

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM
REDE NACIONAL - PROFMAT

ROBSON RAULINO RAUTENBERG

OS TEOREMAS DE PAPPUS PARA OS SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

CURITIBA

2013

ROBSON RAULINO RAUTENBERG

OS TEOREMAS DE PAPPUS PARA OS SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do grau de “Mestre em Matemática.”

Orientador: Prof. Dr. Roy Wilhelm Probst

CURITIBA

2013

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

- R249 Rautenberg, Robson Raulino
Os teoremas de Pappus para os sólidos de revolução / Robson Raulino Rautenberg. – 2013.
57 f. : il. ; 30 cm
- Orientador: Roy Wilhelm Probst.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Curitiba, 2013.
Bibliografia: f. 57.
1. Matemática – História. 2. Demonstração automática de teoremas. 3. Cálculo. 4. Geometria. 5. Pappus, de Alexandria. 6. Gregory, James, 1638-1675. 7. Matemática – Dissertações. I. Probst, Roy Wilhelm, orient. II. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

CDD (22. ed.) 510

Título da Dissertação No. 002

**“Os teoremas de Pappus
para os sólidos de revolução”**

por

Robson Raulino Rautenberg

Esta dissertação foi apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Matemática, pelo Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR - Câmpus Curitiba, às 14h do dia 05 de abril de 2013. O trabalho foi aprovado pela Banca Examinadora, composta pelos doutores:

Prof. Roy Wilhelm Probst, Dr.
(Presidente - UTFPR/Curitiba)

Prof. André Krindges, Dr.
(UFMT)

Prof. Ronie Peterson Dario, Dr.
(UTFPR/Curitiba)

Visto da coordenação:

Prof. Luiz Claudio Pereira, Dr.
(Coordenador do PROFMAT/UTFPR)

“A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do PROFMAT/UTFPR”

A minha esposa Telma.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela proteção durante toda essa caminhada.

A minha esposa Telma, pela paciência e apoio em todos os momentos.

Aos meus pais Raulino e Salete e ao meu irmão Roberto, pelo incentivo.

A CAPES, pelo apoio financeiro.

A Sociedade Brasileira de Matemática, pela implementação e coordenação do programa PROFMAT.

Ao meu orientador professor Dr. Roy Wilhelm Probst, pelos conselhos, críticas e valiosas sugestões que tornaram possível a realização desse trabalho.

Aos professores Dr. Ronie Peterson Dario e Dr. André Krindges, por todas as observações, sugestões e contribuições.

Aos professores do PROFMAT, por todos os ensinamentos.

Aos colegas da Turma 2011, em especial ao amigo Alan por todo incentivo e companheirismo.

Ao amigo Jairo, por toda ajuda e cooperação nos momentos de estudo, e alegria durante as nossas longas viagens.

RESUMO

RAUTENBERG, Robson Raulino. OS TEOREMAS DE PAPPUS PARA OS SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO. 57 f. Dissertação de Mestrado – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2013.

A partir dos teoremas encontrados na publicação *Geometriae Pars Universalis* de 1668 são apresentadas, pela primeira vez em português, as demonstrações dos teoremas de Pappus para os sólidos de revolução. Essa publicação, escrita originalmente em latim, foi feita pelo matemático escocês James Gregory (1638-1675) e é anterior ao desenvolvimento do Cálculo. Além disso, alguns conceitos de Cálculo e de centro de gravidade são revistos a fim de também apresentar uma demonstração desses teoremas a partir dessas ferramentas. Ainda são feitas algumas aplicações dos teoremas de Pappus para os casos diretos, onde o eixo de rotação ou revolução é representado por um dos eixos coordenados ou ainda, por uma reta paralela a eles. Também são mostrados casos onde o eixo de rotação é dado por uma reta inclinada no plano cartesiano, deixando claro a abrangência, eficiência e a relativa simplicidade de aplicação desses teoremas.

Palavras-chave: História da Matemática, Teoremas de Pappus, Sólidos de Revolução, James Gregory.

ABSTRACT

RAUTENBERG, Robson Raulino. THE PAPPUS'S THEOREMS FOR SOLIDS OF REVOLUTION. 57 f. Dissertação de Mestrado – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2013.

From the theorems found in the publication *Geometriae Pars Universalis* of 1668 are presented, for the first time in portuguese, the proof of Pappus's theorems for solids of revolution. This publication , originally written in latin, is due to the scottish mathematician James Gregory (1638-1675) and is prior to the development of Calculus. Furthermore some concepts of Calculus and center of gravity are also revised to present a proof of these theorems from these tools. Some direct cases for Pappus's theorems are presented, where the axis of rotation or revolution is represented by one of the coordinate axes or by a straight line parallel to them. Also shown are cases where the axis of rotation is given by a straight tilted in the cartesian plane, showing the scope, efficiency and relative simplicity of applying these theorems.

Keywords: History of Mathematics, Pappus's Theorems, Solids of Revolution, James Gregory.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1	– Sólidos de Revolução	10
FIGURA 2	– Superfícies de Revolução	10
FIGURA 3	– Centros de gravidade e eixos de rotação de Ω e Φ	13
FIGURA 4	– Tronco	14
FIGURA 5	– Tronco de Cilindro e Sólido de Revolução	15
FIGURA 6	– Secção do tronco	16
FIGURA 7	– Áreas das secções	17
FIGURA 8	– Figura plana simétrica	18
FIGURA 9	– Cilindro e seu eixo de simetria	19
FIGURA 10	– Secção retangular KLMN	19
FIGURA 11	– Segmento UT	20
FIGURA 12	– Triângulo FIS	20
FIGURA 13	– Exemplos de secções retangulares	21
FIGURA 14	– Centros de gravidade	21
FIGURA 15	– Duplicação de Ω	23
FIGURA 16	– Figura plana Ω e o retângulo de vértices HIJK	24
FIGURA 17	– Centros de gravidade	27
FIGURA 18	– Perímetro da figura Ω e do retângulo de vértices HIJK	29
FIGURA 19	– Região entre as curvas $f(x)$ e $g(x)$	31
FIGURA 20	– Arco da função $y = f(x)$	32
FIGURA 21	– Invólucro cilíndrico	33
FIGURA 22	– Invólucro cilíndrico obtido a partir da rotação da região R	33
FIGURA 23	– Região limitada pelas curvas $f(x)$ e $g(x)$	34
FIGURA 24	– Anel circular obtido da rotação de um retângulo de R	34
FIGURA 25	– Superfície de revolução	35
FIGURA 26	– Eixo L	36
FIGURA 27	– Equilíbrio	36
FIGURA 28	– Sistema composto por partículas no plano	38
FIGURA 29	– Lâmina equilibrada em um ponto P	39
FIGURA 30	– Placa fina que ocupa uma região R , de área A , no plano	39
FIGURA 31	– Arco obtido da função $y = f(x)$	40
FIGURA 32	– Cone de revolução	44
FIGURA 33	– Sólido de revolução gerado pela rotação da região R	45
FIGURA 34	– Rotação em torno da reta $x - y - 2 = 0$	47
FIGURA 35	– Rotação da região R em torno da reta $2x - y - 6 = 0$	48
FIGURA 36	– Toro sólido	49
FIGURA 37	– Cilindro de revolução	49
FIGURA 38	– Rotação de um setor circular	50
FIGURA 39	– Área lateral de um cilindro	51
FIGURA 40	– Superfície obtida a partir da rotação de L	52
FIGURA 41	– Rotação em torno da reta $x + y - 6 = 0$	53
FIGURA 42	– Arco da função $y = \sqrt{r^2 - x^2}$	54

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
2	A DEMONSTRAÇÃO DE JAMES GREGORY	13
2.1	CONSIDERAÇÕES INICIAIS.	13
2.2	TRONCO	14
2.3	RELAÇÃO ENTRE VOLUMES: TRONCO E SÓLIDO DE REVOLUÇÃO	15
2.4	RELAÇÃO ENTRE VOLUMES: TRONCO E CILINDRO	18
2.5	A 1ª RELAÇÃO DE PAPPUS	22
2.6	RELAÇÃO ENTRE SUPERFÍCIES: TRONCO E SÓLIDO DE REVOLUÇÃO	25
2.7	RELAÇÃO ENTRE SUPERFÍCIES: TRONCO E CILINDRO	27
2.8	A 2ª RELAÇÃO DE PAPPUS	28
3	OS TEOREMAS DE PAPPUS E O CÁLCULO	31
3.1	ÁREA ENTRE DUAS CURVAS	31
3.2	COMPRIMENTO DE UM ARCO	32
3.3	VOLUME: MÉTODO DO INVÓLUCRO CILÍNDRICO	32
3.4	VOLUME: MÉTODO DO ANEL CIRCULAR	34
3.5	ÁREA DE UMA SUPERFÍCIE DE REVOLUÇÃO	35
3.6	CENTRO DE MASSA DE UM SISTEMA DISCRETO DE PARTÍCULAS	36
3.7	CENTRO DE MASSA DE UMA REGIÃO PLANA	39
3.8	CENTRO DE MASSA DE UM ARCO	40
3.9	O 1º TEOREMA DE PAPPUS	41
3.10	O 2º TEOREMA DE PAPPUS	42
4	APLICAÇÕES	44
4.1	EXEMPLOS	44
5	CONCLUSÃO	55
	REFERÊNCIAS	57

1 INTRODUÇÃO

Embora possam ser encontrados na maioria dos livros de Cálculo, os teoremas de Pappus para os sólidos de revolução eram conhecidos muito antes da criação desse importante ramo da matemática. Os registros sobre o período em que viveu e produziu suas obras baseiam-se apenas em datas aproximadas, porém a maioria dos historiadores, ver (BOYER, 1974), concorda que Pappus de Alexandria viveu na época do reinado de Diocleciano (284-305). Considerado por muitos como um dos últimos grandes matemáticos gregos, sucedendo Ptolomeu, Apolônio, Euclides e Arquimedes, tem como um dos seus trabalhos mais importantes, uma publicação conhecida como *Coleção* ou *Synagoge* escrita no ano 320. Essa publicação, que é composta por oito livros ou capítulos, é uma valiosa síntese da matemática grega da época, representando um dos poucos registros da produção científica daquele tempo.

O livro I e a primeira parte do livro II perderam-se e os outros livros abordam geometria plana, curvas, retas tangentes, mecânica, cônicas, entre outros assuntos. Considerado o mais importante, o livro VII traz uma série de obras, principalmente de Euclides, Aristeu e Apolônio. Essa obra deveria ser conhecida por todos que tivessem interesse em aprofundar-se na matemática daquela época. Desse ponto de vista, o livro VII serviria como um pré-requisito para todos que estudavam matemática naquele tempo. De acordo com (LINTZ, 1999), o nome de Arquimedes não é citado nesse livro, uma das explicações é que possivelmente a obra dele seria de um nível ainda mais elevado, não indicada a quem estivesse iniciando um estudo, digamos, básico.

De acordo com (BOYER, 1974), ainda no livro VII, chamado *Tesouro da Análise*, entre outros temas Pappus faz uma afirmação que é considerada como uma antecipação dos teoremas sobre *sólidos e superfícies de revolução*. Usa-se o termo antecipação já que nesse livro não é feita nenhuma demonstração, apenas um comentário a respeito desses teoremas. Segundo afirma (HEATH, 1921, p.404) essa demonstração apareceria num suposto décimo segundo livro, jamais encontrado. De onde presume-se que a obra completa de *Coleção* deveria conter 12 livros.

Sólidos de revolução podem ser obtidos pela rotação de uma região de um plano em torno de uma reta desse plano, chamado eixo de revolução ou rotação, que toca a fronteira da região ou não intersecta a região em nenhum ponto. A figura 1 mostra um invólucro cilíndrico e uma esfera obtidos da rotação de um retângulo e de um semicírculo, respectivamente, em torno de um eixo de revolução dado pelo segmento CD. Vale ressaltar ainda que em todo o texto seguinte, sempre que nos referirmos a uma rotação de uma região ou de uma curva em torno de um eixo de revolução, essa região ou curva estará inteiramente de um lado do eixo considerado.

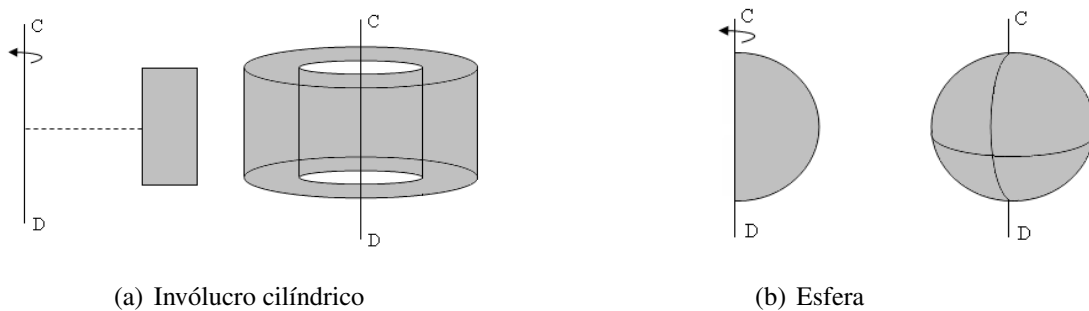


Figura 1: Sólidos de Revolução

Uma *superfície de revolução* é formada quando uma curva é girada ao redor de uma reta que não intersecta essa curva. A figura 2 mostra a superfície lateral de um tronco de cone obtida a partir da rotação de um segmento de reta que não toca e não é paralelo ao eixo de revolução dado por CD. Além disso, é mostrada uma outra superfície S obtida a partir da rotação de um arco de uma curva em torno do eixo de revolução CD.

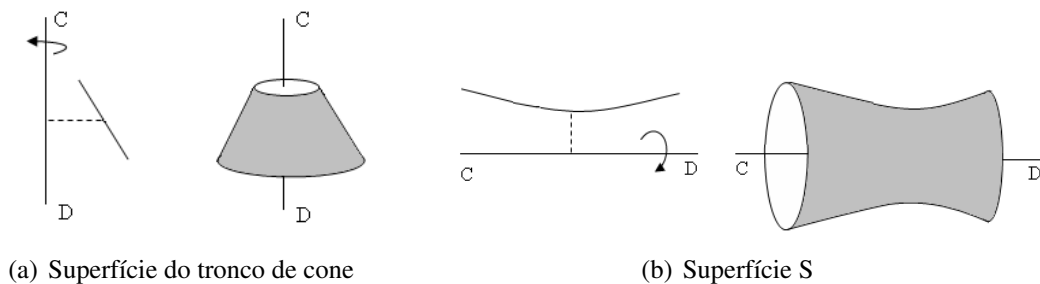


Figura 2: Superfícies de Revolução

A afirmação feita por Pappus, como veremos adiante, permitiria encontrar o volume e a área da superfície de um sólido de revolução conhecendo-se apenas a área e o perímetro de uma região que é rotacionada, e a distância do seu centro de gravidade ao eixo de rotação. A utilização dos conceitos de centro de gravidade na prova de teoremas não era necessariamente

uma novidade naquela época. O próprio Arquimedes (287-212 a.C.) já os tinha utilizado, de acordo com (SIMMONS, 1987), na sua demonstração para o volume da esfera. Talvez foi esse o caminho tomado por Pappus, porém a sua demonstração, se existe, não é conhecida.

Alguns séculos depois o matemático suíço Paul Guldin (1577-1643), contemporâneo e correspondente de Johannes Kepler, publica *Centrobaryca*, com mais de 700 páginas, onde tratava principalmente do estudo do centro de gravidade de figuras geométricas. Nesse livro aparece novamente, porém em uma linguagem um pouco diferente, segundo (HEATH, 1921), a afirmação feita por Pappus a mais de 1200 anos: "*Quantitas rotunda in viam rotationis ducta producit Potestatem Rotundam uno grado altiore Potestate sive Quantitate Rotata*".¹ Geralmente quando nos deparamos com teoremas identificados por mais de um nome temos a impressão de que ocorreu algum tipo de cooperação entre os seus autores. Não é o caso do teorema de Pappus-Guldin, de acordo com (BULMER-THOMAS, 1984) Guldin sequer mencionou o nome de Pappus, quando aborda esses teoremas, em seu *Centrobaryca*. Plágio, egoísmo ou até mesmo esquecimento seriam as possíveis justificativas.

O fato é que, segundo (BULMER-THOMAS, 1984), Paul Guldin teve a oportunidade de ler os trabalhos traduzidos de Pappus enquanto esteve em Roma, e quando publica *Centrobaryca*, mais de 20 anos depois, Guldin poderia muito bem ter esquecido do que tinha lido ou até mesmo acreditado que estivesse produzindo algo totalmente novo. Ainda de acordo com (BULMER-THOMAS, 1984), a última opção é a mais provável, ou seja, Guldin realmente deveria acreditar que estava produzindo algo inédito; isto porque ele costumava fazer citações em todos os seus textos, sempre dando crédito a todos os autores que havia consultado. Era de se esperar que no caso de Pappus não fosse diferente. Infelizmente, apesar da incontestável capacidade de Guldin, esses relatos não provam nada e as dúvidas quanto à autenticidade, em relação aos teoremas que envolvem os sólidos de revolução, ainda permanecem. Daí o motivo pelo qual muitas vezes os teoremas de Pappus são também conhecidos como teoremas de Pappus-Guldin. Vale destacar ainda que na demonstração encontrada no *Centrobaryca*, conforme afirmado por (BUSSARD, 1970) em seu *Dicionário da Biografia Científica*, Guldin apelou inclusive para a metafísica, deixando espaço para que outros matemáticos também trabalhassem nesses teoremas.

¹Encontrado em (GULDIN, 1635, p.147), Livro II, cap.VIII, Prop.3. Viena 1641. Uma tradução direta dessa frase, segundo (MANCOSU, 1996, p.58), é a seguinte: *A quantidade que é rodada ao longo do caminho de rotação produz uma quantidade de um grau maior do que a quantidade que foi rotacionada*. Nesse caso, quantidade pode ser compreendida como o elemento que foi rotacionado e grau como a sua dimensão. Se, por exemplo, for rotacionada uma figura plana de dimensão dois, obteremos um sólido. Logo na sequência Guldin apresenta, como corolário, um método que permite calcular o volume dos sólidos obtidos.

Entre outros grandes nomes que abordaram esses teoremas e suas respectivas demonstrações, se destaca o trabalho do matemático escocês James Gregory (1638-1675). De acordo com (EVES, 2008), James Gregory foi professor em St. Andrews e Edinburgh e além de se interessar por geometria, é creditada a ele a obtenção da série infinita $\arctg(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$ extremamente útil e muito utilizada para o cálculo de π . Basta notar que quando substituímos x por 1 nessa série obtemos $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$ daí a razão pela qual essa série foi amplamente utilizada naquela época.

Em 1668 James Gregory publica *Geometriae Pars Universalis*, com mais de 70 teoremas. A partir de alguns desses teoremas é possível demonstrar os teoremas de Pappus. Escrito originalmente em latim, essa obra de James Gregory vem sendo estudada e traduzida para o inglês pelo professor Andrew Leahy, do Knox College (LEAHY, 2009), e parte de seu trabalho está publicado no jornal de matemática MathDL (The MAA Mathematical Sciences Digital Library) da Associação Matemática da América (MAA).

Com a intenção de apresentar os teoremas de Pappus para os sólidos de revolução a partir dos estudos de James Gregory, e posteriormente com as ferramentas do Cálculo, é que se organiza esse trabalho. De fato, a demonstração de James Gregory é anterior ao desenvolvimento do Cálculo e é comum em muitas ementas dessa disciplina, quando são abordados os sólidos de revolução, obter-se de forma independente fórmulas que geram o seu volume e que determinam a área de sua superfície. Logo depois são encontradas expressões que tratam a respeito de centro de massa de regiões planas e curvas. Mais adiante, de forma aparentemente inesperada são apresentados os teoremas de Pappus relativos a sólidos de revolução. A ordem dessa apresentação pode deixar, em alguns casos, a impressão de que os teoremas de Pappus são apenas uma mera consequência de todas as proposições e teoremas anteriores apresentados. Na verdade sabemos que citações desses teoremas já tinham aparecido no ano de 320, nos trabalhos de Pappus de Alexandria, muito antes da descoberta do Cálculo.

Seguindo a ordem cronológica dos fatos, entendendo que a História da Matemática tem papel fundamental como elemento motivador em todos os níveis de ensino, esse trabalho procura inicialmente fazer um resgate histórico mostrando o trabalho de James Gregory na demonstração dos teoremas de Pappus, ainda inédito em português, para só depois apresentar a sua demonstração a partir do Cálculo e suas respectivas aplicações.

2 A DEMONSTRAÇÃO DE JAMES GREGORY

No livro VII da *Coleção*, Pappus de Alexandria escreveu, o que em linguagem atual, pode ser interpretado da seguinte forma: *A razão entre os volumes de dois sólidos de revolução é dada pela razão composta entre a razão das áreas das figuras que rotacionam em torno dos seus eixos de rotação e da razão entre as distâncias dos seus centros de gravidade ao eixo de rotação*. Alguns séculos se passaram até que James Gregory nos revelasse uma demonstração bastante engenhosa dessa afirmação, conhecida como 1ª Relação de Pappus. Nesse capítulo apresentaremos a interpretação dessa demonstração a partir dos trabalhos do professor Andrew Leahy (LEAHY, 2009), em seu artigo publicado no jornal de matemática MathDL.

2.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS.

Para que possamos compreender a demonstração dada por James Gregory é necessária a introdução de algumas notações. Seja Ω uma figura ou região plana, com centro de gravidade A , que é rotacionada em torno de um eixo CD . Definimos como $\text{Raio}(A)$ a representação da distância de A ao eixo de rotação ou revolução. De modo semelhante, podemos considerar Φ uma outra figura plana com centro de gravidade E que é rotacionada em torno de um eixo GH , cujo raio é dado por $\text{Raio}(E)$, conforme ilustra a figura 3 a seguir.

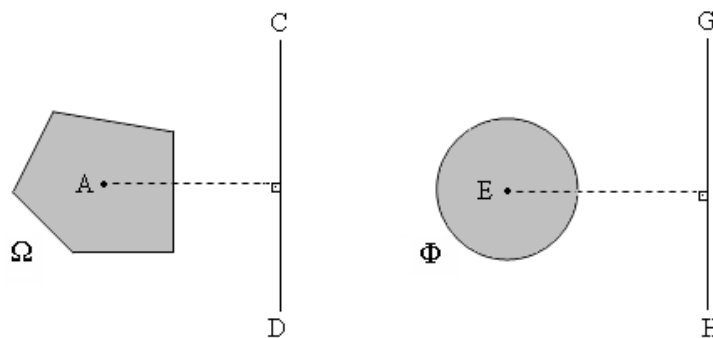


Figura 3: Centros de gravidade e eixos de rotação de Ω e Φ

Sejam também $\text{Área}(\Omega)$ e $\text{Área}(\Phi)$ as áreas das figuras planas Ω e Φ , assim como

$Rev(\Omega)$ e $Rev(\Phi)$ os volumes dos sólidos obtidos pela rotação ou revolução de Ω e Φ em torno dos eixos CD e GH, respectivamente. Desse modo a 1ª Relação mencionada por Pappus pode ser escrita como:

$$\frac{Rev(\Omega)}{Rev(\Phi)} = \frac{\text{Área}(\Omega) \text{ Raio}(A)}{\text{Área}(\Phi) \text{ Raio}(E)} \quad (1)$$

de onde obtemos, multiplicando por $\frac{2\pi}{2\pi} = 1$ o membro direito da igualdade (1), a seguinte proporção:

$$\frac{Rev(\Omega)}{Rev(\Phi)} = \frac{\text{Área}(\Omega) 2\pi \text{ Raio}(A)}{\text{Área}(\Phi) 2\pi \text{ Raio}(E)}$$

ou ainda

$$\frac{Rev(\Omega)}{Rev(\Phi)} = \frac{\text{Área}(\Omega) \text{ Circ}(A)}{\text{Área}(\Phi) \text{ Circ}(E)}. \quad (2)$$

Aqui $Circ(A)$ e $Circ(E)$ representam o perímetro da circunferência descrita pelo $\text{Raio}(A)$ e $\text{Raio}(E)$, respectivamente.

2.2 TRONCO

Até agora apenas colocamos em linguagem atual a afirmação feita por Pappus. Para que possamos continuar é necessário introduzir o conceito de tronco, investigado por James Gregory. Dada uma figura plana, podemos obter a partir dela duas figuras tridimensionais; a primeira delas um cilindro reto ou oblíquo e a outra, um sólido de revolução. No nosso caso utilizaremos um cilindro circular reto e um toro, obtidos de um círculo Ω .

Definimos tronco de cilindro como uma porção do cilindro compreendida entre a base e uma secção não paralela a essa base. De acordo com Gregory podemos obter um tronco a partir de um cilindro reto, conforme a figura 4.

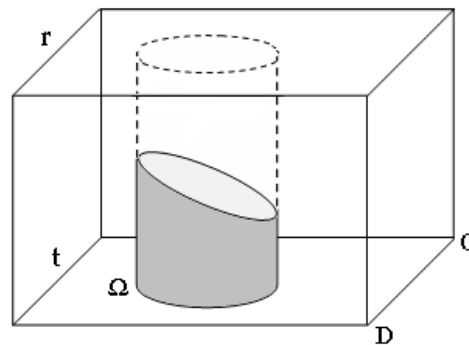


Figura 4: Tronco

A ilustração mostra que o tronco foi obtido do cilindro reto original, que foi cortado por um plano que passa pelo eixo de rotação e intersecta o plano da base superior do cilindro

segundo a reta r . Além disso, a partir de r é baixado um plano perpendicular ao plano superior, determinando uma reta t no plano que contém a base do cilindro. Nessa etapa define-se também que a distância entre a reta t e o eixo de rotação, dado pelo segmento CD , será o raio de rotação da figura plana. Note que a partir do momento em que foi fixado um tronco, entre os vários possíveis, o raio de rotação também é fixado.

Grande parte do trabalho da prova do teorema está em estabelecer uma relação entre o volume do tronco e o volume do cilindro, assim como uma relação entre o volume do tronco e o volume do sólido de revolução. A figura 5 mostra um tronco de cilindro e um sólido de revolução obtidos a partir de uma figura plana circular Ω .

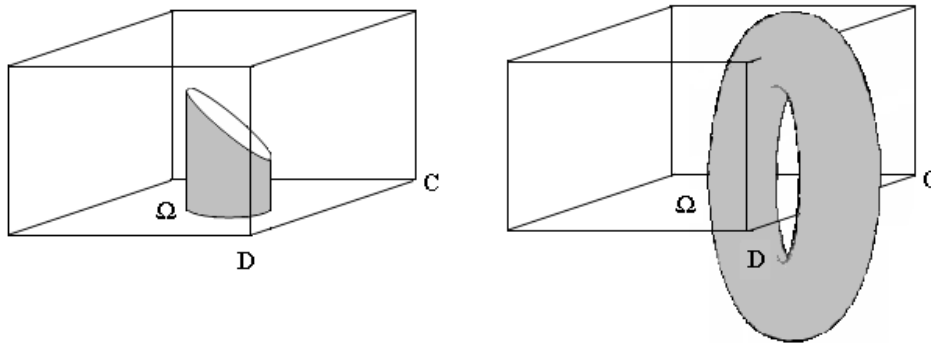


Figura 5: Tronco de Cilindro e Sólido de Revolução

2.3 RELAÇÃO ENTRE VOLUMES: TRONCO E SÓLIDO DE REVOLUÇÃO

Para entender essa relação Gregory utiliza o Princípio de Cavalieri ¹: *Se dois sólidos são tais que todo plano secante a eles e paralelo a um plano dado determina nos sólidos secções cuja razão entre suas áreas é constante, então a razão entre os volumes desses sólidos é a mesma constante.* Desta forma, a partir do momento em que se consiga estabelecer uma razão fixa entre as áreas das secções do tronco e do sólido de revolução, teremos, pelo Princípio de Cavalieri, que a razão entre os volumes dos sólidos será igual a essa razão fixa.

Para obter essa razão constante foi utilizado um processo relativamente simples, usando o tronco mostrado na figura 4, que é intersectado por um plano β qualquer, perpendicular ao eixo de rotação, conforme mostra a figura 6.

¹Bonaventura Cavalieri (1598-1647), matemático italiano discípulo de Galileu.

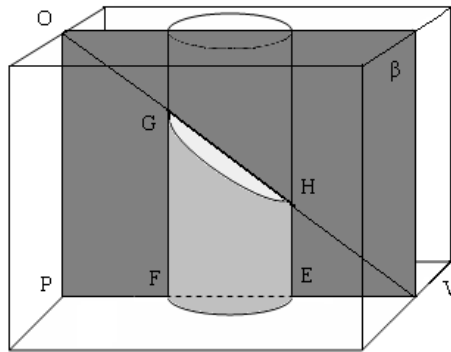


Figura 6: Secção do tronco

Considerando os pontos de intersecção O, P e V, entre os planos e sejam F, G, H e E os pontos de intersecção do plano com o tronco, podemos utilizar semelhança entre os triângulos OPV e HEV para obtermos :

$$\frac{OP}{PV} = \frac{HE}{EV}. \quad (3)$$

Assim como a semelhança entre os triângulos OPV e GFV resulta em:

$$\frac{OP}{PV} = \frac{GF}{FV}. \quad (4)$$

Sendo que OP representa a altura do cilindro reto e PV o raio de rotação. Multiplicando ambos os membros da equação (4) por $\frac{1}{2\pi}$ e depois o numerador e o denominador do membro direito por $\frac{1}{2}FV$ obteremos:

$$\frac{OP}{2\pi PV} = \frac{GF}{2\pi FV} \Rightarrow \frac{OP}{2\pi PV} = \frac{GF}{2\pi FV} \cdot \frac{\frac{1}{2}FV}{\frac{1}{2}FV} \Rightarrow \frac{OP}{2\pi PV} = \frac{\frac{1}{2}GF \cdot FV}{\pi FV^2} = \frac{\text{Área}(GFV)}{\text{Área}(FV)} \quad (5)$$

sendo que o numerador representa a área do triângulo GFV e o denominador representa a área do círculo de raio FV.

Do mesmo modo podemos obter, da equação (3) que:

$$\frac{OP}{2\pi PV} = \frac{\text{Área}(HEV)}{\text{Área}(EV)}. \quad (6)$$

Das propriedades das proporções temos que se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ e $\frac{a}{b} = \frac{e}{f}$, com $c > e$ e $d > f$, então

$$\frac{a}{b} = \frac{c-e}{d-f}. \quad (7)$$

Dessa forma, podemos usar (7) em (5) e (6), e obter

$$\frac{OP}{2\pi PV} = \frac{\text{Área}(GFV) - \text{Área}(HEV)}{\text{Área}(FV) - \text{Área}(EV)} = \frac{\text{Área}(GHEF)}{\text{Área}(\text{Anel}(FV - EV))}. \quad (8)$$

Note que, na equação (8), o numerador do lado direito representa a área de uma secção qualquer do tronco, enquanto que o denominador representa a área de um anel circular proveniente de uma secção do sólido de revolução obtido pela rotação do círculo Ω em torno do eixo de rotação; conforme mostra a figura 7 a seguir.

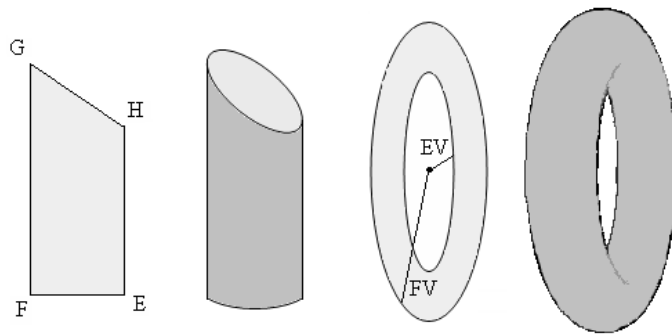


Figura 7: Áreas das secções

Como a razão $\frac{OP}{PV}$ é fixa, independente da posição do plano β , a razão dada por $\frac{OP}{2\pi PV}$ também será e portanto, pelo Princípio de Cavalieri, temos que a razão entre os volumes dos sólidos será igual a essa razão. Portanto teremos que

$$\frac{\text{Tronc}(\Omega)}{\text{Rev}(\Omega)} = \frac{OP}{2\pi PV}. \quad (9)$$

Na igualdade (9), $\text{Tronc}(\Omega)$ representa o volume do tronco gerado a partir do círculo Ω e $\text{Rev}(\Omega)$ representa o volume do sólido gerado pela rotação desse mesmo círculo em torno do seu eixo de rotação. Além disso, temos que OP representa a altura do cilindro de base Ω , ou seja, $OP = \text{Alt}(\Omega)$ e PV é o raio de rotação de Ω , dessa forma $2\pi PV = \text{Circ}(\Omega)$; logo podemos escrever que

$$\frac{\text{Tronc}(\Omega)}{\text{Rev}(\Omega)} = \frac{\text{Alt}(\Omega)}{\text{Circ}(\Omega)}. \quad (10)$$

Essa igualdade (10) é a relação procurada entre o volume do tronco e o volume do sólido de revolução obtidos a partir de uma figura plana, no nosso caso um círculo Ω .

A partir dessa igualdade podemos obter uma relação entre os volumes de dois sólidos de revolução. Suponha que Ω e Φ são duas figuras planas como mostra a figura 3, com seus respectivos eixos e raios de rotação, das quais são obtidos dois cilindros retos de mesma altura.

Utilizando a relação encontrada em (10) podemos escrever que

$$\frac{\text{Tronc}(\Omega)}{\text{Rev}(\Omega)} = \frac{\text{Alt}(\Omega)}{\text{Circ}(\Omega)} \quad \text{e} \quad \frac{\text{Tronc}(\Phi)}{\text{Rev}(\Phi)} = \frac{\text{Alt}(\Phi)}{\text{Circ}(\Phi)}. \quad (11)$$

Como, por hipótese, temos que $\text{Alt}(\Omega) = \text{Alt}(\Phi)$, combinando as duas proporções encontradas em (11) obtemos

$$\frac{\text{Rev}(\Omega)}{\text{Rev}(\Phi)} = \frac{\text{Tronc}(\Omega) \text{Circ}(\Omega)}{\text{Tronc}(\Phi) \text{Circ}(\Phi)}. \quad (12)$$

De onde percebemos que a razão entre os volumes dos sólidos de revolução pode ser escrita apenas em função dos volumes de troncos e de raios de rotação.

2.4 RELAÇÃO ENTRE VOLUMES: TRONCO E CILINDRO

James Gregory inicia o estudo dessa relação investigando a respeito da localização do centro de gravidade de um tronco. Da Física, centro de gravidade é definido como um ponto onde toda a força da gravidade que atua sobre um corpo pode ser concentrada, ou seja, o corpo se comporta como se simplesmente toda a sua massa estivesse concentrada nele. Nesse estudo Gregory considera os seguintes axiomas:

1. *O centro de gravidade de um segmento é seu ponto médio.*
2. *Se uma figura possui um eixo de simetria, então o seu centro de gravidade pertence a esse eixo.*

Como consequência, se uma figura plana homogênea possui um *centro geométrico* (intersecção de dois eixos de simetria), então esse ponto é seu centro de gravidade. De modo equivalente, define-se que o *centro geométrico* de um sólido homogêneo coincide com o seu centro de gravidade.

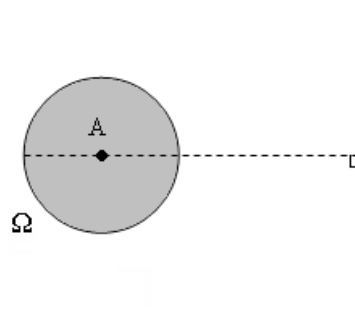


Figura 8: Figura plana simétrica

Na sequência são tomados cilindros retos construídos a partir de figuras planas, no nosso caso um círculo, que são simétricas em torno de um eixo perpendicular ao eixo de rotação da figura, conforme mostra a figura 8.

Essa restrição de simetria é muito útil tendo em vista que, de acordo com os axiomas apresentados, se uma figura é simétrica, então o seu centro de gravidade estará sobre esse eixo de simetria. Além disso, se A é o centro de gravidade da figura plana Ω e se B é o centro de gravidade da base superior do cilindro reto obtido a partir de Ω , então o centro de gravidade de todo o cilindro encontra-se no ponto médio X do segmento AB .

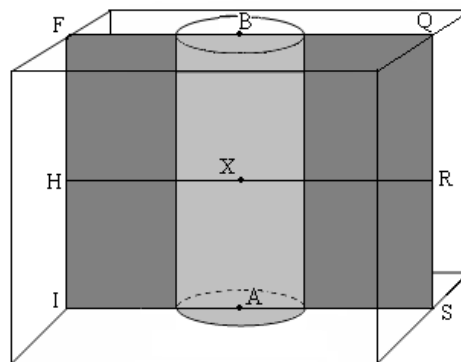


Figura 9: Cilindro e seu eixo de simetria

Considere agora o caso em que o plano $FQSI$ passa pelo eixo de simetria e é perpendicular ao eixo de rotação, conforme mostra a figura 9, onde $FI = QS$ representam a altura do cilindro, cuja base é dada pela figura plana Ω . Além disso, H e R são os pontos médios de FI e QS , respectivamente. Dessa forma, o centro de gravidade X deve estar na intersecção dos segmentos AB e RH . Utilizaremos essas informações para determinar o centro de gravidade do tronco. Considere, para tanto, o tronco visto na figura 4 e também o plano $FQSI$ da figura 9, mostrados agora na figura 10.

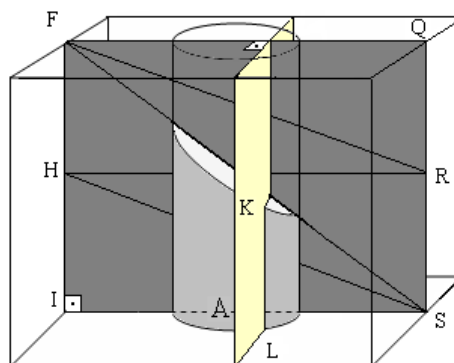


Figura 10: Secção retangular KLMN

Como o plano FQSI passa perpendicularmente pelo eixo de simetria da figura plana Ω e conseqüentemente pelo eixo do cilindro reto obtido de Ω , temos que FQSI também será o plano de simetria dos troncos superior e inferior. Conseqüentemente, os seus centros de gravidade também deverão pertencer ao plano FQSI. Considere agora um plano perpendicular ao plano FQSI que intersecta o tronco inferior formando o retângulo KLMN, mostrado na figura 11, onde M e N são os vértices opostos a K e L, respectivamente.

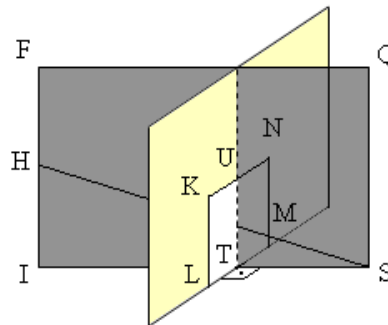


Figura 11: Segmento UT

Seja ainda UT o segmento pertencente a intersecção do plano FQSI com o plano que contém o retângulo KLMN. Como esses planos são perpendiculares e, além disso, o plano FQSI passa pelo eixo de simetria da figura plana Ω , temos que o segmento UT é o eixo de simetria do retângulo KLMN. Desse modo o centro de gravidade desse retângulo pertence ao segmento UT. De acordo com os axiomas vistos no início dessa seção temos que se uma figura é simétrica, então o seu centro de gravidade pertence ao seu eixo de simetria, porém qualquer retângulo possui dois eixos de simetria o que implica que o seu centro de gravidade estará localizado na intersecção desses eixos, no caso do retângulo KLMN será no ponto médio de UT.

A intenção agora é mostrar que o centro de gravidade de KLMN pertence ao segmento HS. Primeiramente note que HS e UT pertencem ao mesmo plano FQSI e que $HS \cap UT = D$, conforme mostra a figura 12.

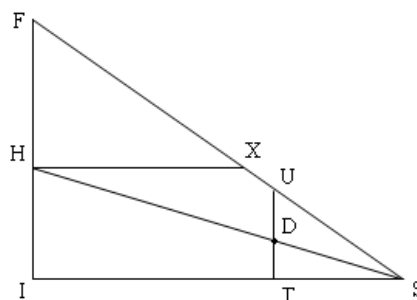


Figura 12: Triângulo FIS

Da semelhança entre os triângulos FIS e UTS e entre os triângulos HIS e DTS e sabendo que $HI = \frac{1}{2}FI$, obtemos que $DT = \frac{1}{2}UT$. Portanto $D \in HS$ é a intersecção entre os eixos de simetria do retângulo KLMN, ou seja, é o seu centro de gravidade. Note que todo plano paralelo ao plano que contém o retângulo KLMN produzirá no tronco secções retangulares, cujo centro de gravidade estará no segmento HS. Portanto o centro de gravidade Y do tronco inferior do cilindro reto, obtido a partir de Ω , pertencerá ao segmento HS. A figura 13 mostra algumas das secções retangulares obtidas. De modo equivalente mostra-se que o centro de gravidade Z, do tronco superior, pertence ao segmento FR.

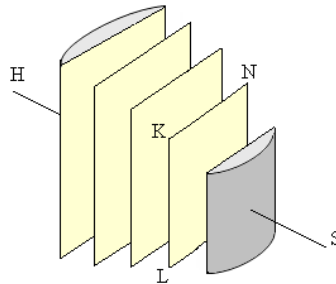


Figura 13: Exemplos de secções retangulares

Pelo Princípio de Arquimedes, conhecido como *Lei da Alavanca*, temos que: *Se duas massas m_1 e m_2 são ligadas por uma haste de peso desprezível em lados opostos de um ponto de apoio a uma distância d_1 e d_2 a partir desse ponto, então a haste ficará equilibrada se $m_1d_1 = m_2d_2$.* Portanto, considerando um cilindro de densidade constante ρ , o seu volume pode ser representado por sua massa, a menos de uma constante ρ . Desse modo, se considerarmos que toda a massa do tronco superior está concentrada em Z e que toda a massa do tronco inferior está concentrada em Y o centro de gravidade dessas duas massas deve estar em algum ponto do segmento YZ. Porém a massa dos dois troncos somados resulta na massa do cilindro, que por sua vez tem centro de gravidade em X. Dessa forma X, Y e Z pertencem ao mesmo plano FQSI e estão alinhados, conforme mostra a figura 14.

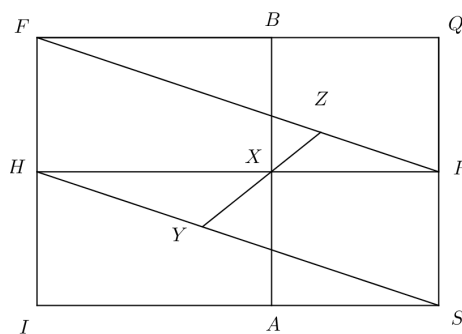


Figura 14: Centros de gravidade

Do Princípio de Arquimedes podemos escrever que

$$\text{Vol}(\text{Sup}(\Omega)).XZ = \text{Vol}(\text{Inf}(\Omega)).XY \Rightarrow \frac{\text{Vol}(\text{Sup}(\Omega))}{\text{Vol}(\text{Inf}(\Omega))} = \frac{XY}{XZ}. \quad (13)$$

Em (13), temos que $\text{Vol}(\text{Sup}(\Omega))$ representa o volume do tronco superior do cilindro obtido a partir de Ω enquanto que $\text{Vol}(\text{Inf}(\Omega))$ representa o volume do tronco inferior. Além disso, da figura 14 temos que FQ , HR e IS são paralelos e os triângulos HYX e RZX são semelhantes, de onde obtemos

$$\frac{IA}{AS} = \frac{HX}{XR} = \frac{YX}{ZX} = \frac{\text{Vol}(\text{Sup}(\Omega))}{\text{Vol}(\text{Inf}(\Omega))}. \quad (14)$$

Agora, usando o fato de que $IS = IA + AS$, de (14) podemos escrever que

$$\frac{IS}{AS} = \frac{IA + AS}{AS} = \frac{IA}{AS} + 1 = \frac{\text{Vol}(\text{Sup}(\Omega))}{\text{Vol}(\text{Inf}(\Omega))} + 1 = \frac{\text{Vol}(\text{Sup}(\Omega)) + \text{Vol}(\text{Inf}(\Omega))}{\text{Vol}(\text{Inf}(\Omega))} = \frac{\text{Vol}(\text{Cil}(\Omega))}{\text{Tronc}(\Omega)}.$$

Dessa forma obtemos

$$\frac{IS}{AS} = \frac{\text{Vol}(\text{Cil}(\Omega))}{\text{Tronc}(\Omega)}. \quad (15)$$

Podemos ainda multiplicar o numerador e o denominador por 2π do lado esquerdo da igualdade (15) e obter

$$\frac{2\pi IS}{2\pi AS} = \frac{\text{Vol}(\text{Cil}(\Omega))}{\text{Tronc}(\Omega)} \Rightarrow \frac{\text{Tronc}(\Omega)}{\text{Vol}(\text{Cil}(\Omega))} = \frac{\text{Circ}(A)}{\text{Circ}(\Omega)}. \quad (16)$$

Onde $\text{Vol}(\text{Cil}(\Omega))$ representa o volume de todo o cilindro reto obtido a partir do círculo Ω e $2\pi IS = \text{Circ}(\Omega)$, já que IS é igual ao raio de rotação de Ω .

Do mesmo modo, a partir de uma figura plana simétrica Φ de centro de gravidade E , podemos obter

$$\frac{\text{Tronc}(\Phi)}{\text{Vol}(\text{Cil}(\Phi))} = \frac{\text{Circ}(E)}{\text{Circ}(\Phi)}. \quad (17)$$

2.5 A 1ª RELAÇÃO DE PAPPUS

Do que já vimos na igualdade (12), temos que se Ω e Φ são figuras planas com centros de gravidade A e E , respectivamente, das quais são obtidos cilindros retos de mesma altura, então

$$\frac{\text{Rev}(\Omega)}{\text{Rev}(\Phi)} = \frac{\text{Tronc}(\Omega) \text{Circ}(\Omega)}{\text{Tronc}(\Phi) \text{Circ}(\Phi)}. \quad (18)$$

Agora, multiplicando a igualdade (18) por

$$\frac{\text{Vol}(\text{Cil}(\Omega)) \text{Vol}(\text{Cil}(\Phi))}{\text{Vol}(\text{Cil}(\Omega)) \text{Vol}(\text{Cil}(\Phi))} = 1$$

e usando (16), assim como (17), obteremos

$$\begin{aligned} \frac{\text{Rev}(\Omega)}{\text{Rev}(\Phi)} &= \frac{\text{Tronc}(\Omega) \text{Circ}(\Omega)}{\text{Tronc}(\Phi) \text{Circ}(\Phi)} \\ &= \frac{\text{Tronc}(\Omega)}{\text{Vol}(\text{Cil}(\Omega))} \frac{\text{Vol}(\text{Cil}(\Omega))}{\text{Vol}(\text{Cil}(\Phi))} \frac{\text{Vol}(\text{Cil}(\Phi))}{\text{Tronc}(\Phi)} \frac{\text{Circ}(\Omega)}{\text{Circ}(\Phi)} \\ &= \frac{\text{Circ}(A) \text{Vol}(\text{Cil}(\Omega)) \text{Circ}(\Phi) \text{Circ}(\Omega)}{\text{Circ}(\Omega) \text{Vol}(\text{Cil}(\Phi)) \text{Circ}(E) \text{Circ}(\Phi)} \\ &= \frac{\text{Circ}(A) \text{Vol}(\text{Cil}(\Omega))}{\text{Circ}(E) \text{Vol}(\text{Cil}(\Phi))} \\ &= \frac{\text{Circ}(A) \text{Área}(\Omega)}{\text{Circ}(E) \text{Área}(\Phi)}. \end{aligned} \tag{19}$$

Porém esse resultado só foi obtido sob a hipótese de que Ω e Φ são simétricas em torno de um eixo perpendicular ao eixo de rotação. Mas essa restrição pode ser removida; se Ω não é simétrica podemos refleti-la em torno de um eixo de simetria perpendicular ao eixo de rotação, conforme a figura 15.

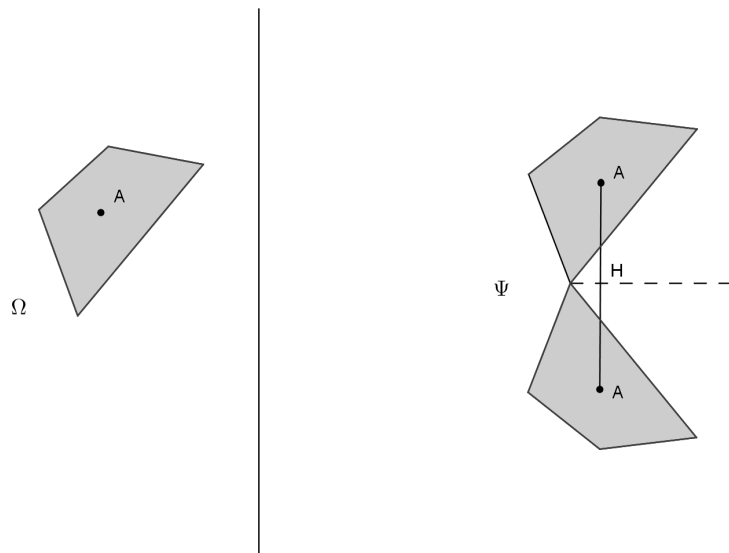


Figura 15: Duplicação de Ω

Note que da duplicação de Ω obtemos a figura Ψ e que, de acordo com o Princípio de Arquimedes, o centro de gravidade H, dessa nova figura, será o ponto médio do segmento que une os centros de gravidade de Ω e de sua cópia. Como o eixo de simetria é perpendicular ao eixo de rotação, temos que os centros de gravidades de Ω e de sua cópia estão a mesma distância

do eixo de rotação, ou seja, o segmento que une os centros de gravidade é paralelo ao eixo de rotação e portanto $\text{Circ}(A) = \text{Circ}(H)$. Além disso, $\text{Área}(\Psi) = 2\text{Área}(\Omega)$, da mesma maneira obtemos $\text{Rev}(\Psi) = 2\text{Rev}(\Omega)$. De modo equivalente podemos construir outra figura simétrica Γ , de centro de gravidade J , a partir da duplicação de Φ .

Portanto, usando a relação (19) em Ψ e Γ , obtemos

$$\frac{2\text{Rev}(\Omega)}{2\text{Rev}(\Phi)} = \frac{\text{Rev}(\Psi)}{\text{Rev}(\Gamma)} = \frac{\text{Área}(\Psi) \text{Circ}(H)}{\text{Área}(\Gamma) \text{Circ}(J)} = \frac{2\text{Área}(\Omega) \text{Circ}(A)}{2\text{Área}(\Phi) \text{Circ}(E)}.$$

Logo

$$\frac{\text{Rev}(\Omega)}{\text{Rev}(\Phi)} = \frac{\text{Área}(\Omega) \text{Circ}(A)}{\text{Área}(\Phi) \text{Circ}(E)} = \frac{\text{Área}(\Omega) \text{Raio}(A)}{\text{Área}(\Phi) \text{Raio}(E)}. \quad (20)$$

Portanto, dessa forma, fica demonstrada a **1ª Relação de Pappus**:

*A razão entre os volumes de dois sólidos de revolução é dada pela razão composta entre a razão das áreas das figuras que rotacionam em torno dos seus eixos de rotação e da razão entre as distâncias dos seus centros de gravidade ao eixo de rotação.*²

A partir da 1ª Relação de Pappus será obtida uma fórmula, enunciada como um teorema, que relaciona diretamente o volume de um sólido de revolução, o centro de gravidade e a área, da figura que foi rotacionada para obtê-lo. Para tanto James Gregory aplica a relação (20) em duas figuras, sendo uma delas de dimensões conhecidas, conforme a figura 16.

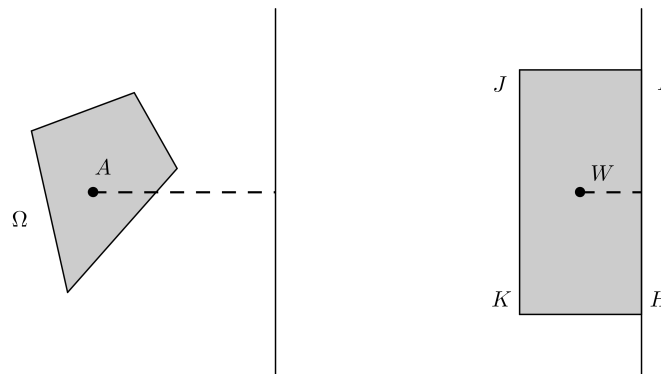


Figura 16: Figura plana Ω e o retângulo de vértices HIJK

Do lado direito da figura 16 temos um retângulo de $\text{Área} = \text{HK} \cdot \text{HI}$, cujo centro de gravidade W está a uma distância $\frac{\text{HK}}{2}$ do eixo de rotação. Além disso, o sólido de revolução terá o volume de um cilindro de altura HI e raio da base igual a HK .

²Essa relação é mencionada na obra Pappi Alexandrini Collectio - v.3, encontrada em (HULTSCH, 1878, p.683).

Usando a 1ª Relação de Pappus podemos escrever:

$$\frac{\text{Rev}(\Omega)}{\text{HI.HK}^2.\pi} = \frac{\text{Área}(\Omega) \text{Circ}(A)}{\text{HK.HI} \cdot 2\pi \cdot \frac{\text{HK}}{2}}.$$

Portanto

$$\text{Rev}(\Omega) = \text{Área}(\Omega)\text{Circ}(A).$$

Dessa forma, demonstramos o seguinte teorema:

Teorema 2.1. *Se uma figura plana é rotacionada em torno de um eixo que não a intersecta, então o volume do sólido de revolução gerado é dado pelo produto entre a área da figura rotacionada e o comprimento da circunferência cujo raio é a distância entre o centro de gravidade dessa figura e o eixo de rotação.*

2.6 RELAÇÃO ENTRE SUPERFÍCIES: TRONCO E SÓLIDO DE REVOLUÇÃO

Embora não seja encontrada em (LEAHY, 2009), utilizando argumentos semelhantes aos anteriores, obtemos diretamente do trabalho de Gregory que *a razão entre as áreas das superfícies de dois sólidos de revolução é dada pela razão composta entre a razão dos perímetros das figuras que rotacionam em torno dos seus eixos de rotação e da razão entre as distâncias dos seus centros de gravidade ao eixo de rotação.* Esta é a 2ª Relação de Pappus.

Aqui novamente são investigadas as relações entre o tronco e o sólido de revolução, obtidos a partir de uma figura circular plana Ω , e suas respectivas superfícies. Considere, ainda, nas relações seguintes, que quando nos referirmos a superfície do tronco, não são consideradas as áreas da base nem da secção oblíqua superior do tronco. Na sequência considere a figura 6 vista anteriormente.

Da semelhança entre os triângulos OPV e HEV da figura 6 podemos escrever que

$$\frac{OP}{PV} = \frac{HE}{EV} \Rightarrow \frac{OP}{2\pi PV} = \frac{HE}{2\pi EV}. \quad (21)$$

Dessa forma, fica claro que a razão entre uma aresta qualquer do tronco inferior do cilindro reto e uma das circunferências que compõem a superfície do sólido de revolução obtido da rotação de Ω em torno do eixo de rotação é constante. Note ainda que essa razão $\frac{OP}{2\pi PV}$ é fixa para qualquer plano paralelo ao plano que contém OPV. Além disso, podemos escrever, de acordo com (LIMA et al., 2006, p.275), que *a superfície do tronco inferior será composta*

pela união de todos os segmentos obtidos da intersecção da superfície do tronco com os planos paralelos mencionados. Do mesmo modo a superfície do sólido de revolução será composta pela união de todas as circunferências provenientes da intersecção do sólido de revolução com os mesmos planos paralelos ao plano que contém OPV.

Aqui usaremos novamente as propriedades das proporções que afirmam que se

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{e} \quad \frac{a}{b} = \frac{e}{f}, \quad \text{então} \quad \frac{a}{b} = \frac{c+e}{d+f}. \quad (22)$$

Como todas as razões obtidas conforme (21) serão fixas e iguais a $\frac{OP}{2\pi PV}$, podemos usar (22) para adicioná-las e igualá-las a essa razão fixa, de onde obtemos

$$\frac{OP}{2\pi PV} = \frac{\text{Super}(\text{Inf}(\Omega))}{\text{Super}(\text{Rev}(\Omega))}.$$

Note ainda que OP representa a altura do cilindro reto obtido de Ω , ou seja, podemos escrever que $OP = \text{Alt}(\Omega)$ assim como $2\pi PV$ representa a circunferência, cujo raio é dado pelo raio de rotação de Ω , logo $2\pi PV = \text{Circ}(\Omega)$. Portanto

$$\frac{\text{Super}(\text{Inf}(\Omega))}{\text{Super}(\text{Rev}(\Omega))} = \frac{\text{Alt}(\Omega)}{\text{Circ}(\Omega)}. \quad (23)$$

Aqui $\text{Super}(\text{Inf}(\Omega))$ representa a superfície do tronco inferior, ou seja, a soma de todas as arestas obtidas das intersecções do tronco com os planos paralelos ao plano que contém OPV, enquanto que $\text{Super}(\text{Rev}(\Omega))$ representa a superfície do sólido de revolução, resultante da soma de todas as circunferências obtidas de forma equivalente.

Agora iremos estabelecer uma relação entre as superfícies de dois sólidos de revolução. Suponha que Ω e Φ são duas figuras planas, das quais são obtidos dois cilindros retos de mesma altura. Da relação (23) podemos escrever

$$\frac{\text{Alt}(\Omega)}{\text{Circ}(\Omega)} = \frac{\text{Super}(\text{Inf}(\Omega))}{\text{Super}(\text{Rev}(\Omega))} \quad \text{e} \quad \frac{\text{Alt}(\Phi)}{\text{Circ}(\Phi)} = \frac{\text{Super}(\text{Inf}(\Phi))}{\text{Super}(\text{Rev}(\Phi))}. \quad (24)$$

Como, por hipótese $\text{Alt}(\Omega) = \text{Alt}(\Phi)$, combinando essas duas igualdades em (24) obtemos

$$\frac{\text{Super}(\text{Rev}(\Omega))}{\text{Super}(\text{Rev}(\Phi))} = \frac{\text{Super}(\text{Inf}(\Omega)) \text{Circ}(\Omega)}{\text{Super}(\text{Inf}(\Phi)) \text{Circ}(\Phi)}. \quad (25)$$

2.7 RELAÇÃO ENTRE SUPERFÍCIES: TRONCO E CILINDRO

Para encontrarmos essa relação usaremos novamente as estruturas utilizadas na seção 2.4, com uma exceção, agora A e B representam os centros de gravidade dos perímetros das bases opostas dos cilindros obtidos a partir de Ω . Da mesma forma como foi feito naquela seção, X representará o centro de gravidade de toda a superfície do cilindro, assim como Y e Z representam, respectivamente, os centros de gravidade das superfícies do tronco inferior e superior. De modo semelhante aqueles indicados naquela seção, mostra-se que os centros de gravidade Y e Z pertencem aos segmentos HS e FR, respectivamente.

Novamente utilizando o Princípio de Arquimedes, supondo que toda massa resultante das superfícies dos troncos superior e inferior estejam localizadas em Y e Z, obtemos que $\text{Super}(\text{Sup}(\Omega)) \cdot XZ = \text{Super}(\text{Inf}(\Omega)) \cdot XY$, ou ainda

$$\frac{\text{Super}(\text{Sup}(\Omega))}{\text{Super}(\text{Inf}(\Omega))} = \frac{XY}{XZ}.$$

Aqui $\text{Super}(\text{Sup}(\Omega))$ representa a superfície do tronco superior do cilindro Ω , enquanto que $\text{Super}(\text{Inf}(\Omega))$ representa a superfície do tronco inferior.

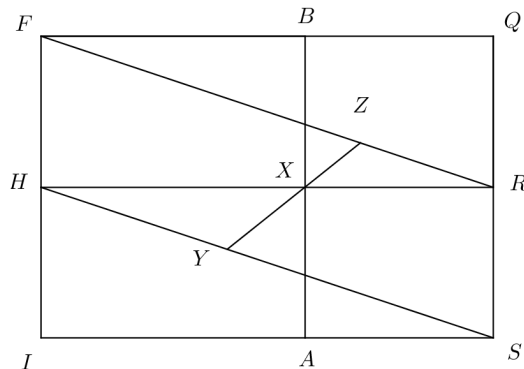


Figura 17: Centros de gravidade

Agora, da figura 17, podemos usar a semelhança entre os triângulos HXY e RZX e o fato de que FQ, HR e IS são paralelos, para obter

$$\frac{IA}{AS} = \frac{HX}{XR} = \frac{YX}{ZX} = \frac{\text{Super}(\text{Sup}(\Omega))}{\text{Super}(\text{Inf}(\Omega))}. \quad (26)$$

Além disso, de (26) podemos escrever que

$$\frac{IS}{AS} = \frac{IA}{AS} + 1 = \frac{\text{Super}(\text{Sup}(\Omega))}{\text{Super}(\text{Inf}(\Omega))} + 1 = \frac{\text{Super}(\text{Sup}(\Omega)) + \text{Super}(\text{Inf}(\Omega))}{\text{Super}(\text{Inf}(\Omega))} = \frac{\text{Super}(\text{Cil}(\Omega))}{\text{Super}(\text{Inf}(\Omega))}.$$

Portanto

$$\frac{\text{Super}(\text{Cil}(\Omega))}{\text{Super}(\text{Inf}(\Omega))} = \frac{IS}{AS}. \quad (27)$$

Na igualdade (27), $\text{Super}(\text{Cil}(\Omega))$ representa a superfície de todo o cilindro, e multiplicando o numerador e o denominador do lado direito dessa última igualdade por 2π obtemos

$$\frac{2\pi IS}{2\pi AS} = \frac{\text{Super}(\text{Cil}(\Omega))}{\text{Super}(\text{Inf}(\Omega))} \Rightarrow \frac{\text{Super}(\text{Inf}(\Omega))}{\text{Super}(\text{Cil}(\Omega))} = \frac{\text{Circ}(A)}{\text{Circ}(\Omega)}. \quad (28)$$

Note que na equação (28) temos que $2\pi IS = \text{Circ}(\Omega)$ pois IS foi definido como raio de rotação de Ω , assim como $2\pi AS = \text{Circ}(A)$. Além disso, a partir de uma figura simétrica Φ de centro de gravidade E , podemos de maneira equivalente escrever que

$$\frac{\text{Super}(\text{Inf}(\Phi))}{\text{Super}(\text{Cil}(\Phi))} = \frac{\text{Circ}(E)}{\text{Circ}(\Phi)}. \quad (29)$$

2.8 A 2ª RELAÇÃO DE PAPPUS

Agora podemos multiplicar a equação (25) por $\frac{\text{Super}(\text{Cil}(\Omega)) \text{Super}(\text{Cil}(\Phi))}{\text{Super}(\text{Cil}(\Omega)) \text{Super}(\text{Cil}(\Phi))} = 1$ e usar as igualdades (28) e (29) para obter

$$\begin{aligned} \frac{\text{Super}(\text{Rev}(\Omega))}{\text{Super}(\text{Rev}(\Phi))} &= \frac{\text{Super}(\text{Inf}(\Omega)) \text{Circ}(\Omega)}{\text{Super}(\text{Inf}(\Phi)) \text{Circ}(\Phi)} \\ &= \frac{\text{Super}(\text{Inf}(\Omega)) \text{Super}(\text{Cil}(\Omega)) \text{Super}(\text{Cil}(\Phi)) \text{Circ}(\Omega)}{\text{Super}(\text{Cil}(\Omega)) \text{Circ}(\Phi) \text{Super}(\text{Inf}(\Phi)) \text{Super}(\text{Cil}(\Phi))} \\ &= \frac{\text{Circ}(A) \text{Super}(\text{Cil}(\Omega))}{\text{Circ}(E) \text{Super}(\text{Cil}(\Phi))} \\ &= \frac{\text{Circ}(A) \text{Per}(\Omega)}{\text{Circ}(E) \text{Per}(\Phi)}. \end{aligned} \quad (30)$$

Aqui $\text{Per}(\Omega)$ representa o perímetro da base do cilindro Ω enquanto que $\text{Per}(\Phi)$ representa o perímetro da base do cilindro Φ , e na última passagem levou-se em conta o fato de que se dois cilindros retos tem a mesma altura então a razão entre as suas superfícies é igual a razão entre os perímetros de suas bases. Porém, como visto na seção anterior, esse resultado só foi obtido a partir da hipótese de que Ω e Φ são simétricas em torno de um eixo perpendicular ao eixo de rotação. Essa restrição pode ser removida do mesmo modo que antes e, dessa forma, obtemos

$$\frac{\text{Super}(\text{Rev}(\Omega))}{\text{Super}(\text{Rev}(\Phi))} = \frac{\text{Per}(\Omega) \text{Circ}(A)}{\text{Per}(\Phi) \text{Circ}(E)} = \frac{\text{Per}(\Omega) \text{Raio}(A)}{\text{Per}(\Phi) \text{Raio}(E)}. \quad (31)$$

Portanto, demonstramos a **2ª Relação de Pappus**:

*A razão entre as áreas das superfícies de dois sólidos de revolução é dada pela razão composta entre a razão dos perímetros das figuras que rotacionam em torno dos seus eixos de rotação e da razão entre as distâncias dos seus centros de gravidade ao eixo de rotação.*³

A partir da 2ª Relação de Pappus é possível estabelecer uma fórmula, que será enunciada como um teorema, que relaciona diretamente a superfície de um sólido de revolução, o perímetro e o centro de gravidade da figura da qual foi obtido o sólido. Para tanto considere o perímetro do retângulo HIJK, de altura H, com centro de gravidade W que dista $\frac{HK}{2}$ do eixo de rotação, visto na seção anterior, e o perímetro de uma outra figura Ω , de centro de gravidade A, qualquer.

Sabemos que a superfície do sólido obtido da rotação de HIJK é a soma da área lateral com as áreas das bases, ou seja $2\pi \cdot HK \cdot HI$ somado a $2\pi \cdot (HK)^2$ e além disso o perímetro do retângulo HIJK é dado por $2HK + 2HI$.

Agora podemos utilizar a 2ª Relação de Pappus entre as figuras Ω e HIJK, mostradas na figura 18.

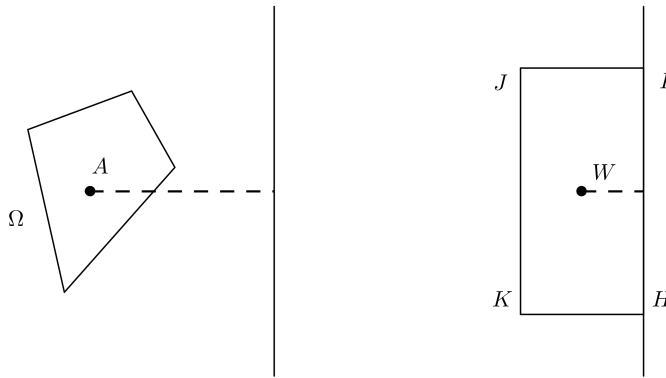


Figura 18: Perímetro da figura Ω e do retângulo de vértices HIJK

Dessa forma, podemos estabelecer a seguinte igualdade:

$$\frac{\text{Super}(\text{Rev}(\Omega))}{2\pi \cdot HK \cdot HI + 2\pi \cdot (HK)^2} = \frac{\text{Per}(\Omega)}{2HK + 2HI} \cdot \frac{\text{Circ}(A)}{2\pi \frac{HK}{2}}$$

Portanto $\text{Super}(\text{Rev}(\Omega)) = \text{Per}(\Omega)\text{Circ}(A)$.

³Essa relação também aparece na obra Pappi Alexandrini Collectio - v.3, encontrada em (HULTSCH, 1878, p.683).

Dessa forma, demonstramos o seguinte teorema:

Teorema 2.2. *Se uma figura plana é rotacionada em torno de um eixo que não a intersecta, então a área da superfície gerada é dada pelo produto entre o perímetro da figura rotacionada e o comprimento da circunferência cujo raio é a distância entre o centro de gravidade desse perímetro e o eixo de rotação.*

3 OS TEOREMAS DE PAPPUS E O CÁLCULO

Neste capítulo apresentaremos proposições referentes a áreas entre curvas, comprimentos de arcos de curvas, além de volumes e áreas de sólidos de revolução. As demonstrações das fórmulas aqui obtidas podem ser encontradas em (GUIDORIZZI, 2003). Ainda serão abordados conceitos de centro de gravidade ou de massa, de placas finas com densidade superficial constante, que ocupam uma determinada região no plano, também serão definidos centros de massa de fios finos e homogêneos de densidade linear constante, que podem ser interpretados como arcos de uma curva definida por uma função contínua no plano cartesiano. Com essas restrições de densidade constante, podemos nos referir ao centro de massa como o centro geométrico ou apenas centroide do objeto de estudo considerado. Todos esses conceitos serão utilizados para demonstrar os teoremas de Pappus usando as ferramentas do Cálculo.

3.1 ÁREA ENTRE DUAS CURVAS

Considere uma região R entre as curvas $f(x)$ e $g(x)$ e entre as retas verticais $x = a$ e $x = b$, onde f e g são funções contínuas e $f(x) \geq g(x) \forall x \in [a, b]$, como mostra a figura 19.

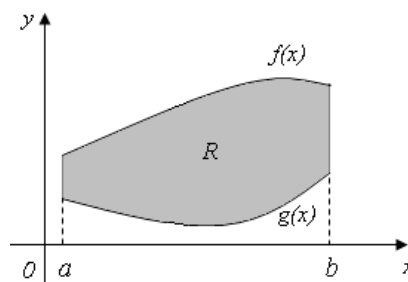


Figura 19: Região entre as curvas $f(x)$ e $g(x)$

Proposição 3.1. *Seja A a área da região limitada pelas curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ e entre as retas verticais $x = a$ e $x = b$, com f e g funções contínuas e $f(x) \geq g(x) \forall x \in [a, b]$. Então*

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx.$$

3.2 COMPRIMENTO DE UM ARCO

Nesta seção trataremos do comprimento de um arco de uma curva plana, definida por uma função f contínua no intervalo $[a, b]$, ou seja, iremos apresentar uma proposição que permite calcular o comprimento da porção de uma curva obtida da função f , do ponto $A(a, f(a))$ ao ponto $B(b, f(b))$.

Considere o gráfico da função $y = f(x)$, com $x \in [a, b]$, mostrado na figura 20.

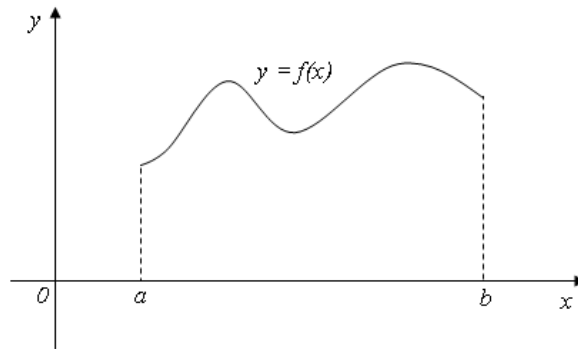


Figura 20: Arco da função $y = f(x)$

Proposição 3.2. *Se uma função f e sua derivada f' são contínuas no intervalo fechado $[a, b]$, então o comprimento L do arco da curva $y = f(x)$ do ponto $A(a, f(a))$ ao ponto $B(b, f(b))$ é dado por*

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

3.3 VOLUME: MÉTODO DO INVÓLUCRO CILÍNDRICO

Apresentaremos agora um método para encontrar o volume de um sólido de revolução, isto é, um sólido gerado pela rotação de uma região de um plano em torno de uma reta desse plano, denominado eixo de rotação, que toca a fronteira ou não intersecta essa região em nenhum ponto. A expressão que obteremos aqui terá papel fundamental na demonstração do 1º teorema de Pappus. Nesta seção trataremos do método do invólucro cilíndrico.

Define-se invólucro cilíndrico como o sólido compreendido entre dois cilindros com o mesmo eixo de rotação. Se, por exemplo, um retângulo que é paralelo ao eixo de rotação, for rotacionado em torno desse eixo, obteremos um invólucro cilíndrico como mostra a figura 21.

Se o invólucro tem raio externo r_2 , raio interno r_1 , e altura h , então o seu volume V é dado por

$$V = \pi r_2^2 h - \pi r_1^2 h. \quad (32)$$

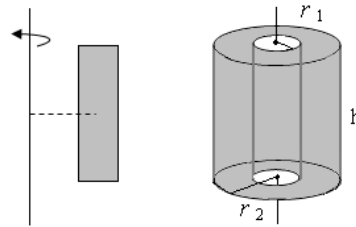


Figura 21: Invólucro cilíndrico

Agora obteremos uma expressão que representa o volume de um sólido S obtido através da rotação de uma região qualquer R , com área A , em torno de um eixo de rotação.

Sejam f e g funções contínuas no intervalo fechado $[a, b]$, onde $f(x) \geq g(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$. Seja R a região limitada pelas curvas $y = f(x)$, $y = g(x)$ e pelas retas verticais $x = a$ e $x = b$. Seja ainda S o sólido de revolução obtido pela rotação da região R em torno do eixo y . Então S é um invólucro cilíndrico, mostrado em parte na figura 22.

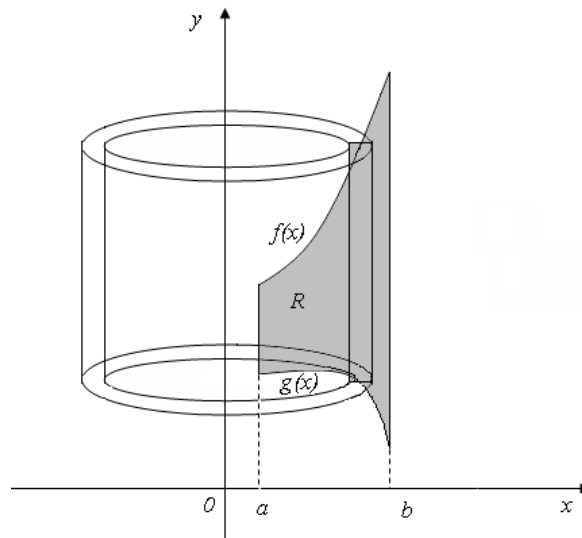


Figura 22: Invólucro cilíndrico obtido a partir da rotação da região R

Proposição 3.3. *Sejam f e g funções contínuas no intervalo fechado $[a, b]$, com $a \geq 0$, onde $f(x) \geq g(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$. Se R for a região limitada pelas curvas $y = f(x)$, $y = g(x)$ e pelas retas verticais $x = a$ e $x = b$, se S for o sólido de revolução obtido pela rotação da região R em torno do eixo y , e se V representa o volume de S , então*

$$V = 2\pi \int_a^b x[f(x) - g(x)]dx.$$

Para o caso em que a região de área A é rotacionada em torno de uma reta paralela ao eixo y o resultado é completamente análogo.

3.4 VOLUME: MÉTODO DO ANEL CIRCULAR

Nessa seção trataremos do volume de um sólido obtido pela rotação de uma região limitada por duas funções contínuas em torno do eixo x . Sejam f e g duas funções contínuas em $[a, b]$, com $f(x) \geq g(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$. Seja A a área da região limitada pelas curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ e pelas retas verticais $x = a$ e $x = b$, mostradas na figura 23. Seja S o sólido obtido pela rotação de R em torno do eixo x . Queremos agora encontrar o volume desse sólido.

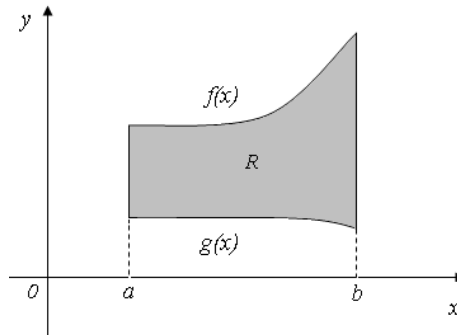


Figura 23: Região limitada pelas curvas $f(x)$ e $g(x)$

Quando giramos a região R em torno do eixo x obtemos um anel circular. A figura 24 mostra uma parte do sólido de revolução que é obtido quando é rotacionado um pequeno retângulo que compõe a região R .

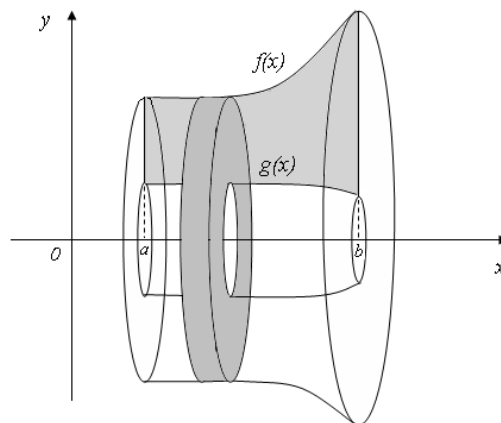


Figura 24: Anel circular obtido da rotação de um retângulo de R

A medida do volume do anel circular obtido pela rotação da região R em torno do eixo x pode ser encontrada através da proposição 3.4 mostrada na sequência.

Proposição 3.4. *Sejam f e g duas funções contínuas em $[a, b]$, com $f(x) \geq g(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$. Seja A a área da região R , limitada pelas curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ e pelas retas verticais $x = a$ e $x = b$. Seja V o volume do sólido obtido pela rotação de R em torno do eixo x . Então*

$$V = \pi \int_a^b [f(x)^2 - g(x)^2] dx.$$

Para o caso em que a região é rotacionada em torno de uma reta paralela ao eixo x o resultado é análogo.

3.5 ÁREA DE UMA SUPERFÍCIE DE REVOLUÇÃO

Uma superfície de revolução é obtida quando giramos uma curva em torno de uma reta, denominada eixo de rotação. Essa superfície é a fronteira lateral do sólido gerado por essa rotação. Nessa seção mostraremos como calcular a área dessa superfície.

Para tanto, considere uma curva $y = f(x)$ com $x \in [a, b]$, onde $f(x) \geq 0$ e f' é contínua para todo $x \in [a, b]$. Quando rotacionamos o arco de curva, de extremidades $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$, em torno do eixo x geramos uma superfície, mostrada na figura 25.

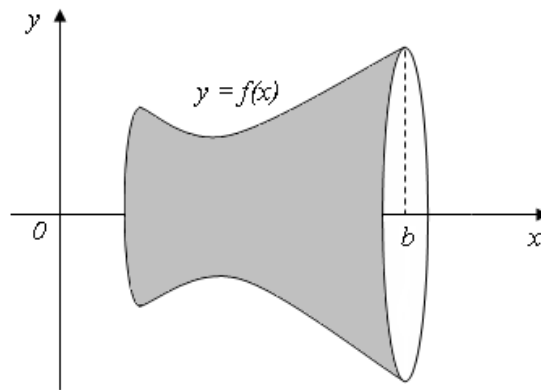


Figura 25: Superfície de revolução

Utilizando elementos de Cálculo e a definição da área lateral de um tronco de cone é possível estabelecer uma fórmula que permite encontrar a área dessa superfície de revolução. As proposições 3.5 e 3.6 mostram esses resultados.

Proposição 3.5. *Seja $y = f(x)$ uma função definida no intervalo fechado $[a, b]$. Se $f(x) \geq 0$ e f' são contínuas nesse intervalo, então a área A da superfície obtida pela rotação de $y = f(x)$, com $x \in [a, b]$, em torno do eixo x é dada por*

$$A = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

De modo análogo, podemos determinar a área da superfície gerada pela rotação de um arco em torno do eixo y .

Proposição 3.6. *Seja $y = f(x)$ uma função definida no intervalo fechado $[a, b]$. Se $f(x) \geq 0$ e f' são contínuas nesse intervalo, então a área A da superfície obtida pela rotação de $y = f(x)$, com $x \in [a, b]$, em torno do eixo y é dada por*

$$A = 2\pi \int_a^b x \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

3.6 CENTRO DE MASSA DE UM SISTEMA DISCRETO DE PARTÍCULAS

De acordo com (HALLIDAY; RESNICK, 1996) e (STEWART, 2001), podemos organizar esse conceito partindo do centro de massa de um sistema discreto de partículas, nesse caso duas, localizadas sobre um eixo horizontal L , de peso e espessura desprezíveis. Esse eixo está apoiado em um ponto P , como mostra a figura 26 e pode girar livremente em torno dele.

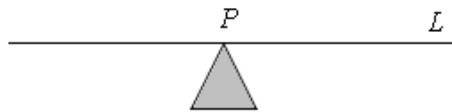


Figura 26: Eixo L

Como acontece com uma gangorra, se um objeto de peso w_1 for colocado a uma distância d_1 à direita de P , esse peso fará com que L gire em torno de P no sentido horário. De forma equivalente, se um objeto de peso w_2 for colocado a uma distância d_2 à esquerda de P , esse peso fará com que L gire em torno de P no sentido anti-horário.

Quando os dois objetos são colocados simultaneamente, o equilíbrio, segundo a *Lei da Alavanca de Arquimedes*, ocorrerá quando $w_1 d_1 = w_2 d_2$.

Imagine agora que L represente o eixo das abscissas e que duas partículas de peso w_1 e w_2 são colocadas nos pontos d_1 e d_2 , respectivamente, conforme mostra a figura 27.

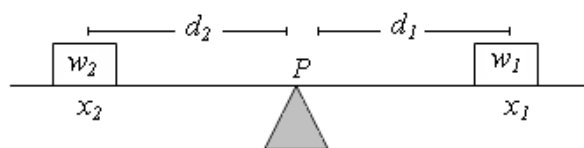


Figura 27: Equilíbrio

De acordo com a *Lei da Alavanca*, o equilíbrio ocorre se

$$w_1(x_1 - P) = w_2(P - x_2) \Rightarrow w_1(x_1 - P) + w_2(x_2 - P) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^2 w_i(x_i - P) = 0.$$

Se n partículas de peso $w_1, w_2, w_3, \dots, w_n$ são colocadas em $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, respectivamente, então esse sistema estará em equilíbrio quando

$$\sum_{i=1}^n w_i(x_i - P) = 0. \quad (33)$$

Lembrando que o peso de um corpo é dado por $w = mg$, onde a aceleração da gravidade g é constante, temos de (33) que

$$\sum_{i=1}^n m_i g(x_i - P) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n m_i(x_i - P) = 0.$$

Aqui a soma $\sum_{i=1}^n m_i(x_i - P)$, chamada de *Momento* do sistema em relação a P , mede a tendência do sistema girar em torno de P . Se o momento é positivo o giro acontece no sentido horário, quando o momento é negativo o sentido do giro é anti-horário e quando o sistema está em equilíbrio o momento é nulo.

Quando o sistema não está em equilíbrio podemos movimentar o ponto de apoio P , até um ponto \bar{x} , de modo que ocorra o equilíbrio, ou seja, de modo que o momento seja nulo. Dessa forma o ponto \bar{x} deve satisfazer a seguinte equação

$$\sum_{i=1}^n m_i(x_i - \bar{x}) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n m_i x_i - \sum_{i=1}^n m_i \bar{x} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n m_i x_i = \bar{x} \sum_{i=1}^n m_i \Rightarrow \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}. \quad (34)$$

Do modo como foi obtido, \bar{x} é o centro de massa do sistema de partículas. Note ainda que o numerador da equação (34) representa o momento em relação à origem, ou seja, o somatório dos produtos das massas pelas respectivas distâncias à origem do sistema, enquanto que o denominador representa a massa total m do sistema.

Estenderemos esses conceitos para o plano. Para tanto considere um sistema com n partículas de pesos $w_1, w_2, w_3, \dots, w_n$ localizadas nos pontos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots, (x_n, y_n)$ respectivamente.

A figura 28 representa essa distribuição de partículas no plano.

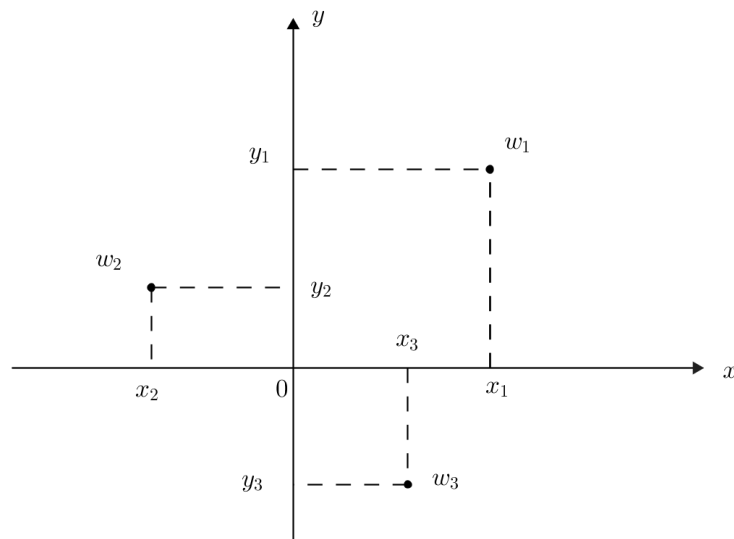


Figura 28: Sistema composto por partículas no plano

De forma análoga ao caso unidimensional, definimos o momento do sistema com relação aos eixos x e y como a soma dos produtos de cada massa pelas suas respectivas distâncias aos eixos coordenados

$$M_y = \sum_{i=1}^n m_i x_i \quad \text{e} \quad M_x = \sum_{i=1}^n m_i y_i.$$

Como anteriormente, aqui M_x mede a tendência do sistema girar em torno do eixo x enquanto que M_y mede a tendência do sistema girar em torno do eixo y . Utilizando os mesmos argumentos do caso unidimensional, as coordenadas (\bar{x}, \bar{y}) do centro de massa serão dadas por

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad \text{e} \quad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i}.$$

Proposição 3.7. *Sejam as massas de n partículas quaisquer, localizadas nos pontos dados por $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ do plano cartesiano. Seja M_x o momento do sistema com relação ao eixo x , M_y o momento do sistema com relação ao eixo y e m a soma das massas de todas as n partículas. O centro de massa (\bar{x}, \bar{y}) dessas n partículas no plano é dado por*

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} \quad \text{e} \quad \bar{y} = \frac{M_x}{m}.$$

3.7 CENTRO DE MASSA DE UMA REGIÃO PLANA

Estamos interessados agora em determinar o centro de massa de uma lâmina ou chapa metálica, de densidade constante. Nesse caso a distribuição das partículas deixa de ser discreta e passa a ser contínua.

A intenção é encontrar um ponto P no qual essa lâmina fique equilibrada horizontalmente, como mostra a figura 29.

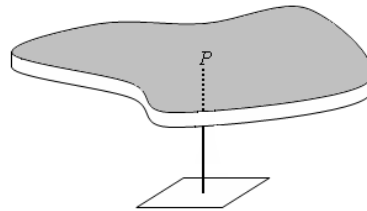


Figura 29: Lâmina equilibrada em um ponto P

A seguir considere uma placa fina, ou lâmina, de densidade superficial uniforme igual a ρ , que ocupa uma região R de área A no plano, como mostra a figura 30. A região R é determinada por duas funções contínuas f e g , tais que $f(x) \geq g(x)$ em $[a, b]$.

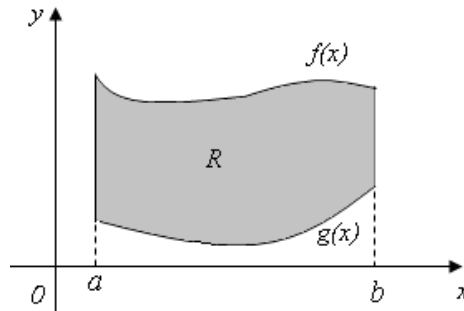


Figura 30: Placa fina que ocupa uma região R , de área A , no plano

Utilizando 3.1, 3.7 e elementos do Cálculo obtemos a seguinte proposição.

Proposição 3.8. *Sejam $y = f(x)$ e $y = g(x)$ duas funções onde $f(x) \geq g(x)$ em $[a, b]$ e além disso f e g são consideradas contínuas no intervalo $[a, b]$. Seja A a área da região R limitada pelas funções f e g no intervalo $[a, b]$. O centro de massa dessa lâmina, ou centroide (\bar{x}, \bar{y}) da região R , é dado por*

$$\bar{x} = \frac{1}{A} \int_a^b x[f(x) - g(x)] dx \quad e \quad \bar{y} = \frac{1}{A} \int_a^b \frac{1}{2} [f(x)^2 - g(x)^2] dx.$$

3.8 CENTRO DE MASSA DE UM ARCO

Agora iremos encontrar as coordenadas do centro de massa de um arco de comprimento L , ou seja, de uma parte de um gráfico de uma função no plano cartesiano. De acordo com (GUIDORIZZI, 2003) podemos considerar um fio fino e homogêneo, de densidade linear constante ρ , como um arco. Seja f uma função definida em $[a, b]$ e com derivada contínua nesse intervalo, mostrada na figura 31.

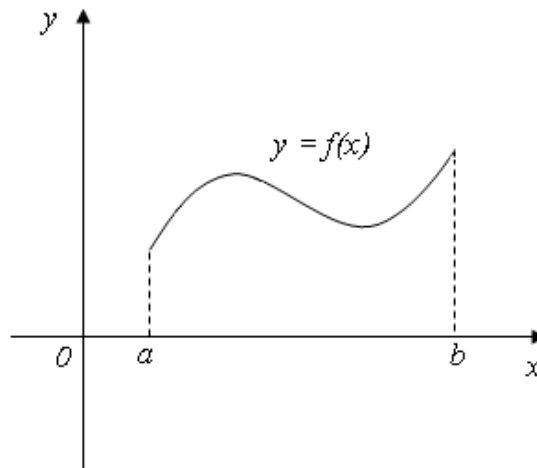


Figura 31: Arco obtido da função $y = f(x)$

Como no caso da placa homogênea, representada pela região R , podemos usar as proposições 3.2 e 3.7 para obter a proposição mostrada na sequência.

Proposição 3.9. *Seja f uma função contínua, com derivada contínua no intervalo $[a, b]$. Seja L o comprimento do arco da função f , de extremos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$. O centro de massa, ou centroide (\bar{x}, \bar{y}) , desse arco é dado por*

$$\bar{x} = \frac{1}{L} \int_a^b x \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \quad e \quad \bar{y} = \frac{1}{L} \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

3.9 O 1º TEOREMA DE PAPPUS

Depois de utilizarmos as ferramentas do Cálculo para definirmos a área entre duas curvas, comprimento de um arco, volumes e áreas das superfícies de um sólido de revolução, centro de massa de regiões planas e arcos, podemos finalmente demonstrar os teoremas de Pappus. Conforme afirma (STEWART, 2001), esses teoremas fazem uma surpreendente conexão entre centroides de regiões e arcos de funções no plano cartesiano e sólidos de revolução.

Teorema 3.10. *Se uma figura plana de área A , de centro de gravidade (\bar{x}, \bar{y}) , é rotacionada em torno de um eixo que não a intersecta, então o volume do sólido de revolução gerado é dado pelo produto entre a área A da figura rotacionada e o comprimento da circunferência cujo raio é a distância entre o centro de gravidade dessa figura e o eixo de rotação.*

Demonstração: Primeiramente demonstraremos para o caso em que a região A é rotacionada em torno do eixo y . Pelo método dos invólucros cilíndricos visto na proposição 3.3 e utilizando também a proposição 3.8 temos

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_a^b x[f(x) - g(x)] dx \\ &= (2\pi A) \frac{1}{A} \int_a^b x[f(x) - g(x)] dx \\ &= (2\pi A) \bar{x} \\ &= 2\pi \bar{x} A \\ &= 2\pi d A. \end{aligned}$$

Portanto $V = 2\pi d A$, onde $2\pi d$ é o perímetro da circunferência cujo raio $d = \bar{x}$ é a distância do eixo de rotação y ao centro de gravidade da região, de área A , que foi rotacionada.

Para o caso em que a região é rotacionada em torno do eixo x , podemos utilizar o método dos anéis circulares, encontrado na proposição 3.4 e novamente a proposição 3.8 para obter

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_a^b [f(x)^2 - g(x)^2] dx \\ &= (2\pi A) \frac{1}{A} \int_a^b \frac{1}{2} [f(x)^2 - g(x)^2] dx \\ &= (2\pi A) \bar{y} \\ &= 2\pi \bar{y} A \\ &= 2\pi d A. \end{aligned}$$

Portanto $V = 2\pi dA$, e nesse caso $2\pi d$ representa o perímetro da circunferência cujo raio $d = \bar{y}$ é a distância do centro de gravidade da região de área A ao eixo de rotação x .

A demonstração para o caso em que a região é rotacionada em torno de uma reta paralela a um dos eixos é completamente análoga.

3.10 O 2º TEOREMA DE PAPPUS

Assim como acontece no 1º teorema de Pappus, podemos combinar resultados obtidos a partir do Cálculo para demonstrar o teorema que relaciona comprimento e centro de gravidade de arcos com a área da superfície de um sólido de revolução.

Teorema 3.11. *Se um arco, de perímetro L , que tem centro de gravidade (\bar{x}, \bar{y}) , é rotacionado em torno de um eixo que não o intersecta, então a área da superfície gerada é dada pelo produto entre o perímetro L do arco e o comprimento da circunferência cujo raio é a distância entre o centro de gravidade desse arco e o eixo de rotação.*

Demonstração: Para o caso em que o arco de perímetro L é rotacionado em torno do eixo y , temos pelas proposições 3.2 e 3.9 que

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_a^b x \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \\ &= (2\pi L) \frac{1}{L} \int_a^b x \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \\ &= (2\pi L) \bar{x} \\ &= 2\pi \bar{x} L \\ &= 2\pi d L. \end{aligned}$$

Portanto $A = 2\pi dL$, onde L representa o perímetro do arco rotacionado e $2\pi d$ é o comprimento de uma circunferência cujo raio $d = \bar{x}$ é a distância entre o centro de gravidade do arco e o eixo y .

De maneira equivalente aquela mostrada no caso do teorema para o volume de um sólido de revolução, podemos obter a fórmula da área de uma superfície de um sólido de revolução quando a rotação do arco é feita em torno do eixo x .

Nesse caso podemos usar novamente as proposições 3.2 e 3.9 para obter

$$\begin{aligned}
 A &= 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \\
 &= (2\pi L) \frac{1}{L} \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \\
 &= (2\pi L) \bar{y} \\
 &= 2\pi \bar{y} L \\
 &= 2\pi d L.
 \end{aligned}$$

Dessa forma temos que $A = 2\pi dL$, onde $2\pi d$ representa o comprimento de uma circunferência cujo raio $d = \bar{y}$ é dado pela distância do centro de gravidade (\bar{x}, \bar{y}) ao eixo x , enquanto que L é o perímetro, ou comprimento, do arco que foi rotacionado. Aqui, novamente, a prova para o caso em que um arco é rotacionado em torno de uma reta paralela a um dos eixos é obtida de forma análoga ao que foi demonstrado.

4 APLICAÇÕES

Nesse capítulo trataremos de alguns exemplos relacionados aos teoremas de Pappus. A intenção agora é mostrar, além de alguns exemplos básicos, como esses teoremas podem ser extremamente úteis quando nos deparamos com casos em que uma região, ou um arco de uma curva de um plano, são rotacionados em torno de um eixo representado por uma reta inclinada desse plano.

Além disso, podemos utilizar esses teoremas no sentido inverso, ou seja, para determinar centros de gravidade de uma região ou de um arco de uma curva do plano quando conhecermos, de antemão, as dimensões da figura rotacionada e a área da superfície ou o volume do sólido obtido pela sua rotação em torno de um determinado eixo de revolução.

4.1 EXEMPLOS

Iniciaremos com um problema simples, cuja resposta pode ser rapidamente conferida utilizando noções simples de geometria espacial, e na sequência serão mostrados casos onde a resposta não pode ser obtida tão rapidamente a partir de relações geométricas simples.

Exemplo 4.1. Determinar o volume do cone obtido pela rotação da região R limitada pela função $f(x) = \frac{-bx}{a} + b$, com $a > 0$, $b > 0$ e pelas retas $x = 0$ e $y = 0$ em torno do eixo y , conforme mostra a figura 32.

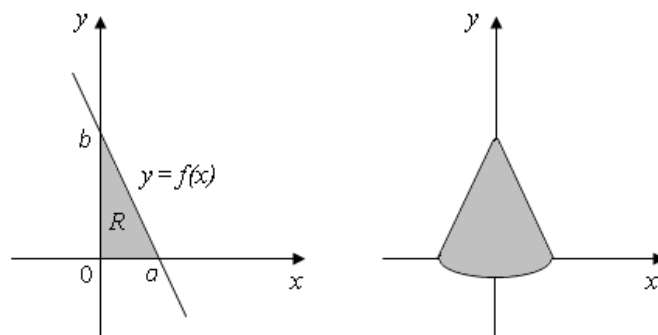


Figura 32: Cone de revolução

Solução: De acordo com o 1º teorema de Pappus temos que esse volume é dado pela expressão $V = 2\pi dA$, onde d é a distância entre o centro de gravidade (\bar{x}, \bar{y}) e o eixo y , nesse caso $d = \bar{x}$, e A representa a área da região que será rotacionada.

Dessa forma, por 3.1 temos

$$A = \int_0^a \left(\frac{-bx}{a} + b \right) dx = \left[\frac{-bx^2}{2a} + bx \right]_0^a = \frac{ab}{2}$$

Agora podemos determinar \bar{x} usando 3.8, de onde segue

$$\bar{x} = \frac{1}{A} \int_0^a xf(x)dx = \frac{2}{ab} \int_0^a \left(\frac{-bx^2}{a} + bx \right) dx = \frac{2}{ab} \left[\frac{-bx^3}{3a} + \frac{bx^2}{2} \right]_0^a = \frac{a}{3} = d.$$

Finalmente podemos determinar o volume do cone obtido pela rotação da região R , definida acima, usando o 1º teorema de Pappus

$$V = 2\pi dA = 2\pi \left(\frac{a}{3} \right) \left(\frac{ab}{2} \right) = \frac{\pi a^2 b}{3}.$$

De maneira equivalente podemos determinar a fórmula do volume do cilindro circular reto e da esfera. Para tanto basta rotacionar, respectivamente, um retângulo e um semicírculo em torno de um dos eixos coordenados.

Exemplo 4.2. Encontrar o volume do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo y , da região R do 1º quadrante limitada pela função definida por $f(x) = x^2$, pela reta $x = 1$ e pelo eixo x , mostrado na figura 33.

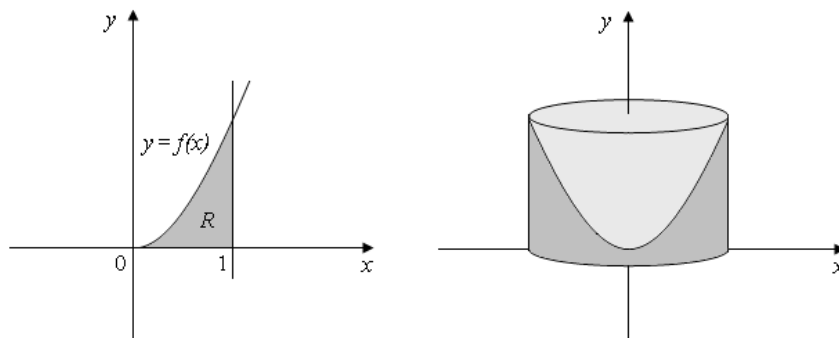


Figura 33: Sólido de revolução gerado pela rotação da região R

Solução: Usaremos novamente o 1º teorema de Pappus e encontraremos esse volume através da fórmula $V = 2\pi dA$.

Podemos encontrar a área A fazendo

$$A = \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Além disso, determinaremos as coordenadas do seu centro de gravidade usando a proposição 3.8, conforme segue

$$\bar{x} = \frac{1}{A} \int_0^1 x f(x) dx = 3 \int_0^1 x^3 dx = 3 \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{3}{4}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{A} \int_0^1 \frac{1}{2} f(x)^2 dx = 3 \int_0^1 \frac{1}{2} x^4 dx = \frac{3}{2} \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{3}{10}.$$

Dessa forma temos que o centro de gravidade da região R está localizado no ponto $(3/4, 3/10)$, onde $\bar{x} = d$ representa a distância desse ponto ao eixo de rotação y . Podemos agora encontrar o volume do sólido gerado

$$V = 2\pi dA = 2\pi \left(\frac{3}{4} \right) \left(\frac{1}{3} \right) = \frac{\pi}{2}.$$

Nesse momento pode surgir a seguinte pergunta: Por que não utilizamos simplesmente o método dos invólucros cilíndricos? Afinal teríamos encontrado o mesmo resultado, como é mostrado na sequência:

$$V = 2\pi \int_0^1 x f(x) dx = 2\pi \int_0^1 x^3 dx = 2\pi \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

De fato, poderíamos realmente ter utilizado o método dos invólucros cilíndricos, porém se quiséssemos que o eixo de rotação fosse a reta $y = x - 2$ ao invés do eixo y , encontraríamos alguma dificuldade. Nesse caso, mostrado na figura 34, nem o método dos invólucros cilíndricos nem o método dos anéis circulares poderiam ser utilizados diretamente.

Nesse momento destaca-se o 1º teorema de Pappus, pois de acordo com ele basta que conheçamos a área A da região R , e também a distância d do seu centro de gravidade ao eixo de rotação. No nosso caso $A = \frac{1}{3}$, e o valor de d pode ser encontrado utilizando a fórmula da distância entre uma reta e um ponto, ou seja, entre a reta $x - y - 2 = 0$ e o ponto $(3/4, 3/10)$.

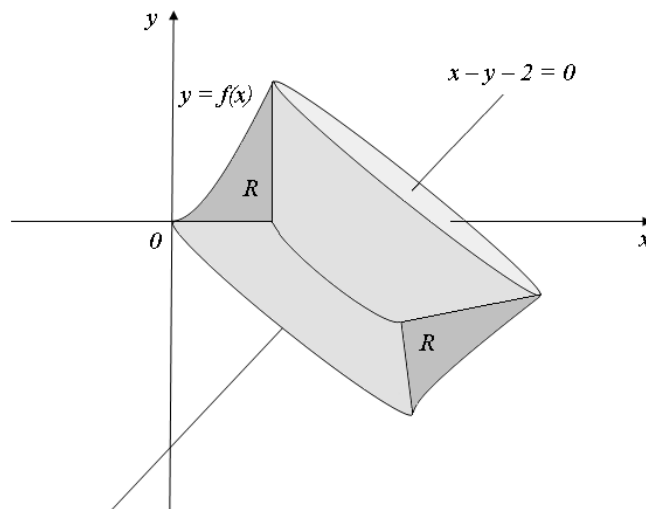


Figura 34: Rotação em torno da reta $x - y - 2 = 0$

Desse modo temos

$$d = \frac{|a\bar{x} + b\bar{y} + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|1(3/4) - 1(3/10) - 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{31\sqrt{2}}{40}.$$

Agora resta calcular o volume desse sólido de revolução

$$V = 2\pi dA = 2\pi \left(\frac{31\sqrt{2}}{40} \right) \left(\frac{1}{3} \right) = \frac{31\sqrt{2}\pi}{60}.$$

Exemplo 4.3. Determine o volume do sólido obtido pela rotação da região R limitada pelas funções $f(x) = 2x$ e $g(x) = x^2$, mostrada na figura 35, em torno da reta $2x - y - 6 = 0$.

Solução: Encontraremos a área A da região R utilizando a Proposição 3.1

$$A = \int_0^2 2x - x^2 dx = \left[\frac{2x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{4}{3}.$$

Utilizando 3.8 encontraremos as coordenadas do centro de gravidade dessa região

$$\bar{x} = \frac{1}{A} \int_0^2 x [f(x) - g(x)] dx = \frac{3}{4} \int_0^2 2x^2 - x^3 dx = \frac{3}{4} \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^2 = 1$$

$$\bar{y} = \frac{1}{A} \int_0^2 \frac{1}{2} [f(x)^2 - g(x)^2] dx = \frac{3}{4} \int_0^2 \frac{1}{2} (4x^2 - x^4) dx = \frac{3}{8} \left[\frac{4x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_0^2 = \frac{8}{5}.$$

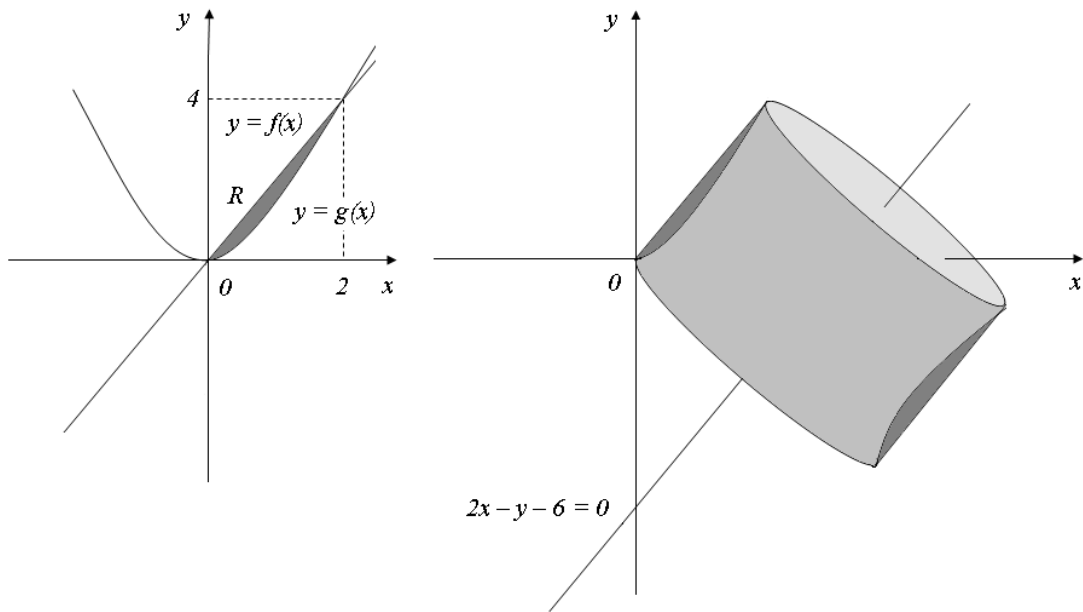


Figura 35: Rotação da região R em torno da reta $2x - y - 6 = 0$

Agora podemos encontrar a distância d entre (\bar{x}, \bar{y}) e o eixo de rotação, representado pela reta $2x - y - 6 = 0$

$$d = \frac{|a\bar{x} + b\bar{y} + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2(1) - 1(8/5) - 6|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{28\sqrt{5}}{25}.$$

Dessa forma, o volume desse sólido será dado por

$$V = 2\pi dA = 2\pi \left(\frac{28\sqrt{5}}{25} \right) \left(\frac{4}{3} \right) = \frac{224\sqrt{5}\pi}{75}.$$

Exemplo 4.4. Encontre o volume do toro obtido pela rotação do círculo $(x-5)^2 + (y-4)^2 \leq 4$, mostrado na figura 36, em torno do eixo y .

Solução: Aqui podemos aplicar diretamente o 1º teorema de Pappus

$$V = 2\pi dA = 2\pi(5)(4\pi) = 40\pi^2.$$

Nesse caso $d = 5$ já que o centro de gravidade do círculo é dado por $(5, 4)$ e além disso a sua área é $A = \pi(2)^2 = 4\pi$. De maneira equivalente, podemos determinar o volume do toro obtido pela rotação desse mesmo círculo em torno da reta $x = 8$, utilizando o 1º teorema de Pappus:

$$V = 2\pi dA = 2\pi(3)(4\pi) = 24\pi^2.$$

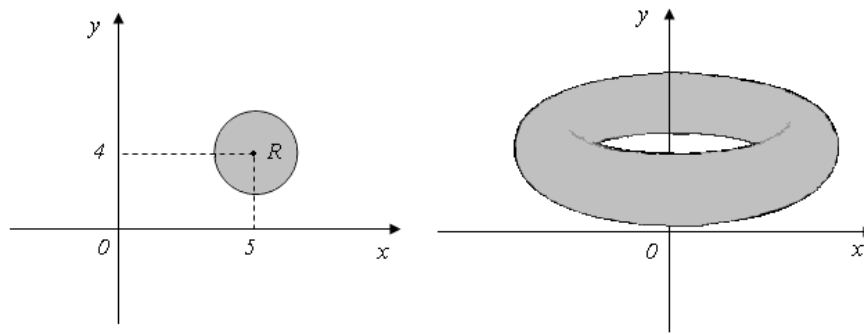


Figura 36: Toro sólido

Exemplo 4.5. Utilize o 1º teorema de Pappus para determinar o centro de gravidade do retângulo mostrado na figura 37, que é limitado pelos eixos coordenados e pelas retas $x = 4$ e $y = 6$.

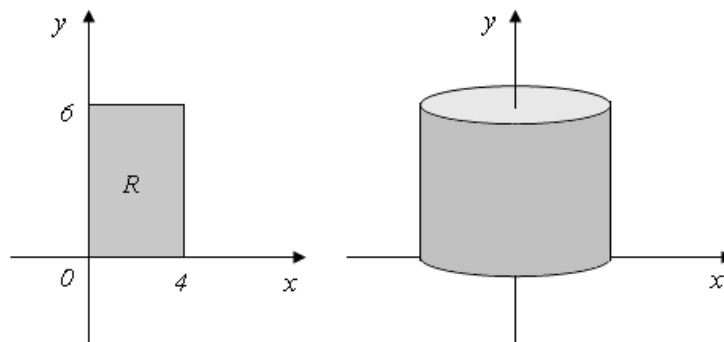


Figura 37: Cilindro de revolução

Solução: Sabemos que se esse retângulo de área $A = 24$ for rotacionado em torno do eixo y obteremos um cilindro circular reto cujo volume pode ser calculado diretamente por $V = \pi(4)^2(6) = 96\pi$.

Agora basta utilizar o 1º teorema de Pappus para encontrarmos a distância d do seu centro de gravidade ao eixo y

$$V = 2\pi dA \Rightarrow 96\pi = 2\pi(d)(24) \Rightarrow d = 2.$$

De forma equivalente, podemos rotacionar esse mesmo retângulo em torno do eixo x e obter

$$V = 2\pi dA \Rightarrow 144\pi = 2\pi(d)(24) \Rightarrow d = 3.$$

Concluimos então que o centro de gravidade encontra-se a 2 unidades de comprimento do eixo y e a 3 unidades de comprimento do eixo x , portanto $(\bar{x}, \bar{y}) = (2, 3)$, como era de se esperar já que $(2, 3)$ é o centro de simetria desse retângulo.

Exemplo 4.6. Determine o centro de gravidade de um setor circular de raio r , com abertura dada por $\theta = \frac{\pi}{2}$ rad utilizando o 1º teorema de Pappus.

Solução: Podemos representar essa região por um quarto de um círculo localizado no 1º quadrante, mostrado na figura 38. Quando rotacionado em torno do eixo y , esse setor circular de área $A = \frac{1}{4}\pi r^2$, gera um sólido cujo volume é igual a metade do volume de uma esfera de raio r , ou seja, $V = \frac{1}{2} \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{2}{3}\pi r^3$.

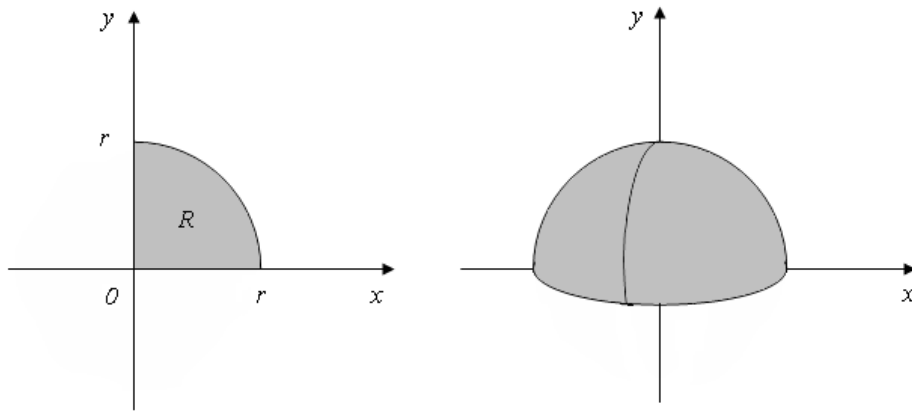


Figura 38: Rotação de um setor circular

Daí, utilizando o 1º teorema de Pappus, obtemos

$$V = 2\pi dA \Rightarrow \frac{2}{3}\pi r^3 = 2\pi(d) \left(\frac{1}{4}\pi r^2 \right) \Rightarrow d = \frac{4r}{3\pi}.$$

Do mesmo modo podemos rotacionar esse setor em torno do eixo x , gerando um sólido de volume $V = \frac{2}{3}\pi r^3$. Utilizando novamente o teorema de Pappus, obtemos

$$V = 2\pi dA \Rightarrow \frac{2}{3}\pi r^3 = 2\pi(d) \left(\frac{1}{4}\pi r^2 \right) \Rightarrow d = \frac{4r}{3\pi}.$$

Portanto a distância do centro de gravidade ao eixo y é igual a distância ao eixo x , ou seja, $d = \frac{4r}{3\pi}$. Dessa forma temos que $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{4r}{3\pi}, \frac{4r}{3\pi} \right)$.

Exemplo 4.7. Qual é a área da superfície gerada pela rotação de um segmento AB mostrado na figura 39, com $A = (4, 1)$ e $B = (4, 9)$ pertencentes a reta vertical $x = 4$, em torno do eixo y ?

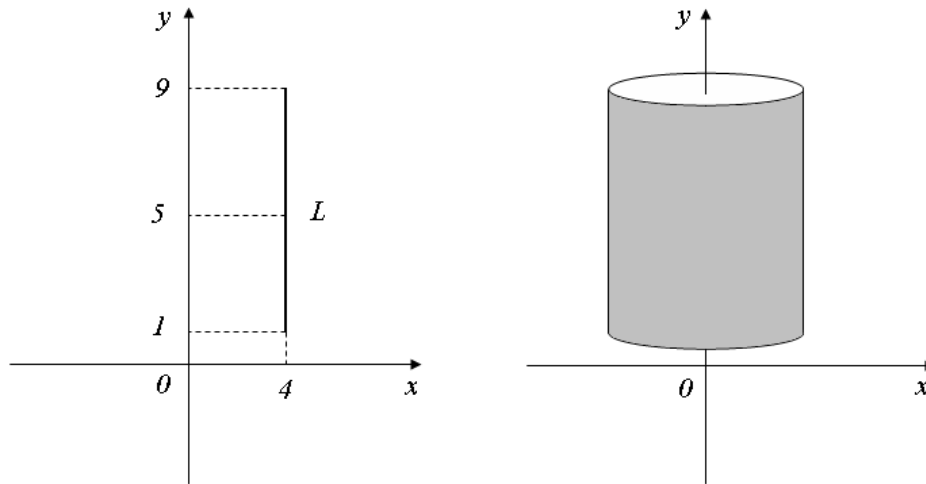


Figura 39: Área lateral de um cilindro

Solução: De acordo com os axiomas vistos na seção 2.4 o centro de gravidade do segmento AB é dado pelas coordenadas do seu ponto médio, ou seja, $(\bar{x}, \bar{y}) = (4, 5)$. Como esse segmento é paralelo ao eixo de rotação, teremos que $d = 4$. Dessa forma, utilizando o 2º teorema de Pappus, obtemos

$$A = 2\pi dL = 2\pi(4)(8) = 64\pi.$$

Esse resultado pode ser confirmado a partir da fórmula da área lateral de um cilindro.

Exemplo 4.8. Encontre a área da superfície obtida a partir da rotação da curva $y = \sqrt{4 - x^2}$, mostrada na figura 40, em torno do eixo y , com $1 \leq x \leq 2$.

Solução: Primeiramente encontraremos o comprimento L desse arco

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{x^2}{4 - x^2}} dx = \int_1^2 \frac{2dx}{\sqrt{4 - x^2}}.$$

Fazendo $x = 2\text{sen}\theta$ obtemos $dx = 2\text{cos}\theta$, logo

$$L = \int_1^2 \frac{2dx}{\sqrt{4 - x^2}} = 2 \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{2\text{cos}\theta d\theta}{\sqrt{4 - 4\text{sen}^2\theta}} = 2 \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{2\text{cos}\theta d\theta}{2\sqrt{1 - \text{sen}^2\theta}} = 2 \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{2\text{cos}\theta d\theta}{2\sqrt{\text{cos}^2\theta}} = \frac{2\pi}{3}.$$

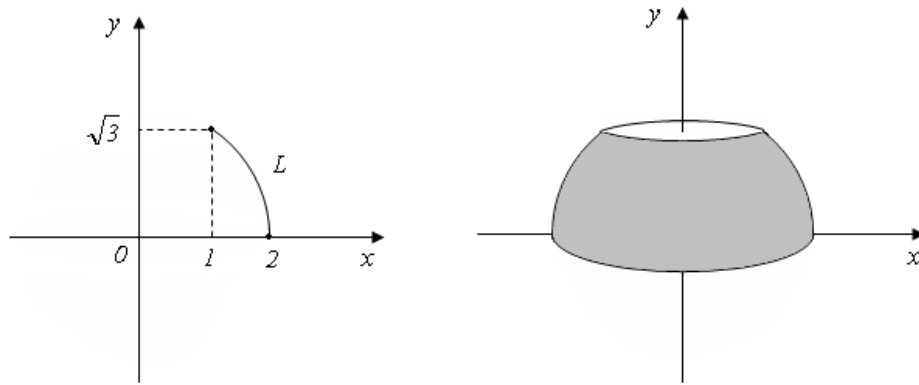


Figura 40: Superfície obtida a partir da rotação de L

Para a abscissa do centro de gravidade, usando 3.9, temos

$$\bar{x} = \frac{1}{L} \int_a^b x \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = \frac{3}{2\pi} \int_1^2 \frac{2x}{\sqrt{4-x^2}} dx$$

Tomando $u = 4 - x^2$ obtemos $du = -2x dx$, de onde segue que

$$\bar{x} = \frac{3}{2\pi} \int_1^2 \frac{2x dx}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{3}{2\pi} \int_0^3 \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{3}{2\pi} \int_0^3 u^{-1/2} du = \frac{3}{2\pi} \left[2u^{1/2} \right]_0^3 = \frac{3\sqrt{3}}{\pi}.$$

Podemos também encontrar a ordenada do centro de gravidade usando 3.9, como segue

$$\bar{y} = \frac{1}{L} \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = \frac{3}{2\pi} \int_1^2 \sqrt{4-x^2} \frac{2}{\sqrt{4-x^2}} dx = \frac{3}{2\pi} \int_1^2 2 dx = \frac{3}{\pi}.$$

Portanto $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{3\sqrt{3}}{\pi}, \frac{3}{\pi} \right)$, além disso, é interessante perceber, como nesse caso, que o centro de gravidade de um arco de uma curva nem sempre pertence a essa curva. Dessa forma, pelo 2º teorema de Pappus, a área da superfície gerada pela rotação do arco da curva $y = \sqrt{4-x^2}$, com $1 \leq x \leq 2$, em torno do eixo y é dado por

$$A = 2\pi dL = 2\pi \left(\frac{3\sqrt{3}}{\pi} \right) \left(\frac{2\pi}{3} \right) = 4\pi\sqrt{3}.$$

Se quisermos a área da superfície gerada pela rotação em torno do eixo x basta fazer

$$A = 2\pi dL = 2\pi \left(\frac{3}{\pi}\right) \left(\frac{2\pi}{3}\right) = 4\pi.$$

Evidente que esses mesmos resultados poderiam ser facilmente obtidos através da fórmula da zona esférica. Porém com uma pequena mudança, considerando o eixo de rotação como a reta $x + y - 6 = 0$, conforme a figura 41, ao invés dos eixos x ou y , teríamos problemas em utilizar a fórmula da zona esférica de maneira direta.

Mais uma vez o teorema de Pappus se mostra muito útil, bastando apenas encontrar a distância d do seu centro de gravidade à reta que representa o eixo de revolução.

$$d = \frac{|a\bar{x} + b\bar{y} + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\left|1 \left(\frac{3\sqrt{3}}{\pi}\right) + 1 \left(\frac{3}{\pi}\right) - 3\right|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{3\sqrt{2}(\pi - \sqrt{3} - 1)}{2\pi}.$$

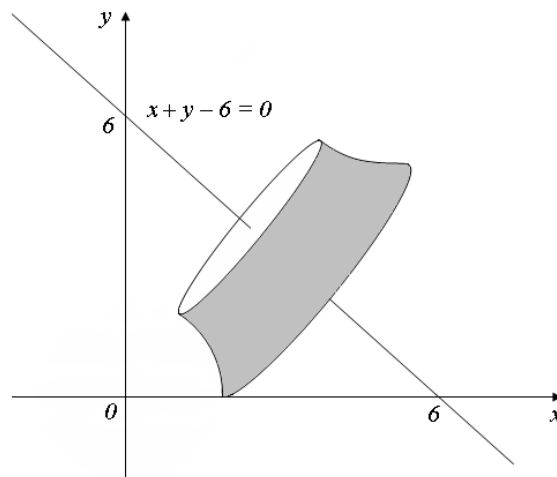


Figura 41: Rotação em torno da reta $x + y - 6 = 0$

Agora podemos calcular a área dessa superfície

$$A = 2\pi dL = 2\pi \left[\frac{3\sqrt{2}(\pi - \sqrt{3} - 1)}{2\pi} \right] \left(\frac{2\pi}{3} \right) = 2\sqrt{2}\pi(\pi - \sqrt{3} - 1).$$

Exemplo 4.9. Encontre o centro de gravidade do arco da função $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, com $0 \leq x \leq r$, que é mostrado na figura 42.

Solução: Utilizaremos o 2º teorema de Pappus para determinar o centro de gravidade desse arco. Primeiramente note que o comprimento L desse arco é igual a $\frac{\pi r}{2}$ e além disso, quando o rotacionamos geramos uma superfície correspondente a metade da área de uma esfera, ou seja, de área $A = 2\pi r^2$. Portanto podemos escrever

$$A = 2\pi dL \Rightarrow 2\pi r^2 = 2\pi d \left(\frac{\pi r}{2} \right) \Rightarrow d = \frac{2r}{\pi}.$$

Quando rotacionamos esse mesmo arco em torno do eixo x encontramos uma superfície de mesma área e portanto também encontraremos $d = \frac{2r}{\pi}$.

Como essas distâncias $d = \frac{2r}{\pi}$ encontradas são consideradas a partir do centro de gravidade aos eixos x e y temos que $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{2r}{\pi}, \frac{2r}{\pi} \right)$.

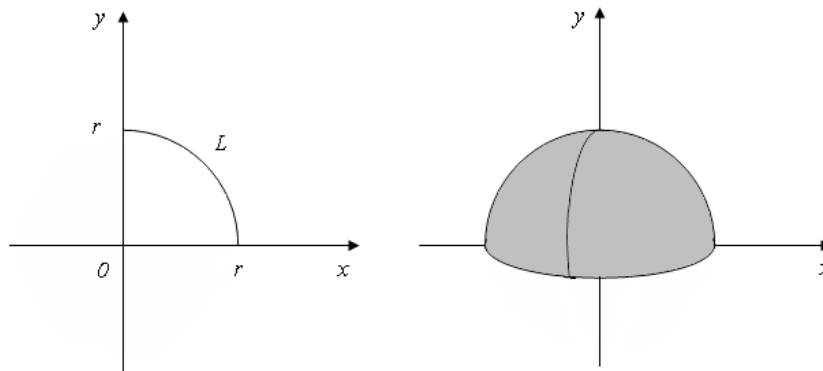


Figura 42: Arco da função $y = \sqrt{r^2 - x^2}$

Aqui vale ressaltar, conforme visto em (LIMA et al., 2006, p.278), a diferença entre os resultados obtidos nos exemplos 4.6 e 4.9, ela existe porque no primeiro caso encontramos o centro de gravidade de toda a região, equivalente a uma chapa metálica muito fina, enquanto que no último caso encontrou-se o centro de gravidade de um arco, semelhante a um fio de arame.

5 CONCLUSÃO

Nesse trabalho tratamos dos teoremas de Pappus relativos aos sólidos de revolução. Utilizando apenas conceitos de geometria, de centro de gravidade, além dos Princípios Arquimedes e Cavalieri, foi possível apresentar as demonstrações desses importantes teoremas, ainda inéditas em português. Essa demonstração foi obtida a partir dos trabalhos de James Gregory publicados no artigo do professor Andrew Leahy. Toda a construção dessa demonstração merece, no mínimo, a nossa atenção já que prova resultados importantes utilizando conceitos anteriores ao desenvolvimento do Cálculo.

Relativamente extensas, é plenamente compreensível que as demonstrações em questão não apareçam em livros de Cálculo e tampouco em livros que tratam de História da Matemática de maneira mais ampla. Daí seguiu-se o objetivo desse trabalho, ou seja, apresentamos a demonstração desses teoremas de modo a preencher essa eventual lacuna existente entre simples citações históricas desse tema e demonstrações que envolvem apenas elementos de Cálculo, tornando prático o acesso a todos que tenham interesse em conhecer esses teoremas.

Verificamos ainda que os teoremas de Pappus tem, de fato, muita relevância e são extremamente úteis em muitos problemas que envolvem sólidos de revolução; principalmente em casos onde o eixo de rotação é dado por uma reta não paralela aos eixos coordenados. Esses teoremas também podem ser utilizados no sentido inverso, ou seja, para encontrar o centro de gravidade de figuras planas quando conhecemos de antemão o volume ou a área da superfície do sólido gerado pela rotação, assim como as dimensões da figura que foi rotacionada.

De acordo com o seu regimento, o PROFMAT tem como objetivo proporcionar formação matemática adequada, visando fornecer ao egresso qualificação para o exercício da profissão de professor. Neste contexto é de total relevância que o trabalho apresentado, da forma como foi organizado, produza impacto direto na educação básica. De fato, alguns dos conceitos vistos podem ser aplicados em sala durante aulas de geometria espacial. Fórmulas de áreas de superfícies e volumes de sólidos de revolução, por exemplo, podem ser obtidas de forma alternativa a partir dos teoremas de Pappus. Além disso, a História da Matemática, que permeia o tema, tem

papel importante e pode ser utilizada como instrumento motivador durante a abordagem desse, como de outros conteúdos.

Finalizando, a proposta principal desse trabalho foi promover um resgate histórico e tomar a demonstração de James Gregory como tema central, não só pela clareza e relativa simplicidade nos conceitos utilizados, mas também como uma elegante alternativa em relação às demonstrações apresentadas em muitos livros de Cálculo.

REFERÊNCIAS

- BOYER, C. B. **História da Matemática**. 1. ed. São Paulo: Edgar Blücher, 1974.
- BULMER-THOMAS, I. **Guldin's Theorem – or Pappus's?** Chicago: The University of Chicago Press, vol. 75, 1984. 348 – 352 p. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/231832>>. Acesso em: 8 de março de 2013.
- BUSSARD, H. L. L. **Paul Guldin - Dictionary of Scientific Biography**. 1. ed. New York: Scribner, 1970. Disponível em: <<http://www.encyclopedia.com/doc/1G2-2830901775.html>>. Acesso em: 05 de janeiro de 2013.
- EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. 1. ed. Campinas: Editora da UNICAMP, 2008.
- GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de Cálculo - v. 1**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2003.
- GULDIN, P. **Centrobarryca**. 1. ed. Viena: Gregorii Gelbhaar, 1635. Disponível em: <<http://echo.mpiwg-berlin.mpg.de/MPIWG:7C3STXR7>>. Acesso em: 10 de janeiro de 2013.
- HALLIDAY, D.; RESNICK, R. **Fundamentos de Física - v. 2**. Rio de Janeiro: LTC, 1996.
- HEATH, T. **A history of Greek mathematics - v. 2**. 1. ed. Oxford: The Clarendon Press, 1921. Disponível em: <<http://archive.org/stream/ahistorygreekma00heatgoog>>. Acesso em: 05 de janeiro de 2013.
- HULTSCH, F. O. **Pappi Alexandrini Collectio - v. 3**. 1. ed. Berlim: Apud Weidmannos, 1878. Disponível em: <<http://archive.org/stream/pappialexandrin01pappgoog>>. Acesso em: 20 de dezembro de 2012.
- LEAHY, A. **James Gregory and the Pappus - Guldin Theorem**. 2009. Disponível em: <<http://mathdl.maa.org/mathDL>>. Acesso em: 19 de dezembro de 2012.
- LIMA, E. L. et al. **A Matemática do Ensino Médio - v. 2**. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.
- LINTZ, R. G. **História da Matemática**. 1. ed. Blumenau: Editora da FURB, 1999.
- MANCOSU, P. **Philosophy of Mathematics & Manual Practice in the Seventeenth Century**. New York: Oxford University Press, 1996. Disponível em: <<http://books.google.com.br/books>>. Acesso em: 21 de janeiro de 2013.
- SIMMONS, G. F. **Cálculo com Geometria Analítica**. 2. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 1987.
- STEWART, J. **Cálculo, v. 1**. 4. ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2001.