UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA
MULTICÂMPUS LONDRINA/CORNÉLIO PROCÓPIO
PPGMAT

VICTOR HUGO DOS SANTOS GOIS

LIVRO DIDÁTICO E ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA: ALGUMAS ARTICULAÇÕES

DEFESA

LONDRINA
2019

VICTOR HUGO DOS SANTOS GOIS

LIVRO DIDÁTICO E ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA: ALGUMAS ARTICULAÇÕES

Dissertação apresentada como requisito para exame de defesa do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática Multicâmpus Londrina/Cornélio Procópio – PPGMAT, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Campus Londrina.

Orientadora: Profa. Dra. Karina Alessandra Pessoa da Silva

LONDRINA
2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Biblioteca UTFPR - Câmpus Londrina

G616l Gois, Victor Hugo dos Santos
Livro didático e atividades de modelagem matemática: algumas articulações / Victor Hugo dos Santos Gois. - Londrina : [s.n.], 2019.
150 f. : il. ; 30 cm.

Orientadora: Profª Drª Karina Alessandra Pessoa da Silva.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, 2019.
Bibliografia: f. 114-121.

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Modelos matemáticos. 3. Livros didáticos. 4. Semiótica. 5. Teoria fundamentada em dados. I. Silva, Karina Alessandra Pessoa da, orient. II. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. III. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática. IV. Título.

CDD: 510.7

Ficha catalográfica elaborada por Cristina Benedeti Guilhem - CRB: 9/911

Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Multicâmpus Londrina/Cornélio Procópio

Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática – PPGMAT

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

TERMO DE APROVAÇÃO

LIVRO DIDÁTICO E ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA: ALGUMAS ARTICULAÇÕES

por

VICTOR HUGO DOS SANTOS GOIS

Esta Dissertação de Mestrado Profissional foi apresentada em 26 de agosto de 2019 como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática. O candidato foi arguido pela Banca Examinadora composta pelos professores abaixo assinados. Após deliberação, a Banca Examinadora considerou o trabalho aprovado.

____
Karina Alessandra Pessoa da Silva
Profa. Orientadora

____
Prof. Dr. Jader Otávio Dalto
Membro titular

____
Profa. Dra. Claudia Carreira da Rosa
Membro titular

– A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática –

Dedico este trabalho aos meus pais, Anizio e Eliane, aos meus sogros, José Carlos e Verônica, e a minha esposa Carolina por todos os sacrifícios, orações, incentivos, cuidados e amores que me deram nesse período.

AGRADECIMENTOS

Acredito ser esta uma das partes mais importantes no desenvolvimento de um trabalho como este. Portanto, gostaria de dedicar algumas palavras a quem contribuiu para a escrita desta dissertação.

Primeiro a Deus e a Nossa Senhora pelo apoio, iluminação, cuidado e força para comigo. Tenho plena certeza que Maria intercedeu por mim e Deus me permitiu realizar esse sonho: aproximar-me do título de Mestre. A eles toda glória e agradecimento por tudo que me proporcionaram.

Em segundo a minha esposa Carolina pelo apoio, compreensão, oração e incentivo. Sou muito grato por tudo que fez e faz para mim, por sonhar junto comigo esta conquista e por sempre caminhar ao meu lado. Eu a amo muito.

Um muito obrigado aos meus pais Anizio e Eliane por sempre me incentivarem e me ensinarem a importância do estudo e da Educação; aos meus irmãos Maria Gabriela e Vinicius, por sempre acreditarem em mim.

Agradeço também aos primos, tios, avós, cunhada, cunhado e minha sobrinha Athena por serem sempre minha fonte de sabedoria e inspiração. Em especial minha tia e madrinha Angélica, por me inspirar à docência e compartilhar das experiências vividas como professor e pós-graduado.

Sou grato também por todo apoio e incentivo dos meus sogros José Carlos e Verônica.

Agradeço aos amigos:

- Jonas, Aline e Leticia, os antigos e muito queridos;
- Rodrigo, Mariana, Patrícia e Jaqueline, os amigos do século passado;
- Leandro e Diane, os cozinheiros e aqueles que compartilharam das nuances da vida de pós-graduado;
- Fernando, Iara, Jéssica, Rafael Palma, Rodrigo, William, Denis e Talita por compartilharmos momentos de aprendizagem e crescermos como profissionais nesses dois anos;
- Felipe, pelas conversas e conselhos.

Também não posso deixar de mencionar e dizer muito obrigado aos amigos que partilharam comigo da vida profissional neste período e me deram suporte nas conversas, risadas, desabafos e conselhos:

- aos amigos da Kroton: Grasi (a que me incentiva a continuar estudando), Renata (a que alegra a turma e não deixa ninguém esquecer de comida), Jair (o que já passou por isso) e Eduardo (o mais “*good vibes*”);
- aos amigos da Scriba: Jacque (a “chefe mãezona”), Lilian (a irmã que já passou por isso), Thais (a que não tem paciência para dramas), Timóteo (o mais novo que agora mora em outro país), Elias (o que foi fazer doutorado e sumiu), Daiane (a que não estressa fácil), Marcus (o doutor em física), Ronaldo (o que me apresentou para Scriba e que foi estudar animações), Janaína (a nova “mentora”), Guilherme (que sempre me faz rir), Alisson (o mais novo pós-graduando), Lucilia (a “mãe” que exige e tudo sabe) e Jackson (o chefe compreensivo com meus estudos e que “olha tudo no detalhe”).

Sou grato ao Grupo de Estudo e Pesquisa em Modelagem Matemática, Investigação Matemática e Tecnologias – GEPMIT – pelo tempo que compartilhamos juntos lendo, discutindo e confraternizando. Sempre com bom humor, mas com muita responsabilidade em todos os trabalhos desenvolvidos.

Meu muito obrigado à professora Marilda, colega de profissão que me auxiliou no desenvolvimento dessa pesquisa.

Quero agradecer também aos professores Jader Dalto e Claudia Rosa pelas boas contribuições e enriquecimento deste trabalho na banca de qualificação e por novamente se disporem a ler e apresentarem suas valorosas contribuições.

Enfim, meu muito obrigado à professora Karina Alessandra Pessoa da Silva, minha orientadora, pela parceria na especialização e agora no mestrado, também por tudo que me oportunizou crescer, evoluir como professor e como pesquisador.

Ninguém nasce feito: é
experimentando-nos no mundo que
nós nos fazemos.
(FREIRE, Paulo, 2001)

RESUMO

GOIS, Victor Hugo dos Santos. **Livro didático e atividades de modelagem matemática:** algumas articulações. 2019. 150 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática do Programa de Mestrado de Ensino de Matemática) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Londrina, 2019.

A Modelagem Matemática enquanto alternativa pedagógica possibilita a participação ativa dos alunos nos processos de ensino e de aprendizagem. Além disso, há diversos trabalhos que apontam que, quando a modelagem é aliada à semiótica peirceana facilita ao professor evidenciar significados que os discentes atribuem aos objetos matemáticos e, a partir dessas percepções, traçar novas estratégias para aprendizagem dos alunos. Com isso, vemos a necessidade de tal alternativa pedagógica se tornar cada vez mais comum e conhecida por professores que atuam nos diferentes níveis de ensino. Para tal, propomos uma articulação entre modelagem e semiótica com o livro didático de matemática, que é uma importante ferramenta e muito usada por docentes em sala de aula. Pensando nas possibilidades dessas articulações, investigamos: "Que situações-problema, que tratam de funções definidas por mais de uma sentença, presentes em livros didáticos do PNLD–2018 têm potencial para serem encaminhadas enquanto atividades de Modelagem Matemática?". Para isso, analisamos livros didáticos de matemática do Ensino Médio que foram aprovados no Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) de 2018. A partir das atividades analisadas, planejamos e desenvolvemos duas atividades de modelagem em uma turma de 21 alunos do Ensino Médio de um Colégio Estadual de Londrina e entrevistamos a professora regente da turma. Inspirados na Teoria Fundamentada em Dados (*grounded theory*) expomos os códigos que emergiram, as análises e categorias realizadas dos signos identificados no desenvolvimento das duas atividades. Com isso, pudemos inferir que a seleção de situações-problema em livros didáticos que podem ser encaminhadas como atividades de modelagem deve ser feita a partir de temas que se aproximam do cotidiano dos alunos. Além disso, o "potencial para" desenvolver essas atividades de modelagem demanda que o professor conheça seus alunos e estabeleça uma articulação com as experiências dos discentes. Por fim, indicamos as considerações finais considerando todos os aspectos da pesquisa, além da descrição do produto educacional vinculado a esta dissertação de mestrado.

Palavras-chave: Educação Matemática. Modelagem Matemática. Livro didático. Semiótica Peirceana. Teoria Fundamentada.

ABSTRACT

GOIS, Victor Hugo dos Santos Gois. **Textbook and Mathematical Modeling activities:** some articulations. 2019. 150 p. Dissertation (Mestrado em Ensino de Matemática do Programa de Mestrado de Ensino de Matemática) - Federal Technology University - Paraná. Londrina, 2019.

The Mathematical Modeling, while an pedagogic alternative, allows the active participation of the students in the learning and teaching processes. Beyond that, there are several works that appoint that when the modeling is allied to the peircean semiotics facilitate the teacher to highlight meanings that the students give to the mathematical objects and, as of these perceptions, plot new strategies to the student's learning. With that, we see a need to such pedagogic alternative to become more and more common and known to teachers that work on the different levels of education. For such, we propose an articulation between modelling and semiotics with the mathematics textbook, which is an important tool and very used by professors in the classroom. Thinking on the possibilities of these articulations, we investigated: "What situations-problem, that deal with functions that are defined by more than one sentence, present in textbooks from PNLD-2018, have the potential to be forwarded as Mathematical Modeling activities?". For that, we analyzed High School mathematical textbooks that were approved on the National Program for Books and Didactic Material (PNLD – *Plano Nacional do Livro e do Material Didático*) from 2018. Starting from the analyzed activities, we planned and developed two modeling activities on 21 high school students from a State High School from Londrina and interviewed the class regent teacher. Inspired by the Grounded Theory, we exposed the codes that emerged, the analysis and categories performed from the signs identified on the development of the two activities. With that, we were able to infer that the selection of situations-problem on textbooks that can be forwarded as modeling activities must be done from themes that are close to the students' day-to-day life. Beyond that, the "potential to" develop these modeling activities demands that the teacher know his students and develop an articulation with them. Lastly, we indicate the final considerations, taking in mind all the aspects of the research, beyond the description of the educational product linked to this master's dissertation.

Keywords: Mathematical Education. Mathematical Modeling. Textbook. Peirce's Semiotic. Grounded Theory.

LISTA DE FIGURAS, GRÁFICOS E QUADROS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

LISTA DE ABREVIATURAS

LDM	Livro Didático de Matemática
TFD	Teoria Fundamentada em Dados
MP	Mestrado Profissional

LISTA DE SIGLAS

PNLD	Programa Nacional do Livro e do Material Didático
EPMEM	Encontro Paranaense de Modelagem Matemática na Educação Matemática
CNMEM	Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática
ICTMA	International Community of Teachers of Mathematical Modelling and Applications
ICMI	International Commission on Mathematical Instruction

SUMÁRIO

COMO CHEGUEI À MODELAGEM MATEMÁTICA?[1]

Acredito que as escolhas, a pesquisa e análises aqui apresentadas, com o suporte de minha orientadora, muito se devem também a tudo aquilo que contribuiu e contribui para minha identidade como professor iniciante na pesquisa científica. Assim, minha intenção é apresentar ao leitor deste trabalho alguns apontamentos que considero relevantes para as escolhas que fiz, do tema às considerações finais.

Desde muito pequeno sempre gostei de ler, de ouvir, de estudar e de aprender "um pouco de tudo". Quando penso em referências que influenciaram minha escolha pela docência, me vem à cabeça duas professoras: a primeira é minha tia/madrinha Angélica, professora de língua espanhola e redação; a segunda foi minha professora da antiga quarta série, a Patrícia ou "tia Pati".

As duas me inspiraram de maneira semelhante à docência, pois o que me fascinava era a boa relação que tinham com os alunos, os diálogos que estabeleciam em sala de aula. Além da paixão que as duas demonstravam por aquilo que faziam.

A escolha pela Matemática se deu inspirada no professor que tive nos anos finais do Ensino Fundamental, o professor Eduardo. Ele tinha uma facilidade em encaminhar aulas expositivas dialogadas e ao perceber meu gosto pela matemática, em meio a uma turma de 40 alunos, sempre me incentivou a aprender mais a respeito desse componente curricular.

Tanto que na oitava série, atual nono ano, esse professor me incentivou a dar uma aula de reforço a um grupo de colegas de sala, e me lembro que, mesmo sem ter noção alguma, eu elaborei meu primeiro "plano de aula" para ajudar meus colegas a respeito da fórmula resolutiva de equações do segundo grau (a "fórmula de Bhaskara").

No período que cursei o Ensino Médio uma nova descoberta de gosto, a paixão pela Matemática aplicada ao estudo da Física. O que me motivava era poder fazer exercícios de fixação de conteúdo, que nada mais eram que exercícios de repetição de determinado conteúdo. Na época tinha a impressão de que a

[1] Neste primeiro capítulo faço uma apresentação de quem sou e das escolhas que fiz para chegar ao Mestrado Profissional na UTFPR e como elas me influenciaram no desenvolvimento desse trabalho, por isso, o texto é escrito em primeira pessoa do singular. Contudo no restante da dissertação o texto passa a ser escrito na primeira pessoa do plural.

Matemática se resumia a isso, não importa o quão diferentes podiam ser as situações-problema, bastava “jogar” os números corretos na fórmula correta e pronto.

Ao cursar minha graduação tive uma surpresa e uma decepção. Surpresa quando vi que a Matemática era muito além daquilo que havia estudado até então, e isso me deixou fascinado por ela, mas também uma decepção, porque eu esperava da universidade uma “fôrma” de professores.

O que os docentes deveriam fazer exatamente em sala de aula, quais conteúdos eu deveria lecionar para os alunos da Educação Básica, como deveria preencher o Livro de Registro de Chamada, entre outras coisas. Não que, durante minha graduação, eu não tenha discutido ou visto a respeito dessas coisas, mas eu entendia que a graduação realmente moldava os professores para o “jeito certo”.

Contudo, meu tempo como graduando expandiu meus pensamentos sobre Educação, pois tive a oportunidade de conhecer, estudar e discutir a respeito de diferentes tendências em Educação Matemática e como essas poderiam melhorar os processos de ensino e aprendizagem em sala de aula, nas disciplinas que tratavam destas temáticas além de participar de alguns grupos de estudo.

Em um dos grupos que participei, sob a orientação da professora doutora Ângela Marta Pereira das Dores Savioli, desenvolvi pesquisas de iniciação científica a respeito do pensamento algébrico e pensamento matemático. E, com isso, pude perceber as diferenças entre aquilo que é apresentado a um sujeito e de como o sujeito pode assimilar, replicar e abstrair os conteúdos matemáticos a ele apresentados.

Tudo isso me permitiu ver que não era simplesmente me relacionando bem com meus alunos que eles não teriam dúvidas e estudariam motivados a aprender tudo aquilo que fosse proposto, mas que essa relação com discentes arraigada a toda teoria vista seria potencialmente favorável aos processos de ensino e de aprendizagem em sala de aula e que eu, enquanto professor, não era o único detentor de conhecimento, mas aquilo que a turma trazia também era importante.

Além disso, a avaliação daquilo que o aluno sabe ou deixa de saber também não poderia acontecer unicamente por meio da prova escrita, mas por meio da oralidade, da visualidade, de forma contínua e não estanque.

Mas como fazer isso acontecer na prática?

Comecei a lecionar e vi que aquilo que estudava e discutia na teoria nem sempre era simples de ser implementado em sala de aula, por uma série de fatores, e isso me inquietava muito.

Ao iniciar o curso de especialização em Matemática e Ciências nos anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio, os trabalhos e textos desenvolvidos só vieram corroborar com minha formação inicial além de me deixarem uma certa angústia: “como visualizar, e mostrar aos colegas de profissão, que era possível ‘fazer e acontecer’ diferente em sala de aula?”.

Assim, no segundo semestre desse curso, tive uma disciplina intitulada “Variação de Grandezas”, ministrada pela professora doutora Karina Alessandra Pessoa da Silva, que desenvolveu durante suas aulas algumas atividades de Modelagem Matemática[2], e foi a partir daí que me senti aproximado dessa tendência em Educação Matemática.

Eu já havia cursado uma disciplina na graduação, e discutido alguns artigos que tratavam dessa temática, mas só durante a especialização senti a possibilidade de aproximar minha prática às atividades de modelagem.

Paralelo a isso, iniciei o trabalho em uma editora de produção de materiais e livros didáticos de Matemática e passei a ter um contato mais próximo com este recurso tão utilizado por professores. Vi a responsabilidade de desenvolver um material que será utilizado por outros professores e que também pode ser muito explorado nos processos de ensino e aprendizagem de alunos. Assim, senti-me atraído tanto a pesquisar algo que pudesse auxiliar em atividades de modelagem como também olhar para um dos recursos mais utilizados por professores: o livro didático de Matemática.

Por fim, penso que tudo que narrei até aqui contribuiu para que esta pesquisa apresentasse uma aproximação da prática docente com o desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática, aliada ao uso de livros didáticos de Matemática.

---

[2] Para evitar repetições ao longo do texto, em alguns momentos quando nos referirmos à Modelagem Matemática utilizaremos o termo modelagem.

INTRODUÇÃO

A Educação e a escola estão em constante evolução, com isso, deve-se refinar o que já se tem de bom, descontinuar o que não mais funciona e romper barreiras para inovar e dar força aos processos de ensino e aprendizagem para que os avanços não se findem. Considerando os entraves nas aulas de Matemática, faz-se necessário o desenvolvimento de mais pesquisas que proponham melhorias para o trabalho do professor em sala.

Nesse sentido, propomo-nos tratar de atividades[3] desenvolvidas por meio da modelagem, tendência em Educação Matemática que apresenta diferencial e possibilidades de potencializar a aprendizagem em sala de aula, conforme apontado em diversas pesquisas (KHELE; CUNNINGHAN, 2000; VERTUAN, 2007; SILVA, 2008; ROSA, 2009; SILVA, 2013; LORIN, 2015; KAISER; BRAND, 2015; BORSSOI, 2013; VERONEZ, 2013; RAMOS, 2016).

A Modelagem Matemática é concebida de diferentes maneiras por diferentes pesquisadores. De modo geral, podemos dizer que ela “[...] constitui-se em um conjunto de procedimentos cujo objetivo é construir um paralelo para tentar explicar matematicamente, os fenômenos presentes no cotidiano de ser humano, ajudando-o a fazer predições e tomar decisões” (BURAK, 1992, p. 62).

A caracterização feita por Burak (1992) corrobora com nosso entendimento de que, para abordarmos um problema, não essencialmente matemático a partir da Matemática, é possível fazer uso de conhecimentos matemáticos já construídos e aprender outros novos . Sendo assim, a Modelagem Matemática se constitui como uma *alternativa pedagógica*, perspectiva que assumimos neste trabalho, nos embasando principalmente na acepção de de Almeida, Silva e Vertuan (2012).

No entanto, as atividades de Modelagem Matemática “colocam os alunos em contato com práticas que, de forma geral, não lhes parecem corriqueiras na sala de aula” (SILVA, ALMEIDA, GERÔLOMO, 2011, p. 30). Assim, faz-se necessário que a familiarização do aluno com a atividade de modelagem seja realizada de maneira

---

[3] Neste trabalho empregamos a palavra atividade quando tratamos de atividades de modelagem seguindo a acepção do termo que nosso referencial a respeito de Modelagem Matemática adota. Usamos o termo tarefa para quando nos referirmos aos textos presentes em livros didáticos e o termo situação-problema para o enunciado de tarefas que possibilitam o desenvolvimento de atividades.

gradativa que, segundo Silva, Almeida e Gerôlomo (2011) se dá a partir de três diferentes momentos[4].

Desse modo, podemos entender a modelagem como uma alternativa para os professores nos processos de ensino e de aprendizagem, que visa ensinar matemática a partir da solução de problemas por meio de representações simplificadas da realidade que são elaboradas por aqueles que a investigam. Na literatura, tais representações são designadas como modelos matemáticos.

Aliado a isso, queremos apresentar atividades encaminhadas pela modelagem a partir de situações-problema propostas em Livros Didáticos de Matemática – LDM, já que desde sua criação, o livro didático tem sido objeto pedagógico inserido em todas as áreas de conhecimento disponíveis no ambiente escolar.

Esse material ocupa lugar especial nas ferramentas utilizadas pelo professor e pelos alunos, por servir como compêndio de objetos de conhecimento que são exigidos pelo currículo escolar e busca, entre outras coisas, difundir conhecimentos a respeito de uma determinada área de conhecimento (GONÇALVES; CORRÊA, 2016). Segundo Costa e Allevato (2010):

> O livro didático é um dos instrumentos mais utilizados pelos professores para organização e desenvolvimento das atividades em sala de aula e, até mesmo, para aprimorar seu próprio conhecimento sobre o conteúdo e, para os alunos, trata-se de uma fonte muito valiosa de informação, que deveria despertar o interesse e o gosto pela leitura, além de ajudar no avanço dos estudos.
> Portanto, o livro didático deve ser muito bem organizado tanto para o professor, que o tem como apoio pedagógico, quanto para os alunos, que poderão utilizá-lo para estudar sozinhos. O livro adquire, assim, a função de contribuir para o ensino-aprendizagem. Por isso, ele é considerado um interlocutor, isto é, um componente que "dialoga" tanto com o professor quanto com os alunos (COSTA; ALLEVATO, 2010, p. 72-73).

Como os LDM, de modo geral, reúnem os objetos de conhecimento apresentados no currículo escolar em volumes organizados para cada ano de escolarização, foi preciso delimitar o campo de análise de nossa pesquisa e, para tal, optamos pelo objeto: função definida por mais de uma sentença.

A partir das nossas experiências docentes e conforme apontam pesquisas (LOPES, 2003; SAJKA, 2003; PONTE; BRANCO; MATOS, 2009) um dos objetos de conhecimento, em aulas de matemática, que os alunos apresentam dificuldades é

---

[4] A discussão a respeito dos diferentes momentos de familiarização dos alunos com atividades de modelagem é feita no capítulo 1.

no estudo de funções. Conforme indicado por Sajka (2003) é a natureza dual que este objeto apresenta (gráfica e algébrica) que pode causar dificuldades em sua compreensão.

Buscando minimizar as dificuldades dos alunos apontadas por Sajka (2003), em Gois (2017), propusemos o trabalho com funções trigonométricas a partir do desenvolvimento de atividades de modelagem em que o objeto funções trigonométricas pudesse emergir. Em Gois, Silva e Dalto (2019) ficou evidente que o trabalho com funções, mais especificamente com funções definidas por mais de uma sentença, é bem fragilizado entre os alunos que ingressam em graduações na área de exatas e cursam disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral.

Entre as dificuldades apresentadas por esses autores, destacam-se aquelas relacionadas à representação gráfica da função e aos erros aritméticos na manipulação da representação algébrica das funções (GOIS; SILVA; DALTO, 2019).

Em nossa pesquisa, evidenciamos se tais dificuldades se manifestam ou não, além de outros aspectos cognitivos dos alunos, a partir dos signos produzidos por eles. Sendo signo[5] entendido neste trabalho como aquilo, que de certo modo, representa algo para alguém, na perspectiva de Peirce.

Sendo assim, buscamos por meio da semiótica peirceana, analisar algumas coleções de LDM e selecionar tarefas que podem ser desenvolvidas enquanto atividades de modelagem. Com isso, procuramos estreitar o trabalho com a Modelagem Matemática e a prática docente a partir de um material de apoio, de confiança dos professores: o livro didático.

Além disso, segundo Almeida (2018, p. 19), ao introduzir uma atividade de modelagem em aulas de matemática se faz necessário considerar, entre outras coisas, que “a matemática utilizada pode não ter sido previamente escolhida ou definida; em vez disso, a matemática necessária emerge do problema e de suas especificidades”. Com isso, não se pode esperar que os alunos modelem determinada situação utilizando um objeto de conhecimento matemático específico, mas permite que o aluno, a partir de seus conhecimentos, escolha o que acha mais adequado para resolver a situação que lhe foi apresentada.

Desse modo, o intuito desta pesquisa foi desenvolver atividades de modelagem a partir de situações-problema presentes em livros didáticos de

[5] A discussão a respeito e signo e semiótica peirceana é feita no capítulo 2.

matemática. Para isso, olhamos apenas para situações-problema que estavam nos LDM e tratavam do objeto de conhecimento matemático: funções definidas por mais de uma sentença.

Nesse contexto, nosso problema de pesquisa fundamenta-se em: “*Que situações-problema, que tratam de funções definidas por mais de uma sentença, presentes em livros didáticos do PNLD–2018, têm potencial para serem encaminhadas enquanto atividades de Modelagem Matemática?*”.

Para delinear e refletir sobre esta questão consideramos as seguintes questões norteadoras:

- como selecionar, nos LDM, situações-problema para serem encaminhadas por meio da modelagem, em particular, situações-problema que tratam de funções definidas por mais de uma sentença?
- o que caracteriza que uma tarefa presente no LDM tenha “potencial para” ser encaminhada enquanto atividade de modelagem?
- como pode se configurar o potencial para ser encaminhada uma atividade de modelagem planejada a partir do LDM, no primeiro momento de familiarização dos alunos com atividades de Modelagem Matemática?

Assim, para responder a primeira e parte da segunda questão norteadora, buscamos analisar aspectos que possibilitam identificar tarefas que têm potencial para serem encaminhadas enquanto atividades de modelagem matemática, considerando especificamente: selecionar livros didáticos de Matemática do Ensino Médio que abordem objetos matemáticos tais como funções definidas por mais de uma sentença; elaborar atividades de modelagem a partir das situações-problema envolvendo esses objetos.

Para complementarmos a resposta da segunda questão norteadora e responder a terceira desenvolvemos as atividades adaptadas dos livros com alunos do Ensino Médio e analisamos os dados produzidos por eles.

Para esta pesquisa, consideramos que uma abordagem qualitativa se enquadrou em nossos objetivos.

Em um primeiro momento fazemos um levantamento bibliográfico a respeito dos assuntos explorados nesta pesquisa, como Modelagem Matemática na Educação Matemática, uso do livro didático de matemática em sala de aula e os instrumentos de análise: Semiótica Peirceana (PEIRCE, 2012; SANTAELLA, 2004;

SANTAELLA, 2007; SANTAELLA, 2008a; SANTAELLA, 2008b; SILVA, 2013) e Teoria Fundamentada em Dados (SILVA, 2013; STRAUSS; CORBIN, 1990; ALMEIDA; BORSSOI; SILVA 2015; CHARMAZ, 2009).

A análise e discussão da segunda etapa desta pesquisa se deu por meio da Teoria Fundamentada em Dados. A coleta de dados foi feita a partir dos registros dos alunos, sejam manuscritos ou digitais, gravação de áudio e/ou vídeo de aulas entre outros. Vemos que o processo de análise dos dados é

> [...] trabalhoso e meticuloso que implica múltiplas leituras do material disponível, tentando nele buscar unidades de significados ou, então, padrões e regularidades para, depois, agrupá-los em categorias. A busca dessa organização é guiada, geralmente, pela questão investigativa e pelos objetivos do estudo (FIORENTINI; LORENZATO, 2006, p. 133).

E, por fim, foram realizadas as análises com base nos resultados das pesquisas do referencial teórico, do produto educacional e nos registros feitos pelos alunos. Verificando as possibilidades de fomentar discussões a respeito dos temas versados.

Em tela, de acordo com as orientações da CAPES (2013), para a conclusão de curso de um Mestrado Profissional é necessário que o mestrando desenvolva juntamente com a dissertação, um produto educacional para

> [...] utilizá-lo em condições reais de sala de aula ou espaços não-formais ou informais de ensino, em formato artesanal ou em protótipo. Esse produto pode ser, por exemplo, uma sequência didática, um aplicativo computacional, um jogo, um vídeo, um conjunto de vídeo-aulas, um equipamento, uma exposição etc. O trabalho final deve incluir necessariamente o relato fundamentado desta experiência, no qual o produto educacional desenvolvido é parte integrante (CAPES, 2013, p. 24-25).

Leodoro e Blakins (2010, p. 7) corroboram com as orientações da Capes (2013) quando propõem a construção de um produto educacional participativo, pois deseja-se “que os professores adotem uma prática de problematização junto aos seus alunos” e para isso, “ele próprio deverá vivenciar o ato de problematizar a sua prática pedagógica, ser protagonista dela”. Nesse processo, o professor munido de sua prática e vivência nos processos de ensino e de aprendizagem vai ao encontro “com as referências teóricas em educação”.

O nosso produto educacional consiste na criação de uma cartilha[6] que apresente as tarefas selecionadas em livros didáticos de matemática que tenham potencial para serem encaminhadas enquanto atividades de modelagem com orientações didáticas disponíveis para o professor.

Com relação à estrutura deste trabalho, além desta Introdução, em que apresentamos o tema, a justificativa, a questão da pesquisa, os objetivos e o produto educacional, o organizamos em cinco capítulos.

No *capítulo 1*, intitulado "*Modelagem matemática na Educação Matemática*", apresentamos a perspectiva de modelagem na Educação Matemática adotada para este trabalho.

No *segundo capítulo*, intitulado "*Semiótica peirceana*", apresentamos os pressupostos teóricos a respeito da Semiótica, a partir da ótica de Peirce, que também subsidiaram as análises empreendidas neste trabalho.

Apresentamos articulações entre a Modelagem Matemática e a Semiótica Peirceana, o uso do Livro Didático de Matemática, os aspectos metodológicos e procedimentos de pesquisa no *capítulo 3* – "*Aspectos metodológicos e analíticos da pesquisa"*.

Além disso, o terceiro capítulo apresenta um panorama global que constitui nossa pesquisa, bem como desenvolvemos nosso trabalho e a ferramenta utilizada em todos os dados coletados, a Teoria Fundamentada em Dados, na perspectiva de Kathy Charmaz.

Nesse capítulo elucidamos também características e desenvolvimento do produto educacional articulado a esta dissertação.

No *capítulo 4* – "*Análise dos signos que emergiram nos livros didáticos e no desenvolvimento de duas atividades de modelagem matemática*" apresentamos as duas situações-problema presentes em alguns livros didáticos, que foram selecionadas para serem planejadas e desenvolvidas por meio da modelagem. Além disso, descrevemos as análises dos dados produzidos nas duas atividades à luz da Teoria Fundamentada em Dados, da semiótica peirceana e da Modelagem Matemática.

---

[6] Nesse trabalho entendemos por cartilha um material paradidático e menos carregado de rigores científicos acadêmicos para apresentar articulações entre atividades de modelagem e tarefas presentes em livro didático de Matemática.

No *quinto,* e *último capítulo*, são apresentadas as "*Considerações finais*", em que explicitamos nossas conclusões considerando em sua totalidade a pesquisa, retomando e discutindo a questão de pesquisa e as questões norteadoras.

Por fim, trazemos as *Referências* e *Apêndices* que compuseram o desenvolvimento desta pesquisa.

1 MODELAGEM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Neste capítulo apresentamos um dos referenciais teóricos que embasam esta pesquisa: a Modelagem Matemática na perspectiva da Educação Matemática. Para isso, caracterizamos nossos entendimentos a respeito de modelagem e modelo matemático. Em seguida, apresentamos um panorama nacional e internacional de diferentes pesquisas, cujo foco é a modelagem, mas sob diferentes óticas (olhar para o processo de ensino, para o processo de aprendizagem, para o papel do professor e do aluno no desenvolvimento de atividades de modelagem, entre outros).

Depois, apresentamos alguns ciclos no desenvolvimento de atividades de modelagem que foram elaborados por diferentes pesquisadores da área, bem como os diferentes momentos de familiarização de um aluno no desenvolvimento de atividades de modelagem.

E, por fim, articulamos a Modelagem Matemática ao currículo escolar e à aprendizagem matemática.

1.1 MODELAGEM MATEMÁTICA E MODELO MATEMÁTICO

A modelagem teve sua origem em um campo da Matemática denominado, convencionalmente, como Matemática Aplicada. Bassanezi (2002, p. 16) aponta que a modelagem é a “arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real”.

Contudo, para além disso, a comunidade que pesquisa a respeito da Modelagem Matemática na perspectiva da Educação Matemática busca também evidenciar o impacto de atividades de modelagem nos processos de ensino e aprendizagem em sala de aula.

Assim, segundo Bisognin e Bisognin (2011, p. 106) a modelagem matemática é “[...] um caminho que pode aproximar a linguagem do professor à dos alunos e propiciar a aprendizagem de conteúdos matemáticos”.

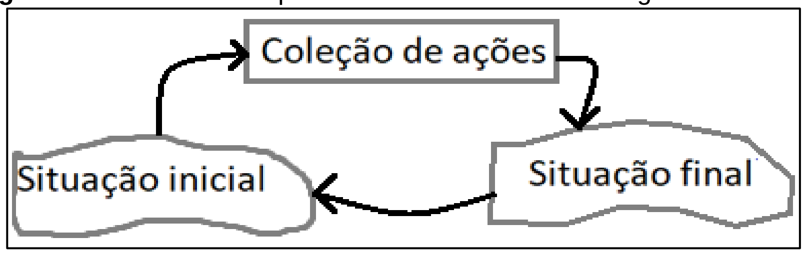
Nesse sentido, Burak e Barbieri (2005) corroboram com Bisognin e Bisognin (2011), quando afirmam que a modelagem visa o trabalho com objetos de conhecimento matemático relacionando-os com o cotidiano dos alunos, tornando possível construir conceitos matemáticos, suas aplicações e seus usos.

Em nossa pesquisa optamos por estudar, planejar e desenvolver atividades de Modelagem Matemática por acreditarmos se tratar de uma tendência em Educação Matemática que possibilita favorecer os processos de ensino e de aprendizagem em sala de aula e permite discutir temas que extrapolam a própria matemática, favorecendo o desenvolvimento nos alunos de que a matemática está articulada a situações do cotidiano.

Para tratarmos dessa tendência em Educação Matemática nesta pesquisa, entendemos modelagem matemática como uma alternativa pedagógica, seguindo os pressupostos estabelecidos por Almeida, Silva e Vertuan (2012).

De maneira geral, uma atividade de modelagem nesta perspectiva tem como tríade basilar: uma situação inicial, uma situação final e uma coleção de ações necessárias para partir da situação inicial e chegar à situação final, conforme ilustrado na Figura 1.

Figura 1 – Tríade basilar para uma atividade de modelagem matemática



Fonte: dos autores.

A situação inicial também chamada de problemática, ou situação-problema, trata-se de uma situação em que não é conhecida previamente sua solução. Como destacado na Figura 1, esta situação inicial tem um formato irregular, pois trata-se de um recorte de fenômenos do mundo que se deseja conhecer mais a respeito.

A coleção de ações necessárias para a solução da situação-problema envolve uma interpretação da realidade por meio da matemática e como consequência uma articulação de conceitos matemáticos e não matemáticos podem emergir ou serem produzidos no desenvolvimento da atividade. Além disso, na Figura 1, podemos perceber que esta coleção de ações tem formato retangular, pois trata-se de objetos de conhecimento matemático criados e estabelecidos pelos seres humanos.

Essa coleção de ações na perspectiva de Almeida, Silva e Vertuan (2012) é caracterizada pelas seguintes fases: inteiração, matematização, resolução, interpretação dos resultados e validação. De acordo com Almeida, Silva e Vertuan (2012, p.15-16) a Inteiração

> [...] representa o primeiro contato com a situação-problema que se pretende estudar com a finalidade de conhecer as características e especificidades da situação. A inteiração conduz a formulação do problema e a definição de metas para sua resolução, assim a escolha do tema e a busca de informações a seu respeito constituem o foco central nessa fase [...].
> [A Matematização] é caracterizada pelo processo de transição de linguagens, de visualização e de uso de símbolos para realizar descrições matemáticas, que são realizadas a partir de formulação de hipóteses, seleção de variáveis e simplificações em relação às informações e ao problema definido na fase de inteiração [...].
> [A Resolução] consiste na construção de um modelo matemático com a finalidade de descrever a situação, permitir a análise dos aspectos relevantes da situação, responder as perguntas formuladas sobre o problema a ser investigado [...].
> [A Interpretação de Resultados] pelo modelo implica a análise de uma resposta para o problema, a análise da resposta constitui um processo avaliativo realizado pelos envolvidos na atividade e implica uma [Validação] da representação matemática associada ao problema, considerando tanto os procedimentos matemáticos quanto à adequação da representação para a situação (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p.15-16).

Na solução final podemos ver na Figura 1, que assume um formato irregular que se aproxima do formato irregular e curvo da situação inicial, mas nesse caso os contornos são feitos por retas, que indicam uma interpretação a partir do uso de objetos matemáticos, buscando construir um paralelo que explique a situação inicial por meio da Matemática.

Esta interpretação matemática que foi elaborada, a literatura convencionou chamar de modelo matemático. “Um modelo matemático pode ser escrito utilizando-se para isso diferentes sistemas de representação” (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p.14). Neste caso, o nível de escolaridade do aluno interfere no modelo matemático escrito podendo assim, com as devidas adaptações, para uma situação-problema, ser deduzido um modelo por meio de tabela, lista, maquete, esquema, entre outras representações matemáticas.

Além disso, para Braga e Santo (2015),

> [...] um modelo matemático tem o papel de descrever um fenômeno ou representá-lo, de diagnosticar um problema ou solucionar um problema, de prever fenômenos ou evitar fenômenos, etc. De um modo geral, o papel que esse modelo pode assumir vai depender da área de conhecimento da qual o mesmo é construído, pensado (BRAGA; SANTO, 2015, p. 4).

A caracterização de modelagem e modelo matemático que aqui apresentamos está pautada em uma acepção destes termos segundo alguns pesquisadores da comunidade científica que estuda a respeito de modelagem. Contudo, em âmbito nacional e internacional, há uma pluralidade de pesquisas acerca de modelagem que apresentam sob diferentes óticas o entendimento no que se refere a essa temática.

Evidencia-se em eventos nacionais e internacionais de modelagem, como por exemplo EPMEM, CNMEM e ICTMA, que ainda que seja uma tendência em Educação Matemática, de maneira singular, há para diferentes pesquisadores da área, diferentes acepções para Modelagem Matemática. Tambarussi e Klüber (2013, 2014) corroboram com essa assertiva ao responderem as seguintes questões em seus artigos: “Modelagem Matemática na Educação Matemática: O que se tem pesquisado?” e “O que revelam os focos das pesquisas em Modelagem Matemática na Educação?” no cenário educacional e científico brasileiro.

Em âmbito nacional destacamos: Burak (2004) que considera a modelagem como uma metodologia de ensino; Almeida, Silva e Vertuan (2012) que a entendem como alternativa pedagógica; Barbosa (2004) a caracteriza como um ambiente de ensino e aprendizagem; Caldeira (2009) que define Modelagem Matemática como concepção de Educação Matemática.

Já no cenário internacional, destacamos Galbraith e Stillman (2006) que entendem a modelagem como um processo de obtenção de um resultado produtivo para um problema do mundo real. Zbiek e Comner (2006) entendem que a modelagem tem o propósito de apresentar determinado conteúdo por meio da motivação e do desenvolvimento de sua importância para a Matemática. Blum e Niss (1991) a consideram uma aplicação da Matemática.

Os diferentes modos de conceber modelagem estão atrelados a uma pluralidade de perspectivas epistemológicas e, Kaiser e Sriraman (2006) a partir de análise de trabalhos dos anais do ICTMA e do ICMI, apresentam cinco delas: realística ou modelagem aplicada, contextualizada, educacional (dividida em modelagem didática e modelagem conceitual), sócio crítica e epistemológica ou teórica. Há também uma meta-perspectiva denominada cognitiva.

Cada perspectiva relaciona-se aos diferentes objetivos que pesquisadores têm com a modelagem. Segundo Blum (2015):

> Todas essas perspectivas também contribuem para a questão da construção de sentido. Aqui, quero dizer, pelo "sentido" de uma atividade, o

> significado subjetivo da mesma para o indivíduo, o qual pode entender o propósito dessa atividade (BLUM, 2015, p. 82, tradução nossa[7]).

A seguir apresentamos o Quadro 1 adaptado e traduzido de Kaiser e Sriraman (2006) que destaca as cinco perspectivas e a meta perspectiva, além de apresentar uma síntese dos objetivos e origem de cada uma delas.

Quadro 1 – Síntese de diferentes perspectivas e meta-perspectiva epistemológicas

Nome da perspectiva	Objetivos centrais	Origem
Realística ou modelagem aplicada	Objetivos pragmático-utilitários, por exemplo: resolução problemas do mundo real, entendimento do mundo real, promoção de competências de modelagem.	Pragmatismo anglo-saxônico e matemática aplicada.
Modelagem contextualizada	Relação-sujeito e objetivos psicológicos, por exemplo, resolução de problemas escritos.	Discussão sobre soluções de problemas americanos bem como práticas escolares e experiências em laboratório psicológico.
Modelagem Educacional dividida em: a) modelagem didática b) modelagem conceitual	Objetivos sujeito-relações e pedagógicos: a) estrutura dos processos de aprendizagem e sua promoção; b) introdução de conceitos e desenvolvimento.	Teorias didáticas e teorias da aprendizagem.
Modelagem Sócio crítica	Objetivos pedagógicos tais como a compreensão crítica do mundo todo.	Abordagens sócio crítica em sociologia política.
Modelagem Epistemológica ou Teórica	Objetivo Teoria-orientada, por exemplo, promoção do desenvolvimento teórico.	Epistemologia romana.
Meta-perspectiva: Modelagem cognitiva	Objetivos de pesquisa: a) análise de processos cognitivos tomados durante os processos de modelagem e compreensão desses processos cognitivos. Objetivos psicológicos: b) promoção dos processos de pensamento	Psicologia cognitiva.

[7] Tradução do seguinte trecho em inglês: “All these perspectives also contribute to the question of sense-making. Here, I mean by the “sense” of an activity the subjective meaning of this activity to the individual whereby the individual can understand the purpose of this activity”.

	matemático pelo uso de modelos como imagens mentais ou mesmo imagens físicas ou pela modelagem enfatizada como um processo mental, tais como abstração ou generalização.	

Fonte: adaptado de Kaiser e Sriraman, (2006, p.30), tradução nossa.

Em nossa pesquisa assumimos a concepção de modelagem enquanto alternativa pedagógica de acordo com Almeida, Silva e Vertuan (2012), para fazer uma abordagem matemática de situações-problema que não são essencialmente da Matemática.

Além disso, consideramos também para análise dos dados os signos produzidos ou utilizados pelos alunos nas atividades de modelagem, que estão diretamente ligados à cognição dos alunos e, por isso, assumimos nesta pesquisa também a meta-perspectiva cognitiva de modelagem, de acordo com Kaiser e Sriraman (2006).

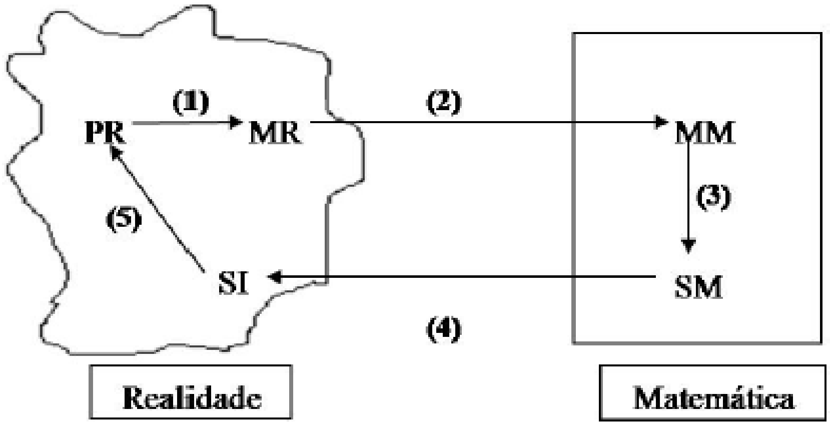
Para analisar as ações cognitivas presentes no desenvolvimento de atividades de modelagem alguns pesquisadores elaboraram diferentes ciclos constituídos por etapas/fases que os alunos perpassam.

1.2 DIFERENTES CICLOS PARA O DESENVOLVIMENTO DE UMA ATIVIDADE DE MODELAGEM MATEMÁTICA

Ainda que sob diferentes modos de ser concebida, de forma geral, podemos considerar que as atividades de modelagem matemática se caracterizam pela tríade basilar situação inicial, coleção de ações, situação final.

Alguns pesquisadores, considerando os encaminhamentos das atividades de modelagem, elaboraram ciclos para orientar seu desenvolvimento. Maaβ (2005) apresenta um ciclo em que o problema do mundo real indica o início e o fim do ciclo, que passa pela matemática, onde obtém-se um modelo e solução matemática, a fim de que um modelo real possa interpretar e validar o problema do mundo real, conforme Figura 2.

Figura 2 – Ciclo de uma atividade de modelagem matemática proposto por Maaβ (2005)



Legenda	
PR: Problema do mundo real	(1) Simplificação, estruturação e idealização
MR: Modelo real	(2) Matematização
MM: Modelo Matemático	(3) Trabalho dentro da Matemática
SM: Solução Matemática	(4) Interpretação
SI: Solução interpretada	(5) Validação

Fonte: MAAβ, 2005, p. 2, tradução nossa.

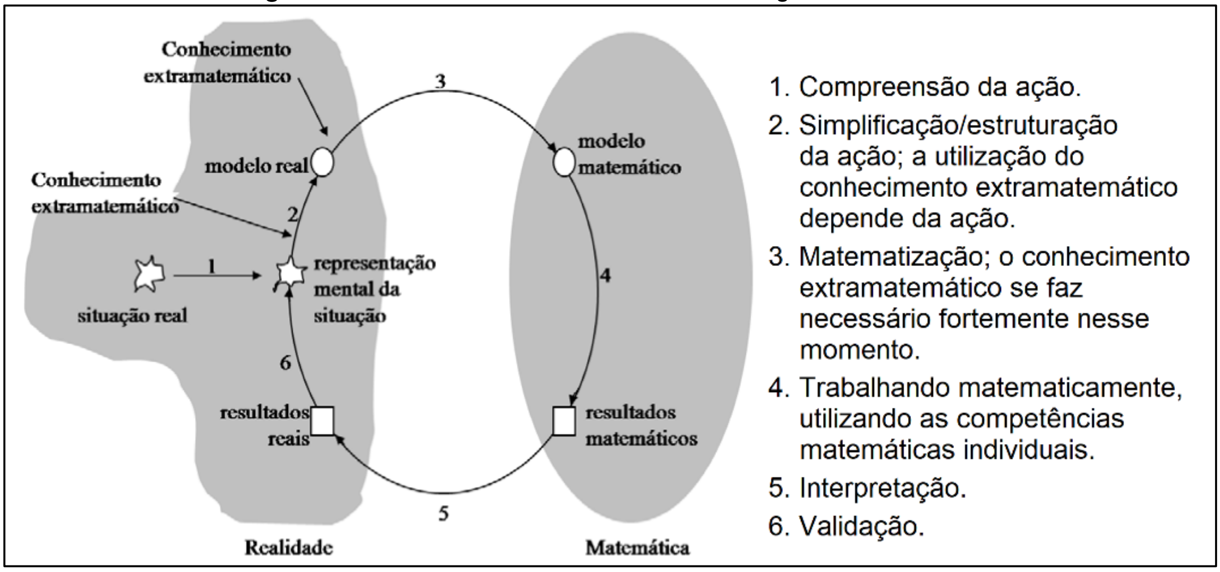
Segundo Silva (2013, p. 30-31)

> Para identificar barreiras e oportunidades para a integração de modelagem em sala de aula, Maaβ (2006) propõe que um problema do mundo real seja simplificado, estruturado e idealizado com fins a obter um modelo real. O modelo real é então matematizado gerando um modelo matemático, que ao ser trabalhado no âmbito da Matemática possibilita a obtenção de uma solução matemática. A solução matemática deve ser interpretada e validada com o problema do mundo real. No ciclo de modelagem de Maaβ (2006), o problema do mundo real consiste no início e no fim de uma atividade de modelagem [...], no entanto, com 'olhares' diferenciados, pois intenções diferentes estão relacionadas (SILVA, 2013, p. 30-31).

Já no ciclo elaborado por Borromeo Ferri (2006) parte-se de uma situação real inserida na realidade, em que esta realidade não tem uma forma bem definida, e essa situação é transposta à Matemática em busca de formatá-la a um modelo matemático. Por meio de resultados matemáticos esse modelo matemático é interpretado, obtendo-se resultados reais que são validados com o retorno à situação inicial.

Este ciclo é uma interpretação do ciclo proposto por Blum e Leiß (2007, *apud* Borromeo Ferri, 2006) estendendo-o a uma interpretação construtivista. Borromeo Ferri (2006), propõe que este ciclo acontece por meio de seis etapas e destaca ações cognitivas entre as mesmas conforme disposto na Figura 3.

Figura 3 – Ciclo de uma atividade de modelagem matemática



Fonte: BORROMEO FERRI, 2006, p. 92, tradução nossa.

Borromeo Ferri (2006) considera que, a partir da escolha do aluno pela situação real que deseja modelar, é necessário que o mesmo compreenda quais as possibilidades de estudo, elaborando neste caso uma representação mental da situação. E é a partir desta representação mental que o aluno precisa tomar decisões que irão influenciar na simplificação das informações obtidas.

Ao transitar entre as fases de "representação mental da situação" e "modelo real" há uma ação de simplificar e estruturar o problema que influenciarão na elaboração do modelo e nos resultados reais e para isso o aluno utiliza e/ou precisa de conhecimentos extra matemáticos.

Na transição entre modelo real e modelo matemático utilizando os conhecimentos extra matemáticos, o aluno tem um progresso no processo de matematização para elaborar o modelo matemático.

Entre as etapas "modelo matemático" e "resultados matemáticos" o estudante usa suas competências matemáticas individuais para obtenção dos resultados. Já entre os resultados matemáticos e os resultados reais ocorre a ação de interpretar os resultados obtidos durante a atividade de modelagem.

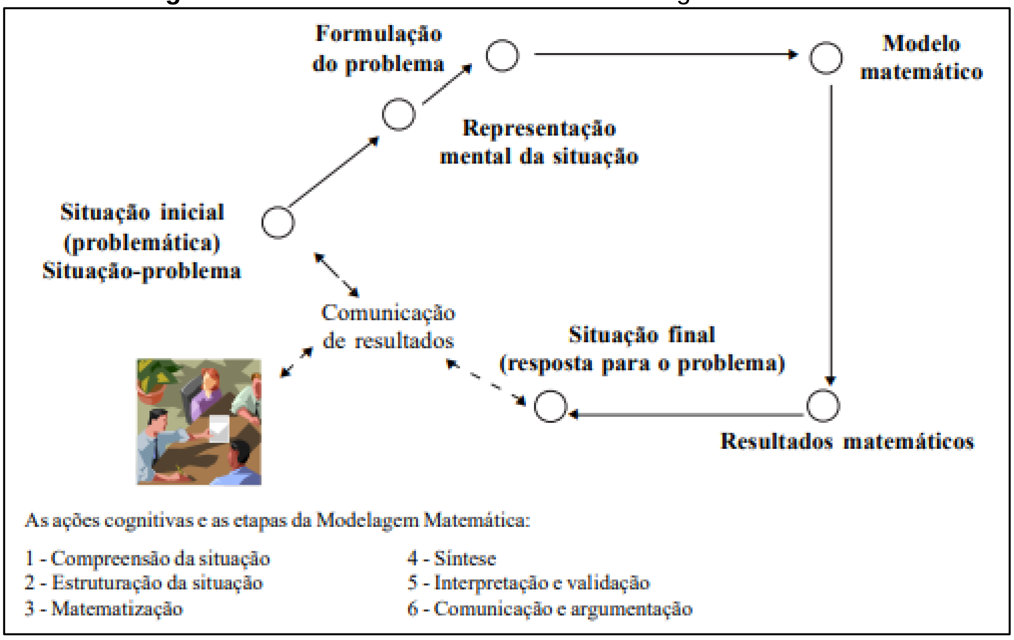
E por fim, a etapa de validação que ocorre entre os resultados reais e a situação real, é uma ação em que o aluno estabelece uma correspondência entre os resultados reais obtidos e os resultados mentais que foram elaborados.

Tanto no ciclo elaborado por Maaβ (2005) quanto no ciclo elaborado por Borromeo Ferri (2006) podemos identificar visualmente a estrutura da tríade basilar apresentada na Figura 1, no formato das figuras que indicam a “realidade” e “matemática”.

Para o ciclo elaborado por Almeida e Silva (2012) e apresentado na Figura 4, Silva (2013) destaca que:

> O problema [...] é explicitado após o aluno realizar as ações cognitivas referentes à compreensão e estruturação da situação-problema. O modelo matemático é deduzido por meio da matematização do problema. Os resultados matemáticos são obtidos por meio de uma síntese do modelo matemático, tais resultados são interpretados e validados com a resposta para o problema. O findar da atividade consiste na comunicação e argumentação retornando à situação-problema. Com este ciclo, o problema perfaz toda a atividade e o objetivo é chegar a uma resposta a esse problema que deve ser arguida por meio de uma comunicação (SILVA, 2013, p. 35).

Figura 4 – Ciclo de uma atividade de modelagem matemática



Fonte: ALMEIDA; SILVA, 2012, p. 630.

Conforme apresenta Borromeo Ferri (2006) e Almeida e Silva (2012) percebe-se uma preocupação por analisar ações cognitivas no desenvolvimento de atividades de modelagem. Neste trabalho, por seguir os pressupostos teóricos de modelagem conforme Almeida, Silva e Vertuan (2012), optamos também por evidenciar as ações cognitivas indicadas por Almeida e Silva (2012).

Contudo, pensando no histórico educacional brasileiro, percebemos que é comum aos alunos aulas expositivas-dialogadas[8]. Com isso, ao desenvolver uma

[8] Entendemos por aula expositiva-dialogada aquela cujo processo de ensino concentra-se no professor e o processo de aprendizagem nos alunos. Nesta modalidade de aula o professor aborda um conteúdo a partir de seu aspecto teórico seguido de alguns exemplos e, depois, exercícios de fixação. O professor interage com os alunos por meio de questionamento (JESUS, 2017, 24 – 49).

atividade de modelagem, os alunos podem ter dificuldades em perpassar pelas fases do ciclo proposto por Almeida e Silva (2012). Para resolver isso é possível familiarizar os alunos com atividades de modelagem.

Silva, Almeida e Gerôlomo (2011) e Almeida, Silva e Vertuan (2012) propõem a possibilidade de implementar atividades de modelagem em sala de aula de maneira gradativa, permitindo uma maior autonomia do aluno. Para isso, os autores supracitados indicam a possibilidade de o professor ensinar o aluno a trabalhar com modelagem familiarizando o mesmo com atividades de modelagem.

A familiarização proposta pelos autores ocorre em três diferentes momentos cujas características apresentamos a seguir.

O primeiro momento de familiarização é caracterizado pela apresentação da situação-problema pelo professor, com dados necessários e suficientes para resolver o que foi proposto. Segundo Silva, Almeida e Gerôlomo (2011, p. 30-31), “o próprio professor apresenta essas informações e os alunos realizam a investigação do problema, a dedução, a análise e a utilização de um modelo matemático, assessorados pelo professor”. É incentivado o trabalho em grupo com os alunos e cabe a eles perpassarem pelas fases da modelagem matemática (inteiração, matematização, resolução, interpretação de resultados e validação) auxiliados pelo professor.

Para atividades desse primeiro momento, ainda que os grupos trabalhem separadamente, geralmente as resoluções acabam sendo as mesmas.

O segundo momento de familiarização com atividades de modelagem já traz uma maior independência dos alunos em relação ao professor. Nesse momento, são apresentados uma situação e alguns dados, porém, cabe aos alunos determinar um problema, as hipóteses que serão consideradas; se necessário, coletar mais dados e definir as variáveis. Para Silva, Almeida e Gerôlomo (2011, p. 33) “O que muda, essencialmente, do primeiro momento para o segundo é a independência dos alunos no que se refere ao uso ou obtenção de dados, bem como a definição de procedimentos extra matemáticos e matemáticos adequados”.

Assim, ao trabalharem com atividades desses dois momentos, os alunos podem ir desenvolvendo confiança em deduzir modelos, definindo aquilo que é necessário para sua situação-problema e verificando que é possível diferentes modelos responderem a uma situação inicial e, a partir de então, trabalhar com atividades de modelagem matemática caracterizadas como de terceiro momento de familiarização. “O professor neste [terceiro] momento já pode atuar como alguém que orienta, que sugere ponderações, ou simplesmente aquele que atende quando é solicitado” (SILVA; ALMEIDA; GERÔLOMO, 2011, p. 35) e cabe ao aluno desenvolver desde a escolha de uma situação-problema, a definição dos dados, as variáveis e hipóteses até a resolução da situação respondendo, seu problema inicial.

Podemos sintetizar estes momentos de familiarização, destacando o papel do professor e o do aluno, conforme Quadro 2.

Quadro 2 – Papel do professor e do aluno nos momentos de familiarização em atividades de modelagem

	1º momento	**2º momento**	**3º momento**
Papel do professor	• Propõe situação-problema; • Apresenta o problema; • Apresenta as possíveis variáveis. Professor dá suporte no papel do aluno, confirmando aquilo que eles fazem e questionando para estimulá-lo a chegar à situação final.	• Propõe situação-problema; • Traz alguns dados pertinentes à situação proposta. Professor passa ao papel de auxiliador e procura ajudar os alunos no decorrer do desenvolvimento das atividades dando uma maior autonomia do que nas atividades de primeiro momento.	Professor dá maior autonomia aos alunos desenvolvendo o papel de orientador para as atividades em desenvolvimento. O docente pode ou não indicar uma temática para a turma ou ainda deixar que os discentes, em grupos, escolham alguma temática que desejam explorar.
Papel do aluno	• Formula as hipóteses; • Deduz o modelo para a situação; • Valida o modelo; • Responde o problema. O aluno amparado pelo professor faz a matematização da situação-problema, valida e responde a atividade.	• Estabelece um problema; • Identifica as variáveis. • Formula as hipóteses; • Deduz o modelo para a situação; • Valida o modelo; • Responde o problema. Nesse momento os alunos já trabalharam com atividade de modelagem antes, já têm certa segurança e desenvolvem alguma autonomia do professor para tentarem resolver o problema.	• Propõe situação-problema; • Apresenta o problema; • Apresenta as variáveis; • Formula as hipóteses; • Deduz o modelo para a situação; • Valida o modelo; • Responde o problema. Nesse momento os alunos já trabalharam com atividades de momentos anteriores, têm autonomia na resolução e veem no professor um orientador no processo desenvolvimento de atividades de MM.

Fonte: dos autores baseado em Silva; Almeida; Gerôlomo, 2011.

Silva, Almeida e Gerôlomo (2011, p. 35) ressaltam que “as nossas práticas escolares enquanto professores podem nos requerer nesse [terceiro] momento também a busca de consensos em relação à definição de temas, de procedimentos e ao uso de conceitos matemáticos”, porém cabe ao estudante a tomada de decisões.

Assim, para que seja possível destacar as atribuições de significados que os estudantes realizam durante as atividades de modelagem é preciso considerar os signos utilizados nas sugestões, indicações ou representações dos objetos com os quais os alunos estão trabalhando. Ao tratar de signos nos alicerçamos na Semiótica, mais especificamente nos signos interpretantes produzidos pelos intérpretes (estudantes) em que é possível identificar evidências de atribuição de significados.

Para tratar de signos, semiótica e atribuição de significados, apresentamos no próximo capítulo algumas considerações a respeito de semiótica peirceana.

2 SEMIÓTICA PEIRCEANA

Neste segundo capítulo apresentamos outro referencial teórico que sustenta esta pesquisa: a Semiótica na perspectiva de Peirce. Para isso, este capítulo segue a seguinte estrutura: inicialmente apresentamos alguns conceitos de semiótica, depois apresentamos a semiótica peirceana e a produção de significados, signo e *representâmen*, semiose, categorias fenomenológicas e tricotomias peirceanas e, por fim, os signos triádicos peirceanos na Educação Matemática.

2.1 SEMIÓTICA: ALGUNS CONCEITOS

O século XX foi marcado, dentre outras coisas, pelo nascimento e crescimento de duas diferentes ciências da linguagem: a Linguística e a Semiótica. A primeira trata de linguagem verbal, enquanto a segunda é a ciência de toda e qualquer linguagem (SANTAELLA, 2008b). Segundo Santaella (2008b):

> É tal a distração que a aparente dominância da língua provoca em nós que, na maior parte das vezes, não chegamos a tomar consciência de que o nosso estar-no-mundo, como indivíduos sociais que somos, é mediado por uma rede intrincada e plural de linguagem, isto é, que [...] também nos comunicamos e nos orientamos através de imagens, gráficos, sinais, setas, números, luzes... Através de objetos, sons musicais, gestos, expressões, cheiro e tato, através do olhar, do sentir e do apalpar. Somos uma espécie animal tão complexa quanto são complexas e plurais as linguagens que nos constituem como seres simbólicos, isto é, seres de linguagem (SANTAELLA, 2008b, p. 7).

Nesta pesquisa nos direcionamos à correspondência entre linguagem e as situações elaboradas por meio da Matemática, ou seja, ao comportamento referencial da linguagem para analisar como ela pode comunicar algo a alguém. Para isso, faz-se necessário um olhar para o que dentro da Semiótica é chamado de signo.

Na “ciência geral de todas as linguagens” (SANTAELLA, 2008b, p. 7), um dos pilares centrais é a definição de signo. Etimologicamente a palavra signo vem

> [...] do latim “signum”, vem do étimo grego secnom, raiz do verbo “cortar”, “extrair uma parte de” (naquele idioma) e que [...] a raiz primitiva parece indicar que “signo” seria algo que se referisse a uma coisa maior do que foi extraído: uma folha em relação a uma árvore, um dente em relação a um bicho etc (PIGNATARI, 1981, p. 23).

Ferdinad de Saussure (1857–1913), Charles Sanders Peirce (1839–1914) e Lev Semenovitch Vygotsky (1896–1934) elaboraram três tradições e caraterizações de semiótica. Saussure, Vygotsky e Peirce concebiam a semiótica dentro de problemáticas específicas e diferentes, segundo Radford (2006), conforme apresentado no Quadro 3.

Quadro 3 – Diferenças entre as tradições semióticas de Saussure, Peirce e Vygotsky

	Problemática específica	**Entendimento de signo**
Sausurre	Compreensão da língua que distingue de linguagem e da palavra em oposição ao social e ao subjetivo.	São simples marcas que representam o mundo e signo só tem significado quando está aliado a outros signos.
Peirce	Como os signos significam no desenrolar da vida social e como um indivíduo genérico utiliza signos para formar novas ideias e novos conceitos.	Representa algo para alguém, isto é, toma o lugar deste (objeto do signo).
Vygotsky	Desenvolvimento cognitivo no qual os conceitos de trabalho e de ferramenta desempenham papel fundamental.	Desempenha uma função mediadora entre o indivíduo e seu contexto.

Fonte: elaborado a partir de Radford (2006).

A partir das diferentes tradições de semiótica apresentadas, nossa pesquisa se fundamenta na semiótica peirceana, aquela relativa à ciência dos signos.

2.2 SEMIÓTICA PEIRCEANA: ALGUNS APONTAMENTOS

O americano Charles Peirce foi matemático, historiador, cientista, filósofo, lógico e considerado o fundador da semiótica moderna. A semiótica em sua perspectiva, também denominada semiótica peirceana, pode ser dividida em duas áreas estreitamente ligadas. Segundo Fidalgo e Gradim (2005),

> uma taxonomia, que se ocupa da sistematização e classificação exaustiva dos diferentes tipos de signo possíveis; e uma lógica, que se ocupa do seu modo de funcionamento (como significam os signos) e do papel que estes desempenham na cognição humana e no acesso do homem ao mundo da experiência e do vivido (FIDALGO; GRADIM, 2005, p. 141-142).

Na perspectiva peirceana, o pensamento não existe sem representações e estas são basilares para toda e qualquer atividade cognitiva. E por representação entende-se colocar-se no lugar de, relacionar-se com um outro de tal maneira que seja considerado mentalmente como esse outro. Peirce (2012) chamou o que representa de representâmen e o que é representado de representação.

Paula e Otte (2013, p. 7599) afirmam que “não há pensamento sem representação e a representação é a base e fonte geradora e impulsionadora de toda atividade cognitiva”. Além disso, para que algo seja considerado um signo, é necessário e suficiente que ele represente ou relacione-se a uma outra coisa. Essa outra coisa é chamada de *objeto*. Desse modo, expande-se a definição dada anteriormente por Peirce (1972), pois:

> Um signo, ou ‘representâmen’, é aquilo que, sob certo aspecto ou modo, representa algo para alguém. Dirige-se a alguém, isto é, cria, na mente dessa pessoa, um signo equivalente, ou talvez um signo mais desenvolvido. Ao signo assim criado denomino ‘interpretante’ do primeiro signo. O signo representa alguma coisa, seu ‘objeto’. Representa esse objeto não em todos os seus aspectos, mas com referência a um tipo de ideia que eu, por vezes, denominei ‘fundamento’ do representâmen (PEIRCE, 1972, p. 94).

Aquilo que Peirce definiu como fundamento do representâmen, o objeto, pode ainda ser classificado em dois tipos: imediato ou dinâmico. Segundo Sáenz-Ludlow e Kadunz (2016):

> O objeto real[9] do SIGNO não muda quando é codificado em diferentes signo-veículos[10] e interpretado por pessoas diferentes. O objeto dinâmico é o objeto mutável subjetivamente construído na mente do intérprete, como resultado de interpretações contínuas de signos-veículos diferentes, porém inter-relacionados. O objeto imediato é constituído pelos aspectos do objeto real materializados em um signo-veículo (SÁENZ-LUDLOW; KADUNZ, 2016, p. 3, tradução nossa e grifos do autor)[11].

Nesse sentido, Santaella (2007, p. 7) corrobora dizendo que “o signo é um primeiro (algo que se apresenta à mente), ligando um segundo (aquilo que o signo indica, se refere ou representa) a um terceiro (o efeito que o signo irá provocar em um possível intérprete)”. A esse terceiro, Peirce caracterizou como interpretante. Com isso, o signo estabelece uma mediação triádica entre objeto, representâmen e interpretante, conforme Figura 5.

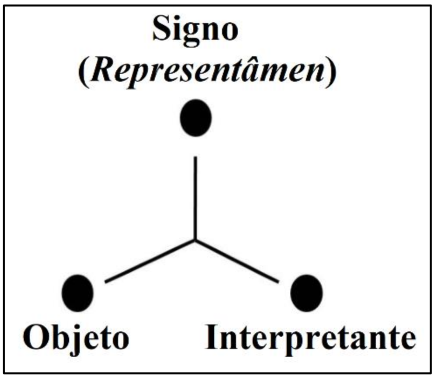
---

[9] O termo “objeto real” é sinônimo ao termo semiótico “objeto” usado em nossa pesquisa.

[10] O termo “signo-veículo” é sinônimo ao termo semiótico “*representâmen*” usado em nossa pesquisa.

[11] Texto traduzido do original em inglês: “The real Object of the SIGN does not change when it is encoded into different sign-vehicles and interpreted by different people. The dynamic object is the changing object subjectively constructed in the mind of the interpreter as a result of ongoing interpretations of different yet interrelated sign-vehicles. The immediate object is constituted by those aspects of the real Object materialized in a sign-vehicle.”

Figura 5 – Relação triádica do signo



Fonte: Adaptado de OTTE, 2006, p. 32.

Quando tratamos o pensamento humano como uma atividade semiótica, tratamos da ação dos signos em sua relação triádica, conforme Figura 5. O signo por si só é algo diferente do objeto, mas também é determinado pelo objeto. Santaella (2008a, p. 25) afirma que “a ação do signo ou autogeração só se consuma porque ele determina o interpretante (terceiro), que, sendo criado pelo signo, estará mediatamente determinado pelo mesmo objeto que determina o signo”.

Essa ação que determina o interpretante é denominada na semiótica peirceana como Semiose. De acordo com Nöth (2008) é por meio da semiose que o signo faz gerar novos signos no intérprete, por meio de um efeito cognitivo transformador.

Para refinar ainda mais a noção de objeto, Peirce apresenta o conceito de experiência colateral. Segundo Santaella (2007, p. 22), caracteriza-se como “à intimidade prévia com aquilo que o signo denota”. Sendo assim, Peirce afirma que para identificar o objeto dinâmico o intérprete depende da experiência colateral (SANTAELLA, 2007).

Para que melhor possam ser entendidos e organizados os processos de semiose, Peirce organizou em três categorias de signos que têm a ver com como eles são percebidos, apreendidos e significados. Na primeira tríade trata-se da relação do signo/representâmen com ele mesmo; a segunda trata-se da relação do signo e objeto; e, a terceira e última tríade, trata da relação do signo com seu interpretante (SANTOS NETO; MACHADO, 2014).

Além disso, para Peirce, em cada uma das três relações há novas relações triádicas, que foram denominadas: primeiridade, secundidade e terceridade.

Para Peirce é na primeiridade que os fenômenos são sentidos, no que ele denomina puro sentir, ou seja, "[...] é uma condição de acesso irreflexivo não mediado. Os primeiros são experiência sem reação, causa sem efeito. É um primeiro nível de significado derivado de processos corporais e sensoriais" (SÁENZ-LUDLOW; KADUNZ, 2016, p. 3, tradução nossa[12]).

Por exemplo, no contexto matemático, podemos considerar primeiridade quando um estudante vê pela primeira vez em seu livro didático uma expressão algébrica e ainda não estabelece nenhuma referência, lendo apenas as letras, números e símbolos apresentados. Assim, o estudante tem uma primeira impressão do objeto matemático antes de estabelecer relação com outros objetos de conhecimento matemático, pois a existência do fenômeno implica na existência de uma qualidade, uma primeiridade.

Entretanto, a qualidade não é todo o fenômeno, pois a qualidade só existe se está presente na matéria. A relação entre qualidade e existência é uma relação diádica, ou seja, uma secundidade. Para Santaella (2008b):

> A factualidade do existir (secundidade) está nessa corporificação material. A qualidade de sentimento não é sentida como resistindo num objeto material. É puro sentir, antes de ser percebido como existindo num eu. Por isso, meras qualidades não resistem. É a matéria que resiste. Por conseguinte, qualquer sensação já é pivô do pensamento, aquilo que move o pensar, retirando-o do círculo vicioso do amortecimento (SANTAELLA, 2008b, p. 30-31).

Sáenz-Ludlow e Kadunz (2016) complementam a caracterização de secundidade apresentada por Santaella (2008b) dizendo que esta "[...] é uma condição de acesso mediado, mas ainda não reflexivo. Segundos são a experiência e a reação que ela causa junto com o efeito que provoca; mas ainda não é uma reflexão sobre a reação ou o efeito (SÁENZ-LUDLOW; KADUNZ, 2016, p. 4, tradução nossa[13]).

Assim, no contexto matemático, há secundidade quando, depois de estabelecer uma primeiridade com a expressão algébrica apresentada no livro

---

[12] Traduzido do texto em inglês: "[…] is a condition of unmediated unreflexive access. Firsts are experience without reaction, cause without effect. It is a first level of meaning derived from bodily and sensory processes".

[13] Traduzido do texto em inglês: "[…] is a condition of mediated but not yet reflexive access. Seconds are experience and the reaction it causes together with the effect it provokes; but not yet a reflection on the reaction or the effect".

didático, o estudante imediatamente a relaciona com uma equação do 2º grau, por exemplo.

Já na terceridade ocorre a mediação, que faz aproximar qualidade e existência numa síntese intelectual. Trata da generalidade, do crescimento e da inteligência, por meio do qual é possível representar e interpretar o mundo (SANTAELLA, 2008b, p. 31). Segundo Sáenz-Ludlow e Kadunz (2016, p. 4), o terceiro nível de significação é composto de experiência e reação, e inclui a reflexão sobre essa reação.

Para Paula (2014):

> Na Secundidade, já existe uma reação da consciência em relação ao mundo, mas, ainda, sem o governo da camada mediadora da intensionalidade, da razão ou lei. Esta categoria trata das existências particulares (significados), da **extensão**. É, na Terceiridade, que temos a fusão de Primeiridade com a Secundidade, por meio de uma síntese intelectual, e chegamos à **intesionalidade**, o sentido, ou seja, onde se efetiva, por meio dos signos, o modo pelo qual representamos e interpretamos o mundo (PAULA, 2014, p. 154, grifos do autor).

Desse modo, retomando o exemplo dado no contexto matemático para primeiridade e secundidade, o estudante irá alcançar a terceridade quando tenta interpretar a expressão algébrica, analisando a equação do 2º grau apresentada, generalizando e identificando-a como uma equação do 2º grau a partir da expressão generalizada e tentando, em seguida, resolvê-la a partir da fórmula resolutiva de equações do 2º grau, por exemplo.

Os estudos semióticos empreendidos por Peirce considera uma caracterização triádica dos elementos (signo, objeto e interpretante). Ao estabelecer relações entre signo com o objeto, em sua referência àquilo que representa, refere-se ou indica, constitui-se uma teoria da objetivação.

Na objetivação, o signo estabelece três tipos de relação com o objeto: ícone (na primeiridade), índice (na secundidade) e símbolo (na terceridade).

É na primeiridade que os signos como ícones remetem a objetos, ou a características destes (qualidades), ou seja, esta categoria pode ser sintetizada a representação do objeto.

Um ícone sugere ou evoca seu objeto, a qualidade que ele exibe se assemelha a uma outra qualidade. O signo como ícone é caracterizado por Peirce (2012) como:

> A única maneira de comunicar diretamente uma ideia [...]; e todo método de comunicação indireta de uma ideia deve depender, para ser estabelecido, do uso de um ícone. Daí segue-se que toda asserção deve conter um ícone ou conjunto de ícones, ou então deve conter signos cujo significado só seja explicável por ícones. A ideia significada por um conjunto de ícones (ou o equivalente a um conjunto de ícones) contido numa asserção pode ser denominada de predicado da asserção (PEIRCE, 2012, p. 64).

Um índice indica seu objeto pela existência concreta. Santaella (2007), afirma que “os índices envolvem ícones. Mas não são os ícones que os fazem funcionar como signos” (p. 19). Por exemplo, a imagem da montanha apresentada em uma fotografia, tem alguma semelhança com a aparência da montanha, daí temos um ícone. No entanto, a imagem é um índice, pois é o resultado de uma conexão de existência entre a fotografia e a montanha.

Quando se tem signos como índices há uma relação díade entre representâmen e objeto (NÖTH, 2008) e Peirce (2012) os caracteriza pela maneira que

> [...] podem distinguir-se de outros signos, ou representações, por três traços característicos: primeiro, não têm nenhuma semelhança significante com seus objetos; segundo, referem-se a individuais, unidades singulares, coleções singulares de unidades ou a contínuos singulares; terceiro, dirigem a atenção para seus objetos através de uma compulsão cega. Mas seria difícil, senão impossível, citar como exemplo um índice absolutamente puro, ou encontrar um signo qualquer absolutamente desprovido da qualidade indicial. Psicologicamente, a ação dos índices depende de uma associação por contiguidade, e não de uma associação por semelhança ou de operações intelectuais (PEIRCE, 2012, p. 75-76).

Um símbolo representa seu objeto, representa aquilo que a lei determina para que ele represente. Abordando o conceito de símbolo, Peirce (apud OTTE, 2001, p. 14) argumenta que “um símbolo é um signo convencional que associado a um objeto tem certos caracteres. Mas um símbolo, por si mesmo, é um mero sonho; não mostra sobre o que está falando. Precisa estar conectado a seu objeto”.

Para Niemeyer (2003, p. 42) “mesmo onde a essência de um Símbolo é a de livre associação, essa associação não é arbitrária, mas determinada por princípios pré-existentes, inerentes ao tipo de código a que pertence o signo”. Peirce caracteriza símbolo dizendo que:

> A palavra Símbolo possui tantos significados que seria uma ofensa à língua acrescentar-lhe mais um. Creio que a significação que lhe atribuo, a de um signo convencional, ou de um signo que depende de um hábito (adquirido ou nato), não é tanto um novo significado, mas, sim, um retorno ao significado original. [...] Normalmente se diz que na palavra símbolo é preciso entender o “correr junto com” no sentido de “conjecturar”; mas, se fosse este o caso, deveríamos descobrir que algumas vezes, pelo menos, significaria uma conjectura, significado à cuja procura em vão vasculharíamos a literatura (PEIRCE, 2012, p. 72 – grifos do autor).

Com isso, para que um símbolo represente algo, ele deve estar em conexão com um objeto. No contexto matemático, de nada adianta termos um símbolo gráfico, um registro gráfico traçado no papel se este não for associado a um objeto matemático.

Ao estabelecer relações entre signo e interpretante – interpretante esse que é produzido pelo signo na mente do intérprete – constitui-se uma teoria da interpretação.

Na interpretação, o signo estabelece três tipos de relação com o interpretante: rema, dicente e argumento.

Segundo Silva (2008), quando o signo em relação ao seu interpretante

> for um signo que designa qualidade [...], temos uma rema, ou seja, uma conjectura ou hipótese. [...] Por exemplo, quando dizemos que uma figura desenhada no papel é um retângulo, essa afirmação não passa de conjectura, uma vez que o retângulo não apresenta dimensão nem espessura [;] se referir à existência [...], ao real, àquilo que pode ser verificado, temos um dicente. [...] Por exemplo, quando dizemos que o livro está na prateleira, este é um signo de existência real, pois pode ser observado no local em que o livro deveria estar [;] se referir a uma lei [...], temos um argumento. [...] Ele somente representa seu objeto quando realiza uma conexão com leis preestabelecidas coletivamente que determinam que o objeto deva ser representado por aquele signo. Por exemplo, a representação gráfica de uma função linear (SILVA, 2008, p. 38).

As teorias semióticas de objetivação e interpretação, bem como outras teorias semióticas possibilitam enriquecer e aprofundar explicações para as complexidades presentes nos processos de ensino e de aprendizagem em sala de aula. Com isso, a semiótica peirceana ganhou boa aceitação nas pesquisas em Educação Matemática, nos últimos 20 anos (SÁENZ-LUDLOW; KADUNZ, 2016).

A ciência geral de todas linguagens estabelecida por Peirce encontrou terreno fértil no âmbito da Educação Matemática, ao tratar dos signos que emergem de objetos matemáticos, pois esta constitui-se de objetos de natureza simbólica cuja produção de significados e construção de conhecimentos está atrelada a mediação de diferentes representações (algébricas, geométricas, aritméticas e gráficas) dos objetos matemáticos ou, ainda, pela construção e uso dessas diferentes representações.

Nesse mesmo sentindo, Sáenz-Ludlow e Kadunz (2016) apontam que:

> Consequentemente, a produção de significado de objetos reais matemáticos (isto é, conceitos) pode ser vista como um processo inferencial e recursivo mediado por uma diversidade de signos-veículos matemáticos. Este

> processo é inferencial no sentido que foi discutido anteriormente [(podem indicar apenas alguns aspectos de um objeto real)]. É recursivo no sentido de que objetos dinâmicos, construídos em um momento interpretativo específico, são modificados e refinados em atos subsequentes de interpretação. Esta atividade matemática mediada por signos-veículos matemáticos constitui a atividade semiótica (ou seja, semiose matemática) dos participantes da sala de aula – atividade que é continuamente transformada através da colaboração interpretativa e elaboração de professores e alunos (SÁENZ-LUDLOW; KADUNZ, 2016, p. 14-15, tradução nossa[14]).

Além disso, podemos argumentar que para descrever conceitos matemáticos ou resolver situações-problema dessa natureza, estudantes de matemática constroem seu conhecimento registrando seu pensamento e pensando sobre aquilo que registraram, ou seja, a partir de diferentes representações os signos que emergem das mesmas geram interpretantes que auxiliam na produção de significados e internalização dos objetos matemáticos pretendidos.

Segundo Hoffmann (2006, p. 280) “aprender matemática envolve assumir os significados convencionais dos signos matemáticos, mas também depende da alternância entre diferentes possibilidades de interpretação[15]”, alternância esta que é dada a partir das diferentes representações dos objetos matemáticos.

Como nesta pesquisa nosso foco está em uma alternativa pedagógica específica para as aulas de Matemática, a modelagem, e considerando os aportes teóricos que apresentamos a respeito de semiótica, identificamos que Almeida, Silva e Vertuan (2011) articulam relações entre os signos triádicos peirceanos e modelagem[16] propondo que:

> Como atividade de investigação, o desenvolvimento de uma atividade de Modelagem Matemática diz respeito a uma ‘qualidade’ (um fenômeno), uma ‘reação’ (a identificação de um problema e a definição de metas de resolução) e uma ‘representação’ (associada à solução para o problema identificado). Neste sentido podemos associar este desenvolvimento às categorias fenomenológicas estabelecidas por Peirce (Primeiridade, Secundidade e Terceiridade) e, consequentemente, aos níveis de relações

---

[14] Traduzido do texto em inglês: “Consequently, meaningmaking of mathematical real Objects (i.e., concepts) can be seen as an inferential, recursive process mediated by a diversity of mathematical sign-vehicles. This process is inferential in the sense that was argued before. It is recursive in the sense that dynamic objects, constructed at a particular interpreting moment, are modified and refined in subsequent acts of interpretation. This mathematical activity mediated by mathematical sign-vehicles constitutes the semiotic activity (i.e., mathematical semiosis) of the classroom participants—activity which is continually transformed through the interpretive collaboration and elaboration of teacher and students.”

[15] Traduzido do texto: “Learning mathematics involves taking over the conventional meanings of mathematical signs, but it also depends on switching between different possibilities of interpretation”.

[16] No capítulo 3 apresentamos também articulações entre modelagem e semiótica presentes na literatura.

> identificados para os signos (significação, objetivação e interpretação) (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2011, p. 12).

Em nossa investigação, focamos nosso olhar nos signos presentes nas situações-problema dos LDM, nos registros escritos e audiovisuais e na entrevista realizada com a professora regente de uma turma do primeiro ano do Ensino Médio, buscando evidenciar na relação do signo com o objeto (objetivação) e do signo com o interpretante (interpretação), características cognitivas comuns em salas de aula em que são desenvolvidas atividades de modelagem a partir de situações-problema presentes em LDM.

3 ASPECTOS METODOLÓGICOS E ANALÍTICOS DA PESQUISA

Neste capítulo apresentamos aspectos metodológicos e analíticos de nossa pesquisa, as articulações existentes na literatura entre modelagem e livro didático, modelagem e semiótica e a descrição de nosso produto educacional. Assim, este capítulo segue a seguinte estrutura: primeiro apresentamos caracterizações de uma pesquisa qualitativa, e em seguida, pesquisas realizadas em mestrados profissionais que tratam de LDM e modelagem, depois articulações entre modelagem e semiótica, na sequência, apresentamos aspectos caracterizantes desta pesquisa, bem como seus aspectos analíticos. E, por fim, a descrição do nosso produto educacional.

3.1 CARACTERIZAÇÕES DE UMA PESQUISA QUALITATIVA

Bogdan e Biklen (1994) apresentam que uma investigação qualitativa é descritiva e o foco está no processo de investigação e não simplesmente nas conclusões alcançadas. Esses mesmos autores ainda consideram, nesse tipo de pesquisa, que "tudo tem potencial para constituir uma pista que nos permita estabelecer uma compreensão mais esclarecedora do nosso objeto de estudo" (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p. 43).

De acordo com Garnica (2004, p. 86), uma pesquisa qualitativa tem as seguintes características:

> (a) a transitoriedade de seus resultados; (b) a impossibilidade de uma hipótese a priori, cujo objetivo da pesquisa será comprovar ou refutar; (c) a não neutralidade do pesquisador que, no processo interpretativo, vale-se de suas perspectivas e filtros vivenciais prévios dos quais não consegue se desvencilhar; (d) que a constituição de suas compreensões dá-se não como resultado, mas numa trajetória em que essas mesmas compreensões e também os meios de obtê-las podem ser (re) configuradas; e (e) a impossibilidade de estabelecer regulamentações, em procedimentos sistemáticos, prévios, estáticos e generalistas.

Ressaltamos que Bogdan e Biklen (1994) afirmam que, para uma pesquisa ser considerada qualitativa, não necessariamente, deve englobar integralmente todas as características que identificam este tipo de pesquisa, mas "trata-se de uma questão de grau" (p. 47), ou melhor, tais pesquisas podem ou não apresentar todas as características e ainda, explorar algumas mais profundamente que outras.

A partir das caracterizações dadas por Bogdan e Biklen (1994) e Garnica (2004) acreditamos que nossa pesquisa é de cunho qualitativo.

Estabelecido o tipo de pesquisa realizada nesta dissertação, buscamos relações entre modelagem e livros didáticos de Matemática feitas estritamente em outras dissertações de mestrados profissionais. Fizemos tal delimitação pelo fato de serem esses dois temas o foco principal de nossa pesquisa. Assim verificamos como outras pesquisas estabeleciam articulações entre LDM e modelagem.

3.2 PESQUISAS REALIZADAS EM MESTRADOS PROFISSIONAIS A RESPEITO DE LDM E ATIVIDADES DE MODELAGEM

O Mestrado Profissional é uma modalidade de pós-graduação *stricto sensu* ainda muito recente, pois foi regulamentado pela Portaria Normativa número 17, de 28 de dezembro de 2009. O intuito é que se aproximem as pesquisas desenvolvidas com os professores no âmbito acadêmico com os profissionais que atuam na Educação Básica, sendo também produzidos nessa modalidade de pós-graduação, produtos educacionais que visam incentivar os professores da Educação Básica a usarem tais materiais em sala de aula.

Por ser recente, ainda não há muitas pesquisas desenvolvidas. Como em nosso trabalho buscamos uma aproximação com os profissionais que estão inseridos nas etapas anteriores ao Ensino Superior, pensamos que seria válido identificar nessa modalidade de pós-graduação se há pesquisas feitas a respeito de LDM. Em caso afirmativo, que pesquisas têm sido feitas a respeito de livros didáticos de matemática e, além disso, se dentro dessas pesquisas há propostas que busquem inserir ou incentivar o uso de atividades encaminhadas por meio da Modelagem Matemática em sala de aula, identificando então, que já existem outros trabalhos que tem tentado aproximar as práticas pedagógicas dos professores que usam livros didáticos com atividades de modelagem, incentivando-os por meio dos produtos educacionais produzidos.

Assim, nossas buscas foram feitas em sites oficiais de programas de mestrado profissional, a partir de dados obtidos no sistema SUCUPIRA. A partir da consulta neste sistema para selecionarmos as dissertações que consideraríamos, optamos pelos seguintes critérios: todo título de dissertação que contenha a palavra “livro”, ou as palavras “livro didático”. Assim, obtivemos um total de 43 dissertações.

Em seguida, realizamos uma nova delimitação nos trabalhos selecionados previamente, observando se algum deles apresentava relação com modelagem matemática. Foi identificado que sete das 43 dissertações utilizam em seus textos os termos “modelagem ou modelagem matemática”.

Assim, ainda que o mestrado profissional seja recente em nosso país, vimos que há pesquisas sendo feitas buscando aproximar a modelagem das práticas de professores inseridos na Educação Básica estabelecendo articulações com LDM.

Além disso, olhamos para dissertações de mestrados profissionais já que este trabalho também está inserido nesta modalidade, mas há trabalhos de mestrados e doutorados acadêmicos e artigos em periódicos que também visam estabelecer articulações entre Modelagem Matemática e Livro Didático de Matemática.

3.3 ARTICULAÇÕES ENTRE MODELAGEM E SEMIÓTICA: PESQUISAS REALIZADAS

Identificamos possíveis articulações entre modelagem e semiótica no Quadro 4, que é uma adaptação das informações contidas em Almeida e Silva (2014), de Ramos (2016) e de Mendes (2018).

Entretanto, nesse caso, não delimitamos nossas buscas apenas a dissertações profissionais, mas verificamos de que maneira fora estabelecida a articulação entre modelagem e semiótica peirceana (perspectiva adotada nesse trabalho) em diversos trabalhos de Educação Matemática.,.

Quadro 4 – Articulações entre Modelagem Matemática e Semiótica

Autores	**Tipo de pesquisa**	**Síntese da articulação entre modelagem e semiótica**
Kehle e Cunninghan (2000)	Artigo publicado em periódico	Relacionam os diferentes tipos de raciocínio (abdução, indução e dedução) com as diferentes etapas de uma tarefa de modelagem.
Carreira (2001)	Artigo publicado em periódico	Busca possíveis semelhanças entre modelos e metáforas.
Kehle e Lester (2003)	Artigo publicado em livro	Relacionam os diferentes tipos de raciocínio (abdução, indução e dedução) com as categorias fenomenológicas no desenvolvimento de uma tarefa

		de modelagem.
Silva (2008)	Dissertação de mestrado	Busca relações entre modelagem e semiótica a partir de categorizações dos signos e modos de inferência (indução, abdução e dedução).
Almeida (2010)	Artigo publicado em periódico	Apresenta possíveis aproximações entre modelos matemáticos e metáforas em tarefas de modelagem.
Almeida, Silva e Vertuan (2011)	Artigo publicado em periódico	Inferem que há ações primeiras, segundas e terceiras em tarefas de modelagem, em consonância com as categorias fenomenológicas de primeiridade, secundidade e terceridade caracterizadas por Peirce.
Almeida e Silva (2012)	Artigo publicado em periódico	Concluem que os diferentes tipos de raciocínios (indução, abdução e dedução) ativados em uma tarefa de modelagem estão associados às ações cognitivas dos alunos.
Williams e Wake (2007)	Artigo publicado em periódico	Afirmam que a tarefa de modelagem possibilita a organização e elaboração de signos.
Mendes (2018)	Dissertação de mestrado	Evidencia que o desenvolvimento de uma sequência de tarefas de modelagem matemática possibilita a organização e a elaboração de signos de maneira que é possível ter acesso àquilo que o estudante está construindo em relação ao conhecimento matemático.
Ramos (2016)	Dissertação de mestrado	Infere que atividades de modelagem matemática têm

		características que desencadeiam o raciocínio abdutivo no aluno e atua sobre seu processo criativo.
Pontes (2018)	Tese de doutorado	Buscou as implicações do ensino, na perspectiva da Modelagem Matemática, por meio de uma análise cognitiva, embasada na Teoria dos Registros de Representação Semiótica.
Veronez (2013)	Tese de doutorado	Conclui que a dinamicidade e complementaridade dos signos influenciam o encaminhamento que os alunos dão ao desenvolvimento das tarefas de modelagem matemática.

Fonte: Adaptado de: Almeida e Silva, 2014, p. 88-90; de Ramos (2016); e Mendes (2018).

A partir dos trabalhos apresentados no Quadro 4, percebe-se que há diversas possibilidades de articulações entre modelagem e semiótica, assim como no tópico anterior registramos diversas pesquisas em mestrados profissionais articulando modelagem e livro didático. Assim, identificamos nesses trabalhos diferentes possibilidades de se repensar a prática em sala de aula, por parte dos professores, e de alternativas pedagógicas que tornam ativa a participação de alunos nos processos de ensino e aprendizagem.

Além disso, não encontramos na literatura trabalhos que articulassem Modelagem Matemática, Semiótica e o uso de Livros Didáticos de Matemática e, sendo assim, consideramos ser relevante tentar estabelecer tais articulações entre estas três temáticas visto a importância do LDM para professores, de maneira geral, bem como os pontos positivos destacados até aqui a respeito de tarefas de modelagem e o uso de semiótica.

3.4 ASPECTOS CARACTERIZANTES DESTA PESQUISA

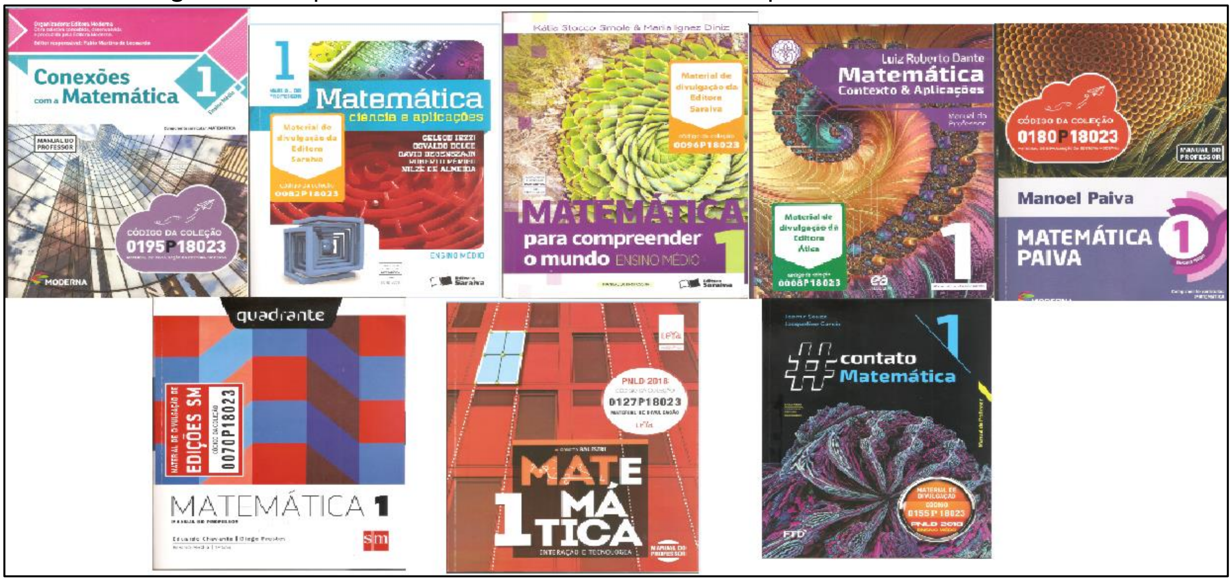
Estudada a fundamentação teórica de nossa pesquisa, nosso próximo passo foi selecionar tarefas em livros didáticos aprovados no Programa Nacional do Livro e do Material Didático 2018 (PNLD–2018) que têm potencial para serem encaminhadas enquanto atividades de modelagem matemática. Com o intuito de responder nossa questão de pesquisa “*Que situações-problema, que tratam de funções definidas por mais de uma sentença, presentes em livros didáticos do PNLD–2018, têm potencial para serem encaminhadas enquanto atividades de Modelagem Matemática?*”, delineamos as seguintes questões norteadoras:

- como selecionar, nos LDM, situações-problema para serem encaminhadas por meio da modelagem, em particular, situações-problema que tratam de funções definidas por mais de uma sentença?
- o que caracteriza que uma tarefa presente no LDM tenha “potencial para” ser encaminhada enquanto atividade de modelagem?
- como pode se configurar o potencial para ser encaminhada uma atividade de modelagem planejada a partir do LDM, no primeiro momento de familiarização dos alunos com atividades de Modelagem Matemática?

Para isso, em uma primeira etapa, fizemos uma análise das características de tarefas presentes em LDM por meio da Semiótica de Peirce e da Modelagem Matemática como alternativa pedagógica (buscando responder a primeira questão e parcialmente a segunda). Com isso, a potencialidade, em certa medida, foi atrelada aos signos que se configuraram na sua apresentação. Numa segunda etapa dessa pesquisa, desenvolvemos essas tarefas com alunos de um primeiro ano do Ensino Médio (buscando complementar a resposta da segunda questão e responder a terceira).

No PNLD–2018 foram aprovadas oito coleções para o Ensino Médio (BALESTRI, 2016; CHAVANTE; PRESTES, 2016; DANTE, 2017; IEZZI et al., 2016; MODERNA, 2016; PAIVA, 2015; SMOLE; DINIZ, 2017; SOUZA; GARCIA, 2016). Na Figura 6 estão as capas dos livros do primeiro ano do Ensino Médio de cada uma dessas coleções.

Figura 6 – Capas dos LDM do 1º do Ensino Médio aprovados no PNLD–2018

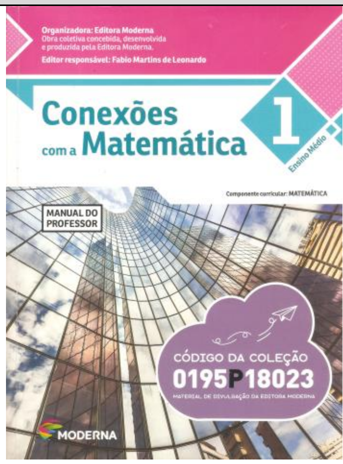
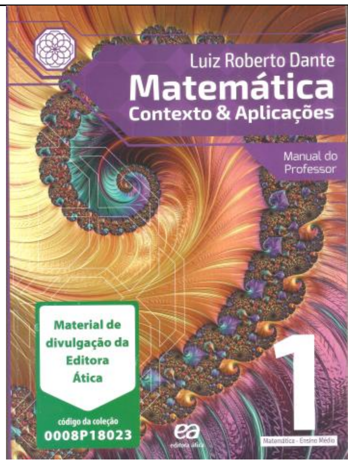


Fonte: dos autores.

Depois de identificarmos que analisaríamos os dados das obras aprovadas no PNLD de 2018, fizemos um novo recorte dos dados. Para isso, consideramos a pesquisa feita em Gois, Silva e Dalto (2019) em que, utilizando questões retiradas de LDM e também elaboradas por eles, evidenciaram dificuldades de alunos do Ensino Superior, numa disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, a respeito do objeto matemático função definida por mais de uma sentença – objeto de conhecimento matemático estudado na Educação Básica.

A partir dos resultados obtidos em Gois, Silva e Dalto (2019), optamos por analisar, dentre as oito coleções, aquelas em que o objeto matemático função definida por mais de uma sentença aparecesse no sumário do livro, seja como capítulo ou um tópico. Em cinco coleções do primeiro ano é abordado o conceito de função definida por mais de uma sentença e é sobre elas que direcionamos nosso olhar (MODERNA, 2016; DANTE, 2017; IEZZI et al., 2016; PAIVA, 2015; SMOLE; DINIZ, 2017). No Quadro 5 identificamos essas cinco coleções pelos códigos LDM1, LDM2, LDM3, LDM4 e LDM5.

Quadro 5 – Codificação dos livros didáticos de Matemática que direcionamos nosso olhar

Código	Referência	Capa do LDM
LDM1	MODERNA (Organizadora). *Conexões com a Matemática.* 3ª ed., São Paulo: Moderna, 2016.	
LDM2	DANTE, L. R. *Matemática:* contextos e aplicações – ensino médio, volume 1.3ª ed., São Paulo: Ática, 2017.	
LDM3	IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D.; PÉRIGO, R.; ALMEIDA, N. *Matemática:* ciências e aplicações – ensino médio, volume 1. 9ª ed., São Paulo: Saraiva, 2016.	

LDM4	PAIVA, M. *Matemática:* Paiva. 3ª ed., São Paulo: Moderna, 2015.	
LDM5	SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. *Matemática para compreender o mundo 1.* 1ª ed., São Paulo: Saraiva, 2017.	

Fonte: dados da pesquisa.

No Quadro 6, apresentamos para cada uma das cinco coleções como o objeto funções definidas por mais de uma sentença aparece nos livros didáticos do Ensino Médio, buscando evidenciar que ainda que seja explorado nas cinco coleções, cada uma delas apresenta tal objeto de diferentes maneiras: um capítulo próprio para este objeto matemático; até um dos tópicos de um capítulo; um tópico que finaliza determinado tema.

Quadro 6 – Como o objeto funções definidas por mais de uma sentença aparece nos livros didáticos

Código	Como aparece no sumário o objeto função definida por mais de uma sentença	Digitalização do sumário
LDM1	Como um tópico no capítulo intitulado “Funções” e nominado como “Funções definidas por mais de uma sentença”.	Capítulo 3 Funções 1. Conceito de função ..... 54 2. Gráfico de uma função ..... 61 3. Análise de gráficos de funções ..... 66 4. Função polinomial ..... 71 5. Funções definidas por mais de uma sentença ..... 72 6. Função inversa ..... 74 Exercícios complementares ..... 79 Autoavaliação ..... 81 Compreensão de texto 82
LDM2	Como um tópico no capítulo intitulado “Função afim e função modular” e nominado como “Funções poligonais ou afins por partes”.	CAPÍTULO 3 Função afim e função modular 1 Situações iniciais ..... 74 2 Definição de função afim ..... 75 3 Valor de uma função afim ..... 75 Valor inicial ..... 75 4 Taxa de variação média da função afim $f(x) = ax + b$ ..... 76 Propriedade ..... 76 5 Determinação de uma função afim ..... 78 6 Gráfico da função afim $f(x) = ax + b$ ..... 79 Traçado de gráficos de funções afins ..... 79 7 Conexão entre função afim e Geometria analítica ..... 84 Equação da reta ..... 84 8 Zero da função afim ..... 85 Interpretação geométrica ..... 85 9 Estudo do sinal da função afim e de inequações do 1º grau ..... 85 Sistema de inequações do 1º grau ..... 87 Inequações-produto e inequações-quociente ..... 87 10 Outras conexões ..... 90 Função afim e progressão aritmética (PA) ..... 90 Função afim e a Física ..... 90 Função linear e proporcionalidade ..... 93 Função linear e escalas ..... 96 11 Funções poligonais ou afins por partes ..... 97 Função módulo ..... 97 Gráfico da função modular ..... 97 Outros gráficos de funções modulares 99

LDM3	Como um capítulo e um tópico deste mesmo capítulo intitulados como "Função definida por mais de uma sentença".	Capítulo 6 — Função definida por várias sentenças Função definida por mais de uma sentença 115 Gráfico 118 Módulo de um número real 120 Interpretação geométrica 120 Propriedades 121 Função modular 122 Gráfico 122 Outros gráficos 123 Equações modulares 124 Inequações modulares 126
LDM4	Como um tópico no capítulo intitulado "Função polinomial do 1º grau ou função afim" e nominado como "Funções definidas por mais de uma sentença".	Capítulo 6 Função polinomial do 1º grau ou função afim 156 1 Função polinomial do 1º grau ou função afim 157 2 Gráfico da função polinomial do 1º grau 158 3 Funções definidas por mais de uma sentença 166 4 Variação de sinal da função afim 168 5 Inequação-produto 170 6 Inequação-quociente 171 Exercícios complementares 172 Pré-requisitos para o capítulo 7 174 Trabalhando em equipe 175 Análise da resolução 175 Matemática sem fronteiras 176
LDM5	Como um tópico no capítulo intitulado "Operações entre funções" e nominado como "Funções definidas por partes".	Capítulo 9 – Operações entre funções 212 1. As quatro operações básicas entre números e novas funções 213 2. Composição de funções 215 3. Inversão de funções 219 4. Funções definidas por partes 222 5. Função modular 225 Entre saberes – Medida confiável é sempre duvidosa 230

Fonte: dados da pesquisa.

Quando uma atividade de modelagem é introduzida nas aulas de Matemática deve-se considerar dois aspectos pertinentes: o primeiro é que a matemática que será utilizada pelos alunos não será escolhida ou definida, mas irá emergir do problema proposto e de suas especificidades; e o segundo aspecto é que surgirão diferentes percepções para uma mesma situação-problema e ademais de diferentes critérios do que se considera uma solução aceitável para a solução proposta (ALMEIDA , 2018, p. 19).

Assim, ao analisarmos tarefas relacionadas ao objeto matemático funções definidas por mais de uma sentença nos livros didáticos, não tínhamos por objetivo determinar o objeto de conhecimento que iria emergir no desenvolvimento das atividades de modelagem, mas evidenciar se tais atividades permitiam que tal matemática emergisse. As análises das situações identificadas nos cinco volumes que empreendemos se encontram no próximo capítulo desta pesquisa.

Já com relação à segunda etapa desta pesquisa, relatamos a seguir características da turma que participou da coleta de dados, o desenvolvimento das tarefas, os instrumentos utilizados na coleta de dados e a respeito da entrevista realizada com a professora regente da turma.

3.4.1 A turma

Para realizar a pesquisa, foi entregue à equipe pedagógica do colégio, onde os dados foram coletados, um termo de autorização (Apêndice B) que continha informações do pesquisador e de sua orientadora, bem como a que Universidade a pesquisa em questão estava vinculada.

Ao todo, 21 estudantes de uma turma do primeiro ano do Ensino Médio matutino (9 meninas e 12 meninos) participaram das atividades e foram organizados em quatro grupos. Foram coletados os registros escritos e áudio visuais no desenvolvimento das atividades com os alunos. Além disso, os alunos se dividiram em três grupos de cinco e um grupo de seis integrantes e esses mesmos grupos foram mantidos em todos os dias de coleta para quando nos referíssemos o aluno A3 ou ao grupo G2 estes fossem os mesmos alunos ou mesmos grupos e não precisássemos fazer qualquer diferenciação.

Para que fosse possível utilizar os dados coletados dos alunos foi também elaborado um termo de assentimento (Apêndice C) e um termo de consentimento (Apêndice D). Como os alunos em questão cursavam o primeiro ano do Ensino Médio, eram todos menores de idade e, por isso, era necessária a autorização de um responsável para que fosse possível utilizar os dados produzidos por cada adolescente, de forma anônima e sem qualquer identificação do sujeito. Além disso, o pesquisador conversou e explicou sua pesquisa aos alunos e pediu que, se concordassem em participar das atividades que seriam desenvolvidas, eles deveriam assentir juntamente ao consentimento dos responsáveis.

3.4.2 A professora da turma

A professora da turma possui graduação em Matemática, Licenciatura, Especialização e Mestrado na área de Educação Matemática, além de lecionar há mais de 25 anos.

Para podermos saber se os alunos já tinham algum contato com outros encaminhamentos metodológicos durante as aulas de matemática, como era desenvolvido o trabalho com os objetos de conhecimento nas aulas de Matemática e também as impressões que os alunos tiveram ao experimentarem atividades de modelagem foi elaborado um roteiro (Apêndice A) e realizada uma entrevista com a professora regente da turma a respeito de modelagem, livro didático e da experiência que ela tinha com a turma.

Para que a coleta de dados fosse realizada durante as aulas de matemática, a professora regente de três turmas do primeiro ano do Ensino Médio, cedeu uma de suas turmas para o desenvolvimento deste trabalho.

As atividades se concentraram às terças-feira de manhã, dia da semana que a professora tinha duas horas/aula de 50 minutos cada com uma das turmas de Ensino Médio, na segunda e terceira aulas dessa sala de primeiro ano.

3.4.3 Atividades desenvolvidas

Para a coleta de dados com os estudantes foram desenvolvidas duas atividades de modelagem, de primeiro momento de familiarização dos alunos com modelagem, que foram adaptadas dos livros didáticos de matemática e intituladas: “Imposto de renda” e “Quanto pago pela água que consumo?”. Os estudantes foram organizados nos mesmos grupos, nos dois dias combinados entre o pesquisador e a professora regente da turma, conforme sintetizado no Quadro 7.

Quadro 7 – Cronograma das atividades desenvolvidas

Data	**Tarefa desenvolvida**	**Número de alunos presentes**
26/06/18	Imposto de renda	21
03/07/18	Quanto pago pela água que consumo?	21

Fonte: dos autores.

Durante as aulas em que foram desenvolvidas as atividades, a professora regente cedeu lugar para que o pesquisador assumisse o papel de professor regente da turma. Sendo combinado que durante estas aulas, os alunos recorreriam apenas ao pesquisador em caso de dúvidas.

Os dados coletados foram obtidos a partir dos registros dos alunos, ou seja, dos manuscritos no desenvolvimento das atividades de modelagem e da gravação de áudios e vídeos captados durante as aulas, que foram posteriormente transcritos.

Esses dados são mencionados nesta pesquisa da seguinte maneira:

• para os alunos utilizamos a letra A seguida de números de 1 a 21 (21 é o total de alunos);

• para referenciar os grupos de trabalho no desenvolvimento das atividades utilizamos a letra G seguida de números de 1 a 4 (4 foi o total de grupos no desenvolvimento das atividades).

Para análise dos dados coletados nesta pesquisa consideramos os referenciais teóricos já mencionados, modelagem e semiótica. Mas, para isso, fez-se necessário codificar os dados, e neste caso o fazemos à luz da Teoria Fundamentada em Dados (TFD), na perspectiva de Kathy Charmaz (2009).

3.5 ASPECTOS ANALÍTICOS DESSA PESQUISA

Segundo Charmaz (2009):

> Codificar significa categorizar segmentos de dados com uma denominação concisa que, simultaneamente, resume e represente cada parte dos dados. Os seus códigos revelam a forma como você seleciona, separa e classifica os dados para iniciar uma interpretação analítica sobre eles (CHARMAZ, 2009, p. 69).

E é por meio da codificação dos dados que podemos, sob uma ótica analítica, identificar os signos presentes nas tarefas dos livros didáticos, os signos que emergem no desenvolvimento das atividades de modelagem e durante a entrevista com a professora regente.

Na TFD há três tipos de codificações existentes: inicial, axial e focalizada.

Os códigos iniciais, segundo Charmaz (2009, p. 74), “são provisórios, comparativos e fundamentados nos dados. São provisórios porque você procura se manter aberto a outras possibilidades analíticas e elabora códigos que melhor se adaptam aos dados que dispõe”.

Nessa codificação os dados são analisados por meio de fragmentos, ou seja, palavra por palavra, linha por linha ou incidente por incidente. Charmaz (2009,

p. 74) ainda complementa que “você segue progressivamente com aqueles códigos que indicam que se ajustam aos dados. Então você reúne dados para investigar e satisfazer a esses códigos”.

A codificação axial “visa a associar as categorias às subcategorias e questiona o modo como elas estão relacionadas” (Charmaz, 2009, p. 91). Essa codificação dos dados é intermediária entre a codificação inicial e focalizada, reagrupando os dados obtidos na codificação inicial para “afunilar” a teoria emergente a partir dos mesmos.

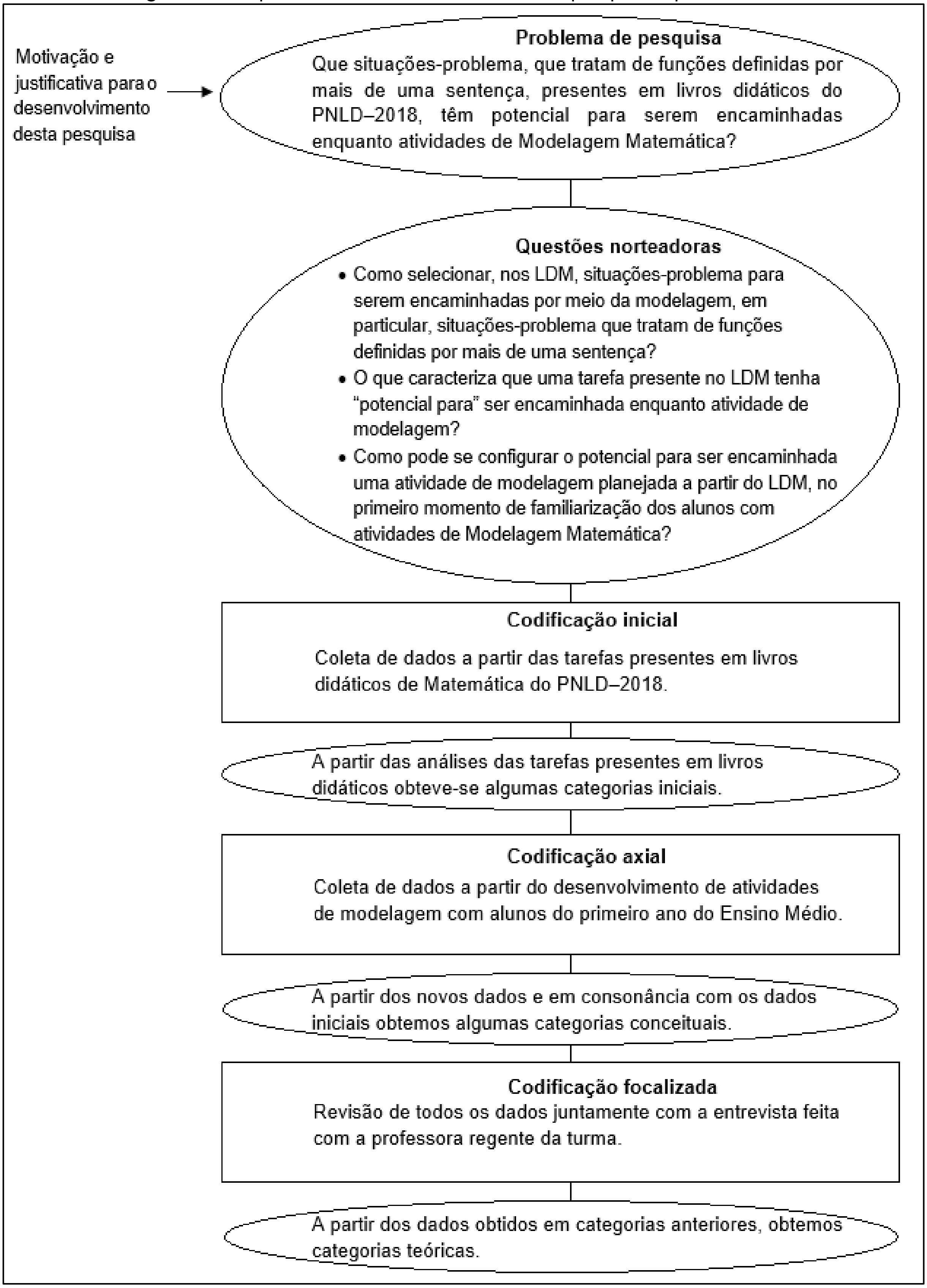
Por fim, a codificação focalizada, utiliza-se os códigos mais significativos ou frequentes que se tornam pilares da teoria desenvolvida. Segundo Charmaz (2009, p. 87) essa codificação “exige a tomada de decisão sobre quais os códigos iniciais permitem uma compreensão analítica melhor para categorizar os seus dados de forma incisiva e completa”.

Ainda segundo Charmaz (2009):

> Por meio da comparação das evidências e ideias de outros estudiosos com a sua teoria fundamentada, você pode apontar onde e como as ideias deles esclarecem as suas categorias teóricas e o modo como a sua teoria amplia, transcende ou questiona as ideias predominantes em seu campo (CHARMAZ, 2009, p. 221).

A partir das caracterizações de três diferentes tipos de codificação e, considerando a Teoria Fundamentada em Dados um instrumento de análise qualitativa na qual nos pautamos neste trabalho, apresentamos a Figura 7.

Figura 7 – Etapas do desenvolvimento de nossa pesquisa a partir da TFD



Fonte: elaborado pelos autores a partir de Charmaz (2009, p. 26).

Na codificação inicial, ao realizar a coleta de dados a partir das tarefas presentes em LDM, obtivemos três grupos de tarefas a partir de características em comum nas estruturas de enunciado.

A partir da organização dos dados nesses três grupos consideramos que três categorias (C01: tarefas com comandos imperativos; C02: tarefas com comandos imperativos e um gráfico ou figura; C03: tarefas com situações-problema no enunciado) emergiram e se estabeleceram como categorias iniciais de nossa pesquisa.

Em seguida, depois de adaptar e desenvolver duas atividades de modelagem com os alunos, a partir dos dados coletados nessas atividades e para refinar nossa teoria emergente estabelecemos subcategorias para a categoria C03:

- aluno identifica situação-problema como uma situação que pode acontecer com ele ou com alguma outra pessoa;
- familiaridade com a situação-problema;
- objeto matemático para resolver a situação é desconhecido;
- objeto matemático que soluciona a situação-problema não é singular, mas plural;
- situação-problema pode ser resolvida com os conhecimentos matemáticos que o aluno já possui;
- simplificações são ações cognitivas que possibilitam responder a atividade planejada;
- situação-problema pode ser usada para relacionar diferentes objetos de conhecimento matemático;
- professor intervém quando necessário para auxiliar os alunos em qualquer fase do desenvolvimento da atividade de modelagem.

Com isso, a partir da categoria C03 e das subcategorias elaboradas das análises dos dados das duas atividades e da entrevista feita com a professora regente da turma obtivemos categorias conceituais e a elaboração final da teoria emergente dos dados de nossa pesquisa.

Em concomitância com o desenvolvimento e escrita desta dissertação elaboramos um produto educacional – uma cartilha – para professores que trabalham, em especial, com turmas do Ensino Médio.

3.6 PRODUTO EDUCACIONAL

O objetivo da cartilha, como produto educacional, é apresentar aos professores, de maneira mais sucinta, caracterizações a respeito de Modelagem Matemática, algumas tarefas presentes em LDM com potencial para a modelagem e um planejamento do encaminhamento dessas atividades em sala de aula.

Acreditamos estar oferecendo assim, subsídios que favoreçam a implementação de atividades de modelagem em sala de aula subsidiados por situações-problema presentes em LDM.

Além de uma introdução, a cartilha apresenta três capítulos. O primeiro capítulo apresenta caracterizações a respeito de Modelagem Matemática, modelo matemático, ciclo de uma atividade modelagem e momentos de familiarização dos alunos.

O segundo capítulo apresenta algumas tarefas que identificamos ter potencial para ser encaminhada enquanto atividades de modelagem que desenvolvemos com alunos do Ensino Médio. As tarefas estavam presentes em diferentes livros didáticos, mas tinham a mesma temática. Foram exibidas como estavam nos LDM e de que maneira realizamos o planejamento para serem encaminhadas como atividades de modelagem.

No terceiro capítulo, apresentamos um planejamento para desenvolver as atividades que analisamos neste trabalho.

E, por fim, apresentamos as referências utilizadas na cartilha.

4 ANÁLISE DOS SIGNOS QUE EMERGEM NOS LIVROS DIDÁTICOS E NO DESENVOLVIMENTO DE DUAS ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA

Neste capítulo são apresentadas as tarefas dos LDM, a descrição das duas atividades desenvolvidas com os alunos do primeiro ano do Ensino Médio e as análises dos dados produzidos.

Para isso, este capítulo está organizado da seguinte maneira: primeiro é apresentada a análise das tarefas presentes nos livros didáticos que culminaram no planejamento de duas atividades de modelagem; depois apresentamos a descrição e análise das tarefas “Imposto de renda” e “Quanto pago pela água que consumo?” desenvolvidas nos dois dias de coleta.

Buscamos desse modo, apresentar reflexões a respeito das questões norteadoras: *“como selecionar nos LDM situações-problema para serem encaminhadas por meio da modelagem, em particular, situações-problema que tratam de funções definidas por mais de uma sentença?*”; *“o que caracteriza que uma tarefa presente no LDM tenha ‘potencial para’ ser encaminhada enquanto atividade de modelagem?”*; *“como pode se configurar o potencial para ser encaminhada uma tarefa de modelagem planejada a partir do LDM, no primeiro momento de familiarização dos alunos com atividades de Modelagem Matemática?”*.

Assim, esperamos com a solução dessas questões, estabelecer articulações entre atividades de modelagem e livro didático de matemática, aliadas à semiótica peirceana.

4.1 LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA DO PNLD – 2018

Como já mencionado no Capítulo 3 desta pesquisa, selecionamos oito coleções de livros didáticos de matemática para os três anos do Ensino Médio. A partir desta primeira seleção de dados voltamos nossos olhares para cinco coleções, que indicamos por LDM1, LDM2, LDM3, LDM4 e LDM5 em cujo volume do primeiro ano apresentou a abordagem de função definida por mais de uma sentença seja como capítulo, tópico ou outro encaminhamento.

O LDM1 apresentou uma situação-problema envolvendo imposto de renda para introduzir o objeto matemático funções definidas por mais de uma sentença, conforme Figura 8.

Figura 8 – Situação-problema envolvendo imposto de renda do LDM1

Algumas funções são definidas por mais de uma sentença.

Observe a situação a seguir.

Para saber qual é o imposto de renda de uma pessoa física (y), aplicamos à renda mensal (x) os cálculos definidos pela tabela estabelecida pelo governo. Veja a tabela para o exercício de 2016.

O Ministério da Fazenda é o órgão responsável por planejar, formular e executar as políticas econômicas nacionais. Entre suas funções está a fiscalização da arrecadação tributária. Na foto, Ministério da Fazenda em Brasília, DF, 2015.

Base de cálculo mensal (em reais)	Alíquota (em %)	Parcela a deduzir do imposto (em reais)
Até 1.903,98	—	—
De 1.903,99 até 2.826,65	7,5	142,80
De 2.826,66 até 3.751,05	15,0	354,80
De 3.751,06 até 4.664,68	22,5	636,13
Acima de 4.664,68	27,5	869,36

Fonte: Ministério da Fazenda.
Disponível em: <www.receita.fazenda.gov.br>.
Acesso em: 29 set. 2015.

Para uma renda mensal cuja base de cálculo x é igual a R$ 1.500,00, o contribuinte está isento, isto é, o imposto é zero real.

Para uma renda mensal cuja base de cálculo x é igual, por exemplo, a R$ 3.000,00, o imposto y a pagar é:

$y = 3.000{,}00 \cdot 0{,}15 - 354{,}80 = 450{,}00 - 354{,}80 = 95{,}20$

Logo, o imposto mensal a pagar é R$ 95,20.

Fonte: MODERNA, 2016, p. 72.

Depois, o LDM1 apresenta uma tarefa resolvida, uma tarefa tratando uma função definida por mais de uma sentença e uma tarefa determinando algumas imagens da função dados alguns pontos do domínio, conforme Figura 9.

Figura 9 – Tarefa resolvida do LDM1

Exercício resolvido

R11. Considerando a função g tal que $g(x) = \begin{cases} x + 4, \text{ se } x \leq 1 \\ 3x^2, \text{ se } x > 1 \end{cases}$, calcular:

a) $g(1)$ **b)** $g(3)$

▸ ***Resolução***

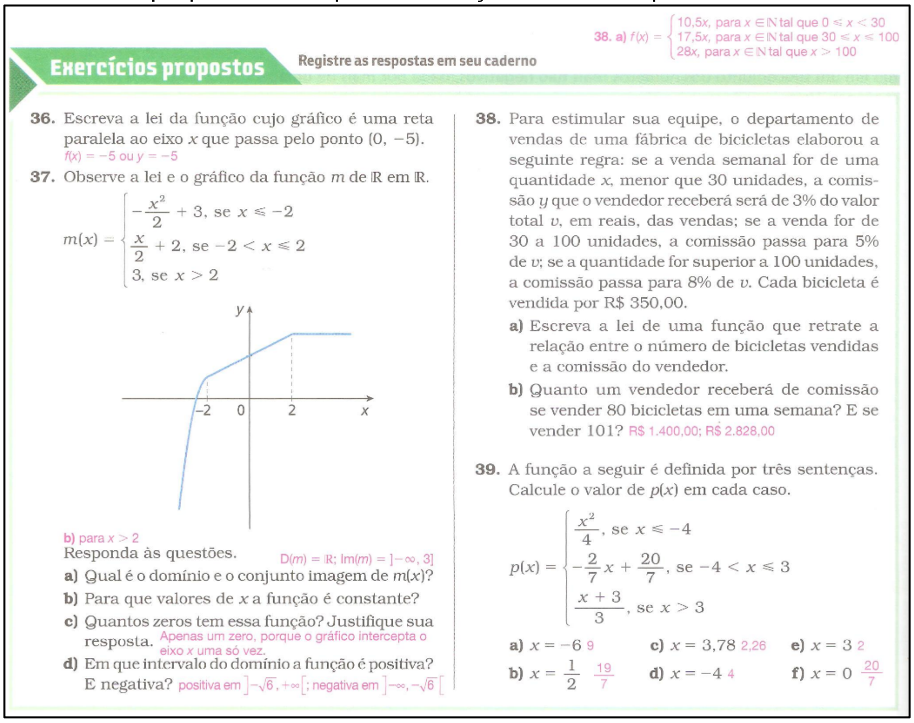
a) Para $x = 1$, usamos a primeira sentença.
Assim: $g(1) = 1 + 4 = 5$

b) Para $x = 3$, usamos a segunda sentença.
Assim: $g(3) = 3 \cdot 3^2 = 3 \cdot 9 = 27$

Fonte: MODERNA, 2016, p. 73.

Em seguida, propõe quatro tarefas sendo duas semelhantes à tarefa resolvida, uma situação envolvendo o gráfico de uma função e interpretações algébricas dessa mesma função e outra tarefa a partir de uma situação-problema, conforme Figura 10.

Figura 10 – Tarefas propostas a respeito de funções definidas por mais de uma sentença no LDM1



38. a) $f(x) = \begin{cases} 10{,}5x, \text{ para } x \in \mathbb{N} \text{ tal que } 0 \leq x < 30 \\ 17{,}5x, \text{ para } x \in \mathbb{N} \text{ tal que } 30 \leq x \leq 100 \\ 28x, \text{ para } x \in \mathbb{N} \text{ tal que } x > 100 \end{cases}$

Exercícios propostos Registre as respostas em seu caderno

36. Escreva a lei da função cujo gráfico é uma reta paralela ao eixo x que passa pelo ponto $(0, -5)$. $f(x) = -5$ ou $y = -5$

37. Observe a lei e o gráfico da função m de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.

$$m(x) = \begin{cases} -\dfrac{x^2}{2} + 3, \text{ se } x \leq -2 \\ \dfrac{x}{2} + 2, \text{ se } -2 < x \leq 2 \\ 3, \text{ se } x > 2 \end{cases}$$

b) para $x > 2$

Responda às questões. D$(m) = \mathbb{R}$; Im$(m) =]-\infty, 3]$

a) Qual é o domínio e o conjunto imagem de $m(x)$?

b) Para que valores de x a função é constante?

c) Quantos zeros tem essa função? Justifique sua resposta. Apenas um zero, porque o gráfico intercepta o eixo x uma só vez.

d) Em que intervalo do domínio a função é positiva? E negativa? positiva em $]-\sqrt{6}, +\infty[$; negativa em $]-\infty, -\sqrt{6}[$

38. Para estimular sua equipe, o departamento de vendas de uma fábrica de bicicletas elaborou a seguinte regra: se a venda semanal for de uma quantidade x, menor que 30 unidades, a comissão y que o vendedor receberá será de 3% do valor total v, em reais, das vendas; se a venda for de 30 a 100 unidades, a comissão passa para 5% de v; se a quantidade for superior a 100 unidades, a comissão passa para 8% de v. Cada bicicleta é vendida por R$ 350,00.

a) Escreva a lei de uma função que retrate a relação entre o número de bicicletas vendidas e a comissão do vendedor.

b) Quanto um vendedor receberá de comissão se vender 80 bicicletas em uma semana? E se vender 101? R$ 1.400,00; R$ 2.828,00

39. A função a seguir é definida por três sentenças. Calcule o valor de $p(x)$ em cada caso.

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{4}, \text{ se } x \leq -4 \\ -\dfrac{2}{7}x + \dfrac{20}{7}, \text{ se } -4 < x \leq 3 \\ \dfrac{x+3}{3}, \text{ se } x > 3 \end{cases}$$

a) $x = -6$ 9
b) $x = \frac{1}{2}$ $\frac{19}{7}$
c) $x = 3{,}78$ 2,26
d) $x = -4$ 4
e) $x = 3$ 2
f) $x = 0$ $\frac{20}{7}$

Fonte: MODERNA, 2016, p. 74.

A partir das tarefas presentes no LDM1 podemos identificar e estabelecer três grupos de tarefas a partir de características semelhantes nas estruturas dos enunciados. Indicamos estes grupos pelas letras maiúsculas GT seguidas de numeração sequencial de 01 a 03, além das seguintes características:

- no GT01 reunimos tarefas que apresentavam enunciados mais curtos e usando comandos imperativos, tais como: escreva, calcule, construa, faça, determine, entre outros;
- no GT02 agrupamos as tarefas que apresentavam comandos imperativos, como as tarefas de GT01, mas apresentavam também algum signo gráfico ou figural;
- no GT03 selecionamos as tarefas que apresentavam enunciados com situações-problema.

Consideramos no GT01, as tarefas que indicam ao aluno fazer manipulações algébricas e aritméticas para obter uma solução da mesma. Um exemplo de tarefa desse grupo é a *R11*[17] que está na Figura 9. Assim, a partir deste grupo de tarefas classificamos e agrupamos no Quadro 8 mais alguns exemplos de tarefas presentes no LDM1 que se adequam a GT01.

[17] O código R11 refere-se à uma tarefa presente em MODERNA, 2016, p. 73.

Quadro 8 – Exemplo de tarefas classificadas no GT01

36. Escreva a lei da função cujo gráfico é uma reta paralela ao eixo x que passa pelo ponto $(0, -5)$. $f(x) = -5$ ou $y = -5$

Fonte: MODERNA, 2016, p. 74.

39. A função a seguir é definida por três sentenças. Calcule o valor de $p(x)$ em cada caso.

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{4}, \text{ se } x \leqslant -4 \\ -\dfrac{2}{7}x + \dfrac{20}{7}, \text{ se } -4 < x \leqslant 3 \\ \dfrac{x+3}{3}, \text{ se } x > 3 \end{cases}$$

a) $x = -6$ 9 **c)** $x = 3{,}78$ 2,26 **e)** $x = 3$ 2

b) $x = \frac{1}{2}$ $\frac{19}{7}$ **d)** $x = -4$ 4 **f)** $x = 0$ $\frac{20}{7}$

Fonte: MODERNA, 2016, p. 74.

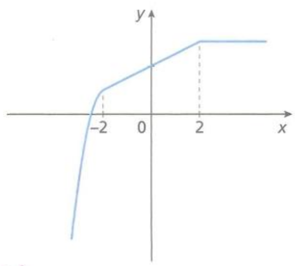
Fonte: dos autores.

No GT02 as tarefas indicam que o aluno também deve fazer manipulações algébricas e aritméticas para obter uma solução, mas diferente do primeiro, envolve a interpretação de um gráfico. A tarefa *37*[18] que está na Figura 10 é um exemplo de tarefa desta categoria. No Quadro 9 estão agrupados dois exemplos de tarefas que apresentam características comuns ao segundo grupo.

Quadro 9 – Exemplos de tarefas classificadas no GT02

37. Observe a lei e o gráfico da função m de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.

$$m(x) = \begin{cases} -\dfrac{x^2}{2} + 3, \text{ se } x \leqslant -2 \\ \dfrac{x}{2} + 2, \text{ se } -2 < x \leqslant 2 \\ 3, \text{ se } x > 2 \end{cases}$$



b) para $x > 2$

Responda às questões. $D(m) = \mathbb{R}$; $Im(m) =]-\infty, 3]$

a) Qual é o domínio e o conjunto imagem de $m(x)$?

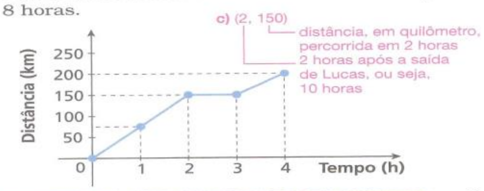
b) Para que valores de x a função é constante?

c) Quantos zeros tem essa função? Justifique sua resposta. Apenas um zero, porque o gráfico intercepta o eixo x uma só vez.

d) Em que intervalo do domínio a função é positiva? E negativa? positiva em $]-\sqrt{6}, +\infty[$; negativa em $]-\infty, -\sqrt{6}[$

Fonte: MODERNA, 2016, p. 74.

5. O gráfico a seguir mostra a distância percorrida por Lucas, em seu carro, das 8 às 12 horas de certo dia. O tempo indica o número de horas decorridas depois das 8 horas.



NICKOLYA/SHUTTERSTOCK

a) Estime a distância percorrida por Lucas das 8 às 9 horas desse dia. Resposta possível: 75 km

b) Em que período Lucas ficou parado? das 10 às 11 horas

c) O que representa o par ordenado (2,150) nesse gráfico?

d) Quantos quilômetros Lucas percorreu das 11 às 12 horas? 50 km

Fonte: MODERNA, 2016, p. 79.

Fonte: dos autores.

O terceiro grupo de tarefas é composto daquelas que necessitam a interpretação do aluno a partir de uma situação-problema e em alguns casos apresenta um quadro com informações pertinentes para auxiliar a obtenção da solução da tarefa. Um exemplo é a tarefa *38*[19] que está na Figura 10. No Quadro 10

[18] A numeração refere-se à tarefa presente em MODERNA, 2016, p. 74.
[19] A numeração refere-se à tarefa presente em MODERNA, 2016, p. 74.

a seguir, estão dois exemplos de tarefas que foram identificadas no LDM1 que se enquadram neste agrupamento.

Quadro 10 – Exemplo de tarefas classificadas no GT03

38. Para estimular sua equipe, o departamento de vendas de uma fábrica de bicicletas elaborou a seguinte regra: se a venda semanal for de uma quantidade x, menor que 30 unidades, a comissão y que o vendedor receberá será de 3% do valor total v, em reais, das vendas; se a venda for de 30 a 100 unidades, a comissão passa para 5% de v; se a quantidade for superior a 100 unidades, a comissão passa para 8% de v. Cada bicicleta é vendida por R$ 350,00.

a) Escreva a lei de uma função que retrate a relação entre o número de bicicletas vendidas e a comissão do vendedor.

b) Quanto um vendedor receberá de comissão se vender 80 bicicletas em uma semana? E se vender 101? R$ 1.400,00; R$ 2.828,00

38. a) $f(x) = \begin{cases} 10{,}5x, \text{ para } x \in \mathbb{N} \text{ tal que } 0 \leq x < 30 \\ 17{,}5x, \text{ para } x \in \mathbb{N} \text{ tal que } 30 \leq x \leq 100 \\ 28x, \text{ para } x \in \mathbb{N} \text{ tal que } x > 100 \end{cases}$

Fonte: MODERNA, 2016, p. 74.

1. Uma empresa de tratamento de água e esgoto de certa cidade calcula o custo residencial mensal de seus serviços da seguinte forma:

Consumo c de água	Valor V da conta (R$)
$0\ m^3 < c \leq 10\ m^3$	$V = 10$
$10\ m^3 < c \leq 20\ m^3$	$V = 10 + (c - 10) \cdot 1{,}20 = V_1$
$20\ m^3 < c \leq 30\ m^3$	$V = V_1 + (c - 20) \cdot 1{,}50 = V_2$
$30\ m^3 < c$	$V = V_2 + (c - 30) \cdot 2{,}00$

O valor total da conta é igual ao dobro do valor calculado para a água.

O consumo de água na casa de Caio, nos três últimos meses, foi igual a $9\ m^3$, $18\ m^3$ e $36\ m^3$. Então, Caio pagou, em reais, respectivamente: alternativa a

a) 20,00; 39,20; 98,00

b) 10,00; 19,60; 49,00

c) 20,00; 40,00; 80,00

d) 18,00; 37,20; 96,00

Fonte: MODERNA, 2016, p. 81.

Fonte: dos autores.

A partir dos grupos de tarefas percebidos na análise do LDM1 também estendemos o agrupamento das tarefas presentes em LDM2, LDM3, LDM4 e LDM5 da mesma maneira, pois percebemos que as tarefas de modo geral nas cinco coleções podiam ser distribuídas nesses três grupos.

Assim, no GT01 foram identificadas mais 18 tarefas, totalizando 22 tarefas nesse grupo nos cinco livros didáticos analisados. No Quadro 11 estão identificados mais alguns exemplos de tarefas dos outros LDM.

Quadro 11 – Exemplo de tarefas classificadas no GT01 do LDM2, LDM3, LDM4 e LDM5

1 Seja f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } x \geq 2 \\ -1, \text{ se } x < 2 \end{cases}$.

Calcule:

a) $f(0)$ **d)** $f(\sqrt{5})$

b) $f(-1)$ **e)** $f(2)$

c) $f(\sqrt{3})$

Fonte: IEZZI ET AL, 2016, p. 117.

55. Resolva as equações:

a) $|x - 6| = 10$ $S = \{-4, 16\}$

b) $|3x - 1| = 5$ $S = \left\{-\frac{4}{3}, 2\right\}$

c) $\left|\frac{x-1}{4}\right| = 2$ $S = \{-7, 9\}$

d) $5 + |-2x + 4| = 11$ $S = \{-1, 5\}$

Fonte: DANTE, 2017, p. 100.

16 Construa no caderno o gráfico de cada uma das funções e dê seu domínio e conjunto imagem.

a) $f(x) = \begin{cases} 3, \text{ se } x \leq 5 \\ x - 2, \text{ se } x > 5 \end{cases}$ **c)** $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, \text{ se } x \leq 4 \\ x + 3, \text{ se } x > 4 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x + 3, \text{ se } x \leq 1 \\ 4, \text{ se } x > 1 \end{cases}$ **d)** $f(x) = \begin{cases} x + 1, \text{ se } x \leq 2 \\ 3, \text{ se } 2 < x \leq 4 \\ x - 1, \text{ se } x > 4 \end{cases}$

Fonte: PAIVA, 2015, p. 167.

Fonte: dos autores.

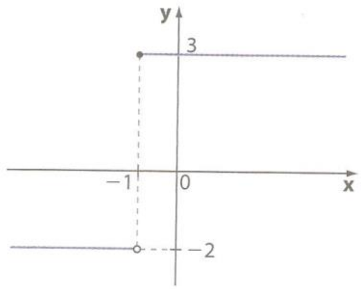
No segundo grupo de tarefas – GT02 – foram identificadas mais 6 tarefas, totalizando 11 tarefas. No Quadro 12 estão alguns exemplos de tarefas do LDM2, LDM3, LDM4 e LDM5 que foram classificadas neste agrupamento.

Quadro 12 – Exemplos de tarefas classificadas no GT02 do LDM2, LDM3, LDM4 e LDM5

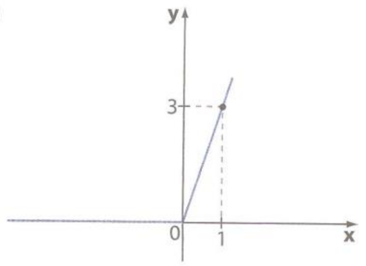
<table>
<tr>
<td>

11 Forneça a lei de cada uma das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ cujos gráficos estão abaixo representados:

a)



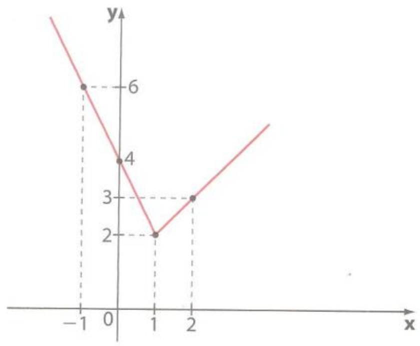
b)



Fonte: IEZZI ET AL, 2016, p. 119.

</td>
<td>

12 Seja f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função representada no gráfico abaixo:



a) Qual é a lei que define **f**?

b) Resolva a equação $f(x) = 5$. Verifique no gráfico as soluções encontradas.

c) Para que valores reais de **k** a equação $f(x) = k$ apresenta soluções?

Fonte: IEZZI ET AL, 2016, p. 119.

</td>
</tr>
</table>

Fonte: dos autores.

Por fim, no GT03 foram totalizadas 16 tarefas entre os cinco livros didáticos. Nesse grupo foram identificadas tarefas que partiram de uma mesma situação-problema, como as tarefas a respeito do imposto de renda e da quantia paga na conta de água.

Mais alguns exemplos de tarefas desse terceiro grupo que foram identificadas no LDM2, LDM3, LDM4 e LDM5 estão apresentadas no Quadro 13.

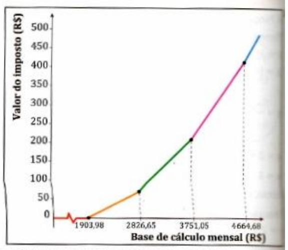
Quadro 13 – Exemplos de tarefas classificadas no GT03 do LDM2, LDM3, LDM4 e LDM5

4 Funções definidas por partes

Você sabe que a maioria dos trabalhadores brasileiros paga Imposto de Renda, que varia de acordo com a faixa salarial do trabalhador. Observe, para o ano 2015, a tabela que determina o valor desse imposto:

Valor do imposto por faixa salarial

Base de cálculo mensal (em R$)	Alíquota (%)	Parcela a deduzir do imposto (em R$)
Até 1 903,98	0	0
De 1 903,99 até 2 826,65	7,5	142,80
De 2 826,66 até 3 751,05	15	354,80
De 3 751,06 até 4 664,68	22,5	636,13
Acima de 4 664,68	27,5	869,36



Fonte: <http://idg.receita.fazenda.gov.br/acesso-rapido/tributos/irpf-imposto-de-renda-pessoa-fisica>. Acesso em: 24 abr. 2016.

Os dados da tabela acima geram o gráfico ao lado dela. A função que determina o valor retido do imposto possui uma expressão algébrica diferente em cada intervalo da variável correspondente ao salário recebido. Esse é um exemplo de uma **função definida por partes**, sendo uma função afim diferente em cada intervalo.

Uma função definida por partes, e que é bastante utilizada em Matemática, é a **função modular**, que estudaremos em breve. Antes, vamos conhecer o significado do **módulo de um número real**.

Fonte: SMOLE E DINIZ, 2017, p. 222.

5 Uma operadora de celular oferece dois planos a seus clientes:

- Plano I: valor fixo mensal de R$ 80,00 para até 120 minutos de ligações locais. Caso o cliente exceda esse tempo, o custo do minuto adicional é de R$ 1,20.
- Plano II: não há mensalidade e cada ligação local custa R$ 0,80.

Para quantos minutos de ligações locais no mês é indiferente contratar qualquer um dos planos?

Fonte: IEZZI ET AL, 2016, p. 117.

8 No quadro seguinte estão representados os valores do metro cúbico (m^3) de água praticados em residências de certo município, de acordo com a faixa de consumo.

a) Determine o valor da conta de água de duas residências, R_1 e R_2, cujos consumos foram 28 m^3 e 35 m^3, respectivamente.

b) Qual o consumo correspondente a uma conta de água no valor de R$ 112,80?

Faixa de consumo (m^3)	Tarifa (R$)
Até 20 m^3	1,20 por m^3
De 21 m^3 a 50 m^3	1,80 por m^3 excedente
Acima de 50 m^3	2,90 por m^3 excedente

c) Qual é a lei da função que relaciona o valor total (**v**), em reais, ao consumo de **x** metros cúbicos.

Fonte: IEZZI ET AL, 2016, p. 118.

19 Uma caldeira foi ligada à zero hora, quando sua temperatura interna era 40 °C. A partir daí, a temperatura aumentou proporcionalmente ao tempo à razão de 100 °C por hora, durante as 3 primeiras horas de funcionamento, e permaneceu constante após esse período, até as 18 horas do mesmo dia, quando a caldeira foi desligada.
Dê a lei de associação que expressa a temperatura T da caldeira, em grau Celsius, em função do tempo x, em hora, durante o período em que ela esteve ligada.

Fonte: PAIVA, 2015, p. 167.

Fonte: dos autores.

A partir da identificação de características comuns às tarefas presentes nos LDM (organizadas nos três grupos de tarefas) consideramos que três categorias emergem *a priori* e revelam signos que nos auxiliam inferir a respeito da primeira questão norteadora de nossa pesquisa. Indicamos estas categorias pela letra maiúscula C seguida de numeração sequencial de 01 a 03. São estas categorias:

- C01: tarefas com comandos imperativos;
- C02: tarefas com comandos imperativos e um gráfico ou figura;
- C03: tarefas com situações-problema no enunciado.

A seguir apresentamos cada uma das categorias, suas justificativas e características.

4.1.1 Codificação inicial: categorias iniciais emergentes da análise dos LDM

De maneira geral, nas tarefas identificadas no Quadro 8 e no Quadro 11 evidenciamos que em muitas delas o aluno deve determinar valores da imagem a partir de determinados pontos do domínio das funções. Há também algumas tarefas que se assemelham indicando para que o aluno determine o conjunto-solução das equações modulares. E tarefas para o aluno esboçar o gráfico de funções definidas por mais de uma sentença.

Em sua totalidade, as tarefas que se enquadram no GT01 apresentam linguagem algébrica que denota signos simbólicos, pois para Peirce "um símbolo é um signo que se refere ao objeto que denota, em virtude de uma lei, normalmente uma associação de ideias gerais" (CP, 2.449)[20].

Para Niemeyer (2003, p. 42) "mesmo onde a essência de um símbolo é a de livre associação, essa associação não é arbitrária, mas determinada por princípios pré-existentes, inerentes ao tipo de código a que pertence o signo".

Entretanto o símbolo perde sua característica sígnica se não há um interpretante, podemos inferir que é possível evidenciar relações entre objeto e interpretante por meio dos símbolos (ALMEIDA; SILVA, 2014, p.86). Nesse caso o símbolo "se faz representar no contexto de uma semiose particular, ou seja: tal como um determinado processo sígnico o torna conhecível" (SANTAELLA, 2008a, p. 42).

A partir das tarefas desse grupo pudemos evidenciar que os enunciados das mesmas em geral têm característica de comandos imperativos para o aluno e, também, evidenciamos que nessas tarefas espera-se que a solução seja determinada por um signo matemático específico (a escrita da lei de formação, a construção do gráfico, o cálculo de determinado ponto da imagem, conhecida a lei de formação e um ponto do domínio, entre outras), ou seja, espera-se que o aluno execute o comando dado no enunciado.

Desse modo, consideramos que as tarefas do GT01 pertencem a categoria que denominamos "*Tarefas com comandos imperativos*". Categoria esta que emergiu a partir das características supracitadas.

No Quadro 14 sintetizamos o que foi evidenciado na categoria C01.

---

[20] PEIRCE, C. S.; HARTSHORNE, C.; WEISS, P.; BURKS, A. The Collected Papers of Charles Sanders Peirce. InteLex Corporation, 1994. (Aqui referido como CP; os números das citações referem-se aos volumes e parágrafos, respectivamente).

Quadro 14 – C01: tarefas com comandos imperativos

Categoria	Código	Ocorrência
Tarefas com comandos imperativos	Escreva	LDM1, LDM2
	Calcule	LDM1, LDM2, LDM3 e LDM5
	Construa	LDM1, LDM3, LDM4
	Faça	LDM2
	Determine	LDM1, LDM2, LDM3
	Resolva	LDM2, LDM5
	Esboce	LDM2
	Use	LDM2
	Desenhe	LDM2
	Seja	LDM3
	Estude	LDM1
	Indique	LDM1
	Obtenha	LDM5
	Classifique	LDM5
	Represente	LDM5
	Corrija	LDM5

Fonte: dos autores.

A segunda categoria que emergiu é intitulada "*Tarefas com comandos imperativos e um gráfico ou figura*" e esta categoria engloba as tarefas que reunimos em GT02.

Além disso, nessa segunda categoria as tarefas são bem semelhantes e levam o aluno, a partir dos signos gráficos, a escrever a lei de formação da função; ou dada as leis de formação das funções, desenhar o gráfico a elas associado; ou ainda para interpretar informações a partir da observação do signo gráfico da tarefa.

Nas tarefas desta segunda categoria é apresentado um signo gráfico. Estes elementos parecem se configurar como signos icônicos, pois "não se assemelham de modo algum aos seus objetos quanto à aparência; a semelhança entre eles consiste apenas da relação entre suas partes" (CP, 2.282). Nestes casos, o uso dos signos gráficos dá a ideia de reforçar ao aluno uma característica comum de funções definidas por mais de uma sentença: a de funções deste tipo ter gráficos que não são uma única reta, ou única curva, mas uma "junção" de retas e curvas.

Assim como na categoria anterior, as tarefas desta categoria possuem em seus enunciados comandos indicativos do que o aluno deve fazer. Embora nesse caso, os comandos indicativos sejam feitos de maneira indireta, pois como todas as tarefas desta categoria possuem signos figurais gráficos, a partir de nossas percepções, entendemos que o foco do GT02 seja permitir ao aluno articular a linguagem algébrica simbólica, a linguagem figural gráfica, icônica e indexical.

Apresentamos o que foi evidenciado da categoria C02, "*Tarefas com comandos imperativos e um gráfico ou figura*", no Quadro 15.

Quadro 15 – C02: tarefas com comandos imperativos e um gráfico ou figura

Categoria	Código	Ocorrência
Tarefas com comandos imperativos e um gráfico ou figura	"Observe a lei e o gráfico...responda as questões..."	LDM1
	"...conforme mostra o gráfico...escreva a lei..."	LDM1
	"Observe o gráfico e determine a lei..."	LDM1
	"Forneça a lei de cada uma das funções... cujos gráficos..."	LDM3
	"Seja f... representada no gráfico...qual é a lei..."	LDM3
	"Construir o gráfico da função [lei de formação dada] ..."	LDM4
	"... o gráfico que melhor representa a relação entre salário e número de produtos vendidos é..."	LDM4
	"...de acordo com o gráfico... qual é a função que expressa..."	LDM4

Fonte: dos autores.

Já no GT03, que se relacionou a terceira categoria elaborada, uma das características é que a maioria das tarefas utilizou como recurso um quadro com informações relevantes para a situação. Duas tarefas utilizaram representações gráficas e duas tarefas utilizaram figuras para ilustrar a situação.

A partir das características que foram identificadas nesta última categoria de tarefas, nos chamou a atenção que as situações-problema estão próximas a situações do cotidiano dos alunos dessa faixa etária. No Ensino Médio, há pessoas que já estão se preparando para ingressar no mercado de trabalho e precisarão entender a respeito do imposto de renda, tributo pago ao governo, além de saber como é calculado o consumo de uma conta de água.

Além disso, esta terceira categoria de tarefas parece se aproximar de atividades de modelagem matemática pela sua característica investigativa em que, segundo Blum (2002),

> [...] o ponto de partida é, normalmente, uma situação no mundo real. A simplificação, estruturação e esclarecimento da situação – de acordo com o conhecimento e os interesses do modelador – conduzem à formulação de um problema e de um modelo real da situação (BLUM, 2002, p. 152).

Isso não quer dizer que as tarefas desta categoria do jeito que são apresentadas possam imediatamente ser desenvolvidas como atividades de modelagem. As tarefas elaboradas para livros didáticos apresentam questionamentos de caráter mais fechado e direto e, segundo Almeida, Silva e Vertuan (2012), em atividades de modelagem

> [...] o início é uma situação-problema; os procedimentos de resolução não são predefinidos e as soluções não são previamente conhecidas; ocorre a investigação de um problema; conceitos matemáticos são introduzidos ou aplicados; ocorre a análise da solução (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p. 17).

Assim, esta categoria foi nomeada como “*Tarefas com situações-problema no enunciado*” pelas suas características de explorarem objetos matemáticos a partir de diferentes situações-problema.

Sintetizamos as evidências que sustentam esta categoria C03 no Quadro 16. E neste caso os códigos que selecionamos configuram-se como os temas das situações-problema explorados nas tarefas.

Quadro 16 – C03: tarefas com situações-problema no enunciado

Categoria	Código	Ocorrência
Tarefas com situações-problema no enunciado	Cálculo do imposto de renda	LDM1, LDM3, LDM4 e LDM5
	Vendas de uma fábrica de bicicleta	LDM1
	Cálculo do consumo de água	LDM1, LDM3
	Preço mais vantajoso em duas *lan house*	LDM1
	Preço mais vantajoso entre dois planos de uma operadora de celular	LDM3
	Preço promocional de amaciante no encarte de um supermercado	LDM3
	Quantidade de pessoas que fazem compra em um supermercado em qualquer um dos dias de um mês	LDM2
	Uma máquina industrial que consome determinada quantidade de óleo por hora dependendo o tipo de produção.	LDM4
	Temperatura de uma caldeira no tempo em que esteve ligada	LDM4

Fonte: dos autores.

Algumas das tarefas desta categoria foram utilizadas, para se planejar e desenvolver atividades de modelagem em sala de aula, no entanto, as outras que identificamos na C03 também são possíveis de planejamento para serem desenvolvidas enquanto atividades de modelagem.

Sendo assim, respondendo a nossa primeira questão norteadora de *“como selecionar nos LDM situações-problema para serem encaminhadas por meio da modelagem, em particular, situações-problema que tratam de funções definidas por mais de uma sentença?”,* temos que o primeiro passo é identificar tarefas elaboradas a partir de situações-problema que se aproximam daquelas presentes na vida dos estudantes. Isso, de certo modo, também já nos dá alguns indícios do “potencial para” ser encaminhada enquanto atividade de modelagem.

Afirmamos isso, pois conforme indicado por Blum (2002) o ponto de partida de uma atividade de modelagem é uma situação no mundo real, situações essas que identificamos na categoria C03, pois imposto de renda, cálculo do consumo de conta de água e preço mais vantajoso entre dois planos de uma operadora de celular são exemplos de situações no mundo real cotidiana as pessoas.

Além disso, conforme afirmam Almeida, Silva e Vertuan (2012) os procedimentos de resolução não estão apresentados de antemão e não há uma solução conhecida, sendo assim, identificamos que tais características se apresentam nas tarefas da categoria C03, por isso afirmamos que tarefas que apresentam tais estruturas no enunciado são uma maneira de selecionar tarefas em LDM que podem ser encaminhadas por meio da modelagem.

Assim, a partir de uma tarefa comum na maioria dos livros didáticos planejamos a primeira atividade a ser desenvolvida com os alunos de um primeiro ano do Ensino Médio.

4.2 PRIMEIRA ATIVIDADE PLANEJADA: “IMPOSTO DE RENDA”

Ao realizar uma análise em livros didáticos do Ensino Médio aprovados no PNLD de 2018, evidenciamos que em quatro (MODERNA, 2016 – LDM1, IEZZI et al., 2016 – LDM3, PAIVA, 2015 – LDM4, SMOLE; DINIZ, 2017 – LDM5) das cinco coleções, a situação-problema relativa ao imposto de renda foi abordada na introdução do objeto matemático função definida por mais de uma sentença.

No LDM1, o cálculo do imposto de renda é apresentado como exemplo para sistematizar o conceito matemático explorado. É mostrado um quadro com a base de cálculo mensal, os valores de alíquotas e parcelas a deduzir do imposto, conforme Figura 11.

Figura 11 – Situação-problema sobre imposto de renda proposta em um dos livros didáticos

O Ministério da Fazenda é o órgão responsável por planejar, formular e executar as políticas econômicas nacionais. Entre suas funções está a fiscalização da arrecadação tributária. Na foto, Ministério da Fazenda em Brasília, DF, 2015.

Algumas funções são definidas por mais de uma sentença.

Observe a situação a seguir.

Para saber qual é o imposto de renda de uma pessoa física (y), aplicamos à renda mensal (x) os cálculos definidos pela tabela estabelecida pelo governo. Veja a tabela para o exercício de 2016.

Base de cálculo mensal (em reais)	Alíquota (em %)	Parcela a deduzir do imposto (em reais)
Até 1.903,98	—	—
De 1.903,99 até 2.826,65	7,5	142,80
De 2.826,66 até 3.751,05	15,0	354,80
De 3.751,06 até 4.664,68	22,5	636,13
Acima de 4.664,68	27,5	869,36

Fonte: Ministério da Fazenda.
Disponível em: <www.receita.fazenda.gov.br>.
Acesso em: 29 set. 2015.

Para uma renda mensal cuja base de cálculo x é igual a R$ 1.500,00, o contribuinte está isento, isto é, o imposto é zero real.

Para uma renda mensal cuja base de cálculo x é igual, por exemplo, a R$ 3.000,00, o imposto y a pagar é:

$y = 3.000,00 \cdot 0,15 - 354,80 = 450,00 - 354,80 = 95,20$

Logo, o imposto mensal a pagar é R$ 95,20.

Fonte: MODERNA, 2016, p. 72.

De forma análoga, no LDM4 há uma situação-problema envolvendo o cálculo do imposto sobre a renda. Contudo neste outro livro é apresentado o cálculo do imposto sobre a renda anual e não mensal, além de trazer uma explicação sobre tal imposto e para o que ele é utilizado, conforme apresentado na Figura 12.

Figura 12 – Cálculo do imposto de renda anual proposto em um dos livros didáticos

3 Funções definidas por mais de uma sentença

Acompanhe a situação a seguir.

Em todos os países, os impostos arrecadados dos cidadãos devem ser aplicados na manutenç da estrutura pública e em políticas sociais, econômicas e culturais do Estado. No Brasil, os impost são arrecadados pela Secretaria da Receita Federal.

O imposto que o contribuinte paga sobre a renda adquirida é chamado de Imposto de Rend (IR). Esse tipo de imposto é calculado em função da renda de cada cidadão, como mostra a tabe progressiva para o cálculo anual do Imposto de Renda de Pessoa Física arrecadado em 2015, com base na renda do ano de 2014.

Imposto de Renda – cálculo anual		
Base de cálculo anual (R$)	**Alíquota (%)**	**Parcela a deduzir do imposto (R$)**
até 21.453,24	0,0	0,00
de 21.453,25 até 32.151,48	7,5	1.608,99
de 32.151,49 até 42.869,16	15,0	4.020,35
de 42.869,17 até 53.565,72	22,5	7.235,54
acima de 53.565,72	27,5	9.913,83

Disponível em: <www.receita.fazenda.gov.br>. Acesso em: 29 jan. 2016.

Fonte: PAIVA, 2015, p. 166.

Além disso, no LDM4 a conclusão a partir da situação apresentada é de que nem sempre é possível definir uma função por uma única sentença, conforme apresentado na Figura 13.

Figura 13 – Conclusão da situação apresentada na Figura 9

Por exemplo, uma pessoa que recebeu em 2014 renda total de R$ 25.000,00 deverá pagar R$ 266,01 de imposto de renda, conforme mostram os cálculos abaixo:

$$\underset{\text{alíquota}}{7{,}5\%} \cdot \underset{\text{renda}}{25.000{,}00} - \underset{\text{parcela a deduzir}}{1.608{,}99} = 1.875{,}00 - 1.608{,}99 = 266{,}01$$

De acordo com a tabela, se a renda anual de um cidadão é x reais, então o imposto de renda anual $f(x)$ a pagar, em real, pode ser calculado pela função:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } x \leq 21.453{,}24 \\ 0{,}075x - 1.608{,}99, \text{ se } 21.453{,}25 \leq x \leq 32.151{,}48 \\ 0{,}15x - 4.020{,}35, \text{ se } 32.151{,}49 \leq x \leq 42.869{,}16 \\ 0{,}225x - 7.235{,}54, \text{ se } 42.869{,}17 \leq x \leq 53.565{,}72 \\ 0{,}275x - 9.913{,}83, \text{ se } x > 53.565{,}72 \end{cases}$$

Percebe-se, por essa situação, que nem sempre é possível definir uma função por uma única sentença. O exercício resolvido a seguir mostra como construir o gráfico de funções definidas por mais de uma sentença.

Fonte: PAIVA, 2015, p. 166.

Já no LDM5 a situação foi proposta diferentemente dos outros dois primeiros livros didáticos, pois apresenta um quadro com as taxas de cada faixa salarial e uma representação gráfica da função, conforme Figura 14.

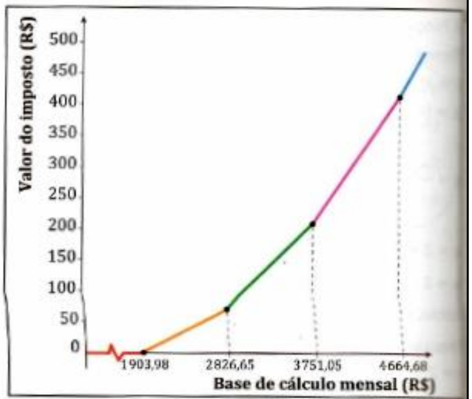
Figura 14 – Quadro e representação gráfica do cálculo do imposto de renda

4 Funções definidas por partes

Você sabe que a maioria dos trabalhadores brasileiros paga Imposto de Renda, que varia de acordo com a faixa salarial do trabalhador. Observe, para o ano 2015, a tabela que determina o valor desse imposto:

Valor do imposto por faixa salarial

Base de cálculo mensal (em R$)	Alíquota (%)	Parcela a deduzir do imposto (em R$)
Até 1 903,98	0	0
De 1 903,99 até 2 826,65	7,5	142,80
De 2 826,66 até 3 751,05	15	354,80
De 3 751,06 até 4 664,68	22,5	636,13
Acima de 4 664,68	27,5	869,36



Fonte: <http://idg.receita.fazenda.gov.br/acesso-rapido/tributos/irpf-imposto-de-renda-pessoa-fisica>. Acesso em: 24 abr. 20

Os dados da tabela acima geram o gráfico ao lado dela. A função que determina o valor retido do imposto possui uma expressão algébrica diferente em cada intervalo da variável correspondente ao salário recebido. Esse é um exemplo de uma **função definida por partes**, sendo uma função afim diferente em cada intervalo.

Uma função definida por partes, e que é bastante utilizada em Matemática, é a **função modular**, que estudaremos em breve. Antes, vamos conhecer o significado do **módulo de um número real**.

Fonte: SMOLE; DINIZ, 2017, p. 222.

No LDM3, a situação-problema do imposto de renda é apresentada de maneira semelhante à dos outros livros, conforme Figura 15.

Figura 15 – Situação-problema introdutória de um capítulo do livro de Iezzi et al. (2016)

Função definida por mais de uma sentença

Você sabe o que é o imposto de renda? Sabe como ele é calculado?

Todo mês, ao receber seu salário, muitos trabalhadores brasileiros do mercado formal de trabalho notam, em seu holerite, que há um desconto de parte desse salário, um tributo sobre o rendimento (imposto de renda) pago ao Governo Federal.

Em meados de 2015, o imposto de renda era calculado com base na seguinte tabela:

Tabela de incidência mensal
(a partir do mês de abril do ano calendário de 2015)

Rendimento mensal (em R$)	Alíquota (em %)	Parcela a deduzir (em R$)
Até 1 903,98	—	—
De 1 903,99 até 2 826,65	7,5	142,80
De 2 826,66 até 3 751,05	15	354,80
De 3 751,06 até 4 664,68	22,5	636,13
Acima de 4 664,68	27,5	869,36

Fonte: Receita Federal do Brasil. Disponível em: <idg.receita.fazenda.gov.br/acesso-rapido/tributos/irpf-imposto-de-renda-pessoa-fisica [illegible]>. Acesso em: 4 mar. 2015.

A tabela mostra a alíquota de imposto e a parcela a deduzir para cada faixa de rendimento mensal. Para se calcular o imposto de renda (IR), é necessário calcular uma porcentagem do salário e, do valor obtido, subtrair uma parcela. Acompanhe os exemplos:

Fonte: IEZZI ET AL., 2016, p. 115.

A partir da mesma situação proposta nos quatro livros didáticos de matemática do primeiro ano do Ensino Médio, entendemos que a situação-problema poderia ser encaminhada como uma atividade de modelagem, pois segundo Almeida, Silva e Vertuan (2012):

> Argumentamos que em atividades conduzidas segundo essa alternativa [modelagem] identificam-se características fundamentais: a) envolve um conjunto de ações cognitivas do indivíduo; b) envolve representação e manipulação de objetos matemáticos; c) é direcionada para objetivos e metas estabelecidas e/ou reconhecidas pelo aluno (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p. 17).

Com base nas características que identificamos nas tarefas da categoria “Tarefas com situações-problemas no enunciado”, evidenciamos , como supracitado, que algumas possuem as três características fundamentais indicadas por Almeida, Silva e Vertuan (2012).

Nestas tarefas, o objeto matemático que pode ser explorado não está pronto e exposto de antemão no enunciado da tarefa, mas envolve uma interpretação do que é apresentado ao aluno.

Assim, podemos começar a delinear tais aspectos como indicadores das potencialidades de tarefas presentes em LDM para serem encaminhadas enquanto atividades de modelagem.

Em seguida, realizamos um planejamento (apêndices E e F) para que o encaminhamento em sala de aula fosse realizado por meio de uma atividade de modelagem matemática. No Quadro 17 apresentamos o texto da atividade entregue aos alunos. A escolha da situação tinha por intenção emergir o objeto matemático funções definidas por mais de uma sentença a partir dos modelos obtidos e como introdução de um novo objeto de conhecimento matemático.

Quadro 17 – Atividade proposta aos alunos no primeiro dia de coleta

Imposto de renda

Você sabe o que é o Imposto de Renda (IR) e como ele é calculado?

Todo mês, ao receber seu salário muitos trabalhadores brasileiros do mercado formal de trabalho notam, em seu holerite, que há um desconto de parte desse salário, um tributo sobre o rendimento, IR, pago ao Governo Federal.

Em todos os países, os impostos arrecadados dos cidadãos devem ser aplicados na manutenção da estrutura pública e em políticas sociais, econômicas e culturais do Estado. No Brasil, os impostos são arrecadados pela Secretária da Receita Federal.

A partir do mês de abril de 2015 o imposto de renda era calculado com base na seguinte tabela.

Tabela de incidência mensal (a partir do mês de abril do ano de 2015)

Renda mensal (em R$)	Alíquota (em %)	Parcela a deduzir (em R$)
Até 1903,98	–	–
De 1903,99 até 2826,65	7,5	142,80
De 2826,66 até 3751,05	15	354,80
De 3751,06 até 4664,68	22,5	636,13
Acima de 4664,68	27,5	869,36

Fonte: Receita Federal do Brasil. Disponível em: <http://idg.receita.fazenda.gov.br/acesso-rapido/tributos/irpf-imposto-de-renda-pessoa-fisica#tabelas-para-atualiza--o-do-custo-de-bens-e-direitos>. Acesso em: 23 mar. 2018.

A tabela mostra a alíquota de imposto e a parcela a deduzir para cada faixa de rendimento mensal.

Considerando todas as informações apresentadas, imagine que você trabalhe no departamento pessoal de uma empresa e uma de suas funções é a de calcular o imposto de renda que deverá ser descontado do salário de cada funcionário da empresa. Como você faria para calcular o IR de cada salário sabendo que um dos empregados dessa empresa tem um desconto do imposto de renda igual a R$ 80,26 sobre uma renda de R$ 2.900,40?

Fonte: produção dos autores.

Depois que a atividade foi planejada, a desenvolvemos com a turma do primeiro ano de Ensino Médio conforme a descrição e análise apresentadas na sequência.

4.2.1 Descrição e análise do desenvolvimento da atividade “Imposto de renda”

Para iniciar o desenvolvimento da atividade, o professor organizou os alunos em três grupos de cinco e um de seis integrantes, depois, perguntou quantos deles trabalhavam ou já trabalharam e boa parte da turma levantou a mão. Com isso, foi entregue uma folha contendo a situação-problema (Quadro 17) para cada grupo, foi feita uma leitura com toda a turma e questionado sobre possíveis dúvidas que os alunos tivessem.

Neste momento de primeiro contato dos alunos com a atividade e identificação do problema a ser investigado, os alunos perpassam pela fase de inteiração da modelagem, que pode ser associada à primeiridade peirceana do nível de significado do objeto em questão, a situação-problema.

Após isso, os alunos fizeram uma nova leitura nos grupos e começaram a desenvolver a atividade. Um a um, cada grupo chamou o professor para tirar algumas dúvidas e isso se manteve durante todo o desenvolvimento da atividade.

Enquanto ainda estavam se inteirando da situação surgiram dúvidas comuns em toda turma, tais como: o que é a alíquota e o que significa para uma mesma faixa de rendas haver uma alíquota e um valor de parcela a deduzir, conforme evidenciado no excerto a seguir.

> *A1:* Eu entendi o que eu tenho que fazer aqui, é uma função né entorno disso aqui.
>
> *Professor:* É pode ser também, a função pode ser uma maneira.
>
> *A1:* 2.900 a parcela?
>
> [...]
>
> *A1:* Nós só não entendemos porque a tabela ta!?
>
> *A2:* Não acho o porquê. Deixa quieto.
>
> *A1:* Não piá você tem que falar.
>
> [Professor se aproxima do grupo]
>
> *A2:* 2900 né, aqui na renda mensal. Aí 80 ele vai tá na parcela?
>
> *Professor:* Não, ele tinha 2900 nessa faixa aqui [aponta pra primeira linha da tabela], aí fez os cálculos utilizando essas informações e no final desconta R$ 80,25.
>
> *A2:* A tá. A entendi.
>
> [...]
>
> *A1:* A parcela deduzida é a parcela que ele tem a pagar?
>
> *Professor:* Isso.
>
> *A2:* A parcela..... A líquida?

> *Professor:* A líquida é a porcentagem. Então além da porcentagem ele tem que descontar isso daí [aponta para a coluna de parcela a deduzir da tabela].
>
> *A2:* A porcentagem que ele vai pagar de novo?
>
> *Professor:* Isso.
>
> *A1:* Isso aqui que é a porcentagem no caso?
>
> *Professor:* Tem que calcular pro exemplo, o salário não é 2.940 reais? Qual faixa salarial ele tá?
>
> *A1:* De 2.826,66...
>
> *A1:* Mas a porcentagem em relação a que?
>
> *Professor:* Em relação a renda.
>
> *A1:* A porcentagem que ele vai pagar de novo.
>
> *A1*: Porque a taxa tributária sobe conforme a renda mensal? Não faz sentido subir a porcentagem.
>
> *A2:* Ué deve ser o tanto que ele tem que pagar pro governo.

A partir do excerto entende-se que A1 relacionou o tema da atividade a um objeto que era familiar para ele, o objeto matemático função. A atribuição de significado foi facilitada pela experiência colateral estabelecida por A1. Já A2 foi atribuindo significado a partir de seu diálogo com A1. Isso porque, segundo Peirce (1989, p. 16), o “*significado* deve envolver uma referência, a *intenção*” (grifos do autor), atribuída a uma mente interpretadora (ALMEIDA; SILVA, 2014).

Ainda a respeito deste excerto, podemos evidenciar que a tentativa em identificar para que serve a tabela (que na relação signo-objeto é um ícone, um objeto que ainda será caracterizado) e estabelecer uma maneira para resolver o problema, os alunos estão reagindo àquilo que leram, a situação-problema proposta, e assim evidenciamos signos interpretantes de secundidade.

Nesse caso, a tentativa de entender a situação-problema que precisam resolver e determinar que informações lhe serão relevantes caracteriza-se na modelagem como fase de inteiração, pois segundo Almeida, Silva e Vertuan (2012) a inteiração

> [...] representa o primeiro contato com a situação-problema que se pretende estudar com a finalidade de conhecer as características e especificidades da situação. A inteiração conduz a formulação do problema e a definição de metas para sua resolução, assim a escolha do tema e a busca de informações a seu respeito constituem o foco central nessa fase [...] (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p.15).

O professor explicou então que a alíquota, neste caso, era um valor percentual descontado de determinada renda mensal. Além disso, retomando o texto da situação era dito que para cada faixa de rendas havia uma alíquota para ser descontada e uma parcela em reais que também deveria ser descontada do salário informado. Nesse momento podemos inferir que o signo tabular (interpretante) que se cria na mente dos intérpretes é uma rema e, com isso, houve compreensão por parte dos alunos na fase de inteiração.

Em seguida, os grupos tiveram dificuldades em determinar o valor da alíquota, na tentativa de matematizar a situação e encontrar uma maneira de determinar de que modo fora obtida a quantia de R$ 80,26 de IR de um salário de R$ 2900,40, pois não se lembravam de como efetuar cálculo com porcentagem.

O professor, vendo que esta era uma dúvida comum em toda a turma, pediu a atenção de todos e, conversando com os alunos, perguntou o que significava quinze por cento. Ninguém respondeu, então o professor falou pausadamente “quinze por cento”. A3 então questionou se significava dividir quinze por cem. O professor assentiu e A10 questionou: “mas aí o que faço com o resultado?”. A3 então respondeu que era só multiplicar pelo valor da renda.

Depois a turma voltou novamente suas atenções para seus grupos. Os alunos tentaram determinar quanto era quinze por cento de R$ 2900,40. Utilizando uma calculadora determinaram o valor R$ 435,06.

No desenvolvimento da atividade, o professor verificou que os alunos não estavam tentando resolver o problema do Quadro 16, pois, ao invés de buscarem uma solução para a problemática que descrevesse um modo de determinar o cálculo do imposto de renda para qualquer renda informada (*Como você faria para calcular o IR de cada salário sabendo que um dos empregados dessa empresa tem um desconto do imposto de R$ 80,26 sobre uma renda de R$ 2900,40?*), os alunos possivelmente tentaram solucionar a seguinte problemática: “*como você faria para calcular o IR de uma renda de R$ 2900,40 e imposto de renda igual a R$ 80,26?*”.

Diante disso, o professor solicitou aos grupos que retomassem a problemática da situação, mas A15 que estava no grupo G3 disse: “o cálculo é a mesma coisa professor, só muda os números, mas vai ser o mesmo jeito de fazer”. No grupo G4, A8 também mencionou: “eu li a tarefa de novo professor, só tem que descobrir como faz a conta para descontar 80 reais e 26 centavos de 2900 reais e 40 centavos”.

O professor tentou então apontar para as diferentes faixas salariais que foram apresentadas no Quadro 16, mas percebeu que os alunos decidiram ignorar estes dados, fizeram simplificação do que foi proposto e que de modo unânime todos os grupos focaram apenas na faixa de renda salarial em que estava localizado R$ 2900,40.

Segundo Dalto e Buriasco (2009):

> Considera-se Problema Proposto aquele que constava originalmente na Prova e que se esperava que fosse resolvido pelo estudante, e Problema Resolvido aquele que, mediante a produção escrita, inferiu-se que cada estudante resolveu como resultado da interpretação que fez do Problema Proposto (DALTO; BURIASCO, 2009, p. 456).

Neste momento o professor alterou a estratégia no desenvolvimento da atividade e deixou que os alunos resolvessem o problema que haviam entendido para durante as discussões retomar o problema inicial.

Podemos perceber então, na situação-problema que A15 e A8 disseram que seus grupos estavam estudando a produção de signos indexados e nos excertos das falas dos dois estudantes emergiram signos dicentes, ou seja, eles determinaram a representação de algo específico para ser estudado.

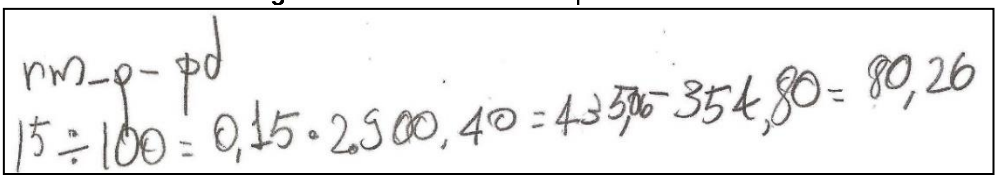
Com relação às simplificações feitas pelos grupos a partir de todos os dados que receberam temos que, segundo Almeida e Silva (2014, p. 95), “as simplificações são ações cognitivas que auxiliam na tomada de decisão para o encaminhamento do desenvolvimento da atividade”.

Os signos que emergiram dos diálogos com os alunos, depois da inteiração, caracterizam-se na modelagem com pertencentes à fase de matematização, que de acordo com Almeida, Silva e Vertuan (2012) essa fase

> [...] é caracterizada pelo processo de transição de linguagens, de visualização e de uso de símbolos para realizar descrições matemáticas, que são realizadas a partir de formulação de hipóteses, seleção de variáveis e simplificações em relação às informações e ao problema definido na fase de inteiração [...] (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p.15).

O grupo G1 resolveu a situação utilizando primeiro uma notação algébrica, conforme Figura 16.

Figura 16 – Modelo escrito por G1

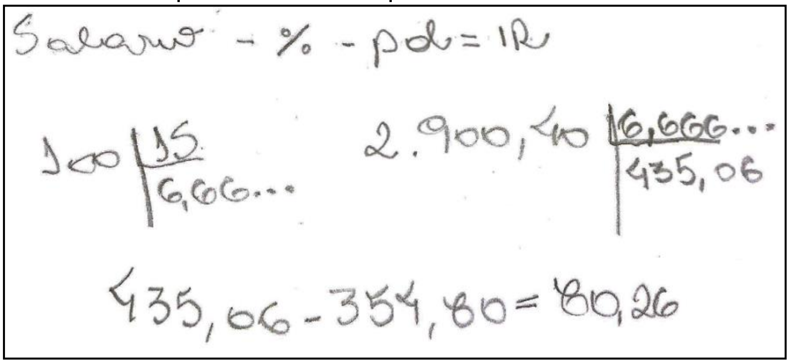


Fonte: produção escrita de G1.

As letras da variável “rm” indicavam “renda mensal”, enquanto as da variável “p” e “pd” correspondiam a “porcentagem” e “parcela a deduzir”, respectivamente. G1 utilizou igualdades para resolução do problema, ainda que de forma equivocada, mas conseguiu determinar uma maneira de efetuar o cálculo de renda e validou seu resultado ao determinar que o desconto de imposto de renda era o mesmo que informado no texto, para a renda também informada na situação.

Já o grupo G2 também escreveu uma notação simbólica para resolver o problema, mas os alunos efetuaram o cálculo da porcentagem de maneira equivocada, conforme Figura 17.

Figura 17 – Modelo que G2 encontrou para utilizar os dados fornecidos

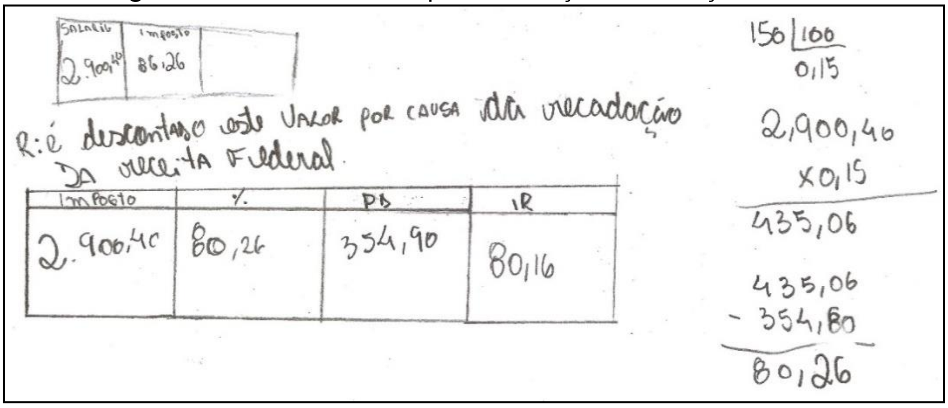


Fonte: produção do grupo G2.

Contudo quando os alunos efetuaram a divisão de 2900,40 por $6,\overline{6}$ obtiveram o mesmo resultado que os outros grupos. O professor optou por discutir esta situação mais adiante depois que todos concluíssem a atividade.

O grupo G3, diferentemente dos dois primeiros construiu um quadro para relacionar a renda, com a alíquota, a parcela a deduzir e o imposto descontado, ainda que tenha efetuado os cálculos corretamente, indicou na coluna da alíquota (representada por “%”) além de ser o único grupo a indicar uma resposta, conforme Figura 18. Mas a resposta possivelmente corresponde ao problema: “*por que é descontado R$ 80,26 da renda R$ 2900,40?*”.

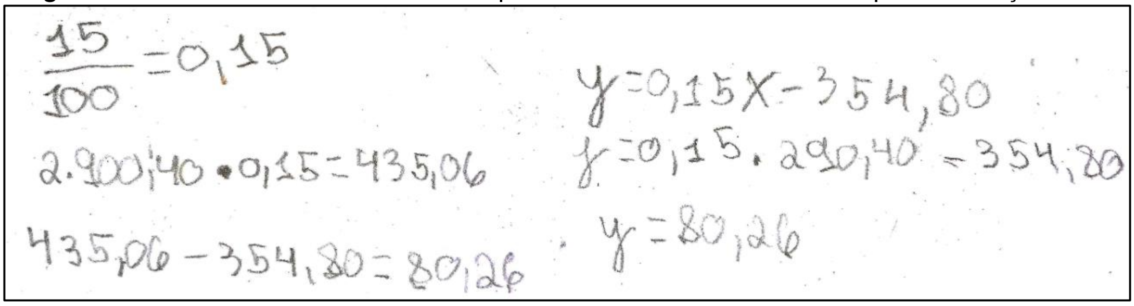
Figura 18 – Modelo do G3 para resolução da situação



Fonte: produção do grupo G3.

G4 apresentou duas resoluções para o problema. A primeira utilizando procedimentos similares aos outros três grupos, utilizando a notação decimal da alíquota para calcular uma porcentagem da renda e, em seguida, subtrair desta quantia o valor em reais da parcela a deduzir. Contudo a segunda resolução que o grupo anotou aconteceu depois das discussões com toda a turma, conforme Figura 19.

Figura 19 – Modelos escritos antes e depois da discussão com a turma para resolução da situação



Fonte: produção do grupo G4.

A partir dos registros escritos dos quatro grupos evidenciamos que, de maneira geral, todos eles, ao darem continuidade no estudo da situação-problema começam a avançar na categoria de terceridade peirceana. A situação-problema entregue aos alunos (primeiridade) associa as simplificações e o problema resolvido (secundidade), a busca de um modelo (terceridade).

Para responderem à situação, os alunos seguiram uma lei (os dados tabulares e informações do texto entregue – Quadro 17) e sendo assim os signos produzidos pelos grupos (G1: “rm – p - pd”; G2: “salário - % - pd = IR”; G3: os registros tabulares; G4: as equações) representam na relação signo objeto símbolos e na relação signo e interpretante os signos são argumentos. Segundo Silva (2008, p. 38) o argumento "representa seu objeto quando realiza uma conexão com leis preestabelecidas coletivamente que determinam que o objeto deva ser representado por aquele signo".

Ao analisarmos os signos produzidos pelos grupos entendemos que estes se aproximam da fase da modelagem denominada Resolução. Pois, segundo Almeida, Silva e Vertuan (2012, p.16) essa fase

> [...] consiste na construção de um modelo matemático com a finalidade de descrever a situação, permitir a análise dos aspectos relevantes da situação, responder as perguntas formuladas sobre o problema a ser investigado [...] (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p.16).

Depois que todos grupos concluíram a atividade, foi solicitado pelo professor para que um integrante de cada grupo apresentasse a sua resolução na lousa para discussão com toda a turma.

No caso do G2, a turma percebeu que ao invés de os integrantes do grupo dividirem 15 por 100 eles dividiram 100 por 15, então o restante dos alunos questionou o porquê deste grupo ter obtido a resposta correta também. Além disso, os alunos verificaram os cálculos em uma calculadora e viram que a resposta realmente era a mesma dos outros grupos, conforme excerto a seguir.

> *A11:* A gente fez errado porquê ao invés de fazermos 15/100 fizemos 100/15, aí deu o resultado diferente de todo mundo, deu 6,66.. muito 6. Aí a gente fez 2.900,40 dividido pelo resultado anterior, que na verdade era pra ter dado 0,15 mas deu muito 6. Aí deu 435,06 e a gente fez esse resultado menos 354,80, que deu 80,26.
>
> *Professor:* Agora porque será que dando 6,66... e dos outros dois deu 0,15, como pode ter chegado na mesma resposta?

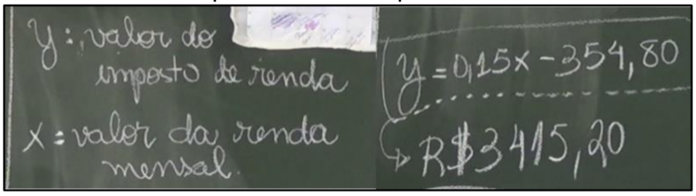
Como nenhum dos integrantes do grupo que escreveu essa resolução soube explicar, o professor interveio e explicou que os cálculos são proporcionais, por isso, esse grupo também chegou a mesma resolução dos demais. Para isso explicou oralmente aos alunos que multiplicar 2900,40 por 0,15 era equivalente a dividir 2900,40 por $6,\overline{6}$.

Ao final o professor orientou os alunos a pensarem se era possível construir um modelo para o cálculo do imposto de renda utilizando uma função e partindo da relação que eles escreveram:

$$renda\ mensal \cdot alíquota - parcela\ a\ deduzir$$

Assim, considerando como *x* o valor, em reais, da renda mensal e y como o valor, em reais, do imposto de renda a ser descontado e como domínio e imagem pertencentes ao conjunto dos números Reais não negativos (por se tratar de quantias em reais tanto para valores atribuídos a *x* quanto a valores atribuídos a *y*) o professor comentou então que seria possível determinar o imposto de renda para qualquer salário pertencente à mesma faixa de renda que R$ 2900,40 utilizando uma função, anotada na lousa, conforme Figura 20.

Figura 20 – Função para cálculo do imposto de renda para salários da mesma faixa que R$ 2900,40



Fonte: acervo dos autores.

Então o professor pediu para que os alunos calculassem, por exemplo, qual seria o imposto de renda descontado de um salário de R$ 3415,20. Os discentes resolvendo, responderam que o imposto descontado deste salário seria de R$157,48, conforme transcrição das falas a seguir.

> *Professor:* Bom, teve alguns grupos que perguntaram se poderiam resolver isso por função e eu disse que era uma saída, não a única, tanto é que o modo como vocês resolveram não necessariamente é uma função. Bom, mas existe uma maneira de escrever essa solução por meio de uma função. Então se eu chamasse de y o valor do imposto de renda [...] Bom sabendo desta informação da escrita como função, pra esse salário [o professor anotou na lousa R$ 3415,20] agora qual seria o valor do imposto de renda pago?
> *A7:* 27,5?
> *Professor:* Aí é menos do que ele pagou. Ó pra 2.900 ele pagou 80,26 de imposto de renda. Minha pergunta é, e pra 3415,20?
> *A1:* tem que descobrir o porcento.
> *A10:* Tem que descobrir a alíquota. Tem que saber a porcentagem que é a alíquota.
> Professor: Quanto vale x nesse caso?
> *A7:* O x vale 3415,20.
> *Professor:* Então eu tenho que multiplicar por 0,15 o 3415,20 e descontar o 354,80. Isso vai dar?
> *A6:* Dá 157,48.

Em seguida, o professor questionou se haveria um modo de, utilizando também função, calcular o imposto de renda para outras faixas salariais que estavam no quadro da situação entregue aos alunos. A8 respondeu que seria "igual ao que o professor escreveu só trocando o número que fica junto com o x e o número com menos".

Depois o professor anotou na lousa as leis associadas às diferentes faixas salariais, conforme a seguir e respectivamente as faixas salariais apresentadas no quadro.

$$y = \begin{cases} 0, \text{se } 0 \leq x \leq 1903{,}98 \\ 0{,}075x - 142{,}80, \text{se } 1903{,}99 \leq x \leq 2826{,}65 \\ 0{,}15x - 354{,}80, \text{se } 2826{,}66 \leq x \leq 3751{,}05 \\ 0{,}225x - 636{,}13, \text{se } 3751{,}06 \leq x \leq 4664{,}68 \\ 0{,}275x - 869{,}36, \text{se } x \geq 4664{,}69 \end{cases}$$

Por fim, a aula foi concluída dizendo aos alunos que quando para uma mesma situação, como no caso do cálculo do imposto de renda, são utilizadas mais de uma lei de formação, podemos definir uma única função para a situação que tem várias leis de formação, ou seja, uma função definida por mais de uma sentença.

A partir do que foi exposto pelos grupos, ao explicarem de que maneira resolveram a situação-problema, podemos evidenciar características no encaminhamento da aula que correspondem a Interpretação de Resultados e Validação, no decorrer de uma atividade de modelagem, pois, segundo Almeida, Silva e Vertuan (2012),

> [a Interpretação de Resultados] pelo modelo implica a análise de uma resposta para o problema, a análise da resposta constitui um processo avaliativo realizado pelos envolvidos na atividade e implica uma [Validação] da representação matemática associada ao problema, considerando tanto os procedimentos matemáticos quanto à adequação da representação para a situação (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p.16).

Ao exporem suas resoluções, e a partir da sistematização que o professor faz em conjunto com os alunos, anotando no quadro da expressão "$renda\ mensal \cdot alíquota - parcela\ a\ deduzir$", podemos inferir que emergem dessas situações signos simbólicos. Com isso, os intérpretes geram como interpretantes argumentos e há atribuição de significado a respeito do fenômeno que permitiu ao final da aula também haver atribuição de significado a respeito do objeto matemático função definida por mais de uma sentença.

Assim, a partir da codificação inicial e das análises empreendidas no desenvolvimento da tarefa a respeito do imposto de renda, obtemos categorias conceituais que emergem destas.

4.2.2 Codificação axial: categorias conceituais emergentes das análises da atividade do imposto de renda

Conforme já mencionamos no capítulo três, a codificação axial "visa a associar as categorias às subcategorias e questiona o modo como elas estão relacionadas" (Charmaz, 2009, p. 91). Assim, a partir das categorias que elaboramos inicialmente consideramos que a terceira delas, C03: Tarefas com situações-problemas no enunciado, é basilar para as considerações que concluímos no decorrer do trabalho e desse modo, pensando em refiná-la, apresentamos subcategorias a ela que nos auxiliarão responder nossa questão de pesquisa.

A seguir apresentamos essas subcategorias no Quadro 18 que emergiram das análises do desenvolvimento da primeira atividade que desenvolvemos com os alunos.

Quadro 18 – Categoria C03 e subcategorias que emergiram das análises da atividade "Imposto de renda"

Categoria	Subcategorias
Tarefas com situações-problemas no enunciado	Aluno identifica situação-problema como uma situação que pode acontecer com ele ou com alguma outra pessoa
	Familiaridade com a situação-problema
	Objeto matemático para resolver a situação é desconhecido
	Objeto matemático que soluciona a situação-problema não é singular, mas plural

Fonte: dos autores.

Com isso, refletimos que em tarefas presentes em LDM que estão alocadas na C03 como tarefas com situações-problemas no enunciado, como a do imposto de renda, quando planejadas e desenvolvidas como atividades de modelagem apresentaram características que aqui enunciamos como subcategorias e que para nós parecessem ser indícios do "potencial para" uma tarefa ser encaminhada pela modelagem.

Além das características que já apresentamos a respeito de uma atividade de modelagem, elaboradas por Almeida, Silva e Vertuan (2012) e apresentadas ao longo da seção "4.2.1 Descrição e análise do desenvolvimento da atividade "Imposto de renda”, evidenciamos que nessa atividade que desenvolvemos a identificação do aluno com a situação-problema, a familiaridade com a situação-problema, o objeto matemático para resolver a situação é desconhecido e há mais de um objeto matemático que pode ser obtido como modelo matemático são importantes e relevantes e, por isso, devem ser consideradas na hora da escolha do problema que será explorado.

4.3 SEGUNDA ATIVIDADE PLANEJADA: “QUANTO PAGO PELA ÁGUA QUE CONSUMO?”

Depois de identificar em livros didáticos tarefas com o tema imposto de renda e elaborar uma atividade de modelagem a partir delas, evidenciamos também que das tarefas alocadas no GT03, três se relacionavam à temática “conta de água”, uma pertencia ao LDM1 e as outras duas ao LDM3.

Escolhemos esse tema para desenvolver uma segunda atividade de modelagem com os alunos por acreditar que se trata de algo que é reconhecido pelos alunos como uma situação cotidiana, pagar conta de água no local em que moram.

No LDM1 e no LDM3 as tarefas envolvendo conta de água foram direcionadas como aplicação e exemplo de aplicação do objeto de conhecimento matemático: função definida por mais de uma sentença.

No LDM1, a tarefa apresenta um quadro associando a quantidade de consumo *c* de metros cúbicos de água com quatro fórmulas que indicam o valor *V* da conta a pagar, em reais, conforme Figura 21.

Figura 21 – Situação-problema sobre conta de água proposta no LDM1

1. Uma empresa de tratamento de água e esgoto de certa cidade calcula o custo residencial mensal de seus serviços da seguinte forma:

Consumo *c* de água	Valor *V* da conta (R$)
$0\ m^3 < c \leq 10\ m^3$	$V = 10$
$10\ m^3 < c \leq 20\ m^3$	$V = 10 + (c - 10) \cdot 1{,}20 = V_1$
$20\ m^3 < c \leq 30\ m^3$	$V = V_1 + (c - 20) \cdot 1{,}50 = V_2$
$30\ m^3 < c$	$V = V_2 + (c - 30) \cdot 2{,}00$

O valor total da conta é igual ao dobro do valor calculado para a água.

O consumo de água na casa de Caio, nos três últimos meses, foi igual a 9 m^3, 18 m^3 e 36 m^3. Então, Caio pagou, em reais, respectivamente:

alternativa a

a) 20,00; 39,20; 98,00

b) 10,00; 19,60; 49,00

c) 20,00; 40,00; 80,00

d) 18,00; 37,20; 96,00

Fonte: MODERNA, 2016, p. 81.

Além disso, o enunciado da tarefa também informa que o valor total a pagar pelo consumo de água é igual ao dobro do valor *V* em qualquer faixa de consumo. Desse modo, há uma simplificação didática na exploração do tema, pois para o cálculo de contas de água, em geral, há o cálculo da taxa de consumo de água acrescido de uma porcentagem referente ao consumo de esgoto.

Já no LDM3 há uma tarefa semelhante à do LDM1 com um quadro de referência para tarifa a pagar dependendo da faixa de consumo de metros cúbicos de água. Porém não são indicadas fórmulas para os alunos, mas exigido que, a partir dos dados fornecidos eles escrevam uma lei de formação para uma função que represente a situação, conforme Figura 22.

Figura 22 – Outra situação-problema sobre conta de água proposta no LDM3

8 No quadro seguinte estão representados os valores do metro cúbico (m^3) de água praticados em residências de certo município, de acordo com a faixa de consumo.

a) Determine o valor da conta de água de duas residências, $\mathbf{R_1}$ e $\mathbf{R_2}$, cujos consumos foram 28 m^3 e 35 m^3, respectivamente.

b) Qual o consumo correspondente a uma conta de água no valor de R$ 112,80?

Faixa de consumo (m^3)	Tarifa (R$)
Até 20 m^3	1,20 por m^3
De 21 m^3 a 50 m^3	1,80 por m^3 excedente
Acima de 50 m^3	2,90 por m^3 excedente

c) Qual é a lei da função que relaciona o valor total (**v**), em reais, ao consumo de **x** metros cúbicos.

Fonte: IEZZI et al, 2016, p. 118.

Além disso, no LDM3 também é apresentado um exemplo envolvendo o tema conta de água. Para ilustrar a aplicação de uma situação cotidiana envolvendo funções definidas por mais de uma sentença, é apresentado como pode ser determinado o valor a pagar pelo consumo de água em metros cúbicos, conforme Figura 23.

Figura 23 – Situação-problema sobre conta de água proposta no LDM3

EXEMPLO 1

Considere agora o quadro a seguir, que apresenta parte da conta de água de uma residência que gastou 17 m^3 de água. Além do valor a pagar, a conta mostra como calculá-lo em função do consumo de água (em m^3). Existe uma tarifa mínima e diferentes faixas de tarifação.

Companhia de saneamento – Tarifa de água/m^3

Faixa de consumo (em m^3)	Tarifas (em reais)	Consumo	Valor (em reais)
até 10	6,00	tarifa mínima	6,00
de 11 a 20	0,93 por m^3	7	6,51
de 21 a 50	2,33 por m^3		
acima de 50	2,98 por m^3		
		Total	12,51

Observe que, à medida que o consumo aumenta, o valor do metro cúbico de água fica mais caro. É uma forma de privilegiar famílias cujo consumo é menor com tarifas mais baixas, estimulando-as a diminuir o consumo de água e alertando a população da necessidade do consumo mais consciente da água.

Veja qual seria o valor da conta se o consumo dobrasse, isto é, se passasse a 34 m^3 de água:

$$\underbrace{6{,}00}_{\text{primeiros } 10\ m^3} + \underbrace{0{,}93 \cdot 10}_{\text{de } 11\ m^3 \text{ a } 20\ m^3} + \underbrace{2{,}33 \cdot 14}_{\text{de } 21\ m^3 \text{ a } 34\ m^3} = 6{,}00 + 9{,}30 + 32{,}62 = 47{,}92$$

PENSE NISTO:

Nesse exemplo, o valor da conta e o número de m^3 consumidos são grandezas diretamente proporcionais?

Não; dobrando-se o consumo, o valor da conta não dobra. É oportuno revisar o conceito de grandezas diretamente proporciona[is] e função linear.

Fonte: IEZZI et al, 2016, p. 116.

Não são indicadas expressões algébricas neste exemplo e nem a função que pode representar o consumo de água, mas como tal situação pode ser interpretada e resolvida associando-se implicitamente à ideia do objeto matemático já estudado.

Desse modo, dando continuidade à nossa pesquisa com alunos do primeiro ano do Ensino Médio, realizamos o planejamento da atividade (apêndices G e H) para que o encaminhamento em sala de aula fosse realizado por meio de uma atividade de modelagem matemática. No Quadro 19 apresentamos o texto da atividade entregue aos alunos. Para isso, consideramos o tema conta de água e a empresa responsável pela distribuição e manutenção de água e esgoto na cidade de Londrina (PR), a Sanepar, visto que é o município em que se localiza a escola.

Nessa atividade, os alunos, a partir do texto, foram orientados oralmente a utilizar objetos matemáticos, como determinar o cálculo de conta de água para qualquer quantia em metros cúbicos consumida.

Quadro 19 – Atividade sobre a conta de água

Quanto pago pela água que consumo?

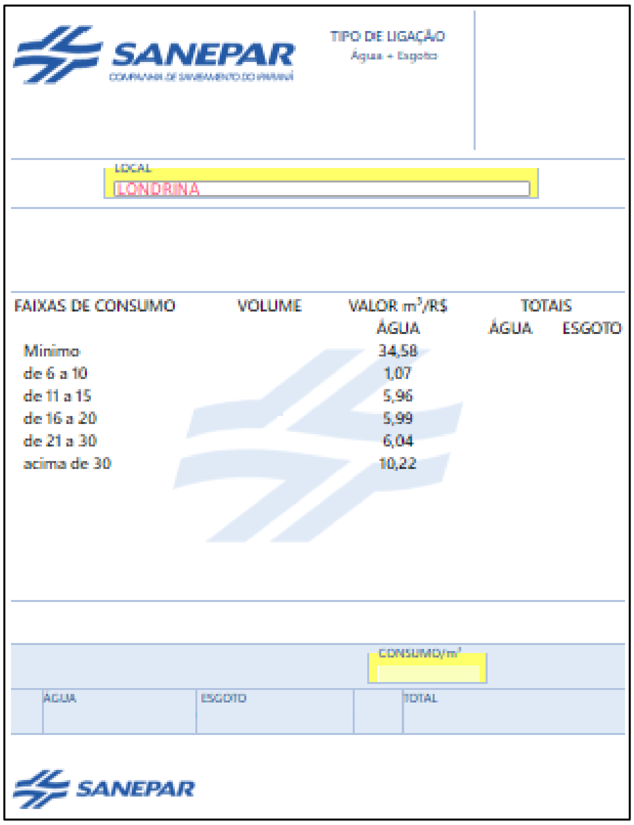
Em Londrina, a empresa responsável pelo abastecimento e tratamento de água e de esgoto é a Sanepar.

Segundo o site SANEPAR (2018),

> A Sanepar fornece água tratada a 100% da população urbana dos municípios atendidos. Coleta mais de 70% e trata 100% do esgoto coletado, a média nacional de coleta é de 51,9% e de tratamento é de 74,9% conforme Sistema Nacional de Informações sobre Saneamento - SNIS 2016 (SANEPAR, 2018).

Na Figura 1 estão apresentadas as tarifas, por consumo de m³ de água, para o cálculo de custo residencial mensal.

Figura 1 – Tarifas apresentadas em um modelo de fatura


SANEPAR
COMPANHIA DE SANEAMENTO DO PARANÁ
TIPO DE LIGAÇÃO
Água + Esgoto
LOCAL
LONDRINA

FAIXAS DE CONSUMO	VOLUME	VALOR m³/R$ ÁGUA	TOTAIS ÁGUA	TOTAIS ESGOTO
Mínimo		34,58		
de 6 a 10		1,07		
de 11 a 15		5,96		
de 16 a 20		5,99		
de 21 a 30		6,04		
acima de 30		10,22		

CONSUMO/m³
ÁGUA
ESGOTO
TOTAL
SANEPAR

Fonte: Sanepar. Disponível em: <http://site.sanepar.com.br/>. Acesso em: 01 jul. 2018.

Sabendo que no cálculo da conta de água são cobrados o consumo de água e uma taxa referente ao esgoto, que corresponde a 80% do valor consumido de água, se conhecermos o consumo em m³ de água, qual o total pago na conta de água?

Fonte: produção dos autores.

A seguir apresentamos a descrição do desenvolvimento desta atividade e a análise dos signos interpretantes que emergiram no segundo dia de coleta de dados com os alunos.

4.3.1 Descrição e análise do desenvolvimento da atividade "Quanto pago pela água que consumo?"

Para iniciar o desenvolvimento da segunda atividade, o professor organizou os alunos nos mesmos grupos da primeira atividade (três grupos de cinco e um de seis integrantes), depois, começou a questionar se os alunos já tinham ouvido falar a respeito da conta de água e se conheciam a empresa que fazia a manutenção de água e esgoto e distribuição de água em Londrina (PR). Todos os alunos disseram ter conhecimento a respeito de conta de água e responderam que a empresa que prestava serviço de água no município era a Sanepar.

O professor disse então, que a atividade em que iam trabalhar era a respeito da conta de água e da Sanepar e distribuiu uma folha com as informações (apêndice G) para cada grupo, seguido da leitura com toda a turma e possíveis dúvidas iniciais.

O primeiro contato dos alunos com a atividade e a definição do que precisam investigar caracteriza-se na modelagem como a fase de inteiração, que associamos também à primeiridade peirceana, em relação ao nível de significado da atividade para os alunos.

Após esse primeiro contato, os alunos reunidos nos grupos continuaram na inteiração com a atividade, o professor foi andando pela sala perpassando cada grupo questionando-os a respeito de possíveis dúvidas.

Ainda que tivessem conhecimento a respeito da existência de conta de água os alunos não sabiam como era medido o consumo e nem que era cobrada uma taxa de esgoto e estavam com dúvidas conforme evidenciado no excerto de G4 transcrito a seguir.

> *A16*: Então é que não estamos entendendo a faixa de consumo, porque aqui né, sabendo que no cálculo da conta de água são cobrados do consumo de água uma taxa referente ao esgoto, aí a faixa de consumo: mínimo de 6 a 10, vai ser só assim [aponta para o número 6 na primeira faixa de consumo de água], nós vamos usar só o 6 na conta? Pro consumo, na hora de fazer a conta e o esgoto?
> *Professor*: Não, não foi especificado quanto foi consumido, então tem o mínimo de 6 a 10 metros cúbicos. A primeira coisa que vocês têm que saber é como calcular o consumo de água pra depois ver do esgoto, entendeu?
> *A18*: É então porque aqui o x pode ser a faixa de consumo aí tira 80% que é do esgoto?

> *A17*: Se a faixa de consumo for de 6 a 10 aí sei lá pode fazer 80% de 8, deve ser 10.

A partir do excerto entende-se que A18 relacionou o consumo de água a um objeto que era familiar para ele, a notação algébrica de *x* como uma variável e que se relaciona ao objeto matemático função. Assim como na primeira atividade, a atribuição de significado, nesse caso, foi facilitada pela experiência colateral estabelecida por A18. Os outros integrantes do grupo foram atribuindo significados a partir do diálogo com A16, pois, segundo Peirce (1989, p. 16), o "*significado* deve envolver uma referência, a *intenção*" (grifos do autor), que é atribuída a uma mente interpretadora.

Com relação ao excerto, podemos destacar também a fala dos alunos que estão tentando identificar como funcionam as faixas de consumo, e a relação consumo de água com a porcentagem referente à taxa de esgoto. Nesse caso, a relação signo-objeto remete a um ícone, pois o objeto está sendo caracterizado. Além disso, ao tentarem identificar uma possibilidade de resolver a tarefa os alunos estão reagindo ao que estão lendo, a atividade de modelagem, o que nos evidencia a signos interpretantes de secundidade.

No excerto ainda evidenciamos o que Almeida, Silva e Vertuan (2012, p.15) caracterizam como fase de inteiração, pois "representa o primeiro contato com a situação-problema que se pretende estudar com a finalidade de conhecer as características e especificidades da situação.

Já no G2, durante a inteiração, os alunos estavam com dificuldade em entender de que maneira era medido o consumo de água, conforme destacado no excerto a seguir.

> *Professor*: Como que eu meço o consumo de água? Isso está na folha de todo mundo.
> *A7*: Não sei... [os alunos do grupo voltam e leem a folha que receberam].
> *Professor*: Dá uma olhada aí. Essas faixas de consumo são referentes a que? [o professor aponta para as faixas de consumo da tarefa].
> *A7*: Então isso que eu; estávamos vendo.
> *Professor:* O consumo de água é medido em que unidade?
> *A8*: Em litros? Em metros? [o aluno menciona metro como abreviação de metro cúbico].

[Os alunos questionam uns aos outros se o consumo é medido em litros ou metros cúbicos e concluem que é medido em metros cúbicos depois de relerem o texto].

[...]

A10: O consumo é em metros cúbicos, então de 6 a 10 vamos colocar 8, $8m^3$ que vai ser oito vezes oito vezes oito que é, não sei.

A9: oito vezes oito é igual a sessenta e quatro e sessenta e quatro vezes oito, vocês não sabem quanto que é?

A7: 512 metros. A já sei então, vai ser *x* metros cúbicos, não é? Vai ficar *x* ao cubo que vai ser o valor correspondente à faixa de consumo e disso a gente retira 80%.

A8: Eu me perdi nas contas.

A7: Lê a pergunta novamente.

A9: A taxa referente ao esgoto então é uma taxa adicional?

A8: É.

A7: Então cobra a mais. *x* metros cúbicos mais oitenta por cento do *x*.

A partir desse excerto podemos evidenciar que o G2 estava com dificuldades em entender de que maneira era medido o consumo de água, e ressignificaram tal objeto a partir dos signos interpretantes ao relerem o texto e questionarem uns aos outros. Ainda que tal ressignificação tenha gerado um entendimento equivocado de que a medida em metros cúbicos deveria ser elevada em metros cúbicos ($8\ m^3$ seria igual a 8^3).

Contudo, podemos perceber que os signos que emergiram das falas de A7, A8, A9 e A10 são característicos da fase da modelagem denominada matematização. Nas palavras de Almeida, Silva e Vertuan (2012) essa fase

> [...] é caracterizada pelo processo de transição de linguagens, de visualização e de uso de símbolos para realizar descrições matemáticas, que são realizadas a partir de formulação de hipóteses, seleção de variáveis e simplificações em relação às informações e ao problema definido na fase de inteiração [...] (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p.15).

De modo análogo aos grupos dois e quatro, o G1 e o G3 também apresentaram questionamentos e conclusões semelhantes aos destacados nos excertos.

O professor vendo que era uma dúvida em todos os grupos, explicou a todos que primeiro eles deveriam tentar determinar de que maneira era cobrado o consumo de água para, em seguida, determinar quanto era cobrado pela taxa de esgoto.

Ainda conversando com todos os alunos, A3 questionou: “professor, podemos escolher um valor de consumo para tentar calcular quanto gasta?”. Ao ver que esta poderia ser uma maneira de simplificar a situação foi consentido a todos os grupos escolherem um valor para determinar o quanto seria cobrado, mas o professor advertiu: “lembrem-se que escolher um valor e determinar quanto será gasto para esse determinado valor de consumo não responde ao problema, pois vocês devem achar uma maneira de dizer quanto é cobrado por qualquer valor de consumo de água informado”.

Assim G1 e G2 decidiram determinar o valor cobrado por água e esgoto para 15 metros cúbicos, enquanto G3 optou por 9 metros cúbicos e G4 por 16 metros cúbicos.

Em relação às simplificações de primeiro determinar para um consumo específico de metros cúbicos para depois determinar em geral, temos que, segundo Almeida e Silva (2014, p. 95) “as simplificações são ações cognitivas que auxiliam na tomada de decisão para o encaminhamento do desenvolvimento da atividade”.

Além disso, nas escolhas feitas pelos grupos identificamos signos dicentes por determinarem algo específico que seria investigado.

Desse modo, o G1 resolveu a situação determinando o valor cobrado por 15 metros cúbicos utilizando signos algébricos, conforme Figura 24.

Figura 24 – Modelo escrito por G1

$$Ve - Va + 34{,}58 = \frac{Vg}{100} \cdot 80 = VT + Vg.$$

$$15\,m^3 = 5 \cdot 5{,}96 + 5 \cdot 1{,}02 + \frac{Vg}{100} \overset{69{,}95}{-} \cdot 80 + 34{,}58$$

$$29{,}8 + 5{,}35 + 34{,}58$$

$$69{,}95 + 55{,}96$$

$$TP = 125{,}91$$

Fonte: produção do G1.

As letras da variável: “Ve” indicavam “valor excedente”; “Va” indicavam “valor da água”; “Vg” correspondiam a “valor gasto”; “VT” abreviavam “valor total”; “TP” correspondiam a “total pago”. Assim G1 identificou na atividade que os cinco primeiros metros cúbicos gastos de água correspondem à tarifa mínima que é R$ 34,58. E os outros metros cúbicos gastos são excedentes e são cobrados conforme faixa de tarifa de consumo, ou seja, para determinar o valor gasto com 15 metros cúbicos de água eles verificaram que há 5 m^3 referente a tarifa mínima, 5 m^3 excedentes e referente a faixa de tarifa de 6 m^3 a 10 m^3 e outros 5 m^3 excedentes que correspondem a tarifa de 11 m^3 a 15 m^3.

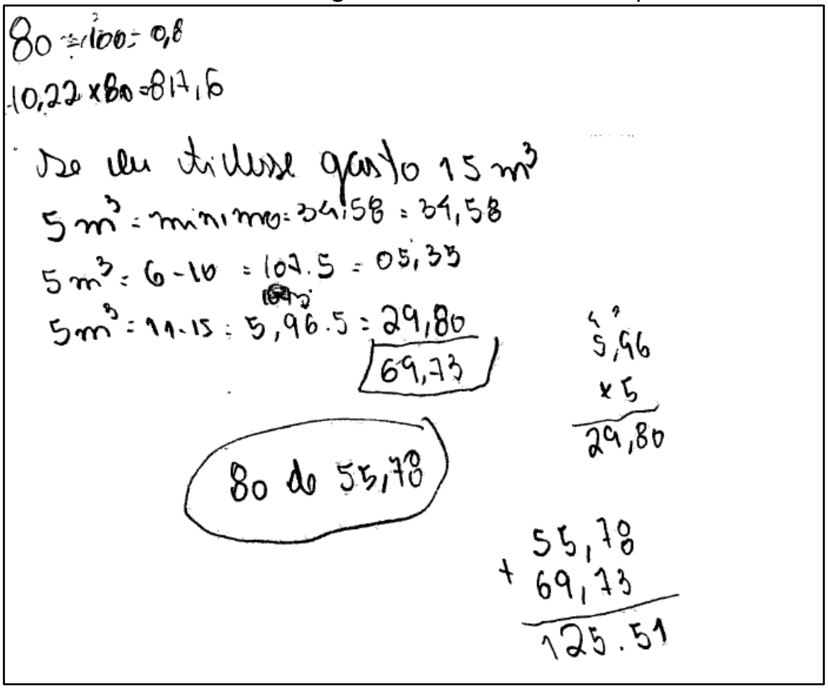
Nesse caso, na primeira linha que escreveram, “Ve X Va” corresponde de modo geral a identificar os metros cúbicos excedentes da tarifa mínima e multiplicá-los pela tarifa corresponde a cada faixa de consumo. Além disso, “Ve X Va + 34,58” corresponde ao valor do consumo de água representado por “Vg”. E para determinar o valor do esgoto deveriam calcular 80% de “Vg” que está indicado na primeira linha por “Vg/100 X 80” obtendo assim o valor total gasto que os alunos representaram por “VT”.

Porém os alunos obtiveram uma soma equivocada por alguns centavos, pois ao invés de obterem R$ 69,73 no valor gasto com água eles obtiveram R$ 69,95 o que gerou um erro de alguns centavos no valor final a pagar.

Ainda que haja alguns equívocos no modelo obtido por G1 podemos perceber que os alunos não só escreveram um modelo para determinar o valor a pagar por 15 m^3 consumidos, mas escreveram um modelo que responde ao problema definido por eles.

Já os integrantes de G2 foram escrevendo e determinando os valores a pagar por itens e depois adicionaram os valores obtidos, determinaram a tarifa total de esgoto e obtiveram o valor a pagar por 15 m^3 conforme Figura 25.

Figura 25 – Modelo escrito por G2

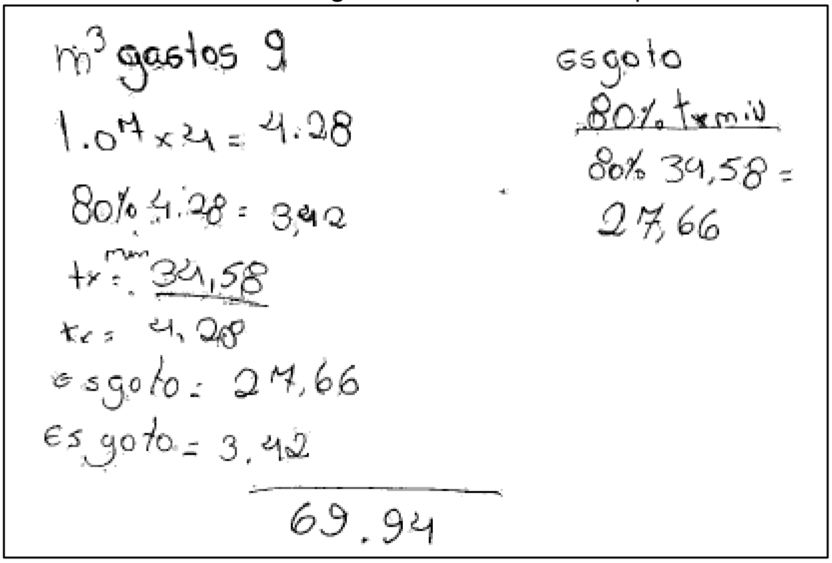


Fonte: produção do G2.

O grupo G3, diferentemente dos dois primeiros optou por determinar o valor a pagar por 9 m³ de água consumidos. Para isso, o grupo determinou o valor a pagar pela água consumida e taxa de esgoto de cada faixa e depois adicionou os valores para obter o valor total a pagar por 9 m³ de água.

O grupo fez uso parcial de signos algébricos e com alguns equívocos, mas apresentou um modelo próximo ao dos outros dois grupos. Usaram o termo “tx min” para remeter à taxa mínima de água enquanto que “tx” refere-se ao valor total a ser pago pelos metros cúbicos que estão na faixa de consumo de 6 m³ a 10 m³. Já a palavra “esgoto” é usada como uma variável e remete tanto ao valor a pagar referente ao valor mínimo de cobrança da fatura quanto ao valor a pagar referente aos metros cúbicos pertencentes à faixa de 6 m³ a 10 m³, conforme Figura 26.

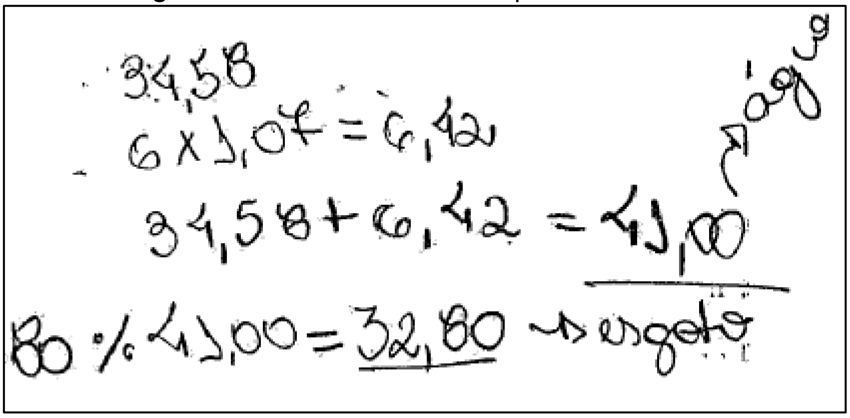
Figura 26 – Modelo escrito por G3



Fonte: produção do G3.

O quarto grupo não utilizou signos algébricos para desenvolver a atividade. Além disso, G4 optou por verificar qual seria o valor a pagar por 11 m³ de consumo de água. Na Figura 27 estão os cálculos realizados pelo grupo. Assim como G1 e G2, G4 determinou o valor total a pagar pelos metros cúbicos de água consumidos para depois determinar o valor a pagar referente à taxa de esgoto.

Figura 27 – Cálculos realizados pelo G4



Fonte: produção do G4.

Ainda com relação aos cálculos realizados por G4 podemos perceber que o grupo equivocou-se ao determinar o valor a pagar pelos metros cúbicos excedentes da taxa mínima de consumo, pois como estavam determinando o valor de 11 m³ deveriam considerar os cinco primeiros metros cúbicos referentes à taxa mínima, outros cinco metros cúbicos determinados na faixa de 6 m³ a 10 m³ e mais um metro cúbico cobrado com a taxa de 11 m³ a 15 m³, mas o grupo calculou todos os metros cúbicos excedentes da taxa mínima com referência apenas a taxa cobrada de 6 m³ a 10 m³.

Assim G4 obteve seu modelo registrando com texto e por itens a o passo a passo para determinar o valor a pagar por 11 m³, conforme Figura 28.

Figura 28 – Modelo escrito por G4

- O valor minimo 34,58 menos 5 e igual a 6 M
- a 6 vezes 1,07 igual a 6,42
- 34,78 + 6,42 igual a 41 o valor da agua
- 80 por cento de 41 e igual a 32.80 que e o valor do esgoto
- 41 + 32,80 igual a 73,80 que é o valor da conta de agua

Fonte: produção do G4.

Assim como na primeira atividade de modelagem, a partir dos signos interpretantes que emergem de seu desenvolvimento, os alunos avançam na categoria de terceridade peirceana ao escreverem um modelo para resolver a atividade. Assim, entendemos que os signos produzidos pelos grupos perpassam pela fase Resolução da modelagem, pois os alunos elaboraram modelos “com a finalidade de descrever a situação, permitir a análise dos aspectos relevantes da situação, responder as perguntas formuladas” (ALMEIDA, SILVA; VERTUAN, 2012, p. 16).

Na sequência, quando todos os grupos finalizaram a atividade, o professor solicitou que um integrante de cada equipe fosse até a frente de toda a turma e apresentasse a resolução que seu grupo obteve para o problema, anotando a resolução na lousa e explicando.

Depois que todos os grupos explicaram suas resoluções, o professor retomou a atividade de modelagem e releu para todos o problema e os questionou se os grupos haviam respondido o que foi definido, então A5 respondeu: “acho que fizemos só um caso não pra todos” e A8 complementou dizendo: “cada grupo fez um número professor, mas é sempre do mesmo jeito, igual a fórmula que o grupo um escreveu professor [nesse momento A8 se refere a expressão ‘Ve X Va + 34,58 = Vg/100 X 80= = VT + Vg”.

Os outros alunos concordam com o A5 e A8. Na fala desses dois alunos há uma constatação: os grupos quando escolheram um determinado valor de metros cúbicos e investigaram como determinar o valor total a pagar na fatura de água, conseguem deduzir também o modelo para calcular o valor gasto de água para qualquer metro cúbico informado, mas de modo informal. No entanto, quando são confrontados pelo professor considerando o problema, que os alunos ressignificam o modelo por eles construídos, matematizando novamente a situação e reconhecendo na expressão anotada pelo G1 um modelo para determinar o valor a pagar para qualquer consumo em metros cúbicos.

O professor sugere que os alunos validem a expressão escrita pelo G1 para responder ao problema. Para isso, usando a expressão (Ve X Va + 34,58 = Vg/100 X X 80= VT + Vg), G2, G3 e G4 deveriam refazer os cálculos dos metros cúbicos por eles escolhidos (15 m^3, 9 m^3 e 11 m^3, respectivamente). Já G1 refazer os cálculos para 9 metros cúbicos e verificar se com esse modelo obteriam a mesma resposta.

Por fim, no final da aula os grupos concluíram que a expressão escrita pelo G1 era um modelo para responder a atividade, pois os alunos conseguiram validar com esse modelo o resultado que haviam obtido anteriormente.

Desse modo, essas ações realizadas pelos grupos depois da fase da Resolução apresentam características evidentes de que os alunos passaram pela fase de Interpretação de Resultados e Validação.

Ao identificarem na expressão escrita pelo G1 como um modelo para responder a atividade de modelagem, os alunos produzem signos simbólicos e, assim, os intérpretes geram signos interpretantes classificados como argumentos.

Desse modo, esta segunda atividade contribui para obtermos mais algumas categorias conceituais.

4.3.2 Codificação axial: categorias conceituais emergentes das análises da atividade “Quanto pago pela água que consumo?”

No Quadro 20 apresentamos mais algumas subcategorias da categoria C03,“Tarefas com situações-problema no enunciado”, que emergiram das análises do desenvolvimento da segunda atividade. As subcategorias apresentadas no Quadro 18 se mantém e outras são acrescentadas. As “novas” categorias estão em destaque no quadro em itálico.

Quadro 20 – Categoria C03 e subcategorias que emergiram das análises da segunda atividade

Categoria	Subcategorias
Tarefas com situações-problema no enunciado	Aluno identifica situação-problema como uma situação que pode acontecer com ele ou com alguma outra pessoa
	Familiaridade com a situação-problema
	Objeto matemático para resolver a situação é desconhecido
	Objeto matemático que soluciona a situação-problema não é singular, mas plural
	Situação-problema pode ser resolvida com os conhecimentos matemáticos que o aluno já possui
	Simplificações são ações cognitivas que possibilitam responder a atividade planejada
	Situação-problema pode ser usada para relacionar diferentes objetos de conhecimento matemático
	Professor intervém quando necessário para auxiliar os alunos em qualquer fase do desenvolvimento da atividade de modelagem

Fonte: dos autores.

Com isso, concluímos a construção de categorias conceituais a partir das análises das duas atividades que desenvolvemos com os alunos. Essas subcategorias nos possibilitam responder a segunda questão norteadora desta pesquisa, que se apresenta como: “o que caracteriza que uma tarefa presente no LDM tenha ‘potencial para’ ser encaminhada enquanto atividade de modelagem?”.

A partir das análises que fizemos até aqui, o “potencial para” uma tarefa de modelagem em LDM articula-se a tarefas cujo tema permita ao aluno relacionar a situações que já foram vividas por ele ou por alguém próximo a ele. Sendo alguns destes temas já familiares aos alunos, como o cálculo de uma fatura de água. Essa familiaridade envolve muitas vezes conhecer superficialmente a respeito, mas nunca ter demandado um tempo para pensar a respeito.

Além disso, há a possibilidade de o objeto de conhecimento matemático que o professor deseja explorar seja desconhecido pelos mesmos, eles ainda não tenham estudado a respeito, como na atividade do imposto de renda. Por isso, tais tarefas que classificamos na categoria “Tarefas com situações-problema no enunciado” podem possibilitar a introdução desses novos objetos matemáticos aos alunos, o que não significa que essas tarefas limitam aos alunos usar apenas tais objetos como uma resposta correta a tarefa eles podem e devem ser livres para usarem os objetos matemáticos que já conhecem.

Tal possibilidade para estas tarefas pode enriquecer o trabalho com a Matemática, pois permite ao aluno associar os objetos matemáticos que já conhece a novos objetos, ou ainda a objetos matemáticos que os outros colegas pensaram para responder a tarefa e são diferentes dos que pensaram. Além disso, o foco dessas tarefas não está essencialmente no conhecimento matemático, mas possibilita a interação da Matemática estudada com situações cotidianas aos alunos.

Por fim, apresentamos a seguir nossas considerações fazendo uso da entrevista feita com a professora regente da turma para respondermos a terceira questão norteadora desta pesquisa realizando a codificação focalizada dos dados.

4.4 ANÁLISE DA ENTREVISTA COM A PROFESSORA REGENTE DA TURMA E CODIFICAÇÃO FOCALIZADA

Conforme roteiro no Apêndice A realizamos uma entrevista com a professora regente da turma buscando complementar os dados que já havíamos coletado dos LDM e das atividades de modelagem desenvolvidas com os alunos.

A partir da entrevista, a professora ressalta a importância do livro didático nas aulas, conforme excerto a seguir.

> Eu acho que diante dos recursos que a gente tem é um apoio pra gente, é o que tem disponível né, pra utilizar, é uma ferramenta de apoio, porque assim a gente não tem recursos tecnológicos pra poder utilizar, então assim é um apoio.

Questionada se ela utilizava alternativas pedagógicas em aulas de Matemática, a professora mencionou que tenta usar principalmente resolução de problemas e jogos, mas que com a turma que desenvolvemos a pesquisa ela havia utilizado uma aula com resolução de problemas (envolvendo o abastecimento de um veículo e o preço de combustível, para iniciar o estudo de funções) e no restante das aulas como recurso, aulas expositivas-dialogadas. Desse modo, percebemos que os alunos não estavam acostumados com aulas em que eles atuam também como protagonistas nos processos de ensino e de aprendizagem e acabam assumindo um papel mais passivo em sala.

Além disso, foi questionado se os alunos haviam comentado alguma coisa com a professora a respeito das atividades que desenvolvemos com eles, e a professora comentou as considerações dos alunos, conforme excerto a seguir.

> [...] eles falaram assim: “a é que a gente tem que pensar muito, mas é bom sim”. Quando eu trabalhei com eles a situação de funções também que eles tiveram que elaborar a situação-problema, eles que tiveram que identificar

> que situação seria uma função e elaborar a situação, eles falaram: "a professora mas dá um exemplo aí, a gente tem que ficar pensando muito pra elaborar". Então a gente percebe assim, que eles têm um pouquinho de preguiça né de pensar, e eu conversei com eles, falei: "gente, mas o aprendizado ele tem que ser construído, então às vezes o professor dá um exemplo e depois você faz de acordo com o exemplo que o professor deu né, mas quando você constrói junto, você elabora junto e encontra solução né, vai deduzindo, vai encontrando solução, você vai construindo seu conhecimento".

Isso corrobora com as características de uma atividade de modelagem em que os alunos desconhecem previamente uma solução para a situação apresentada, além de não relacionarem tal situação a um objeto de conhecimento matemático específico.

As duas atividades que desenvolvemos com os alunos são características de primeiro momento de familiarização dos alunos com atividades de modelagem e, considerando apontamentos da professora regente, no capítulo 1 ao tratarmos a respeito dos momentos de familiarização dos alunos com atividades de modelagem destacamos ações características do professor e dos alunos, em especial do primeiro momento, conforme destacamos no Quadro 21 a seguir.

Quadro 21 – Papel do professor e do aluno no 1º momento de familiarização em atividades de modelagem

	Papel do professor	Papel do aluno
1º momento	• Propõe situação-problema; • Apresenta o problema; • Apresenta as possíveis variáveis. Professor dá suporte no papel do aluno, confirmando aquilo que eles fazem e questionando para estimulá-lo a chegar à situação final.	• Formula as hipóteses; • Deduz o modelo para a situação; • Valida o modelo; • Responde o problema. O aluno amparado pelo professor faz a matematização da situação-problema, valida e responde a atividade.

Fonte: dos autores baseado em Silva; Almeida; Gerôlomo, 2011.

Vemos nas características reapresentadas no Quadro 21 elementos que corroboram com a categoria C03 e as suas subcategorias que construímos, reapresentadas no Quadro 22, a seguir.

Quadro 22 – Considerações a respeito da categoria C03 e suas subcategorias

A partir de uma tarefa com situação-problema no enunciado, adaptada e desenvolvida como atividade de modelagem
Aluno identifica situação-problema como uma situação que pode acontecer com ele ou com alguma outra pessoa
Familiaridade com a situação-problema
Objeto matemático para resolver a situação é desconhecido
Objeto matemático que soluciona a situação-problema não é singular, mas plural

Situação-problema pode ser resolvida com os conhecimentos matemáticos que o aluno já possui
Simplificações são ações cognitivas que possibilitam responder a atividade planejada
Situação-problema pode ser usada para relacionar diferentes objetos de conhecimento matemático
Professor intervém quando necessário para auxiliar os alunos em qualquer fase do desenvolvimento da atividade de modelagem

Fonte: dos autores.

Com isso, considerando as análises que fizemos das duas atividades, os apontamentos apresentados pela professora a respeito do LDM, dos alunos que participaram das atividades e os papéis do professor e do aluno em atividades de primeiro momento de familiarização dos alunos, podemos ponderar a respeito da terceira questão norteadora desta pesquisa: “como pode se configurar o potencial para ser encaminhada uma atividade de modelagem elaborada a partir do LDM, no primeiro momento de familiarização dos alunos com atividades de Modelagem Matemática?”.

A partir das categorias conceituais construídas na codificação axial e das características destacadas no Quadro 2 e reapresentadas no Quadro 21 podemos destacar categorias teóricas que configuram o potencial para tais tarefas:

- o aluno relaciona o tema trabalhado a situações que ele já experenciou ou conhece alguém próximo a ele que possui alguma experiência com o tema;
- a tarefa não possui uma única resolução ou uma única resposta e aluno entende que precisa pensar em uma maneira de resolver a tarefa, não há um objeto de conhecimento matemático pré-vinculado a tarefa que será aplicado;
- o aluno adquire confiança para atuar ativamente nos processos de ensino e de aprendizagem, considerando que os conhecimentos que possui articulados aos conhecimentos dos colegas em grupos possibilita que encontrem um modelo de modo independente do professor;
- a configuração da sala de aula se altera, o foco não é mais a lousa, carteiras são agrupadas para o trabalho em grupo o foco está nas discussões, matematizações e resoluções dos grupos;
- as tarefas possibilitam que os diferentes grupos apresentem seus modelos e que depois na discussão com todos os alunos podem

verificar que diferentes modelos e objetos matemáticos permitem determinar a solução da tarefa, além de possibilitar ao professor a introdução de novos objetos de conhecimento matemático.

Desse modo, respondida nossas três questões norteadoras dessa pesquisa, acreditamos ser possível apresentarmos nossas considerações levando em consideração a questão de nossa pesquisa nas considerações finais apresentadas a seguir.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Durante nossa pesquisa tínhamos por objetivo responder ao seguinte questionamento: "*Que situações-problema, que tratam de funções definidas por mais de uma sentença, presentes em livros didáticos do PNLD–2018, têm potencial para serem encaminhadas enquanto atividades de Modelagem Matemática?*".

Para isso, elaboramos e investigamos as seguintes questões norteadoras que adotamos como basilares na construção e investigação da nossa questão de pesquisa:

- como selecionar, nos LDM, situações-problema para serem encaminhadas por meio da modelagem, em particular, situações-problema que tratam de funções definidas por mais de uma sentença?
- o que caracteriza que uma tarefa presente no LDM tenha "potencial para" ser encaminhada enquanto atividade de modelagem?
- como pode se configurar o potencial para ser encaminhada uma atividade de modelagem planejada a partir do LDM, no primeiro momento de familiarização dos alunos com atividades de Modelagem Matemática?

Desse modo, retomamos aqui, de modo geral, algumas considerações que fomos construindo durante a pesquisa.

Para atingir nosso objetivo, a resposta da questão de pesquisa e questões norteadoras, analisamos cinco de oito coleções que foram aprovadas no PNLD–2018 do Ensino Médio, com foco no objeto de conhecimento matemático: funções definidas por mais de uma sentença. Com base nessas análises planejamos e desenvolvemos, a partir de LDM, com alunos do primeiro ano do Ensino Médio, de um colégio estadual de Londrina, Paraná, duas atividades de modelagem. As análises foram realizadas à luz da semiótica peirceana e considerando características da Modelagem Matemática na Educação Matemática enquanto alternativa pedagógica. Os dados foram categorizados à luz da Teoria Fundamenta em Dados.

As análises feitas nos LDM geraram uma codificação inicial dos dados e a construção de três categorias: tarefas com comandos imperativos; tarefas com comandos imperativos e um gráfico ou figura; tarefas com situações-problema no enunciado.

A partir dessas categorias iniciais, inferimos que para selecionar situações-problema em livros didáticos de Matemática que podem ser encaminhadas por meio da modelagem, deve-se considerar situações com temas que se aproximam da vida dos alunos que se articule com experiências de vida deles ou de pessoas próximas a eles.

Inferimos isso considerando os apontamentos de Blum (2002) e de Almeida, Silva e Vertuan (2012) em que uma atividade de modelagem trata de uma situação do mundo real que a partir de simplificações e investigações os alunos buscam investigar e saber mais a respeito. Além disso, em tais situações se desconhece previamente uma solução para o problema investigado e não há um objeto matemático específico que permita responder o problema estudado.

Sendo assim, o professor deve levar em consideração tais características na busca por situações presentes em LDM que possam ser encaminhadas pela modelagem. Assim, obtivemos a resposta de nossa primeira questão norteadora e indícios do "potencial para" da segunda questão norteadora.

Em seguida, selecionamos duas situações presentes na categoria "tarefas com situações-problema no enunciado", elaboramos e desenvolvemos com os alunos do primeiro ano do Ensino Médio duas atividades de modelagem: "Imposto de renda"; "Quanto pago pela água que consumo?".

Os signos interpretantes que emergiram no desenvolvimento das duas atividades nos permitiram construir e ter uma nova ótica dos dados. O que chamamos de codificação axial e, a partir de tais codificações, elaboramos uma categoria conceitual e suas subcategorias que nos permitiram delinear e ir construindo a teoria emergente dos dados buscando responder à questão de pesquisa.

Nessas subcategorias identificamos, com base nos signos interpretantes, que o "potencial para" desenvolver uma atividade de modelagem planejada a partir de situações presentes em LDM demanda que o professor conheça seus alunos e identifique situações no livro didático com as quais os alunos, ou alguém próximo deles, possam ter alguma experiência.

Podemos inferir isso a partir de excertos das falas dos alunos no desenvolvimento das atividades, quando reconhecem a temática tratada como uma situação que pode ocorrer com ele ou próximo a ele.

Nas atividades desenvolvidas, identificamos as relações sígnicas de significação, objetivação e interpretação havendo assim, compreensão a respeito dos temas abordados. A atribuição de significados ocorreu a partir da familiaridade que possuíam com as situações, fazendo uso de experiências colaterais.

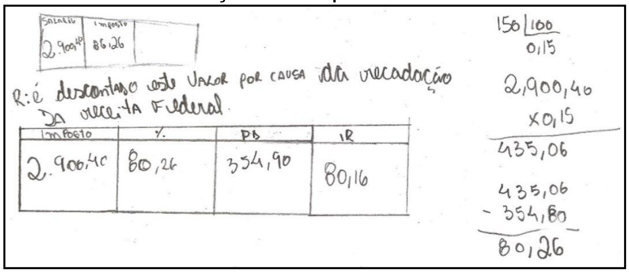
Outro fator a considerar é que tais atividades de modelagem não tinham como foco apenas objetos matemáticos, mas aproximam a Matemática de situações cotidianas podendo pensar e analisar tais situações fazendo uso de objetos de conhecimento matemático.

Com isso os alunos puderam perceber que não havia um objeto matemático pronto e definido que seria usado para matematizar e responder ao problema que investigavam, mas que a Matemática era uma ferramenta que seria utilizada para investigarem a situação. Sendo plurais os objetos matemáticos que possibilitariam responder a situação.

Nesse caso os alunos poderiam fazer uso dos conhecimentos que já tinham para responder a atividade, e verificar que nos diferentes grupos foram apresentados diferentes objetos que também respondiam a situação.

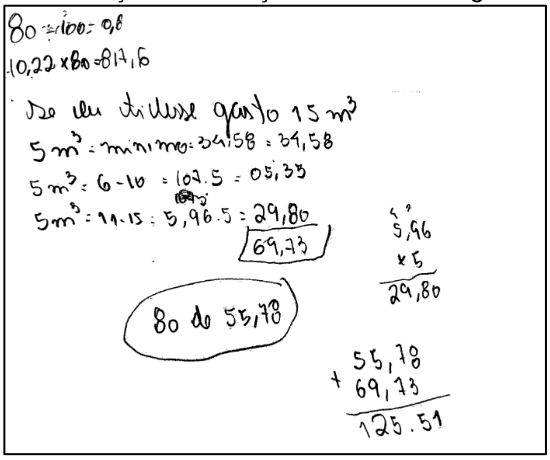
Além disso, os alunos também realizaram algumas simplificações na hora de desenvolver a atividade, tentando matematizar a situação para algum salário específico, na atividade do imposto de renda (Figura 29), e para uma quantidade específica de metros cúbicos consumidos em um mês (Figura 30). Isso possibilitou aos alunos validarem suas hipóteses e permitiram que eles tentassem generalizar e responder o problema investigado.

Figura 29 – Matematização do G3 para resolução da situação do imposto de renda



Fonte: produção do grupo G3.

Figura 30 – Matematização do G2 para resolução da situação da conta de água



Fonte: produção do G2.

E são essas percepções que fizemos dos dados na codificação axial que inferirmos serem características que indicam o “potencial para” uma tarefa presente em um LDM ser adaptada e encaminhada pela modelagem. Com isso, respondemos a segunda questão norteadora desta pesquisa.

Para responder a terceira questão norteadora, consideramos a fundamentação teórica de Modelagem Matemática que estudamos, bem como a análise dos signos interpretantes que emergiram no desenvolvimento das duas atividades e a entrevista com a professora regente da turma.

O “potencial para” uma tarefa ser encaminhada por modelagem no primeiro momento de familiarização dos alunos com atividades de modelagem se configura na relação que eles estabelecem entre a atividade e seu cotidiano. Romper o paradigma de tarefas que possuem única resposta correta, ou única resolução, assumir com confiança um papel ativo nos processos de ensino e de aprendizagem, identificando que os conhecimentos prévios tornam possíveis que deduzam um modelo e solução para a atividade, bem como articular diferentes objetos de conhecimento matemático nos diferentes modelos deduzidos pelos alunos e/ou apresentados ao final pelo professor, caso deseje introduzir um novo objeto matemático aos alunos são ações realizadas em uma atividade de modelagem matemática.

Como evidenciado no desenvolvimento das atividades e nas subcategorias que construímos na codificação axial e focalizada, os alunos precisam investigar a situação que estão estudando escolhendo que objetos matemáticos farão uso no processo o professor desempenha um papel de orientador e mediador no desenvolvimento da atividade. No primeiro momento de familiarização dos alunos com atividades de modelagem cabe a ele propor a situação-problema aos alunos, apresentar um problema que será estudado para tal situação e quais serão as possíveis variáveis.

Enquanto os alunos formulam, experimentam e validam hipóteses, matematizam, deduzem, validam e respondem o problema da situação. Estas são as características que inferimos configurar uma atividade de modelagem de primeiro momento dos alunos adaptada de LDM.

Consideramos que esta pesquisa contribui com o desenvolvimento de outras relativas à Modelagem Matemática na Educação Matemática, no que diz respeito à articulação de atividades de modelagem com o uso de Livros Didáticos e semiótica peirceana, mas também identificamos elementos limitantes presentes em nossa pesquisa. Tais limitações se relacionam, por exemplo, ao fato de o pesquisador não ser o professor regente da turma em que foram coletados os dados e, com isso, não poder dispor de um maior tempo desenvolvendo atividades de modelagem com eles para que se familiarizem com essa alternativa pedagógica e desenvolvam uma maior autonomia e tomada de decisões.

Se tal alternativa se tornasse familiar no decorrer das aulas, há possibilidade de que outros signos interpretantes emergissem e pudessem ser aproveitados em nossas análises.

A construção da cartilha, nosso produto educacional, visa possibilitar que professores utilizem tal alternativa pedagógica em sala de aula e que familiarize os alunos a participar ativamente dos processos de ensino e de aprendizagem.

Por fim, investigar atividades de modelagem matemática de segundo e terceiro momento de familiarização dos alunos a partir de tarefas presentes em livros didáticos de Matemática ou de outros componentes curriculares (Ciências, Geografia, Química, entre outros), pode se constituir como inquietações para pesquisas futuras.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, L. M. W. Um olhar semiótico sobre modelos e modelagem: metáforas como foco de análise. *Zetetiké.* FE-Unicamp, v. 18, número temático, p. 387-414, 2010.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A. P. O significado em atividades de modelagem matemática: um olhar sobre pesquisas brasileiras. *Revemat.* Florianópolis, v. 9, ed. temática, p. 124-145, jun. 2014.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A. P. Semiótica e as ações cognitivas dos alunos em atividades de Modelagem Matemática: um olhar sobre os modos de inferência. *Ciência & Educação.* v. 18, n. 3, p. 623-642, 2012.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A. P.; VERTUAN, R. E. Sobre a categorização dos signos na Semiótica Peirceana em atividades de Modelagem Matemática. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias.* REIEC, v. 6, n. 1, p. 1-10, jul. 2011.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K.A. P. Semiótica e as Ações Cognitivas dos alunos em Atividades de Modelagem Matemática: um olhar sobre os modos de inferência. *Ciência e Educação* (UNESP. Impresso), v. 18, p. 623-642, 2012.

ALMEIDA, L. M. W; BORSSOI, A. H.; SILVA, K. A. P. Teoria Fundamentada em Dados: uma metodologia para pesquisas em Modelagem Matemática. *Perspectivas da Educação Matemática*, v. 8, p. 803-821, 2015.

ALMEIDA, L. W. Considerations on the use of mathematics in modeling activities. *ZDM*, v. 50, p. 19-30, 2018.

ALMEIDA, L. W; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. E. *Modelagem Matemática na Educação Básica.* São Paulo: Contexto, 2012.

BALESTRI, R. *Matemática:* interação e tecnologia, v. 1, 2. ed. – São Paulo: Leya, 2016.

BARBOSA, J. C. Modelagem Matemática: O que é? Por que? Como? *Veritati*, n. 4, p. 73-80, 2004.

BASSANEZI, R. C. *Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática:* uma nova estratégia. São Paulo: Contexto, 2002.

BISOGNIN, E.; BISOGNIN, V. Construção de modelos discretos para o ensino de matemática, in: ALMEIDA, L. M. W.; ARAÚJO, J. L.; BISOGNIN, E. (orgs.), *Práticas de Modelagem Matemática na Educação Matemática.* Londrina, Eduel, 2011.

BLUM W. Quality Teaching of Mathematical Modelling: What Do We Know, What Can We Do?. In: Cho S. (eds) *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education.* Springer, Cham, 2015.

BLUM, W. ICMI Study 14: Applications and modeling in mathematics education – discussion document. *Educational Studies in Mathematics.* 51, p. 149–171, 2002.

BLUM, W.; LEIß, D. How do students' and teachers deal with modelling problems? In: HAINES, C. et al. (Eds), *Mathematical Modelling:* Education, Engineering and Economics. Chichester: Horwood, 222-231, 2007.

BLUM, W.; NISS, M. Applied mathematical problem solving, modeling, applications, and links to other subjects: state, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, Dordrecht, n. 1, p. 37-68, 1991.

BOGDAN, R., BIKLEN, S. *Investigação Qualitativa em Educação* – uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora, 1994.

BORROMEO FERRI, R. Theoretical and empirical differentiations of phases in the modeling process. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik – ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, v. 38, n. 2, p. 86-95, 2006.

BORSSOI, A. H. *Modelagem Matemática, Aprendizagem Significativa e Tecnologias:* articulações em diferentes Contextos Educacionais. 2013. 256 p. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

BRAGA, R. M.; SANTO, A. O. E. *Modelos Matemáticos na Iniciação Científica.* CNMEM, Conferência Nacional sobre Modelagem Matemática na Educação Matemática. São Carlos-SP, 2015.

BURAK, D. Modelagem Matemática e a Sala de Aula. In: EPMEM –ENCONTRO PARANAENSE DA MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1, 2004, Londrina. *Anais...* 2004.

BURAK, D. *Modelagem matemática:* ações e interações no processo de ensino-aprendizagem. Campinas, 1992. Tese (Doutorado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Estadual de Campinas, 1992.

BURAK, D.; BARBIERI, D. D. Modelagem Matemática e suas implicações para a Aprendizagem Significativa. In: IV CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE

MODELAGEM E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA - CNMEM, 2005, Feira de Santana-BA. *Anais...* Feira de Santana - BA: UEFS, 2005.

CALDEIRA, A. D. Modelagem Matemática: um outro olhar. *Alexandria. Revista de Educação em Ciência e Tecnologia*, v. 2, n. 2, p. 33-54, jul. 2009.

CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior; 2013. Documento de área 2013. Disponível em <https://www.capes.gov.br/images/stories/download/avaliacaotrienal/Docs_de_area/Administra%C3%A7%C3%A3o_doc_area_e_comiss%C3%A3o_16out.pdf>. Acesso em: 17 abr. 2018.

CARREIRA, S. Where there's a model, there's a metaphor: Metaphorical thinking in students' understanding of a mathematical model. *Mathematical Thinking and Learning*, v. 3, n. 4, p. 261-87, 2001.

CHARMAZ, K. A construção da teoria fundamentada: guia prático para análise qualitativa. Tradução de Joice Elias Costa. Porto Alegre: Artmed, 2009.

CHAVANTE, E.; PRESTES, D. *Quadrante matemática.* 1ª. ed. São Paulo: Edições SM, 2016.

COSTA, M. S.; ALLEVATO, N. S. G. Livro didático de matemática: Análise de professoras polivalentes em relação ao ensino de geometria. *Vidya*, v. 30, n. 2, p. 71-80, jul./dez., 2010.

DALTO, J. O.; BURIASCO, R. L. C.; Problema proposto ou problema resolvido: Qual a diferença?. *Educação e Pesquisa*, São Paulo, v.35, n.3, p. 449-461, set./dez. 2009.

DANTE, L. R. *Matemática:* contextos e aplicações – ensino médio, volume 1.3ª ed., São Paulo: Ática, 2017.

FIDALGO, A; GRADIM, A. *Manual de Semiótica.* 1. ed. Portugal: UBI, 2005. 224 p. Disponível em: <http://www.bocc.ubi.pt/pag/fidalgo-antonio-manual-semiotica-2005.pdf>. Acesso em: 23 jun. 2018.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. *Investigação em educação matemática:* percursos teóricos e metodológicos. Campinas: Autores associados, 2006.

GALBRAITH, P.; STILLMAN, G. A framework for identifying student blockages during transitions in the Modelling process. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik,* 38 (2), 143-162, 2006.

GARNICA, A. V. M. História Oral e Educação Matemática. In: BORBA, M. C.; ARAUJO, J. L. (org.). *Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática.* Belo Horizonte: Autêntica, p. 77-98 (Tendências em Educação Matemática), 2004.

GOIS, V. H. S. *Modelagem Matemática no ensino de funções trigonométricas:* uma proposta por meio da Trajetória Hipotética de Aprendizagem. 2017. 66 p. Monografia (Especialização em Ensino de Ciências e Educação Matemática – Universidade Tecnológica Federal do Paraná). Londrina, 2017.

GOIS, V. H. S.; SILVA, K. A. P.; DALTO, J. O. Análise da Produção Escrita de estudantes do Ensino Superior: uma abordagem semiótica. *Alexandria*, 2019, no trelo.

GONÇALVES, A. O.; CORRÊA, R. L. T. O livro didático de matemática e cultura escolar em pesquisas: primeiras aproximações. *Revista Diálogo Educacional (PUCPR. Impresso)*, v. 16, p. 554, 2016.

HOFFMANN, M. H. G. What is a “Semiotic perspective”, and what could it be? Some comments on the contributions to this special issue. *Springer*, v. 61, p. 279–291, 2006.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D.; PÉRIGO, R.; ALMEIDA, N. *Matemática:* ciências e aplicações – ensino médio, volume 1. 9ª ed., São Paulo: Saraiva, 2016.

JESUS, E. O. *A aula expositiva dialogada como procedimento metodológico para a abordagem da temática relevo na Geografia Escolar.* 2017. Dissertação (Mestrado em Programa de Pós-graduação em Geografia - PPGEO/IESA/UFG) - Universidade Federal de Goiás, 2017.

KAISER, G.; BRAND, S. Modelling Competencies: Past Development and Further Perspectives. In G. A. Stillman, W. Blum & M. S. Biembengut (Eds), *Mathematical Modelling in Education Research and Practice.* Cultural, Social and Cognitive Influences (pp. 129-149). Cham: Springer, 2015.

KAISER, G.; SRIRAMAN, B. A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik – ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, v. 38, n. 3, p. 302-310, 2006.

KEHLE, P. E.; CUNNINGHAM, D. J. Semiotics and Mathematical Modeling. *International Journal of Applied Semiotics*, v. 3, n. 1, p. 113-129, 2000.

KEHLE, P. E.; LESTER, F. K. Jr. A semiotic look at modeling behavior. In: LESH, R.; DOERR, H. M. *Beyond constructivism:* Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching. HILLSDALE, N. J.: ERLBAUM, p. 97-122, 2003.

LEODORO, M. P.; BALKINS, M. A. S. Problematizar e participar: elaboração do produto educacional no Mestrado Profissional em Ensino. In: SIMPÓSIO NACIONAL

DE ENSINO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA, 2., 2010, Curitiba. *Anais...* Curitiba: UTFPR/Funtef-PR/PPGECT, 2010. Artigo n. 84, não paginado.

LOPES, W. S. *A importância da utilização de múltiplas representações no desenvolvimento do conceito de função:* uma proposta de ensino. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), PUC, São Paulo, 2003.

LORIN, A. P. Z. *Competências dos alunos em atividades de Modelagem matemática.* 2015. 164f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2015.

MAAβ, K. Barriers and opportunities for the integration of modelling in mathematics classes: results of an empirical study. In: BLOMHOJ, M.; BRANDELL, G.; NISS, M. (Eds). *Teaching mathematics and applications:* the 10th ICME. Conpenhagen, p. 61-74, 2005.

MENDES, T. F. *A derivada de uma função em atividades de modelagem matemática:* uma análise semiótica. 2018. 118f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2018.

MODERNA (Organizadora). *Conexões com a Matemática.* 3ª ed., São Paulo: Moderna, 2016.

NIEMEYER, L. *Elementos de Semiótica aplicados ao design.* Rio de Janeiro: 2AB, 2003.

NÖTH, W. *Panorama da semiótica:* de Platão a Peirce. 4. ed. São Paulo: Annablume, 2008.

OTTE, M. Mathematical epistemology from a Peircean semiotic point of view. *Educational Studies in Mathematics.* Springer, v. 61, p. 11-38, 2006.

OTTE, M. Mathematical epistemology from a semiotic point of view. *PME International Conference*, 25, University of Utrecht, The Netherlands, 2001.

PAIVA, M. *Matemática:* Paiva. 3ª ed., São Paulo: Moderna, 2015.

PAULA, J. B. *O termo ‘Axioma’ no tempo, considerando a relação entre a Filosofia e a Matemática, alicerçada no pensamento sobre Complementaridade ‘Otteano’.* 2014. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Educação do Instituto de Educação – Universidade Federal de Mato Grosso, 2014.

PAULA, J. B.; OTTE, M. F. Semiótica: como enfoque interpretativo ao processo cognitivo e desenvolvimento do pensamento matemático. In: VII Congreso

Ideroamericano de Educacion Matemática, 2013, Montevideo. *VII Congreso Ideroamericano de Educacion Matemática.* Montevieo, 2013.

PEIRCE, C. S. *Semiótica e filosofia.* Editora Cultrix, 1972.

PEIRCE, C. S. *Semiótica.* São Paulo: Editora Perspectiva, 2012.

PEIRCE, C. S.; HARTSHORNE, C.; WEISS, P.; BURKS, A. *The Collected Papers of Charles Sanders Peirce.* InteLex Corporation, 1994. (Aqui referido como CP; os números das citações referem-se aos volumes e parágrafos, respectivamente).

PIGNATARI, D. *Informação, linguagem, comunicação.* 2. ed. São Paulo: Culturix, 1981.

PONTE, J. P.; BRANCO, N.; MATOS, A. *Álgebra no Ensino Básico.* Lisboa: Ministério da Educação, Direcção-Geral-de Inovação e de Desenvolvimento Curricular - DGIDC, 2009.

PONTES, H. M. S. *Modelagem matemática sob a ótica da Teoria dos Registros de Representação Semiótica e da educação dialógica.* 2018, 279f. Tese (Doutorado em Educação), Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, 2018.

RADFORD, L. Introducción: Semiótica y Educación Matemática. *RELIME –Revista Latinoamericana de Investigacion en Matematica Educativa*, Comitê Latinoamericano de Matemática Educativa, Distrito Federal, México, número especial, p. 7-21, 2006.

RAMOS, D. C. *O raciocínio abdutivo em atividades de Modelagem Matemática.* 2016. 158f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.

ROSA, C. C. *Um estudo do fenômeno de congruência em conversões que emergem em atividades de Modelagem Matemática no Ensino Médio.* 2009. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2009.

SÁENZ-LUDLOW, A.; KADUNZ, G. Constructing knowledge seen as a semiotic activity. In: Sáenz-Ludlow, A; Kadunz, G. (Org.). *Semiotics as a Tool for Learning Mathematics:* How to describe the construction, visualisation, and communication of mathematical concepts. Netherlands: Sense Publishers, 2016. p. 1-21.

SAJKA, M. A secondary school student understands of the concept of function – a case study. *Educational Studies in Mathematics,* 53, 229-254, 2003.

SANTAELLA, L. *A teoria geral dos signos:* como as linguagens significam as coisas. 2. reimpr. da 1. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2008a.

SANTAELLA, L. Contribuições do pragmatismo de Peirce para o avanço do conhecimento. *Revista de Filosofia.* Curitiba, v. 18, n. 18, p. 75-86, jan./jun., 2004.

SANTAELLA, L. *O que é semiótica.* 27. reimpr. da 1. ed. v. 103. São Paulo: Brasiliense. Coleção Primeiros Passos, 2008b.

SANTAELLA, L. *Semiótica aplicada.* São Paulo: Thomson Learning, 2007.

SANTOS NETO, J. G.; MACHADO, F.M. *A Semiótica e o processo de significação:* Uma análise da propaganda da Coca-cola. Ecom, v. 4, p. 1-12, 2014.

SILVA, K. A. P. da. *Modelagem Matemática e Semiótica:* algumas relações. 2008. Dissertação (Mestrado) – Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2008.

SILVA, K. A. P. *Uma interpretação semiótica de atividades de Modelagem Matemática:* implicações para a atribuição de significado. 2013. 285 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

SILVA, K. A. P.; ALMEIDA, L. M. W.; GERÔLOMO, A. M. L. “Aprendendo” a fazer modelagem matemática: a vez do aluno. *Educação Matemática em Revista.* São Paulo, v. 1, p. 28-36, 2011.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. *Matemática para compreender o mundo 1.* 1ª ed., São Paulo: Saraiva, 2016.

SOUZA, J. R.; GARCIA, J. S. R. *#Contato matemática.* 1ª. ed. São Paulo: FTD, 2016.

STRAUSS, A.; CORBIN, J. M. *Basics of qualitative research: Grounded theory procedures and techniques.* Thousand Oaks, CA, US: Sage Publications, Inc. 1990.

TAMBARUSSI, C. M.; KLÜBER, T. E. Focos da pesquisa stricto sensu em Modelagem Matemática na Educação Matemática brasileira: considerações e reflexões. *Educação Matemática Pesquisa.* São Paulo, v. 16, n. 1, p. 209-225, 2014.

TAMBARUSSI, C.M; KLÜBER, T.E. Modelagem Matemática na Educação Matemática: O que se tem pesquisado? In: Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática, 8, 2013. Santa Maria. *Anais...* Santa Maria: Centro Universitário Franciscano, 2013. v.1, p. 1-15, 2013.

VERONEZ, M. R. D. *As funções dos signos em atividades de modelagem matemática.* 2013. 176p. Tese de Doutorado (Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

VERTUAN, R. E. *Um olhar sobre a Modelagem Matemática à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica.* 2007. Dissertação (Mestrado) – Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2007.

WILLIAMS, J.; WAKE, G. Metaphors and models in translation between college and workplace Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, v. 64, p. 345-371, 2007.

ZBIEK, R.; CONNER, A. Beyond motivation: exploring mathematical modeling as a context for deepening students' understandings of curricular mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, Dordrecht, v. 63, n. 1, p. 89-112, 2006.

APÊNDICES

Apêndice A: Roteiro de entrevista com a professora regente da turma

<u>Entrevista com a professora regente da turma em que foi desenvolvida a pesquisa</u>

Questões abertas iniciais[21]*:*

1) Qual a sua formação completa?
2) A quanto tempo você leciona?
3) Quais materiais didáticos você considera essenciais para você? Por quê?
4) O que você pensa a respeito dos livros didáticos de matemática?

Questões intermediárias:

Para as perguntas a seguir, por gentileza, detalhe suas respostas ao máximo o possível.

1) Você já teve alguma experiência com as alternativas pedagógicas a seguir, para encaminhamento das aulas:
   • resolução de problemas;
   • investigação matemática;
   • modelagem matemática;
   • uso de tecnologias da informação e comunicação em aulas de matemática;
   • uso de jogo em aulas de matemática.
   Se sim, descreve de que maneira se deu esse contato com cada uma delas.
   Se não, por que acha que não teve nenhuma experiência com qualquer uma delas?
2) Você utiliza algum (uns) livro (s) didático (s) para trabalhar com os conteúdos matemáticos, nas suas turmas do primeiro ano do Ensino Médio? Por quais motivos escolheu este (s) livros e não outros?
3) Você adequa seu planejamento de aulas para seguir exatamente a sequência de conteúdos proposta no livro didático? Há algum conteúdo proposto nos livros didáticos, do primeiro ano do Ensino Médio, que você não aborda em suas aulas? Se sim, por quê? Da mesma maneira há algum conteúdo que não é proposto nos livros didáticos, do primeiro ano do Ensino Médio, que você aborda em suas aulas? Se sim, qual e por quê considera importante incluí-lo?
4) Com relação aos conteúdos previstos para o primeiro ano do Ensino Médio, qual deles você julga que os alunos tenham maior dificuldade? Por quê?
5) Dentre os conteúdos proposto para esse ano, está o estudo de diferentes tipos de funções. Você acha que os alunos têm alguma dificuldade no estudo de funções? Se sim, qual (ais)?
6) Ainda a respeito de funções, é proposto o estudo de funções definidas por mais de uma sentença. Você considera importante o estudo desse tipo de função no primeiro ano [do Ensino Médio]? Se sim, por quê? Se não, acha que deveria ser trabalhado em algum outro ano?
7) Se houvesse a possibilidade de ser elaborado para os professores um material alternativo, para o trabalho nas aulas de Matemática, o que você considera importante esse material conter, com o objetivo de contribuir para o ensino e aprendizagem da Matemática?

---

[21] Chamamos de questões abertas iniciais, intermediárias e finais questões que tem por objetivo extrair e elaborar a experiências específica do participante (Charmaz, 2009). Questões abertas iniciais e finais deixam que o entrevistado considera mais relevante. Já as questões intermediárias tem um enfoque maior a respeito de determinado tema.

Questões finais:

1) Há algo mais que você considere que eu deva saber para compreender melhor sobre tudo que me contou?
2) Há algo que você gostaria de me perguntar?

Apêndice B: Autorização da Instituição

AUTORIZAÇÃO

Eu ____, abaixo assinado, responsável pelo Colégio Estadual Vicente Rijo – Ensino Fundamental, Médio e Profissional – Londrina - PR, autorizo a realização do estudo “LIVRO DIDÁTICO E ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA: ALGUMAS ARTICULAÇÕES”, a ser conduzido pela pesquisador Victor Hugo dos Santos Gois, aluno do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática - PPGMAT da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, sob orientação da professora doutora Karina Alessandra Pessoa da Silva. Fui informado pelo responsável do estudo sobre as características e objetivos da pesquisa, bem como das tarefas que serão realizadas na Instituição a qual represento.

Londrina, _____ de junho de 2018.

____

Assinatura e carimbo do responsável pela Instituição

Apêndice C: Termo de assentimento

TERMO DE ASSENTIMENTO

TERMO DE ASSENTIMENTO INFORMADO LIVRE E ESCLARECIDO (Adolescentes com 12 anos completos, maiores de 12 anos e menores de 18 anos)

Informação geral: O assentimento informado para a criança/adolescente não substitui a necessidade de consentimento informado dos pais ou guardiãs. O assentimento assinado pela criança demonstra a sua cooperação na pesquisa.

Título do Projeto: Livro didático e atividades de Modelagem Matemática: algumas articulações.
Investigador: Victor Hugo dos Santos Gois sob orientação de Karina Alessandra Pessoa da Silva.
Local da Pesquisa: Colégio Estadual Vicente Rijo – Ensino Fundamental, Médio e Profissional.
Endereço: Avenida Jucelino Kubitschek, 2372 – Boa vista, Londrina - PR, 86020-000. TEL.: (43) 3323- 7630

O que significa assentimento?

O assentimento significa que você concorda em fazer parte de um grupo de adolescentes, da sua faixa de idade, para participar de uma pesquisa. Serão respeitados seus direitos e você receberá todas as informações por mais simples que possam parecer. Pode ser que este documento denominado TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO contenha palavras que você não entenda. Por favor, peça ao responsável pela pesquisa ou à equipe do estudo para explicar qualquer palavra ou informação que você não entenda claramente.

a) Informação ao sujeito da pesquisa:

Apresentação da pesquisa

Você está sendo convidado (a) a participar de uma pesquisa, cujo objetivo é desenvolver, analisar e discutir situações-problemas retiradas de livros didáticos de matemática que tenham potencial para serem encaminhadas enquanto atividades de Modelagem Matemática. Caso concorde, você participará de seis aulas desenvolvendo, juntamente com os colegas, atividades de Modelagem Matemática. Com a realização destas atividades, pretendemos analisar os dados obtidos e, com base na fundamentação teórica levantada, caracterizar as questões da investigação do trabalho.

b) Desconfortos, Riscos e Benefícios.

Conforme aponta o inciso V da Resolução nº 466 de 12 de dezembro de 2012, do Conselho Nacional de Saúde, “toda pesquisa com seres humanos envolve risco em tipos e gradações variados”, já que envolve questões de caráter pessoal e coletivo. O pesquisador responsável suspenderá a pesquisa imediatamente ao perceber algum risco ou danos à saúde física ou psíquica, ou ainda à dimensão moral do sujeito participante da pesquisa, decorrente da mesma, não previsto no (s) termo (s) de assentimento e/ou consentimento. Os participantes não pagarão e não serão remunerados por sua participação e poderão, sem qualquer ônus, desistir em qualquer momento da pesquisa.

O projeto de pesquisa tem a intenção de contribuir com as discussões a respeito dos processos de ensino e de aprendizagem em sala de aula a partir de encaminhamentos que permitam os alunos a agirem de maneira ativa no aprendizado da matemática.

c) Confidencialidade.

A pesquisa não divulgará seu nome, garantindo o anonimato.

d) Ressarcimento e indenização.

Estão assegurados o ressarcimento e indenização provenientes de custos ou danos gerados ao participar dessa pesquisa.

e) Contato para dúvidas:

Se você ou os responsáveis por você tiver (em) dúvidas com relação ao estudo, direitos do participante, ou no caso de riscos relacionados ao estudo, você deve contatar o investigador do estudo ou sua orientadora: VICTOR HUGO DOS SANTOS GOIS, Rua Maria Calsavaro Gallo, 350, Vale dos Tucanos, CEP 86046-550, Londrina - PR, celular (43) 99903-7108 E KARINA ALESSANDRA PESSOA DA SILVA, Rua Estr. dos Pioneiros, 3131 - Centro, Londrina - PR, 86020-430 TEL.: (43) 3315-6100.

DECLARAÇÃO DE ASSENTIMENTO DO SUJEITO DA PESQUISA:

Eu li e discuti com o investigador responsável pelo presente estudo os detalhes descritos neste documento. Entendo que eu sou livre para aceitar ou recusar, e que posso interromper a minha participação a qualquer momento sem dar uma razão. Eu concordo que os dados coletados para o estudo sejam usados para o propósito acima descrito.

Eu entendi a informação apresentada neste TERMO DE ASSENTIMENTO. Eu tive a oportunidade para fazer perguntas e todas as minhas perguntas foram respondidas.

Eu receberei uma cópia assinada e datada deste Documento DE ASSENTIMENTO INFORMADO.

____

NOME DO ADOLESCENTE   ASSINATURA   DATA

Victor Hugo dos Santos Gois______________________________________

NOME DO INVESTIGADOR   ASSINATURA   DATA

Apêndice D: Termo de consentimento

TERMO DE CONSENTIMENTO

TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO LIVRE E ESCLARECIDO

(Para pais e/ou responsáveis)

Título do Projeto: Livro didático e atividades de Modelagem Matemática: algumas articulações.

Investigador: Victor Hugo dos Santos Gois sob orientação de Karina Alessandra Pessoa da Silva.

Local da Pesquisa: Colégio Estadual Vicente Rijo – Ensino Fundamental, Médio e Profissional.

Endereço: Avenida Jucelino Kubitschek, 2372 – Boa vista, Londrina - PR, 86020-000. TEL.: (43) 3323- 7630

O que significa o consentimento?

O consentimento significa que você concorda que o(a) jovem pelo qual é responsável faça parte de um grupo de jovens e adultos, que participarão de uma pesquisa. Serão respeitados seus direitos e os direitos desse jovem e você receberá todas as informações por mais simples que possam parecer. Para isso, basta ligar para um dos responsáveis pela pesquisa, Victor Hugo dos Santos Gois, cujo telefone é (43) 9933 7108. Pode ser que este documento denominado TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO contenha palavras que você não entenda. Por favor, peça ao responsável pela pesquisa ou à equipe do estudo para explicar qualquer palavra ou informação que você não entenda claramente.

a) Informação ao sujeito da pesquisa:

Apresentação da pesquisa

O(a) jovem pelo qual você é responsável está sendo convidado(a) a participar de uma pesquisa, cujo objetivo é desenvolver, analisar e discutir situações-problemas retiradas de livros didáticos de matemática que tenham potencial para serem encaminhadas enquanto atividades de Modelagem Matemática. Ele participará, caso você concorde, desenvolvendo, juntamente com os colegas, atividades de Modelagem Matemática. Com a realização destas atividades, pretendemos analisar os dados obtidos e, com base na fundamentação teórica levantada, caracterizar as questões da investigação do trabalho.

b) Desconfortos, Riscos e Benefícios.

Conforme aponta o inciso V da Resolução nº 466 de 12 de dezembro de 2012, do Conselho Nacional de Saúde, "toda pesquisa com seres humanos envolve risco em tipos e gradações variados", já que envolve questões de caráter pessoal e coletivo. O pesquisador responsável suspenderá a pesquisa imediatamente ao perceber algum risco ou danos à saúde física ou psíquica, ou ainda à dimensão moral do sujeito participante da pesquisa, decorrente da mesma, não previsto no (s) termo (s) de assentimento e/ou consentimento. Os participantes não pagarão e não serão remunerados por sua participação e poderão, sem qualquer ônus, desistir em qualquer momento da pesquisa.

O projeto de pesquisa tem a intenção de contribuir com as discussões a respeito dos processos de ensino e de aprendizagem em sala de aula a partir de encaminhamentos que permitam os alunos a agirem de maneira ativa no aprendizado da matemática.

c) Confidencialidade.

A pesquisa não divulgará nomes, garantindo o anonimato.

d) Ressarcimento e indenização.

Estão assegurados o ressarcimento e indenização provenientes de custos ou danos gerados ao participar dessa pesquisa.

e) Contato para dúvidas:

Se você tiver dúvidas com relação ao estudo, direitos do participante, ou no caso de riscos relacionados ao estudo, você deve contatar o investigador do estudo ou sua orientadora: VICTOR HUGO DOS SANTOS GOIS, Rua Maria Calsavaro Gallo, 350, Vale dos Tucanos, CEP 86046-550, Londrina - PR, celular (43) 99903-7108 E KARINA ALESSANDRA PESSOA DA SILVA, Rua Estr. dos Pioneiros, 3131 - Centro, Londrina - PR, 86020-430 TEL.: (43) 3315-6100.

DECLARAÇÃO DE CONSENTIMENTO DO SUJEITO DA PESQUISA:

Eu li e discuti com o investigador responsável pelo presente estudo os detalhes descritos neste documento. Entendo que eu sou livre para aceitar ou recusar, e que posso interromper a participação do (a) jovem pelo qual sou responsável, a qualquer momento sem dar uma razão. Eu concordo que os dados coletados para o estudo sejam usados para o propósito acima descrito.

Eu entendi a informação apresentada neste TERMO DE CONSENTIMENTO. Eu tive a oportunidade para fazer perguntas e todas as minhas perguntas foram respondidas.

Eu receberei uma cópia assinada e datada deste Documento DE CONSENTIMENTO INFORMADO.

____

NOME ASSINATURA DATA

Victor Hugo dos Santos Gois

NOME DO INVESTIGADOR ASSINATURA DATA

Apêndice E: Atividade 1 – “Imposto de renda”

Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Câmpus Londrina
Mestrado Profissional em Ensino de Matemática
Atividade desenvolvida em: Colégio Estadual Vicente Rijo - Ensino Fundamental, Médio e Profissional
Professor Victor Hugo dos Santos Gois

Orientações:

• a atividade será desenvolvida em equipe, então logo abaixo, na linha de integrantes, identifique em que grupo você participou colocando o primeiro nome de cada estudante;

• ao iniciarem o trabalho em equipe acionem o gravador de áudio (caso não saibam como fazer isso é só pedir ajuda ao professor) e o deixem parado centralizado no grupo;

• quando concluírem a atividade não se esqueçam de encerrar a gravação do áudio;

Nomes dos integrantes da equipe: ____

____

Imposto de Renda

Você sabe o que é o Imposto de Renda (IR) e como ele é calculado?

Todo mês, ao receber seu salário muitos trabalhadores brasileiros do mercado formal de trabalho notam, em seu holerite, que há um desconto de parte desse salário, um tributo sobre o rendimento, IR, pago ao Governo Federal.

Em todos os países, os impostos arrecadados dos cidadãos devem ser aplicados na manutenção da estrutura pública e em políticas sociais, econômicas e culturais do Estado. No Brasil, os impostos são arrecadados pela Secretária da Receita Federal.

A partir do mês de abril de 2015 o imposto de renda era calculado com base na seguinte tabela:

Tabela de incidência mensal (a partir do mês de abril do ano de 2015)

Renda mensal (em R$)	Alíquota (em %)	Parcela a deduzir (em R$)
Até 1903,98	–	–
De 1903,99 até 2826,65	7,5	142,80
De 2826,66 até 3751,05	15	354,80
De 3751,06 até 4664,68	22,5	636,13
Acima de 4664,68	27,5	869,36

Fonte: Receita Federal do Brasil. Disponível em: <http://idg.receita.fazenda.gov.br/acesso-rapido/tributos/irpf-imposto-de-renda-pessoa-fisica#tabelas-para-atualiza--o-do-custo-de-bens-e-direitos>. Acesso em: 23 mar. 2018.

A tabela mostra a alíquota de imposto e a parcela a deduzir para cada faixa de rendimento mensal.

Considerando todas as informações apresentadas, imagine que você trabalhe no departamento pessoal de uma empresa e uma de suas funções é a de calcular o imposto de renda que deverá ser descontado do salário de cada funcionário da empresa. Como você faria para calcular o IR de cada salário sabendo que um dos empregados dessa empresa tem um desconto do imposto de renda igual a R$ 80,26 sobre uma renda de R$ 2.900,40?

Apêndice F: Planejamento da atividade “Imposto de renda”

Em seguida, descrevemos um possível encaminhamento para a atividade e possíveis dúvidas que estudantes pudessem manifestar, a partir das cinco fases propostas por Almeida, Silva e Vertuan (2012).

- **Inteiração**

Para a inteiração da situação-problema será indicado aos alunos a realização de uma primeira leitura individual, na sequência uma leitura coletiva e, em seguida, o professor irá questionar os alunos para saber o que entenderam do problema. Em caso de dúvidas a respeito do significado de alguma palavra, esta pode ser sanada consultando um dicionário para melhor entendimento.

Possíveis dúvidas dos alunos: palavras que possam gerar dúvidas quanto aos seus significados.

Possíveis soluções segundo o dicionário Michaelis online:

- Renda – Dinheiro que uma pessoa ou uma instituição recebe, geralmente com regularidade, como pagamento por trabalho ou serviços prestados ou como juros de ações ou investimentos; rendimento;
- Holerite – Documento que especifica o salário bruto de um empregado ou funcionário, com as deduções de impostos, contribuições previdenciárias e acréscimos, como comissões, gratificações, salário-família etc., servindo também como autorização para o recebimento do valor líquido;
- Tributo – Imposto de caráter compulsório que a população paga ao Estado por serviços e mercadorias;
- Alíquota – Percentual com que um certo tributo incide sobre o valor de algo tributado.

Quanto à dinâmica de sala de aula, será pedido para que os alunos se organizem em grupos de quatro integrantes, o professor acompanhará as resoluções passando pelas carteiras, instigando, questionando e tirando dúvidas dos alunos. Assim, poderão refletir por quais caminhos estão optando na resolução da situação-problema, além de deduzirem um modelo matemático para resolverem o problema, o que é o objetivo da atividade.

Em relação ao enunciado, espera-se que os alunos sejam fomentados a buscar uma solução para o problema proposto. Nesse sentido, o docente instigará sua turma a analisar o texto e verificar que informações são relevantes, tais como: de que maneira é feito o cálculo de imposto de renda; observarem na tabela as variações no computo do IR; qual é a pergunta que eles devem responder. Concluindo assim, a primeira etapa do processo de modelagem conhecida como inteiração.

➢ **Matematização**

Depois de inteirados, os alunos deverão formular suas hipóteses para poderem então, apresentar um modelo. As hipóteses a seguir são para que os discentes estabeleçam uma resolução a partir de funções definidas por mais de uma sentença, uma das possibilidades de se resolver essa atividade.

Hipóteses:

- o cálculo do imposto de renda é semelhante para qualquer faixa salarial, o que diferencia é a alíquota e a parcela a deduzir;
- o modelo matemático pode ser descrito por uma função que é definida por mais de uma sentença (nesse caso, cada sentença relaciona-se a uma faixa salarial);
- os valores de salários e os valores computados de imposto de renda são maiores ou iguais a zero reais;
- o modelo encontrado descreverá como obter o imposto de renda a partir de qualquer salário informado para as taxas vigentes, mas caso haja alteração nestas taxas será necessário buscar um outro modelo.

Os alunos devem perceber que para cada faixa salarial (cada linha da tabela) a sentença que pode ser associada será linear e de primeiro grau, o que se diferenciará entre uma sentença e outra será o valor da alíquota que se multiplica ao valor do salário e a subtração da parcela a deduzir que se diferencia para cada linha da tabela.

Possível dúvida do professor: os estudantes podem não associar estas hipóteses a funções definidas por mais de uma sentença.

Possível solução: para esta dúvida há, pelo menos, duas possíveis soluções.

A primeira seria deixar que os alunos tentem estabelecer um modelo matemático sem associá-lo a funções desse tipo, tais como funções afins para cada faixa salarial, construção de tabela com indicações escritas de como calcular o imposto de renda para diferentes faixas salariais e construção de um gráfico que descreva os cálculos de imposto de renda (apresentaremos alguns modelos na etapa de resolução).

A segunda seria por meio de questionamentos e/ou direcionamentos, proporcionar aos alunos refletirem e considerarem funções definidas por mais de uma sentença como uma ferramenta para a resolução do problema.

Possível dúvida dos alunos: que informações têm relevância na minha hipótese?

Possível solução: por meio de questionamentos e indicações, o professor levará seus alunos a refletirem que a situação-problema se refere a um modelo que relaciona valor salarial e valor de imposto de renda. Os dados apresentados na tabela são informações importantes a serem consideradas e, além disso, levará os alunos a pensarem que dependendo do salário o IR deve ser computado de maneira diferente.

As variáveis utilizadas nesta situação serão:

- Variável dependente: “i” - IR, dado em reais;
- Variável independente: “s” - salário, dado em reais.

Possível dúvida dos alunos: lembrar parcialmente/ ou não saber qual a definição de função definida por mais de uma sentença.

Possível solução: o professor pode ir ao quadro apresentar a turma qual a definição desse tipo de função.

Função definida por mais de uma sentença

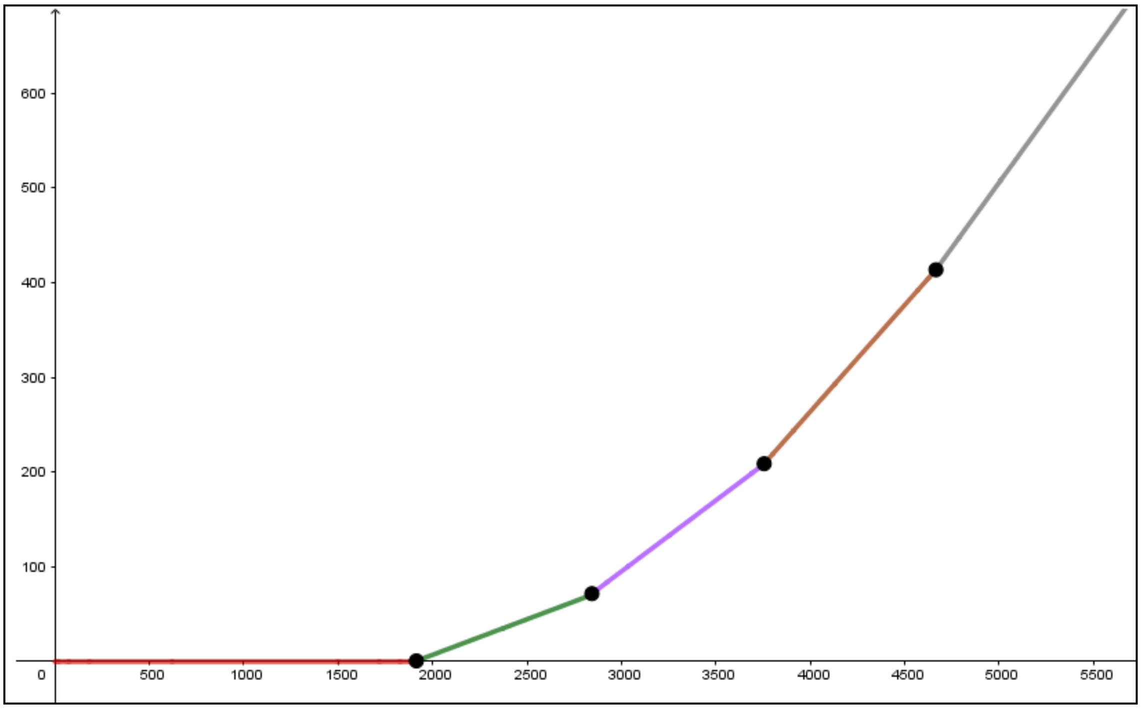
Uma função é definida por mais de uma sentença quando cada uma das sentenças está associada à um subdomínio D1, D2, D3... Dn e a união destes n-subconjuntos forma o domínio D da função original.

- **Resolução**

A partir de tudo o que foi estabelecido anteriormente, ao modelar matematicamente por meio de uma função, os alunos devem perceber então, que a função tem como imagem valores nulos ou positivos, pois trata-se de salários e taxas a pagar do salário, e que cada faixa salarial pode ser modelada por uma função afim. No entanto, os alunos podem utilizar outros objetos matemáticos para modelar a situação, tais como uma tabela de informações, um texto ou ainda um gráfico, ficando a critério deles decidirem por qual delas desejam criar o modelo.

Se optarem por um modelo gráfico poderão perceber que, entre os limitantes superior de uma faixa e o inferior da faixa salarial seguinte, o imposto de renda cobrado é aproximadamente o mesmo, e o crescimento do valor a pagar de IR em cada faixa é linear. Assim obterão um gráfico como o Gráfico 1, a seguir.

Gráfico 1 – Modelo gráfico que representa a situação-problema



Fonte: dos autores.

Caso escrevam o modelo matemático para esta situação a partir de uma tabela, sendo *s* o valor do salário e *i* o valor do IR, poderão modelar de acordo com a Tabela 1.

Tabela 1 – Modelo matemático para a situação proposta

Renda mensal (em R$)	Alíquota (em %)	Parcela a deduzir (em R$)	Cálculo do imposto de renda
Até 1903,98	–	–	0
De 1903,99 até 2826,65	7,5	142,80	$i = 0{,}075s - 142{,}80$
De 2826,66 até 3751,05	15	354,80	$i = 0{,}15s - 354{,}80$
De 3751,06 até 4664,68	22,5	636,13	$i = 0{,}225s - 636{,}13$
Acima de 4664,68	27,5	869,36	$i = 0{,}275s - 869{,}36$

Fonte: dos autores.

Se optarem por um modelo algébrico que represente a situação poderão obter a função $i: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ dada por

$$i = \begin{cases} 0, \text{se } 0 \leq s \leq 1903{,}98 \\ 0{,}075s - 142{,}80, \text{se } 1903{,}98 < s \leq 2826{,}65 \\ 0{,}15s - 354{,}80, \text{se } 2826{,}65 < s \leq 3751{,}05 \\ 0{,}225s - 636{,}13, \text{se } 3751{,}05 < s \leq 4664{,}68 \\ 0{,}275s - 869{,}36, \text{se } s > 4664{,}68 \end{cases}$$

- **Validação**

Para verificar se o modelo se ajustará bem aos dados que foram fornecidos pela atividade, o professor pedirá que os alunos verifiquem aritmeticamente, calculando os valores que estabeleceram com o modelo matemático para faixas salariais informadas na atividade. Assim:

$$\mathrm{i}(1903{,}99) = 1903{,}99 \times 0{,}075\text{-}142{,}80 \cong 0$$

$$\mathrm{i}(2826{,}65) = 2826{,}65 \times 0{,}075\text{-}142{,}80 \cong 69{,}20$$

$$\mathrm{i}(2826{,}66) = 2826{,}66 \times 0{,}15\text{-}354{,}80 \cong 69{,}20$$

$$\mathrm{i}(3751{,}05) = 3751{,}05 \times 0{,}15\text{-}354{,}80 \cong 207{,}86$$

$$\mathrm{i}(3751{,}06) = 3751{,}06 \times 0{,}225\text{-}636{,}13 \cong 207{,}86$$

$$\mathrm{i}(4664{,}68) = 4664{,}68 \times 0{,}225\text{-}636{,}13 \cong 413{,}42$$

$$\mathrm{i}(4664{,}69) = 4664{,}69 \times 0{,}275\text{-}869{,}36 \cong 413{,}42$$

Desse modo, tem-se que o modelo se aproxima bastante dos valores previstos das taxas de imposto de renda. Logo, os alunos terão encontrado um bom modelo que descreve a situação proposta.

- **Solução para o problema**

Portanto, existe sim um modelo matemático que possa descrever o valor do imposto de renda para qualquer salário informado. A função $i: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, dada por

$$i = \begin{cases} 0, \text{se } 0 \leq s \leq 1903{,}98 \\ 0{,}075s - 142{,}80, \text{se } 1903{,}98 < s \leq 2826{,}65 \\ 0{,}15s - 354{,}80, \text{se } 2826{,}65 < s \leq 3751{,}05 \\ 0{,}225s - 636{,}13, \text{se } 3751{,}05 < s \leq 4664{,}68 \\ 0{,}275s - 869{,}36, \text{se } s > 4664{,}68 \end{cases}$$

pode ter sua imagem associada as taxas de imposto de renda, dado qualquer valor salarial.

Apêndice G: Atividade 2 – “Quanto pago pela água que consumo?”

Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Câmpus Londrina
Mestrado Profissional em Ensino de Matemática
Atividade desenvolvida em: Colégio Estadual Vicente Rijo - Ensino Fundamental, Médio e Profissional
Professor Victor Hugo dos Santos Gois

Nomes dos integrantes da equipe: ______________________________

____

Quanto pago pela água que consumo?

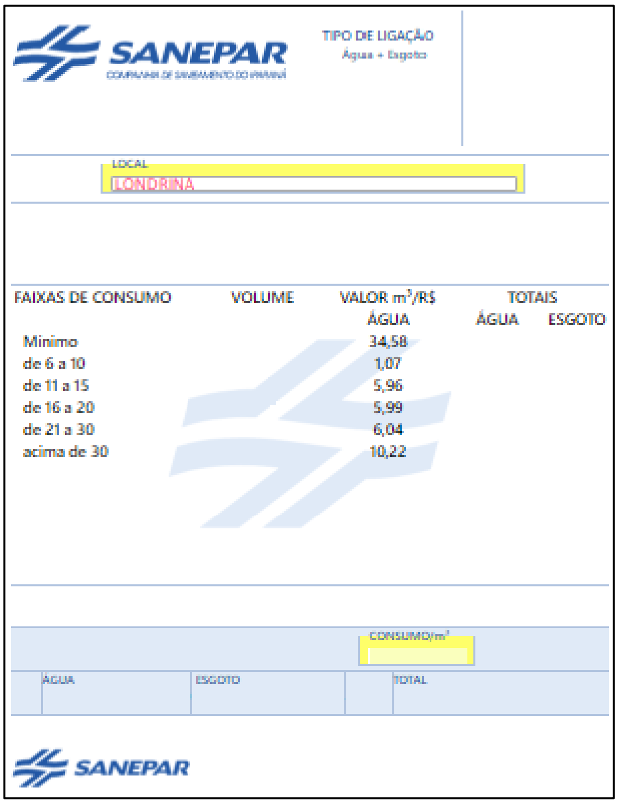
Em Londrina, a empresa responsável pelo abastecimento e tratamento de água e de esgoto é a Sanepar.

Segundo o site SANEPAR (2018),

> A Sanepar fornece água tratada a 100% da população urbana dos municípios atendidos. Coleta mais de 70% e trata 100% do esgoto coletado, a média nacional de coleta é de 51,9% e de tratamento é de 74,9% conforme Sistema Nacional de Informações sobre Saneamento - SNIS 2016 (SANEPAR, 2018).

Na Figura 1 estão apresentadas as tarifas, por consumo de m³ de água, para o cálculo de custo residencial mensal.

Figura 1 – Tarifas apresentadas em um modelo de fatura



SANEPAR
COMPANHIA DE SANEAMENTO DO PARANÁ

TIPO DE LIGAÇÃO
Água + Esgoto

LOCAL
LONDRINA

FAIXAS DE CONSUMO	VOLUME	VALOR m³/R$ ÁGUA	TOTAIS ÁGUA	TOTAIS ESGOTO
Mínimo		34,58		
de 6 a 10		1,07		
de 11 a 15		5,96		
de 16 a 20		5,99		
de 21 a 30		6,04		
acima de 30		10,22		

CONSUMO/m³

ÁGUA	ESGOTO	TOTAL

SANEPAR

Fonte: Sanepar. Disponível em: <http://site.sanepar.com.br/>. Acesso em: 01 jul. 2018.

Sabendo que no cálculo da conta de água são cobrados o consumo de água e uma taxa referente ao esgoto, que corresponde a 80% do valor consumido de água, se conhecermos o consumo em m³ de água, qual o total pago na conta de água?

Apêndice H: Planejamento da atividade “Quanto pago pela água que consumo?”

Em seguida, descrevemos um possível encaminhamento para a atividade e possíveis dúvidas que estudantes pudessem manifestar, a partir das cinco fases propostas por Almeida, Silva e Vertuan (2012).

- **Inteiração**

Para a inteiração da situação-problema será indicado aos alunos a realização de uma primeira leitura individual, na sequência uma leitura coletiva e, em seguida, o professor irá questionar os alunos para saber o que entenderam do problema. Em caso de dúvidas a respeito do significado de alguma palavra, esta pode ser sanada consultando um dicionário para melhor entendimento.

Possível dúvida dos alunos: palavras que possam gerar dúvidas quanto aos seus significados.

Possível solução segundo o dicionário Michaelis online:

- Saneamento – Aplicação de medidas para melhorar as condições higiênicas de um local ou de uma região, tornando-os livres de doenças e próprios para serem habitados.

Possíveis dúvida dos alunos: objetos matemáticos que não se recordam.

Possíveis soluções:

Sanar as dúvidas intervindo nos grupos ou com toda a turma, quando julgar necessário.

- Porcentagem – Um número seguido do símbolo % (lemos: por cento) representa parte de um inteiro composto de 100 partes iguais. Por exemplo: para calcular 15% de uma quantidade pode-se utilizar a fração decimal 15/100 ou o número decimal 0,15.
- Metros cúbicos – Unidade de medida de capacidade cuja notação é escrita como m^3 (lemos: metros cúbicos).

Quanto à dinâmica de sala de aula, será pedido para que os alunos se organizem em grupos de quatro integrantes, o professor acompanhará as resoluções passando pelas carteiras, instigando, questionando e tirando dúvidas dos alunos. Assim, poderão refletir por quais caminhos estão optando na resolução da situação-problema, além de deduzirem um modelo matemático para resolverem o problema, o que é o objetivo da atividade.

Em relação ao enunciado, espera-se que os alunos sejam fomentados a buscar uma solução para o problema proposto. Nesse sentido, o docente instigará sua turma a analisar o texto e verificar que informações são relevantes, tais como: de que maneira é feito o cálculo do valor a pagar pela água; de que maneira é feito o cálculo do valor a pagar pelo esgoto; observarem no modelo de fatura, as faixas e as taxas de consumo; que pergunta eles devem responder. Concluindo assim, a primeira etapa do processo de modelagem conhecida como inteiração.

- **Matematização**

Depois de inteirados, os alunos deverão formular suas hipóteses para poderem então, apresentar um modelo. As hipóteses a seguir são para que os discentes estabeleçam uma resolução a partir de funções definidas por mais de uma sentença, uma das possibilidades de se resolver essa atividade.

Hipóteses:

- o cálculo do valor a pagar pelo consumo de água e esgoto é semelhante para qualquer faixa de consumo (com exceção da taxa mínima), o que diferencia é a taxa em cada uma das faixas de consumo;
- o modelo matemático pode ser descrito por uma função que é definida por mais de uma sentença (nesse caso, cada sentença relaciona-se a uma faixa salarial);
- os valores de consumos e os valores a pagar na conta de água são maiores ou iguais a zero reais;
- é preciso identificar quanto metros cúbicos são calculados em cada faixa de consumo (por exemplo: para uma residência que consumiu 17 m³, os cinco primeiros, serão referentes a taxa mínima, outros cinco metros cúbicos serão calculados com a taxa de 6 a 10 metros cúbicos, mais cinco metros cúbicos serão calculados com a taxa de 11 a 15 metros cúbicos e dois metros cúbicos calculados na faixa de 16 a 20 metros cúbicos);
- o modelo encontrado descreverá como obter o valor a pagar na conta de água a partir de qualquer consumo em metros cúbicos informado, mas caso haja alteração nestas taxas será necessário buscar um outro modelo.

Os alunos devem perceber que para cada faixa de consumo (cada linha no modelo de fatura) a sentença que pode ser associada será linear e de primeiro grau, o que se diferenciará entre uma sentença e outra será o valor da taxa de água para aquela faixa de consumo.

Possível dúvida do professor: os estudantes podem não associar estas hipóteses a funções definidas por mais de uma sentença.

Possível solução: para esta dúvida há, pelo menos, duas possíveis soluções.

A primeira seria deixar que os alunos tentem estabelecer um modelo matemático sem associá-lo a funções desse tipo, tais como funções afins para cada faixa salarial e construção de tabela com indicações escritas de como calcular a conta de água para diferentes faixas de consumo (apresentaremos alguns modelos na etapa de resolução).

A segunda seria por meio de questionamentos e/ou direcionamentos, proporcionar aos alunos refletirem e considerarem funções definidas por mais de uma sentença como uma ferramenta para a resolução do problema.

Possível dúvida dos alunos: que informações têm relevância na minha hipótese?

Possível solução: por meio de questionamentos e indicações, o professor levará seus alunos a refletirem que a situação-problema se refere a um modelo que relaciona quantidade de consumo de água, dada em metros cúbicos, e valor a pagar pela conta de água. Os dados apresentados na folha entregue aos alunos são informações importantes a serem consideradas e, além disso, levará eles a pensarem que dependendo do salário o IR deve ser computado de maneira diferente.

As variáveis utilizadas nesta situação serão:

- Variável dependente: “p” – valor a pagar pela conta, dado em reais;
- Variável independente: “c” – quantidade de consumo de água, dada em metros cúbicos.

Possível dúvida dos alunos: lembrar parcialmente/ ou não saber qual a definição de função definida por mais de uma sentença.

Possível solução: o professor pode ir ao quadro apresentar a turma qual a definição desse tipo de função.

Função definida por mais de uma sentença

Uma função é definida por mais de uma sentença quando cada uma das sentenças está associada à um subdomínio D1, D2, D3... Dn e a união destes n-subconjuntos forma o domínio D da função original.

Depois o professor pode apresentar alguns exemplos de funções definidas por mais de uma sentença. Se o intuito da atividade é aplicar esse objeto matemático o professor pode retomar situações já vistas, como a situação do imposto de renda, por exemplo.

- **Resolução**

A partir de tudo o que foi estabelecido anteriormente, ao modelar matematicamente por meio de uma função, os alunos devem perceber então, que a função tem como imagem valores nulos ou positivos, pois trata-se de quantidade de consumo e valor a pagar da conta de água, e que cada faixa de consumo pode ser modelada por uma função afim. No entanto, os alunos podem utilizar outros objetos matemáticos para modelar a situação, tais como uma tabela de informações ou um texto, ficando a critério deles decidirem por qual delas desejam criar o modelo.

Caso escrevam o modelo matemático para esta situação a partir de uma tabela, sendo *c* o valor do consumo de água e *p* o valor a pagar pela conta de água, poderão modelar de acordo com a Tabela 2.

Tabela 2 – Modelo matemático para a situação proposta

Faixa de consumo (em metros cúbicos)	Taxa da água (em R$)	Cálculo do valor a pagar pela conta de água (em R$)
Mínimo (até 5 m³)	–	$p = 62{,}24$
De 6 até 10	1,07	$p = 1{,}8 \cdot [1{,}07(c - 5)] + 62{,}24$
De 11 até 15	5,96	$p = 1{,}8 \cdot [5{,}96(c - 10)] + 71{,}87$
De 16 até 20	5,99	$p = 1{,}8 \cdot [5{,}99(c - 15)] + 125{,}51$
De 21 até 30	6,04	$p = 1{,}8 \cdot [6{,}04(c - 20)] + 179{,}42$
Acima de 30	10,22	$p = 1{,}8 \cdot [10{,}22(c - 30)] + 288{,}14$

Fonte: dos autores.

Se optarem por um modelo algébrico que represente a situação poderão obter a função $p\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ dada por

$$p = \begin{cases} 62{,}24, \text{se } 0 \leq c \leq 5 \\ 1{,}8 \cdot [1{,}07(c-5)] + 62{,}24, \text{se } 5 < c \leq 10 \\ 1{,}8 \cdot [5{,}96(c-10)] + 71{,}87, \text{se } 10 < c \leq 15 \\ 1{,}8 \cdot [5{,}99(c-15)] + 125{,}51, \text{se } 15 < c \leq 20 \\ 1{,}8 \cdot [6{,}04(c-20)] + 179{,}42, \text{se } 20 < c \leq 30 \\ 1{,}8 \cdot [10{,}22(c-30)] + 288{,}14, \text{se } c \geq 30 \end{cases}$$

- **Validação**

O professor pode obter a partir do endereço eletrônico <http://atvn.sanepar.com.br/simuladorconta> (acesso em: 30 jul. 2019) alguns valores a pagar pela conta de água fornecido a quantidade de consumo de água e levar esses valores para que os alunos validem aritmeticamente com o modelo que deduziram em sala de aula.

Assim:

$$\text{p}(8) = 1{,}8 \cdot \left[1{,}07\left(8\text{-}5\right)\right] + 62{,}24 \cong 71{,}23$$

$$\text{p}(14) = 1{,}8 \cdot \left[5{,}96\left(14\text{-}10\right)\right] + 71{,}87 \cong 114{,}78$$

$$\text{p}(22) = 1{,}8 \cdot \left[6{,}04\left(\text{c-}20\right)\right] + 179{,}42 \cong 201{,}16$$

Desse modo, tem-se que o modelo se aproxima bastante dos valores previstos dos valores fornecidos pelo endereço eletrônico. Logo, os alunos terão encontrado um bom modelo que descreve a situação.

- **Solução para o problema**

Portanto, existe um modelo matemático que descreve o valor a pagar pela conta de água para qualquer quantidade de consumo. A função $p: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, dada por

$$p = \begin{cases} 62{,}24, \text{se } 0 \leq c \leq 5 \\ 1{,}8 \cdot [1{,}07(c-5)] + 62{,}24, \text{se } 5 < c \leq 10 \\ 1{,}8 \cdot [5{,}96(c-10)] + 71{,}87, \text{se } 10 < c \leq 15 \\ 1{,}8 \cdot [5{,}99(c-15)] + 125{,}51, \text{se } 15 < c \leq 20 \\ 1{,}8 \cdot [6{,}04(c-20)] + 179{,}42, \text{se } 20 < c \leq 30 \\ 1{,}8 \cdot [10{,}22(c-30)] + 288{,}14, \text{se } c \geq 30 \end{cases}$$

pode ter sua imagem associada aos valores a pagar pela conta de água, dado qualquer quantidade, em metros cúbicos, de água consumida.