneira autônoma.

Então, a análise desses signos produzidos e utilizados na solução dos estudantes pode favorecer a compreensão do objeto matemático ou do fenômeno estudado (ALMEIDA; SILVA; VERONEZ, 2015), o que remete ao estudo da Semiótica, a ciência dos signos.

CAPÍTULO 2
SEMIÓTICA

INTRODUÇÃO

Neste capítulo voltamos nossos estudos para a Semiótica, mais especificamente para a Semiótica Peirceana e as contribuições na construção do conhecimento matemático. Para tanto, versamos a respeito da Semiótica, a fim de conceituar a tríade signo, objeto e interpretante, seguindo para a apresentação das categorias fenomenológicas de Peirce. Em seguida, passamos então a relacioná-la com a Educação Matemática e também sua relevância na Modelagem Matemática para a construção do conhecimento.

2.1 UMA NOVA CIÊNCIA: SEMIÓTICA

Uma das particularidades dos seres humanos, segundo Santaella (2008), é o uso de uma rede de linguagens e representações, seja por leituras e escritas em textos, o saber de primeira ordem; mas também por gráficos, números e imagens, além de gestos, sons, sensações e sinais, os saberes mais sensíveis, as não-verbais de segunda ordem, que permitem nossa integração e comunicação com o mundo.

De forma geral, a Semiótica é a ciência que investiga todas as linguagens possíveis, ou seja, tem por objetivo o exame dos modos de constituição de todo e qualquer fenômeno como o de produção, o de significação e de sentido. Para Santaella (1999), esse estudo potencializa indagações e instrumentos metodológicos capazes de desvendar o universo dos fenômenos.

Vale ressaltar que a origem do estudo da Semiótica, conforme Radford (2006), se deu em três localidades distintas: Estados Unidos da América, União Soviética e Europa Ocidental, o que consequentemente resultou em perspectivas diferentes de entendimentos entre os seus precursores.

Um dos três caminhos dessa ciência foi liderado pelo norte-americano Charles Sanders Peirce (1839-1914), cientista, matemático, historiador, filósofo e lógico, denominada de Semiótica *Peirceana*, o qual defendeu a “doutrina formal dos signos". Segundo o seu legado, trata-se de uma ciência constituída de uma tríade fundamental - signo, objeto e interpretante.

Para Peirce (1972) existe uma relação entre o signo e objeto, resultando em outro signo, o interpretante. Assim, segundo Silva (2017a, p. 160), entendemos que:

> A ação própria do signo é determinar um interpretante, ou seja, a ação do signo é a ação de ser interpretado em outro signo, pois o interpretante, segundo Peirce, tem a natureza de um signo criado em uma mente interpretadora.

Ainda segundo Radford (2006), o suíço Ferdinand de Saussure (1857-1913), formulou a teoria conhecida como *Saussureana*. Este seguimento surgiu da necessidade de resolver o problema referente à compreensão da língua, distinta da linguagem e da palavra. Para ele, considerado o pai do estruturalismo linguístico, a língua segue uma diretriz social e não só se assemelha ao sistema de signos como é mais importante por expressar ideias.

Outro importante estudioso da Semiótica foi o psicólogo russo Lev Semenovitch Vygotski (1896-1934). O seguimento da semiótica *Vygotskiana* se desenvolveu dentro de problemáticas específicas engendradas para resolver o problema do pensamento e de seu desenvolvimento. Vygotski acreditava que o signo era uma ferramenta para o estudo do pensamento e de seu desenvolvimento e está relacionado com a transformação das funções psíquicas da pessoa.

Em nossa pesquisa nos pautamos na Semiótica Peirceana como aporte teórico, dedicando a seção seguinte ao nosso entendimento relacionado aos estudos de Charles Sanders Peirce.

2.2 SEMIÓTICA PEIRCEANA

O termo *Semeiotic* descende da lógica concebida da filosofia científica da linguagem, trata-se da ciência geral dos signos, a qual examina diversos tipos de signos e as formas de pensamento que os signos possibilitam realizar. O ramo da Semiótica que trabalha com conceitos abstratos capazes de determinar as condições com que certos processos sejam considerados signos. Para Peirce (1972, p. 94) um signo, ou *representamen*:

> [...] é aquilo que, sob certo aspecto ou modo representa algo para alguém. Dirige-se a alguém, isto é, cria, na mente dessa pessoa, um signo equivalente, ou talvez um signo mais desenvolvido. Ao signo, assim criado, denomino interpretante do primeiro signo. O signo representa alguma coisa, seu objeto. Coloca-se no lugar desse objeto, não sob todos os aspectos, mas com referência a um tipo de ideia que tenho, por vezes, denominado o fundamento do representamen.

Peirce (2005) defende que os signos, ao serem representantes de algo a alguém, são entendidos como meios de pensamento, de compreensão, de raciocínio, de aprendizagem. Já que, da relação entre signo e objeto, resulta o interpretante.

Para Silva (2008, p. 31), na tradição peirceana, o signo tem três níveis de relações fundamentais, sobre sua natureza triádica:

> • Consigo mesmo, nas suas propriedades internas, no seu poder para significar, estabelecendo uma teoria da significação;
> • Com o objeto, em sua referência àquilo que representa, se refere ou indica, estabelecendo uma teoria da objetivação;
> • Com os receptores, isto é, nos tipos de interpretação que despertam nas pessoas que os utilizam, estabelecendo uma teoria da interpretação (SILVA, 2008, p. 31).

Mesmo que exista essa classificação das relações fundamentais, neste trabalho nos dedicamos ao estudo dos fenômenos observados por meio da experiência. Na próxima seção trazemos uma apresentação das categorias fenomenológicas peirceanas.

2.2.1 Categorias Fenomenológicas

Por meio da análise e do atento exame do modo como as coisas aparecem à consciência, Peirce dividiu os fenômenos cognitivos em categorias fenomenológicas, primeiramente intituladas de: qualidade, relação, e representação. Mas após algumas modificações visando fins científicos e a desconexão com termos já existentes ficaram definidas como: Primeiridade (qualidade), Secundidade (reação) e Terceiridade (mediação). Para Peirce (2005):

> As verdadeiras categorias são: primeira, sentimento, a consciência que pode ser compreendida como um instante do tempo, consciência passiva da qualidade, sem reconhecimento ou análise; segunda,

> consciência de uma interrupção no campo da consciência, sentido de resistência, de um fato externo ou outra coisa; terceira, consciência sintética, reunindo tempo, sentido, aprendizado, pensamento (PEIRCE, 2005, p. 14).

Neste sentido, a primeiridade consiste numa primeira percepção do objeto; é uma consciência imediata tal qual é. Refere-se ao que está relacionado ao acaso, ao que não é visto como concreto, apenas uma qualidade. Segundo Mendes e Almeida (2017) se trata da pura qualidade de ser e de sentir. Entende-se que na primeiridade o sentimento é imediato, imperceptível e original; é algo que ocorre primeiro. Leva em consideração o signo em si mesmo, é a impressão de qualidade, a captação do fenômeno de maneira espontânea ou imediata.

Na primeira categoria, o signo é percebido pelos elementos que mais suscitam a emoção, sensação e sentimento, como as cores, as formas e as texturas. Para Ghizzi (2009), a categoria inicial traz em si a ideia de primeiro, e, portanto, sugere que sob essa categoria não há outra. De modo puro, sem se perguntar a qual objeto essas qualidades se referem, se são reais ou se de fato existem.

No entanto, assim que se observa nas qualidades puras do signo uma relação/associação com outros possíveis objetos, o momento da primeiridade é quebrado, segue-se uma sensação de dualidade, dada por algo que lhe é externo (segundo) e que se percebe associado àquela qualidade (primeiro). Essas qualidades deixam de ser sentidas em estado puro, e passam a ser percebidas como pertencentes a um objeto qualquer.

Com isso, expõe-se a secundidade, que se refere à experiência, a ideias de dependência, determinação, dualidade, ação e reação, aqui e agora, conflito, surpresa, dúvida. Segundo Farias (2007, p. 34), a secundidade "se manifesta nessa condição de confronto", já que toda experiência, seja com objetos interiores ou exteriores, há sempre um elemento segundo (ou de reação), anterior à mediação do pensamento articulado e subsequente ao puro sentir quando o aluno busca a relação aos acontecimentos.

Na segunda categoria, o signo é decomposto em relações/associações e percebido como mensagem. Consiste no conflito entre a consciência e o signo, que busca entendê-lo. Portanto, para existir, a qualidade tem de estar relacionada a uma matéria. Assim, para Santaella (2012), essa corporificação material caracteriza a Secundidade.

Ghizzi (2009, p. 16) explica que “a consciência de Secundidade é forçada a experienciar o outro (a alteridade) na sua característica material, factual, dura; que não cede à pura liberdade da mente”. Dessa forma, a secundidade emerge no momento posterior ao sentimento, a primeiridade, porém anterior ao pensamento articulado, a terceiridade (SANTAELLA, 2012).

A terceiridade refere-se à generalidade, continuidade, crescimento, inteligência. Para Santaella (2012), essa categoria fenomenológica aproxima um primeiro e um segundo numa síntese intelectual, correspondente ao pensamento em signos, por meio do qual representamos e interpretamos o mundo. Logo, temos a definição genuína dos signos, que conduz a mediação e assim gera ou possibilita a reprodução num outro signo, e outro, infinitamente. Ainda a respeito da terceiridade peirceana, citamos Medeiros (2009, p. 65-66) que afirma que:

> [...] a Terceiridade se dá também em função da intencionalidade, e é esta mesma faculdade que permite-nos estabelecer relações de causalidade, possibilitando alguma espécie de conhecimento sobre as coisas, pois sem a possibilidade de estabelecer relações de causalidade torna-se impossível o conhecimento.

Na terceira categoria, a leitura do signo é simbólica, num contexto amplo de significações. Essa categoria traz a ideia de mediação que, de acordo com Peirce, representa a ligação entre aquela experiência de liberdade (primeiridade) com os fenômenos e os fatos (secundidade). O processo caracterizado aí é tomado como a própria natureza daquilo que denominamos pensamento. Assim, a terceira categoria corresponde à camada de inteligibilidade, por meio da qual representamos e interpretamos o mundo.

Se considerarmos as bases da semiótica peirceana para compreensão de fenômenos, podemos dizer que o primeiro contato com o signo, sem pensarmos sobre ele, constitui a primeiridade. Já a partir do momento em que temos a consciência do que vemos, quando o signo produz um efeito, uma reação, quando relacionamos o signo ao objeto, configura-se a secundidade. Ao estabelecermos uma relação entre a primeiridade e a secundidade, ocorre representação sígnica que nos leva a interpretar e entender o fenômeno.

Neste sentido, o interesse por compreender aspectos relativos aos signos no âmbito da Matemática tem inquietado diversos estudiosos e os levado a considerar a Semiótica como referencial teórico para possibilitar reflexões acerca das mais variadas inquietações, como abordaremos na próxima seção.

2.3 SEMIÓTICA E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

A partir de 1990 temos os primeiros registros da presença da semiótica associada à Educação Matemática, internacionalmente em conferências e eventos da área educacional como eixo temático (ALMEIDA; SILVA, 2017). No Brasil, entretanto, a semiótica aparece mais timidamente em relatos e pesquisas, mas sem um eixo exclusivo. Neste sentido, salientamos que as pesquisas têm crescido ano a ano, evidenciando um aumento no número de publicações em revistas, dissertações e teses (OTTE, 2001; SILVA, 2008; 2013; 2015; ALMEIDA, 2010; ALMEIDA; SILVA, 2012; 2018; VERONEZ, 2013; SÁENZ-LUDLOW; KADUNZ, 2016; YOON; MISKELL, 2016; SILVA; ARAKI; BORSSOI, 2018; MENDES, 2018; GÓIS; SILVA; DALTO, 2019; GÓIS, 2019) dada à importância dos signos para a compreensão dos objetos matemáticos.

Neste contexto, Almeida e Silva (2018) revelam que o estreitamento entre a Semiótica e a Educação Matemática tem dividido opiniões entre pesquisadores. Se por um lado a Matemática é carregada de representações; do outro, a complexidade da análise do processo de pensamento, conceitualização e representação por meio de signos fragiliza essa conexão por envolver aspectos culturais, sociais e cognitivos.

Entendemos que toda comunicação em Matemática é feita basicamente por meio de representações. Uma vez que para ensinar conceitos, propriedades, estruturas e relações advindas dos objetos matemáticos, é preciso levar em consideração as diferentes formas de representação desses objetos. O que se estuda e se ensina são as representações dos objetos matemáticos e não os próprios objetos matemáticos. Assim, concordamos com Damm (1999) a respeito do ensino da Matemática:

> [...] trabalha com objetos abstratos. Ou seja, os objetos matemáticos não são diretamente acessíveis à percepção, necessitando para sua apreensão o uso de uma representação. Neste caso as representações através de símbolos, signos, códigos, tabelas, gráficos, algoritmos, desenhos são bastante significativas, pois permitem a comunicação entre os sujeitos e as atividades cognitivas do pensamento, permitindo registros de representação diferentes de um mesmo objeto matemático. Por exemplo, a função pode ser representada através da expressão algébrica, tabelas e/ou gráficos que são diferentes registros de representação (DAMM, 1999, p. 137).

Para Otte (2001) a classificação dos signos sugerida por Peirce, possui um efeito transformador e conduz os alunos a um processo de pensamento mais generalizado sobre a atividade matemática. Isto significa que o conhecimento matemático não pode ser traduzido e interpretado por uma mera leitura de signos, símbolos ou princípios. É preciso que a leitura seja carregada de experiência e conhecimento implícito, isto é, não podemos entender os signos sem alguns pressupostos de tal conhecimento e de atitudes e maneiras de utilizá-los. Neste sentido, Peirce defende que:

> Conhecer, contudo, não tem por finalidade dominar o objeto e esgotá-lo em sua representação, mas oferecer uma linha de conduta suficientemente boa para que nosso ardente desejo de comungar com o objeto possa com o tempo, e cada vez melhor, se realizar, viabilizar ao aluno o acesso e o contato com diferentes representações e ao mesmo tempo requerer do aluno (ou oportunizar ao aluno) atingir a generalização e a compreensão (CP 2. 227)[5].

Segundo Sáenz-Ludlow (2006), não há comunicação sem signo e consequentemente, sem interpretante. Com isso, ela argumenta que a comunicação pode provocar impactos sobre as práticas de ensino e sobre os processos de ensino e aprendizagem.

O desafio de sala de aula, conforme Sáenz-Ludlow e Kadunz (2016) é inferir em que nível os alunos interpretam os signos matemáticos e qual é o efeito de seus significados na construção do raciocínio matemático e no hábito de pensar.

Esses signos são ferramentas teóricas que apoiam o aluno na construção de representações externas, concepções prévias que o sujeito tem

[5] Collected Papers of Charles Sanders Peirce, Ed. Charles Hartshorne e Paul Weiss (vols. I-IV: 1931/35). Harvard University Press, Cambridge, Mass, 1965; Ed. Arthur Burks (vols. VII-VIII: 1958), id., 1966. Para a citação cf. 2.227 (o primeiro dígito sinaliza o volume da obra referida e os demais o parágrafo. A obra é denotada usualmente pela sigla CP).

sobre algo que está sendo, possibilitando o tratamento de um sistema de informações, que tem como característica a execução automatizada de uma determinada tarefa.

Para Silva (2008), os signos se referem a algo que se quer comunicar ou representar, sem substituir aquilo ao qual ele está relacionado. Assim, consideramos as atividades de Modelagem Matemática um meio de oportunizar ao aluno o acesso a diferentes signos de um mesmo objeto e de manifestar pensamentos e conhecimentos estreitando as relações entre essas teorias.

2.4 SEMIÓTICA E MODELAGEM MATEMÁTICA

Ainda que as origens da Modelagem Matemática e da Semiótica tenham contextos distintos na Educação Matemática, o elo criado entre estas ciências vem ganhando força nacionalmente com o visível aumento de publicações em nível de mestrado e doutorado que as relacionam. No âmbito do GRUPEMAT, Silva (2008) estabeleceu relações entre a Semiótica Peirceana, utilizando a Teoria de representação de Duval para análise de atividades de Modelagem Matemática; Silva (2013) identificou atribuições de significado para o objeto a partir da relação entre a tríade Peirceana e as ações dos alunos; Veronez (2013) investigou as funções semióticas e epistemológicas dos signos a partir de atividades de Modelagem Matemática; Ramos (2016) fez um estudo sobre as relações da Semiótica Peircena e o raciocínio abdutivo; Mendes (2018) inferiu a respeito do conhecimento matemático pela análise dos signos interpretantes.

Assim, entendemos a Modelagem como uma atividade matemática intencional na busca de descrição, explicação ou conceituação de fenômenos, relacionados, de modo geral, com outras áreas do conhecimento ou com situações não-matemáticas, como descrita por Sriraman e Lesh (2006). Esses autores defendem também que os modelos são utilizados para descrever sistemas que complementam o processo de ensino e aprendizagem e devem ser enfatizados nas atividades de ensino.

Logo, essa relação se faz presente para Almeida, Silva e Vertuan (2011). Uma vez que as ações dos alunos possibilitam observar elementos indicativos do pensar refletido nos signos utilizados e produzidos:

> Podemos relacionar a categorização dos signos estabelecida por Peirce ao desenvolvimento de uma atividade de Modelagem Matemática, pois por meio de uma situação (algo que se apresenta à mente), um primeiro, é possível estabelecer a existência de um problema a ser estudado (aquilo que a situação indica, se refere ou representa), um segundo, para, então, deduzir o modelo matemático e interpretá-lo em relação ao fenômeno (o efeito que poderá provocar em um possível intérprete, o modelador), um terceiro. (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2011, p. 13).

Logo, para esses autores o desenvolvimento de uma atividade de Modelagem Matemática sugere uma aproximação entre a Semiótica de Peirce e a construção do conhecimento possibilitada pela perspectiva cognitivista da Modelagem Matemática.

Outros pesquisadores analisam a possibilidade de compreensão dos objetos matemáticos pela análise dos signos, como é o caso de: Kehle e Lester (2003) que, relacionam a abdução, indução e dedução, modos de inferência à construção do modelo matemático; Yoon e Miskell (2016) evidenciam a eficiência de recursos semióticos no desenvolvimento do raciocínio cúbico no encaminhamento de uma atividade de modelagem matemática.

Neste sentido, entendemos que Stender (2018) associou as Estratégias Heurísticas ao desenvolvimento do modelo matemático e Almeida, Silva e Vertuan (2011) relacionou as ações realizadas nos encaminhamentos de uma atividade de modelagem. Logo, inspirados por esses autores buscamos revelar as Estratégias Heurísticas utilizadas pelos alunos da Licenciatura em Química no encaminhamento de uma atividade de Modelagem Matemática pela análise das categorias fenomenológicas dos signos produzidos pelos alunos.

As intersecções destes aportes teóricos fundamentam e sustentam nossa pesquisa, que é detalhada no capítulo 3.

CAPÍTULO 3
ASPECTOS METODOLÓGICOS DE NOSSA PESQUISA

INTRODUÇÃO

Neste capítulo apresentamos os encaminhamentos de nossa pesquisa qualitativa e interpretativa, com base nos quadros teóricos enunciados nos Capítulos 1 e 2. Para isso, discorremos a respeito do cenário de nossa pesquisa, os procedimentos de coleta e análise dos dados, além de enunciar as atividades de modelagem matemática que serão analisadas.

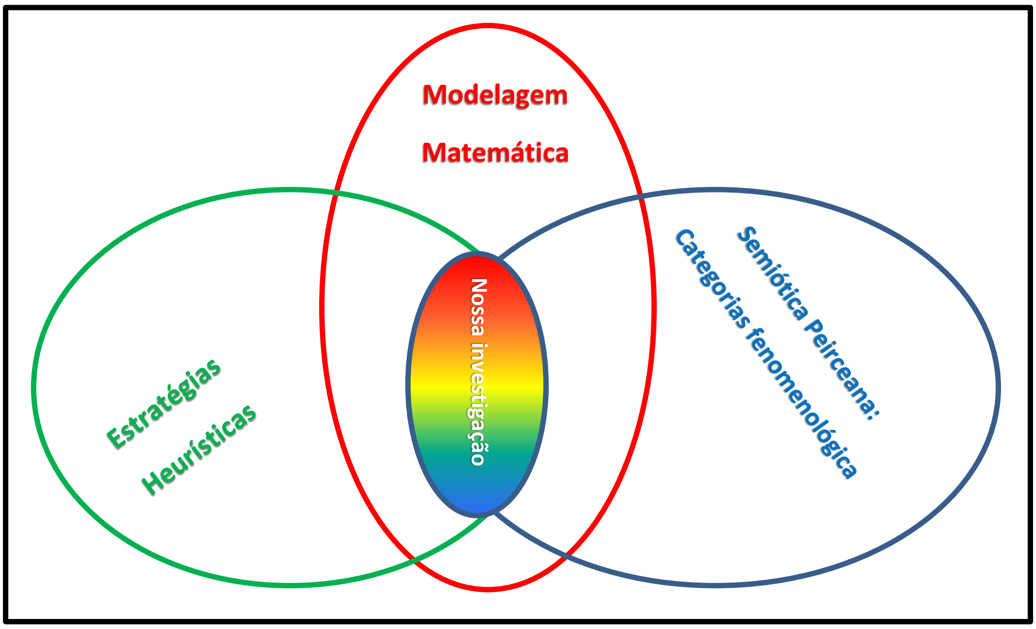
3.1 CARACTERIZAÇÃO DA PESQUISA

As pesquisas que relacionam Modelagem Matemática e Semiótica vêm ganhando espaço no âmbito da Educação Matemática, visto que há um número cada vez maior de trabalhos publicados nesta área. Entretanto, nossa motivação de pesquisa está em revelar as Estratégias Heurísticas presentes nos encaminhamentos de uma atividade de Modelagem Matemática desenvolvida com alunos de licenciatura em Química no sentido de evidenciar o fazer Modelagem. É neste aspecto que intentamos apresentar reflexões para o objetivo que nos propusemos a investigar: relações entre Estratégias Heurísticas no desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática e as categorias fenomenológicas da Semiótica Peirceana.

Como o uso da simbolização remete à teoria Semiótica, principalmente a aspectos da semiótica Peirceana, pautadas por Almeida e Silva (2017, p. 204) buscamos "articular os conhecimentos dos alunos viabilizados por meio de signos, matemáticos ou não matemáticos, que produzem ou mobilizam no desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática".

Assim, buscamos evidenciar a conexão entre as assertivas de Almeida, Silva e Vertuan, (2011, p. 1) a respeito de ações dos alunos que "são 'primeiras', ações que são 'segundas' e ações que são 'terceiras' durante o desenvolvimento de uma atividade de Modelagem Matemática, em sintonia com as categorias caracterizadas por Peirce" com as pesquisas de Stender (2018, p. 325) sobre as Estratégias Heurísticas "funcionar como uma caixa de ferramentas conceitual, para que professores analisem a complexidade de um problema de modelagem e identifiquem as etapas importantes" (Figura 3.1).

Figura 3.1 - Intersecções de nossa pesquisa



Fonte: A autora.

Almeida, Silva e Vertuan (2011, p. 16) relacionam as categorias fenomenológicas às fases de uma atividade de modelagem:

> Nesta atividade a Primeiridade aparece no momento em que os alunos têm o primeiro contato com a atividade (a matéria da revista), no momento em que encontram a situação-problema que será investigada. A Secundidade está relacionada com a busca de informações que os alunos fazem para iniciar o estudo da situação, com a definição do problema, com a existência de algo para ser estudado. A Terceiridade está relacionada com as etapas de obtenção e dedução do modelo matemático, na obtenção dos resultados matemáticos e sua validação em confronto com a situação-problema.

Entendemos que, no desenvolvimento de uma atividade de Modelagem Matemática, há a necessidade do uso de diferentes representações como a linguagem natural, algébrica, gráficos, tabelas, gestos capazes de revelar as estratégias utilizadas para o desenvolvimento do modelo matemático. O interesse central dessa pesquisa está na interpretação dos signos produzidos e utilizados, com ênfase em aspectos subjetivos do comportamento humano pela análise interpretativa. Moreira (2011) aponta que a pesquisa qualitativa interpretativa pode ser entendida como:

> [...] fenomenológica, pois enfatiza os aspectos subjetivos do comportamento humano, o mundo do sujeito, suas experiências cotidianas, suas interações sociais e os significados que dá a essas experiências e interações; *interacionista simbólica* (MOREIRA, 2011, p. 76).

Uma vez que a pesquisa interpretativa envolve a intensa participação no contexto pesquisado, cuidadosos registros e análise reflexiva com base em descrição detalhada, é que apresentamos o cenário em que se desenvolveu nossa pesquisa.

3.2 CENÁRIO DA PESQUISA

A pesquisa foi desenvolvida com alunos da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I de um curso de Licenciatura em Química, de periodicidade semestral, de uma universidade pública do estado do Paraná. Nesta disciplina estavam matriculados 9 alunos, advindos da primeira turma que passou pela disciplina de Pré Cálculo, todavia 6 alunos concluíram a discipina e se fizeram presentes para desenvolver as atividades de Modelagem Matemática.

A professora da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I é também a orientadora desta pesquisa e cedeu aulas regulares e horários extraclasse para atendimento de grupos para a pesquisadora. Ao todo foram desenvolvidas cinco atividades de Modelagem Matemática. Vale ressaltar que as atividades de primeiro e segundo momento foram integralmente desenvolvidas em horários de aulas regulares.

Já as três atividades de terceiro momento foram desenvolvidas em aulas regulares, extracurriculares, orientações via aplicativo de comunicação e mensagens por correio eletrônico, finalizando com a apresentação e entrevista em aulas regulares. Essas atividades foram desenvolvidas como Atividade Prática como Componente Curricular (APCC), com objetivo de desenvolver uma proposta de atividade para a Educação Básica em conformidade com os conteúdos já trabalhados, possibilitando ao aluno uma análise crítica e reflexiva, além da aproximação entre teoria e prática.

Todas as atividades desenvolvidas pela pesquisadora junto aos alunos compuseram um portfólio de avaliação da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, ferramenta utilizada pela professora regente para avaliar a aprendizagem, possibilitou verificar as dificuldades e a evolução dos alunos quanto aos conhecimentos necessários para a aprovação na disciplina.

As cinco atividades foram desenvolvidas com os alunos reunidos em três grupos. Os grupos primeiramente de três pessoas, formados por afinidade, se mantiveram constantes ainda que o número de integrantes diminuísse. Utilizamos o código G seguido dos números 1, 2 e 3 para a identificação do grupo a que o estudante pertence seguido de (E1, E2 e E3), no qual, a vogal E, representa o estudante, e os números seguem a ordem alfabética dos nomes reais. Utilizamos a letra P, para representar as transcrições das falas da pesquisadora, PR para a professora regente, além de PP1 e PP2 para outras duas professoras pesquisadoras, participantes do grupo de estudos e pesquisa GEPMIT, que se fizeram presentes para acompanhamento do desenvolvimento da atividade de segundo momento.

A atividade cujo tema comparou a eficiência de dois combustíveis – Gasolina e Etanol – configurou-se como uma atividade de Modelagem Matemática de primeiro momento, a qual, a coleta de dados foi realizada pela pesquisadora. Por isso, não será analisada nesta pesquisa uma vez que foi o primeiro contato com a turma sem a presença da professora regente e os dados disponíveis desta atividade ser apenas a produção escrita e o diário de bordo da pesquisadora.

Optamos também por não realizar a análise da APCC do grupo 3, a quantidade de corda, já que tivemos apenas um integrante deste grupo que concluiu a disciplina, além de mudança de tema no decorrer dos encontros em aulas regulares e da não participação da entrevista e nem outros contatos com o aluno em momentos extracurriculares, o que dificulta a análise das Estratégias Heurísticas utilizadas, mas ambas são apresentadas no produto educacional.

Um cronograma das atividades, os responsáveis e os grupos que as desenvolveram é apresentado no Quadro 3.1.

Quadro 3.1 – As atividades de modelagem desenvolvidas

Data	Atividade	Responsáveis	Grupo/Estudante
09/08/2018	Vai de gasolina ou etanol?	• P	• G1E1, G1E2, G1E3; • G2E1, G2E2; • G3E1, G3E2
30/08/2018 06/09/2018 13/09/2018	Resfriamento do Café	• PR • P • PP1 • PP2	• G1E1, G1E2, G1E3; • G2E1, G2E2, (G2E3 participou apenas no dia 30). • G3E1, G3E2, (G3E3 participou apenas do dia 06).
08/11/2018 13/11/2018 29/11/2018 04/12/2018 13/12/2018 18/12/2018	Fermento caseiro X Fermento industrial	• G1 • P – orientação para o desenvolvimento • PR – avaliação da atividade	• G1E1, G1E2, G1E3
08/11/2018 13/11/2018 29/11/2018 06/12/2018 13/12/2018 18/12/2018	Estudo da Antocianina	• G2 • P – orientação para o desenvolvimento • PR – avaliação da atividade	• G2E1, G2E2
08/11/2018 13/11/2018 13/12/2018	Quanto de corda vou precisar?	• G3 • P – orientação para o desenvolvimento • PR – avaliação da atividade	• G3E1, G3E2 • (G3E2 participou apenas do dia 08). • G3E1, não compareceu na entrevista.

Fonte: A autora.

A coleta de dados destas atividades, bem como a metodologia utilizada para a análise são descritas na próxima seção.

3.3 COLETA DE DADOS E METODOLOGIA DE ANÁLISE

Os instrumentos utilizados para a coleta dos dados das atividades do Quadro 3.1, analisadas nesta pesquisa, foram: registros escritos e digitais, gravações em áudio e em vídeo, relatório de atividades de Modelagem Matemática, portfólio de avaliação da disciplina, entrevista e o diário de campo da pesquisadora. Todos os alunos que concluíram o curso assinaram consentimento livre esclarecido no termo de autorização, conforme Apêndice A.

Entendendo a importância dos registros para análise qualitativa interpretativa, segundo Moreira (2011), explicamos a origem dos dados coletados.

✓ Registros escritos: correspondem às atividades desenvolvidas pelos grupos a partir da proposta de construção de um portfólio de avaliação pela professora regente.

✓ Registros digitais: correspondem a relatórios entregues pelos alunos contendo a atividade de Modelagem e um planejamento com a resolução do problema.

✓ Gravação em vídeo: utilização de filmadoras e smartphone para a captura de gestos e expressões utilizadas pelos alunos durante o desenvolvimento e apresentação da APCC.

✓ Gravações em áudio: utilização do recurso de gravação de áudio do smartphone em momentos de atendimento de grupo e na entrevista realizada no último encontro, cujas questões encontram-se no Apêndice B.

Por meio da coleta de dados organizamos um banco de arquivos com diversas imagens e áudios transcritos dos alunos participantes da pesquisa e iniciamos o processo de identificar as Estratégias Heurísticas utilizadas pelos grupos, bem como a categorização fenomenológica, para o desenvolvimento da atividade de Modelagem Matemática.

Neste contexto, utilizamos a análise qualitativa interpretativa como veículo para compreender como os alunos se envolvem, combinando objetividade e sensibilidade, em atividades de Modelagem Matemática.

Segundo Moreira (2011) esta metodologia busca analisar criticamente cada significado em cada contexto, transformando dados em sumários, classificações, tabelas, com enfoque descritivo e interpretativo.

Assim, realizamos uma análise específica de cada atividade conforme Moreira (2011, p. 51):

> [...] o pesquisador enriquece sua narrativa com trechos de entrevistas, excertos de suas anotações, vinhetas, exemplos de trabalhos de alunos, entremeados de comentários interpretativos procurando persuadir o leitor, buscando apresentar evidencias que suportem sua interpretação e, ao mesmo tempo, permitam ao leitor

> fazer julgamentos de modo a concordar ou não com as asserções interpretativas do pesquisador.

Realizamos dois encaminhamentos de análise: uma análise específica e uma análise global.

Análise específica consiste em identificar que signos são produzidos pelos alunos nas atividades de Modelagem Matemática. Como as categorias fenomenológicas de Peirce se fazem presentes nas fases de uma atividade de Modelagem Matemática? Como os signos influenciam e ao mesmo tempo revelam as Estratégias Heurísticas em atividades de Modelagem Matemática?

A análise global leva em consideração as três atividades analisadas, buscando apresentar reflexões gerais sobre as relações entre Estratégias Heurísticas no desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática e as categorias fenomenológicas da Semiótica Peirceana.

3.4 ATIVIDADES ANALISADAS

As atividades analisadas nesta pesquisa foram aquelas em que a situação-problema foi sugerida pelos estudantes em seus respectivos grupos, bem como as informações necessárias para resolução do problema, a coleta de dados e outros procedimentos extramatemáticos planejados e desenvolvidos de forma autônoma, cabendo à pesquisadora o auxílio em questões relacionadas ao conhecimento matemático para a resolução.

3.4.1 Atividade de 2º momento: Resfriamento do Café

O resfriamento do café, atividade de Modelagem Matemática de segundo momento de familiarização, estudou o decaimento da temperatura do café de acordo com o tempo, considerando o material do recipiente em que cada amostra foi depositada. As ações que ocorreram no desenvolvimento desta atividade são apresentadas no Quadro 3.2.

Quadro 3.2 - Ações da atividade – Resfriamento do café

Data	N° de aulas	Ações empreendidas
30/08/2018	2 aulas de 50 minutos	Delimitação da situação-problema e coleta de dados,
06/09/2018	2 aulas de 50 minutos	Desenvolvimento do modelo matemático e comparação com os dados obtidos pelos outros grupos,
13/09/2018	1 aula de 50 minutos	Apresentação do modelo encontrado por cada grupo,

Fonte: A autora.

Os procedimentos extramatemáticos de como proceder para a coleta, a quantidade de café, como realizar a aferição, a utilização de cafeteira, o uso do termômetro culinário e copos de diferentes materiais foram definidos pelos alunos, divididos nos grupos.

3.4.2 Atividades de 3º momento: Atividades Práticas como Componente Curricular - APCC

Já as APCC foram desenvolvidas com base em temas escolhidos pelos estudantes, mantidos os mesmos grupos da atividade de segundo momento. As orientações para a atividade de terceiro momento foram realizadas fora do horário de aula, com todos os grupos e por mais de uma vez, de maneira presencial e utilizando aplicativos de conversas digitais e correio eletrônico, totalizando 7 encontros:

- 3 em aulas geminadas (2 aulas) de 50 minutos 08/11/2018, 13/11/2015 e 29/11/2018.
- 2 encontros para as orientações presenciais de 30 minutos 04/12/2018, 06/12/2018 um dia com cada grupo.
- Apresentação em 13/12/2018, 2 aulas de 50 minutos.
- Entrevista no dia 18/12/2018, com duração de 1 aula de 50 minutos.

O Grupo 1 investigou uma alternativa para a substituição do fermento industrializado que, segundo pesquisas realizadas pelos estudantes, libera alumínio no momento de sua fermentação. Assim, o modelo desenvolvido pelo grupo descreve graficamente a eficiência do fermento caseiro em comparação com o industrializado no crescimento da massa de um bolo (Quadro 3.3).

Quadro 3.3 – Resumo do desenvolvimento da atividade do grupo 1

Data	Atividade	Participantes
08/11/2018	Exemplificação de atividades Divisão de grupos Escolha de tema Elaboração da situação-problema	G1E1, G1E2 e G1E3
13/11/2018	Busca por informações Elaboração de hipóteses Planejamento de coleta de dados	G1E1, G1E2 e G1E3
29/11/2018	Interpretação e validação do primeiro modelo matemático	G1E1, G1E2 e G1E3
04/12/2018	Interpretação e validação do segundo modelo matemático	G1E1, G1E2 e G1E3
13/12/2018	Apresentação da atividade desenvolvida	G1E1, G1E2 e G1E3
18/12/2018	Entrevista	G1E2

Fonte: A autora.

Já o Grupo 2 estudou os indicadores ácido-base, substâncias naturais ou sintéticas que têm a propriedade de mudarem de cor em função do pH, potencial hidrogeniônico, do sistema, apresentando uma coloração em meio ácido e outro em meio básico. Para tanto utilizaram a antocianina[6] (Quadro 3.4), intuindo diminuir custo para experimentos químicos que trabalham com o Potencial Hidrogeniônico (pH), responsável por indicar a quantidade de cátions hidrônio (H^+ ou H_3O^+). Portanto, quanto maior a concentração de íons, mais ácida será a solução, e vice-versa.

Além de realizar uma mistura entre dois compostos testados pela antocianina, um ácido e um básico, buscando analisar volume de ácido necessário pra neutralizar a mistura básica.

[6] As antocianinas são fitoquímicos solúveis em água com uma cor vermelha a azul típica. As antocianinas pertencem ao grupo de flavonóides, moléculas polifenólicas contendo 15 átomos de carbono e que podem ser visualizadas como dois anéis de benzeno unidos a uma cadeia curta de três carbonos. Acessado em 10 de junho de 2020: https://www.portalsaofrancisco.com.br/alimentos/antocianinas.

Quadro 3.4 – Resumo do desenvolvimento da atividade do grupo 2

Data	Atividade	Participantes
08/11/2018	Exemplificação de atividades Divisão de grupos Escolha de tema Elaboração da situação-problema	G2E1 e G2E2
13/11/2018	Busca por informações Elaboração de hipóteses Planejamento de coleta de dados	G2E1 e G2E2
29/11/2018	Interpretação e validação do primeiro modelo matemático	G2E1 e G2E2
06/12/2018	Orientação para finalização da atividade de Modelagem Matemática	G2E1 e G2E2
13/12/2018	Apresentação da atividade desenvolvida	G2E1 e G2E2
18/12/2018	Entrevista	G2E1

Fonte: A autora.

A análise das três atividades apresentadas neste texto, bem como a percepção sobre as demais tarefas planejadas e desenvolvidas com os alunos subsidiadas pelo aporte teórico discutido nos capítulos 1 e 2, em ambiente educacional, nos mostraram o potencial da Modelagem Matemática como alternativa pedagógica para a evidenciação de Estratégias Heurísticas e o conhecimento matemático revelado pela análise dos signos utilizados e produzidos no fazer Modelagem.

Com as três atividades analisadas, a atividade do 1º momento e a atividade do grupo 3 organizamos o produto educacional.

3.5. O PRODUTO EDUCACIONAL

Para além de elaborarmos atividades de Modelagem Matemática para alunos da Licenciatura em Química, seguindo os referenciais teóricos adotados para esta pesquisa, nos propomos a construir um material que auxilie a prática docente. O material se configura como o Produto Educacional que consiste em um caderno de atividades de Modelagem para o professor interessado em implementar essa alternativa pedagógica em suas aulas. Trata-se de Atividades de Modelagem Matemática para licenciatura em Química.

O Produto Educacional (Figura 3.2) é um material curricular, já que segue as descrições propostas por Aguiar e Oliveira (2014), tendo como objetivo estabelecer uma comunicação com professores para desenvolver um determinado conteúdo. Para tanto, nosso produto é constituído de uma ficha técnica com conteúdos e objetivos de cada atividade, bem como as Estratégias Heurísticas evidenciadas em cada momento de familiarização, além da atividade para impressão e uma solução. Essas atividades buscam complementar a interação entre professores e alunos nas aulas de Cálculo Diferencial e Integral I.

Figura 3.2 - Capa do produto Educacional

Fonte: A autora.

Com este material buscamos valorizar o trabalho em grupo, além de incentivar a investigação, motivada pelo interesse dos alunos em utilizar conteúdo da Matemática para a resolução de situação-problema da vida real, conforme sugerido por Almeida, Silva e Vertuan (2012).

Neste sentido, para que a familiarização com as atividades ocorra, entendemos que se faz necessário compreender como se caracteriza uma atividade de Modelagem Matemática, a familiarização gradativa e as Estratégias Heurísticas reveladas nos momentos de familiarização. Por isso, cada qual será abordado brevemente no texto do Produto Educacional que tem a seguinte estrutura: Carta aos professores, introdução, apresentando a Modelagem Matemática como alternativa pedagógica, momentos de familiarização, Estratégias Heurísticas reveladas na Modelagem Matemática, atividades desenvolvidas, algumas considerações e as referências.

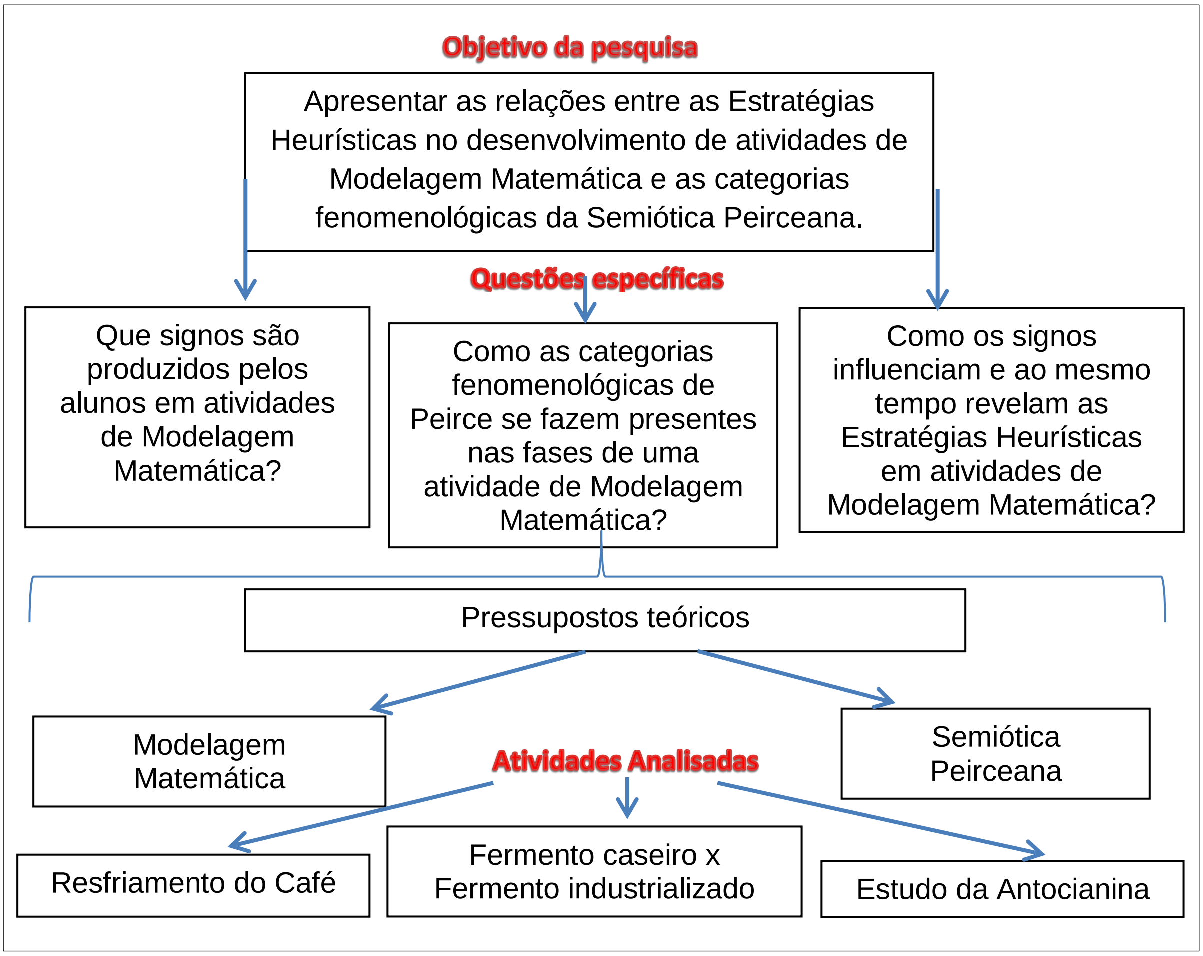
CAPÍTULO 4
DESCRIÇÃO E ANÁLISE DAS ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA

INTRODUÇÃO

Neste capítulo, apresentamos as três atividades de Modelagem Matemática selecionadas, seguidas da análise específica de cada uma à luz dos pressupostos teóricos estabelecidos, bem como da análise global empreendida em nossa pesquisa.

O quadro 4.1 mostra como as informações contidas neste capítulo estão organizadas, destacando o objetivo da pesquisa e as questões norteadoras.

Quadro 4.1 - Esquema de organização do Capítulo 4



Fonte: A autora.

4.1 Conduções das Análises

As análises que realizamos visam estabelecer reflexões sobre o objetivo que nos propusemos a estudar, a qual consiste em apresentar relações entre Estratégias Heurísticas no desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática e as categorias fenomenológicas da Semiótica Peirceana.

Conforme apresentado no Capítulo 3, selecionamos três atividades de Modelagem Matemática em que os próprios sujeitos da pesquisa realizaram a coleta de dados e também participaram da entrevista final com a pesquisadora.

Tendo em vista o objetivo, nossas análises se encontram respaldadas na pesquisa qualitativa interpretativa, uma vez que nossos resultados surgiram a partir da compreensão e das interpretações dos signos produzidos pelos sujeitos da pesquisa.

4.2 Descrição das Atividades e Análises Específicas

Ao descrever as atividades de Modelagem, focalizamos aspectos gerais das resoluções apresentadas pelos alunos. Fazemos a análise específica de três atividades de Modelagem Matemática intituladas “Resfriamento do Café”, “Fermento caseiro x Fermento industrializado” e “Estudo da Antocianina” com vistas a apresentar reflexões para as questões específicas (Figura 4.1).

4.2.1 Atividade 1: Resfriamento do café

A primeira atividade de Modelagem Matemática em que os alunos fizeram a coleta de dados teve como temática: *A relação entre o material da xícara e o resfriamento do café no decorrer do tempo,* buscando relacionar com conteúdos matemáticos da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I. Os alunos se reuniram em grupos com até três integrantes, definiram a situação-problema e planejaram a coleta de dados no laboratório da Universidade.

Em aula, cada grupo usou duas xícaras constituídas por materiais diferentes - acrílico, plástico, vidro, alumínio, alumínio esmaltado e porcelana -, foram disponibilizados termômetros culinários para a aferição da temperatura, utilizaram o cronômetro do aparelho telefônico para a marcação do tempo, becker para aferição do volume da amostra e computadores com *softwares* de ajuste de curvas como *CurveExpert*[7] *e Excel.*

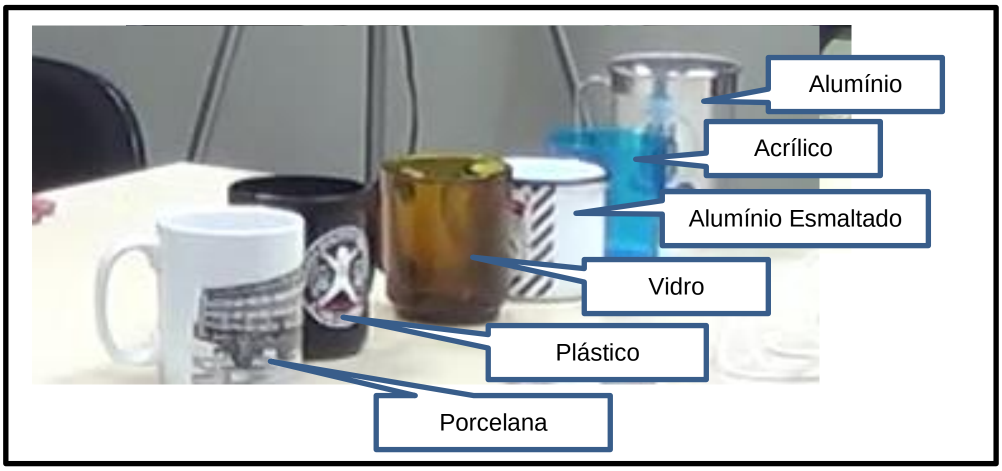
As informações que analisamos foram obtidas por meio dos registros escritos dos alunos, bem como pela transcrição de gravações em áudio e vídeo do desenvolvimento dessa atividade que, além da Professora Regente - PR, e a Pesquisadora - P, ainda contou com o auxílio de duas Professoras pesquisadoras do GEPMIT, PP1 e PP2. Apresentamos o modelo construído por cada grupo, da comparação de dois dos recipientes disponíveis, separadamente, além do gráfico comparativo de todos os materiais juntos e finalizamos com a análise do recipiente no qual a amostra de café obteve a menor perda de calor no decorrer do tempo, construído com o intuito de concluir a atividade juntamente com a pesquisadora.

4.2.1.1 Descrição da atividade 1

A coleta de dados para a atividade 1 foi iniciada no dia 30/08/2018, com 8 alunos divididos em três grupos: grupo 1 (G1E1, G1E2 e G1E3); grupo 2 (G2E1, G2E2 e G2E3); grupo 3 (G3E1 e G3E2). Os alunos e as professoras trouxeram e disponibilizaram 6 recipientes constituídos por diferentes materiais, conforme a figura 4.1 para a realização da coleta de dados.

[7] O *CurveExpert* é um *software* de solução para modelagem de curva e análise de dados. Os dados podem ser modelados usando uma caixa de ferramentas de modelos de regressão linear e não-linear, métodos de nivelamento ou vários tipos de estrias.

Figura 4.1 - Recipientes de diferentes materiais utilizados para coleta de dados



Fonte: Arquivo da Autora.

1º encontro: Os recipientes disponibilizados eram constituídos por alumínio, acrílico ou plástico fino, alumínio esmaltado, vidro, plástico e porcelana. Cada grupo escolheu dois recipientes (Quadro 4.2) e iniciamos a preparação para a coleta de dados.

Quadro 4.2 - Recipientes escolhidos pelos grupos

Grupo 1	Alumínio Esmaltado
	Porcelana
Grupo 2	Acrílico
	Vidro
Grupo 3	Alumínio
	Plástico

Fonte: A autora.

A Professora Regente iniciou com uma explicação sobre a escolha do tema, conforme transcrição abaixo:

> PR: Na aula passada quando estávamos decidindo qual seria a temática a ser investigada foi sugerido um estudo a respeito da quantidade de café influenciar ou não na perda de calor, mas vocês optaram por analisar essa perda em recipientes feitos com materiais diferentes, estão lembrados?
> [Todos balançam a cabeça em sinal positivo para a questão da Professora Regente.]
> PR: Então quais serão os passos para a coleta? Como vamos fazer? Alguém tem alguma sugestão?
> G3E2: Vamos colocar o café nos recipientes, direto da jarra.

> G2E3: Mas é difícil colocar certinho de uma vez, vai ter que ficar colocando aos poucos e vai perdendo calor até encher o último.
> G2E1: Vamos colocar a mesma quantidade de água nos recipientes, a gente marca com a caneta e depois coloca o café da jarra até a marcação.
> PR: Qual é a quantidade de café que vocês vão colocar?
> G3E2: Vamos colocar 200 ml.
> G1E3: Mas não é muito? A quantidade de café influencia?
> G2E1: Não sei... Influencia professora?
> PR: Então nós iríamos verificar, vocês lembram que era a primeira ideia?
> G1E3: Acho que 100 ml tá bom, vamos colocar igual em todos os recipientes para não ter dúvida.
> G2E1: É! Na verdade só tem que cobrir a parte que mede do termômetro.
> PR: O termômetro vai tirar e colocar ou vai deixar?
> G1E2: Vamos deixar! Aí a gente só olha e marca a temperatura.
> G3E2: Pode ser então. E quanto tempo vai deixar? Quem marca?
> G2E3: Eu marco. 5 minutos?
> G1E3: É muito! Não pode ser 2?
> [Olham para a Professora Regente, esperando a confirmação].
> PR: Pode ser gente, vocês que decidem.
> [...]

Para a coleta de dados, os alunos primeiro utilizaram um becker para medir o volume de 100 ml de água e colocaram em cada recipiente. Em seguida, riscaram com a caneta a altura na parte interna, marcando a quantidade de café que deveriam colocar, conforme sugestão de G2E1, para que não houvesse a necessidade de trocar da jarra de café para o becker e do becker para o recipiente, o que acarretaria a perda de calor para o ambiente.

Para fazer o café, utilizaram uma cafeteira elétrica, sugestão da PR. Cada grupo realizou a aferição de um recipiente por vez, já que tinham apenas 4 termômetros culinários disponíveis, ainda observaram que a temperatura máxima que poderia se aferida pelo instrumento era de 60º Celsius. Assim, a temperatura inicial considerada para o experimento foi de 60º C e a temperatura ambiente foi de 28º C (obtida com um termômetro de temperatura de ambiente).

Cada recipiente recebeu a mesma quantidade de café (100ml) e foram anotadas as temperaturas a cada dois minutos (Figura 4.2).

Figura 4.2 - Aferindo a temperatura inicial do café

Fonte: Arquivo da autora.

Todos os grupos marcavam em seus cadernos, ao mesmo tempo, utilizando o cronômetro dos aparelhos celulares, mas cada grupo, apenas do seu recipiente. Ao finalizar as aferições com as primeiras marcações, colocaram a mesma quantidade de café no segundo recipiente, mas observaram que a temperatura ambiente havia baixado para aproximadamente 26º C e assim foi iniciada a aferição no segundo recipiente (Figura 4.3).

Figura 4.3 - Coleta de dados – aferição da temperatura do café

Fonte: Arquivo da autora.

No decorrer do experimento, uma das Professoras Pesquisadoras discutiu com os alunos a respeito da expectativa quanto ao comportamento do fenômeno:

> PP1: E vocês tinham alguma expectativa do comportamento do fenômeno? O que vocês esperavam?
> G3E2: Eu esperava que fosse linear.
> PR: Você pensou que o comportamento fosse linear?
> G3E2: Sim, mas eu vi primeiro caiu rápido a temperatura, depois devagar.
> G2E2: Eu não, toda vez que eu penso em comportamento eu penso numa reação química.
> G3E2: Mas que reação química acontece aqui?
> G2E2: Não, eu uso como referência, porque, por exemplo, quando eu tenho uma quantidade maior de reagente a produção vai ser mais rápida, vai gerando produto e a medida que vai se equilibrando vai diminuindo, por isso não iria ser linear.

Os alunos finalizaram a aferição da temperatura e cada grupo entregou para a Professora Regente sua coleta conforme o Quadro 4.3, para que as análises de dados e a construção do modelo acontecessem em sala de aula conforme recomendação da outra Professora Pesquisadora:

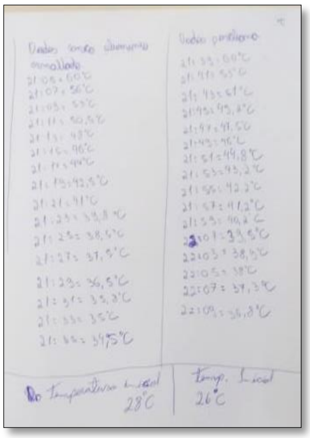
> PP2: É importante que vocês trabalhem os dados aqui, para ver como vocês pensaram. Se for na casa de vocês a gente não entende como vocês fizeram.

Cada uma das etapas durou 30 minutos e ao final dessas aferições cada grupo já tinha observado qual dos dois recipientes, que testaram mantinha a temperatura maior por mais tempo. Do grupo 1: a porcelana; do grupo 2: o vidro e do grupo 3: o plástico, conforme apresentado no Quadro 4.2[8]. Assim foi finalizado o primeiro encontro do desenvolvimento da atividade.

[8] Optamos por inserir imagens das anotações dos alunos. Como as mesmas não ficaram legíveis, digitamos, em quadros, de forma a podermos visualizar.

Quadro 4.3 - Coleta de dados dos grupos

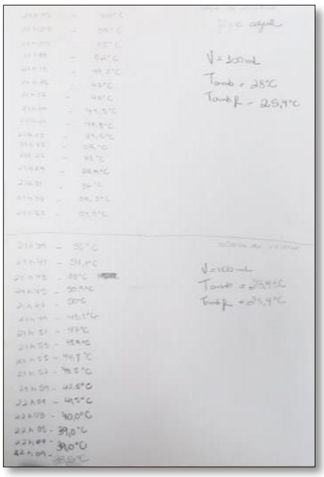
Dados coletados pelo grupo 1



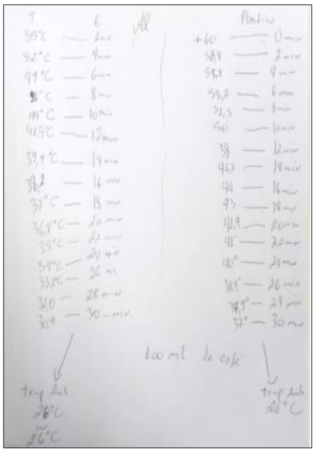
Alumínio Esmaltado		Porcelana	
x: Minutos	y: ºC	x: Minutos	y: ºC
2	56	2	53
4	53	4	51
6	50.5	6	49.2
8	48	8	47.5
10	46	10	46
12	44	12	44.8
14	42.5	14	43.2
16	41	16	42.2
18	39.8	18	41.2
20	38.5	20	40.2
22	37.5	22	39.5
24	36.5	24	38.9
26	35.8	26	38
28	35	28	37.3
30	34.5	30	36.8

Dados coletados pelo grupo 2

Acrílico		Vidro	
x: Minutos	y: ºC	x: Minutos	y: ºC
2	59	2	55
4	55	4	54.1
6	52	6	53
8	49.2	8	50.9
10	47	10	50
12	45	12	48.1
14	43.5	14	47
16	40.5	16	45.9
18	39.5	18	44.8
20	39	20	43.5
22	38	22	42.5
24	36.9	24	41.5
26	36	26	40
28	35.5	28	39
30	34.9	30	38.5



Dados coletados pelo grupo 3



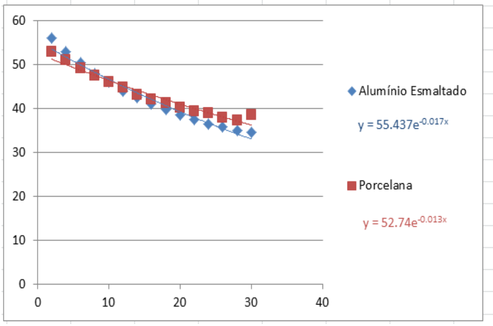
Alumínio		Plástico	
x: Minutos	y: ºC	x: Minutos	y: ºC
2	55	2	58.8
4	52	4	55.8
6	49	6	53.2
8	46	8	51.3
10	44	10	50
12	41.9	12	48
14	39.9	14	46.7
16	38.2	16	44
18	37	18	43
20	36.8	20	41.9
22	35	22	41
24	34	24	40
26	33.3	26	38.9
28	32	28	37.9
30	30.4	30	37

Fonte: Dados da pesquisa.

2º encontro: Os grupos utilizaram os softwares para plotar os pontos e analisar a curva de dispersão. O grupo 1 utilizou o *Excel* para comparar as linhas de tendências dos dados coletados no mesmo gráfico, o grupo 2 utilizou o mesmo software, mas optou por fazer os gráficos separados de cada recipiente e o grupo 3 utilizou o *Curve Expert* e apresentou diferentes signos para representar uma função exponencial, conforme a Figura 4.4.

Figura 4.4 - Gráfico de Temperaturas dos grupos

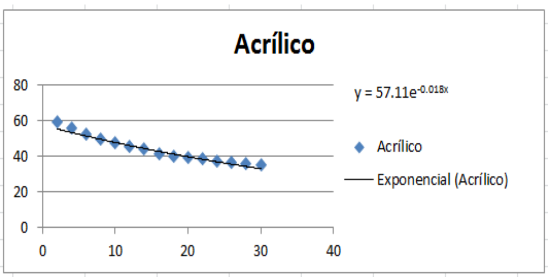
Grupo 1

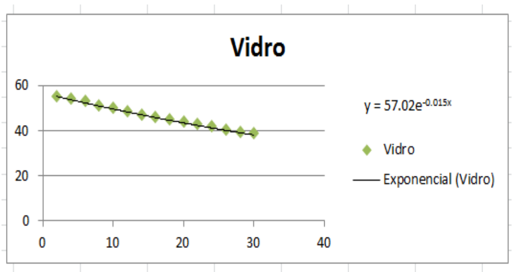


Azul: Alumínio Esmaltado - Inicial: 56º C e Final: 34,5º C

Vermelho: Porcelana - Inicial: 53º C e Final: 36,8º C

Grupo 2

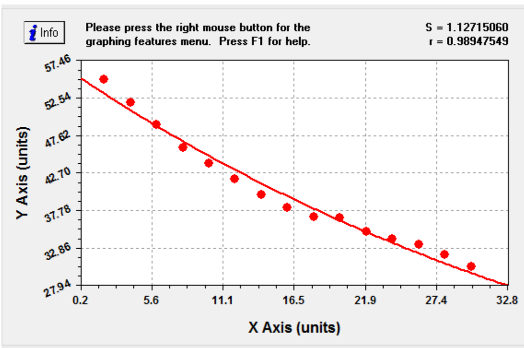


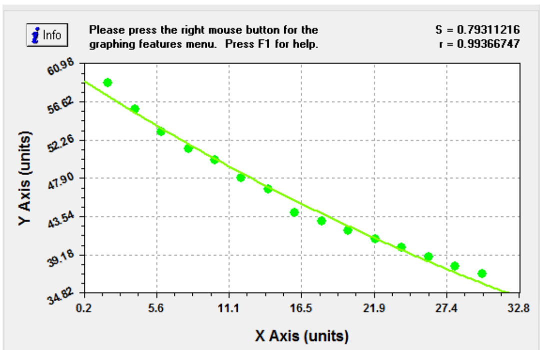


Azul: Acrílico - Inicial: 59º C e Final: 34,9º C

Verde: Vidro - Inicial: 55º C e Final: 38,5º C

Grupo 3





Vermelho: Alumínio - Inicial: 55º C e Final: 30,4º C

Verde: Plástico - Inicial: 58,8º C e Final: 37º C

Fonte: Dados da pesquisa.

Vale destacar que cada etapa de aferição de temperatura, em cada recipiente, durou 30 minutos e os alunos já haviam estudado os conteúdos referentes a funções e limites de funções em aulas regulares ministradas pela professora regente.

Para relacionar os conteúdos conhecidos ao experimento, cada grupo discutiu entre si e delineou a linha de tendência que melhor descrevia o comportamento do fenômeno, conforme transcrição do grupo 2:

> G2E1: Será que é exponencial?
> G2E2: Acho que é sim... Por quê?
> G2E1: Porque o R-quadrado[9], da quadrática é maior no vidro.
> G2E2: Vixi, mas e agora? A gente pode considerar uma função quadrática se restringir o domínio. Mas... não sei.

Os alunos do grupo chamam a pesquisadora para decidir qual era a melhor linha de tendência.

> P: Certo, mas o R-quadrado está considerando só os pontos que estão colocados, mas se a gente considerar a função toda, o resfriamento do café tem um comportamento mais parecido com uma função quadrática ou exponencial?
> G2E2: Exponencial, se o café não for aquecido novamente e considerando a média das temperaturas ambiente, a temperatura do café não vai subir.

Assim, cada grupo escolheu o modelo que melhor apresentou o resfriamento do café nos recipientes escolhidos, dados pelos softwares que utilizaram. Para isso consideraram *y* temperatura (em ºC) do café em função do tempo *x* (em minutos), conforme Quadro 4.4.

Quadro 4.4 - Modelos matemáticos dos grupos

Grupo	**Material**	**Modelo Matemático**
1	Alumínio Esmaltado	$y = 55{,}437e^{-0{,}017x}$
	Porcelana	$y = 52{,}74e^{-0{,}013x}$
2	Acrílico	$y = 57{,}11e^{-0{,}018x}$
	Vidro	$y = 57{,}02e^{-0{,}015x}$
3	Alumínio	$y = 55{,}37e^{-0{,}02x}$
	Plástico	$y = 59{,}19e^{-0{,}017x}$

Fonte: Dados da pesquisa.

[9] O R-quadrado é uma medida estatística de quão próximos os dados estão da linha de regressão ajustada. Ele também é conhecido como o coeficiente de determinação ou o coeficiente de determinação múltipla para a regressão múltipla.

Feito isso, foi necessária a mediação da Professora Regente para a interpretação dos gráficos mediante os conteúdos trabalhados em sala, além de auxiliar na discussão da situação e esclarecimento de dúvidas, conforme a transcrição da aula:

> PR: O que vocês querem investigar?
> G2E2: Como o café vai resfriando com o passar do tempo, dependendo do material do recipiente em que está.
> PR: O que vocês conseguem concluir com o gráfico?
> G3E1: Que é decrescente?!
> PR: E o que mais? O que vocês pensam do comportamento?
> G3E2: Acho que é o comportamento de uma exponencial, porque começa a perder calor rápido e depois mais devagar. Até o equilíbrio térmico.
> G2E2: Podemos ver a variação da temperatura. Qual recipiente deixa o café perder mais calor com o tempo.
> [...]

Finalizamos o segundo encontro com a análise da variação de temperatura de cada recipiente (Quadro 4.5) para finalizar com uma análise com todos os recipientes na aula seguinte.

Quadro 4.5 - Variação da temperatura conforme o experimento

Grupo 1	Alumínio Esmaltado	Δ=21,5
	Porcelana	Δ=16,2
Grupo 2	Acrílico	Δ=24,1
	Vidro	Δ=16,5
Grupo 3	Alumínio	Δ=24,6
	Plástico	Δ=21,8

Fonte: Dados da pesquisa.

Concluindo, deste modo, que a porcelana é o recipiente com a menor variação de temperatura e o alumínio é o recipiente de maior variação de temperatura.

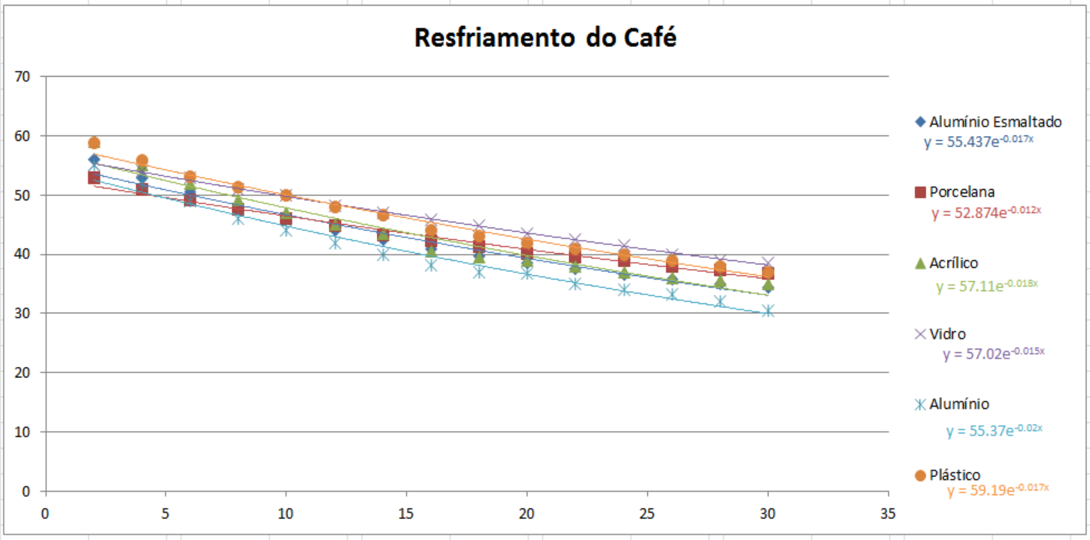
No 3º encontro: Após a construção do modelo matemático, o cálculo da variação de temperatura pelos grupos realizados na aula anterior, a turma juntamente com a pesquisadora analisou os resultados:

> P: Boa noite, hoje vamos concluir a atividade do resfriamento do café. Então vocês encontraram funções exponenciais que descrevem o comportamento desse resfriamento, certo? Pelo que eu acompanhei o recipiente com menor perda de calor foi a porcelana. Será que

> conseguiríamos descobrir quando à temperatura do café, que estava na porcelana, chega a temperatura ambiente?
> G3E2: Se a gente usar a função dá!
> P: Se utilizarmos a função exponencial e fazer no Excel como se tivéssemos continuado a experiência, já que o Excel faz isso rapidinho, poderíamos validar o modelo comparando as temperaturas que o modelo oferece com os dados coletados e vocês decidem se é válido ou não.
> [...]

Foi construído um gráfico de comparação do comportamento de todos os recipientes conforme Figura 4.5. Os cálculos realizados, no *Excel,* permitiram prever o tempo decorrido para que a temperatura do café alcançasse o equilíbrio térmico, considerando a temperatura ambiente como a média das duas etapas, 27º Celsius.

Figura 4.5 - Comparação de recipientes segundo modelo fornecido pelo software



Alumínio Esmaltado	
$y = 55.437e^{-0.017x}$	
x: Minutos	y: Graus ºC
32	32.2
34	31.2
36	30.1
38	29.1
40	28.1
42	27.2
44	26.3

Porcelana	
$y = 52.74e^{-0.013x}$	
x: Minutos	y: Graus ºC
32	34.8
34	34.0
36	33.1
38	32.2
40	31.4
42	30.6
44	29.8
46	29.1
48	28.3
50	27.6
52	26.9

Acrílico	
$y = 57.11e^{-0.018x}$	
x: Minutos	y: Graus ºC
32	32.2
34	31.0
36	29.9
38	28.9
40	27.9
42	26.9

Vidro	
$y = 57.02e^{-0.015x}$	
x: Minutos	y: Graus ºC
32	35.3
34	34.3
36	33.3
38	32.3
40	31.4
42	30.4
44	29.5
46	28.7
48	27.8
50	27.0

Alumínio	
$y = 55.37e^{-0.02x}$	
x: Minutos	y: Graus ºC
32	28.5
34	27.4
36	26.2

Plástico	
$y = 59.19e^{-0.017x}$	
x: Minutos	y: Graus ºC
32	34.9
34	33.7
36	32.6
38	31.6
40	30.5
42	29.5
44	28.6
46	27.6
48	26.7

Fonte: Dados da pesquisa.

Por conseguinte, dos cálculos realizados no software, provisionamos o equilíbrio térmico das amostras em cada um dos recipientes conforme Quadro 4.6.

Quadro 4.6 - Previsão do tempo para o equilíbrio térmico em cada um dos recipientes

Material do recipiente	**Tempo para equilíbrio térmico (27ºC)**
Alumínio Esmaltado	42,32 minutos
Porcelana	51,50 minutos
Acrílico	41,62 minutos
Vidro	49,84 minutos
Alumínio	35,91 minutos
Plástico	46,17 minutos

Fonte: Dados da pesquisa.

Com isso, o recipiente de porcelana foi o que apresentou a menor variação de temperatura, em 30 minutos e levará por volta de 52 minutos para alcançar a temperatura de 27º C.

4.2.1.2 Análise específica da Atividade 1

A situação inicial se originou a partir da sugestão da Professora Regente, para que os alunos aprendessem a “fazer modelagem”, fazendo.

Neste sentido, inferimos que a Primeiridade Peirceana, segundo Almeida, Silva e Vertuan (2011), se fez presente com ideia de fazer uma atividade de Modelagem Matemática com o tema resfriamento do café. As primeiras discussões a respeito da definição do problema, quantidade de café e tempo de resfriamento ou a influência do recipiente para o resfriamento (Quadro 4.7) refletem as primeiras impressões com o tema. Além de evidenciarmos as Estratégias Heurísticas “organize seu material / entenda o problema”.

Quadro 4.7 - Identificação da Primeiridade

Primeiridade →	PR: Na aula passada quando estávamos decidindo qual seria a temática a ser investigada foi sugerido um estudo a respeito da quantidade de café influenciar ou não na perda de calor, mas vocês optaram por analisar essa perda em recipientes feitos com materiais diferentes, estão lembrados? [Todos balançam a cabeça em sinal positivo para a questão da Professora Regente].

Fonte: A autora.

Seguindo em busca da inteiração com o problema, as Estratégias Heurísticas denominadas de “organize seu material/ entenda o problema” e “utilize sua memória de trabalho de maneira eficaz” se verificam no planejamento das ações para a realização da coleta de dados (Quadro 4.8), em que o “grande” problema foi dividido em subproblemas e resolvido conforme foram sendo identificados.

Quadro 4.8 - Estratégias Heurísticas “use sua memória de trabalho de maneira eficaz” e “organize seu material/entenda o problema”

Subproblema 1 →	PR: Então quais serão os passos para a coleta? Como vamos fazer? Alguém tem alguma sugestão? G3E2: Vamos colocar o café nos recipientes, direto da jarra. G2E3: Mas é difícil colocar certinho de uma vez, vai ter que ficar
Subproblema 2 →	colocando aos poucos e vai perdendo calor até encher o último. G2E1: Vamos colocar a mesma quantidade de água nos recipientes, a gente marca com a caneta e depois coloca o café direto da jarra até a marcação.
Subproblema 3 →	PR: Qual é a quantidade de café que vocês vão colocar? G3E2: Vamos colocar 200 ml.
Subproblema 4 →	G1E3: Mas não é muito? A quantidade de café influencia?

Fonte: A autora.

Assim, essa corporificação do problema denota a secundidade. Para Santaella (2008), trata-se da reação do pensamento passada a primeiridade. Logo, entendemos que são ações segundas, como sugerem Almeida, Silva e Vertuan (2011).

Neste sentido, ao adentrar a secundidade observamos a fase de matematização, (ALMEIDA, 2018), transformação de uma situação real para a linguagem matemática. Com isso, ocorre a utilização de uma Estratégia

Heurística “verifique aspectos funcionais”, já que há a busca por conexões entre os dados e o problema para sua resolução. É preciso selecionar variáveis e definir hipóteses para subsidiar a construção do modelo.

A turma identificou como variável dependente a temperatura do café e o tempo a variável independente, conforme Quadro 4.9:

Quadro 4.9 - Identificação de Variáveis e Hipóteses

Variáveis → G2E2: Como o café vai resfriando com o passar do tempo, dependendo do material do recipiente em que está.

PR: o que vocês conseguem concluir com o gráfico?

G3E1: que é decrescente?!

PR: E o que mais? O que vocês pensam do comportamento?

G3E2: Acho que é o comportamento de uma exponencial, porque começa a perder calor rápido e depois mais devagar. Até o equilíbrio térmico.

G1E2: Podemos ver qual material faz a temperatura do café baixar mais em menos tempo. Vamos calcular a variação de temperatura.

Hipóteses

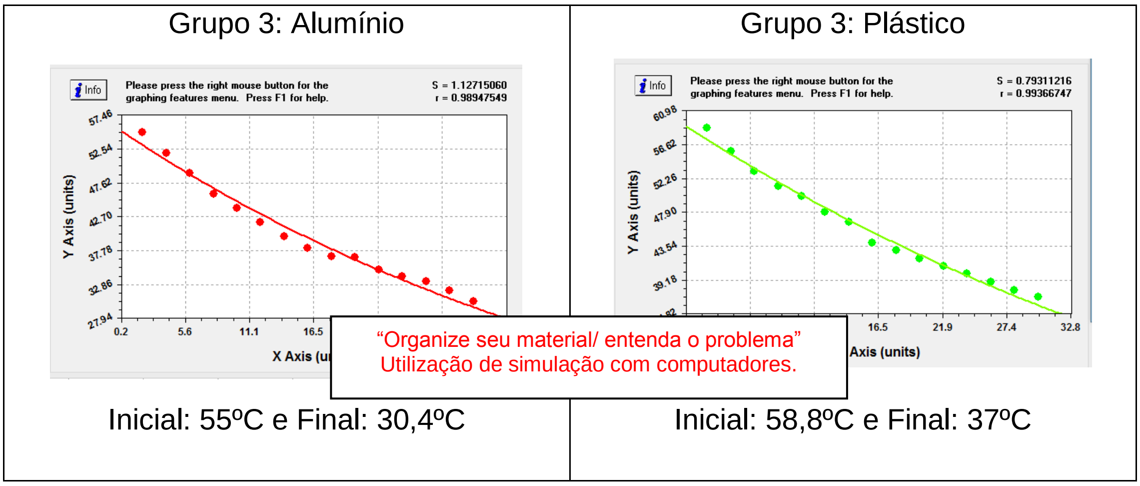
Fonte: A autora.

Pelas falas apresentadas no Quadro 4.9 ficam evidentes alguns signos matemáticos - “descrescente”, “exponencial” e “variação” -, além de signos químicos - “equilíbrio térmico” -, ainda que não relacionem esses signos com o objeto. Segundo Almeida, Silva e Vertuan (2011) a terceiridade pode ser evidenciada pela continuidade do estudo do problema, isto é, na busca pela ligação entre a primeiridade e a secundidade na obtenção e dedução do modelo matemático, na interpretação e validação dos resultados em conformidade com a situação-problema investigada.

Os grupos realizaram a transformação do signo tabela em gráfico (Figura 4.4). Com isso, evidenciamos as Estratégias Heurísticas enunciadas por Stender (2018) como “entenda o problema” e “use sua memória de trabalho de forma eficaz”, uma vez que ao analisarem a dispersão dos pontos inferiram que o comportamento do fenômeno é exponencial, então há a utilização de simulações com computadores lhes permitem “lembrar” do comportamento de uma função exponencial (Figura 4.6).

Inferimos que os signos produzidos e utilizados na construção do modelo matemático mostra o entendimento dos alunos no que se refere à função exponencial e análise de gráficos ao considerar que o comportamento exponencial melhor descreve o fenômeno. Quando entendem que há o equilíbrio térmico, os alunos consideram que há um limite para a temperatura de resfriamento do café.

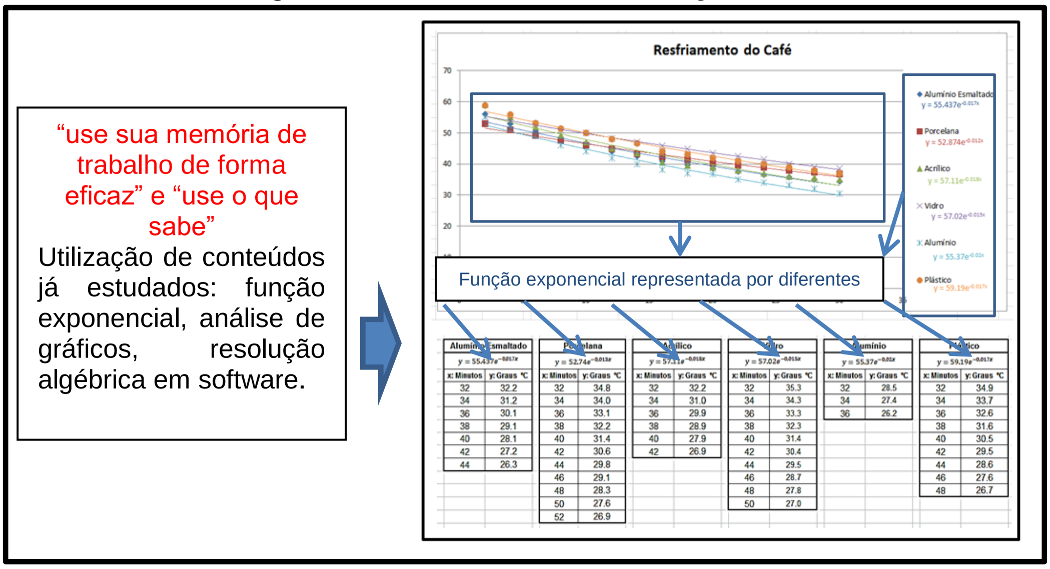
Figura 4.6 - Construção do Modelo Matemático



Fonte: A autora.

Para Stender (2018), as Estratégias Heurísticas intituladas “use sua memória de trabalho de forma eficaz” e “use o que sabe” possibilita relembrar conteúdos conhecidos e associar a resoluções de situações-problema (Figura 4.7): função exponencial, intervalo e análise de gráficos. Logo, seguindo as assertivas de Almeida, Silva e Vertuan (2011), a interpretação do resultado se relaciona à terceira categoria fenomenológica.

Figura 4.7 - Terceiridade e as Estratégias Heurísticas



Fonte: A autora.

Nesta atividade, o tema do estudo da temperatura do café foi sugerido pela professora, mas a coleta de dados e os encaminhamentos escolhidos foram realizados pelos alunos que ao desenvolverem a atividade revelaram o uso de Estratégias Heurísticas (Quadro 4.10).

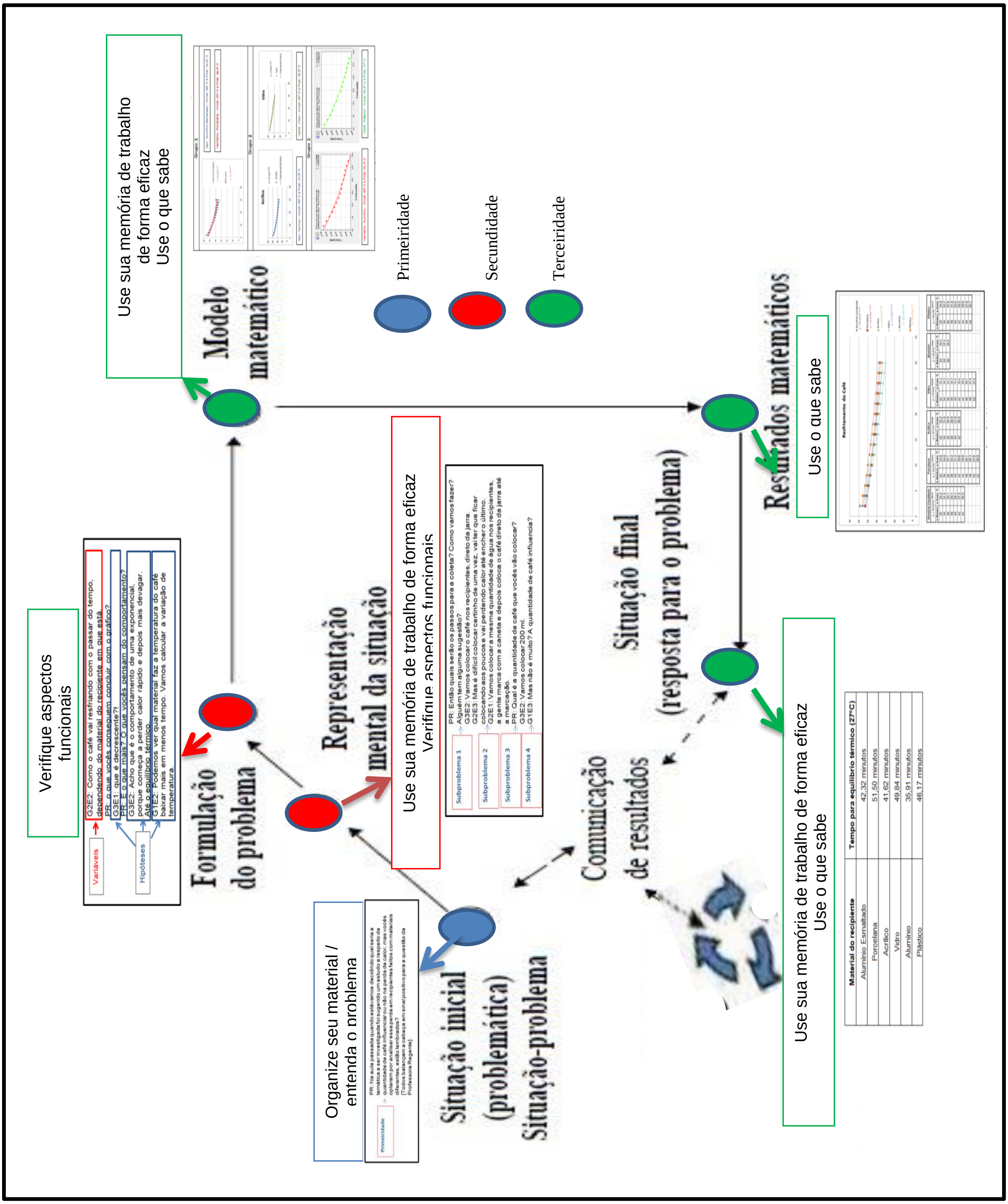
Quadro 4.10 - Relações entre Modelagem Matemática e Estratégias Heurísticas

Modelagem Matemática	Estratégia Heurística
Inteiração	"organize seu material/entenda o problema" "use a memória de trabalho de forma eficaz"
Matematização	"verifique aspectos funcionais"
Dedução do Modelo Interpretação de Resultados	"use sua memória de trabalho de forma eficaz" "use o que sabe"
Validação	"organize seu material/ entenda o problema" "use o que sabe"

Fonte: A autora.

Assim, as Estratégias Heurísticas identificadas na Modelagem Matemática por Stender (2018) podem ser associadas às categorias fenomenológicas de Peirce (figura 4.8). Já que na primeiridade, observamos o uso de Estratégias Heurísticas. "organize seu material/ entenda o problema". Na secundidade identificamos "use a memória de trabalho de forma eficaz" e "verifique aspectos funcionais". Finalizando com as estratégias "verifique aspectos funcionais", "use o que sabe" e "use a memória de trabalho de forma eficaz" na terceiridade.

Figura 4.8 - Associação das bases teóricas para a atividade 1



Fonte: A autora.

4.2.2 Atividade 2: Fermento Caseiro X Fermento Industrializado

A segunda atividade de Modelagem Matemática em que os alunos fizeram a coleta de dados, se caracterizou como uma atividade de terceiro momento de familiarização com temática escolhida pelos próprios grupos. A comparação entre um fermento caseiro e outro industrializado no crescimento de um bolo foi investigada. Os alunos se reuniram em grupos com três integrantes, definiram a situação-problema, planejaram a coleta de dados, construíram um relatório da atividade e apresentaram os resultados encontrados.

4.2.2.1 Descrição da atividade 2

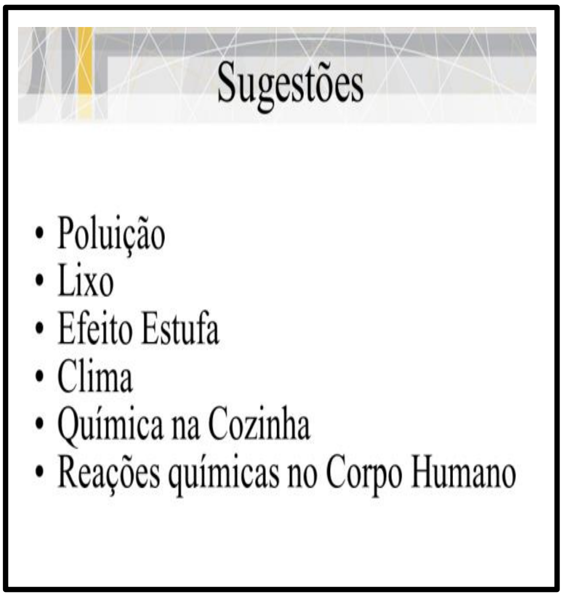
A atividade 2 foi iniciada no dia 08/11/2018 e finalizada no dia 13/12/2018. A situação-problema foi escolhida pelo grupo 1 formado por 3 alunos, G1E1, G1E2 e G1E3.

1º encontro: no dia 08/11 ocorreu o desenvolvimento da atividade de Modelagem Matemática, conforme fragmentos dos questionamentos do grupo, transcritos a seguir:

> G1E1: Então nós temos que entregar um relatório e também apresentar para a sala?
> P: Resumidamente falando, cada grupo, deve entregar [pesquisadora escreve no quadro os trabalhos para entrega]:
> - Relatório de Atividade;
> - Proposta de Atividade de Modelagem Matemática;
> - Apresentação com Slide.
>
> G1E3: Mas o que tem que ter no relatório?
> P: A estrutura básica seria: Capa; Folha de Rosto; Introdução – com a apresentação e justificativa do tema escolhido e situação-problema a ser investigada; Desenvolvimento – coleta e análise de dados, resolução da atividade; Algumas Considerações – relatando as conclusões do grupo.
> P: A atividade de Modelagem Matemática deverá ser resolvida no relatório, mas, cada grupo, também enviará uma proposta, como esta. [a pesquisadora mostra uma atividade de modelagem matemática que os alunos já haviam desenvolvido, a atividade Vai de Gasolina ou Etanol?]
> P: E no último dia de aula, cada grupo, irá apresentar a atividade que desenvolveu e os resultados que encontraram por meio dos conteúdos matemáticos.
> [...]

As figuras 4.9 e 4.10 ilustram o desenrolar do primeiro encontro, apresentando as sugestões de temas da pesquisadora e os alunos do grupo 1 no processo de escolha de tema.

Figura 4.9 - Sugestão de temas



Fonte: Arquivo da autora.

Figura 4.10 - Escolha de tema grupo 1

Fonte: Arquivo da autora.

O grupo então optou pela temática “Química na cozinha”, buscando relacionar reações químicas cotidianas, conteúdos matemáticos e químicos escolares para formular uma situação-problema a ser estudada conforme excerto transcrito a seguir:

> P: Já decidiram?
> [G1E3 balança a cabeça em sinal afirmativo]
> G1E3: Nós conversamos e [silêncio do grupo]. Será que podemos estudar o fermento?
> P: Qual é a ideia do grupo?
> G1E2: A gente queria explicar a fermentação, a reação química, sabe?
> P: Certo, mas qual seria o problema a ser estudado?
> G1E3: Ah! Em quanto tempo o fermento é consumido?!
> P: Legal! Como vocês pensam em fazer a coleta?
> G1E1: Professora, a gente vai pensar mais um pouco...
> [Alguns minutos depois, enquanto houve a orientação de outros grupos].
> [G1E3 levanta o braço para chamar a pesquisadora].
> G1E3: A gente pensou em comparar dois fermentos.
> P: O que vocês desejam descobrir nessa comparação?
> G1E2: Ah! Qual dos dois é melhor!
> P: Melhor... em que sentido? O que é ser um fermento melhor para vocês?
> G1E2: O que fica mais gostoso e que cresce mais!

> P: Mas, o sabor é difícil de ser medido, algo gostoso pra mim, pode não ser para você... entende?! Já a altura, acho que conseguimos comparar...
> G1E2: Então, se a gente verificar se o fermento caseiro faz a mesma coisa que o químico, pode dar certo?
> P: Esta questão vocês irão me responder, será que conseguimos responder matematicamente problemas não essencialmente matemáticos?
> P: Para a próxima aula, vocês pesquisarão informações a respeito da fermentação, receitas com fermentos caseiros, meios de coleta de dados, entre outras informações que julgarem necessárias.

Assim, finalizamos o primeiro encontro com a definição do tema, da situação-problema e a tarefa de pesquisa de informações para o próximo encontro.

2º encontro: no dia 13/11, em aula regular, os alunos já trouxeram informações sobre a fermentação, constataram que o fermento químico ao ser consumido, devido à exposição à alta temperatura, libera substâncias tóxicas à saúde. Os alunos também encontraram uma mistura caseira alternativa, que é equivalente ao fermento industrializado. No Quadro 4.11, apresentamos trechos do relatório da atividade do grupo 1 que apresentam estas informações.

Quadro 4.11 – Informações complementares trazidas pelo grupo 1

Fermento químico é o produto formado de substância ou mistura de substâncias químicas que, pela influência do calor e/ou umidade, produz desprendimento gasoso capaz de expandir massas elaboradas com farinhas, amidos ou féculas, aumentando-lhes o volume e a porosidade.

Ao ser aquecido, o fermento industrializado sofre a decomposição, conforme a equação química a seguir:

$$\mathbf{2\ NaHCO_3 \rightarrow Na_2CO_3 + H_2O + CO_2}$$

... o fermento químico industrializado, que contém transgênicos e substâncias químicas tóxicas (alumínio) para nosso organismo.

Receita Caseira:

- 4 colheres de chá de Cremor de Tártaro;
- 2 colheres de chá parte de Bicarbonato de Sódio.

Fonte: Dados da pesquisa.

Com essas informações em mãos, o grupo 1 apresentou para a pesquisadora procedimentos para a coleta de dados, bem como as variáveis e as hipóteses relacionadas à situação-problema a ser investigada, conforme excerto transcrito a seguir:

> P: Então? Buscaram informações sobre a fermentação?
> G1E3: Sim! [entrega um resumo contendo as informações descritas resumidamente no Quadro 4.12].
> P: Que interessante! Qual era a situação-problema que vocês iriam investigar?
> G1E2: A gente pensou em comparar o fermento industrializado e um fermento caseiro, para saber se essa mistura caseira é tão eficiente quanto o fermento industrializado.
> P: Como vocês pretendem verificar?
> G1E2: A gente tinha pensado em fazer pão, mas ninguém sabe fazer, então decidimos fazer dois bolos. Um com o fermento industrializado e outro com a mistura que G1E1 fez.
> P: O que vocês pretendem comparar?
> G1E2: Crescimento pelo tempo, alteração de sabor e textura.
> P: Ótimo, estas são as variáreis então: crescimento e tempo.

O grupo apresentou dificuldade em diferenciar a variável dependente e independente, assim houve a necessidade de apresentar a diferença:

> P: Como o crescimento do bolo depende do tempo, sabemos que a altura do bolo é a variável dependente e o tempo independente.
> P: O que o grupo tem como hipótese?
> G1E3: O fermento caseiro não traz malefícios à saúde.
> P: O que mais?
> G1E2: Depois da liberação de CO_2, o bolo para de crescer.
> P: Outros fatos importantes são que o fermento caseiro deve fazer crescer tanto ou mais, sem alterar o sabor do bolo para considerarmos tão eficiente quanto o industrializado. Além de o forno, a forma e a receita, sem o fermento, serem iguais.
> P: Como e quando vocês pretendem coletar os dados?
> G1E2: Vou fazer no final de semana, vou marcar a forma com marcações em centímetros.
> P: Certo! Boa coleta para vocês, não esqueçam de tirar fotos dos procedimentos e encontrar o modelo da atividade de modelagem matemática.

Ao fim do segundo encontro o grupo 1 já havia definido as hipóteses, variáveis e os procedimentos extramatemáticos para a coleta de dados.

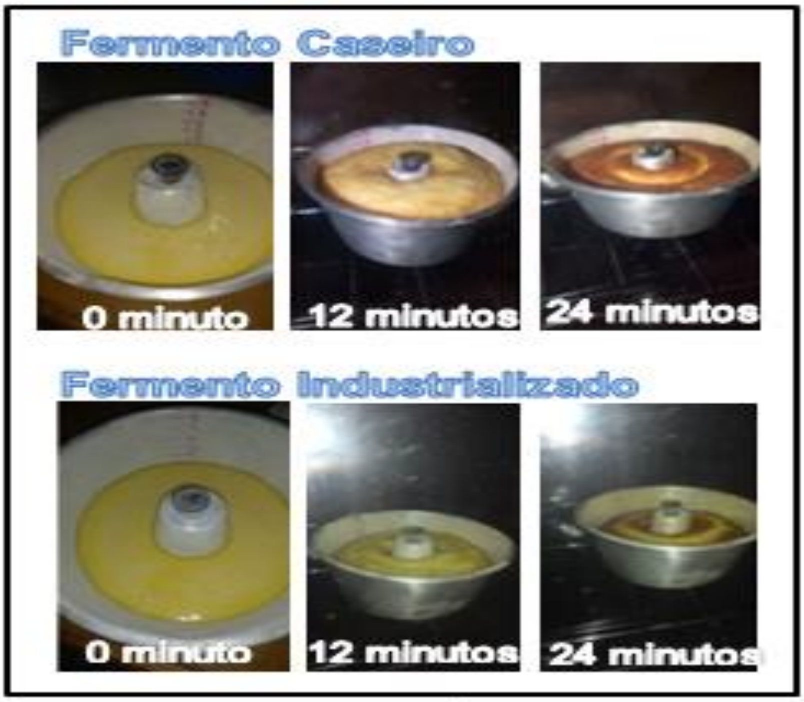
3º encontro: dia 29/11, em aula regular, os alunos apresentaram os dados e o relatório da atividade desenvolvida. Na transcrição do trecho a seguir, há o relato das estratégias utilizadas pelo grupo para o desenvolvimento da atividade de Modelagem Matemática.

> G1E1: Professora, já coletamos os dados!

P: Que bom! Contem como fizeram! Vocês estudaram a fermentação, né?!
G1E2: É! Na verdade a gente fez 2 bolos de fubá, marcamos uma forma e a cada 4 minutos olhamos a altura que estava marcando e anotamos, eu fiz o do cremor domingo e o industrializado, ontem a tarde... a gente trouxe para todo mundo experimentar.
P: Ah! E que prendados...[risos]. Interessante! E vocês irão utilizar a opinião dos colegas que provaram?
G1E3: Não! Só para que o pessoal comprove que a nossa mistura caseira é tão boa quanto o fermento industrializado.
P: Entendi! Qual é o problema que vocês investigaram?
G1E2: [pega o caderno e lê]... Esboçar um gráfico da fermentação dos bolos que comprove a eficiência do fermento caseiro.
P: Quais estratégias vocês utilizaram para resolver?
G1E3: Bom a gente se dividiu... G1E1 procurou, comprou e fez a mistura do fermento caseiro, G1E2 coletou os dados, fez os registros e eu coloquei os pontos no CurveExpert, que me deu uma regressão linear como modelo para os dois fermentos, observamos o gráfico e comprovamos a eficiência da mistura caseira.

A figura 4.11 apresenta a de coleta de dados realizada pelo grupo, observamos que inicialmente temos uma forma com marcações em centímetros e a mesma é utilizada para assar quantidades iguais de massa de bolo, no momento inicial com 3 cm de altura em ambas, as fotos foram tiradas apresentando o crescimento aos 12 minutos e aos 24 minutos de forno.

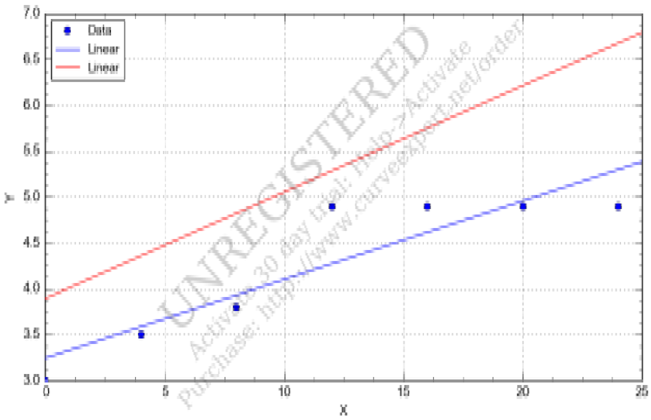
Figura 4.11 - Coletando dados com o cozimento de bolos



Fonte: Dados da pesquisa.

A figura 4.12 apresenta um primeiro modelo construído pelo grupo 1 por meio do software CurveExpert, em que x representa o tempo (em minutos) de forno e $f(x)$ a altura (em centímetros) do bolo em função do tempo.

Figura 4.12 - Primeiro modelo do grupo 1



$f_1(x) = 3{,}89 + 1{,}6x \rightarrow$ caseiro - vermelho

$f_2\,(x) = 3{,}24 + 8{,}57x \rightarrow$ industrializado - azul

Fonte: Dados da pesquisa.

Assim, ao observar o modelo construído pelo grupo 1, a pesquisadora realizou juntamente com o grupo a interpretação e a validação, conforme transcrição a seguir:

> P: O modelo que vocês encontraram [aponta para o gráfico da figura 4.10] descreve o fenômeno que vocês estudaram?
> G1E3: Sim!
> P: Como vocês interpretam esse gráfico?
> G1E1: Que o bolo sempre cresce, mas cresce mais com o fermento caseiro.
> P: Mas o bolo... continuou crescendo? Se eu deixar no forno um dia inteiro ele fica muito maior?
> G1E2: Nossa! Não...
> G1E3: Mas os dois apresentam instantes em que param de crescer.
> G1E1: e se a gente colocar os pontos no Excel e ajustar a curva de novo.
> [o grupo então inicia a construção do gráfico no Excel, já que era o software de maior familiaridade de G1E2, que estava com o notebook nesta aula].
> G1E2: Nossa deu uma polinomial de grau 6.
> G1E1: Mas, não tem que ser uma atividade para o 1º ano do Médio?
> G1E3: Eu acho que eu não estudei “isso” [referenciando a função polinomial de grau 6] no 1º ano.
> G1E1: Nem eu.

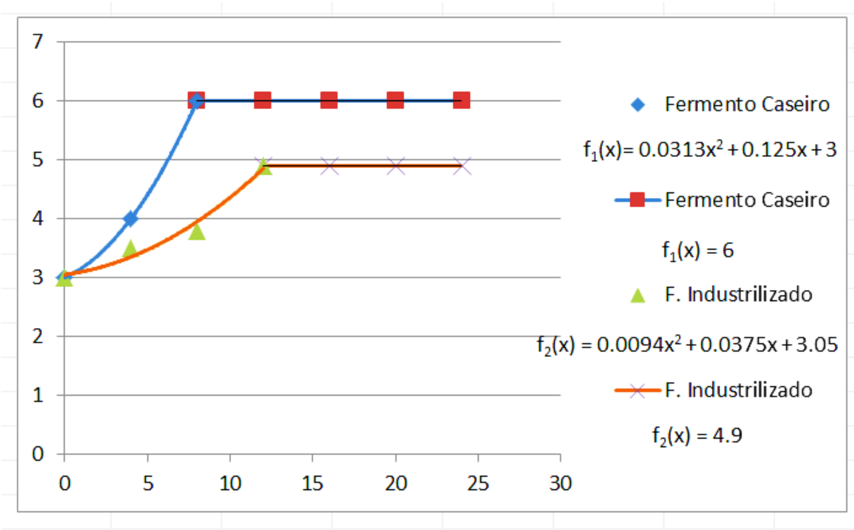
> G1E2: E se a gente dividir o fenômeno em duas partes, uma representando a parte do crescimento e outra da parte constante.
> G1E1: Mas pode?
> G1E2: Professora, o modelo pode apresentar parte função do segundo grau e parte constante?
> P: se ele representar o fenômeno. Pode sim!

O grupo 1 avaliou que o primeiro modelo apresentado não descrevia o fenômeno estudado por apresentar um crescimento tendendo ao infinito. Entretanto, ao liberar todo o dióxido de carbono da fermentação não há mais a expansão do bolo. Então, o grupo solicitou um quarto encontro em momento extraclasse para a validação do segundo modelo construído.

4º encontro: dia 04/12, orientação extraclasse, não houve a gravação de áudio ou vídeo, pois foi marcado de última hora, sendo analisado somente o diário de campo da pesquisadora.

O grupo reanalisou os dados e enviou um novo modelo via correio eletrônico (figura 4.11), em que $f(x)$ representa a altura (em centímetros) da massa de bolo em função do tempo x (em minutos) até o fim da fermentação. Assim, no momento de orientação, os alunos interpretaram e validaram o novo modelo, por apresentar o resultado de 5,9 centímetros de altura para 7,9 minutos de forno para o fermento caseiro, isto implica dizer que aos 7,9 minutos o fermento é todo consumido e o crescimento máximo da massa é de 5,9 centímetros, passando então a se manter constante para a altura do crescimento da massa do bolo. Já o fermento industrializado levou 11,9 minutos para crescer 4,8 centímetros. Ambas funções resultaram em valores muito próximos aos encontrados pelo grupo na coleta de dados.

Figura 4.13 - Segundo modelo do grupo 2



Para o fermento caseiro

$$f_1(x) = \begin{cases} 0{,}0313x^2 + 0{,}125\,x + 3, \; para\; 0 < x < 7{,}9 \\ 6, \; para\; x \geq 7{,}9. \end{cases}$$

Para o fermento industrializado

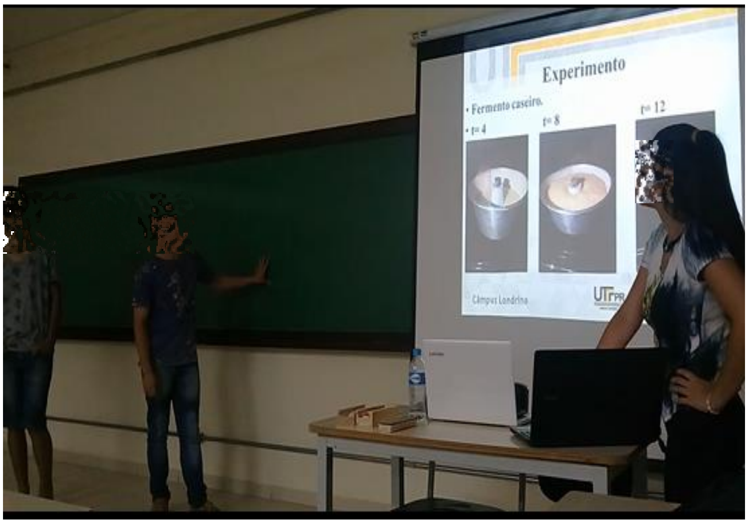
$$f_2(x) = \begin{cases} 0{,}0094x^2 + 0{,}0375x + 3,\, 05 \; para\; 0 < x < 12 \\ 4{,}9 \;\; para\; x \geq 12. \end{cases}$$

Fonte: Dados da pesquisa.

Logo, o modelo deduzido pelo grupo 1 foi considerado válido e responde à situação-problema: Esboçar um gráfico da fermentação de bolos que comprove a eficiência do fermento caseiro. Considerou a altura do bolo pelo tempo de cozimento em forno como variáveis, comprovou as hipóteses de que em certo momento o bolo não cresceria, já que o dióxido de carbono seria todo consumido, ainda, o fermento caseiro que não alterou o sabor e a textura. Além de apresentar um crescimento maior em menor tempo. Assim, o gráfico apresentado como modelo representar de maneira satisfatória o fenômeno estudado pelo grupo.

5º encontro: dia 13/12, em aula regular, o grupo apresentou (Figura 4.14) em 15 minutos a investigação para os colegas da sala e também para a professora regente da turma.

Figura 4.14 – Apresentação da atividade do grupo 1



Fonte: Arquivo da autora.

Nesta data G1E3 apresentou como se dava a reação de fermentação; G1E2 relatou a coleta e análise de dados; G1E1 explicou a atividade de Modelagem Matemática desenvolvida: esboçar um gráfico da fermentação dos bolos que comprove a eficiência do fermento caseiro. No excerto transcrito a seguir apresentamos o questionamento realizado pela professora regente ao grupo:

> PR: Esse gráfico [olhando para o slide que apresentava a figura 4.11] representa a fermentação dos bolos por quê?
> G1E3: Porque o bolo cresce até o momento em que o CO_2 é todo liberado.
> G1E2: É uma função definida por partes. Até a altura máxima esboça o comportamento de uma função quadrática e depois de certo tempo o bolo não cresce mais, ficando constante.
> PR: Vai só queimar depois.
> G1E3: Isso, vai só queimar, por isso que ela fica constante depois do consumo do fermento. E verificamos que a mistura caseira é eficiente porque ela apresenta um crescimento maior que o industrializado sem alterar o sabor e com menos tempo de forno.

Em 18/12 realizamos uma entrevista com os alunos que participaram da pesquisa a fim de conversar a respeito da experiência e identificar como as estratégias utilizadas para a construção do modelo. Entretanto, neste dia, apenas G1E2 se fez presente e respondeu alguns questionamentos (Apêndice B) para inferências da pesquisadora.

> P: Como se deu a escolha do tema?
> G1E2: Depois que você apresentou todos aqueles exemplos, o química na cozinha, pareceu interessante.

> P: Vocês já conheciam a proporção do fermento caseiro?
> G1E2: [risos] Na verdade não, na realidade pensamos em fazer pão, mas daí pra medir, pra [pausa], porque estaria assando, dificultaria a coleta, teríamos que fazer suposições e ninguém sabe fazer pão e daria muito trabalho. Depois que G1E1 encontrou a receita, decidimos ficar com os bolos.
> P: Para a coleta de dados vocês consideraram todas as variáveis do fenômeno?
> G1E2: Como assim?
> P: Consideraram diferença de temperatura do dia, por exemplo? Ou somente a receita, o forno?
> G1E2: Ah! Não! A gente considerou só o que poderia alterar muito na coleta, usamos o mesmo forno, forma e receita, as outras variáveis foram desconsideradas.
> P: Certo! Vocês se utilizaram de algumas estratégias para a resolução da situação-problema: como divisão em subproblemas, simulações computadorizadas... Você considera que foram importantes para a solução?
> G1E2: Não tinha percebido, mas se a gente não tivesse dividido o problema, primeiro analisar um fermento… depois o outro… ou feito o gráfico a mão, além de demorar mais para terminar, ainda poderia não estar certinho.
> P: Considerando o conhecimento matemático necessário para essa atividade, dê uma nota de 5 a 10, considerando 5 para nenhum conhecimento.
> G1E2: Merecemos 8, eu acho, porque foi uma atividade que pode ser realizada em sala de aula de verdade, aprendemos uma receita de fermento nova, tivemos que pensar bastante para resolver os problemas, mas como a primeira função estava errada. 8 é bem justo!
> P: Então G1E2, você considera que conforme a atividade foi se desenvolvendo, o problema foi tomando forma. Você teve que buscar e relembrar conceitos matemáticos para resolver?
> G1E2: Não posso falar por G1E1 e G1E3 que não vieram. Mas, nossa! Com certeza eu aprendi bastante, além de relembrar os conteúdos do Ensino Médio.

Ainda que a entrevista contasse com outras questões, julgamos este trecho importante para subsidiar o objetivo de nossa pesquisa.

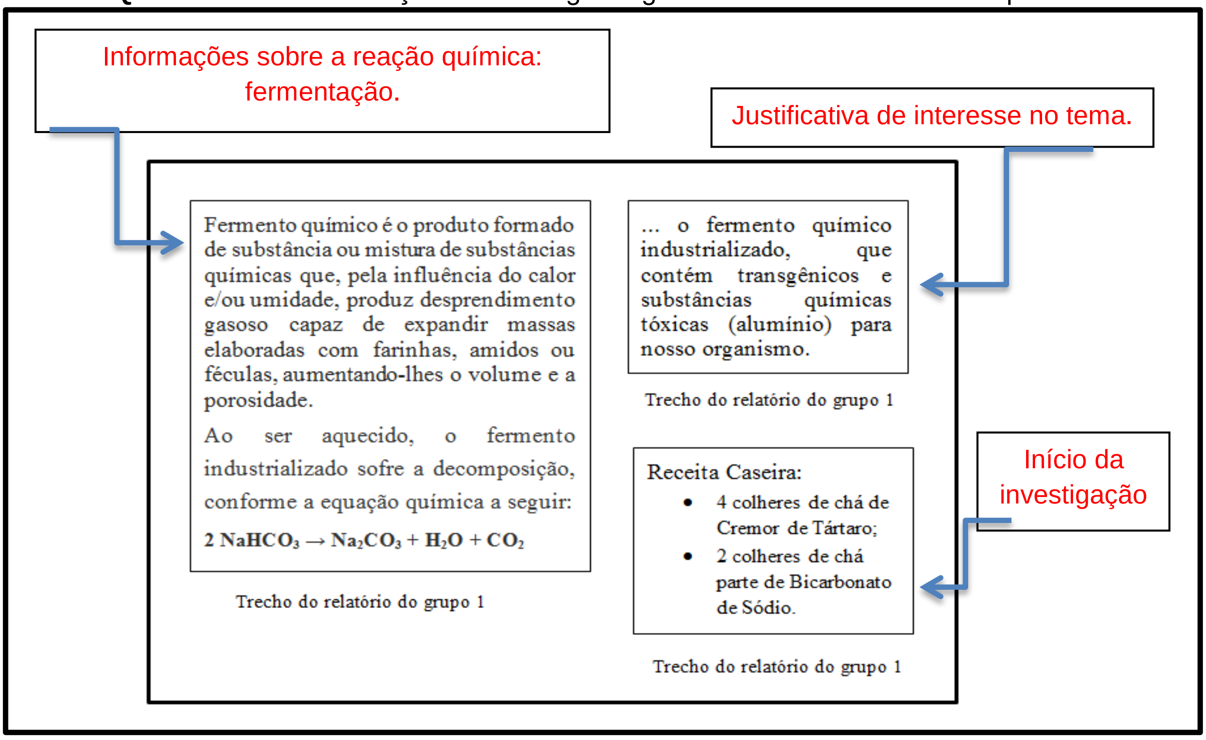
4.2.2.2 Análise específica da Atividade 2

O interesse pelo estudo da situação originou-se de uma sugestão da pesquisadora de analisar reações Químicas que acontecem na cozinha. Para a escolha do tema – Fermento caseiro x Fermento industrializado -, os alunos possivelmente tiveram uma primeira impressão. Para Santaella (2008, p. 46) “[...] a primeira apreensão das coisas, que para nós aparecem”, ocorre na Primeiridade no que se refere à representação inicial do tema pelos alunos.

Neste sentido, inferimos que os alunos observaram um signo (Química na Cozinha no slide) que representa algo em lugar de outra coisa e, a partir desse entendimento, se propuseram a estudar uma temática. Seguindo as assertivas de Stender (2017, 2018) buscamos relacionar os encaminhamentos de atividades de Modelagem Matemática às Estratégias Heurísticas, não se limitando apenas ao rigor e simplicidade de método. Mas principalmente à construção de novos conceitos, procedimentos e conteúdos matemáticos, como sugeridos por Justulin (2014) e que já acontece na metodologia de Resolução de Problemas.

Para tanto identificamos a Estratégia Heurística denominada de “organize seu material/ entenda o problema”, já que conforme Stender (2018) houve a necessidade de busca de informações complementares, antes do delineamento da situação-problema a ser investigada, conforme explicitamos no Quadro 4.12, em que os alunos buscam informações químicas relativas à fermentação, justificam o interesse pelo tema e iniciam a investigação a partir de uma receita.

Quadro 4.12 - Identificação da estratégia “organize seu material/entenda o problema”



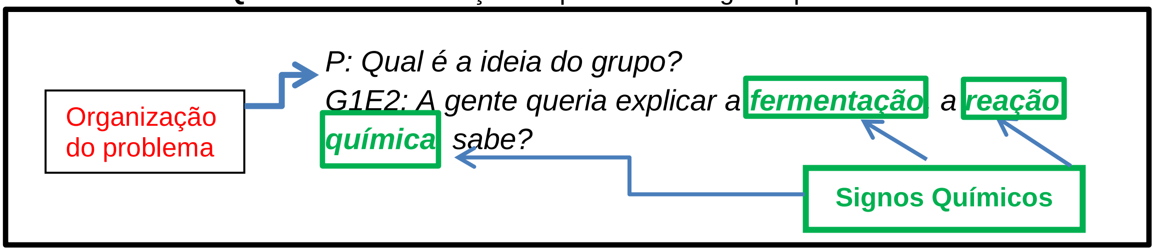
Fonte: A autora.

A partir das informações obtidas, os alunos realizaram a associação de signos para definir o problema adentrando na Secundidade Peirceana, pois evidenciaram a existência de um fenômeno a ser estudado como explica Santaella (2008, p. 47-48):

> Certamente, onde quer que haja um fenômeno, há uma qualidade, isto é, sua primeiridade. Mas a qualidade é apenas uma parte do fenômeno, visto que, para existir, a qualidade tem de estar encarnada numa matéria. A factualidade do existir (secundidade) está nessa corporificação material (SANTAELLA, 2008, p. 47- 48).

No Quadro 4.13, observamos que os alunos utilizaram uma tentativa a partir das informações que eles possuíam, mesmo que alguns erros sejam evidenciados, o que para Stender (2018) faz parte da estratégia Heurística “organize seu material/entenda o problema”.

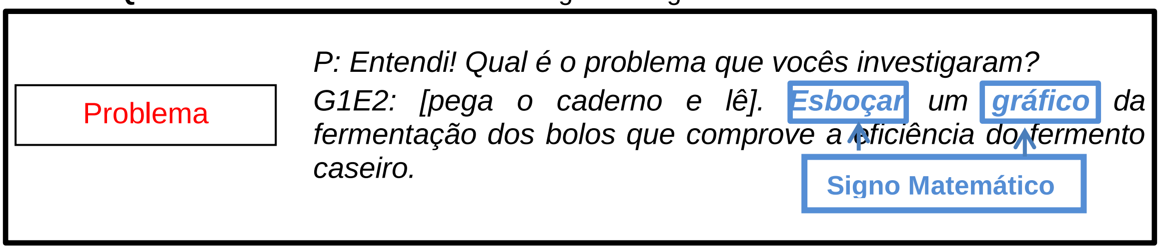
Quadro 4.13 - Definição do problema e signos químicos identificados



Fonte: A autora.

Os signos ainda não deixam transparecer uma caracterização do objeto matemático. Entretanto, podemos considerar que os alunos compreendem a ação de associar a uma situação real um modelo matemático. Por conseguinte, identificamos a Estratégia Heurística “verifique aspectos funcionais”, pois há a análise da situação a fim de otimizar sua resolução. Os alunos encontram conexões entre os dados e o problema. No quadro 4.14, apresentamos o problema a ser estudado pelo grupo e signos matemáticos identificados.

Quadro 4.14 - Problema a ser investigado e signos matemáticos identificados



Fonte: A autora.

Com isso, os alunos entendem que conhecem conceitos matemáticos que podem ajudar e “verificam aspectos funcionais”, com a identificação de variáveis dependente e independente, associando, quando utilizam o signo gráfico, ao conteúdo de função, restando a interpretação do seu comportamento.

Assim, para resolver o problema definido, inicialmente, é preciso selecionar variáveis e definir hipóteses, para subsidiar a construção do modelo (Quadro 4.15).

Quadro 4.15 - Matematização e estratégia “verificação de aspectos funcionais”

Variáveis →	*P: Como o crescimento do bolo depende do tempo, sabemos que a altura do bolo é a variável dependente e o tempo independente*
	P: O que o grupo tem como hipótese? *G1E3: O fermento caseiro não traz malefícios à saúde.* *P: O que mais?*
Hipóteses →	*G1E2: Depois da liberação de CO_2 o bolo para de crescer.* *P: Outros fatos importantes são que o fermento caseiro deve fazer crescer tanto ou mais, sem alterar o sabor do bolo para considerarmos tão eficiente quanto o industrializado. Além de o forno, a forma e a receita, sem o fermento, serem iguais.*

Fonte: A autora.

Segundo Almeida (2018) a matematização é indispensável para a construção do modelo matemático. Já que muitos signos são produzidos quando a linguagem natural é transformada em linguagem matemática. Nesta etapa de levantamento de hipóteses há uma aproximação da Primeiridade e da Secundidade, levando o aluno à Terceiridade, conforme Santaella (2018):

> […] terceiridade, que aproxima um primeiro e um segundo numa síntese intelectual, corresponde à camada de inteligibilidade, ou pensamento em signos, através da qual representamos e interpretamos o mundo (SANTAELLA, 2018, p. 51).

Além disso, Almeida, Silva e Vertuan (2011) defendem que a obtenção e dedução do modelo matemático, interpretação e validação dos resultados dão início à terceiridade Peirceana.

Neste sentido, o grupo realizou o experimento com dois tipos de fermento. Para isso, marcaram uma forma e fizeram a mesma receita de bolo, em dias diferentes, no mesmo forno e com a mesma forma, alterando apenas o fermento (Figura 4.15). Então consideraram as alturas das massas a cada 4 minutos em ambos os experimentos, resultando em sua representação numérica, uma tabela. Na coleta de dados realizada pelo grupo evidenciamos a Estratégia Heurística enunciada por Stender (2018) como “use sua memória de trabalho de forma eficaz”, uma vez que a situação-problema foi dividida em subproblemas para o sucesso da coleta.

Figura 4.15 - Coleta de dados do grupo 1

Fonte: Relatório dos alunos.

Outra estratégia foi evidenciada na entrevista, “pense grande”, quando G1E2 revela que o grupo desconsiderou variáveis como: temperatura ambiente, tamanho dos ovos utilizados em cada receita, que poderiam limitar a investigação.

A Estratégia Heurística enunciada por Stender (2018) como “entenda o problema” (em Quadro 4.16), diz respeito ao uso e simulações computadorizadas ou não e ainda à tentativa e erro, no intuito de deixar o encaminhamento da atividade de Modelagem Matemática cada vez mais a cargo do aluno.

Quadro 4.16 - Estratégias “pense grande” e “entenda o problema”

	P: Consideraram diferença de temperatura do dia, por exemplo? Ou somente a receita, o forno…
Pense Grande, não limitando a pesquisa a pequenos obstáculos e utilizando os resultados de forma generalizada. →	*G1E2: Ah! Não! A gente considerou só o que poderia alterar muito na coleta, usamos o mesmo forno, forma e receita, as outras variáveis foram desconsideradas.*
	P: Certo! Vocês se utilizaram de algumas estratégias para a resolução da situação-problema: como divisão em subproblemas, simulações computadorizadas... Você considera que foram importantes para a solução?
Entenda o problema é identificada pelo uso de simulações; tentativa e erro. →	*G1E2: Não tinha percebido, mas se a gente não tivesse dividido o problema, primeiro analisar um fermento… depois o outro… ou feito o gráfico a mão, além de demorar mais para terminar, ainda poderia não estar certinho.*

Fonte: A autora.

A Estratégia Heurística “Use o que você sabe” (Quadro 4.17) está relacionada aos conteúdos aprendidos anteriormente para buscar semelhanças ou diferenças para a resolução da situação-problema atual, uma busca por analogias.

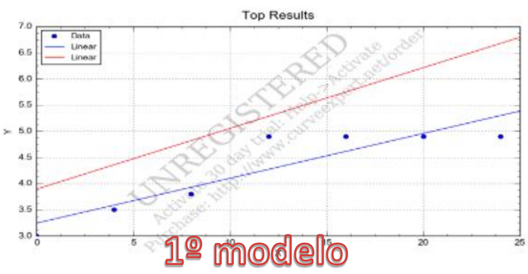
Quadro 4.17 - Estratégias Heurísticas reveladas na entrevista “use o que sabe”

	GP: Então G1E2, você considera que conforme a atividade foi se desenvolvendo, o problema foi tomando forma. Você teve que buscar e relembrar conceitos matemáticos para resolver?
Use o que sabe, uso de analogias a problemas já conhecidos. →	*G1E2: Não posso falar por G1E1 e G1E3 que não vieram. Mas, nossa! Com certeza eu aprendi bastante, além de relembrar os conteúdos do Ensino Médio.*

Fonte: A autora.

Na fase de validação do modelo matemático (Figura 4.16), outra estratégia se fez presente novamente “organize seu material/ entenda o problema”, identificado pela tentativa e erro na construção do modelo. Além de “verifique aspectos funcionais”, já que pela análise do grupo o primeiro modelo não descrever o fenômeno estudado. Mas, a natureza cíclica das atividades de Modelagem Matemática, Almeida, Silva e Vertuan (2012), permitiu que o grupo retomasse seu modelo e construisse um novo modelo.

Figura 4.16 - Validação e as estratégias: “organize seu material/entenda o problema” e verifique aspectos funcionais”



$f_1(x) = 3{,}89 + 1{,}6x \rightarrow$ caseiro - vermelho
$f_2\,(x) = 3{,}24 + 8{,}57x \rightarrow$ industrializado - azul

Para o fermento caseiro - azul

$$f_1(x) = \begin{cases} 0{,}0313x^2 + 0{,}125\,x + 3, & para\; 0 < x < 7{,}9 \\ 6, & para\; x \geq 7{,}9. \end{cases}$$

Para o fermento industrializado - laranja

$$f_2(x) = \begin{cases} 0{,}0094x^2 + 0{,}0375x + 3,\,05 & para\; 0 < x < 12 \\ 4{,}9 & para\; x \geq 12. \end{cases}$$

Fonte: Dados da pesquisa.

Então inferimos que os signos produzidos e utilizados na construção do modelo matemático mostra o entendimento dos alunos no que se refere a função afim, função quadrática, função constante, função definida por partes e análise de gráficos. Além de observar relações entre as ações realizadas no desenvolvimento da atividade de Modelagem Matemáticas e as estratégias escolhidas pelos alunos para a construção do modelo (Quadro 4.18).

Quadro 4.18 – Relação entre Modelagem Matemática e Estratégias Heurísticas

Modelagem Matemática	Estratégia Heurística
Inteiração Matematização	“organize seu material/ entenda o problema”
	“verifique aspectos funcionais”
Dedução do Modelo Interpretação de Resultados Validação	“organize seu material/ entenda o problema”
	“use sua memória de trabalho de forma eficaz”
	“pense grande”
	“use o que sabe”

Fonte: A autora

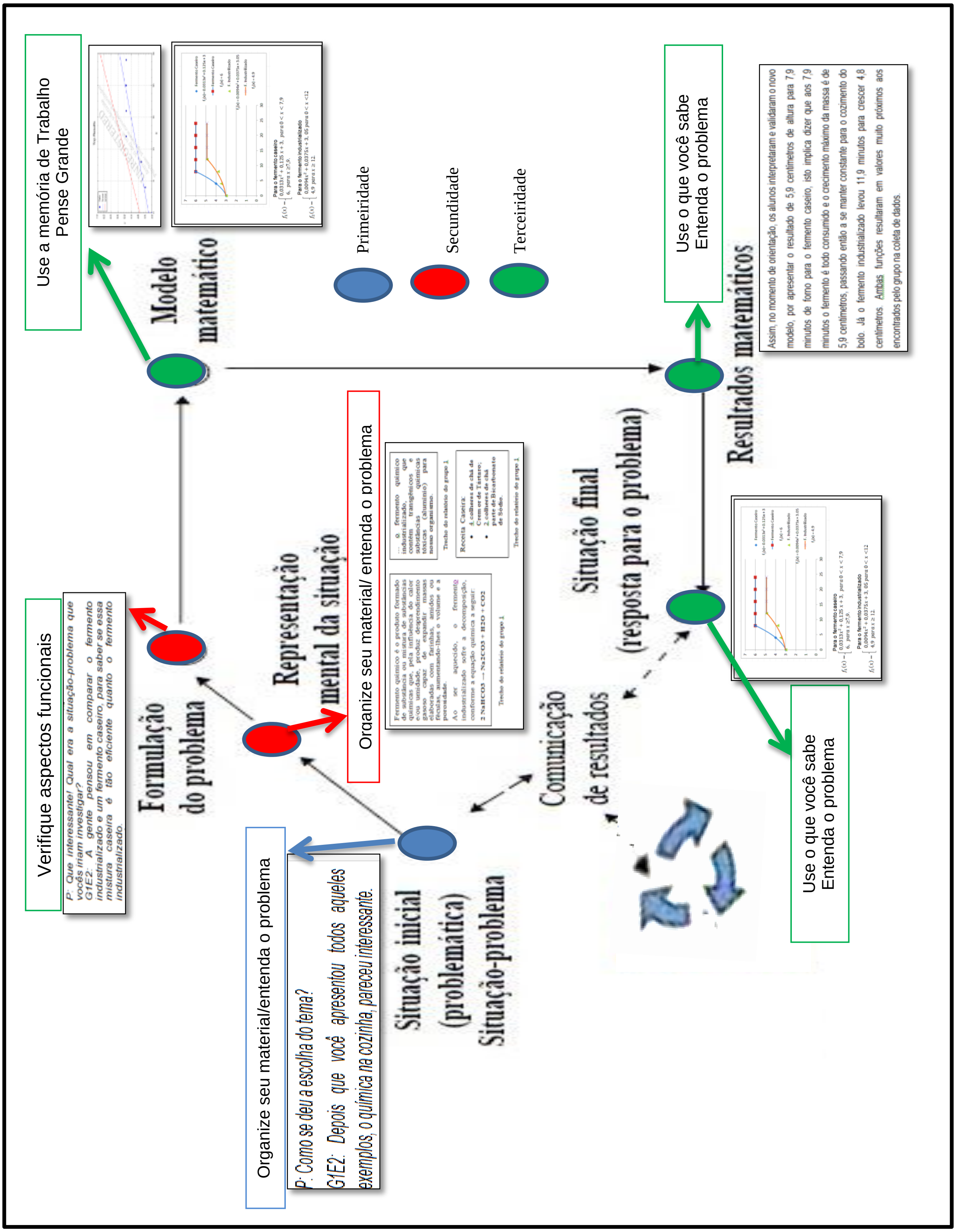
Neste sentido, ratificamos nossas inferências conforme Almeida, Silva e Vertuan (2011, p. 12) ao descreverem que as categorias fenomenológicas são associadas ao desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática. Para os autores:

> [...] há ações que são ‘primeiras’, ações que são ‘segundas’ e ações que são ‘terceiras’ durante o desenvolvimento de uma atividade de Modelagem Matemática. Por conseguinte, a atividade possibilita a organização e elaboração de signos, isto é, a generalização do conhecimento em sistemas semióticos de representações (algoritmos, esquemas, gráficos, etc.) e sua interpretação e não apenas o ‘manuseio’ passivo do objeto matemático com a conotação simplista de ‘conhecer’ (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2011, p. 16).

A ação de identificação do problema ‘primeira’, definição de metas de resolução ‘segunda’, matematização, construção do modelo, interpretação, validação e comunicação dos resultados ‘terceiras’ permitem a generalização da situação. Assim, entendemos que as Estratégias Heurísticas utilizadas pelo grupo relacionam-se com as categorias fenomenológicas de Peirce por permitirem a autonomia do aluno no manuseio ativo de objetos matemáticos no desenvolvimento da atividade de Modelagem Matemática.

Por conseguinte, evidenciamos que as Estratégias Heurísticas identificadas na Modelagem Matemática por Stender (2018) pode ser associada às categoria fenomenológicas de Peirce (figura 4.17). Já que ao realizar a Estratégia Heurística “organize seu material/entenda o problema” na inteiração, a associamos à primeiridade; ainda em uma das etapas dessa estratégia temos a busca de informação e a definição do problema, logo entendemos como a secundidade; enfim, nas demais fases da atividade de modelagem identificamos “Verifique aspectos funcionais”; “Pense Grande”; “Use sua memória de trabalho de forma eficaz” e “Use o que sabe” que podemos caracterizar como a Terceiridade Peirceana.

Figura 4.17 - Associação das bases teóricas para a atividade 2



Fonte: A autora.

Na primeiridade peirceana, descrita por Almeida, Silva e Vertuan (2011) como ações primeiras, não é despertada a necessidade do pensamento matemático, assim nesta análise entendemos que a Estratégia Heurística revelada é aquela que solicita que o aluno, no caso o grupo 1, que "organize seu material/entenda o problema" para a elaboração da situação-problema a ser investigada.

Passando então para a corporificação do material, a secundidade, identificamos que o grupo ainda "organize seu material /entenda o problema", já que para Stender (2018) a discretização, isto é, transcrição do fenômeno real para a linguagem matemática ainda constitui essa primeira estratégia por ele enunciada.

Entretanto, ainda notamos que os alunos seguem a estratégia: "verifique aspectos funcionais" para elencar o melhor modo de operacionalizar, otimizar seus encaminhamentos.

Já na terceiridade, associada às fases de matematização, resolução, interpretação e validação da modelagem matemática segundo Almeida, Silva e Vertuan (2011) identificamos todas as Estratégias Heurísticas reveladas por Stender (2018), "organize seu material/ entenda o problema", quando se identifica o uso de simulações, com uso do computador; e observamos a tentativa e o erro do grupo; "use sua memória de trabalho de forma eficaz" na divisão do subproblemas e o uso de funções; "pense grande" no momento de generalização do modelo; "use o que sabe" já que houve a aproximação do novo problema a de outros já conhecido; "verifique aspectos funcionais" quando o grupo elege o modelo de função definida por partes como aquele que melhor descreve o comportamento do fenômeno.

Logo, o uso de Estratégias Heurísticas parece contribuir para que o aluno seja capaz de saber "o próximo passo", e pela análise semiótica entender como os alunos aprendem, ao mesmo tempo, identificar fragilidades na aprendizagem. As estratégias podem ser importantes ferramentas no auxílio dos encaminhamentos com problemas de modelagem matemática, por conduzir a uma participação ativa e efetiva dos alunos, aumentando a sua motivação e autoavaliação. Pois, para Stender (2018, p.17):

> [...] as estratégias heurísticas podem funcionar como uma caixa de ferramentas conceitual, para que facilitadores analisem a complexidade de um problema de modelagem, identifiquem as etapas importantes no processo de modelagem, e pré-formulem possíveis suportes estratégicos.

Nesta atividade foi possível inferir que os signos utilizados ou produzidos pelos alunos em atividades de Modelagem Matemática, não são isolados ou compartimentados, mas são interdependentes de modo que revelam o pensamento e as estratégias utilizadas no encaminhamento de atividades matemáticas.

4.2.3 Atividade 3: Estudo da Antocianina

Na terceira atividade de Modelagem Matemática, que aqui discutimos, os alunos também coletaram dados por se tratar de uma atividade de terceiro momento de familiarização com temática escolhida pelo próprio grupo: *Estudo da Antocianina*. Os alunos se reuniram em grupo com dois integrantes, definiram a situação-problema, planejaram a coleta de dados, construíram um relatório da atividade e apresentaram os resultados encontrados.

4.2.3.1 Descrição da atividade 3

A atividade 3 também foi iniciada no dia 08/11/2018 e finalizada no dia 13/12/2018. A situação-problema foi escolhida pelo grupo 2 formado por 2 alunos, G2E1 e G2E2, seguindo os encaminhamentos de uma Atividade Prática como Componente Curricular.

1º encontro: no dia 08/11, como a aula foi para toda a sala em aula regular, foi apresentada a estrutura de uma APCC e dúvidas gerais de estrutura do trabalho foram esclarecidas para todos, seguindo para o atendimento grupo a grupo. Conforme fragmentos do diálogo transcrito, o grupo 2, apresentou alguns encaminhamentos:

> G2E1: Pensamos em fazer dois experimentos, pode ser?
> P: Como seriam? Um está relacionado com o outro? Teria uma situação-problema a ser investigada?
> G2E2: Na verdade, o segundo aproveita o primeiro experimento.
> P: como assim? O que pensaram?

G2E1: Eu pensei em um indicador orgânico e, no caso da beterraba, por exemplo, antocianina, que é um indicador natural de ácido-base, eu queria fazer um experimento utilizando isso, e poderia fazer um gráfico dessa titulação[10].
P: Eu não tenho conhecimento químico sobre o assunto, então como seria essa investigação?
G2E1: Exemplo: com o ácido e a base real, com indicador real, qual a distinção desses gráficos, ponto de viragem se vai ser diferente ou não. Porque que ele é um indicador de ácido-base, já é comprovado, aí entra a questão matemática no gráfico, porque a química seria a questão da antocianina.
P: Então, vocês irão testar a funcionalidade da antocianina como indicador ácido-base e então analisar e comparar o gráfico do ponto de viragem de substâncias orgânicas e de substâncias industrializadas?
G2E2: Isso! Professora.
P: Então a situação-problema a ser investigada é a eficiência da antocianina?
G2E1: Outra questão que G2E2 sugeriu é a análise do desenvolvimento do girassol ou do feijão com e sem fertilizante.
P: Interessante também! Mas, essa diferença de desenvolvimento seria visível logo nas primeiras semanas? Porque vocês terão de coletar os dados, fazer o relatório, a análise e apresentação.
G2E2: É… teríamos que pensar certinho.
P: Mas nada impede de vocês fazerem todos os experimentos e depois analisar aquele que na opinião de vocês, teve maior relevância.

Na figura 4.18, os integrantes do grupo 2 conversam e decidem qual o tema, o que seria necessário para a coleta em cada um dos experimentos propostos e explicam para P.

Figura 4.18 - Grupo 2 reunido com P para escolha do tema

Fonte: Arquivo da autora.

[10] A titulação é um procedimento laboratorial utilizado para determinar a concentração em quantidade de matéria (ou concentração em mol/L) de uma solução que contém um ácido ou uma base.

O grupo então resolveu não determinar o tema neste encontro, já que havia a necessidade de analisar os custos da coleta de dados. Para tanto, fariam o levantamento de custos e o planejamento de coleta de dados para então decidirem a temática a ser estudada.

2º encontro: no dia 13/11, em aula regular, o grupo 2, após a busca de informações a respeito da antocianina e sobre a fertilização de plantas, escolheu realizar um estudo sobre ácidos e bases, com intuito de realizar previsões que visem à sustentabilidade conforme a habilidade requerida pela BNCC[11]. No Quadro 4.19, apresentamos trechos do relatório da atividade de Modelagem Matemática do grupo 2.

Quadro 4.19 – Informações complementares grupo 2

Justificativa: Na estrutura atual do ensino médio público, notamos muitas precariedades na organização estrutural de desenvolvimento dos conhecimentos teóricos. Assim, acreditamos que seja de grande importância para a aprendizagem, a visualização e a estimulação dos alunos. Porém, algumas aplicações demandam investimento, o que acaba se tornando inviável a sua realização. Então, propomos uma alternativa para realizar experimentos, que seja viável economicamente e estruturalmente para a instituição.

Trecho do relatório do grupo 2

Objetivo: Induzir e estimular ideias para alternativas viáveis para composição de aulas práticas em diversas áreas do conhecimento, sempre voltado para a conscientização de minimizar a poluição do meio ambiente.

Trecho do relatório do grupo 2

Procedimento: Cortar o repolho roxo em pequenos pedaços e colocar em água até ferver para obter uma solução de coloração roxa.

Trecho do relatório do grupo 2

Fonte: Dados da pesquisa.

Após o levantamento das informações necessárias para a organização da coleta de dados, o grupo 2 apresentou o planejamento para a pesquisadora, bem como as variáveis e as hipóteses relacionadas à situação-problema a ser investigada, conforme o diálogo transcrito a seguir:

[11] A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento que regulamenta quais são as aprendizagens essenciais a serem trabalhadas nas escolas brasileiras públicas e particulares de Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio para garantir o direito à aprendizagem e ao desenvolvimento pleno de todos os estudantes.

> P: Agora que vocês têm maiores informações [apresentamos um resumo no quadro 4.19], já escolheram a temática. Qual é a situação-problema a ser investigada?
> G2E1: Então a ideia seria a construção de uma régua que gradue o potencial Hidrogeniônico[12], pH, utilizando a antocianina do repolho roxo em misturas facilmente encontradas no cotidiano: vinagre, suco de limão, água, bicarbonato de sódio e soda cáustica. E assim, pela modelagem matemática estimar o volume de mistura mais ácida para a neutralização da mistura mais básica.
> P: Que interessante! Gostei e como vocês pensaram em fazer isso? Quais procedimentos vocês planejaram?
> G2E2: Nós iremos precisar de alguns equipamentos de laboratório como Erlemmeyer, Bureta e também indicares de ácido-base de papel.
> P: Acredito que tenha alguns dos instrumentos disponíveis no nosso laboratório. Quando e como vocês farão a coleta de dados?
> G2E1: Semana que vem, segunda ou terça-feira, eu virei mais cedo para Londrina e faremos na casa de G2E2.
> P: Mas já pensaram como farão a extração e a graduação de pH?
> G2E1: Vamos cortar e ferver o repolho roxo, tem outra forma de extrair, mas essa, pelas informações que coletamos, é mais eficiente. Paralelamente iremos colocar em recipientes transparentes ácidos e bases que encontramos em casa.
> P: Para medir o pH vocês irão utilizar o indicador de papel?
> G2E2: Isso, mas é mais para comprovar que o pH muda visivelmente pela coloração que a mistura fica.
> P: Certo. Mas isso vocês já sabem que é verdade. Então, qual seria a situação-problema que será investigada?
> G2E1: A gente pensou no seguinte, professora, depois de fazer essa régua de pH, pegar os dois extremos, por exemplo pegar a mistura mais básica e colocar um pouco da mais ácida até neutralizar. E fazer o gráfico desta neutralização. Para descobrir qual é o volume necessário de ácido para o pH ser 7?
> P: Entendi! Então as hipóteses e as variáveis são... [pausa para que os alunos respondam].
> G2E1: Hipótese é o que a gente acha que é verdade?
> P: Isso mesmo.
> G2E1: Então, que a antocianina pode ser utilizada como indicador ácido-base; que é mais barato e os indicadores industrializados; a utilização não agride o meio ambiente.
> P: E as variáveis?
> G2E2: Acho que é o volume de ácido que vamos colocando e o pH que vai sendo alterado até neutralizar.

O grupo 2 finaliza o 2º encontro com as hipóteses definidas, variáveis e os procedimentos extra matemáticos para a coleta de dados.

3º encontro: dia 29/11, em aula regular, cada grupo em sua vez, apresenta os dados e o relatório da atividade desenvolvida. Foi solicitado que os alunos, durante a coleta de dados, tirassem fotos e descrevessem cada passo realizado para a coleta.

---

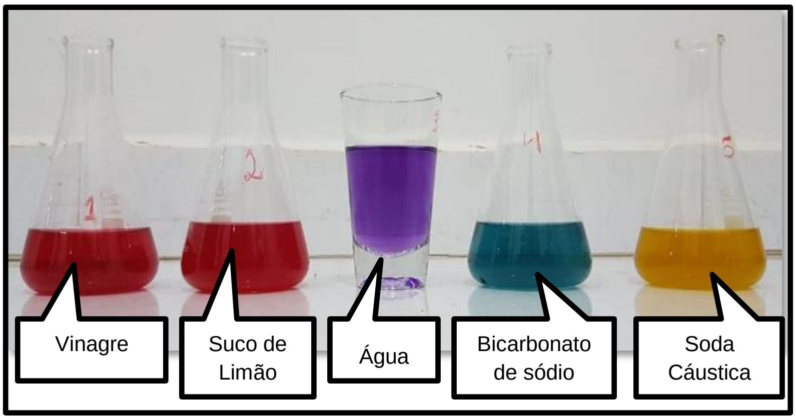
[12] A sigla pH é utilizada para representar o potencial hidrogeniônico presente em uma determinada solução ou mistura. Esse potencial refere-se à quantidade (concentração molar ou molaridade) de cátions hidrônio (H^+ ou H_3O^+) presentes no meio e indica se esse meio , ou mistura, é ácido, básico ou neutro.

P: Fizeram a coleta de dados?
G2E1: Coletamos os dados, quase nos esquecemos das fotos. [risadas]
P: Mas tiraram alguma?
G2E1: Poucas, mas a gente descreve nos mínimos detalhes a coleta.
P: Ok, então! Contem o passo a passo.
G2E1: Primeiro, eu piquei o repolho roxo em pequenos pedaços. Depois G2E2 colocou na panela, encheu com água e deixamos 20 minutos fervendo.
G2E2: Enquanto fervia, pegamos os 4 Erlemmeyer que a gente tinha, usamos um copo para usar de medida e colocamos meio copo de vinagre no Erlemmeyer 1, o suco de um limão no Erlemmeyer 2, água com bicarbonato no Erlemmeyer 4, água com soda cáustica no Erlemmeyer 5 e para a água utilizamos este mesmo copo com o número 3.
P: Então vocês montaram uma régua de pH sem muita distinção de cores. Mas ao adicionar o caldo do repolho a coloração mudou?
G2E2: Isso comprova a eficiência da antocianina como indicador ácido-base.

Para essa comprovação de pH, utilizaram indicadores de papel nas 5 misturas e criaram uma régua da mistura mais ácida até a mais básica, com alteração na coloração, conforme descrição feita por G2E1:

G2E1: Sim professora, foi de vermelho translúcido a amarelo [figura 4.19]. Indicando misturas ácidas de vermelho, passando para rosa, violeta até o roxo. E as misturas básicas de azul, passando para verde até o amarelo. Se a gente fizesse com mais misturas, observaríamos essas colorações.

Figura 4.19 - Coleta de dados do grupo 2



Fonte: Dados da pesquisa.

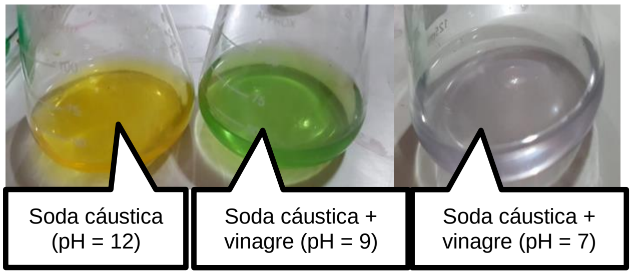
P: Gostei! Parabéns! E a atividade de modelagem que vocês proporiam para os alunos?
G2E2: Na verdade a gente coletou os dados, pegamos metade da solução mais básica (amarela) com pH igual a 12 e colocamos 0,5 ml da mistura mais ácida (vermelha 1) e anotamos os pH. Mas não resolvemos ainda.

Então como proposta para a APCC, o grupo 2 investigou o volume de mistura ácida necessária para neutralizar uma mistura básica, realizando a investigação da seguinte maneira: No recipiente que continha soda cáustica e a antocianina (solução de cor amarela), foi adicionado a mistura ácida de vinagre (solução de cor verde) até que se obtenha uma mistura neutra (solução de cor roxa) (Figura 4.20).

Figura 4.20 - Problema do grupo 2

➔ **Problema:** Qual é o volume necessário para que a solução neutralize?

Neutralização	
x: volume em ml	y: pH
0	12
0.5	12
1	11
1.5	11
2	10
2.5	9



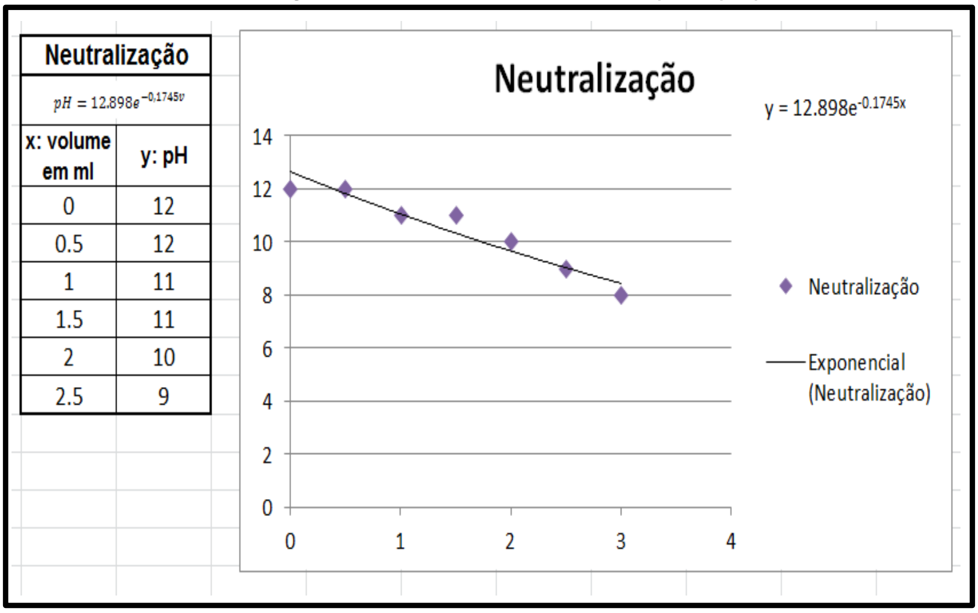
Fonte: Dados da pesquisa.

> P: Mas com os dados vocês conseguem imaginar como seria o modelo?
> G2E1: Será uma função decrescente.
> P: Certo, mas que tipo de função na opinião de vocês?
> G2E1: Uma exponencial, porque no começo demora a baixar o pH, mas depois diminui mais rápido.
> P: Sim, mas me expliquem o comportamento de uma função exponencial decrescente.
> G2E2: É uma curva que decresce rapidamente no começo, depois mais lentamente, até o seu limite.
> P:Isso, mas vocês acreditam que esse comportamento descreve o fenômeno estudado?
> G2E1: Eu acredito que sim, porque quanto mais ácido a gente coloca menor fica o pH, mas a nova mistura nunca terá o pH menor que a do ácido puro.

O grupo 2 então começou a construção do modelo matemático a partir dos dados coletados utilizando o *software Excel,* como modelo o grupo apresentou a função exponencial $y = 12.898e^{-0.1745x}$ na qual a variável dependente é o pH , (y) e se busca determinar a variável independente, volume (em ml), (x) de mistura ácida para neutralização (Figura 4.21).

Assim, no final deste encontro, o gráfico construído pelo grupo 2 no *software Excel* apresentou-se matematicamente adequado. Além de realizar os cálculos com o software e no experimento validaram o modelo, que encontrou um volume de 3,5023 ml para neutralização da solução básica. Mas em contato por aplicativo de conversa o grupo pediu uma orientação para a finalização da atividade de modelagem matemática.

Figura 4.21 - Modelo construído pelo grupo 2



Fonte: Dados da pesquisa.

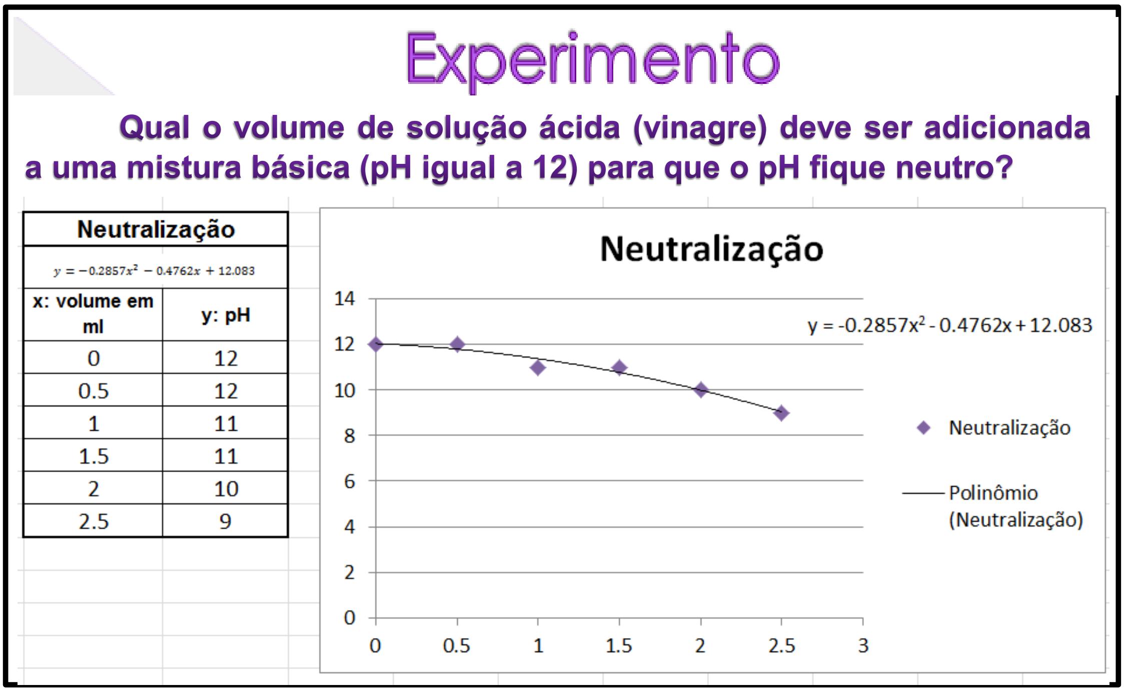
4º encontro: dia 06/12, orientação extraclasse, não houve a gravação de vídeo, por ser uma orientação mais curta, com intenção apenas de sanar dúvidas. O grupo relatou uma preocupação com o modelo encontrado.

> G2E1: Professora, nós conversamos [referindo-se a G2E1 e G2E2] e refletimos que quando eu fiz o técnico em Química os meus colegas apresentavam muita dificuldade em cálculos, principalmente por conta da matemática que teríamos que saber.
> G2E2: Aí, quando analisamos o gráfico para finalizar o relatório, reajustamos para outras funções e notamos que a função do segundo grau apresenta um R-quadrado maior.
> P: Mas se o modelo que vocês encontraram descrevia o fenômeno, por que mudar?
> G2E1: É assim, professora, a APCC é um treino para a sala de aula, e o conteúdo de química seria para o primeiro ano do Ensino Médio e a função exponencial é só no fim do segundo ano... ou mais para frente eu acho.
> P: Entendi! Seria uma alteração de modelo para melhor adequação do conteúdo a ser trabalhado.
> G2E2: A gente pode fazer isso? É que para explicar também é mais fácil. Até porque como o problema é o volume necessário para que a solução fique neutra, então não precisava analisar depois disso.

> P: Para o problema que vocês analisaram se restringirmos a imagem, até o pH 7 [analisando o gráfico da figura 4.21]. Esse "pedaço" de função quadrática representa o fenômeno?
> G2E1: Eu entendo que sim!
> G2E2: Eu também.
> P: Então, nos encontramos na apresentação e não se esqueçam de mandar as duas versões de modelo.

Buscando cumprir o objetivo da APCC, (figura 4.22) que é estreitar a teoria do Ensino Superior com a prática de sala de aula, o grupo 2 alterou o modelo matemático de comportamento exponencial para a função polinomial de grau dois.

Figura 4.22 – Modelo para APCC



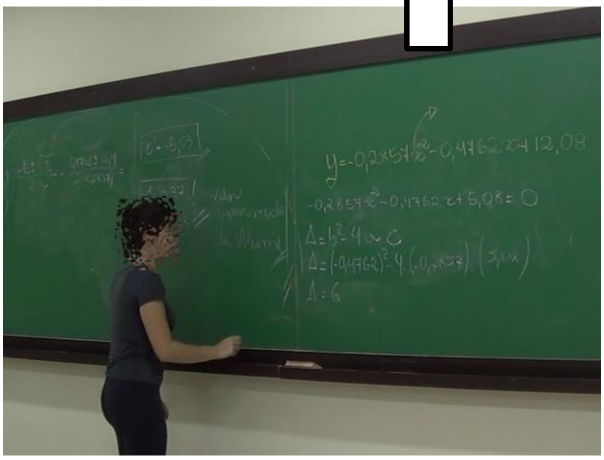
Fonte: Relatório dos Alunos

Com o novo modelo, o grupo restringiu a imagem no intervalo de [7,12], já que a solução básica tem pH igual a 12 e para a neutralização deve apresentar o pH igual a 7. G2E1, com o auxílio de G2E2, resolveu o modelo $y = -0{,}2857x^2 - 0{,}4762x + 12{,}083$ com pH, (y), igual a 7 e encontrou volume, (x) de aproximadamente 3,466 ml (Figura 4.23[13]), validando o modelo já que experimentalmente encontraram 3,5 ml para a neutralização.

---

[13] Optamos por inserir as imagens da resolução dos alunos. Como a mesma não ficou legível, digitamos, em um quadro, de forma a podermos visualizar.

Figura 4.23 - Validação do modelo pelo grupo 2



$$pH = -0{,}2857v^2 - 0{,}4762v + 12{,}083$$

$$7 = -0{,}2857v^2 - 0{,}4762v + 12{,}083$$

$$0 = -0{,}2857v^2 - 0{,}4762v + 5{,}083$$

$$v = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$v = \frac{0{,}4762 \pm \sqrt{(0{,}4762)^2 - 4(-0{,}2857)(5{,}083)}}{2(-0{,}2857)}$$

$$v = \frac{0{,}4762 \pm \sqrt{6{,}03561884}}{(-0{,}5714)}$$

$$v = \frac{0{,}4762 \pm (2{,}4567496494)}{(-0{,}5714)}$$

$$v_1 = \frac{2{,}9329496494}{(-0{,}5714)} = -5{,}133\ (rejeitado)$$

$$v_2 = \frac{-1{,}9805496494}{(-0{,}5714)} = 3{,}466$$

Fonte: Arquivo da autora.

5º encontro: dia 13/12, em aula regular, após a apresentação do grupo 1, o grupo 2 apresentou em 15 minutos a investigação realizada com a antocianina e a situação-problema de neutralização de soluções (Figura 4.24), para os demais colegas da sala, para a pesquisadora e também para a professora regente da turma, que faria a avaliação da atividade para o fechamento de notas da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I.

Figura 4.24 – Apresentação do Grupo 2

Fonte: Arquivo da autora.

A apresentação se iniciou com explicação dos objetivos e justificativas da escolha do tema por G2E1, que continuou expondo a maneira de extração da antocianina até a construção da régua de graduação de pH. G2E2, por sua vez, retratou a situação-problema investigada, como realizaram a coleta de dados e finalizaram com a exibição do modelo matemático construído. A professora regente então fez alguns questionamentos a respeito do modelo.

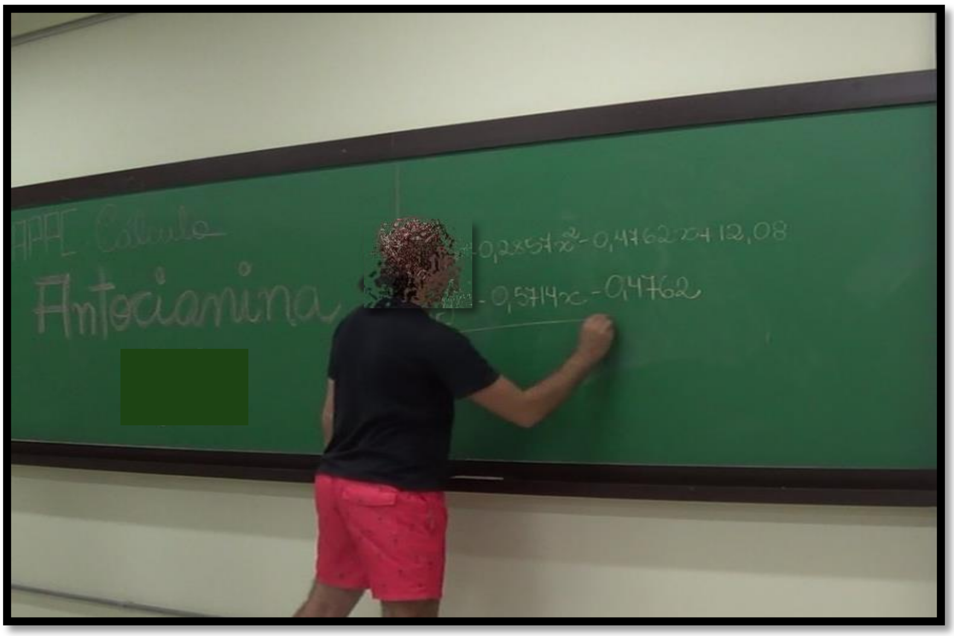
> PR: Para este modelo temos que restringir o domínio, né? Tem ponto de máximo?
> G2E1: O domínio é positivo por causa do volume. E o ponto de máximo é o pH da base que usamos 12.
> PR: Certo, mas eu quero saber qual é a taxa de variação do pH em relação ao volume.

O grupo fica em silêncio e demonstra não entender o questionamento. Então a professora regente busca relembrar conceitos trabalhados em aulas anteriores.

> PR: A taxa de variação é dada pela primeira derivada.

A professora regente solicita que G2E1 escreva o modelo no quadro e encontre a primeira derivada, assim, G2E1 encontrou a seguinte derivada $y' = -0{,}5714x - 0{,}4762$ (Figura 4.25).

Figura 4.25 - Determinação da primeira derivada por G2E1



Fonte: Arquivo da autora.

Então a professora questionou o motivo de y' ser negativa.

> G2E2: A variação do pH é de 12 até 7 que é o neutro, então a cada ml o pH diminui 1,0476.
> G2E1: E é negativo porque é decrescente.

Em 18/12 realizamos uma entrevista com os alunos que participaram da pesquisa. Entretanto, neste dia, apenas G2E1 se fez presente e respondeu alguns questionamentos importantes para inferências da pesquisadora.

> P: Como se deu a escolha do tema?
> G2E1: No curso técnico que eu fiz, o professor falou da antocianina como indicador ácido-base, eu sempre quis testar.
> P: Para a coleta de dados vocês consideraram todas as variáveis do fenômeno?
> G2E1: Estávamos atrasados com a coleta de dados, tinham as provas... então acabamos não atentando muito para detalhes. Torcendo para dar certo, na correria. Se eu fizesse novamente tomaria mais cuidado com quantidades e outras variáveis.
> P: Quais estratégias vocês utilizaram para encontrar o modelo?
> G1E2: Fizemos um planejamento para levantamento de custos, dividimos as tarefas, utilizamos o ajuste de curva do Excel, relembramos alguns conteúdos de química, matemática básica e de cálculo.
> P: Considerando o conhecimento matemático necessário para essa atividade, dê uma nota de 5 a 10, considerando 5 para nenhum conhecimento.
> G2E1: Uns 8, porque mesmo que deu bastante trabalho, foi muito interessante, a gente colocar a mão na massa e fazer o experimento e estudar para entender o que estamos investigando.
> P: Você percebeu que as atividades de modelagem matemática que resolvemos: a da gasolina, (1º momento); a do café, (2º momento); e a APCC (3º momento) vocês foram cada vez mais responsáveis pela busca do conhecimento, seja ele matemático, químico...?
> G2E1: Nossa! Estou chocado, é verdade. Essa foi a intenção desde o começo? [P acena com a cabeça em sinal positivo]. Que coisa, assim claro que algumas dúvidas eu perguntava pra você ou para a PR, mas parece que os conteúdos que utilizei para resolver essas atividades fazem mais sentido no dia a dia agora.

4.2.3.2 Análise específica da Atividade 3

O tema estudado surgiu do interesse do aluno G2E1 que, a partir de um curso técnico em Química, conheceu a antocianina como um medidor alternativo de potencial Hidrogêniônico (pH). Assim, a Estratégia Heurística “use sua memória de trabalho” já é revelada na primeiridade do fenômeno. Isso é percebido pelo fato de o grupo buscar fazer uma “tentativa” da eficiência da antocianina, no momento em que o fenômeno é ingênuo, isto é não é elaborado, apenas surge à mente, conforme afirma Peirce (1974, p. 120) “(...) não pensada como fato, mas como qualidade, possibilidade positiva da aparência, é uma ideia de Primeiridade”.

Almeida, Silva e Vertuan (2012, p. 15) defendem que “a escolha do tema e a busca de informações a seu respeito constituem o foco central nessa fase”, trata-se da fase de inteiração, ainda podemos associar as pesquisas de Stender (2018) à Estratégia Heurística intitulada pelo autor como “organize seu material/ entenda o problema”. Então encontramos a intersecção da Modelagem Matemática e da Semiótica. Segundo Mendes, Silva e Almeida (2017, p. 5), “Em toda e qualquer experiência, há sempre um elemento de reação posterior ao puro sentir, esta é a secundidade”. Uma vez que há a reação, a busca por informações de coletas e procedimentos.

Para tanto o grupo busca informações para realizar o planejamento das atividades de coleta. No Quadro 4.20 observamos a organização do material, isto é, o grupo justifica a escolha do tema pela aplicabilidade no ensino público e simplicidade de recursos, apresenta a intencionalidade do estudo que está em consonância com o objetivo da realização da APCC, relata o planejamento de coleta de dados, seguindo as informações encontradas sobre a temática escolhida.

Quadro 4.20 - Estratégia Heurística “Organize seu material/ entenda o problema”

O Motivo da escolha da temática.

Justificativa: Na estrutura atual do ensino médio público, notamos muitas precariedades na organização estrutural de desenvolvimento dos conhecimentos teóricos. Assim, acreditamos que seja de grande importância para a aprendizagem, a visualização e a estimulação dos alunos. Porém, algumas aplicações demandam investimento, o que acaba se tornando inviável a sua realização. Então, propomos uma alternativa para realizar experimentos, que seja viável economicamente e estruturalmente para a instituição.

A intencão com estudo.

Trecho do relatório do grupo 2

Como fazer a coleta.

Objetivo: Induzir e estimular ideias para alternativas viáveis para composição de aulas prática em diversas áreas do conhecimento, sempre voltado para a conscientização de minimizar a poluição do meio ambiente.

Procedimento: Cortar o repolho roxo em pequenos pedaços e colocar em água até ferver para obter uma solução de coloração roxa.

Fonte: A autora.

Ainda que os signos não deixem evidenciar uma caracterização do objeto matemático, para D'Amore (2015) a reação de busca de informações intuindo a entendimentos do fenômeno trata-se da secundidade. Logo, os alunos compreendem a situação real e a associam a um problema que pode ser resolvido com base em conteúdos de Química e Matemática já estudados, como indicado nos signos do quadro 4.21.

Quadro 4.21 - Signos químicos e matemáticos

Signos Químicos

Signos Matemáticos

*G2E1: eu pensei em um **indicador orgânico**, e no caso da beterraba, por exemplo, antocianina, que é um indicador natural de **ácido-base** eu queria fazer um experimento utilizando isso, e poderia fazer um **gráfico** dessa **titulação**.*

Fonte: A autora.

Assim, os alunos buscam a transformação da linguagem natural para a linguagem matemática, segundo Almeida (2018) é a fase de matematização. Então, identificamos mais uma vez a Estratégia Heurística "Use sua Memória de trabalho de forma eficaz", pois observamos que há a divisão em subproblemas para o desenvolvimento do modelo matemático. Além da escolha das variáveis investigadas no problema (Quadro 4.22).

Quadro 4.22 - Estratégia Heurística "Use sua memória de trabalho"

Subproblemas

Problema

*G2E1: **Então a ideia seria a construção de uma régua que gradue o potencial Hidrogeniônico, pH, utilizando a antocianina do repolho roxo** em misturas facilmente encontradas no cotidiano: vinagre, suco de limão, água, bicarbonato de sódio e soda cáustica. E assim, pela modelagem matemática estimar o volume de mistura mais ácida para a neutralização da mistura mais básica.*

*G2E1: **Vamos cortar e ferver o repolho roxo tem outra forma de extrair**, mas essa pelas informações que coletamos é mais eficiente. Paralelamente iremos colocar em recipientes transparentes ácidos e bases que encontramos em casa.*

*G2E1: A gente pensou no seguinte, professora, depois de fazer essa régua de pH, pegar os dois extremos, por exemplo **pegar a mistura mais básica e colocar um pouco da mais ácida** até neutralizar. **E fazer o gráfico desta neutralização. Para descobrir qual é o volume necessário de ácido para o pH ser 7?***

Fonte: A autora.

A Estratégia Heurística “Verifique aspectos funcionais” relaciona às informações com conteúdo matemático de funções. Observamos como o grupo interpreta as variáveis do problema na tentativa de se otimizar a situação (Quadro 4.23). Segundo Stender e Kaiser (2017, p. 1014, tradução nossa) essa estratégia possibilita “analisar casos especiais ou limitantes, pois para otimizar é necessário selecionar dados de análise”.

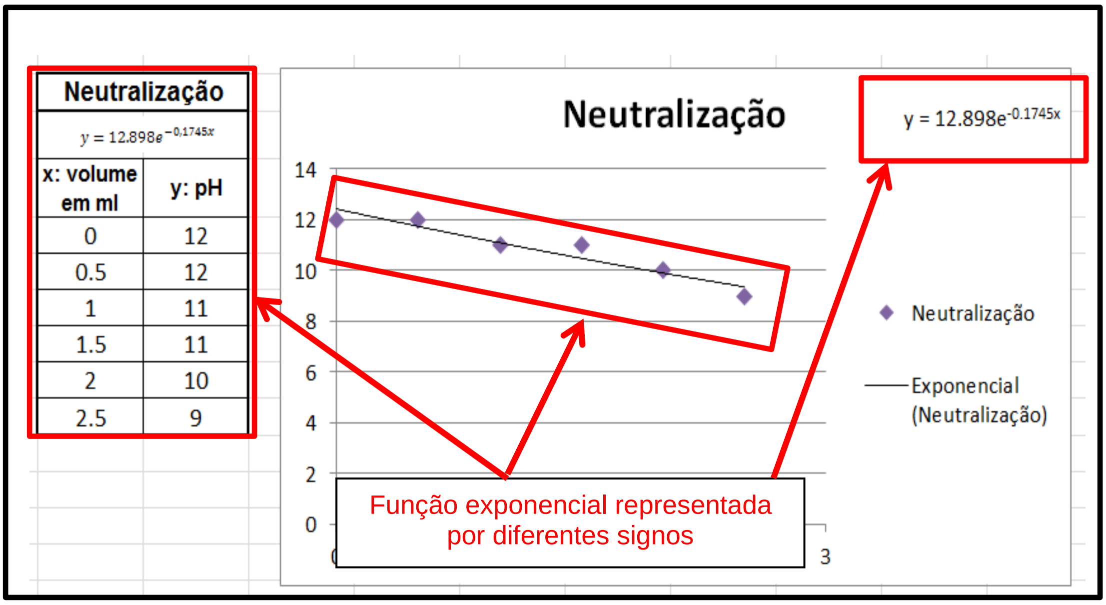
Quadro 4.23 - Matematização e “verificação de aspectos funcionais”

Variáveis →	*P: E as variáveis?* *G2E2: Acho que é o* ***volume*** *de ácido que vamos colocando e o* ***pH*** *que vai sendo alterado até neutralizar.*

Fonte: A autora.

Com isso, evidenciamos que a obtenção do modelo (Figura 4.26), com a representação da função exponencial em forma de gráfico e expressão algébrica, sua interpretação quanto ao comportamento da função sugerem a Estratégia Heurística “use o que sabe” no (Quadro 4.24), indica a terceiridade, já que os olhares dos alunos estão carregados de interpretação, análise, busca de explicação para a situação (FARIAS, 2007).

Figura 4.26 – Análise do Modelo apresentado pelo grupo 2



Fonte: A autora.

Entendemos que ao apresentar como modelo matemático uma função exponencial, o grupo resgata conceitos anteriores para a resolução da nova situação-problema, além de favorecer uma tentativa de generalização quanto ao pH da mistura a qualquer que seja o volume de ácido adicionado.

Quadro 4.24 - Interpretação do modelo e "use o que sabe"

"Use o que sabe"

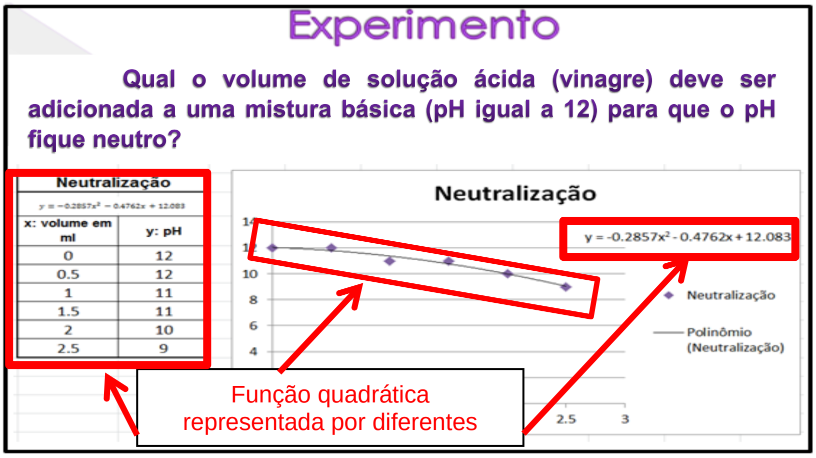
*G2E1: Será uma **função decrescente**.*
P: Certo, mas que tipo de função na opinião de vocês?
*G2E1: Uma **exponencial,** porque no começo demora a baixar o pH, mas depois diminui mais rápido.*
P: Sim, mas me expliquem o comportamento de uma função exponencial decrescente.
*G2E2: É uma curva que decresce rapidamente no começo até que decresce mais lentamente e, até o seu **limite.***

Fonte: A autora.

Os signos apresentados no Quadro 4.21 revelam o conhecimento matemático de funções decrescentes, exponencial e limite que é empregado no indicativo do modelo de maneira análoga a estudos anteriores.

Entretanto, na fase de validação, o grupo decide por alterar o modelo encontrado para a situação-problema deixando evidente outra Estratégia Heurística "Organize seu Trabalho", em razão de alterar a abordagem e trabalhar com um intervalo finito, intuindo adaptar a atividade para alunos no 1º ano do Ensino Médio (Figura 4.27).

Figura 4.27 – Análise do modelo adaptado para APCC do grupo 2



Fonte: A autora.

Evidenciamos que as Estratégias Heurísticas identificadas na Modelagem Matemática por Stender e Kaiser (2017) e Stender (2018) podem ser associadas às categorias fenomenológicas de Peirce. Já que ao apresentar de forma autônoma como o fenômeno aparece à mente, o grupo realiza ações ‘primeiras’, ‘segundas’ e ‘terceiras’ conforme Almeida, Silva e Vertuan (2011).

O primeiro contato com o tema: o estudo da Antocianina é a primeiridade do fenômeno à mente do grupo, quando observamos aspectos puramente pré-reflexivos. A secundidade é a reação ao primeiro contato, é uma corporificação do fenômeno e podemos associar à busca por informações complementares, em que se inicia a existência do problema. A conexão entre qualidade e fato, um modelo que possibilita a previsão pode ser entendido como a terceiridade Peirceana.

As Estratégias Heurísticas “Organize seu material/ Entenda o problema” e “Use sua memória de trabalho de forma eficaz” foram associadas à fase de inteiração, “Use sua memória de trabalho de forma eficaz”, “Use o que sabe” e “Verifique aspectos funcionais” na matematização e interpretação dos resultados, além de “Organize seu trabalho” na fase de validação dos modelos (Quadro 4.25).

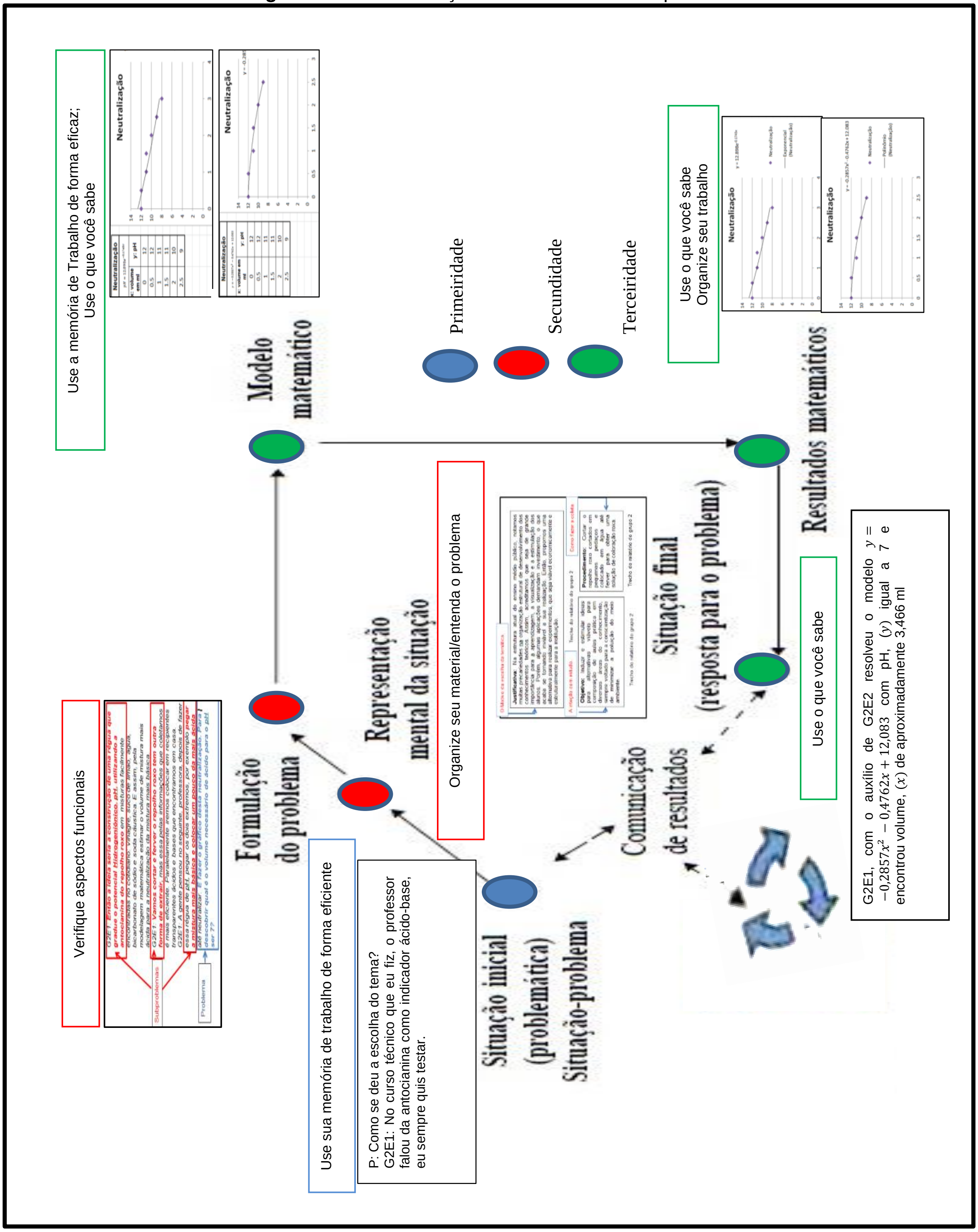
Quadro 4.25 – Relação entre Modelagem Matemática e Estratégias Heurísticas

Modelagem Matemática	**Estratégia Heurística**
Inteiração Matematização	“organize seu material/ entenda o problema”
	“use sua memória de trabalho de forma eficaz”
Dedução do Modelo Interpretação de Resultados Validação	“organize seu material/ entenda o problema”
	“use sua memória de trabalho de forma eficaz”
	“use o que sabe”
	“verifique aspectos funcionais”
	“organize seu trabalho”

Fonte: A autora.

Neste sentido organizamos na Figura 4.28 as ações de uma atividade de Modelagem Matemática reveladas pelos estudos de Stender (2018). Além de associá-las às categorias fenomenológicas de Peirce: Primeiridade, Secundidade e Terceiridade.

Figura 4.28 - Associação das bases teóricas para a atividade 3



Fonte: A autora.

Na atividade aqui apresentada, a primeiridade apareceu no momento em que os estudantes foram colocados em contato com a problemática proposta, na realização de uma APCC. Por meio da estratégia “use sua memória de trabalho de forma eficaz” de um dos integrantes do grupo surgiu à temática do estudo da Antocianina. Os mesmos buscaram por si mesmos, novos dados, para “organizar o material e entender o problema”, estabelecendo uma relação de existência e dualidade entre o tema escolhido e seu significado. A relação de existência configura a secundidade. Além disso, os estudantes evidenciaram a existência de algo para ser estudado. Por meio da definição das metas de resolução, “usar o que você sabe” os estudantes buscam estabelecer generalidade para obterem uma solução para o problema.

A generalidade foi estabelecida por meio de ajustes de curvas aos pontos representados em um plano cartesiano culminando em soluções para o problema. Tais soluções foram interpretadas com relação ao fenômeno e, quando necessário, informações e considerações foram estabelecidas. Essas ações de envolvimento com conteúdos matemáticos, intuindo “organização do trabalho” evidenciaram conteúdos como função quadrática, função do tipo exponencial, domínio e imagem encontram-se no nível da terceiridade. Justamente por estarem na terceiridade, os estudantes já estavam carregados de interpretação, análise e busca de explicação para a situação.

Assim, pudemos inferir que o desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática, além de permitir uma aproximação entre aquilo que o professor explica e o que o aluno compreende, pode possibilitar que o professor tenha acesso àquilo que o estudante está aprendendo por meio da identificação das categorias fenomenológicas primeiridade, secundidade e terceiridade e ainda como o estudante soluciona por meio das Estratégias Heurísticas utilizadas.

4.3 ANÁLISE GLOBAL

Considerando o interesse em investigar relações entre Estratégias Heurísticas no desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática e as categorias fenomenológicas da Semiótica Peirceana, voltamos nossa atenção para as questões que orientaram as análises específicas: que signos são produzidos pelos alunos no desenvolvimento de atividade de Modelagem Matemática? Como as categorias fenomenológicas de Peirce se fazem presentes nas fases de uma atividade de Modelagem Matemática? Como os signos influenciam e ao mesmo tempo revelam as Estratégias Heurísticas em atividades de Modelagem Matemática?

Ao analisar cada atividade, buscamos a partir dos dados coletados, responder essas questões baseadas na pesquisa qualitativa interpretativa que realizamos para então, apresentar reflexões acerca delas, tendo como foco o nosso objetivo de pesquisa.

Ao longo desta investigação evidenciamos que as atividades de Modelagem Matemática desenvolvidas pelos alunos a partir de um tema ora escolhido em conjunto com a professora regente, ora elencado por eles mesmos, viabilizaram a autonomia em relação ao que analisar a respeito desse tema. Mas, foram os conhecimentos mobilizados pelos alunos que desencadearam discussões nos grupos em relação ao que fazer para investigar tal tema ou avançar em sua investigação. É nesse “o que fazer na construção do modelo matemático” que as Estratégias Heurísticas foram reveladas.

A cada estratégia esboçada com vista à investigação acerca do tema ou de um problema a ele relacionado, os alunos, em seus respectivos grupos, mobilizaram seus conhecimentos, ora matemáticos, ora químicos acerca de o que fazer em busca da resolução. Neste sentido, as comunicações em grupo mobilizaram signos, que segundo Peirce (2012) representa algo que se quer comunicar, capazes de revelar como os alunos resolvem essa situação-problema.

Como as atividades de Modelagem Matemática são abertas, conforme Almeida, Silva e Vertuan (2012), permitirem múltiplas possibilidades de resolução, tanto no que diz respeito à elaboração de um problema a partir da escolha de estudo quanto no que se refere aos procedimentos e conhecimentos mobilizados no desenvolvimento da atividade, favorece a produção de signos.

As análises locais permitiram identificar que as informações coletadas sobre cada situação em estudo: gráficos, expressões algébricas, entre outros, considerando a relação com a situação e os conhecimentos mobilizados por eles, compuseram o conjunto de signos utilizados e produzidos pelos alunos.

Neste sentido, ao longo das atividades, os alunos se envolveram com um problema a investigar, com a busca por uma solução para ele e com a análise de resposta considerada por eles como solução para tal problema. Para Almeida, Silva e Vertuan (2011) signos são produzidos durante todo o desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática associadas às categorias fenomenológicas da Semiótica Peirceana pelas ações que são primeiras, segundas e terceiras. Segundo esses autores:

> [...] podemos relacionar a categorização dos signos estabelecida por Peirce ao desenvolvimento de uma atividade de Modelagem Matemática, pois por meio de uma situação (algo que se apresenta à mente), um primeiro, é possível estabelecer a existência de um problema a ser estudado (aquilo que a situação indica, se refere ou representa), um segundo, para, então, deduzir o modelo matemático e interpretá-lo em relação ao fenômeno (o efeito que poderá provocar em um possível intérprete, o modelador), um terceiro (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2011, p. 13).

Considerando a perspectiva de Modelagem Matemática pautada nessa pesquisa e os estudos de Stender (2018) e Almeida (2020), evidenciamos que as Estratégias Heurísticas são ferramentas importantes para que os alunos resolvam problemas de maneira bastante independente, guiando as ações dos alunos no “o que fazer” para a resolução do problema.

Deste modo, os signos, matemáticos ou não, revelam uma interpretação dos alunos a respeito do problema. Para tanto, Almeida e Ferruzzi (2009) ressaltam que uma atividade de Modelagem Matemática requer do aluno, inicialmente, ações de identificação de um problema e a definição de metas para sua resolução, trata-se da fase de inteiração, na qual observamos a Primeiridade Peircena, no momento em que os alunos têm o primeiro contato com a atividade, o resfriamento do café conforme o material do recipiente em que foi inserido acontece no momento em que a professora regente propõe o desenvolvimento de uma atividade de Modelagem Matemática em que se investiga a temperatura do café com o passar do tempo. Após essa identificação do problema, os alunos sugerem a utilização de recipientes com materiais diferentes para a aferição da temperatura. Para a coleta de dados fazem uso de termômetros culinários, quantidade de café, marcações de altura nos recipientes com água e determinam o tempo de coleta, definindo as metas para a resolução e deixando emergir as primeiras estratégias de resolução "organize seu material/entenda o problema" – ao sugerirem um estudo do resfriamento em recipientes de diferente material, observamos a busca pelo entendimento do problema além da procura de canecas, xícaras e copos - "use sua memória de trabalho de forma eficaz" – o grande problema de análise do comportamento do resfriamento do café foi dividido em pequenos problemas, quantidade, tempo, material e forma de aferir.

Na atividade 2, ao terem o primeiro contato com a sugestão da pesquisadora de analisar reações químicas que acontecem cotidianamente na cozinha utilizam a Estratégia Heurística "organize seu material/ entenda o problema". Diversas reações químicas acontecem na cozinha, liberação de ácido ao descascar uma cebola, pressão de panelas, escurecimento de frutas em contato com oxigênio, fermentação, entre outros; destes o tema fermentação foi delineado para a análise da situação-problema.

O estudo da antocianina como um medidor alternativo de potencial Hidrogeniônico foi sugerido por um aluno do grupo 2, que visualizou a APCC como uma oportunidade de teste para um indicador orgânico, que conhecera anteriormente em um curso técnico, temos a Estratégia Heurística "organize seu material/ entenda o problema" – há uma "tentativa", um teste da eficiência da antocianina – que define situação-problema a ser investigada.

Estas primeiras ações com vistas a compreender a possibilidade de soluções demonstram que a principal Estratégia Heurística da Primeiridade de um fenômeno a ser investigado é "organize seu material/ entenda o problema". Segundo Stender (2018, p. 317) o indivíduo que está resolvendo o problema deve organizar e estruturar o problema para alcançar uma representação do material dado, tornando-o acessível ao revelar os padrões e estruturas importantes.

Os signos utilizados e produzidos pelos grupos de alunos ao desenvolverem suas atividades de modelagem estão associados às suas Estratégias Heurísticas e, portanto, retratam interpretações dos alunos em relação ao tema em estudo, ao problema, aos objetos matemáticos vinculados ao problema e à resposta aceita como solução para o problema.

Outros signos analisados vieram da fase de matematização, complementando signos anteriormente produzidos, ao reconhecer a temperatura do café como variável dependente e o tempo como a variável independente identificamos a utilização da Estratégia Heurística “verifique aspectos funcionais”. Essa busca por conexões entre os dados e o problema levanta a hipótese de um comportamento exponencial decrescente e a aceitação de que o recipiente influencia na perda de temperatura para o ambiente nesta atividade. Assim, também é observado na atividade de comparação de fermentos: a altura do bolo é a variável dependente e o tempo independente, como hipótese o custo e a eficiência do fermento caseiro são semelhantes ao fermento industrializado, além não haver alteração no sabor e o fermento caseiro não trazer malefícios a saúde. Entretanto, ainda observamos a presença da estratégia “organize seu material/ entenda o problema”, pois a busca de informações complementares é que possibilitaram essa transformação da linguagem natural para a matemática.

A Secundidade da atividade 3 também é marcada pela presença das Estratégias Heurísticas “organize seu material/ entenda o problema” – busca de informações complementares de extração da antocianina, misturas de diferentes pH, entre outras - “use sua memória de trabalho de forma eficaz” – para essa investigação, o grupo resolve subproblemas como: retirar a antocianina, verificar a coloração e o pH de misturas ácidas, neutra e básicas, antes de analisar a situação-problema (qual é o volume de ácido necessário para neutralização de uma base?), finalizando com “verifique aspectos funcionais” - elencando o volume do ácido como variável independente e o pH da mistura como dependente.

Essas segundas ações que relacionaram a busca de informações complementares e o início do estudo da situação, com a definição do problema, a corporificação de algo a ser estudado retrata a categoria fenomenológica denominada Secundidade.

Assim, a etapa de construção de modelo marca a entrada na Terceiridade para Almeida, Silva e Vertuan (2011, p. 16): “A Terceiridade está relacionada com as etapas de obtenção e dedução do modelo matemático, na obtenção dos resultados matemáticos e sua validação em confronto com a situação-problema”. Logo apresentamos a categoria fenomenológica mais rica e carregada de Estratégias Heurísticas.

Na atividade do resfriamento do café, a articulação entre a Primeiridade e a Secundidade fica evidenciada na passagem do signo tabela para o gráfico. As estratégias “organize seu material/entenda o problema” e “use sua memória de trabalho de forma eficaz”, possibilitou que os alunos inferissem que o comportamento do fenômeno era exponencial, então há a utilização de simulações com computadores que possibilita a lembrança de conteúdos já estudados e evoca a estratégia “use o que sabe”, relacionando a problemas análogos a uma função exponencial. Ainda com a tentativa de generalização dada pela possibilidade de previsão do modelo, a estratégia “pense grande” e “verifique aspectos funcionais” está relacionada ao fato de diminuir certas restrições do problema e então resolvê-lo de forma mais ampla, intuindo uma generalização.

Na atividade seguinte, de comparação entre fermento caseiro e industrializado, ao definir a situação-problema, o grupo mostra evidências de utilização de outra Estratégia Heurística, “use sua memória de trabalho de forma eficaz”, pois a coleta de dados foi dividida em subproblemas. Além de nas respostas da entrevista de um dos integrantes do grupo identificarmos a estratégia “pense grande” – onde desconsideraram pequenos obstáculos como temperatura ambiente, tamanho dos ovos utilizados em cada receita, entre outros detalhes - que limitariam a pesquisa e impossibilitariam uma generalização. Assim, ao rever os signos produzidos e utilizados na interpretação e validação os alunos retomaram a Estratégia Heurística enunciada “organize seu material/ entenda o problema” e “verifique aspectos funcionais” – quando utilizaram simulações computadorizadas, a tentativa e erro na construção de um modelo, que segundo o grupo não descreveria o fenômeno, então o erro e a busca por um novo modelo – outra estratégia revelada é a “use o que sabe” - identificada pela utilização de conteúdos aprendidos anteriormente para buscar semelhanças ou diferenças na resolução da situação-problema atual, uma busca por analogias. Já a generalização que identifica a estratégia “verifique aspectos funcionais” pelo esboço de supersignos – signos que representam muitas coisas juntas, como por exemplo, a função definida por partes $f_2(x)$:

Para o fermento industrializado

$$f_2(x) = \begin{cases} 0{,}0094x^2 + 0{,}0375x + 3,\ 05\ para\ 0 < x < 12 \\ 4{,}9\ \ para\ x \geq 12. \end{cases}$$

Podemos verificar que uma ‘parte’ é parabólica e outra constante, ainda que é crescente até certo ponto, tem domínio restrito, entre outras inferências sobre o conhecimento dos alunos ao analisar esse supersigno.

No estudo da Antocianina, a Terceiridade é observada com o uso da estratégia representação “use o que sabe” e “verifique aspectos funcionais” - função exponencial em forma gráfica e de expressão algébrica e sua interpretação quanto ao comportamento da função - o grupo utiliza de analogia para a resolução da nova situação-problema, além de uma tentativa de generalização quanto ao pH da mistura a qualquer que seja o volume de ácido adicionado. Porém, na fase de validação o grupo decide por alterar o modelo encontrado para a situação problema deixando evidente outra Estratégia Heurística “Organize seu Trabalho”, em razão de alterar a abordagem e trabalhar com um intervalo finito, intuindo adaptar a atividade para alunos no 1º ano do Ensino Médio.

Assim, inferimos que a Modelagem Matemática é um elo entre os signos produzidos e utilizados, conforme o fenômeno vai se desenhando na mente humana e é categorizado por Peirce como Primeiridade, Secundidade e Terceiridade. Além de a organização de Estratégias Heurísticas que potencializam a realização de um trabalho mais autônomo.

Ainda que as categorias fenomenológicas sejam momentos epistemológicos do pensamento e represente o cerne da Semiótica Peirceana, buscamos nesta pesquisa apresentar de forma linear e simplista as intersecções das bases teóricas a que nos propusemos a investigar (Quadro 4.26). Compreendendo que o estudo de fenômenos não é linear e busca investigar diferentes facetas de teorias preconcebidas e referenciais utilizados para alcançar o objetivo de investigação.

Quadro 4.26 - Relações entre Modelagem Matemática e Estratégias Heurísticas e Semiótica Peirceana

<table>
<tr><th>Categoria Fenomenológica</th><th>Modelagem Matemática</th><th>Estratégia Heurística</th></tr>
<tr><td>Primeiridade</td><td>• Inteiração</td><td>“organize seu material/ entenda o problema”</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Secundidade</td><td rowspan="3">• Inteiração
• Matematização</td><td>“organize seu material/ entenda o problema”</td></tr>
<tr><td>“use sua memória de trabalho de forma eficaz”</td></tr>
<tr><td>“verifique aspectos funcionais”</td></tr>
<tr><td rowspan="6">Terceiridade</td><td rowspan="6">• Dedução do Modelo
• Interpretação de Resultados
• Validação</td><td>“organize seu material/ entenda o problema”</td></tr>
<tr><td>“use sua memória de trabalho de forma eficaz”</td></tr>
<tr><td>“pense grande”</td></tr>
<tr><td>“use o que sabe”</td></tr>
<tr><td>“verifique aspectos funcionais”</td></tr>
<tr><td>“organize seu trabalho”</td></tr>
</table>

Fonte: A autora.

Ocorrem então, ao longo de uma atividade de Modelagem Matemática, processos de idas e vindas vinculados às Estratégias Heurísticas, ressaltando a não linearidade das fases. São esses processos que favorecem a produção de signos a partir de signos anteriormente utilizados, constituindo um processo de categorização fenomenológica, indicando uma interpretação carregada de conceitos matemáticos e não-matemáticos e não apenas uma representação do objeto matemático.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

As argumentações apresentadas ao longo desta investigação, cujo objetivo consistia em apresentar as relações entre as Estratégias Heurísticas no desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática e categorias fenomenológicas da Semiótica Peirceana a partir da análise de signos, que orientaram nossa pesquisa e discussões e, nesse momento, possibilitaram algumas inferências em relação ao estudo desenvolvido.

Com vistas a obter dados que permitissem analisar aspectos relativos aos signos em atividades de Modelagem Matemática, delimitamos que este estudo se realizaria na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral de uma turma de Licenciatura em Química.

Considerando que a professora regente utiliza um portfólio com atividade de Modelagem Matemática como um dos instrumentos de avaliação, analisamos aquelas em que o tema e a coleta foram realizados pelos próprios alunos no segundo semestre de 2018.

As atividades de Modelagem Matemática desenvolvidas, de segundo e terceiro momento, bem como os registros escritos contidos no portfólio, documentos digitais enviados via correio eletrônico e a transcrição dos áudios e dos vídeos das discussões relativas ao desenvolvimento dessas atividades e notas da pesquisadora constituíram o *corpus* da pesquisa, sendo tomados como fonte para algumas reflexões.

Destacamos que a análise interpretativa na condução da investigação dos dados foi relevante no sentido de viabilizar, a partir do que sugere essa teoria de análise, um olhar atento e cuidadoso para os dados com relação ao fazer Modelagem.

Dentre as atividades de Modelagem Matemática desta investigação, três delas, resfriamento do café, fermento caseiro x fermento industrializado e estudo da antocianina figuraram nas análises específicas e global. Contudo, encaminhamentos assumidos nas atividades: vai de gasolina ou etanol? e quanto de corda vou precisar?, também são considerados para o produto educacional.

Interessadas em apresentar reflexões acerca da questão que originou esta investigação, buscamos identificar nos signos utilizados e produzidos pelos alunos quando envolvidos com atividades de Modelagem Matemática, as categorias fenomenológicas de Peirce em cada fase, além de investigar como os signos influenciam e ao mesmo tempo revelam as Estratégias Heurísticas em atividades de Modelagem Matemática. Para tanto, assumimos que ao longo do desenvolvimento de atividades de Modelagem os alunos utilizam e produzem signos nas fases de inteiração, matematização, resolução, interpretação e validação.

Os resultados desta investigação sugerem que a identificação de um problema e a definição de metas para sua resolução, a matematização, a construção de uma representação matemática, a interpretação das soluções e a comunicação desta respostas, segundo Almeida, Silva e Vertuan (2011) não são ações isoladas ou compartimentadas, mas são interdependentes e se complementam.

Da relação entre os signos e as Estratégias Heurísticas nos encaminhamentos dados pelos alunos no desenvolvimento de suas atividades identificamos que essa ligação se dá quando os alunos mobilizam seus conhecimentos em relação à situação, aos objetos matemáticos e a ambos de forma articulada. Dessa mobilização que acontece em associação com a Primeiridade, Secundidade e Terceiridade, os signos revelam escolhas para essa ou aquela estratégia de encaminhamento dada à atividade de Modelagem Matemática. A cada escolha, novos signos são utilizados ou produzidos em conexão com o contexto de referência que conduzem ao desenvolvimento da atividade e, consequentemente, à resolução do problema.

As análises que aqui realizamos, apontam conexões entre signos produzidos nas fases de construção do modelo e categorias fenomenológicas que aconteceram ao longo de todas as atividades de Modelagem Matemática. Estes nexos revelam interpretações dos alunos acerca dos conhecimentos por eles mobilizados, inferimos que há uma organização do fazer modelagem por meio das categorias fenomenológicas e das Estratégias Heurísticas utilizadas, que possibilitam uma autonomia e segurança aos alunos, conforme suas decisões assertivas e coerentes.

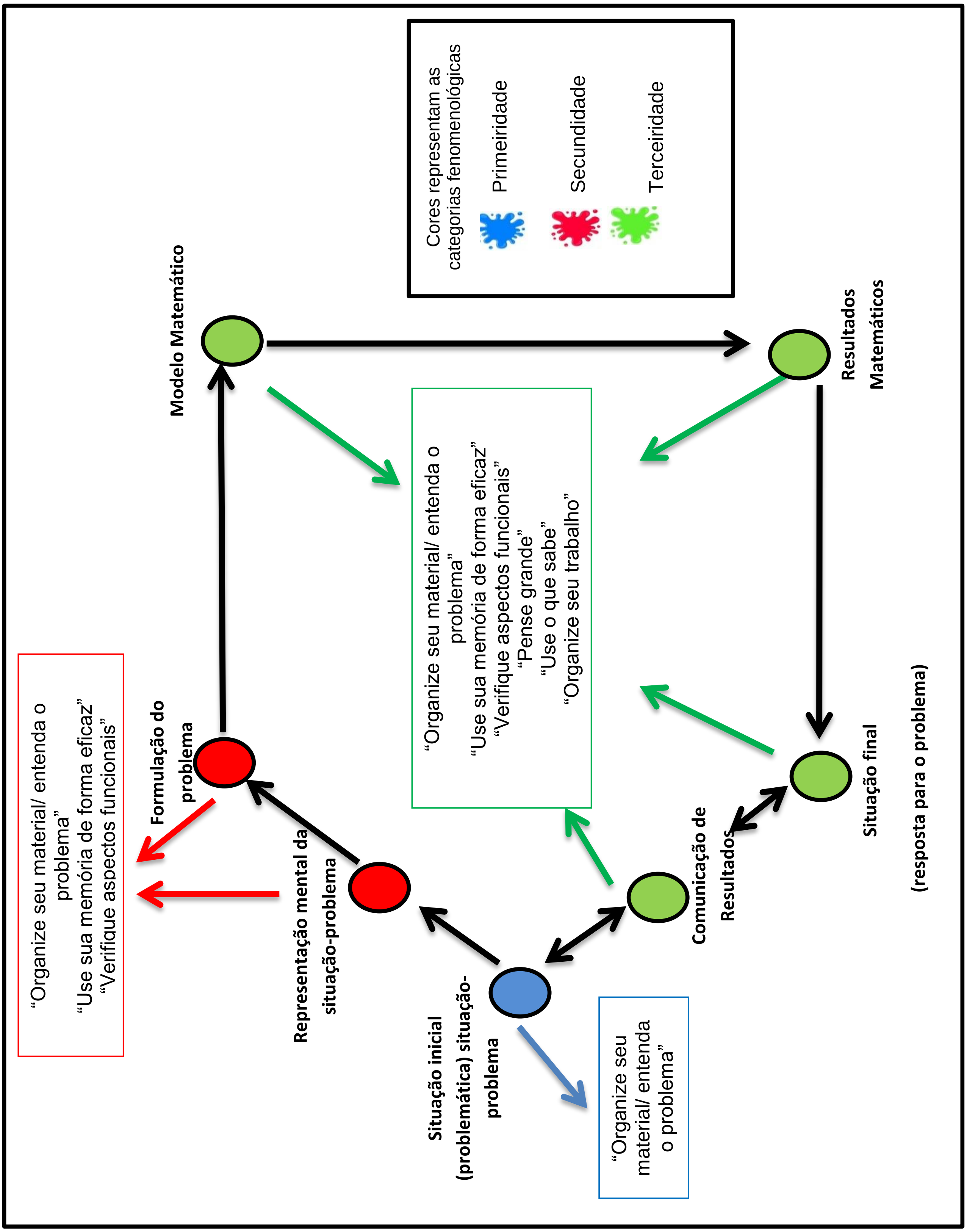
Conforme mostram as análises, os signos utilizados e produzidos pelos alunos são fundamentais para a comunicação de seus pensamentos e conhecimentos, da situação ou do objeto matemático, para que todos os outros associem ao conhecimento sobre o signo que se faz presente e a categoria fenomenológica em que se reflete o pensar.

Por meio das reflexões realizadas a partir do desenvolvimento desta pesquisa entendemos que a Primeiridade, a primeira impressão, aparece no momento em que os alunos têm o primeiro contato com a atividade, no início da fase de inteiração, no momento em que encontram a situação-problema que será investigada. Em que há a predominância da utilização da Estratégia Heurística “organize seu material/ entenda o problema”.

A Secundidade, a reação, está relacionada com a busca de informações que os alunos fazem para iniciar o estudo da situação, com a definição do problema, com a existência de algo para ser estudado. Apresentando vestígios da Estratégia Heurística “organize seu material/ entenda o problema”, mas complementada por “use a memória de trabalho de forma eficaz” e “verifique aspectos funcionais”. Já que se busca a corporificação da situação.

A Terceiridade, interação entre Primeiridade e Secundidade, relaciona-se com as etapas de obtenção e dedução do modelo matemático. Sendo a categoria fenomenológica com maior número de Estratégias Heurísticas evidenciadas. Uma vez que, o olhar do estudante sobre um signo está carregado de interpretação, de busca de explicação, de análise e generalização, requer, por parte do aluno, um maior uso de ferramentas matemáticas para que haja a interpretação dos signos produzidos e utilizados de acordo com o conceito matemático para a resolução da situação-problema. Portanto, identificamos as estratégias “organize seu material/ entenda o problema”, “use sua memória de trabalho de forma eficaz”, “pense grande”, “use o que sabe”, “verifique aspetos funcionais” e “organize seu trabalho” (Figura 5.1).

Figura 5.1 - Articulações entre Estratégias Heurísticas na Modelagem Matemática e as categorias fenomenológicas peirceanas



Fonte: A autora.

É pertinente ressaltar que no desenvolvimento desta investigação os alunos tiveram livre arbítrio tanto em relação ao problema a investigar como aos objetos matemáticos utilizados na intenção de encontrar uma solução para tal problema. Por meio das Estratégias Heurísticas utilizadas no desenvolvimento da atividade foi refletida a autonomia dos grupos, quando eles delimitam que aspectos da situação considerar, elaboram as hipóteses, selecionam as variáveis, planejam a coleta de dados, mobilizam conhecimentos não matemáticos, constroem e validam o modelo.

Por conseguinte, as atividades possibilitaram a organização e elaboração de signos, isto é, a generalização do conhecimento em sistemas semióticos de representação como: algoritmos, tabelas, gráficos, entre outros e não apenas o manuseio passivo do objeto matemático.

Essas ações possibilitam observar elementos indicativos do pensar refletido nos signos apresentados para o fenômeno em estudo. Considerando que, de modo particular, nosso olhar nesta investigação incidiu sobre a organização dos signos em atividades de Modelagem Matemática na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral para alunos da Licenciatura em Química. Uma análise acerca das Estratégias Heurísticas associadas às categorias fenomenológicas reveladas pelos signos de alunos em diferentes níveis de ensino pode figurar o desenvolvimento de outras pesquisas.

Em suma, acreditamos que as reflexões acerca da relação dos signos com o pensamento e a estratégia escolhida parecem estar em sintonia com o que acontece durante o desenvolvimento das atividades de Modelagem Matemática que analisamos. Além disso, as reflexões advindas desta investigação, alinhadas às práticas de sala de aula, colaboram com questões relativas às ações dos alunos em atividades de Modelagem Matemática, promovem um pensar acerca das articulações entre representação e conhecimento viabilizadas por meio dos signos associados a tais ações e sinalizam implicações para aprendizagem dos alunos. De modo geral, as reflexões por ora apresentadas também podem influenciar o modo como o professor conduz atividades de Modelagem Matemática na sala de aula que não estritamente matemática, pois sugerem um olhar atento às atitudes e às produções dos alunos para além de conhecimentos matemáticos.

Ainda que durante a pesquisa desenvolvida algumas limitações aparecessem: a desistência de alunos, o costume com respostas únicas e corretas, a necessidade de aprovação do professor para prosseguir o desenvolvimento, a falta de familiaridade com softwares matemáticos tanto por parte da pesquisadora, quanto dos alunos, a dificuldade de participação dos alunos em momentos extraclasse, como na entrevista e principalmente não conseguir acompanhar minuciosamente o desenvolvimento das atividades de terceiro momento por conta do trabalho e de morar em outro município. Essas dificuldades não diminuíram o significado e a importância do desenvolvimento desta pesquisa para nossa atualização e qualificação profissional despertando a importância de uma análise atenta aos signos produzidos e utilizados pelos alunos.

Apresentado os resultados de nossa pesquisa, gostaríamos de chamar a atenção para o caderno de atividades de Modelagem Matemática que é o produto educacional fruto desta investigação. Ele contém, além dessas atividades, outras duas que foram desenvolvidas com uma turma de Licenciatura em Química.

REFERÊNCIAS

AGUIAR, W. R.; OLIVEIRA, A. M. P. A transformação dos textos dos materiais curriculares educativos por professores de matemática: uma análise dos princípios presentes na prática pedagógica. **Boletim de educação matemática**, Rio Claro, v. 28, n. 49, p. 580-600, 2014.

ALMEIDA, L. M. W. Modelagem matemática e o ensino de Matemática. In: ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7, 2002, Foz do Iguaçu. **Anais...**Foz do Iguaçu: Unioeste, 2002, p. 1-14.

ALMEIDA, L. M. W.; DIAS, M. R. Um estudo sobre o uso da Modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem. **Bolema**, v. 17, n. 22, p. 19 – 35, 2004.

ALMEIDA, L. M. W.; BRITO , D. S. Atividades de modelagem matemática: que sentido os alunos podem lhe atribuir? **Ciência e Educação**, v.11, n.22, p.1-16, 2005.

ALMEIDA, L. M. W.; FATORI, L. H.; SOUZA, L. G. S. Ensino de cálculo: uma abordagem usando Modelagem Matemática. **Revista Ciência e Tecnologia**, São Paulo, v. 10, n.17, 2007.

ALMEIDA, L. M. W.; FERRUZZI, E. C. Uma aproximação socioepistemológica para a modelagem matemática. **Alexandria**, v. 2, n.2, p. 117-134, 2009.

ALMEIDA, L. M. W. Um olhar semiótico sobre modelos e modelagem: metáforas como foco de análise. **Zetetiké**, v. 18, n. temático, p. 387-413, 2010.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A. P.; VERTUAN, R. E. Sobre a categorização dos signos na Semiótica Peirceana em atividades de Modelagem Matemática. **Revista Eletrónica de Investigación en Educación em Ciencias (REIEC),** v.6, n. 1, p. 1-10, 2011.

ALMEIDA, L. M. W.; VERTUAN, R. E. Discussões sobre “como fazer” modelagem matemática na sala de aula. In: ALMEIDA, L. M. W.; ARAÚJO, J. L.; BISOGNIN, E. (Orgs.). **Práticas de modelagem matemática**: relatos de experiências e propostas pedagógicas. Londrina: EDUEL. p. 19-43, 2011.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A. P. Semiótica e as ações cognitivas dos alunos em atividades de Modelagem Matemática: um olhar sobre os modos de inferência. **Ciência e educação**, v.18, n.3, p.623-642, 2012.

ALMEIDA, L. W.; SILVA, K. A. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na educação básica**. 1. ed. São Paulo: Contexto, 2012.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A. P. The Meaning of the Problem in a Mathematical Modelling Activity. In: STILLMAN, G. A.; BLUM, W.; BIEMBENGUT, M. S. (Eds.). **Mathematical Modelling in Education Research and Practice:** cultural, social and cognitive influences. New York: Springer, 2015. p.45-54.

ALMEIDA, L. M. W., SILVA, K. A. P.; VERONEZ, M. R. D. Sobre a geração e a interpretação de signos em atividades de modelagem matemática. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 6., 2015, Pirenópolis. **Anais..**. Pirenópolis: SBEM, 2015, p. 1-13.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A. P. A Ação dos Signos e o Conhecimento dos Alunos em Atividades de Modelagem Matemática. **Bolema**, v. 31, n. 57, p. 202-219, 2017.

ALMEIDA, L. M. W. Considerations on the use of mathematics in modeling activitives. **Zentralblatt für Didaktik der Mathematik – ZDM – The International Journal on Mathematics**, v. 50, n. 1-2, p.19-30, 2018.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A. P. A semiotic interpretation of the derivative concept in a textbook. **Zentralblatt für Didaktik der Mathematik – ZDM – The International Journal on Mathematics**, v. 50, n. 10, p. 881-892, 2018.

ALMEIDA, L. M. W. A Estratégias heurísticas como meios de ação em atividades de Modelagem Matemática. **Com a Palavra o Professor**, v. 5, n. 11, p. 220-236, 2020.

ARAKI, P. H. H.; SILVA, K. A. P. Mobilização de recursos semióticos por alunos no desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13., 2019, Cuiabá. **Anais...** Cuiabá: SBEM-MT, 2019, p. 1-15.

BARBOSA, J. C. Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 24., 2001, Caxambu. **Anais...** Caxambu: ANPED, 2001, p. 1-8.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática:** uma nova estratégia. 3. ed. São Paulo: Contexto, 2002.

BIEMBENGUT, M. S. **Modelação Matemática como método de ensino-aprendizagem de Matemática em cursos de 1 º e 2 º graus.** 1990. 210 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista Júlio Mesquita Filho, Rio Claro, 1990.

BIEMBENGUT, M. S. **Modelagem Matemática & implicações no ensino aprendizagem de matemática.** 1. ed. Blumenau. Editora da FURB, 1999.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem Matemática no Ensino.** 3. ed. São Paulo: Contexto, 2005.

BLUM, W.; NISS, M. Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects: State, trends and issues in mathematics instruction. **Educational Studies in Mathematics**, n. 22, p. 37-68, 1991.

BLUM, P., GALBRAITH, PL, HENN, H.; NISS, M. (Eds.). **Modelling and Applications in Mathematics Education:** O 14º Estudo ICMI**.** Nova York: Springer, 2007.

BORSSOI, A. H.; SILVA, K. A. P.; FERRUZZI, E. C. Tarefas desencadeadas em aulas com modelagem matemática. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12., 2016, São Paulo. **Anais...** São Paulo: SBEM-SP, 2016, p.1-12.

BURAK, D. **Modelagem matemática: uma alternativa para o ensino de matemática na 5ª série.** 1987. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1987.

BURAK, D.; KLUBER, T. E. Educação matemática: contribuições para a compreensão de sua natureza. **Acta Scientiae**, Canoas. v.10, n.2, p. 93-106, 2008.

CABRAL, T. C.; CATAPANI. Imagens e olhares em uma disciplina de Cálculo em serviço. **Zetetiké**, v. 11, n. 19, p. 101-116, 2003.

CALDEIRA, A. D. Modelagem matemática: produção e dissolução da realidade. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 8, 2004, Pernambuco. **Anais...** Pernanbuco: UFPE, 2004.

CARLSON, M. A.; WICKSTROM, M. H.; BURROUGHS, E. A.; FULTON E. W.; **A Case for Mathematical Modeling in the Elementary School Classroom.** Trends in National Council of Teachers of Mathematics CHAPTER. St. Louis, p. 121-129, 2016.

COSTA, A. A.; SILVA, M. A. Uma releitura do livro “A arte de resolver problemas” de George Polya (1978). In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 11, 2013, Curitiba. **Anais...** Curitiba: PUCPR: 2013.

CROUCH, R.; HAINES, C. Mathematical modelling: transitions between the real world and the mathematical model**. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,** v. 35, n. 2, p. 197-206, 2004.

D’AMORE, B. **Primeiros elementos de semiótica: sua presença e sua importância no processo de ensino-aprendizagem da matemática**. D’Amore, B.; FANDIÑO PINILLA, M. I.; IORI, M. (Org.). São Paulo: Editora Livraria da Física, 2015.

DAMM, R. F. **Registros de Representação.** In: MACHADO, S. D. A. (Org.). Educação Matemática: uma introdução. 3. ed. São Paulo: EDUC, 1999.

FARIAS, M. M. R. **As representações matemáticas mediadas por softwares educativos em uma perspectiva semiótica: uma contribuição para o conhecimento do futuro professor de Matemática.** 2007. Dissertação (Pós-Graduação em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2007.

FREITAS, J. L. M. **Teoria das situações didáticas.** In: MACHADO, S. D. A. (Org.). Educação matemática: uma introdução. 3. ed. São Paulo: EDUC, 2008.

GALBRAITH, P. Models of Modelling: Genres, Purposes or Perspective. **Journal of Mathematical Modelling and Application**, v.1, n. 5, p. 3-16, 2012.

GARZELLA, F. A. C. **A disciplina de cálculo I: análise das relações entre as práticas pedagógicas do professor e seus impactos nos alunos.** 2013. 257f. Tese (Doutorado em Educação). Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2013.

GHIZZI, E. B. **Introdução à semiótica filosófica de Charles Peirce:** texto de apoio didático. Campo Grande, UFMS: 2009.

GOIS, V. H. S. **Livro didático e atividades de modelagem matemática: algumas articulações.** 2019. 150 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática do Programa de Mestrado de Ensino de Matemática) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Londrina, 2019.

GOIS, V. H. S.; SILVA, K. A. P.; DALTO, J. O. Análise da Produção Escrita de Estudantes do Ensino Superior: Uma abordagem Semiótica. **Alexandria - Revista de Educação em Ciências e Tecnologia**, v. 12, n. 1, p. 255-278, Florianópolis: UFSC, 2019

GREEFRATH, G. Using technologies: New possibilities of teaching and learning modeling – overview. In: KAISER, G; BLUM, W.; BORROMEO FERRI, R.; SITLLMAN, G. (Ed). **Trends in leaching and learming of. Mathematical modeling**. Dordreoht: Springer, p. 301-304, 2011.

GREEFRATH, G.; VORHÖLTER, R. **Teaching and Learning Mathematical Modelling**: approaches and developments from german speaking countries. ICME-13 topical surveys. Cham: Springer International Publishing, 2016.

JUSTULIN, A. M. **A Resolução de Problemas no contexto da Formação de Professores.** 2014. 245f. Tese (Doutorado em Educação Matemática)- Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2014.

JUSTULIN, A. M. A Resolução de Problemas nos cursos de Licenciatura em Matemática do Paraná. Panorama. **VIDYA**, Santa Maria, v. 37, n. 1, p. 127-141, 2017.

KEHLE, P.; LESTER, F. K, Jr. A semiotic look at modeling behavior. In: LESH, D.; DOERR, H., Beyond constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, **Learning, and Teaching**. Hillsdale: Erlbaum, p. 97- 122, 2003.

KOGA, T. M.; SILVA, K. A. P.; DALTO, J.O. Estratégias heurísticas reveladas na produção escrita em uma atividade de Modelagem Matemática. In: Encontro Paranaense de Educação Matemática,15, 2019, Londrina. **Anais...**Londrina: SBEMPR, 2019.

KOGA, T. M.; SILVA, K. A. P. Estratégias heurísticas reveladas pelos signos em uma atividade de Modelagem Matemática**.** In: Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática, 11, 2019, Belo Horizonte**. Anais...** Belo Horizonte: UFMG, 2019.

MEDEIROS, A. M. A. **Afetos como construtores de uma práxis pedagógica no ensino-aprendizagem de matemática**. 2009, 132f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade de Brasília. Brasília, 2009.

MENDES, T. F.; ALMEIDA, L. M. W. Semiótica peirceana em atividade de modelagem matemática. In: Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática, 10, 2017, Maringá. **Anais...** Maringá: UEM, 2017.

MENDES, T. F. **A derivada de uma função em atividade de modelagem matemática: uma análise semiótica.** 2018. 125f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2018.

MEYER, J. F. C. A.; CALDEIRA, A. D.; MALHEIROS, A. P. dos S. **Modelagem em Educação Matemática.** 1. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

MOREIRA, M. A. **Metodologias de Pesquisa em Ensino**. 1. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.

OTTE, M. Mathematical epistemology from a semiotic point of view. In**: PME International Conference**, 25, 2001, Netherlands. University of Utrecht, Netherlands, 2001.

PEIRCE, C. S. **Semiótica e filosofia**. Editora Cultrix, 1972.

PEIRCE, C. S. **Semiótica.** Tradução de José Teixeira Coelho Neto. 2. reimpr. da 3. ed. de 2000. v. 46. São Paulo: Perspectiva, 2005.

POLYA, G. **HOW TO SOLVE IT**. Princeton University Press. 1945.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**: um novo aspecto do método matemático. Tradução e adaptação: Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

RADFORD, L**.** Introducción: Semiótica y Educación Matemática**. Revista Latinoamericana de Investigacion en Matematica Educativa,** México, v. 1, número especial, p. 7-21, 2006.

RAMOS, D. C. **O raciocínio abdutivo em atividades de Modelagem Matemática.** 2016. 158 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.

ROMANYCIA, M.; PELLETIER, F.J. **What is a heuristic?,** Information Services, Engineering and Planning, Computer Intell. p. 47-58, 1985. Recuperado de: http://www.sfu.ca/~jeffpell/papers/RomanyciaPelletierHeuristics85.pdf

ROUX, S. Forms of mathematization (14th-17th centuries**). Early Science and Medicine.** Leiden, v. 15, n. 4-5, p. 319-337, 2010.

SÁENZ-LUDLOW, A. Learning mathematics: Increasing the value of initial mathematical wealth. **Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa**, v.9, n.1, p. 225-246, 2006.

SÁENZ-LUDLOW, A.; KADUNZ, G. Constructing knowledge seen as a semiotic activity. In: SÁENZ-LUDLOW, A; KADUNZ, G. (Org.). **Semiotics as a Tool for Learning Mathematics**: How to describe the construction, visualisation, and communication of mathematical concepts. Netherlands: Sense Publishers, p. 1-21, 2016.

SANTAELLA, L. **O que é Semiótica.** São Paulo: Brasiliense, 1999.

SANTAELLA, L. **A Teoria geral dos signos: como as linguagens significam as coisas.** 2. reimpr. da 1. ed. de 2000. São Paulo: Cengage Learning, 2008.

SANTAELLA, L. **Leitura de imagens.** São Paulo: Melhoramentos, 2012.

SCHELLER, M.; BONOTTO, D. L.; MADRUGA, Z. E. F.; BIEMBENGUT, M. S.; CHAMOSO SÁNCHEZ, J. M. Modelagem nos anos iniciais da educação básica: como os estudantes modelam situações-problema. **Ciência & Educação**, Bauru, v. 23, n. 1, p. 197- 217, 2017.

SILVA, K. A. P. **Modelagem matemática e semiótica: algumas relações.** 2008. 225 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2008.

SILVA, K. A. P.; ALMEIDA, L. M. W.; GERÔLOMO, A. M. L**.** "Aprendendo" a fazer modelagem matemática: a vez do aluno. **Educação Matemática em Revista**. São Paulo, v. 1, p. 28-36, 2011.

SILVA, K. A. P. **Uma Interpretação Semiótica De Atividades De Modelagem Matemática:** implicações para a atribuição de significado. 2013. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

SILVA, K. A. P.; ALMEIDA, L. M. W. Caminhos do Significado em Atividades de Modelagem Matemática: um olhar sobre os interpretantes. **Bolema**, Rio Claro, v. 29, n.52, p. 568-592, 2015.

SILVA, K. A. P. Aspectos cognitivos em aulas com modelagem matemática na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. **Experiências em Ensino de Ciências,** v.12, n.2, p.156-170, 2017a.

SILVA, K. A. P. Tarefas que Emergem em Atividade de Modelagem Matemática em um Ambiente Educacional de Cálculo Diferencial e Integral. **Jornal Internacional de Estudo em Educação Matemática**, v.10, n.1, p.23-40, 2017b.

SILVA, K. A. P.; ARAKI, P. H. H.; BORSSOI, A. H. Tecnologias como recurso semiótico no desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática. **Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática**, Cascavel: UNIOESTE, v.2, n.3, p. 362-386, 2018.

SILVA, K. A. P. Modelagem matemática em aulas de cálculo diferencial e integral: para além de uma investigação. **Educação Matemática em Revista**, v. 1, n. 19, p. 93-104, 2018.

SILVA, K. A. P.; VERTUAN, R. E. Um estudo sobre as intervenções docentes em contextos de atividades investigativas no âmbito de aulas de Matemática no Ensino Superior. **Ciência e Educação**, v.24, n.2, p.501-516, 2018.

SRIRAMAN. B.; LESH, R. Modelling conceptions revisited. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, **ZDM – The International Journal on Mathematics Education**, v. 38, n. 3, p. 247-254, 2006.

STENDER, P. Heuristic strategies in mathematics teacher education. In: Thérèse Dooley und Ghislaine Gueudet (ed.): **Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education**. Dublin, Ireland, p. 2316–2317, 2017.

STENDER, P.; KAISER, G. The use of heuristic strategies in modelling activities. In: Thérèse Dooley and Ghislaine Gueudet (ed.): **Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education**. Dublin, Ireland, pp. 1012-1019, 2017.

STENDER, P. The use of heuristic strategies in modelling activities. **ZDM - *The International Journal on Mathematics Education*,** *v.* 50, n.1-2, p. 315–326, abril 2018.

STENDER, P. Heuristic Strategies as a Toolbox in Complex Modelling Problems. In: Gloria Stillman and Jill Brown (ed.): **Lines of Inquiry in Mathematical Modelling Research in Education**, 2019.

STILLMAN, G. A. State of the Art on Modelling in Mathematics Education – Lines of Inquiry. In: Stillman G., Brown J. (ed) **Lines of Inquiry in Mathematical Modelling Research in Education**, 2019.

TORTOLA, E.; ALMEIDA, L. M. W. Um olhar sobre os usos da linguagem por alunos dos anos iniciais do ensino fundamental em atividades de modelagem matemática. **Revista Paranaense de Educação Matemática, Campo Mourão**, v.5, n.8, p.83-105, 2016.

VERONEZ, M. R. D. **As funções dos signos em atividades de modelagem matemática.** 2013, 176p. Tese (Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

VERTUAN, R. E.; SILVA, K. A. P.; BORSSOI, A. H. Modelagem matemática em disciplinas do ensino superior: o que manifestam os estudantes? **Educere et Educare**, Cascavel, v. 12, n. 24, p. 1-15, 2017.

YOON, C.; MISKELL, T. Visualising cubic reasoning with semiotic resources and modeling cycles. In SÁENZ-LUDLOW, A.; KADUNZ, G. (Ed.). **Semiotics as a tool for learning mathematics:** How to describe the construction, visualisation, and communication of mathematical concepts. Dordrecht, Netherlands: Sense Publishers, p. 89-109, 2016.

Apêndice A – Termo de Autorização

Termo de consentimento livre e esclarecido

Considerando os esclarecimentos acerca do desenvolvimento da dissertação de mestrado de Thais Maya Koga, regularmente matriculada no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, sob o número de matrícula 1943928, autorizo a mesma a utilizar, parcial ou integralmente, gravações em áudio ou vídeo de minhas falas ou imagens, relatórios e outros trabalhos, para fins de pesquisa, podendo divulgá-las em publicações, congressos e eventos da área.

Referente à condição de anonimato, pode-se referir a mim apenas como aluno participante da pesquisa.

Londrina, 09 de agosto de 2018.

NOME DO ALUNO:____

ASS: ____

____

Thais Maya Koga

Apêndice B – Roteiro de Entrevista

QUESTÕES QUE ORIENTARAM A ENTREVISTA REALIZADA COM OS GRUPOS DE ALUNOS

- Como foi escolhido o tema?
- Quais as variáveis consideradas para a coleta de dados?
- Quais estratégias Heurísticas foram importantes?
- Dê uma nota de 5 a 10, considerando 5 para nenhum conhecimento novo e 10 para todos novos.
- Você considera que com as atividades, houve a construção do conhecimento?
- Desde a 1ª atividade, até a APCC, você observou que as responsabilidades foram aumentando, e também a sua independência para resolver?
- O que você entende por modelagem matemática?
- Acredita que as atividades de modelagem matemática facilitam o aprendizado?
- Usaria em sala de aula, quando professor? Por quê?
- A partir de qual série você acredita ser mais pertinente e por quê?