Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática
Multicâmpus Londrina/Cornélio Procópio
PPGMAT

ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA EM LIVROS DIDÁTICOS, É POSSÍVEL?

VICTOR HUGO DOS SANTOS GOIS

LONDRINA
2019

VICTOR HUGO DOS SANTOS GOIS

ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA EM LIVROS DIDÁTICOS, É POSSÍVEL?

Produto Educacional apresentado como requisito para exame de defesa do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática Multicâmpus Londrina/Cornélio Procópio – PPGMAT, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Campus Londrina.

Orientadora: Profa. Dra. Karina Alessandra Pessoa da Silva

LONDRINA
2019

APRESENTAÇÃO

Caro (a) colega professor (a)!

Este Produto Educacional é fruto de nossa Dissertação intitulada "Livro Didático e atividades de Modelagem Matemática: algumas articulações", sob a orientação da Profª. Dra. Karina Alessandra Pessoa da Silva e vinculado ao Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática Multicâmpus Londrina/Cornélio Procópio – PPGMAT, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Campus Londrina.

O material didático tem por objetivo oferecer uma alternativa pedagógica para as aulas de Matemática por meio da Modelagem Matemática. A partir do desenvolvimento de nossa pesquisa optamos por construir um material para professores, denominado cartilha didática de atividades, destinado a todos os professores que desejam aprender um pouco mais, desenvolver atividades de modelagem em sala de aula e, mais especificamente a professores do Ensino Médio, pelo enfoque em atividades destinadas a esta etapa de ensino.

As atividades que aqui apresentamos são exemplos do potencial que tarefas presentes em Livros Didáticos de Matemática (LDM) podem ter para desenvolvê-las enquanto atividades de modelagem em sala de aula. Durante nossas análises de tarefas presentes em cinco coleções de LDM pudemos evidenciar, utilizando a semiótica peirceana, que algumas destas tarefas apresentavam características próximas às encaminhadas pela modelagem em sala de aula. Sendo assim, identificamos também que, a partir de um planejamento, elas eram possíveis de serem encaminhada pela modelagem.

Assim, esperamos que você leitor, aproveite do trabalho que aqui desenvolvemos e possa sentir-se incentivado também a utilizar a modelagem como uma alternativa pedagógica para suas aulas de Matemática, aliando esta a um dos materiais mais utilizados por nós professores, o livro didático.

Uma boa leitura!

Victor Hugo dos Santos Gois

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A educação e a escola estão em constante evolução, com isso, deve-se refinar o que já se tem de bom, descontinuar o que não mais funciona e romper barreiras para inovar e dar força aos processos de ensino e aprendizagem para que os avanços não se findem. Considerando os entraves nas aulas de Matemática, faz-se necessário o desenvolvimento de mais pesquisas que proponham melhorias para o trabalho do professor em sala.

Nesse sentido, propomo-nos a tratar de atividades[1] desenvolvidas por meio da modelagem, tendência em Educação Matemática que apresenta diferencial e possibilidades de resultados positivos, conforme apontado em diversas pesquisas (KHELE; CUNNINGHAN, 2000; VERTUAN, 2007; SILVA, 2008; ROSA, 2009; SILVA, 2013; LORIN, 2013; KAISER; BRAND, 2015; BORSSOI, 2016; VERONEZ, 2013; RAMOS, 2016).

A Modelagem Matemática "[...] constitui-se em um conjunto de procedimentos cujo objetivo é construir um paralelo para tentar explicar matematicamente, os fenômenos presentes no cotidiano de ser humano, ajudando-o a fazer predições e tomar decisões" (BURAK, 1992, p. 62).

A caracterização feita por Burak (1992) corrobora com nosso entendimento de que, para abordarmos um problema, não essencialmente matemático a partir da Matemática, é possível fazer uso de conhecimentos matemáticos já construídos e aprender novos objetos matemáticos. Sendo assim, as atividades de modelagem se constituem como uma alternativa pedagógica. No entanto, as "atividades de Modelagem Matemática colocam os alunos em contato com práticas que, de forma geral, não lhes parecem corriqueiras na sala de aula" (SILVA, ALMEIDA, GERÔLOMO, 2011, p. 30). Assim, faz-se necessário que a familiarização do aluno com a atividade de modelagem se faça de maneira gradativa que, segundo Silva, Almeida e Gerôlomo (2011) se dá a partir de três diferentes momentos[2].

---

[1] Neste trabalho empregamos a palavra atividade quando tratamos de atividades de modelagem seguindo a acepção do termo que nosso referencial a respeito de Modelagem Matemática adota. E usaremos o termo tarefa para quando nos referirmos aos textos presentes em livros didáticos.

[2] A discussão a respeito dos diferentes momentos de familiarização dos alunos com atividades de modelagem é feita no capítulo 1.

Desse modo, podemos entender a modelagem como um recurso para os professores nos processos de ensino e de aprendizagem, que visa ensinar Matemática a partir da solução de problemas por meio de representações simplificadas da realidade que são elaboradas por aqueles que a investigam. Na literatura, tais representações são designadas como modelos matemáticos.

Aliado a isso, queremos apresentar atividades encaminhadas pela modelagem a partir de situações-problema propostas em Livros Didáticos de Matemática – LDM, já que desde sua criação, o livro didático tem sido objeto pedagógico inserido em todas as áreas de conhecimento disponíveis no ambiente escolar.

Esse material ocupa lugar especial nas ferramentas utilizadas pelo professor e pelos alunos, por servir como compêndio de conteúdos que são exigidos pelo currículo escolar e busca, entre outras coisas, difundir conhecimentos a respeito de uma determinada área de conhecimento (GONÇALVES; CORRÊA, 2016). Segundo Costa e Allevato (2010):

> O livro didático é um dos instrumentos mais utilizados pelos professores para organização e desenvolvimento das atividades em sala de aula e, até mesmo, para aprimorar seu próprio conhecimento sobre o conteúdo e, para os alunos, trata-se de uma fonte muito valiosa de informação, que deveria despertar o interesse e o gosto pela leitura, além de ajudar no avanço dos estudos.
> Portanto, o livro didático deve ser muito bem organizado tanto para o professor, que o tem como apoio pedagógico, quanto para os alunos, que poderão utilizá-lo para estudar sozinhos. O livro adquire, assim, a função de contribuir para o ensino-aprendizagem. Por isso, ele é considerado um interlocutor, isto é, um componente que "dialoga" tanto com o professor quanto com os alunos (COSTA; ALLEVATO, 2010, p. 72-73).

Sendo assim, buscamos por meio de análise semiótica peirceana, analisar algumas coleções de LDM e selecionar tarefas que poderiam ser desenvolvidas enquanto atividades de modelagem. Com isso, tentamos estreitar o trabalho com a Modelagem Matemática e a prática docente a partir de um material de apoio de confiança dos professores, o livro didático.

A partir das nossas experiências docentes, e conforme apontam pesquisas (LOPES, 2003; SAJKA, 2003; PONTE; BRANCO; MATOS, 2009) um dos conteúdos, em aulas de matemática, que os alunos apresentam dificuldades é no estudo de funções. Conforme apontado por Sajka (2003) é a natureza dual que este conteúdo apresenta (gráfica e algébrica) que pode causar dificuldades em sua compreensão.

Em Gois (2017), propusemos o trabalho com funções trigonométricas, buscando diminuir essas dificuldades apresentadas pelos alunos a partir do desenvolvimento de atividades de modelagem em que o conteúdo de funções trigonométricas pudesse emergir. Em Gois, Silva e Dalto (2019), ficou evidente que o trabalho com funções, mais especificamente com funções definidas por mais de uma sentença, é bem fragilizado com alunos que ingressam em graduações na área de exatas e cursam disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral.

Entre as dificuldades apresentadas, destacam-se aquelas relacionadas à representação gráfica da função e aos erros aritméticos na manipulação da representação algébrica das funções (GOIS; SILVA; DALTO, 2019).

Segundo Almeida (2018, p. 19), ao introduzir uma atividade de modelagem em aulas de Matemática se faz necessário considerar, entre outras coisas que “a matemática utilizada pode não ter sido previamente escolhida ou definida; em vez disso, a matemática necessária emerge do problema e de suas especificidades”. Com isso, não se pode esperar que os alunos modelem determinada situação utilizando um objeto matemático específico, mas permite que o aluno, a partir de seus conhecimentos, escolha o que acha mais adequado para resolver a situação que lhe foi apresentada.

Desse modo, em Gois (2019), buscamos analisar aspectos que possibilitam identificar tarefas que têm potencial para serem encaminhadas enquanto atividades de modelagem matemática, considerando especificamente: selecionar livros didáticos de Matemática do Ensino Médio que abordem objetos de conhecimento matemático tais como funções definidas por mais de uma sentença e desenvolver as atividades planejadas com alunos do Ensino Médio.

O produto educacional que aqui apresentamos, consiste em uma cartilha que apresenta tarefas selecionadas em livros didáticos de Matemática que tenham potencial para serem encaminhadas enquanto atividades de modelagem com orientações didáticas disponíveis para o professor.

Com relação à estrutura desta cartilha, além desta Introdução, ela está organizada em três capítulos.

No **capítulo 1**, intitulado “Caracterizações da *Modelagem Matemática*”, apresentamos a perspectiva de modelagem na Educação Matemática adotada para este trabalho.

No **segundo capítulo**, intitulado "*Tarefas presentes em LDM com potencial para a modelagem*", apresentamos as tarefas presentes em alguns livros didáticos que foram selecionadas para serem planejadas e desenvolvidas por meio da modelagem.

Apresentamos os planejamentos das duas atividades que desenvolvemos por meio da modelagem no **terceiro e último capítulo** – "*Planejamento de duas atividades de modelagem".*

Por fim, trazemos as **Referências** que compuseram o desenvolvimento deste produtor educacional.

1. CARACTERIZAÇÕES DA MODELAGEM MATEMÁTICA

A modelagem teve sua origem em um campo da Matemática denominado, convencionalmente, como Matemática Aplicada. Neste campo, o objetivo é obter solução para problemas da realidade.

Contudo, para além disso, a comunidade que pesquisa a respeito da Modelagem Matemática na perspectiva da Educação Matemática, busca também evidenciar o impacto de atividades de modelagem nos processos de ensino e aprendizagem em sala de aula.

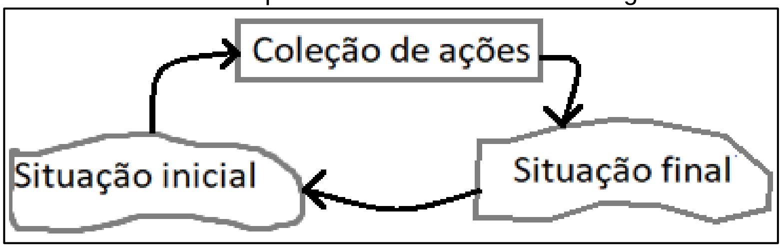
Segundo Bisognin e Bisognin (2011, p. 106) a modelagem matemática é “[...] um caminho que pode aproximar a linguagem do professor à dos alunos e propiciar a aprendizagem de conteúdos matemáticos”.

Em nossa pesquisa optamos por estudar, planejar e desenvolver atividades de Modelagem Matemática por acreditarmos se tratar de uma tendência em Educação Matemática que possibilita favorecer os processos de ensino e de aprendizagem em sala de aula e permite discutir temas que extrapolam a própria matemática, possibilitando aos alunos entenderem que, a Matemática está articulada a situações do cotidiano.

Para tratarmos dessa tendência em Educação Matemática nesta pesquisa, entendemos modelagem matemática como uma alternativa pedagógica, seguindo os pressupostos estabelecidos por Almeida, Silva e Vertuan (2012).

De maneira geral, uma atividade de modelagem nesta perspectiva tem como tríade basilar: uma situação inicial, uma situação final e uma coleção de ações necessárias para partir da situação inicial e chegar à situação final, conforme ilustrado na Figura 1.

Figura 1 – Tríade basilar para uma atividade de modelagem matemática



Fonte: dos autores.

A situação inicial também chamada de problemática, ou situação-problema, trata-se de uma situação para a qual não é conhecida previamente uma solução.

A coleção de ações necessárias para a solução da situação-problema envolve uma interpretação da realidade por meio da matemática e, como consequência, uma articulação de conceitos matemáticos e não matemáticos podem emergir ou serem produzidos no desenvolvimento da atividade.

Essa coleção de ações na perspectiva de Almeida, Silva e Vertuan (2012) é caracterizada pelas seguintes fases: inteiração, matematização, resolução, interpretação dos resultados e validação. De acordo com Almeida, Silva e Vertuan (2012, p.15-16) a Inteiração

> [...] representa o primeiro contato com a situação-problema que se pretende estudar com a finalidade de conhecer as características e especificidades da situação. A inteiração conduz a formulação do problema e a definição de metas para sua resolução, assim a escolha do tema e a busca de informações a seu respeito constituem o foco central nessa fase [...].
> [A Matematização] é caracterizada pelo processo de transição de linguagens, de visualização e de uso de símbolos para realizar descrições matemáticas, que são realizadas a partir de formulação de hipóteses, seleção de variáveis e simplificações em relação às informações e ao problema definido na fase de inteiração [...].
> [A Resolução] consiste na construção de um modelo matemático com a finalidade de descrever a situação, permitir a análise dos aspectos relevantes da situação, responder as perguntas formuladas sobre o problema a ser investigado [...].
> [A Interpretação de Resultados] pelo modelo implica a análise de uma resposta para o problema, a análise da resposta constitui um processo avaliativo realizado pelos envolvidos na atividade e implica uma [Validação] da representação matemática associada ao problema, considerando tanto os procedimentos matemáticos quanto à adequação da representação para a situação (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p.15-16).

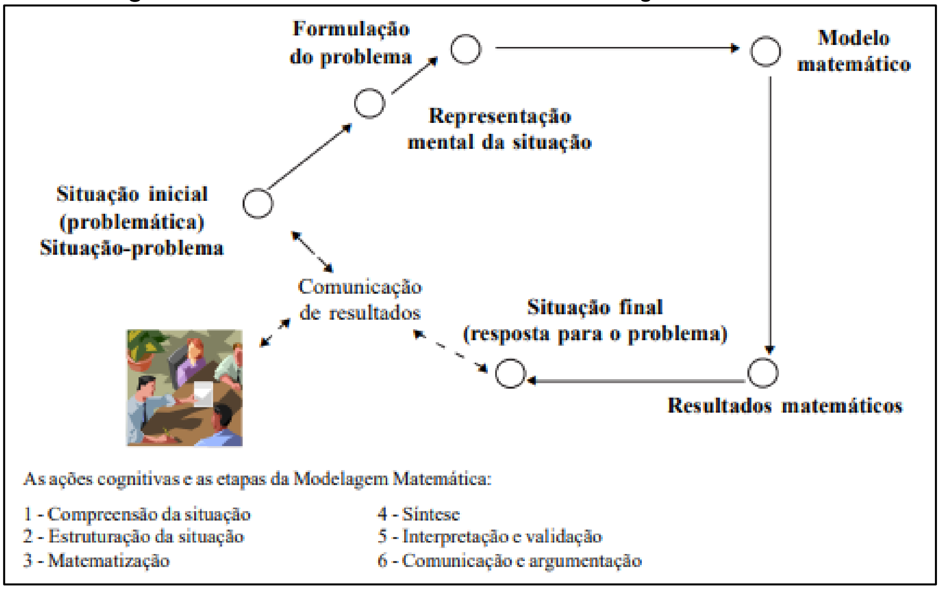
Na situação final há uma solução para a problemática, a partir de uma interpretação matemática da situação inicial. Essa interpretação matemática que foi elaborada, a literatura convencionou chamar de modelo matemático. “Um modelo matemático pode ser escrito utilizando-se para isso diferentes sistemas de representação” (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p.14). Neste caso, o nível de escolaridade do aluno interfere no modelo matemático escrito podendo para, com as devidas adaptações uma situação-problema, ser deduzido um modelo por meio de uma tabela, lista, maquete, esquema, entre outras representações matemáticas.

Além disso, um modelo matemático serve para representar uma situação ou descrevê-la, sendo possível fazer previsões para a situação a partir do modelo elaborado para o problema, ou ainda, considerar informações antes não pensadas.

A partir das caracterizações de modelagem e modelo matemático que aqui apresentamos, podemos entender que no desenvolvimento de uma atividade de modelagem as fases propostas por Almeida, Silva e Vertuan (2012) podem ocorrer de maneira cíclica, já que enquanto não há uma resolução e validação dos dados é possível revisitar as outras fases de uma atividade de modelagem.

Assim, Almeida e Silva (2012) elaboraram um ciclo no desenvolvimento de uma atividade de modelagem, que está apresentado na Figura 2.

Figura 2 – Ciclo de uma atividade de modelagem matemática



Fonte: ALMEIDA; SILVA, 2012, p. 630.

Conforme Almeida e Silva (2012), percebe-se uma preocupação por analisar ações cognitivas no desenvolvimento de atividades de modelagem.

Contudo, pensando no histórico educacional brasileiro, percebemos que é comum aos alunos aulas expositivas-dialogadas[3]. Com isso, ao desenvolver uma atividade de modelagem, os alunos podem ter dificuldades em perpassar pelas fases do ciclo proposto por Almeida e Silva (2012), para resolver isso é possível familiarizar os alunos com atividades de modelagem.

Silva, Almeida e Gerôlomo (2011) e Almeida, Silva e Vertuan (2012) propõem a possibilidade de implementar atividades de modelagem em sala de aula de maneira gradativa, permitindo uma maior autonomia do aluno no

---

[3] Entendemos por aula expositiva-dialogada aquela cujo processo de ensino concentra-se no professor e o processo de aprendizagem nos alunos. Nesta modalidade de aula o professor aborda um conteúdo a partir de seu aspecto teórico seguido de alguns exemplos e, depois, exercícios de fixação e o professor interage com os alunos por meio de questionamento (JESUS, 2017, 24–49).

desenvolvimento de atividades. Para isso, os autores supracitados indicam a possibilidade de o professor ensinar o aluno a trabalhar com modelagem familiarizando o mesmo com atividades de modelagem.

A familiarização proposta pelos autores ocorre em três diferentes momentos cujas características de cada um apresentamos a seguir.

O primeiro momento de familiarização é caracterizado pela apresentação da situação-problema pelo professor, com dados necessários e suficientes para resolver o que foi proposto. Segundo Silva, Almeida e Gerôlomo (2011, p. 30-31), “o próprio professor apresenta essas informações e os alunos realizam a investigação do problema, a dedução, a análise e a utilização de um modelo matemático, assessorados pelo professor”. É incentivado o trabalho em grupo com os alunos e cabe a eles perpassarem pelas fases da modelagem matemática (inteiração, matematização, resolução, interpretação de resultados e validação) de forma autônoma, em que o professor os auxilia em suas dúvidas.

Para atividades desse primeiro momento, ainda que os grupos trabalhem separadamente, geralmente as resoluções acabam sendo as mesmas.

O segundo momento de familiarização com atividades de modelagem já traz uma maior independência dos alunos em relação ao professor. Neste momento, são apresentados uma situação e alguns dados, porém, cabe ao aluno determinar um problema, as hipóteses que serão consideradas; se necessário, coletar mais dados e definir as variáveis. Para Silva, Almeida e Gerôlomo (2011, p. 33) “O que muda, essencialmente, do primeiro momento para o segundo é a independência dos alunos no que se refere ao uso ou obtenção de dados, bem como à definição de procedimentos extra matemáticos e matemáticos adequados”.

Assim, ao trabalharem com atividades desses dois momentos, os alunos podem ir desenvolvendo confiança em formular modelos, definindo aquilo que é necessário para sua situação-problema e verificando que é possível diferentes modelos responderem a uma situação inicial e, a partir de então, trabalhar com atividades de modelagem matemática caracterizadas como de terceiro momento de familiarização. “O professor neste [terceiro] momento já pode atuar como alguém que orienta, que sugere ponderações, ou simplesmente aquele que atende quando é solicitado” (SILVA; ALMEIDA; GERÔLOMO, 2011, p. 35) e cabe ao aluno desenvolver desde a escolha de uma situação-problema, definição dos dados, variáveis e hipóteses até a resolução da situação respondendo seu problema inicial.

Podemos sintetizar estes momentos de familiarização conforme Quadro 1, destacando o papel do professor e o do aluno em cada um deles.

Quadro 1 – Papel do professor e do aluno nos momentos de familiarização em atividades de modelagem

	1º momento	2º momento	3º momento
Papel do professor	• Propõe situação-problema; • Apresenta o problema; • Apresenta as possíveis variáveis. Professor dá suporte no papel do aluno, confirmando aquilo que eles fazem e questionando para estimulá-lo a chegar à situação final.	• Propõe situação-problema; • Traz alguns dados pertinentes à situação proposta. Professor passa ao papel de auxiliador e procura ajudar os alunos no decorrer do desenvolvimento das atividades dando uma maior autonomia do que nas atividades de primeiro momento.	Professor dá maior autonomia aos alunos desenvolvendo o papel de orientador para as atividades em desenvolvimento. O docente pode ou não indicar uma temática para a turma ou ainda deixar que os discentes, em grupos, escolham alguma temática que desejam explorar.
Papel do aluno	• Formula as hipóteses; • Deduz o modelo para a situação; • Valida o modelo; • Responde o problema. O aluno amparado pelo professor faz a matematização da situação-problema, valida e responde a atividade.	• Estabelece um problema; • Identifica as variáveis. • Formula as hipóteses; • Deduz o modelo para a situação; • Valida o modelo; • Responde o problema. Nesse momento os alunos já trabalharam com atividade de modelagem antes, já têm certa segurança e desenvolvem alguma autonomia do professor para tentarem resolver o problema.	• Propõe situação-problema; • Apresenta o problema; • Apresenta as variáveis; • Formula as hipóteses; • Deduz o modelo para a situação; • Valida o modelo; • Responde o problema. Nesse momento os alunos já trabalharam com atividades de momentos anteriores, têm autonomia na resolução e veem no professor um orientador no processo desenvolvimento de atividades de MM.

Fonte: dos autores baseado em Silva; Almeida; Gerôlomo, 2011.

Silva, Almeida e Gerôlomo (2011, p. 35) ressaltam que “as nossas práticas escolares enquanto professores podem nos requerer nesse [terceiro] momento também a busca de consensos em relação à definição de temas, de procedimentos e ao uso de conceitos matemáticos”, porém cabe ao estudante a tomada de decisões.

2. TAREFAS PRESENTES EM LDM COM POTENCIAL PARA A MODELAGEM

Neste capítulo apresentamos as tarefas presentes em livros didáticos de Matemática que foram adaptadas para duas atividades que foram desenvolvidas por meio da modelagem.

Ao exibirmos, por exemplo, as quatro tarefas de quatro livros diferentes com a mesma temática, imposto de renda, buscamos apresentar as tarefas que voltamos nossos olhares e selecionamos, para incentivar o leitor a também fazer o mesmo exercício (de identificar tarefas que sejam possíveis de planejar e desenvolver por meio da modelagem).

2.1. Primeira atividade planejada: “Imposto de renda”

Ao realizar uma análise em livros didáticos do Ensino Médio aprovados no PNLD de 2018, evidenciamos que em quatro coleções (MODERNA, 2016 – LDM1, IEZZI et al., 2016 – LDM3, PAIVA, 2015 – LDM4, SMOLE; DINIZ,2017 – LDM5), a situação-problema relativa ao imposto de renda foi abordada na introdução do objeto matemático função definida por mais de uma sentença.

No LDM1, o cálculo do imposto de renda é apresentado como exemplo para sistematizar o conceito matemático explorado. É mostrado um quadro com a base de cálculo mensal, os valores de alíquotas e parcelas a deduzir do imposto, conforme Figura 3.

Figura 3 – Situação-problema sobre imposto de renda proposta em um dos livros didáticos

JOÃO PRUDENTE/PULSAR IMAGENS

O Ministério da Fazenda é o órgão responsável por planejar, formular e executar as políticas econômicas nacionais. Entre suas funções está a fiscalização da arrecadação tributária. Na foto, Ministério da Fazenda em Brasília, DF, 2015.

Algumas funções são definidas por mais de uma sentença.

Observe a situação a seguir.

Para saber qual é o imposto de renda de uma pessoa física (y), aplicamos à renda mensal (x) os cálculos definidos pela tabela estabelecida pelo governo. Veja a tabela para o exercício de 2016.

Base de cálculo mensal (em reais)	Alíquota (em %)	Parcela a deduzir do imposto (em reais)
Até 1.903,98	—	—
De 1.903,99 até 2.826,65	7,5	142,80
De 2.826,66 até 3.751,05	15,0	354,80
De 3.751,06 até 4.664,68	22,5	636,13
Acima de 4.664,68	27,5	869,36

Fonte: Ministério da Fazenda.
Disponível em: <www.receita.fazenda.gov.br>.
Acesso em: 29 set. 2015.

Para uma renda mensal cuja base de cálculo x é igual a R$ 1.500,00, o contribuinte está isento, isto é, o imposto é zero real.

Para uma renda mensal cuja base de cálculo x é igual, por exemplo, a R$ 3.000,00, o imposto y a pagar é:

$y = 3.000{,}00 \cdot 0{,}15 - 354{,}80 = 450{,}00 - 354{,}80 = 95{,}20$

Logo, o imposto mensal a pagar é R$ 95,20.

Fonte: MODERNA, 2016, p. 72.

De forma análoga, no LDM4 há uma situação-problema envolvendo o cálculo do imposto sobre a renda. Contudo, nesse livro é apresentado o cálculo do imposto sobre a renda anual e não mensal, além de trazer uma explicação sobre o imposto de renda e para o que ele é utilizado, conforme apresentado na Figura 4.

Figura 4 – Cálculo do imposto de renda anual proposto em um dos livros didáticos

3 Funções definidas por mais de uma sentença

Acompanhe a situação a seguir.

Em todos os países, os impostos arrecadados dos cidadãos devem ser aplicados na manutenç[ão] da estrutura pública e em políticas sociais, econômicas e culturais do Estado. No Brasil, os impost[os] são arrecadados pela Secretaria da Receita Federal.

O imposto que o contribuinte paga sobre a renda adquirida é chamado de Imposto de Ren[da] (IR). Esse tipo de imposto é calculado em função da renda de cada cidadão, como mostra a tabe[la] progressiva para o cálculo anual do Imposto de Renda de Pessoa Física arrecadado em 2015, com base na renda do ano de 2014.

Imposto de Renda – cálculo anual		
Base de cálculo anual (R$)	**Alíquota (%)**	**Parcela a deduzir do imposto (R$)**
até 21.453,24	0,0	0,00
de 21.453,25 até 32.151,48	7,5	1.608,99
de 32.151,49 até 42.869,16	15,0	4.020,35
de 42.869,17 até 53.565,72	22,5	7.235,54
acima de 53.565,72	27,5	9.913,83

Disponível em: <www.receita.fazenda.gov.br>. Acesso em: 29 jan. 2016.

Fonte: PAIVA, 2015, p. 166.

Além disso, no LDM4 a conclusão a partir da situação apresentada é de que nem sempre é possível definir uma função por uma única sentença, conforme apresentado na Figura 5.

Figura 5– Conclusão da situação apresentada na Figura 9

Por exemplo, uma pessoa que recebeu em 2014 renda total de R$ 25.000,00 deverá pagar R$ 266,01 de imposto de renda, conforme mostram os cálculos abaixo:

$$\underbrace{7{,}5\%}_{\text{alíquota}} \cdot \underbrace{25.000{,}00}_{\text{renda}} - \underbrace{1.608{,}99}_{\text{parcela a deduzir}} = 1.875{,}00 - 1.608{,}99 = 266{,}01$$

De acordo com a tabela, se a renda anual de um cidadão é *x* reais, então o imposto de renda anual $f(x)$ a pagar, em real, pode ser calculado pela função:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } x \leq 21.453{,}24 \\ 0{,}075x - 1.608{,}99, \text{ se } 21.453{,}25 \leq x \leq 32.151{,}48 \\ 0{,}15x - 4.020{,}35, \text{ se } 32.151{,}49 \leq x \leq 42.869{,}16 \\ 0{,}225x - 7.235{,}54, \text{ se } 42.869{,}17 \leq x \leq 53.565{,}72 \\ 0{,}275x - 9.913{,}83, \text{ se } x > 53.565{,}72 \end{cases}$$

Percebe-se, por essa situação, que nem sempre é possível definir uma função por uma única sentença. O exercício resolvido a seguir mostra como construir o gráfico de funções definidas por mais de uma sentença.

Fonte: PAIVA, 2015, p. 166.

Já no LDM5, a situação foi proposta diferentemente dos outros dois primeiros livros didáticos, pois apresenta um quadro com as taxas de cada faixa salarial e uma representação gráfica da função, conforme Figura 6.

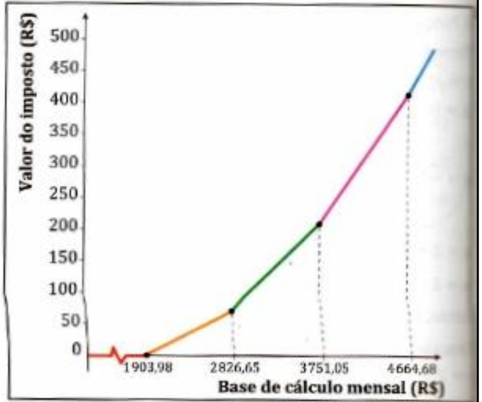
Figura 6 – Quadro e representação gráfica do cálculo do imposto de renda

4 Funções definidas por partes

Você sabe que a maioria dos trabalhadores brasileiros paga Imposto de Renda, que varia de acordo com a faixa salarial do trabalhador. Observe, para o ano 2015, a tabela que determina o valor desse imposto:

Valor do imposto por faixa salarial

Base de cálculo mensal (em R$)	Alíquota (%)	Parcela a deduzir do imposto (em R$)
Até 1 903,98	0	0
De 1 903,99 até 2 826,65	7,5	142,80
De 2 826,66 até 3 751,05	15	354,80
De 3 751,06 até 4 664,68	22,5	636,13
Acima de 4 664,68	27,5	869,36



Fonte: <http://idg.receita.fazenda.gov.br/acesso-rapido/tributos/irpf-imposto-de-renda-pessoa-fisica>. Acesso em: 24 abr. 20[illegible]

Os dados da tabela acima geram o gráfico ao lado dela. A função que determina o valor retido do imposto possui uma expressão algébrica diferente em cada intervalo da variável correspondente ao salário recebido. Esse é um exemplo de uma **função definida por partes**, sendo uma função afim diferente em cada intervalo.

Uma função definida por partes, e que é bastante utilizada em Matemática, é a **função modular**, que estudaremos em breve. Antes, vamos conhecer o significado do **módulo de um número real**.

Fonte: SMOLE; DINIZ, 2017, p. 222.

No LDM3, a situação-problema do imposto de renda é apresentada de maneira semelhante à dos outros livros, conforme Figura 7.

Figura 7 – Situação-problema introdutória de um capítulo do livro de Iezzi et al. (2016)

Função definida por mais de uma sentença

Você sabe o que é o imposto de renda? Sabe como ele é calculado?

Todo mês, ao receber seu salário, muitos trabalhadores brasileiros do mercado formal de trabalho notam, em seu holerite, que há um desconto de parte desse salário, um tributo sobre o rendimento (imposto de renda) pago ao Governo Federal.

Em meados de 2015, o imposto de renda era calculado com base na seguinte tabela:

Tabela de incidência mensal
(a partir do mês de abril do ano calendário de 2015)

Rendimento mensal (em R$)	Alíquota (em %)	Parcela a deduzir (em R$)
Até 1 903,98	—	—
De 1 903,99 até 2 826,65	7,5	142,80
De 2 826,66 até 3 751,05	15	354,80
De 3 751,06 até 4 664,68	22,5	636,13
Acima de 4 664,68	27,5	869,36

Fonte: Receita Federal do Brasil. Disponível em: [illegible]. Acesso em: 4 mar. 2015.

A tabela mostra a alíquota de imposto e a parcela a deduzir para cada faixa de rendimento mensal. Para se calcular o imposto de renda (IR), é necessário calcular uma porcentagem do salário e, do valor obtido, subtrair uma parcela. Acompanhe os exemplos:

Fonte: IEZZI ET AL., 2016, p. 115.

A partir da mesma situação proposta nos quatro livros didáticos de matemática do primeiro ano do Ensino Médio, entendemos que a situação-problema poderia ser encaminhada pela modelagem, pois segundo Almeida, Silva e Vertuan (2012):

> Argumentamos que em atividades conduzidas segundo essa alternativa [modelagem] identificam-se características fundamentais: a) envolve um conjunto de ações cognitivas do indivíduo; b) envolve representação e manipulação de objetos matemáticos; c) é direcionada para objetivos e metas estabelecidas e/ou reconhecidas pelo aluno (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p. 17).

Com isso, realizamos algumas adaptações para que o encaminhamento em sala de aula fosse realizado por meio de uma atividade de modelagem matemática, conforme Quadro 1. A escolha da situação tinha por intenção emergir o objeto matemático funções definidas por mais de uma sentença a partir dos modelos obtidos e como introdução de um novo conteúdo.

Quadro 2 – Atividade proposta aos alunos no primeiro dia de coleta

Imposto de Renda

Você sabe o que é o Imposto de Renda (IR) e como ele é calculado?

Todo mês, ao receber seu salário muitos trabalhadores brasileiros do mercado formal de trabalho notam, em seu holerite, que há um desconto de parte desse salário, um tributo sobre o rendimento, IR, pago ao Governo Federal.

Em todos os países, os impostos arrecadados dos cidadãos devem ser aplicados na manutenção da estrutura pública e em políticas sociais, econômicas e culturais do Estado. No Brasil, os impostos são arrecadados pela Secretaria da Receita Federal.

A partir do mês de abril de 2015, o imposto de renda era calculado com base na seguinte tabela:

Tabela de incidência mensal (a partir do mês de abril do ano de 2015)

Renda mensal (em R$)	Alíquota (em %)	Parcela a deduzir (em R$)
Até 1903,98	–	–
De 1903,99 até 2826,65	7,5	142,80
De 2826,66 até 3751,05	15	354,80
De 3751,06 até 4664,68	22,5	636,13
Acima de 4664,68	27,5	869,36

Fonte: Receita Federal do Brasil. Disponível em: <http://idg.receita.fazenda.gov.br/acesso-rapido/tributos/irpf-imposto-de-renda-pessoa-fisica#tabelas-para-atualiza--o-do-custo-de-bens-e-direitos>. Acesso em: 23 mar. 2018.

A tabela mostra a alíquota de imposto e a parcela a deduzir para cada faixa de rendimento mensal.

Considerando todas as informações apresentadas, imagine que você trabalhe no departamento pessoal de uma empresa e uma de suas funções é a de calcular o imposto de renda que deverá ser descontado do salário de cada funcionário da empresa. Como você faria para calcular o IR de cada salário sabendo que um dos empregados dessa empresa tem um desconto do imposto de renda igual a R$ 80,26 sobre uma renda de R$ 2.900,40?

Fonte: produção dos autores.

Depois que a atividade foi elaborada desenvolvemos com uma turma de primeiro ano de Ensino Médio.

2.2. Segunda atividade planejada: “Quanto pago pela água que consumo?”

Depois de identificar em livros didáticos tarefas com o tema imposto de renda e elaborar uma atividade de modelagem a partir delas, evidenciamos também que das tarefas alocadas no GT03, três se relacionavam à temática “conta de água”, uma pertencia ao LDM1 e as outras duas ao LDM3.

Escolhemos esse tema para desenvolver uma segunda atividade de modelagem com os alunos por acreditar que se trata de algo que é reconhecido pelos alunos como uma situação cotidiana, pagar conta de água no local em que moram.

No LDM1 e no LDM3 as tarefas envolvendo conta de água foram direcionadas como aplicação e exemplo de aplicação do objeto de conhecimento matemático: função definida por mais de uma sentença.

No LDM1, a tarefa apresenta um quadro associando a quantidade de consumo *c* de metros cúbicos de água com quatro fórmulas que indicam o valor *V* da conta a pagar, em reais, conforme Figura 8.

Figura 8 – Situação-problema sobre conta de água proposta no LDM1

1. Uma empresa de tratamento de água e esgoto de certa cidade calcula o custo residencial mensal de seus serviços da seguinte forma:

Consumo c de água	Valor V da conta (R$)
$0\ m^3 < c \leq 10\ m^3$	$V = 10$
$10\ m^3 < c \leq 20\ m^3$	$V = 10 + (c - 10) \cdot 1{,}20 = V_1$
$20\ m^3 < c \leq 30\ m^3$	$V = V_1 + (c - 20) \cdot 1{,}50 = V_2$
$30\ m^3 < c$	$V = V_2 + (c - 30) \cdot 2{,}00$

O valor total da conta é igual ao dobro do valor calculado para a água.

O consumo de água na casa de Caio, nos três últimos meses, foi igual a $9\ m^3$, $18\ m^3$ e $36\ m^3$. Então, Caio pagou, em reais, respectivamente:

alternativa a

a) 20,00; 39,20; 98,00

b) 10,00; 19,60; 49,00

c) 20,00; 40,00; 80,00

d) 18,00; 37,20; 96,00

Fonte: MODERNA, 2016, p. 81.

Além disso, o enunciado da tarefa também informa que o valor total a pagar pelo consumo de água é igual ao dobro do valor V em qualquer faixa de consumo. Desse modo, há uma simplificação didática na exploração do tema, pois para o cálculo de contas de água, em geral, há o cálculo da taxa de consumo de água acrescido de uma porcentagem referente ao consumo de esgoto.

Já no LDM3 há uma tarefa semelhante à do LDM1 com um quadro de referência para tarifa a pagar dependendo da faixa de consumo de metros cúbicos de água. Porém não são indicadas fórmulas para os alunos, mas exigido que, a partir dos dados fornecidos eles escrevam uma lei de formação para uma função que represente a situação, conforme Figura 9.

Figura 9 – Outra situação-problema sobre conta de água proposta no LDM3

8 No quadro seguinte estão representados os valores do metro cúbico (m^3) de água praticados em residências de certo município, de acordo com a faixa de consumo.

a) Determine o valor da conta de água de duas residências, $\mathbf{R}_1$ e $\mathbf{R}_2$, cujos consumos foram 28 m^3 e 35 m^3, respectivamente.

b) Qual o consumo correspondente a uma conta de água no valor de R$ 112,80?

Faixa de consumo (m^3)	Tarifa (R$)
Até 20 m^3	1,20 por m^3
De 21 m^3 a 50 m^3	1,80 por m^3 excedente
Acima de 50 m^3	2,90 por m^3 excedente

c) Qual é a lei da função que relaciona o valor total (**v**), em reais, ao consumo de **x** metros cúbicos.

Fonte: IEZZI et al, 2016, p. 118.

Além disso, no LDM3 também é apresentado um exemplo envolvendo o tema conta de água. Para ilustrar a aplicação de uma situação cotidiana envolvendo funções definidas por mais de uma sentença, é apresentado como pode ser determinado o valor a pagar pelo consumo de água em metros cúbicos, conforme Figura 10.

Figura 10 – Situação-problema sobre conta de água proposta no LDM3

EXEMPLO 1

Considere agora o quadro a seguir, que apresenta parte da conta de água de uma residência que gastou 17 m^3 de água. Além do valor a pagar, a conta mostra como calculá-lo em função do consumo de água (em m^3). Existe uma tarifa mínima e diferentes faixas de tarifação.

Companhia de saneamento – Tarifa de água/m^3

Faixa de consumo (em m^3)	Tarifas (em reais)	Consumo	Valor (em reais)
até 10	6,00	tarifa mínima	6,00
de 11 a 20	0,93 por m^3	7	6,51
de 21 a 50	2,33 por m^3		
acima de 50	2,98 por m^3		
		Total	12,51

Observe que, à medida que o consumo aumenta, o valor do metro cúbico de água fica mais caro. É uma forma de privilegiar famílias cujo consumo é menor com tarifas mais baixas, estimulando-as a diminuir o consumo de água e alertando a população da necessidade do consumo mais consciente da água.

Veja qual seria o valor da conta se o consumo dobrasse, isto é, se passasse a 34 m^3 de água:

$$\underbrace{6{,}00}_{\text{primeiros 10 m}^3} + \underbrace{0{,}93 \cdot 10}_{\text{de 11 m}^3\text{ a 20 m}^3} + \underbrace{2{,}33 \cdot 14}_{\text{de 21 m}^3\text{ a 34 m}^3} = 6{,}00 + 9{,}30 + 32{,}62 = 47{,}92$$

PENSE NISTO:

Nesse exemplo, o valor da conta e o número de m^3 consumidos são grandezas diretamente proporcionais?

Não; dobrando-se o consumo, o valor da conta não dobra. É oportuno revisar o conceito de grandezas diretamente proporciona[is] e função linear.

Fonte: IEZZI et al, 2016, p. 116.

Não são indicadas expressões algébricas neste exemplo e nem a função que pode representar o consumo de água, mas como tal situação pode ser interpretada e resolvida associando-se implicitamente à ideia do objeto matemático já estudado.

Desse modo, dando continuidade à nossa pesquisa com alunos do primeiro ano do Ensino Médio, realizamos o planejamento da atividade para que o encaminhamento em sala de aula fosse realizado por meio de uma atividade de modelagem matemática. No Quadro 3 apresentamos o texto da atividade entregue aos alunos. Para isso, consideramos o tema conta de água e a empresa responsável pela distribuição e manutenção de água e esgoto na cidade de Londrina (PR), a Sanepar, visto que é o município em que se localiza a escola.

Nessa atividade, os alunos, a partir do texto, foram orientados oralmente a utilizar objetos matemáticos, como determinar o cálculo de conta de água para qualquer quantia em metros cúbicos consumida.

Quadro 3 – Atividade sobre a conta de água

Quanto pago pela água que consumo?

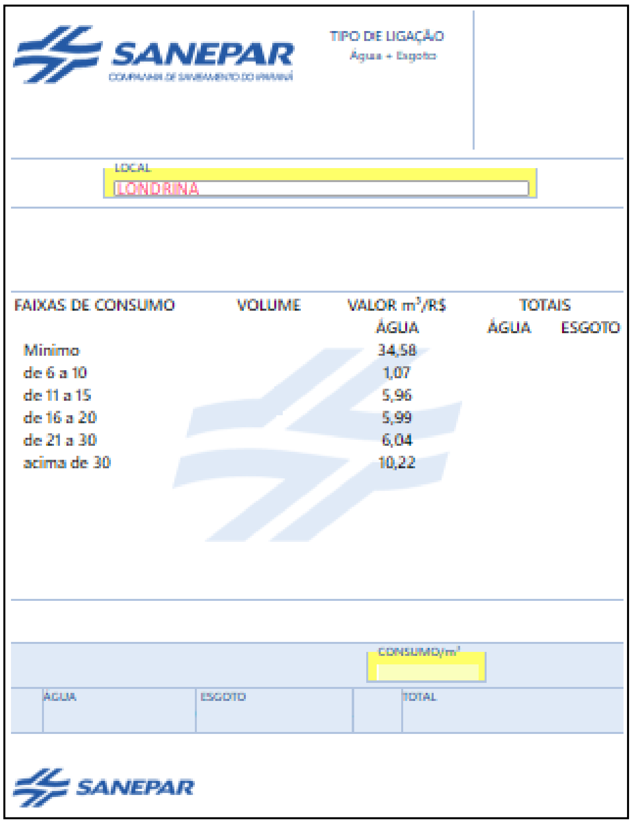
Em Londrina, a empresa responsável pelo abastecimento e tratamento de água e de esgoto é a Sanepar.

Segundo o site SANEPAR (2018),

> A Sanepar fornece água tratada a 100% da população urbana dos municípios atendidos. Coleta mais de 70% e trata 100% do esgoto coletado, a média nacional de coleta é de 51,9% e de tratamento é de 74,9% conforme Sistema Nacional de Informações sobre Saneamento - SNIS 2016 (SANEPAR, 2018).

Na Figura 1 estão apresentadas as tarifas, por consumo de m³ de água, para o cálculo de custo residencial mensal.

Figura 1 – Tarifas apresentadas em um modelo de fatura


SANEPAR
COMPANHIA DE SANEAMENTO DO PARANÁ
TIPO DE LIGAÇÃO
Água + Esgoto
LOCAL
LONDRINA

FAIXAS DE CONSUMO	VOLUME	VALOR m³/R$ ÁGUA	TOTAIS ÁGUA	TOTAIS ESGOTO
Mínimo		34,58		
de 6 a 10		1,07		
de 11 a 15		5,96		
de 16 a 20		5,99		
de 21 a 30		6,04		
acima de 30		10,22		

CONSUMO/m³
ÁGUA
ESGOTO
TOTAL
SANEPAR

Sabendo que no cálculo da conta de água são cobrados o consumo de água e uma taxa referente ao esgoto, que corresponde a 80% do valor consumido de água, se conhecermos o consumo em m³ de água, qual o total pago na conta de água?

Fonte: Sanepar. Disponível em: <http://site.sanepar.com.br/>. Acesso em: 01 jul. 2018.

Fonte: produção dos autores.

A seguir apresentamos um planejamento para desenvolver as atividades “Imposto de renda” e “Quanto pago pela água que consumo?” em sala de aula por meio da modelagem.

3. PLANEJAMENTO DE DUAS ATIVIDADES DE MODELAGEM

Em seguida, descrevemos um possível encaminhamento para as atividades “Imposto de renda” e “Quanto pago pela água que consumo?” e possíveis dúvidas que estudantes pudessem manifestar, a partir das cinco fases propostas por Almeida, Silva e Vertuan (2012).

3.1. Planejamento da atividade: “Imposto de renda”

Inteiração

Para a inteiração da situação-problema será indicado aos alunos a realização de uma primeira leitura individual, na sequência uma leitura coletiva e, em seguida, o professor irá questionar os alunos para saber o que entenderam do problema. Em caso de dúvidas a respeito do significado de alguma palavra, esta pode ser sanada consultando um dicionário para melhor entendimento.

Possíveis dúvidas dos alunos: palavras que possam gerar dúvidas quanto aos seus significados.

Possíveis soluções segundo o dicionário Michaelis online:

- Renda – Dinheiro que uma pessoa ou uma instituição recebe, geralmente com regularidade, como pagamento por trabalho ou serviços prestados ou como juros de ações ou investimentos; rendimento;
- Holerite – Documento que especifica o salário bruto de um empregado ou funcionário, com as deduções de impostos, contribuições previdenciárias e acréscimos, como comissões, gratificações, salário-família etc., servindo também como autorização para o recebimento do valor líquido;
- Tributo – Imposto de caráter compulsório que a população paga ao Estado por serviços e mercadorias;
- Alíquota – Percentual com que um certo tributo incide sobre o valor de algo tributado.

Quanto à dinâmica de sala de aula, será pedido para que os alunos se organizem em grupos de quatro integrantes, o professor acompanhará as resoluções passando pelas carteiras, instigando, questionando e tirando dúvidas dos alunos. Assim, poderão refletir por quais caminhos estão optando na resolução da situação-problema, além de deduzirem um modelo matemático para resolverem o problema, o que é o objetivo da atividade.

Em relação ao enunciado, espera-se que os alunos sejam fomentados a buscar uma solução para o problema proposto. Nesse sentido, o docente instigará sua turma a analisar o texto e verificar que informações são relevantes, tais como: de que maneira é feito o cálculo de imposto de renda; observarem na tabela as variações no computo do IR; qual é a pergunta que eles devem responder. Concluindo assim, a primeira etapa do processo de modelagem conhecida como inteiração.

- **Matematização**

Depois de inteirados, os alunos deverão formular suas hipóteses para poderem então, apresentar um modelo. As hipóteses a seguir são para que os discentes estabeleçam uma resolução a partir de funções definidas por mais de uma sentença, uma das possibilidades de se resolver essa atividade.

Hipóteses:

- o cálculo do imposto de renda é semelhante para qualquer faixa salarial, o que diferencia é a alíquota e a parcela a deduzir;
- o modelo matemático pode ser descrito por uma função que é definida por mais de uma sentença (nesse caso, cada sentença relaciona-se a uma faixa salarial);
- os valores de salários e os valores computados de imposto de renda são maiores ou iguais a zero reais;
- o modelo encontrado descreverá como obter o imposto de renda a partir de qualquer salário informado para as taxas vigentes, mas caso haja alteração nestas taxas será necessário buscar um outro modelo.

Os alunos devem perceber que para cada faixa salarial (cada linha da tabela) a sentença que pode ser associada será linear e de primeiro grau, o que se diferenciará entre uma sentença e outra será o valor da alíquota que se multiplica ao valor do salário e a subtração da parcela a deduzir que se diferencia para cada linha da tabela.

Possível dúvida do professor: os estudantes podem não associar estas hipóteses a funções definidas por mais de uma sentença.

Possível solução: para esta dúvida há, pelo menos, duas possíveis soluções.

A primeira seria deixar que os alunos tentem estabelecer um modelo matemático sem associá-lo a funções desse tipo, tais como funções afins para cada faixa salarial, construção de tabela com indicações escritas de como calcular o imposto de renda para diferentes faixas salariais e construção de um gráfico que descreva os cálculos de imposto de renda (apresentaremos alguns modelos na etapa de resolução).

A segunda seria por meio de questionamentos e/ou direcionamentos, proporcionar aos alunos refletirem e considerarem funções definidas por mais de uma sentença como uma ferramenta para a resolução do problema.

Possível dúvida dos alunos: que informações têm relevância na minha hipótese?

Possível solução: por meio de questionamentos e indicações, o professor levará seus alunos a refletirem que a situação-problema se refere a um modelo que relaciona valor salarial e valor de imposto de renda. Os dados apresentados na tabela são informações importantes a serem consideradas e, além disso, levará os alunos a pensarem que dependendo do salário o IR deve ser computado de maneira diferente.

As variáveis utilizadas nesta situação serão:

- Variável dependente: “i” - IR, dado em reais;
- Variável independente: “s” - salário, dado em reais.

Possível dúvida dos alunos: lembrar parcialmente/ ou não saber qual a definição de função definida por mais de uma sentença.

Possível solução: o professor pode ir ao quadro apresentar a turma qual a definição desse tipo de função.

Função definida por mais de uma sentença

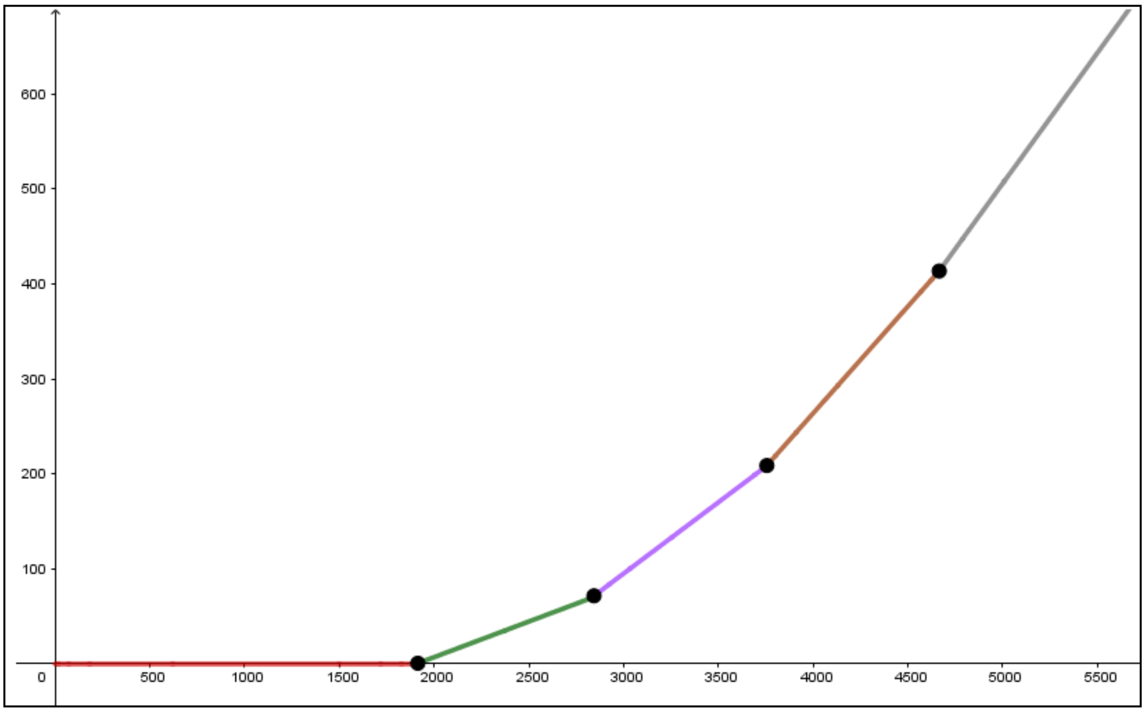
Uma função é definida por mais de uma sentença quando cada uma das sentenças está associada à um subdomínio D1, D2, D3... Dn e a união destes n-subconjuntos forma o domínio D da função original.

➢ **Resolução**

A partir de tudo o que foi estabelecido anteriormente, ao modelar matematicamente por meio de uma função, os alunos devem perceber então, que a função tem como imagem valores nulos ou positivos, pois trata-se de salários e taxas a pagar do salário, e que cada faixa salarial pode ser modelada por uma função afim. No entanto, os alunos podem utilizar outros objetos matemáticos para modelar a situação, tais como uma tabela de informações, um texto ou ainda um gráfico, ficando a critério deles decidirem por qual delas desejam criar o modelo.

Se optarem por um modelo gráfico poderão perceber que, entre os limitantes superior de uma faixa e o inferior da faixa salarial seguinte, o imposto de renda cobrado é aproximadamente o mesmo, e o crescimento do valor a pagar de IR em cada faixa é linear. Assim obterão um gráfico como o Gráfico 1, a seguir.

Gráfico 1 – Modelo gráfico que representa a situação problema proposta



Fonte: dos autores.

Caso escrevam o modelo matemático para esta situação a partir de uma tabela, sendo *s* o valor do salário e *i* o valor do IR, poderão modelar de acordo com a Tabela 1.

Tabela 1 – Modelo matemático para a situação proposta

Renda mensal (em R$)	Alíquota (em %)	Parcela a deduzir (em R$)	Cálculo do imposto de renda
Até 1903,98	–	–	0
De 1903,99 até 2826,65	7,5	142,80	$i = 0{,}075s - 142{,}80$
De 2826,66 até 3751,05	15	354,80	$i = 0{,}15s - 354{,}80$
De 3751,06 até 4664,68	22,5	636,13	$i = 0{,}225s - 636{,}13$
Acima de 4664,68	27,5	869,36	$i = 0{,}275s - 869{,}36$

Fonte: dos autores.

Se optarem por um modelo algébrico que represente a situação poderão obter a função $i: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ dada por

$$i = \begin{cases} 0, \text{se } 0 \leq s \leq 1903{,}98 \\ 0{,}075s - 142{,}80, \text{se } 1903{,}98 < s \leq 2826{,}65 \\ 0{,}15s - 354{,}80, \text{se } 2826{,}65 < s \leq 3751{,}05 \\ 0{,}225s - 636{,}13, \text{se } 3751{,}05 < s \leq 4664{,}68 \\ 0{,}275s - 869{,}36, \text{se } s > 4664{,}68 \end{cases}$$

- **Validação**

Para verificar se o modelo se ajustará bem aos dados que foram fornecidos pela atividade, o professor pedirá que os alunos verifiquem aritmeticamente, calculando os valores que estabeleceram com o modelo matemático para faixas salariais informadas na atividade. Assim:

$$\mathrm{i}(1903{,}99) = 1903{,}99 \times 0{,}075\text{-}142{,}80 \cong 0$$

$$\mathrm{i}(2826{,}65) = 2826{,}65 \times 0{,}075\text{-}142{,}80 \cong 69{,}20$$

$$\mathrm{i}(2826{,}66) = 2826{,}66 \times 0{,}15\text{-}354{,}80 \cong 69{,}20$$

$$\mathrm{i}(3751{,}05) = 3751{,}05 \times 0{,}15\text{-}354{,}80 \cong 207{,}86$$

$$\mathrm{i}(3751{,}06) = 3751{,}06 \times 0{,}225\text{-}636{,}13 \cong 207{,}86$$

$$\mathrm{i}(4664{,}68) = 4664{,}68 \times 0{,}225\text{-}636{,}13 \cong 413{,}42$$

$\mathrm{i}(4664{,}69) = 4664{,}69 \times 0{,}275\text{-}869{,}36 \cong 413{,}42$

Desse modo, tem-se que o modelo se aproxima bastante dos valores previstos das taxas de imposto de renda. Logo, os alunos terão encontrado um bom modelo que descreve a situação proposta.

➢ **Solução para o problema**

Portanto, existe sim um modelo matemático que possa descrever o valor do imposto de renda para qualquer salário informado. A função $i: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, dada por

$$i = \begin{cases} 0, \text{se } 0 \leq s \leq 1903{,}98 \\ 0{,}075s - 142{,}80, \text{se } 1903{,}98 < s \leq 2826{,}65 \\ 0{,}15s - 354{,}80, \text{se } 2826{,}65 < s \leq 3751{,}05 \\ 0{,}225s - 636{,}13, \text{se } 3751{,}05 < s \leq 4664{,}68 \\ 0{,}275s - 869{,}36, \text{se } s > 4664{,}68 \end{cases}$$

pode ter sua imagem associada as taxas de imposto de renda, dado qualquer valor salarial.

3.2. Planejamento da atividade: “Quanto pago pela água que consumo?”

➢ **Inteiração**

Para a inteiração da situação-problema será indicado aos alunos a realização de uma primeira leitura individual, na sequência uma leitura coletiva e, em seguida, o professor irá questionar os alunos para saber o que entenderam do problema. Em caso de dúvidas a respeito do significado de alguma palavra, esta pode ser sanada consultando um dicionário para melhor entendimento.

Possível dúvida dos alunos: palavras que possam gerar dúvidas quanto aos seus significados.

Possível solução segundo o dicionário Michaelis online:

- Saneamento – Aplicação de medidas para melhorar as condições higiênicas de um local ou de uma região, tornando-os livres de doenças e próprios para serem habitados.

Possíveis dúvida dos alunos: objetos matemáticos que não se recordam.

Possíveis soluções:

Sanar as dúvidas intervindo nos grupos ou com toda a turma, quando julgar necessário.

- Porcentagem – Um número seguido do símbolo % (lemos: por cento) representa parte de um inteiro composto de 100 partes iguais. Por exemplo: para calcular 15% de uma quantidade pode-se utilizar a fração decimal 15/100 ou o número decimal 0,15.
- Metros cúbicos – Unidade de medida de capacidade cuja notação é escrita como m³ (lemos: metros cúbicos).

Quanto à dinâmica de sala de aula, será pedido para que os alunos se organizem em grupos de quatro integrantes, o professor acompanhará as resoluções passando pelas carteiras, instigando, questionando e tirando dúvidas dos alunos. Assim, poderão refletir por quais caminhos estão optando na resolução da situação-problema, além de deduzirem um modelo matemático para resolverem o problema, o que é o objetivo da atividade.

Em relação ao enunciado, espera-se que os alunos sejam fomentados a buscar uma solução para o problema proposto. Nesse sentido, o docente instigará sua turma a analisar o texto e verificar que informações são relevantes, tais como: de que maneira é feito o cálculo do valor a pagar pela água; de que maneira é feito o cálculo do valor a pagar pelo esgoto; observarem no modelo de fatura, as faixas e as taxas de consumo; que pergunta eles devem responder. Concluindo assim, a primeira etapa do processo de modelagem conhecida como inteiração.

➢ **Matematização**

Depois de inteirados, os alunos deverão formular suas hipóteses para poderem então, apresentar um modelo. As hipóteses a seguir são para que os discentes estabeleçam uma resolução a partir de funções definidas por mais de uma sentença, uma das possibilidades de se resolver essa atividade.

Hipóteses:

- o cálculo do valor a pagar pelo consumo de água e esgoto é semelhante para qualquer faixa de consumo (com exceção da taxa mínima), o que diferencia é a taxa em cada uma das faixas de consumo;
- o modelo matemático pode ser descrito por uma função que é definida por mais de uma sentença (nesse caso, cada sentença relaciona-se a uma faixa salarial);

- os valores de consumos e os valores a pagar na conta de água são maiores ou iguais a zero reais;
- é preciso identificar quanto metros cúbicos são calculados em cada faixa de consumo (por exemplo: para uma residência que consumiu 17 m³, os cinco primeiros, serão referentes a taxa mínima, outros cinco metros cúbicos serão calculados com a taxa de 6 a 10 metros cúbicos, mais cinco metros cúbicos serão calculados com a taxa de 11 a 15 metros cúbicos e dois metros cúbicos calculados na faixa de 16 a 20 metros cúbicos);
- o modelo encontrado descreverá como obter o valor a pagar na conta de água a partir de qualquer consumo em metros cúbicos informado, mas caso haja alteração nestas taxas será necessário buscar um outro modelo.

Os alunos devem perceber que para cada faixa de consumo (cada linha no modelo de fatura) a sentença que pode ser associada será linear e de primeiro grau, o que se diferenciará entre uma sentença e outra será o valor da taxa de água para aquela faixa de consumo.

Possível dúvida do professor: os estudantes podem não associar estas hipóteses a funções definidas por mais de uma sentença.

Possível solução: para esta dúvida há, pelo menos, duas possíveis soluções.

A primeira seria deixar que os alunos tentem estabelecer um modelo matemático sem associá-lo a funções desse tipo, tais como funções afins para cada faixa salarial e construção de tabela com indicações escritas de como calcular a conta de água para diferentes faixas de consumo (apresentaremos alguns modelos na etapa de resolução).

A segunda seria por meio de questionamentos e/ou direcionamentos, proporcionar aos alunos refletirem e considerarem funções definidas por mais de uma sentença como uma ferramenta para a resolução do problema.

Possível dúvida dos alunos: que informações têm relevância na minha hipótese?

Possível solução: por meio de questionamentos e indicações, o professor levará seus alunos a refletirem que a situação-problema se refere a um modelo que relaciona quantidade de consumo de água, dada em metros cúbicos, e valor a pagar pela conta de água. Os dados apresentados na folha entregue aos alunos são informações importantes a serem consideradas e, além disso, levará eles a pensarem que dependendo do salário o IR deve ser computado de maneira diferente.

As variáveis utilizadas nesta situação serão:

- Variável dependente: “p” – valor a pagar pela conta, dado em reais;
- Variável independente: “c” – quantidade de consumo de água, dada em metros cúbicos.

Possível dúvida dos alunos: lembrar parcialmente/ ou não saber qual a definição de função definida por mais de uma sentença.

Possível solução: o professor pode ir ao quadro apresentar a turma qual a definição desse tipo de função.

Função definida por mais de uma sentença

Uma função é definida por mais de uma sentença quando cada uma das sentenças está associada à um subdomínio D1, D2, D3... Dn e a união destes n-subconjuntos forma o domínio D da função original.

Depois o professor pode apresentar alguns exemplos de funções definidas por mais de uma sentença. Se o intuito da atividade é aplicar esse objeto matemático o professor pode retomar situações já vistas, como a situação do imposto de renda, por exemplo.

- **Resolução**

A partir de tudo o que foi estabelecido anteriormente, ao modelar matematicamente por meio de uma função, os alunos devem perceber então, que a função tem como imagem valores nulos ou positivos, pois trata-se de quantidade de consumo e valor a pagar da conta de água, e que cada faixa de consumo pode ser modelada por uma função afim. No entanto, os alunos podem utilizar outros objetos matemáticos para modelar a situação, tais como uma tabela de informações ou um texto, ficando a critério deles decidirem por qual delas desejam criar o modelo.

Caso escrevam o modelo matemático para esta situação a partir de uma tabela, sendo *c* o valor do consumo de água e *p* o valor a pagar pela conta de água, poderão modelar de acordo com a Tabela 2.

Tabela 2 – Modelo matemático para a situação proposta

Faixa de consumo (em metros cúbicos)	Taxa da água (em R$)	Cálculo do valor a pagar pela conta de água (em R$)
Mínimo (até 5 m³)	–	$p = 62{,}24$
De 6 até 10	1,07	$p = 1{,}8 \cdot [1{,}07(c - 5)] + 62{,}24$
De 11 até 15	5,96	$p = 1{,}8 \cdot [5{,}96(c - 10)] + 71{,}87$
De 16 até 20	5,99	$p = 1{,}8 \cdot [5{,}99(c - 15)] + 125{,}51$
De 21 até 30	6,04	$p = 1{,}8 \cdot [6{,}04(c - 20)] + 179{,}42$
Acima de 30	10,22	$p = 1{,}8 \cdot [10{,}22(c - 30)] + 288{,}14$

Fonte: dos autores.

Se optarem por um modelo algébrico que represente a situação poderão obter a função $p: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ dada por

$$p = \begin{cases} 62{,}24, \text{se } 0 \leq c \leq 5 \\ 1{,}8 \cdot [1{,}07(c - 5)] + 62{,}24, \text{se } 5 < c \leq 10 \\ 1{,}8 \cdot [5{,}96(c - 10)] + 71{,}87, \text{se } 10 < c \leq 15 \\ 1{,}8 \cdot [5{,}99(c - 15)] + 125{,}51, \text{se } 15 < c \leq 20 \\ 1{,}8 \cdot [6{,}04(c - 20)] + 179{,}42, \text{se } 20 < c \leq 30 \\ 1{,}8 \cdot [10{,}22(c - 30)] + 288{,}14, \text{se } c \geq 30 \end{cases}$$

- **Validação**

O professor pode obter a partir do endereço eletrônico <http://atvn.sanepar.com.br/simuladorconta> (acesso em: 30 jul. 2019) alguns valores a pagar pela conta de água fornecido a quantidade de consumo de água e levar esses valores para que os alunos validem aritmeticamente com o modelo que deduziram em sala de aula.

Assim:

$$\text{p}(8) = 1{,}8 \cdot \left[1{,}07\left(8\text{-}5\right)\right] + 62{,}24 \cong 71{,}23$$

$$\text{p}(14) = 1{,}8 \cdot \left[5{,}96\left(14\text{-}10\right)\right] + 71{,}87 \cong 114{,}78$$

$$\text{p}(22) = 1{,}8 \cdot \left[6{,}04\left(\text{c-}20\right)\right] + 179{,}42 \cong 201{,}16$$

Desse modo, tem-se que o modelo se aproxima bastante dos valores previstos dos valores fornecidos pelo endereço eletrônico. Logo, os alunos terão encontrado um bom modelo que descreve a situação.

- **Solução para o problema**

Portanto, existe um modelo matemático que descreve o valor a pagar pela conta de água para qualquer quantidade de consumo. A função $p: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, dada por

$$p = \begin{cases} 62{,}24, \text{se } 0 \leq c \leq 5 \\ 1{,}8 \cdot [1{,}07(c-5)] + 62{,}24, \text{se } 5 < c \leq 10 \\ 1{,}8 \cdot [5{,}96(c-10)] + 71{,}87, \text{se } 10 < c \leq 15 \\ 1{,}8 \cdot [5{,}99(c-15)] + 125{,}51, \text{se } 15 < c \leq 20 \\ 1{,}8 \cdot [6{,}04(c-20)] + 179{,}42, \text{se } 20 < c \leq 30 \\ 1{,}8 \cdot [10{,}22(c-30)] + 288{,}14, \text{se } c \geq 30 \end{cases}$$

pode ter sua imagem associada aos valores a pagar pela conta de água, dado qualquer quantidade, em metros cúbicos, de água consumida.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, L. W. Considerations on the use of mathematics in modeling activities. *ZDM*, v. 50, p. 19-30, 2018.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K.A. P. Semiótica e as Ações Cognitivas dos alunos em Atividades de Modelagem Matemática: um olhar sobre os modos de inferência. *Ciência e Educação* (UNESP. Impresso), v. 18, p. 623-642, 2012.

ALMEIDA, L. W; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. E. *Modelagem Matemática na Educação Básica.* São Paulo: Contexto, 2012.

BISOGNIN, E.; BISOGNIN, V. Construção de modelos discretos para o ensino de matemática, in: ALMEIDA, L. M. W.; ARAÚJO, J. L.; BISOGNIN, E. (orgs.), *Práticas de Modelagem Matemática na Educação Matemática.* Londrina, Eduel, 2011.

BORSSOI, A. H. *Modelagem Matemática, Aprendizagem Significativa e Tecnologias:* articulações em diferentes Contextos Educacionais. 2013. 256 p. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

BURAK, D. *Modelagem matemática:* ações e interações no processo de ensino-aprendizagem. Campinas, 1992. Tese (Doutorado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Estadual de Campinas, 1992.

GOIS, V. H. S. *Modelagem Matemática no ensino de funções trigonométricas:* uma proposta por meio da Trajetória Hipotética de Aprendizagem. 2017. 66 p. Monografia (Especialização em Ensino de Ciências e Educação Matemática – Universidade Tecnológica Federal do Paraná). Londrina, 2017.

GOIS, V. H. S.; SILVA, K. A. P.; DALTO, J. O. Análise da Produção Escrita de estudantes do Ensino Superior: uma abordagem semiótica. *Alexandria*, 2019, no trelo.

GONCALVES, A. O.; CORRÊA, R. L. T. O livro didático de matemática e cultura escolar em pesquisas: primeiras aproximações. *Revista Diálogo Educacional (PUCPR. Impresso)*, v. 16, p. 554, 2016.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D.; PÉRIGO, R.; ALMEIDA, N. *Matemática:* ciências e aplicações – ensino médio, volume 1. 9ª ed., São Paulo: Saraiva, 2016.

KAISER, G.; BRAND, S. Modelling Competencies: Past Development and Further Perspectives. In G. A. Stillman, W. Blum & M. S. Biembengut (Eds), *Mathematical*

Modelling in Education Research and Practice. Cultural, Social and Cognitive Influences (pp. 129-149). Cham: Springer, 2015.

KEHLE, P. E.; CUNNINGHAM, D. J. Semiotics and Mathematical Modeling. *International Journal of Applied Semiotics*, v. 3, n. 1, p. 113-129, 2000.

LOPES, W. S. *A importância da utilização de múltiplas representações no desenvolvimento do conceito de função:* uma proposta de ensino. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), PUC, São Paulo, 2003.

LORIN, A. P. Z. *Competências dos alunos em atividades de Modelagem matemática.* 2015. 164f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2015.

MODERNA (Organizadora). *Conexões com a Matemática.* 3ª ed., São Paulo: Moderna, 2016.

PAIVA, M. *Matemática:* Paiva. 3ª ed., São Paulo: Moderna, 2015.

PONTE, J. P.; BRANCO, N.; MATOS, A. *Álgebra no Ensino Básico.* Lisboa: Ministério da Educação, Direcção-Geral-de Inovação e de Desenvolvimento Curricular - DGIDC, 2009.

RAMOS, D. C. *O raciocínio abdutivo em atividades de Modelagem Matemática.* 2016. 158f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.

SAJKA, M. A secondary school student understands of the concept of function – a case study. *Educational Studies in Mathematics,* 53, 229-254, 2003.

SILVA, K. A. P. da. *Modelagem Matemática e Semiótica:* algumas relações. Dissertação (Mestrado) – Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2008.

SILVA, K. A. P. *Uma interpretação semiótica de atividades de Modelagem Matemática:* implicações para a atribuição de significado. 285 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

SILVA, K. A. P.; ALMEIDA, L. M. W.; GERÔLOMO, A. M. L. “Aprendendo” a fazer modelagem matemática: a vez do aluno. *Educação Matemática em Revista.* São Paulo, v. 1, p. 28-36, 2011.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. *Matemática para compreender o mundo 1.* 1ª ed., São Paulo: Saraiva, 2016.

VERONEZ, M. R. D. *As funções dos signos em atividades de modelagem matemática.* 2013. 176p. Tese de Doutorado (Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

VERTUAN, R. E. *Um olhar sobre a Modelagem Matemática à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica.* Dissertação (Mestrado) – Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2007.