UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO ACADÊMICO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
PROFMAT

ADILSON FRANCISCO DA SILVA

# RECORRÊNCIAS LINEARES, ISOMETRIA, CRIPTOGRAFIA E OUTRAS APLICAÇÕES ENVOLVENDO MATRIZES 2 POR 2

DISSERTAÇÃO

**CORNÉLIO PROCÓPIO**

**2017**

ADILSON FRANCISCO DA SILVA

# RECORRÊNCIAS LINEARES, ISOMETRIA, CRIPTOGRAFIA E OUTRAS APLICAÇÕES ENVOLVENDO MATRIZES 2 POR 2

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Josimar da Silva Rocha

Co-orientador: Prof. Dr. Thiago Pinguello de Andrade

**CORNÉLIO PROCÓPIO**

**2017**

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

S586 Silva, Adilson Francisco da

Recorrências lineares, isometria, criptografia e outras aplicações envolvendo matrizes 2 por 2 / Adilson Francisco da Silva. – 2017.
96 f. : il. ; 31 cm

Orientador: Josimar da Silva Rocha.
Coorientador: Thiago Pinguello de Andrade
Dissertação (Mestrado) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Cornélio Procópio, 2017.
Bibliografia: p. 96.

1. Matrizes (Matemática). 2. Isometria (Matemática). 3. Criptografia. 4. Matemática – Dissertações. I. Rocha, Josimar da Silva, orient. II. Andrade, Thiago Pinguello de. III. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. IV. Título.

CDD (22. ed.) 510

Biblioteca da UTFPR - Câmpus Cornélio Procópio

Ministério da Educação
**Universidade Tecnológica Federal do Paraná**
Diretoria de Pesquisa e Pós-Graduação-Câmpus Cornélio Procópio
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

**Título da Dissertação Nº. 002**

# "Recorrências Lineares, Isometria, Criptografia e Outras Aplicações Envolvendo Matrizes 2 Por 2"

por

**Adilson Francisco da Silva**

Esta dissertação foi apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre, pelo Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR - Câmpus Cornélio Procópio, às 15h30min do dia 07 de julho de 2017. O trabalho foi aprovado pela Banca Examinadora, composta pelos doutores:

Prof. Josimar da Silva Rocha, Dr.
(Presidente - UTFPR/CP)

Prof. André Luís Machado Martinez, Dr.
(UTFPR/CP)

Profª. Irene Naomi Nakaoka, Dra.
(UEM/Maringá)

Visto da coordenação:

Profª. Michele Cristina Valentino, Dra.
(Coordenadora do PROFMAT-CP)

"A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do PROFMAT/UTFPR-CP"

# AGRADECIMENTOS

Apresento aqui meus sinceros agradecimentos aos meus pais Lourdes e Joaquim.

Meu muito obrigado à minha esposa Tatiana e minha filha Ana Luísa pelo amor, dedicação e compreensão.

Agradeço aos professores Josimar e Thiago, pelo excepcional trabalho realizado, pelo tempo e paciência a mim dedicados, sem os quais este trabalho não seria possível.

Para concluir, agradeço a todos aqueles que contribuíram direta ou indiretamente para a realização deste trabalho.

**RESUMO**

SILVA, Adilson Francisco da. RECORRÊNCIAS LINEARES, ISOMETRIA, CRIPTOGRAFIA E OUTRAS APLICAÇÕES ENVOLVENDO MATRIZES 2 POR 2. 96 f. Dissertação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Profmat, Universidade Tecnológica Federal do Paraná Departamento Acadêmico de Matemática. Cornélio Procópio, 2017.

O presente trabalho tem como tema principal apresentar aplicações envolvendo matrizes de ordem 2. Para tanto, inicialmente é apresentada a definição de matrizes, as operações e suas propriedades, bem como, o estudo de matrizes transposta, invertíveis e o cálculo do determinante, nos restringindo a matrizes de ordem 2. Posteriormente, definimos isometria no plano como uma transformação geométrica que preserva distância e ângulos. Apresentamos as representações matriciais de rotação, translação e reflexão e mostramos que toda isometria é da forma $f(u) = T(u) + w$, onde $T$ é uma aplicação linear ortogonal. Definimos matrizes semelhantes e suas propriedades e encontramos condições necessárias e suficientes para que uma matriz de ordem 2 seja diagonalizável, bem como a matriz diagonal correspondente e a matriz conjugadora. Calculamos a n-ésima potência de uma matriz de ordem 2 diagonalizável e com isso resolvemos relações de recorrência lineares da forma $x_{n+1} = ax_n + bx_{n-1}$, em particular a sequência de Fibonacci. Estudamos as cônicas representadas pela equação $ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$, onde através de isometrias identificamos como sendo, uma elípse, hipérbole, parábola, ponto, reta, um par de retas paralelas ou concorrentes, e até mesmo o conjunto vazio. Finalizamos com a criptografia utilizando multiplicação de matrizes e o cálculo de matrizes inversas.

**Palavras-chave:** Matrizes, Isometrias, Criptografia, Recorrências Lineares, Identificação de cônicas.

## ABSTRACT


SILVA, Adilson Francisco da. LINEAR RECURRENCES, ISOMETRY, CRYPTOGRAPHY AND OTHER APPLICATIONS INVOLVING 2 BY 2 MATRICES. 96 f. Dissertação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Profmat, Universidade Tecnológica Federal do Paraná Departamento Acadêmico de Matemática. Cornélio Procópio, 2017.

The present study has as its main theme to show the applications involving square matrices of order 2. To achieve the objective it is showed the definition of matrices, the operations and its properties as well as the study of transposed and invertible matrix and determinant calculation being restrict to matrices of order 2. After, we define isometrics in plain as a geometric transformation that preserves distance and angles. We introduce the rotation, translation and reflection matrix presentation and insert that all isometry is $f(u) = T(u) + w$, where $T$ is an orthogonal linear application. We define similar matrices and their properties finding enough and necessary conditions so that a square matrix of order 2 can be diagonalizable, as well as the corresponding diagonal matrix and the conjugate matrix. We've calculated the nth power of a square matrix of order 2 and then we've solved linear relations of recurrence expressed as $x_{n+1} = ax_n + bx_{n-1}$, particularly Fibonacci sequence. We've studied the conics represented by the equation $ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$, where through isometries we identified as being, ellipse, hyperbola, parabola, point, line, a pair of parallel lines or concurrent and even empty set. We've ended the study with a cryptography using matrices multiplication and the calculation of invertible matrices.



**Keywords:** Matrices, Isometry, Cryptography, Linear Recurrences, Conics Identification.

## LISTA DE FIGURAS

**SUMÁRIO**

# 1 INTRODUÇÃO

Este trabalho tem como objetivo estudar a teoria de matrizes bem como suas aplicações para a resolução de diversos problemas, como por exemplo a resolução de sistemas de equações lineares, identificação de cônicas, resolução de relações de recorrência e algumas noções básicas de criptografia.

Muitos autores, tais como Boldrini (1980), Ávila (1995), Lima (2006) e COELHO e LOURENÇO (2005) utilizam resultados vetoriais para tratarem do tema de diagonalização de matrizes o que faz com que muitas das aplicações envolvendo este tema seja possível apenas para aqueles com um certo conhecimento de Álgebra Linear. Pretendemos, pelo menos no caso de matrizes 2 por 2, desenvolver e aplicar a teoria associada a diagonalização sem passar pela teoria de espaços vetoriais, permitindo assim, um entendimento aos leitores que não tenham tido contato com o ensino superior, como alunos do ensino básico por exemplo.

Parte do que vemos neste trabalho envolve o estudo de transformações lineares que por sua vez demanda a noção de espaços vetoriais para ser definida. Contudo, utilizaremos a bem conhecida representação das transformações lineares de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ com as matrizes 2 por 2, de forma que uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y) = (ax+by, cx+dy)$ é representada matricialmente pela relação:

$$[T]\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

onde $[T]$ denota a matriz associada à transformação linear $T$.

Como caso particular de transformações lineares no plano (de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ ) temos as transformações ortogonais que são aquelas cujas matrizes associadas satisfazem a relação

$$[T][T]^t = Id,$$

onde $[T]^t$ representa a matriz transposta da matriz $[T]$ e $Id$ a matriz identidade. Associada às transformações ortogonais, temos as isometrias. Formalmente, dizemos que uma aplicação $T$ :

$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é uma isometria no plano se preserva distâncias, ou seja, se para quaisquer $v, w \in \mathbb{R}^2$,

$$d(v,w) = d(T(v), T(w)),$$

onde $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ é a função distância utilizada. A importância do estudo de isometrias no plano está no fato de que isometrias mantêm o formato de figuras no plano de forma que esta propriedade é bastante explorada nas artes, arquitetura, no desenvolvimento de protótipos e na computação gráfica para o desenvolvimento de jogos e simuladores, entre outras aplicações em diversas áreas da engenharia.

Veremos que as isometrias no plano podem ser caracterizadas por transformações obtidas através da composição de uma translação com uma transformação ortogonal. Como aplicação caracterizaremos geometricamente o conjunto de pontos $(x,y)$ que são soluções de equações quadráticas da forma

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0, \text{ onde } a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R}.$$

Outra aplicação de matrizes 2 por 2 é a identificação das posições relativas das retas $a_{11}x + a_{12}y = b_1$ e $a_{21}x + a_{22}y = b_2$ que é feita através dos estudo de soluções de sistemas de equações lineares da forma

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2. \end{cases}$$

Por fim, temos também aplicações envolvendo criptografia básica, onde é possível enviar informação de um ponto ao outro sem que o sigilo seja perdido no caminho, mesmo em caso de interceptação da mesma. Embora existam técnicas avançadas de Criptografia, tais como o RSA, veja Paar (2009) para mais detalhes. Neste trabalho, abordaremos uma técnica de Criptografia mais acessível que utiliza apenas multiplicação de matrizes e o cálculo de matrizes inversas para a obtenção da mensagem original.

# 2 CONCEITOS PRELIMINARES

Este Capítulo tem como objetivo apresentar o conceito de matrizes, abordando as definições de matrizes, suas operações e propriedades bem como matriz transposta, invertível, determinante e suas respectivas propriedades. Neste trabalho restringiremos nossa análise para matrizes de ordens $1 \times 2$, $2 \times 1$ e $2 \times 2$.

## 2.1 DEFINIÇÃO DE MATRIZES

Neste trabalho definiremos matrizes sobre o conjunto dos números reais. Contudo, é importante mencionar que matrizes também podem ser definidas sobre estruturas mais gerais, como por exemplo, o conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos, o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais e até mesmo sobre um anel $R$ (Veja definição de anel em Hefez (2014)).

**Definição 2.1.** Uma matriz $A = (a_{ij})$ $n$ por $m$ (ou $n \times m$, ou de ordem $n \times m$) é uma tabela com $n$ linhas e $m$ colunas onde cada uma das $nm$ entradas é um elemento de $\mathbb{R}$. Neste caso, representamos uma matriz $A$ por

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix},$$

onde $a_{ij} \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq m$.

**Definição 2.2.** Seja $A$ uma matriz $n \times m$. Dizemos que $A$ é uma **matriz coluna** se $m = 1$ e dizemos que $A$ é uma **matriz linha** se $n = 1$. No caso em que $n = m$, dizemos que $A$ é uma **matriz quadrada** de ordem $n$. O conjunto das matrizes quadradas de ordem $n$ é denotado pelo símbolo $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Veremos agora alguns exemplos que ilustram os diversos tipos de matrizes que acabamos de definir.

**Exemplo 2.3.** Sejam $A$ e $B$ as matrizes dadas por

$$A = \begin{bmatrix} 10 \\ -21 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Então $A$ é uma matriz linha e $B$ uma matriz coluna.

**Exemplo 2.4.** Seja $A$ a matriz dada por

$$\begin{bmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix}.$$

Então $A$ é uma matriz quadrada.

Em particular podemos considerar um número real $a$, como uma matriz quadrada $A$ de ordem 1.

$$A = \begin{bmatrix} a \end{bmatrix}.$$

Entre as matrizes quadradas de ordem $2 \times 2$, temos alguns subtipos de matrizes, como veremos a seguir.

**Definição 2.5.** Uma matriz $D \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ é uma **matriz diagonal**, se $D$ pode ser escrita sob a forma

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix},$$

onde $a_{11}, a_{22} \in \mathbb{R}$.

**Definição 2.6.** Uma matriz $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ é uma **matriz escalar**, se $A$ é uma matriz diagonal e os elementos da diagonal são iguais, ou seja,

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

para algum $\lambda \in \mathbb{R}$.

**Definição 2.7.** A **matriz identidade** de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ é a matriz escalar, cujo elemento da diagonal é a identidade do conjunto dos reais, ou seja,

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Definição 2.8.** A **matriz nula** de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ é a matriz escalar cujo elemento da diagonal é nulo, ou a matriz cujas entradas são todas nulas, isto é,

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A partir de agora utilizaremos os símbolos $I$ e $O$ para representar, respectivamente, a matriz identidade e a matriz nula de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

**Definição 2.9.** Dizemos que duas matrizes $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ de ordem $m \times n$ são iguais se $a_{ij} = b_{ij}$, para todo $i = 1, \cdots, m$ e $j = 1, \cdots, n$.

Em particular, se tivermos $m = n = 2$, então $A = B$ se $a_{11} = b_{11}, a_{12} = b_{12}, a_{21} = b_{21}$ e $a_{22} = b_{22}$.

## 2.2 OPERAÇÕES ENVOLVENDO MATRIZES

Assim como nos números reais temos a operação de adição, subtração e multiplicação, nas matrizes também é possível, sob certas circunstâncias, definir tais operações. Já a operação de divisão que há nos reais, não é usual ser levada para as matrizes. Em contrapartida, no contexto de matrizes, podemos multiplicar um número real por uma matriz, e uma matriz de ordem $m \times n$ por uma matriz de ordem $n \times d$.

Outro ponto interessante é que as propriedades de soma de números reais podem ser estendidas a matrizes, como a associatividade, a existência de elemento neutro, a existência de elemento simétrico e a comutatividade. Quando olhamos para o produto, a questão é um pouco mais delicada. Não vale por exemplo a comutatividade, e nem sempre uma matriz admite o simétrico em relação a operação de multiplicação.

Começaremos vendo que, dado um número real $\lambda$ qualquer e uma matriz $A$, podemos definir uma operação de multiplicação por escalar de $\lambda$ por $A$ como sendo:

**Definição 2.10.** Sejam $A = (a_{ij})$ uma matriz $n \times m$ e seja $\lambda \in \mathbb{R}$. Definimos o produto de $\lambda$ por $A$, denotado por $\lambda A$, como sendo $C = (c_{ij})$, a matriz $n \times m$, onde

$$c_{ij} = \lambda a_{ij}.$$

Neste caso, $C = \lambda A$.

Se duas matrizes possuem a mesma ordem, podemos também definir uma operação de soma entre tais matrizes.

**Definição 2.11.** Sejam $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ matrizes $n \times m$. Definimos a soma da matriz $A$ pela matriz $B$, denotada por $A + B$, como sendo $C = (c_{ij})$, a matriz $n \times m$, onde

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Neste caso, dizemos que $A + B = C$.

Quando o número de colunas de uma matriz $A$ é igual ao número de linhas de uma matriz $B$, podemos definir o produto $A \cdot B$.

**Definição 2.12.** Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz $n \times m$ e $B = (b_{ij})$ uma matriz $m \times d$. Podemos definir o produto da matriz $A$ pela matriz $B$, denotada por $A \cdot B$, como sendo $C = (c_{ij})$, a matriz $n \times d$, onde

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}.$$

Neste caso, dizemos que $A \cdot B = C$.

**Exemplo 2.13.** Sejam $A$ e $B$ matrizes em $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ dadas por

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix},$$

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

e para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\lambda A = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{bmatrix}.$$

Veremos agora as propriedades que possuem as operações de multiplicação por escalar, adição e multiplicação em $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Como nosso foco são as matrizes de ordem $2 \times 2$, restringiremos as demonstrações a este caso. Contudo, o mesmo argumento vale para matrizes de ordem superior.

**Proposição 2.14.** Sejam $A$ e $B$ matrizes de ordem $2 \times 2$ e $\lambda, \gamma \in \mathbb{R}$, escalares. Temos as seguintes propriedades da multiplicação de matrizes por escalares:

(i) Distributiva: $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$;

(ii) Distributiva: $(\lambda+\gamma)A = \lambda A + \gamma A$;

(iii) Associativa: $(\lambda\gamma)A = \lambda(\gamma A)$;

(iv) Existência do elemento neutro $1A = A$, onde $\lambda = 1$ é o elemento neutro.

**Demonstração.** De fato, denotando

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

e usando a definição das operações de adição e de multiplicação por um escalar em $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ e a distributividade da multiplicação em relação à adição em $\mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned}
\lambda(A+B) &= \lambda\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}\right) = \lambda \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \lambda(a_{11}+b_{11}) & \lambda(a_{12}+b_{12}) \\ \lambda(a_{21}+b_{21}) & \lambda(a_{22}+b_{22}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11}+\lambda b_{11} & \lambda a_{12}+\lambda b_{12} \\ \lambda a_{21}+\lambda b_{21} & \lambda a_{22}+\lambda b_{22} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda b_{11} & \lambda b_{12} \\ \lambda b_{21} & \lambda b_{22} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \\
&= \lambda A + \lambda B,
\end{aligned}$$

por outro lado

$$\begin{aligned}
(\lambda+\gamma)A &= (\lambda+\gamma) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\lambda+\gamma)a_{11} & (\lambda+\gamma)a_{12} \\ (\lambda+\gamma)a_{21} & (\lambda+\gamma)a_{22} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \lambda a_{11}+\gamma a_{11} & \lambda a_{21}+\gamma a_{12} \\ \lambda a_{21}+\gamma a_{21} & \lambda a_{22}+\gamma a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma a_{11} & \gamma a_{12} \\ \gamma a_{21} & \gamma a_{22} \end{bmatrix} \\
&= \lambda \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \lambda A + \gamma A,
\end{aligned}$$

utilizando a associatividade da multiplicação em $\mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned}
(\lambda\gamma)A &= (\lambda\gamma) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\lambda\gamma)a_{11} & (\lambda\gamma)a_{12} \\ (\lambda\gamma)a_{21} & (\lambda\gamma)a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda(\gamma a_{11}) & \lambda(\gamma a_{12}) \\ \lambda(\gamma a_{21}) & \lambda(\gamma a_{22}) \end{bmatrix} \\
&= \lambda \begin{bmatrix} \gamma a_{11} & \gamma a_{12} \\ \gamma a_{21} & \gamma a_{22} \end{bmatrix} = \lambda(\gamma A)
\end{aligned}$$

e utilizando o fato do número 1 ser o elemento neutro da multiplicação em $\mathbb{R}$, seque que

$$1A \;=\; 1\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1a_{11} & 1a_{12} \\ 1a_{21} & 1a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = A,$$

o que demonstra a proposição. □

**Proposição 2.15.** Sejam $A$, $B$ e $C$ matrizes em $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, e $O$ a matriz $2\times 2$ nula. Temos as seguintes propriedades da adição de matrizes:

(i) Associativa: $(A+B)+C = A+(B+C)$;

(ii) Existência do elemento neutro: $O+A = A+O = A$, a matriz nula $O$ é o elemento neutro;

(iii) Existência do elemento simétrico: $(-A)+A = A+(-A) = O$, a matriz $-A = (-1)A$ é chamado de simétrico de $A$;

(iv) Comutativa: $A+B = B+A$;

**Demonstração.** Denotemos $A$, $B$ e $C$ por

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}.$$

Utilizando a definição de soma de matrizes e a associatividade em $\mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned}
(A+B)+C &= \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (a_{11}+b_{11})+c_{11} & (a_{12}+b_{12})+c_{12} \\ (a_{21}+b_{21})+c_{21} & (a_{22}+b_{22})+c_{22} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_{11}+(b_{11}+c_{11}) & a_{12}+(b_{12}+c_{12}) \\ a_{21}+(b_{21}+c_{21}) & a_{22}+(b_{22}+c_{22}) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}\right) \\
&= A+(B+C),
\end{aligned}$$

o que demonstra o item $(i)$.

Usando a definição de soma de matrizes e o elemento neutro de $\mathbb{R}$, temos

$$O+A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+a_{11} & 0+a_{12} \\ 0+a_{21} & 0+a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = A. \quad (1)$$

Por outro lado,

$$A+O = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+0 & a_{12}+0 \\ a_{21}+0 & a_{22}+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = A. \quad (2)$$

Por (1) e (2) temos demonstrado o item $(ii)$.

Usando a definição de soma de matrizes e a existência do elemento neutro em $\mathbb{R}$, observe que

$$\begin{aligned} (-A)+A &= -1\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -a_{11}+a_{11} & -a_{12}+a_{12} \\ -a_{21}+a_{21} & -a_{22}+a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} A+(-A) &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \left(-1\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11}-a_{11} & a_{12}-a_{12} \\ a_{21}-a_{21} & a_{22}-a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O. \end{aligned}$$

Logo $(-A)+A = A+(-A) = O$, o que demonstra o item $(iii)$.

Utilizando a definição de soma de matrizes e a comutatividade em $\mathbb{R}$, temos que

$$\begin{aligned} A+B &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{12} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11}+a_{11} & b_{12}+a_{12} \\ b_{21}+a_{21} & b_{22}+a_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = B+A, \end{aligned}$$

o que demonstra a proposição. □

**Proposição 2.16.** Sejam $\lambda \in \mathbb{R}$ um escalar e as matrizes $A$, $B$ e $C$ em $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ e $I$ a matriz identidade de ordem $2 \times 2$. Temos as seguintes propriedades da multiplicação de matrizes:

(i) Associativa: $A(BC) = (AB)C$;

(ii) Distributiva: $A(B+C) = AB+AC$;

(iii) Distributiva: $(B+C)A = BA+CA$;

(iv) Associativa: $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$;

(v) Existência do elemento neutro $AI = IA = A$, a matriz identidade $I$ é o elemento neutro.

**Demonstração.** Denotamos as matrizes $A$, $B$ e $C$ por

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}.$$

Utilizando a definição de produto de matrizes e a associatividade do produto dos números reais, temos

$$\begin{aligned}
A(BC) &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \right) \\
&= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11}c_{11}+b_{12}c_{21} & b_{11}c_{12}+b_{12}c_{22} \\ b_{21}c_{11}+b_{22}c_{21} & b_{21}c_{12}+b_{22}c_{22} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_{11}(b_{11}c_{11}+b_{12}c_{21})+a_{12}(b_{21}c_{11}+b_{22}c_{21}) & a_{11}(b_{11}c_{12}+b_{12}c_{22})+a_{12}(b_{21}c_{12}+b_{22}c_{22}) \\ a_{21}(b_{11}c_{11}+b_{12}c_{21})+a_{22}(b_{21}c_{11}+b_{22}c_{21}) & a_{21}(b_{11}c_{12}+b_{12}c_{22})+a_{22}(b_{21}c_{12}+b_{22}c_{22}) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11}c_{11}+a_{11}b_{12}c_{21}+a_{12}b_{21}c_{11}+a_{12}b_{22}c_{21} & a_{11}b_{11}c_{12}+a_{11}b_{12}c_{22}+a_{12}b_{21}c_{12}+a_{12}b_{22}c_{22} \\ a_{21}b_{11}c_{11}+a_{21}b_{12}c_{21}+a_{22}b_{21}c_{11}+a_{22}b_{22}c_{21} & a_{21}b_{11}c_{12}+a_{21}b_{12}c_{22}+a_{22}b_{21}c_{12}+a_{22}b_{22}c_{22} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} c_{11}(a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21})+c_{21}(a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}) & c_{12}(a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21})+c_{22}(a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}) \\ c_{11}(a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21})+c_{21}(a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}) & c_{12}(a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21})+c_{22}(a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \\
&= \left( \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = (AB)C,
\end{aligned}$$

o que demonstra o item $(i)$.

Usando as definições de produto e soma de matrizes, e também a distributividade da multiplicação em relação à adição em $\mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned}
A(B+C) &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11}+c_{11} & b_{12}+c_{12} \\ b_{21}+c_{21} & b_{22}+c_{22} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_{11}(b_{11}+c_{11})+a_{12}(b_{21}+c_{21}) & a_{11}(b_{12}+c_{12})+a_{12}(b_{22}+c_{22}) \\ a_{21}(b_{11}+c_{11})+a_{22}(b_{21}+c_{21}) & a_{21}(b_{12}+c_{12})+a_{22}(b_{22}+c_{22}) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{11}c_{11}+a_{12}b_{21}+a_{12}c_{21} & a_{11}b_{12}+a_{11}c_{12}+a_{12}b_{22}+a_{12}c_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{21}c_{11}+a_{22}b_{21}+a_{22}c_{21} & a_{21}b_{12}+a_{21}c_{12}+a_{22}b_{22}+a_{22}c_{22} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{11}c_{11}+a_{12}c_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{11}c_{12}+a_{12}c_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{21}c_{11}+a_{22}c_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{21}c_{12}+a_{22}c_{22} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11}c_{11}+a_{12}c_{21} & a_{11}c_{12}+a_{12}c_{22} \\ a_{21}c_{11}+a_{22}c_{21} & a_{21}c_{12}+a_{22}c_{22} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = AB + AC,
\end{aligned}
$$

o que demonstra o item $(ii)$.

Usando as definições de produto e soma de matrizes, e a distributividade da multiplicação em relação à adição em $\mathbb{R}$, temos

$$
\begin{aligned}
(B+C)A &= \left( \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11}+c_{11} & b_{12}+c_{12} \\ b_{21}+c_{21} & b_{22}+c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_{11}(b_{11}+c_{11})+a_{21}(b_{12}+c_{12}) & a_{12}(b_{11}+c_{11})+a_{22}(b_{12}+c_{12}) \\ a_{11}(b_{21}+c_{21})+a_{21}(b_{22}+c_{22}) & a_{12}(b_{21}+c_{21})+a_{22}(b_{22}+c_{22}) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{11}c_{11}+a_{21}b_{12}+a_{21}c_{12} & a_{12}b_{11}+a_{12}c_{11}+a_{22}b_{12}+a_{22}c_{12} \\ a_{11}b_{21}+a_{11}c_{21}+a_{21}b_{22}+a_{21}c_{22} & a_{12}b_{21}+a_{12}c_{21}+a_{22}b_{22}+a_{22}c_{22} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{21}b_{12} & a_{12}b_{11}+a_{22}b_{12} \\ a_{11}b_{21}+a_{21}b_{22} & a_{12}b_{21}+a_{22}b_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11}c_{11}+a_{21}c_{12} & a_{12}c_{11}+a_{22}c_{12} \\ a_{11}c_{21}+a_{21}c_{22} & a_{12}c_{21}+a_{22}c_{22} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = BA + CA,
\end{aligned}
$$

o que demonstra o item $(iii)$.

Seja $\lambda \in \mathbb{R}$. Utilizando as definições de multiplicação de matrizes e multiplicação de matrizes por um escalar e considerando a associatividade em $\mathbb{R}$, temos

$$
\begin{aligned}
\lambda(AB) &= \lambda \left( \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \right) = \lambda \left( \begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{bmatrix} \right) \\
&= \begin{bmatrix} \lambda(a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}) & \lambda(a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}) \\ \lambda(a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}) & \lambda(a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \lambda(a_{11}b_{11})+\lambda(a_{12}b_{21}) & \lambda(a_{11}b_{12})+\lambda(a_{12}b_{22}) \\ \lambda(a_{21}b_{11})+\lambda(a_{22}b_{21}) & \lambda(a_{21}b_{12})+\lambda(a_{22}b_{22}) \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} (\lambda a_{11})b_{11}+(\lambda a_{12})b_{21} & (\lambda a_{11})b_{12}+(\lambda a_{12})b_{22} \\ (\lambda a_{21})b_{11}+(\lambda a_{22})b_{21} & (\lambda a_{21})b_{12}+(\lambda a_{22})b_{22} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = (\lambda A)B. \qquad (3)
\end{aligned}
$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
(\lambda A)B &= \left(\lambda \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (\lambda a_{11})b_{11}+(\lambda a_{12})b_{21} & (\lambda a_{11})b_{12}+(\lambda a_{12})b_{22} \\ (\lambda a_{21})b_{11}+(\lambda a_{22})b_{21} & (\lambda a_{21})b_{12}+(\lambda a_{22})b_{22} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_{11}(\lambda b_{11})+a_{12}(\lambda b_{21}) & a_{11}(\lambda b_{12})+a_{12}(\lambda b_{22}) \\ a_{21}(\lambda b_{11})+a_{22}(\lambda b_{21}) & a_{21}(\lambda b_{12})+a_{22}(\lambda b_{22}) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda b_{11} & \lambda b_{12} \\ \lambda b_{21} & \lambda b_{22} \end{bmatrix} = A(\lambda B). \qquad (4)
\end{aligned}
$$

Por (3) e (4), demonstramos o item $(iv)$.

Seja $I$ a matriz identidade. Usando a definição de multiplicação de matrizes,

$$
AI = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}.1+a_{12}.0 & a_{11}.0+a_{12}.1 \\ a_{21}.1+a_{22}.0 & a_{21}.0+a_{22}.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = A. \qquad (5)
$$

Por outro lado,

$$
IA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.a_{11}+0.a_{21} & 1.a_{12}.0+0.a_{22} \\ 0.a_{11}+1.a_{21} & 0.a_{12}.0+1.a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = A. \qquad (6)
$$

Por (5) e (6) temos que a matriz Identidade é o elemento neutro, o que conclui a demonstração da proposição. □

**Definição 2.17.** Sejam $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ e $n \in \mathbb{N}$, definimos a $n$-ésima potência da matriz $A$ como

$$
A^n = \underbrace{AAA\cdots A}_{\text{n fatores}}.
$$

## 2.3 MATRIZ TRANSPOSTA EM $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$

Nesta seção, apresentaremos o conceito de matriz transposta. Este conceito será utilizado posteriormente na definição de matrizes ortogonais. Informalmente, obtemos a matriz transposta com a troca de linhas por colunas de uma matriz dada.

**Definição 2.18.** A **transposta** de uma matriz $A = (a_{ij})$ de ordem $m \times n$ é a matriz $A^T = (a_{ji})$ de ordem $n \times m$. Isto é,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \Leftrightarrow A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}.$$

Como exemplo, temos que a matriz transposta da matriz $A$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ é a matriz } A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Note que as colunas de $A^T$ são iguais às linhas de $A$.

A proposição a seguir apresenta as propriedades de matriz transposta em $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, embora estas propriedades sejam válidas para matrizes em geral.

**Proposição 2.19.** Sejam matrizes $A$ e $B$ em $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ um escalar. Assim, temos as seguintes propriedades:

(i) $(A^T)^T = A$;

(ii) $(A+B)^T = A^T + B^T$;

(iii) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$;

(iv) $(AB)^T = B^T A^T$.

**Demonstração.**

$(i)$ Sejam

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}.$$

Usando a definição de matriz transposta, temos

$$(A^T)^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = A.$$

$(ii)$ Usando as definições de soma de matrizes e de matriz transposta, temos

$$(A+B)^T = \left( \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \right)^T = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix}^T$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{21}+b_{21} \\ a_{12}+b_{12} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}^T = A^T + B^T.
\end{aligned}
$$

$(iii)$ Seja $\lambda \in \mathbb{R}$. Utilizando as definições de multiplicação de matriz por escalar e de matriz transposta, temos

$$
\begin{aligned}
(\lambda A)^T &= \left(\lambda \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\right)^T = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{21} \\ \lambda a_{12} & \lambda a_{22} \end{bmatrix} \\
&= \lambda \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^T = \lambda A^T.
\end{aligned}
$$

$(iv)$ Utilizando a definição de multiplicação de matrizes e a definição de matriz transposta, temos

$$
\begin{aligned}
(AB)^T &= \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}\right)^T = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{bmatrix}^T \\
&= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} \\ a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11}a_{11}+b_{21}a_{12} & b_{11}a_{21}+b_{21}a_{22} \\ b_{12}a_{11}+b_{22}a_{12} & b_{12}a_{21}+b_{22}a_{22} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} = B^T A^T.
\end{aligned}
$$

□

## 2.4 DETERMINANTES

Nesta seção apresentaremos o conceito de determinante de uma matriz em $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. O determinante é uma aplicação que associa uma matriz quadrada a um escalar real, através de operações envolvendo as entradas da matriz. Utilizando o determinante, conseguimos extrair informações importantes de uma matriz. Por exemplo, veremos mais a frente, que se o determinante de uma matriz $A$ não é nulo, então existe uma matriz $B$, tal que $AB = I$. Tal matriz $B$ será chamada de matriz inversa de $A$. Além disso, veremos que o determinante permite ainda que obtenhamos uma expressão para determinar a matriz inversa, caso ela exista. Assim, com base nas entradas de uma matriz em $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, definimos o determinante.

**Definição 2.20.** Seja $A$ uma matriz de ordem $2 \times 2$, digamos

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Definimos o **determinante da matriz** $A$ como sendo

$$det(A) = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

**Exemplo 2.21.** Sejam $I$ e $O$ a matriz identidade e matriz nula em $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, respectivamente. Então

$$\det(I) = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1$$

e

$$\det(O) = \det\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 0 \cdot 0 - 0 \cdot 0 = 0.$$

Demostraremos agora algumas propriedades operatórias do determinante de uma matriz em $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

**Proposição 2.22.** Sejam $A$ e $B$ matrizes em $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Temos que o determinante goza das seguintes propriedades:

(i) Se uma linha ou coluna da matriz $A$ for nula, então $det(A) = 0$;

(ii) $det(A) = det(A^T)$;

(iii) Se $B$ é a matriz obtida multiplicando uma linha ou uma coluna da matriz $A$ por um escalar $\lambda$, então $det(B) = \lambda.det(A)$;

(iv) Se $B = \lambda A$, onde $\lambda$ é um escalar, então $det(B) = \lambda^2 det(A)$;

(v) Se $B$ é obtida pela pela permutação de linhas ou colunas de $A$, então $det(B) = -det(A)$;

(vi) Se as linhas ou colunas de $A$ forem múltiplas entre si, então $det(A) = 0$.

**Demonstração.**

(i) Se uma linha ou coluna da matriz $A$ for nula, então $det(A) = 0$. De fato, se

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

então $a_{11} \cdot a_{22}$ é a multiplicação de um elemento da linha 1, por um elemento da linha 2 e ao mesmo tempo a multiplicação de um elemento da coluna 1, por um elemento da coluna 2. Assim, se alguma linha ou coluna for nula, segue que $a_{11} \cdot a_{22} = 0$. Com o mesmo argumento vemos que $a_{21} \cdot a_{12} = 0$. Portanto $\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} = 0$.

(ii) $\det(A) = \det(A^T)$. Denotando $A$ por

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

temos

$$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12} = \det(A^T).$$

(iii) Se $B$ é a matriz obtida multiplicando uma linha ou uma coluna da matriz $A$ por um escalar $\lambda$, então $det(B) = \lambda \cdot det(A)$. De fato, denotando $A$ por

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

temos que $det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Além disso, multiplicando a primeira linha de $A$ pelo escalar $\lambda$ obtemos a matriz B, ou seja,

$$B = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Calculando o determinante de $B$ neste caso, temos

$$\begin{aligned} det(B) &= (\lambda a_{11})a_{22} - (\lambda a_{12})a_{21} = \lambda(a_{11}a_{22}) - \lambda(a_{12}a_{21}) \\ &= \lambda(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = \lambda det(A). \end{aligned}$$

Multiplicando a segunda linha de $A$ pelo escalar $\lambda$ temos

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{bmatrix},$$

neste caso

$$\begin{aligned} det(B) &= a_{11}(\lambda a_{22}) - a_{12}(\lambda a_{21}) = \lambda(a_{11}a_{22}) - \lambda(a_{12}a_{21}) \\ &= \lambda(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = \lambda det(A), \end{aligned}$$

multiplicando a primeira Coluna de $A$ pelo escalar $\lambda$ vemos que

$$B = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} \\ \lambda a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

e assim

$$\begin{aligned} det(B) &= (\lambda a_{11})a_{22} - a_{12}(\lambda a_{21}) = \lambda(a_{11}a_{22}) - \lambda(a_{12}a_{21}) \\ &= \lambda(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = \lambda det(A). \end{aligned}$$

Finalmente, multiplicando a segunda coluna de $A$ por $\lambda$, obtemos

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & \lambda a_{12} \\ a_{21} & \lambda a_{22} \end{bmatrix},$$

e

$$\begin{aligned} det(B) &= a_{11}(\lambda a_{22}) - (\lambda a_{12})a_{21} = \lambda(a_{11}a_{22}) - \lambda(a_{12}a_{21}) \\ &= \lambda(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = \lambda det(A). \end{aligned}$$

□

(iv) Se $B = \lambda A$, onde $\lambda$ é um escalar, então $det(B) = \lambda^2 det(A)$. Considerando

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

temos que $det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Além disso, multiplicando a matriz $A$ pelo escalar $\lambda$ temos

$$B = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{bmatrix}$$

e assim

$$\begin{aligned} det(B) &= (\lambda a_{11})(\lambda a_{22}) - (\lambda a_{12})(\lambda a_{21}) = \lambda^2(a_{11}a_{22}) - \lambda^2(a_{12}a_{21}) \\ &= \lambda^2(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = \lambda^2 det(A). \end{aligned}$$

(v) Se $B$ é obtida pela permutação de linhas ou colunas de $A$, então $det(B) = -det(A)$. Definindo

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

e permutando suas linhas obtemos

$$B = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{bmatrix}.$$

Calculando o determinante de $B$, encontramos

$$\begin{aligned} det(B) &= a_{21}a_{12} - a_{22}a_{11} = (a_{21}a_{12} - a_{22}a_{11}) = (a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}) \\ &= -(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = -det(A). \end{aligned}$$

Agora, permutando as colunas da matriz $A$, obtemos que a matriz $B$ é dada por

$$B = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{bmatrix}.$$

Calculando o determinante de $B$, temos

$$det(B) = a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22} = (a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}) = -(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = -det(A).$$

(vi) Se as linhas ou colunas de $A$ forem múltiplas entre si, então $det(A) = 0$. Se a matriz $A$ tiver uma linha múltipla da outra, podemos escrever

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \end{bmatrix}.$$

Calculando o determinante de $A$, temos

$$\begin{aligned} det(A) &= a_{11}(\lambda a_{12}) - a_{12}(\lambda a_{11}) = \lambda(a_{11}a_{12}) - \lambda(a_{12}a_{11}) = \lambda(a_{11}a_{12} - a_{12}a_{11}) \\ &= \lambda(a_{11}a_{12} - a_{11}a_{12}) = \lambda(0) = 0. \end{aligned}$$

Agora, se $A$ tiver uma coluna múltipla da outra, podemos escrever

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \lambda a_{11} \\ a_{21} & \lambda a_{21} \end{bmatrix}$$

e assim,

$$\begin{aligned} det(A) &= a_{11}(\lambda a_{21}) - (\lambda a_{11})a_{21} = \lambda(a_{11}a_{21}) - \lambda(a_{11}a_{21}) = \lambda(a_{11}a_{21} - a_{11}a_{21}) \\ &= \lambda(0) = 0. \end{aligned}$$

**Proposição 2.23.** Sejam $A$ e $B$ duas matrizes de ordem $2 \times 2$. Então

$$det(AB) = det(A) \cdot det(B).$$

**Demonstração.** Denotanto

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

as matrizes de ordem $2 \times 2$, e calculando o produto AB, obtemos

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
det(AB) &= (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})(a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) - (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})(a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}) \\
&= (a_{11}b_{11}a_{21}b_{12} + a_{11}b_{11}a_{22}b_{22} + a_{12}b_{21}a_{21}b_{12} + a_{12}b_{21}a_{22}b_{22}) \\
&\quad -(a_{11}b_{12}a_{21}b_{11} + a_{11}b_{12}a_{22}b_{21} + a_{12}b_{22}a_{21}b_{11} + a_{12}b_{22}a_{22}b_{21}) \\
&= a_{11}b_{11}a_{21}b_{12} + a_{11}b_{11}a_{22}b_{22} + a_{12}b_{21}a_{21}b_{12} + a_{12}b_{21}a_{22}b_{22} \\
&\quad -a_{11}b_{12}a_{21}b_{11} - a_{11}b_{12}a_{22}b_{21} - a_{12}b_{22}a_{21}b_{11} - a_{12}b_{22}a_{22}b_{21} \\
&= a_{11}a_{21}b_{11}b_{12} + a_{11}a_{22}b_{11}b_{22} + a_{12}a_{21}b_{12}b_{21} + a_{12}a_{22}b_{21}b_{22} \\
&\quad -a_{11}a_{21}b_{11}b_{12} - a_{11}a_{22}b_{12}b_{21} - a_{12}a_{21}b_{11}b_{22} - a_{12}a_{22}b_{21}b_{22} \\
&= a_{11}a_{21}b_{11}b_{12} - a_{11}a_{21}b_{11}b_{12} + a_{11}a_{22}b_{11}b_{22} + a_{12}a_{21}b_{12}b_{21} \\
&\quad +a_{12}a_{22}b_{21}b_{22} - a_{12}a_{22}b_{21}b_{22} - a_{11}a_{22}b_{12}b_{21} - a_{12}a_{21}b_{11}b_{22} \\
&= a_{11}a_{22}b_{11}b_{22} + a_{12}a_{21}b_{12}b_{21} - a_{11}a_{22}b_{12}b_{21} - a_{12}a_{21}b_{11}b_{22} \\
&= a_{11}a_{22}(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) + a_{12}a_{21}(b_{12}b_{21} - b_{11}b_{22}) \\
&= a_{11}a_{22}(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) - a_{12}a_{21}(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) \\
&= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) \\
&= det(A)det(B).
\end{aligned}$$

□

## 2.5 MATRIZ INVERTÍVEL

Nesta seção apresentaremos a matriz inversa, a forma de encontrá-la e suas principais propriedades. O conceito de matriz inversa, será utilizada em algumas aplicações, como por exemplo, na resolução de sistemas lineares e na criptografia. Podemos imaginar a inversa de uma matriz de forma semelhante à propriedade de um número real possuir inverso multiplicativo, ou seja, se $a^{-1}$ é o inverso de $a \in \mathbb{R}$, então $aa^{-1} = 1$. Além disso, da mesma forma que existe o número real 0 que não possui inverso, nem toda matriz é invertível. Assim, inspirados nas propriedade dos números reais, definimos matriz invertível da seguinte forma:

**Definição 2.24.** Uma matriz quadrada $A$ de ordem $2 \times 2$ é invertível (inversível ou não singular), se existe uma matriz $B$ de ordem $2 \times 2$ tal que

$$AB = BA = I,$$

onde $I$ é a matriz identidade, e a matriz $B$ é chamada de inversa de $A$. Se não existe uma matriz $B$ tal que a igualdade acima ocorre, dizemos que $A$ é não invertível (ou singular). Denotamos a matriz inversa da matriz $A$ por $A^{-1}$.

**Exemplo 2.25.** Seja $A$ a matriz de ordem $2 \times 2$ dada por

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -7 & -5 \end{bmatrix},$$

então $A$ é invertível e

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}.$$

De fato, basta verificarmos a igualdade $AB = BA = I$, onde

$$B = \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}.$$

Como

$$AB = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -7 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$BA = \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -7 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

então $A$ é invertível e $B$ é de fato a inversa de $A$, ou seja,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}.$$

**Proposição 2.26.** Seja $A$ uma matriz de ordem $2 \times 2$ invertível. Então a sua inversa é única.

**Demonstração.** Suponha que as matrizes $B$ e $C$ de ordem $2 \times 2$ sejam inversas de $A$. Assim temos pela definição de matriz invertível que $AB = BA = I$ e $AC = CA = I$, onde $I$ é a matriz identidade. Logo,

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C.$$

Portanto, $B = C$ e podemos concluir que a inversa é única. $\square$

**Proposição 2.27.** Sejam $A$ uma matriz $2\times 2$ invertível e $A^{-1}$ a sua inversa. Então, a matriz $A^{-1}$ também é invertível e $(A^{-1})^{-1} = A$.

**Demonstração.** Por definição de matriz invertível, uma matriz $B$ é inversa de $A^{-1}$, se $BA^{-1} = A^{-1}B = I$. Como $A^{-1}$ é a inversa de $A$, então $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Portanto, pela definição de matriz inversa e pela Proposição 2.26, temos que $B = A$ é a inversa de $A^{-1}$, ou seja, $(A^{-1})^{-1} = A$. □

**Teorema 2.28.** *Seja A uma matriz de ordem* $2\times 2$ *invertível. Então,* $\det(A) \neq 0$ *e* $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$.

**Demonstração.** Como $A$ é uma matriz invertível, temos que $A\cdot A^{-1} = I$, onde $I$ é a matriz identidade. Logo, usando a Proposição 2.23, temos

$$\det(A)\cdot\det(A^{-1}) = \det(A\cdot A^{-1}) = \det(I) = 1.$$

Desta maneira $\det(A) \neq 0$. Além disso, como $(\det A)(\det(A^{-1})) = 1$, então

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A} = (\det A)^{-1}.$$

□

**Teorema 2.29.** *Seja A uma matriz* $2\times 2$*, tal que* $\det(A) \neq 0$*. Se*

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

*então A é invertível e*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

**Demonstração.** Defina a matriz $B$ de ordem $2\times 2$ como sendo

$$B = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Note que $B$ está bem definida, pois $\det A \neq 0$. Além disso,

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} ad-bc & ab-ab \\ cd-cd & ad-bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} BA &= \frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} ad-bc & bd-bd \\ ac-ac & ad-bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

ou seja, $AB = BA = I$. Logo pela Proposição 2.26 e pela Definição 2.24, temos que $A$ é invertível e $B$ é a matriz inversa da matriz $A$, isto é,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

□

**Exemplo 2.30.** Se considerarmos a matriz $A$ de ordem $2 \times 2$, definida por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},$$

então, pelo Teorema 2.29, temos que

$$A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

**Corolário 2.31.** A matriz $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ é invertível se, e somente se, $det(A) \neq 0$.

**Demonstração.** Segue diretamente dos Teoremas 2.28 e 2.29. □

**Teorema 2.32.** *Sejam A uma matriz invertível e $\lambda$ um escalar não nulo. Então $\lambda A$ é invertível e $(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1}A^{-1}$.*

**Demonstração.** De fato, como

$$(\lambda A)(\lambda^{-1}A^{-1}) = (\lambda\lambda^{-1})(AA^{-1}) = 1I = I$$

e

$$(\lambda^{-1}A^{-1})(\lambda A) = (\lambda^{-1}\lambda)(A^{-1}A) = 1I = I,$$

segue da definição de matriz invertível, que $\lambda A$ é invertível e $\lambda^{-1}A^{-1}$ é a matriz inversa de $\lambda A$. □

**Teorema 2.33.** *Sejam A e B matrizes invertíveis de ordem $2 \times 2$. Então AB é invertível e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*

**Demonstração.** De fato, como o produto de matrizes é associativo, temos

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

e

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I.$$

Logo, $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = (B^{-1}A^{-1})(AB) = I$ e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. Portanto, $AB$ é invertível. $\square$

**Teorema 2.34.** *Seja $A$ uma matriz $2 \times 2$ invertível. Então $A^T$ é invertível e $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.*

**Demonstração.** De fato, como a transposta do produto é igual ao produto da transposta na multiplicação de matrizes, temos que

$$A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I^T = I$$

e

$$(A^{-1})^T A^T = (AA^{-1})^T = I^T = I.$$

Assim, $A^T(A^{-1})^T = (A^{-1})^T A^T = I$, de onde concluímos que $A^T$ é invertível e $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

$\square$

**Teorema 2.35.** *Seja $A$ uma matriz $2 \times 2$ invertível. Então $A^n$ é invertível para todo inteiro não negativo $n$ e $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$.*

**Demonstração.** Como $A$ é uma matriz invertível, temos que $AA^{-1} = I$. Assim,

$$I = I^n = (AA^{-1})^n = A^n(A^{-1})^n,$$

onde a ultima igualdade segue do fato de $AA^{-1} = A^{-1}A$. Logo $A^n$ é invertível e $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$. $\square$

## 2.6 O PLANO $\mathbb{R}^2$

Nesta seção, introduziremos o conjunto formado de pares ordenados de números reais, os quais, usando suas representações geométricas no plano cartesiano, definiremos alguns conceitos como distância e norma euclidiana. Veremos ainda, como é possível relacionar um par ordenado como matriz coluna, e a partir disso definir a soma e a multiplicação por escalar dos elementos de $\mathbb{R}^2$.

Denotamos por $\mathbb{R}^2$ o conjunto formado por todos os pares ordenados $(x, y)$, onde $x$ e $y$ são números reais. Os elementos de $\mathbb{R}^2$ são representados geometricamente no plano cartesiano da seguinte maneira: se $(x,y)$ é um elemento de $R^2$, então os números reais $x$ e $y$, chamadas de abscissa e ordenada respectivamente formam as coordenadas cartesianas do ponto $P=(x,y)$ do plano. Diante disso, podemos agora definir o conceito de distância euclidiana entre elementos de $\mathbb{R}^2$, como a distância entre pontos do plano cartesiano.

**Definição 2.36.** Sejam $P=(x_1,y_1)$ e $Q=(x_2,y_2)$ elementos de $\mathbb{R}^2$. A **distância euclidiana** entre $P$ e $Q$, denotada pelo símbolo $d(P,Q)$, é dada por

$$d(P,Q)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}.$$

Geometricamente, se $P=(x_1,y_1)$, $Q=(x_2,y_2)$ e $R=(x_1,y_2)$ são elementos de $\mathbb{R}^2$, tais que $x_1\neq x_2$ e $y_1\neq y_2$, então estes pontos são vértices de um triângulo retângulo cuja hipotenusa $PQ$ mede $d(P,Q)$ e cujos catetos $PR$ e $QR$ medem, respectivamente $d(P,R)=|x_1-x_2|$ e $d(Q,R)=|y_1-y_2|$. O caso particular, onde $x_1<x_2$ e $y_1<y_2$ pode ser visto pela Figura 1.

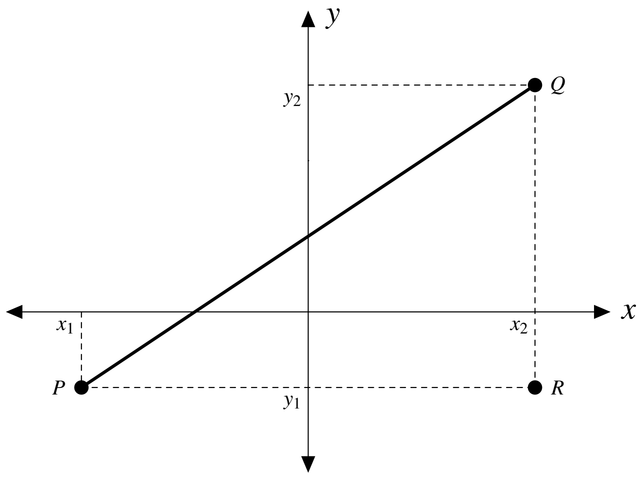


**Figura 1: Distância entre dois pontos.**

Calcularemos agora como exemplo a distância euclidiana entre os elementos $P=(1,2)$ e $Q=(4,6)$ de $\mathbb{R}^2$. Pela definição de distância euclidiana, temos

$$d(P,Q)=\sqrt{(1-4)^2+(2-6)^2}=\sqrt{25}=5.$$

**Proposição 2.37.** Sejam $P=(x_1,y_1)$ e $Q=(x_2,y_2)$ elementos de $\mathbb{R}^2$. O **ponto médio** do segmento de extremidades $P$ e $Q$, é o ponto

$$M=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right).$$

**Demonstração.** Sejam $M=(x_m,y_m)$, $R=(x_m,y_2)$ e $N=(x_m,y_1)$. Como os triângulos $PMR$ e $QMN$ são congruentes pelo caso (ângulo, ângulo, lado), temos que $d(P,R)=d(N,Q)$ e

$d(M,N) = d(M,R)$. Portanto

$$d(P,R) = d(N,Q) \Longrightarrow |x_m - x_2| = |x_1 - x_m| \Longrightarrow x_m = \frac{x_1 + x_2}{2}. \tag{7}$$

e

$$d(M,N) = d(M,R) \Longrightarrow |y_1 - y_m| = |y_m - y_2| \Longrightarrow y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}. \tag{8}$$

Logo por (7) e (8), temos que

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

O caso particular, onde $x_2 < x_1$ e $y_2 < y_1$ pode ser visto pela Figura 2.

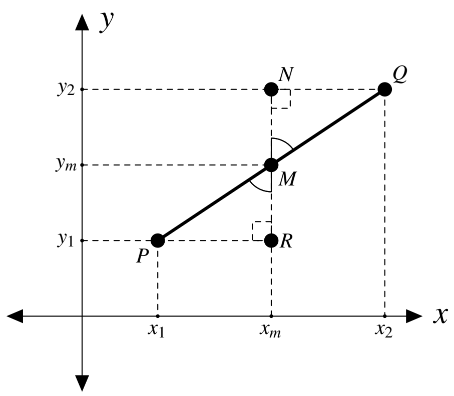


**Figura 2: Ponto médio entre $P$ e $Q$.**

Um elemento $P = (x_1, y_1)$ de $\mathbb{R}^2$ pode ser representado em notação matricial como uma matriz coluna, isto é

$$[P] = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}.$$

Assim como as matrizes possuem operações de soma e multiplicação por escalar, ao representarmos elementos de $\mathbb{R}^2$ como matrizes, poderemos somar e multiplicar por um escalar, estes elementos da mesma forma em que fazemos com as matrizes. Sejam $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$ elementos de $\mathbb{R}^2$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ um escalar, desta forma

$$[P] + [Q] = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \lambda[P] = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda y_1 \end{bmatrix}.$$

Diante desta representação, definiremos a soma e a multiplicação de elementos de $\mathbb{R}^2$ da seguinte forma:

**Definição 2.38.** Sejam $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$ elementos de $\mathbb{R}^2$, e $\lambda \in \mathbb{R}$. O **produto de $P$**

**pelo escalar** $\lambda$, denotado pelo símbolo $\lambda P$ é dado por

$$\lambda P = \lambda(x_1, y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1).$$

Além disso, a **soma** de $P$ por $Q$, denotado pelo símbolo $P+Q$ é dado por

$$P+Q = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

Apresentaremos agora o conceito de norma euclidiana, que corresponde à distância euclidiana de um elemento de $\mathbb{R}^2$ até a origem, ou seja, até o elemento $(0,0)$.

**Definição 2.39.** Seja $P = (x_1, y_1)$ um elemento de $\mathbb{R}^2$. A **norma euclidiana** ou a distância do elemento $P$ até a origem, denotada por $\|P\|$ é dada por

$$\|P\| = d(P,O) = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}.$$

Geometricamente, sejam $O = (0,0)$ e $P = (x_1, y_1)$ elementos de $\mathbb{R}^2$. Assim a norma euclidiana de $P$ é a medida do segmento $OP$ que é $\|P\| = d(O,P)$. Observe na Figura 3 o caso particular em que $x_1, x_2 > 0$.

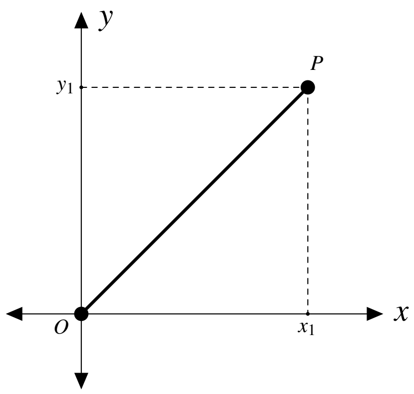


**Figura 3: Norma euclidiana do elemento $P$.**

Calcularemos agora a norma euclidiana do elemento $P = (2,3)$ de $\mathbb{R}^2$. Pela definição de norma euclidiana, temos

$$\|P\| = d(O,P) = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}.$$

**Proposição 2.40.** Seja $P \in \mathbb{R}^2$. Então $\|P\| = 0$ se, e somente se, $P = 0$.

**Demonstração.** De fato, considere $P = (x,y)$. Assim $\|P\| = 0$ se, e somente se $\|P\|^2 = x^2 + y^2 = 0$ se, e somente se, $x = 0$ e $y = 0$, ou seja, $P = (0,0)$. $\square$

**Definição 2.41.** Sejam $P=(x_1,y_1)$ e $Q=(x_2,y_2)$ elementos de $\mathbb{R}^2$. O **produto escalar**, ou produto interno euclidiano, entre $P$ e $Q$, denotado pelo símbolo $\langle P,Q\rangle$ ou $P\cdot Q$ é dado por

$$\langle P,Q\rangle = x_1x_2+y_1y_2.$$

Observe que a norma euclidiana está relacionada com o produto escalar, uma vez que

$$\|P\| = \sqrt{x_1^2+y_1^2} = \sqrt{\langle P,P\rangle}.$$

Além disso,

$$d(P,Q) = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} = \|P-Q\|.$$

Agora, apresentaremos um resultado que relaciona o produto interno euclidiano com o conceito de ângulo entre elementos de $\mathbb{R}^2$, que definimos da seguinte maneira:

**Definição 2.42.** Sejam $P$ e $Q$ elementos de $\mathbb{R}^2$. O ângulo $\theta$, satisfazendo $0\le\theta\le\pi$, entre os segmentos $OP$ e $OQ$ é definido como o ângulo entre $P$ e $Q$. Dizemos que $P$ e $Q$ são ortogonais quando o ângulo entre eles é reto, ou um deles é a origem.

**Proposição 2.43.** Sejam $P$ e $Q$ elementos de $\mathbb{R}^2$. Então,

$$\langle P,Q\rangle = \|P\|\|Q\|\cos\theta,$$

onde $\theta$ é o ângulo entre $P$ e $Q$.

**Demonstração.** De fato, podemos denotar $P=(x_1,y_1)$ e $Q=(x_2,y_2)$. Considere o triângulo de vértices $OPQ$, onde $O=(0,0)$, cujo ângulo entre os lados $OP$ e $OQ$ denominamos $\theta$. Assim, pela *Lei dos Cossenos*, temos

$$\|P-Q\|^2 = \|P\|^2+\|Q\|^2-2\|P\|\|Q\|\cos\theta.$$

Desenvolvendo, temos

$$\begin{aligned}
\|P\|\|Q\|\cos\theta &= \frac{1}{2}\left(\|P\|^2+\|Q\|^2-\|P-Q\|^2\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2-(x_1-x_2)^2-(y_1-y_2)^2\right)\\
&= x_1x_2+y_1y_2.
\end{aligned}$$

Portanto, pela definição de produto interno euclidiano, temos que

$$\langle P,Q\rangle = \|P\|\|Q\|\cos\theta.$$

O caso particular em que $x_1, x_2 > 0$ e $y_1, y_2 > 0$, pode ser observado pela Figura 4.

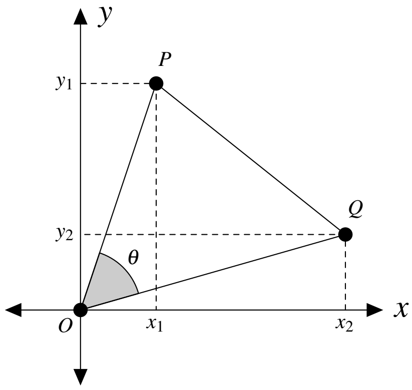


**Figura 4: Ângulo entre dois elementos.**

# 3 ISOMETRIAS NO PLANO

Neste capítulo introduziremos o conceito de isometria no plano. A importância do estudo de isometrias no plano está no fato de que isometrias mantém o formato de figuras quando necessário o seu deslocamento no plano, de forma que esta propriedade é bastante explorada nas artes, arquitetura, no desenvolvimento de protótipos e na computação gráfica. Também utilizada para o desenvolvimento de jogos e simuladores, entre outras aplicações em diversas áreas da engenharia. Definiremos as aplicações de translação, reflexão e rotação mostrando que estas aplicações são isometrias. Veremos que as isometrias no plano podem ser caracterizadas por transformações obtidas através da composição de uma translação com uma transformação ortogonal.

**Definição 3.1.** Uma aplicação $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é uma transformação linear se para quaisquer $P,Q \in \mathbb{R}^2$ e qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$, valer as relações:

(i) $T(P+Q) = T(P)+T(Q)$;

(ii) $T(\lambda P) = \lambda T(P)$.

Note que a definição acima nos permite afirmar que toda aplicação linear $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(1,0) = (a,c)$ e $T(0,1) = (b,d)$ pode ser escrita na forma

$$T(x,y) = (ax+by, cx+dy).$$

De fato

$$T(x,y) = T(x\cdot(1,0)+y\cdot(0,1)) = xT(1,0)+yT(0,1) = x(a,c)+y(b,d) = (ax+by, cx+dy).$$

Por outro lado, se considerarmos a aplicação linear $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por

$$T(x,y) = (ax+by, cx+dy),$$

podemos representar tal transformação matricialmente por

$$[T]\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{bmatrix},$$

onde

$$[T] = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

é a matriz associada a transformação linear $T$ e

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

é a representação do elemento $(x,y)$ de $\mathbb{R}^2$ como matriz coluna. Portanto a representação matricial nos permite, usando matrizes $2\times 2$, estudar as transformações lineares de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$. Desta maneira, abordaremos o conceito de isometria, bem como sua relação com as transformações lineares e aplicações, utilizando o conceito de matrizes que estamos desenvolvendo neste texto.

**Definição 3.2.** Dizemos que uma matriz $A$ de ordem $2\times 2$ é **ortogonal**, se $A$ é invertível e

$$A^{-1} = A^T.$$

O conceito de matriz ortogonal pode ser levado para as transformações lineares. Basta utilizarmos a relação entre matrizes e transformações lineares que mencionamos acima.

**Definição 3.3.** Dizemos que uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é uma **transformação ortogonal**, se sua matriz associada $[T]$ satisfaz a igualdade

$$[T]^{-1} = [T]^T,$$

onde $[T]^T$ é a transposta da matriz $[T]$.

Apresentaremos agora algumas propriedades das matrizes ortogonais em $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ e veremos como determinar uma forma padrão para tais matrizes.

**Proposição 3.4.** Seja $A$ uma matriz de ordem $2\times 2$ ortogonal, então o $\det A = \pm 1$.

**Demonstração.** Sejam $A$, uma matriz ortogonal e $I$ a matriz identidade, ambas de ordem 2. Como $A$ é ortogonal, temos que $AA^T = I$. Além disso, utilizando as propriedades de determinantes, obtemos

$$1 = \det(I) = \det(AA^T) = \det(A)\cdot\det(A^T) = \det(A)\cdot\det(A) = (\det(A))^2,$$

ou seja, $\det(A) = \pm 1$. $\square$

**Proposição 3.5.** Se $a, b \in \mathbb{R}$ satisfazem $a^2 + b^2 = 1$, então existe $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que $a = \operatorname{sen}\theta$ e $b = \cos\theta$.

**Demonstração.** Como $a^2 + b^2 = 1$, então $-1 \leq a \leq 1$ e $-1 \leq b \leq 1$. Além disso, como a função seno restrita ao intervalo $[0, 2\pi)$ tem imagem $[-1, 1]$, então existe $\beta \in [0, 2\pi)$ tal que $a = \operatorname{sen}\beta$. Logo, $\operatorname{sen}^2\beta + b^2 = 1$. Isolando $b$ nesta igualdade, obtemos

$$b = \pm\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\beta} = \pm\cos\beta.$$

Portanto, se $a = \operatorname{sen}\beta$ e $b = \cos\beta$, basta tomarmos $\theta = \beta$. Por outro lado, se $a = \operatorname{sen}\beta$ e $b = -\cos\beta$, basta tomarmos $\theta = \pi - \beta$, caso $0 \leq \beta \leq \pi$ e $\theta = 3\pi - \beta$, caso $\pi < \beta < 2\pi$ que teremos $a = \operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen}\theta$ e $b = -\cos\beta = \cos\theta$. $\square$

**Proposição 3.6.** $A$ é uma matriz ortogonal $2 \times 2$, se e somente se

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{bmatrix},$$

para algum $\theta \in [0, 2\pi)$.

**Demonstração.** Seja $A$ uma matriz $2 \times 2$ ortogonal e suponha que $A$ possa ser escrita na forma

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

como $A$ é ortogonal, $A^T = A^{-1}$. Além disso, utilizando a Proposição 3.4 e o Teorema 2.33, obtemos

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}, \tag{9}$$

com $\det(A) = \pm 1$.

Analisaremos agora os casos, $\det(A) = 1$ e $\det(A) = -1$.

$(i)$ $\det A = 1$: Neste caso, (9) implica que $a = d, b = -c, c = -b$ e $d = a$. Ou seja,

$$A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}, \text{ com } a^2 + b^2 = 1.$$

$(ii)$ $\det A = -1$: Neste caso (9) implica que $a = -d, b = c, c = b$ e $d = -a$. Ou seja,

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}, \text{ com } a^2 + b^2 = 1.$$

Finalmente, utilizando a Proposição 3.5, concluímos que a matriz ortogonal $A$ de ordem $2 \times 2$ possui uma das seguintes formas:

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}.$$

Reciprocamente, se

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix},$$

temos que

$$AA^T = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ou seja $AA^T = I$. Similarmente, se

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{bmatrix},$$

temos que

$$AA^T = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ou seja $AA^T = I$. Logo, nas duas formas de $A$ concluímos que $A^T = A^{-1}$, isto é, $A$ é ortogonal.

□

Introduziremos agora a definição de isometrias no plano.

**Definição 3.7.** Dizemos que uma aplicação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é uma **Isometria no Plano**, se

$$d(P,Q) = d(T(P), T(Q)),$$

para qualquer $P, Q \in \mathbb{R}^2$.

**Exemplo 3.8.** A aplicação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y) = (x, y+1)$ é uma isometria.

De fato, suponha que $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$ sejam elementos de $\mathbb{R}^2$. Então,

$$d(T(P), T(Q))^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 + 1 - y_2 - 1)^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = d(P,Q)^2.$$

Portanto, $d(T(P),T(Q)) = d(P,Q)$. Logo, $T$ é uma isometria.

**Exemplo 3.9.** A aplicação $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $R(x,y) = \left(\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y, \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y\right)$ é uma isometria.

Denotando $P = (x_1,y_1)$ e $Q = (x_2,y_2)$ elementos de $\mathbb{R}^2$, mostraremos que $d(P,Q) = d(R(P),R(Q))$, ou equivalentemente $d(P,Q)^2 = d(R(P),R(Q))^2$.

$$\begin{aligned}
d(R(P),R(Q))^2 &= \left(\frac{1}{2}x_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}y_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}y_2\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x_1 + \frac{1}{2}y_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_2 - \frac{1}{2}y_2\right)^2 \\
&= \left(\frac{1}{2}(x_1 - x_2) - \frac{\sqrt{3}}{2}(y_1 - y_2)\right)^2 + \left(\frac{1}{2}(y_1 - y_2) + \frac{\sqrt{3}}{2}(x_1 - x_2)\right)^2 \\
&= \left(\frac{1}{4}(x_1 - x_2)^2 + \frac{3}{4}(y_1 - y_2)^2 + \frac{1}{4}(y_1 - y_2)^2 + \frac{3}{4}(x_1 - x_2)^2\right) \\
&= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \\
&= d(P,Q)^2.
\end{aligned}$$

Logo, $R$ é uma isometria.

**Proposição 3.10.** Se $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é uma isometria, então $T$ é uma aplicação injetiva.

**Demonstração.** Sejam $P,Q \in \mathbb{R}^2$ pontos tais que $P \neq Q$. Logo, $d(P,Q) > 0$. Por outro lado, como $T$ é uma isometria, temos que $d(P,Q) = d(T(P),T(Q))$. Assim $d(T(P),T(Q)) = d(P,Q) > 0$, o que implica que $T(P) \neq T(Q)$. Portanto, $T$ é injetiva. $\square$

**Proposição 3.11.** Se $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é uma isometria que possui inversa $T^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, então $T^{-1}$ é uma isometria.

**Demonstração.** Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $T^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, a inversa de $T$. Assim, para quaisquer $P,Q \in \mathbb{R}^2$

$$d(P,Q) = d((T \circ T^{-1})(P),(T \circ T^{-1})(Q)) = d(T(T^{-1}(P)),T(T^{-1}(Q))). \tag{10}$$

Além disso, como $T$ é uma isometria,

$$d(T(T^{-1}(P)),T(T^{-1}(Q))) = d(T^{-1}(P),T^{-1}(Q)). \tag{11}$$

Logo, por (10) e (11), segue que $T^{-1}$ é uma isometria. $\square$

**Proposição 3.12.** A composta de duas isometrias é uma isometria.

**Demonstração.** Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ isometrias. Como $T$ é isometria, temos

$$d(T(S(P)),T(S(Q))) = d(S(P),S(Q)), \tag{12}$$

para quaisquer $P,Q \in \mathbb{R}^2$. Além disso, como $S$ também é isometria,

$$d(S(P),S(Q)) = d(P,Q). \tag{13}$$

Por (12) e (13), obtemos

$$d(T(S(P)),T(S(Q))) = d(P,Q).$$

Logo $T \circ S$ é isometria. $\square$

**Exemplo 3.13.** Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, e $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, aplicações definidas por $T(x,y) = (x,y+1)$ e $R(x,y) = \left(\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y, \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y\right)$ respectivamente. Então a composição $T(R(x,y)) = \left(\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y, \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + 1\right)$ é uma isometria.

De fato, se $P = (x_1,y_1)$ e $Q = (x_2,y_2)$ pertencem a $\mathbb{R}^2$, então

$$\begin{aligned}
d(T(R(P)),T(R(Q)))^2 &= \left(\frac{1}{2}x_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}y_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}y_2\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x_1 + \frac{1}{2}y_1 + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_2 - \frac{1}{2}y_2 - 1\right)^2 \\
&= \left(\frac{1}{2}(x_1 - x_2) - \frac{\sqrt{3}}{2}(y_1 - y_2)\right)^2 + \left(\frac{1}{2}(y_1 - y_2) + \frac{\sqrt{3}}{2}(x_1 - x_2)\right)^2 \\
&= \left(\frac{1}{4}(x_1 - x_2)^2 + \frac{3}{4}(y_1 - y_2)^2 + \frac{1}{4}(y_1 - y_2)^2 + \frac{3}{4}(x_1 - x_2)^2\right) \\
&= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \\
&= d(P,Q)^2,
\end{aligned}$$

ou seja, $d(T(R(P)),T(R(Q))) = d(P,Q)$.

## 3.1 TRANSLAÇÃO

Nesta seção apresentaremos a aplicação translação e mostraremos que as translações são isometrias. A translação pode ser entendida como um deslocamento em linha reta, onde podemos pensar por exemplo, no movimento de um elevador ou no deslocamento de uma pessoa em uma escada rolante.

**Definição 3.14.** Uma aplicação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é dita ser uma translação, se existir $Q \in \mathbb{R}^2$ tal que $T(X) = X + Q$ para todo $X \in \mathbb{R}^2$.

**Exemplo 3.15.** Sejam $P = (x_1,y_1)$ e $Q = (x_2,y_2)$ elementos de $\mathbb{R}^2$. A translação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de $P$ pelo elemento $Q$ é o elemento $P' = (x_3,y_3)$, tal que

$$P' = T(P) = P + Q = (x_1,y_1) + (x_2,y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$

observe a Figura 5.

Matricialmente temos a seguinte representação:

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix}.$$

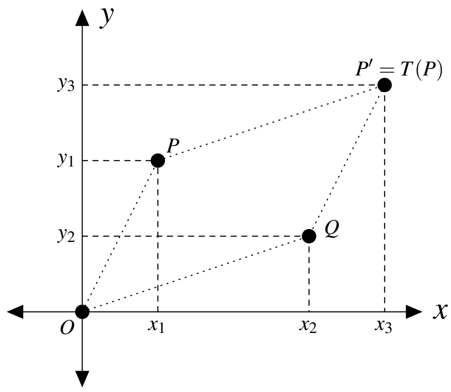


**Figura 5: Translação de $P$ pelo elemento $Q$.**

**Proposição 3.16.** Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma translação. Então $T$ é uma isometria.

**Demonstração.** Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, uma translação e $Q \in \mathbb{R}^2$, de forma que $T(X) = X + Q$ para todo $X \in \mathbb{R}^2$. Dados $R, S \in \mathbb{R}^2$ quaisquer, temos

$$d(T(R), T(S)) = d((R+Q), (S+Q)) = \|(R+Q) - (S+Q)\| = \|R - S\| = d(R, S).$$

Logo $d(T(R), T(S)) = d(R, S)$, ou seja, $T$ é uma isometria. $\square$

## 3.2 REFLEXÃO

Nesta seção apresentaremos o conceito de reflexão, e mostraremos que uma reflexão em torno de uma reta que passa pela origem é uma transformação ortogonal. Informalmente dizemos que uma figura é a reflexão de outra em relação a uma reta, quando uma é a imagem espelhada da outra em relação a esta reta.

**Definição 3.17.** Seja $r$ uma reta em $\mathbb{R}^2$. A função reflexão é a função $R_r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida da seguinte forma: $R_r(X) = X$, se $X \in r$, e $R_r(X) = X'$, se $X \notin r$, onde $X'$ é o ponto de $\mathbb{R}^2$ tal que $r$ é a mediatriz do segmento $XX'$.

**Exemplo 3.18.** Reflexão em torno do eixo $x$. Sejam $P = (a, b)$ um ponto e $r$ a reta que coincide com o eixo $x$. Assim a reflexão de $P$ em torno do eixo $x$ é dada por $R_r(a, b) = (a, -b)$, observe a

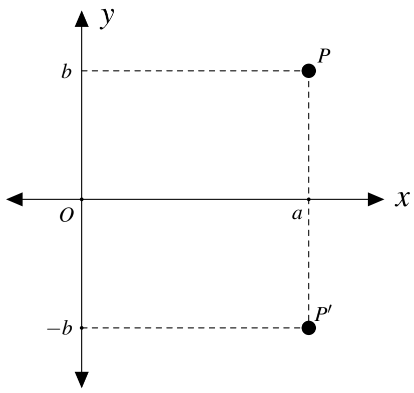


**Figura 6: Reflexão do ponto $P$ pelo eixo $x$.**

Figura 6. Veja que, neste caso, $R_r(a,b)$ é uma transformação linear. Logo, usando a notação de matrizes, podemos representar a reflexão de um ponto $P$ em torno do eixo $x$, da seguinte forma:

$$[R_r] \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ -b \end{bmatrix}.$$

**Exemplo 3.19.** Reflexão em torno do eixo $y$. Sejam $P = (a,b)$ um ponto e $r$ a reta que coincide com o eixo $y$. Assim a reflexão de $P$ em torno do eixo $y$ é dada por $R_r(a,b) = (-a,b)$, observe a Figura 7. Usando a notação de matrizes, pode-se representar a reflexão de um ponto $P$ em torno

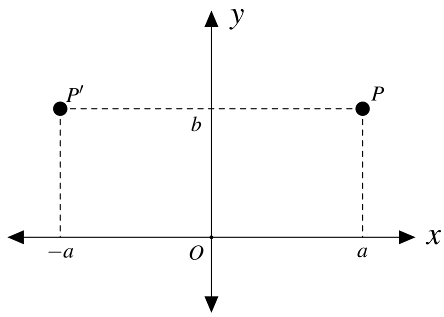


**Figura 7: Reflexão do ponto $P$ pelo eixo $y$.**

do eixo $y$, da seguinte forma:

$$[R_r] \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a \\ b \end{bmatrix}.$$

**Exemplo 3.20.** Reflexão em torno da reta $y = x$. Sejam $P = (a,b)$ um ponto e $r$ a reta dada pela equação $y = x$. Assim a reflexão de $P$ em torno da reta $r$ é dada por $R_r(a,b) = (b,a)$.

Usando a notação de matrizes, podemos representar a reflexão de um ponto $P$ em torno da reta $y = x$, da seguinte forma:

$$[R_r] \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix}.$$

**Proposição 3.21.** Sejam $P = (x_0, y_0)$ um ponto do plano e $r$ a reta dada pela equação $y = mx$. Então, a reflexão de $P$ em torno da reta $r$, $R_r(P) = Q$, é dada por

$$[R_r] \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1-m^2}{m^2+1} & \dfrac{2m}{m^2+1} \\ \dfrac{2m}{m^2+1} & \dfrac{m^2-1}{m^2+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}.$$

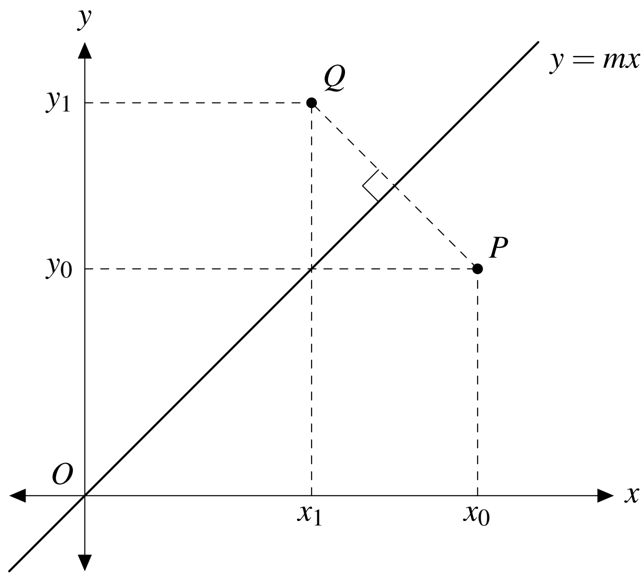


**Figura 8: Reflexão do $P$ pela reta $y = mx$.**

**Demonstração.** Para encontrarmos o ponto $Q$, digamos $Q = (x_1, y_1)$, primeiro encontraremos a reta $s$ que contém o segmento $PQ$. Como a inclinação da reta $r$ é $m = \operatorname{tg}\theta$, com $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, e $r$ é a mediatriz de $PQ$, temos que a inclinação da reta que contém $PQ$ é $m_1 = \operatorname{tg}\theta_1$, onde $\theta_1 = \theta - \frac{\pi}{2}$, se $\theta > 0$ e $\theta_1 = \theta + \frac{\pi}{2}$, se $\theta < 0$. Logo $m_1 = -\frac{1}{m}$.

De fato, se $\theta > 0$,

$$\begin{aligned} m_1 &= \operatorname{tg}\theta_1 = \operatorname{tg}(\theta - \frac{\pi}{2}) = \frac{\operatorname{sen}\left(\theta - \dfrac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{2}\right)} = \frac{\operatorname{sen}\theta \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\cos\theta}{\cos\theta\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)} \\ &= -\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = -\frac{1}{\operatorname{tg}\theta} = -\frac{1}{m}. \end{aligned}$$

Se $\theta < 0$, obtemos $m_1 = -\frac{1}{m}$ de maneira similar.

Como a reta que contém $PQ$ passa por $(x_0, y_0)$ sua equação é dada por

$$y = -\frac{1}{m}(x - x_0) + y_0.$$

Para obtermos o ponto $Q$ encontraremos duas relações para o ponto médio $M$ do segmento $PQ$ e a compararemos. Note que por um lado, o ponto $M$ é a intersecção da reta $r$ com a reta $s$. Isto é, se denotarmos $M$ por $M = (\bar{x}, \bar{y})$, então $M$ é a solução do sistema

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{m}(x - x_0) + y_0 \\ y = mx. \end{cases}$$

Logo,

$$m\bar{x} = -\frac{1}{m}(\bar{x} - x_0) + y_0.$$

Assim

$$\bar{x} = \frac{x_0 + my_0}{m^2 + 1}.$$

Como $\bar{y} = m\bar{x}$, encontramos

$$\bar{y} = \frac{m(x_0 + my_0)}{m^2 + 1}.$$

Concluímos assim que

$$M = \left( \frac{x_0 + my_0}{m^2 + 1}, \frac{m(x_0 + my_0)}{m^2 + 1} \right). \tag{14}$$

Por outro lado, podemos usar a Proposição 2.37 e obter $M$ como sendo

$$M = \left( \frac{x_0 + x_1}{2}, \frac{y_0 + y_1}{2} \right). \tag{15}$$

Juntando (14) e (15) obtemos as relações

$$\frac{x_0 + x_1}{2} = \frac{x_0 + my_0}{m^2 + 1} \quad \text{e} \quad \frac{y_0 + y_1}{2} = \frac{m(x_0 + my_0)}{m^2 + 1}.$$

Finalmente, isolando $x_1$ e $y_1$ nestas expressões, encontramos

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{2(x_0 + my_0) - x_0(m^2 + 1)}{m^2 + 1} = \frac{2x_0 + 2my_0 - m^2 x_0 - x_0}{m^2 + 1} \\ &= \frac{x_0(2 - m^2 - 1) + my_0}{m^2 + 1} = \frac{(1 - m^2)x_0 + 2my_0}{m^2 + 1} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{2m(x_0+my_0)-y_0(m^2+1)}{m^2+1} = \frac{2mx_0+2m^2y_0-m^2y_0-y_0}{m^2+1} \\ &= \frac{(2m^2-m^2-1)y_0+2mx_0}{m^2+1} = \frac{(m^2-1)y_0+2mx_0}{m^2+1}. \end{aligned}$$

Portanto

$$Q=(x_1,y_1)=\left(\frac{(1-m^2)x_0+2my_0}{m^2+1}, \frac{(m^2-1)y_0+2mx_0}{m^2+1}\right).$$

Utilizando a representação matricial podemos representar $R_r(P)=Q$ por

$$[R_r]\cdot\begin{bmatrix}x_0\\y_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1-m^2}{m^2+1} & \frac{2m}{m^2+1}\\ \frac{2m}{m^2+1} & \frac{m^2-1}{m^2+1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_0\\y_0\end{bmatrix}.$$

**Proposição 3.22.** Uma reflexão por uma reta $y=mx$ é uma transformação ortogonal, isto é,

$$[R_r]\cdot\begin{bmatrix}x_0\\y_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & \mathrm{sen}\theta\\ \mathrm{sen}\theta & -\cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_0\\y_0\end{bmatrix},$$

onde

$$\cos\theta=\frac{1-m^2}{m^2+1} \quad \text{e} \quad \mathrm{sen}\theta=\frac{2m}{m^2+1}.$$

**Demonstração.** De fato, como

$$\left(\frac{2m}{m^2+1}\right)^2+\left(\frac{1-m^2}{m^2+1}\right)^2=1,$$

pela Proposição 3.5 existe um $\theta\in[0,2\pi)$, tal que

$$\mathrm{sen}\theta=\frac{2m}{m^2+1} \quad \text{e} \quad \cos\theta=\frac{1-m^2}{m^2+1}.$$

Portanto a matriz

$$[R_r]=\begin{bmatrix}\frac{1-m^2}{m^2+1} & \frac{2m}{m^2+1}\\ \frac{2m}{m^2+1} & \frac{m^2-1}{m^2+1}\end{bmatrix}$$

pode ser escrita como

$$\begin{bmatrix}\cos\theta & \mathrm{sen}\theta\\ \mathrm{sen}\theta & -\cos\theta\end{bmatrix},$$

que pela Proposição 3.6 é ortogonal.

**Proposição 3.23.** Sejam $P=(x_0,y_0)$ um ponto do plano e $r$ a reta dada pela equação $y=mx+p$. Se, $R_r(P)=Q=(x_1,y_1)$ é a reflexão de $P$ em torno da reta $r$, então $Q$ tem a seguinte representação matricial

$$[R_r(P)] = [Q] = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1-m^2}{m^2+1} & \dfrac{2m}{m^2+1} \\ \dfrac{2m}{m^2+1} & \dfrac{m^2-1}{m^2+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{-2mp}{m^2+1} \\ \dfrac{2p}{m^2+1} \end{bmatrix}.$$

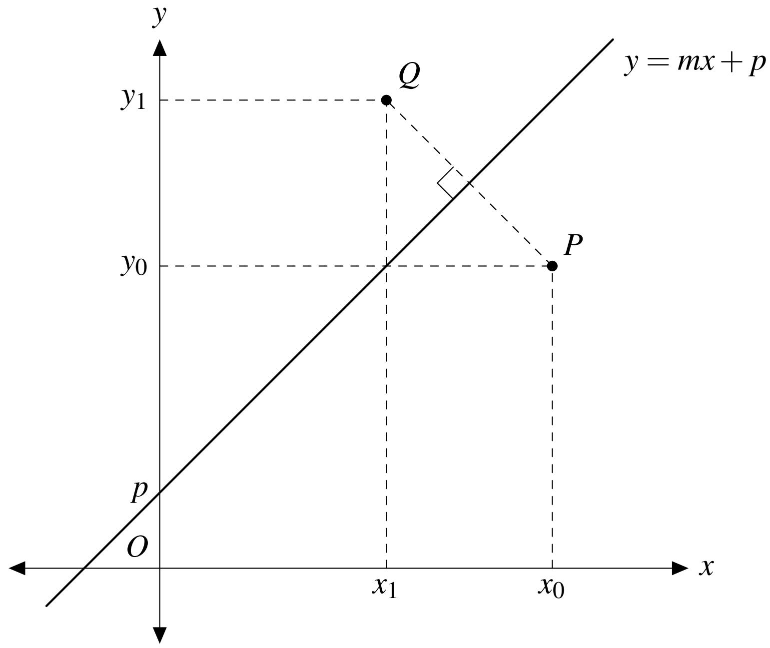


**Figura 9: Reflexão do $P$ pela reta $y = mx + p$.**

**Demonstração.** Para encontrarmos o ponto $Q$, digamos $Q = (x_1, y_1)$ primeiro encontraremos a reta $s$ que contém o segmento $PQ$. Como a inclinação da reta $r$ é $m = \operatorname{tg}\theta$, com $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, e $r$ é a mediatriz de $PQ$, temos que a inclinação da reta que contém $PQ$ é $m_1 = \operatorname{tg}\theta_1$, onde $\theta_1 = \theta - \frac{\pi}{2}$, se $\theta > 0$ e $\theta_1 = \theta + \frac{\pi}{2}$, se $\theta < 0$. Logo $m_1 = -\frac{1}{m}$.

De fato, se $\theta > 0$,

$$\begin{aligned} m_1 &= \operatorname{tg}\theta_1 = \operatorname{tg}(\theta - \frac{\pi}{2}) = \frac{\operatorname{sen}\left(\theta - \dfrac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{2}\right)} = \frac{\operatorname{sen}\theta \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\cos\theta}{\cos\theta\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)} \\ &= -\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = -\frac{1}{\operatorname{tg}\theta} = -\frac{1}{m}. \end{aligned}$$

Se $\theta < 0$, obtemos $m_1 = -\frac{1}{m}$ de maneira similar.

Como a reta que contém $PQ$ passa por $(x_0, y_0)$ sua equação é dada por

$$y = -\frac{1}{m}(x - x_0) + y_0.$$

Para obtermos o ponto $Q$ encontraremos duas relações para o ponto médio $M$ do segmento $PQ$

e a compararemos. Note que por um lado, o ponto $M$ é a intersecção da reta $r$ com a reta $s$. Isto é, se denotarmos $M$ por $M = (\bar{x}, \bar{y})$, então $M$ é a solução do sistema

$$\begin{cases} y = -\dfrac{1}{m}(x - x_0) + y_0 \\ y = mx + p. \end{cases}$$

Logo,

$$m\bar{x} + p = -\frac{1}{m}(\bar{x} - x_0) + y_0.$$

Assim

$$\bar{x} = \frac{x_0 + my_0 - mp}{m^2 + 1}.$$

Como $\bar{y} = m\bar{x} + p$, encontramos

$$\bar{y} = \frac{m(x_0 + my_0) + p}{m^2 + 1}.$$

Concluímos assim que

$$M = \left( \frac{x_0 + my_0 - mp}{m^2 + 1}, \frac{m(x_0 + my_0) + p}{m^2 + 1} \right). \tag{16}$$

Por outro lado, podemos usar a Proposição 2.37 e obter $M$ como sendo

$$M = \left( \frac{x_0 + x_1}{2}, \frac{y_0 + y_1}{2} \right). \tag{17}$$

Juntando (16) e (17) obtemos as relações

$$\frac{x_0 + x_1}{2} = \frac{x_0 + my_0 - mp}{m^2 + 1} \quad \text{e} \quad \frac{y_0 + y_1}{2} = \frac{m(x_0 + my_0) + p}{m^2 + 1}.$$

Finalmente, isolando $x_1$ e $y_1$ nestas expressões, encontramos

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{2x_0 + 2my_0 - 2mp - m^2x_0 - x_0}{m^2 + 1} = \frac{x_0(2 - m^2 - 1) + m(2y_0 - 2p)}{m^2 + 1} \\ &= \frac{x_0(1 - m^2) + 2m(y_0 - p)}{m^2 + 1} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{2m(x_0 + my_0) + 2p - m^2y_0 - y_0}{m^2 + 1} = \frac{2mx_0 + 2m^2y_0 + 2p - m^2y_0 - y_0}{m^2 + 1} \\ &= \frac{(2m^2 - m^2 - 1)y_0 + 2(mx_0 + p)}{m^2 + 1} = \frac{(m^2 - 1)y_0 + 2(mx_0 + p)}{m^2 + 1}. \end{aligned}$$

Portanto

$$Q=(x_1,y_1)=\left(\frac{(1-m^2)x_0+2m(y_0-p)}{m^2+1},\frac{(m^2-1)y_0+2(mx_0+p)}{m^2+1}\right).$$

Utilizando a representação matricial podemos representar $R_r(P)=Q$ por

$$[R_r(P)]=[Q]=\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{1-m^2}{m^2+1} & \dfrac{2m}{m^2+1}\\ \dfrac{2m}{m^2+1} & \dfrac{m^2-1}{m^2+1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_0\\y_0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\dfrac{-2mp}{m^2+1}\\ \dfrac{2p}{m^2+1}\end{bmatrix}.$$

□

**Proposição 3.24.** Seja $R_r:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$ a aplicação reflexão em torno da reta $r$ cuja equação é dada por $y=mx+p$. Então, $R_r$ é uma isometria.

**Demonstração.** Sendo $P=(x_1,y_1)$ e $Q=(x_2,y_2)$ pontos do plano, mostraremos que

$$d(P,Q)=d(R_r(P),R_r(Q)),$$

onde $d(P,Q)$ é a distância entre dois pontos pela Definição 2.36.

Denotando $R_r(P)=(\bar{x}_1,\bar{y}_1)$ e $R_r(Q)=(\bar{x}_2,\bar{y}_2)$ temos da Proposição 3.23 que

$$\begin{bmatrix}\bar{x}_1\\\bar{y}_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1-m^2}{m^2+1} & \frac{2m}{m^2+1}\\ \frac{2m}{m^2+1} & \frac{m^2-1}{m^2+1}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{-2mp}{m^2+1}\\ \frac{2p}{m^2+1}\end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix}\bar{x}_2\\\bar{y}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1-m^2}{m^2+1} & \frac{2m}{m^2+1}\\ \frac{2m}{m^2+1} & \frac{m^2-1}{m^2+1}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{-2mp}{m^2+1}\\ \frac{2p}{m^2+1}\end{bmatrix}.$$

Dessa maneira,

$$\begin{aligned}(\bar{x}_1-\bar{x}_2)^2 &= \left(\frac{(1-m^2)x_1+2m(y_1-p)}{m^2+1}-\frac{(1-m^2)x_2+2m(y_2-p)}{m^2+1}\right)^2\\ &= \left(\frac{(1-m^2)x_1+2my_1-(1-m^2)x_2-2my_2)}{m^2+1}\right)^2\\ &= \left(\frac{(1-m^2)(x_1-x_2)+2m(y_1-y_2)}{m^2+1}\right)^2\\ &= \frac{(1-m^2)^2(x_1-x_2)^2+4m^2(y_1-y_2)^2-4m(m^2-1)(x_1-x_2)(y_1-y_2)}{(m^2+1)^2}\end{aligned}$$

e

$$
\begin{aligned}
(\bar{y}_1-\bar{y}_2)^2 &= \left(\frac{(m^2-1)y_1+2(mx_1+p)}{m^2+1}-\frac{(m^2-1)y_2+2(mx_2+p)}{m^2+1}\right)^2 \\
&= \left(\frac{(m^2-1)y_1+2mx_1-(m^2-1)y_2-2mx_2}{m^2+1}\right)^2 \\
&= \left(\frac{(m^2-1)(y_1-y_2)+2m(x_1-x_2)}{m^2+1}\right)^2 \\
&= \frac{(m^2-1)^2(y_1-y_2)^2+4m^2(x_1-x_2)^2+4m(m^2-1)(x_1-x_2)(y_1-y_2)}{(m^2+1)^2}.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
(\bar{x}_1-\bar{x}_2)^2+(\bar{y}_1-\bar{y}_2)^2 &= (x_1-x_2)^2\left(\frac{1-2m^2+m^4+4m^2}{(m^2+1)^2}\right)+(y_1-y_2)^2\left(\frac{m^4-2m^2+1+4m^2}{(m^2+1)^2}\right) \\
&= (x_1-x_2)^2\frac{(m^2+1)^2}{(m^2+1)^2}+(y_1-y_2)^2\frac{(m^2+1)^2}{(m^2+1)^2} \\
&= (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2,
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$(d(R_r(P),R_r(Q)))^2 = d(P,Q)^2.$$

Extraindo a raiz quadrada em ambos os lados da igualdade acima obtemos

$$d(R_r(P),R_r(Q)) = d(P,Q).$$

□

## 3.3 ROTAÇÃO

Nesta seção apresentaremos a aplicação rotação no plano. Mostraremos que as rotações são isometrias, que a rotação em torno da origem é uma transformação ortogonal e que a rotação em torno de um ponto fora da origem é a composição de uma translação por uma rotação em torno da origem composta com outra translação. Podemos encontrar o movimento de rotação em nosso cotidiano, como por exemplo, nas rodas dos veículos, onde o pneu sofre uma rotação em torno de seu eixo. Na computação gráfica, poderemos pensar em edições de imagens em que haja a necessidade de rotacioná-las.

**Definição 3.25.** Uma rotação em torno de $C \in \mathbb{R}^2$ por um ângulo $\theta \in [0,2\pi)$ é uma aplicação $R_{C,\theta} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, que fixa o ponto $C$, e para todo $X \in \mathbb{R}^2 \backslash \{C\}$, temos que $R_{C,\theta}(X) = Y$, onde os segmentos $CX$ e $CY$ têm o mesmo comprimento e $X\hat{C}Y$, o ângulo orientado no sentido anti horário de $CX$ para $CY$ é $\theta$.

**Proposição 3.26.** Sejam $P = (x_0, y_0)$ um ponto do plano e $\theta \in [0, 2\pi)$ um ângulo. Então a rotação de $P$ em torno da origem pelo ângulo $\theta$ é a transformação ortogonal $R_{0,\theta}(P) = Q$ representada por

$$[R_{O,\theta}] \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}.$$

**Demonstração.** Considere $\alpha \in [0, 2\pi)$ o ângulo orientado de sentido anti-horário que o eixo $x$ faz com o segmento $OP$. Denotando $Q = (x_1, y_1)$, (o caso particular em que $\alpha + \theta < \pi/2$ pode ser observado na Figura 10), podemos escrever

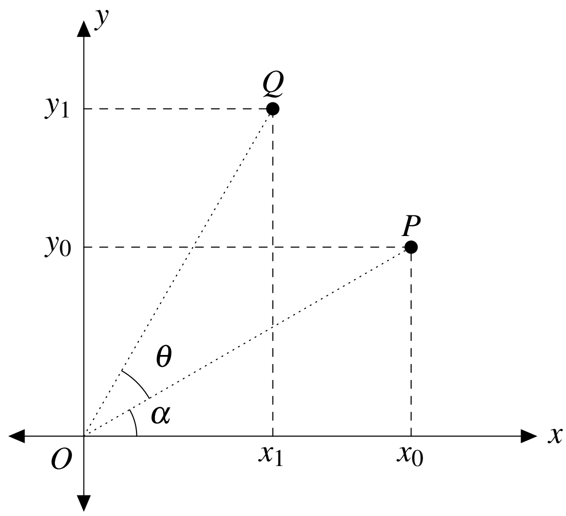


**Figura 10: Rotação do ponto $P$.**

$$\begin{cases} x_0 = r\cos(\alpha) \\ y_0 = r\operatorname{sen}(\alpha) \\ x_1 = r\cos(\alpha + \theta) \\ y_1 = r\operatorname{sen}(\alpha + \theta), \end{cases}$$

onde $r$ é o comprimento do segmento $OP$. Usando as identidades trigonométricas

$$\begin{cases} \cos(\alpha + \theta) = \cos(\alpha)\cos(\theta) - \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\alpha + \theta) = \cos(\alpha)\operatorname{sen}(\theta) + \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\theta), \end{cases}$$

temos

$$\begin{cases} x_1 = r\cos(\alpha)\cos(\theta) - r\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\theta) \\ y_1 = r\cos(\alpha)\operatorname{sen}(\theta) + r\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\theta). \end{cases} \tag{18}$$

Substituindo $r\cos(\alpha) = x_0$ e $r\,\mathrm{sen}(\alpha) = y_0$ em (18), concluímos que

$$\begin{cases} x_1 = x_0\cos(\theta) - y_0\,\mathrm{sen}(\theta) \\ y_1 = x_0\,\mathrm{sen}(\theta) + y_0\cos(\theta). \end{cases}$$

Escrevendo na forma matricial, vemos que

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta) \\ \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}.$$

Portanto, $R_{O,\theta}(P) = Q$ pode ser representado como

$$[R_{O,\theta}] \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta) \\ \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix},$$

Além disso, podemos concluir da Proposição 3.6 que a rotação em torno da origem é uma transformação ortogonal. $\square$

**Proposição 3.27.** Seja $R_{O,\theta} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a aplicação rotação em torno da origem por um ângulo $\theta \in [0, 2\pi)$. Então, $R_{O,\theta}$ é uma isometria.

**Demonstração.** Sejam $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ pontos do plano, e $R_{O,\theta} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma rotação em torno da origem, queremos provar que

$$d(A,B) = d(R_{O,\theta}(A), R_{O,\theta}(B)).$$

Para tal é suficiente mostrarmos que

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = (d(R_{O,\theta}(A), R_{O,\theta}(B)))^2.$$

Denotando $R_{O,\theta}(A) = (\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ e $R_{O,\theta}(B) = (\bar{x}_2, \bar{y}_2)$ e utilizando a Proposição 3.26, temos

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{y}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta) \\ \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_2 \\ \bar{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta) \\ \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

Além disso,

$$(d(R_\theta(A), R_\theta(B)))^2 = (\bar{x}_1 - \bar{x}_2)^2 + (\bar{y}_1 - \bar{y}_2)^2,$$

com

$$
\begin{aligned}
(\bar{x}_1-\bar{x}_2)^2 &= (x_1\cos(\theta)-y_1\,\mathrm{sen}(\theta)-x_2\cos(\theta)+y_2\,\mathrm{sen}(\theta))^2\\
&= ((x_1-x_2)\cos(\theta)-(y_1-y_2)\,\mathrm{sen}(\theta))^2\\
&= (x_1-x_2)^2\cos^2(\theta)-2(x_1-x_2)(y_1-y_2)\,\mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta)+(y_1-y_2)\,\mathrm{sen}^2(\theta)
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
(\bar{y}_1-\bar{y}_2)^2 &= (x_1\,\mathrm{sen}(\theta)+y_1\cos(\theta)-x_2\,\mathrm{sen}(\theta)-y_2\cos(\theta))^2\\
&= ((x_1-x_2)\,\mathrm{sen}(\theta)+(y_1-y_2)\cos(\theta))^2\\
&= (x_1-x_2)^2\,\mathrm{sen}^2(\theta)+2(x_1-x_2)(y_1-y_2)\,\mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta)+(y_1-y_2)\cos^2(\theta).
\end{aligned}
$$

Finalmente, concluímos que

$$
\begin{aligned}
(\bar{x}_1-\bar{x}_2)^2+(\bar{y}_1-\bar{y}_2)^2 &= ((x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2)\,\mathrm{sen}^2(\theta)+((x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2)\cos^2(\theta)\\
&= ((x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2)(\,\mathrm{sen}^2(\theta)+\cos^2(\theta))\\
&= (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2,
\end{aligned}
$$

ou seja, $(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=(d(R_{O,\theta}(A),R_{O,\theta}(B)))^2$. $\square$

**Proposição 3.28.** Sejam $C=(x_0,y_0)$, $P=(x_1,y_1)$ pontos do plano e $\theta\in[0,2\pi)$ um ângulo. Então a rotação de $P$ em torno de $C$ pelo ângulo $\theta$, $R_{C,\theta}(P)=Q$, é dada por

$$
\begin{bmatrix} x_2\\ y_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos(\theta) & -\,\mathrm{sen}(\theta)\\ \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta)\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x_1-x_0\\ y_1-y_0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} x_0\\ y_0\end{bmatrix}.
$$

**Demonstração.** Considere $\alpha\in[0,2\pi)$ o ângulo orientado de sentido anti-horário que o eixo $x$ faz com a reta que contém o segmento $CP$. Denotando $Q=(x_2,y_2)$ podemos escrever

$$
\begin{cases}
x_1 = r\cos(\alpha)+x_0\\
y_1 = r\,\mathrm{sen}(\alpha)+y_0\\
x_2 = r\cos(\alpha+\theta)+x_0\\
y_2 = r\,\mathrm{sen}(\alpha+\theta)+y_0,
\end{cases}
$$

onde $r$ é o comprimento do segmento $CP$. Usando as identidades trigonométricas

$$
\begin{cases}
\cos(\alpha+\theta)=\cos(\alpha)\cos(\theta)-\,\mathrm{sen}(\alpha)\,\mathrm{sen}(\theta)\\
\mathrm{sen}(\alpha+\theta)=\cos(\alpha)\,\mathrm{sen}(\theta)+\,\mathrm{sen}(\alpha)\cos(\theta),
\end{cases}
$$

obtemos

$$\begin{cases} x_2 = r\cos(\alpha)\cos(\theta) - r\,\mathrm{sen}(\alpha)\,\mathrm{sen}(\theta) + x_0 \\ y_2 = r\cos(\alpha)\,\mathrm{sen}(\theta) + r\,\mathrm{sen}(\alpha)\cos(\theta) + y_0. \end{cases} \tag{19}$$

Substituindo $x_1 - x_0 = r\cos(\alpha)$ e $y_1 - y_0 = r\,\mathrm{sen}(\alpha)$ em (19), encontramos

$$\begin{cases} x_2 = (x_1 - x_0)\cos(\theta) - (y_1 - y_0)\,\mathrm{sen}(\theta) + x_0 \\ y_2 = (x_1 - x_0)\,\mathrm{sen}(\theta) + (y_1 - y_0)\cos(\theta) + y_0. \end{cases}$$

Portanto, escrevendo na forma matricial, vemos que

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\,\mathrm{sen}(\theta) \\ \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}.$$

□

**Proposição 3.29.** Seja $R_{C,\theta} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a aplicação rotação em torno do ponto $C$ por um ângulo $\theta \in [0, 2\pi)$. Então $R_{C,\theta}$ é uma isometria.

**Demonstração.** De fato, temos pela Proposição 3.28, que a rotação $R_{C,\theta}$ é a composição de uma translação com uma rotação em torno da origem pelo ângulo $\theta$ seguida de outra composição com translação. Em outras palavras $R_{C,\theta}$ é a composição de isometrias. Portanto, como a composta de isometrias é uma isometria, ver Proposição 3.12, temos que $R_{C,\theta}$ é uma isometria.

□

## 3.4 ISOMETRIA LINEAR

Nesta seção, veremos que as isometrias no plano podem ser caracterizadas por transformações obtidas através da composição de uma translação com uma transformação ortogonal. Como aplicação caracterizaremos geometricamente o conjunto de pontos $(x, y)$ que são soluções de equações quadráticas da forma

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \text{ onde } A, B, C, D, E, F \in \mathbb{R}.$$

**Definição 3.30.** Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma isometria. Dizemos que $f$ é uma **isometria linear** se $f$ for uma transformação linear.

Apresentaremos a seguir as propriedades de isometrias no plano que fixam a origem, o que nos possibilitará relacionarmos isometrias com transformações lineares.

**Proposição 3.31.** Toda isometria que fixa a origem fixa a norma dos elementos.

**Demonstração.** Seja $P \in \mathbb{R}^2$ e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma isometria que fixa a origem, ou seja $f(0,0) = (0,0)$. Assim, $||f(P)|| = ||f(P) - (0,0)|| = ||f(P) - f(0,0)|| = ||P - (0,0)|| = ||P||$. $\square$

**Proposição 3.32.** Seja $P, Q \in \mathbb{R}^2$ e $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma isometria que fixa a origem. Então $f$ fixa o ângulo entre os elementos $P$ e $Q$.

**Demonstração.** Sejam $P, Q \in \mathbb{R}^2$, temos que a distância entre $P, Q \in \mathbb{R}^2$ é dada pelo comprimento do elemento $(P - Q) \in \mathbb{R}^2$. Desta forma, pela Lei dos Cossenos temos: $\|P - Q\|^2 = \|P\|^2 + |Q\|^2 - 2\|P\|\|Q\| \cos\theta$, onde $\theta$ é o ângulo entre os vetores $P$ e $Q$.
Além disso, pela definição de isometria, temos:

$$
\begin{aligned}
& \|P - Q\|^2 = \|P\|^2 + |Q\|^2 - 2\|P\|\|Q\| \cos\theta \\
\Rightarrow\ & d(P,Q)^2 = d(P,0)^2 + d(Q,0)^2 - 2d(P,0)d(Q,0)\cos\theta \\
\Rightarrow\ & d(f(P), f(Q))^2 = d(f(P), f(0))^2 + d(f(Q), f(0))^2 - 2d(f(P), f(0))d(f(Q), f(0))\cos\theta.
\end{aligned}
$$

Como $f$ fixa a origem temos

$$
\begin{aligned}
& d(f(P), f(Q))^2 = d(f(P), f(0))^2 + d(f(Q), f(0))^2 - 2d(f(P), f(0))d(f(Q), f(0))\cos\theta \\
\Rightarrow\ & d(f(P), f(Q))^2 = d(f(P),0)^2 + d(f(Q),0)^2 - 2d(f(P),0)d(f(Q),0)\cos\theta \\
\Rightarrow\ & \|f(P) - f(Q)\|^2 = \|f(P)\|^2 + \|f(Q)\|^2 - 2\|f(P)\|\|f(Q)\|\cos\theta.
\end{aligned}
$$

Em particular, como $\theta$ é o ângulo entre $u$ e $v$, então o ângulo entre $f(u)$ e $f(v)$ também é $\theta$. $\square$

**Proposição 3.33.** Sejam $P, Q \in \mathbb{R}^2$ e $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma isometria que fixa a origem. Então $f$ fixa o produto escalar dos elementos $P$ e $Q$.

**Demonstração.** Sejam $P, Q \in \mathbb{R}^2$. Como $f$ é uma isometria que fixa a origem, pela Proposição 3.31, $||f(P)|| = ||Q||$. Assim, pela Proposição 2.43 temos que

$$\langle P, Q \rangle = \|P\|\|Q\| \cos\theta = \|f(P)\|\|f(Q)\| \cos\theta = \langle f(P), f(Q) \rangle.$$

$\square$

Sabendo que as isometrias que fixam a origem também fixam a norma, o ângulo e o produto escalar, apresentaremos a seguinte proposição que relaciona transformação linear a estas isometrias.

**Proposição 3.34.** Sejam $P, Q \in \mathbb{R}^2$ e $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma isometria que fixa a origem. Então $f$ é uma isometria linear.

**Demonstração.** Sejam $\lambda \in \mathbb{R}$, $P,Q \in \mathbb{R}^2$ e $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma isometria que fixa a origem. Por um lado, note que

$$\begin{aligned}
\|T(P+Q)-T(P)-T(Q)\|^2 &= \|T(P+Q)\|^2+\|T(P)\|^2+\|T(Q)\|^2+2\langle T(P),T(Q)\rangle \\
&\quad -2\langle T(P),T(P+Q)\rangle-2\langle T(Q),T(P+Q)\rangle \\
&= \|P+Q\|^2+\|P\|^2+\|Q\|^2+2\langle P,Q\rangle-2\langle P,P+Q\rangle-2\langle Q,P+Q\rangle \\
&= ||P+Q||^2+||P+Q||^2-2(\langle P,P+Q\rangle+2\langle Q,P+Q\rangle) \\
&= 2||P+Q||^2-2(||P||^2+2\langle P,Q\rangle+||Q||^2) \\
&= 2||P+Q||^2-2||P+Q||^2 \\
&= 0,
\end{aligned}$$

ou seja, $T(P+Q)-T(P)-T(Q)=0$. Por outro lado

$$\begin{aligned}
||T(\lambda Q)-\lambda T(Q)||^2 &= \langle T(\lambda Q)-\lambda T(Q),T(\lambda Q)-\lambda T(Q)\rangle \\
&= \langle T(\lambda Q),T(\lambda Q)\rangle+\langle T(\lambda Q),-\lambda T(Q)\rangle \\
&\quad +\langle -\lambda T(Q),T(\lambda Q)\rangle+\langle -\lambda T(Q),-\lambda T(Q)\rangle \\
&= \langle T(\lambda Q),T(\lambda Q)\rangle-\lambda\langle T(\lambda Q),T(Q)\rangle \\
&\quad -\lambda\langle T(Q),T(\lambda Q)\rangle+\lambda^2\langle T(Q),T(Q)\rangle \\
&= \langle T(\lambda Q),T(\lambda Q)\rangle-2\lambda\langle T(\lambda Q),T(Q)\rangle+\lambda^2\langle T(Q),T(Q)\rangle \\
&= \langle \lambda Q,\lambda Q\rangle-2\lambda\langle \lambda Q,Q\rangle+\lambda^2\langle Q,Q\rangle \\
&= \lambda^2\langle Q,Q\rangle-2\lambda^2\langle Q,Q\rangle+\lambda^2\langle Q,Q\rangle \\
&= 0,
\end{aligned}$$

ou seja, $T(\lambda Q)-\lambda T(Q)=0$. Logo

$$T(P+Q)=T(P)+T(Q) \quad \text{e} \quad T(\lambda Q)=\lambda T(Q).$$

Portanto, toda isometria $T$ que fixa a origem é uma isometria linear. □

**Proposição 3.35.** Seja $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma isometria, e $w \in \mathbb{R}^2$ tal que $f(0)=w$, então $g:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $g(v)=f(v)-w$ é uma isometria linear.

**Demonstração.** Note que $g(0)=f(0)-w=w-w=0$ e $g(v)=(h\circ f)(v)$, onde $h:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é a translação $h(u)=u-w$. Além disso, segue da Proposição 3.16, que $h$ é uma isometria. Como a composta de isometrias é isometria, ver Proposição 3.12 temos que $g$ é isometria. Portanto utilizando a Proposição 3.34, concluímos que $g$ é uma isometria linear. □

**Proposição 3.36.** Se $f$ é uma isometria de $\mathbb{R}^2$, então existe uma isometria linear $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ e $w \in \mathbb{R}^2$, tal que $f(v) = T(v) + w$.

**Demonstração.** Seja $w = f(0)$ e considere $T(v) = f(v) - w$. Pela Proposição 3.35, $T$ é uma isometria linear. Logo $f(v) = f(v) - w + w = T(v) + w$. □

Para mostrarmos que toda isometria linear é uma transformação ortogonal apresentaremos o seguinte resultado.

**Proposição 3.37.** Seja $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a isometria linear definida por $T(x,y) = (ax+by, cx+dy)$ e representada matricialmente por

$$A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{bmatrix},$$

onde $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, a,b,c,d \in \mathbb{R}$. Então,

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{bmatrix},$$

para algum $\theta \in [0, 2\pi)$.

**Demonstração.** Como $d((0,0),(0,1)) = 1$ e $T$ é isometria, temos $1 = d((0,0),(0,1))^2 = d(T(0,0),T(0,1))^2 = d((0,0),(b,d))^2 = b^2 + d^2$, ou seja

$$b^2 + d^2 = 1. \tag{20}$$

Similarmente, como $d((0,0),(1,0)) = 1$, temos $1 = d((0,0),(1,0))^2 = d(T(0,0),T(1,0))^2 = d((0,0),(a,c))^2 = a^2 + c^2$, ou seja

$$a^2 + c^2 = 1. \tag{21}$$

Por outro lado, se usarmos a Proposição 3.33 e o fato de que $\langle (1,0),(0,1) \rangle = 0$, obtemos $0 = \langle (1,0),(0,1) \rangle = \langle T(1,0), T(0,1) \rangle = \langle (a,c),(b,d) \rangle = ab + cd$, ou seja

$$ab + dc = 0. \tag{22}$$

Pela proposição 3.5, e igualdades (20) e (21), existem $\theta, \beta \in [0, 2\pi)$, tais que

$$\begin{cases} b = \cos\beta \\ d = \operatorname{sen}\beta \\ a = \cos\theta \\ c = \operatorname{sen}\theta. \end{cases} \tag{23}$$

Por (22) e (23), obtemos $\cos(\beta - \theta) = \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\theta + \cos\beta\cos\theta = 0$, ou seja

$$\beta - \theta = \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\beta &= \operatorname{sen}(\theta + \frac{\pi}{2} + k\pi) \\ &= \operatorname{sen}\theta \cos(\frac{\pi}{2} + k\pi) + \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} + k\pi)\cos\theta \\ &= \begin{cases} \cos\theta, & \text{se k é par} \\ -\cos\theta, & \text{se k é impar} \end{cases} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \cos\beta &= \cos(\theta + \frac{\pi}{2} + k\pi) \\ &= \cos\theta\cos(\frac{\pi}{2} + k\pi) - \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} + k\pi) \\ &= \begin{cases} -\operatorname{sen}\theta, & \text{se k é par} \\ \operatorname{sen}\theta, & \text{se k é impar.} \end{cases} \end{aligned}$$

□

**Proposição 3.38.** Toda isometria linear é uma transformação ortogonal.

**Demonstração.** Segue das Proposições 3.37 e 3.6.

Finalmente caracterizaremos as isometria como a composição de uma translação com uma transformação linear ortogonal.

**Teorema 3.39.** *Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma isometria. Então $f$ é a composição de uma translação com uma transformação ortogonal.*

**Demonstração.** Pela Proposição 3.36, existe uma isometria linear $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ e $w \in \mathbb{R}^2$, tal que $f(v) = T(v) + w$. Por outro lado, como $T$ é uma isometria linear, segue da Proposição 3.38, que $T$ é uma transformação ortogonal. Portanto, denotando por $S$ a translação $S(u) = u + w$, vemos que

$$f(v) = T(v) + w = S(T(v)) = (S \circ T)(v).$$

□

## 3.5 IDENTIFICAÇÃO DAS CÔNICAS

Nesta seção identificaremos as cônicas representadas pela equação da forma $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, utilizando para isso isometrias. Chamamos de cônicas as curvas obtidas na intersecção de um plano com um cone.

**Definição 3.40.** Sejam $F_1$ e $F_2$, pontos distintos do plano, com $d(F_1, F_2) = 2c$ e $a \in \mathbb{R}$, tal que $a > c$. A elípse $\mathscr{E}$ é o conjunto de pontos $P$ do plano, tais que a soma das distâncias de P a $F_1$ e $F_2$, que chamamos de focos, é constante igual a $2a$, ou seja,

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a. \tag{24}$$

**Proposição 3.41.** A forma canônica da elípse $\mathscr{E}$ de focos $F_1$ e $F_2$ e eixo maior medindo $2a$ é dada por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{25}$$

caso $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$, veja Figura 11 e

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1, \tag{26}$$

caso $F_1 = (0, -c)$ e $F_2 = (0, c)$, veja Figura 12. Em ambos os casos $b^2 = a^2 - c^2$.

**Demonstração.** Veja Muniz Neto (2013).

**Definição 3.42.** Sejam $F_1$ e $F_2$, pontos distintos do plano, com $d(F_1, F_2) = 2c$ e $a \in \mathbb{R}$, tal que $0 < a < c$. A hipérbole $\mathscr{H}$ é o conjunto de pontos $P$ do plano, tal que o módulo da diferença das distâncias de P a $F_1$ e de P a $F_2$, que chamamos de focos, é constante igual a $2a$, ou seja

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a. \tag{27}$$

**Proposição 3.43.** A forma canônica da hipérbole $\mathscr{H}$ com focos $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$, veja Figura 13, é dada por

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{28}$$

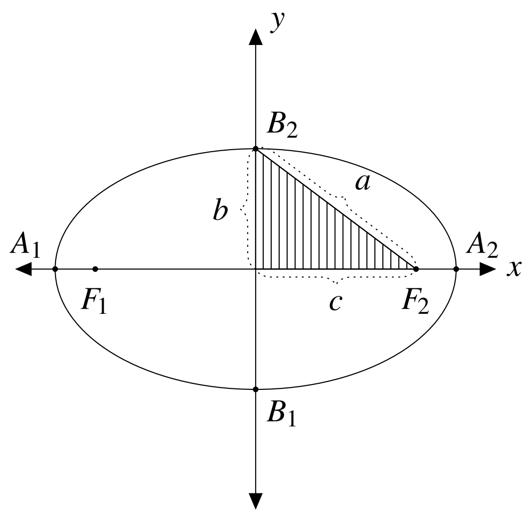


**Figura 11: Elipse com focos nos pontos** $F_1 = (-c,0)$ **e** $F_2 = (c,0)$.

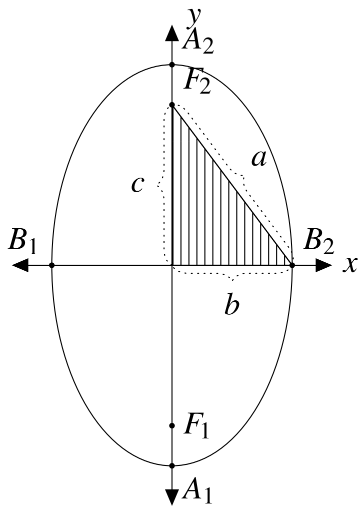


**Figura 12: Elipse com focos nos pontos** $F_1 = (0,-c)$ **e** $F_2 = (0,c)$.

Caso $F_1 = (0,-c)$ e $F_2 = (0,c)$, veja Figura 14, então a forma canônica de $\mathscr{H}$ é dada por

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{29}$$

Em ambos os casos $b^2 = c^2 - a^2$.

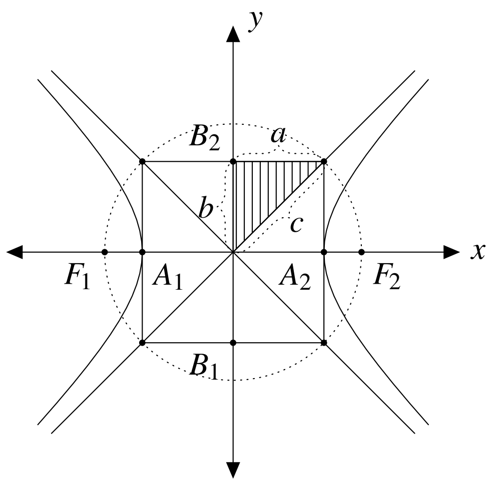


**Figura 13: Hipérbole com focos nos pontos** $F_1 = (-c,0)$ **e** $F_2 = (c,0)$.

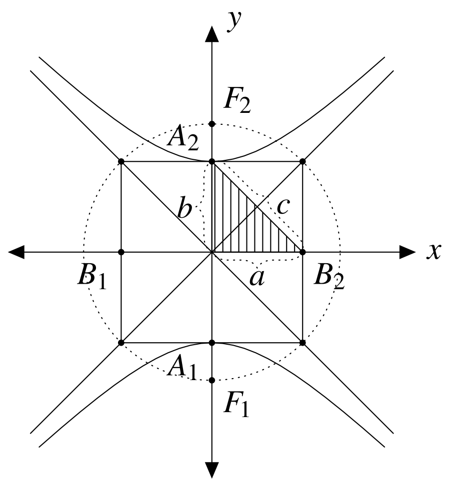


**Figura 14: Hipérbole com focos nos pontos** $F_1 = (0,-c)$ **e** $F_2 = (0,c)$.

**Demonstração.** Veja Muniz Neto (2013).

**Definição 3.44.** Sejam $r$ uma reta e $F$ um ponto no plano, tal que $F \notin r$. A parábola $\mathscr{P}$ é o conjunto de pontos P do plano equidistantes de $r$ e $F$, ou seja,

$$d(P,d) = d(P,F). \tag{30}$$

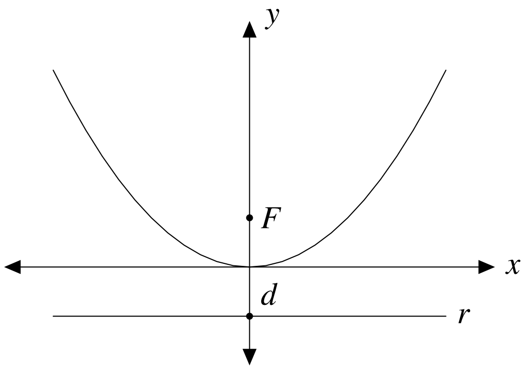


**Figura 15: Parábola com foco no ponto $F = (0,p)$ com $p > 0$.**

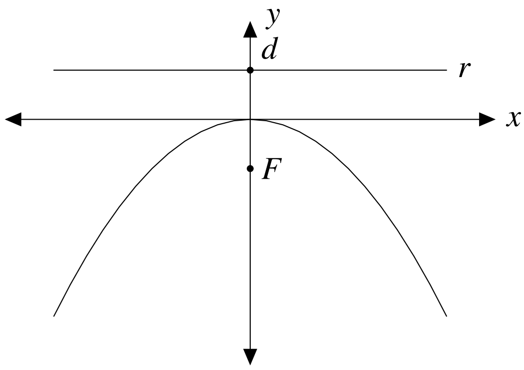


**Figura 16: Parábola com foco no ponto $F = (0,p)$ com $p < 0$.**

A reta $r$ e o ponto $F$ são chamados de diretriz e foco, respectivamente.

**Proposição 3.45.** A forma canônica da parábola $\mathscr{P}$, de foco $F = (0,p)$, e reta diretriz $y = -p$, com $p \neq 0$, veja Figura 15 e 16, é dada por

$$y^2 = -4px. \tag{31}$$

**Demonstração.** Veja Muniz Neto (2013).

**Proposição 3.46.** O conjunto $S$ dos pontos $(x,y)$ que satisfazem a equação quadrática

$$Ax^2 + F = 0, \tag{32}$$

onde $A \neq 0$ é dado por:

(i) Um par de retas paralelas ao eixo $OY$, se $AF < 0$;

(ii) Uma reta coincidente com o eixo $OY$, se $F = 0$;

(iii) O conjunto vazio, se $AF > 0$.

**Demonstração.** Como $A \neq 0$, dividindo a equação (32) por $A$, temos

$$x^2 = -\frac{F}{A}. \tag{33}$$

Se $F = 0$, temos que a equação (33) representa a reta $x = 0$.
Se $AF > 0$, temos que a equação (33) representa o conjunto vazio, pois $-\frac{F}{A} < 0$ enquanto que $x^2 \geq 0$.
Se $AF < 0$, temos que a equação (33) representa as retas

$$x = \pm\sqrt{-\frac{F}{A}},$$

que são paralelas ao eixo $OY$. □

**Proposição 3.47.** O conjunto $S$ dos pontos $(x,y)$ que satisfazem a equação quadrática

$$Cy^2 + F = 0, \tag{34}$$

onde $C \neq 0$ é dado por:

(i) Um par de retas paralelas ao eixo $OX$, se $CF < 0$;

(ii) Uma reta coincidente com o eixo $OX$, se $AF = 0$;

(iii) O conjunto vazio, se $AF > 0$.

**Demonstração.** A demonstração se faz de forma análoga à demonstração da Proposição 3.46. □

**Proposição 3.48.** O conjunto $S$ dos pontos $(x,y)$ que satisfazem a equação quadrática

$$Ax^2 + Dx + F = 0, \tag{35}$$

com $A \neq 0$ é dado por:

(i) Um par de retas paralelas ao eixo $OY$, se $D^2 - 4AF > 0$;

(ii) Uma reta paralela ao eixo $OY$, se $D^2 - 4AF = 0$;

(iii) O conjunto vazio, se $D^2 - 4AF < 0$.

**Demonstração.** Resolvendo a equação (35), obtemos

$$x = \frac{-D \pm \sqrt{D^2 - 4AF}}{2A}. \tag{36}$$

Portanto $S$ representa os seguintes conjuntos:
As retas

$$x_1 = \frac{-D + \sqrt{D^2 - 4AF}}{2A} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-D - \sqrt{D^2 - 4AF}}{2A},$$

se $D^2 - 4AF > 0$.
A reta

$$x = \frac{-D}{2A},$$

se $D^2 - 4AF = 0$.
O conjunto vazio, se $D^2 - 4AF < 0$. □

**Proposição 3.49.** O conjunto $S$ dos pontos $(x,y)$ que satisfazem a equação quadrática

$$Cy^2+Ey+F=0, \tag{37}$$

onde $C\neq 0$ é dado por:

(i) Um par de retas paralelas ao eixo $OX$, se $E^2-CF>0$;

(ii) Uma reta paralela ao eixo $OX$, se $E^2-CF=0$;

(iii) O conjunto vazio, se $E^2-CF<0$.

**Demonstração.** Análoga a demonstração da Proposição 3.48. □

Veremos agora cônicas cujas equações dependem das duas variáveis, contudo sendo apenas uma delas de ordem 2.

**Proposição 3.50.** O conjunto $S$ dos pontos $(x,y)$ que satisfazem a equação quadrática

$$Ax^2+Dx+Ey+F=0, \tag{38}$$

com $AE\neq 0$ é dado por uma parábola.

**Demonstração.** Como $A\neq 0$ podemos dividir a equação (38) por $A$, ou seja

$$x^2+\frac{D}{A}x+\frac{E}{A}y+\frac{F}{A}=0.$$

Completando quadrados, obtemos

$$\begin{aligned}
\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2 &= -\frac{E}{A}y-\frac{F}{A}+\frac{D^2}{4A^2}\\
\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2 &= -\frac{E}{A}\left(y+\frac{A}{E}\left(\frac{F}{A}-\frac{D^2}{4A^2}\right)\right)\\
\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2 &= -4\left(\frac{E}{4A}\right)\left(y+\frac{A}{E}\left(\frac{F}{A}-\frac{D^2}{4A^2}\right)\right),
\end{aligned}$$

ou seja, (38) representa a equação de uma parábola. □

**Proposição 3.51.** O conjunto $S$ dos pontos $(x,y)$ que satisfazem a equação quadrática

$$Cy^2+Dx+Ey+F=0, \tag{39}$$

onde $CD\neq 0$ é dado por uma parábola.

**Demonstração.** Análoga a demonstração da Proposição 3.50. □

**Proposição 3.52.** O conjunto $S$ dos pontos $(x,y)$ que satisfazem a equação quadrática

$$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0, \tag{40}$$

com $AC\neq 0$ é dado por:

(i) Uma elípse, se $AC>0$ e $M>0$;

(ii) Um ponto, se $AC>0$ e $M=0$;

(iii) O conjunto vazio, se $AC>0$ e $M<0$;

(iv) Uma hipérbole, se $AC<0$ e $M\neq 0$;

(v) Um par de retas concorrentes, se $AC<0$ e $M=0$.

Onde

$$M=\frac{-4ACF+CD^2+AE^2}{4AC}.$$

**Demonstração.** Como $AC\neq 0$, completando quadrados na equação (40), temos

$$A\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2+C\left(y+\frac{E}{2C}\right)^2=-F+\frac{D^2}{4A}+\frac{E^2}{4C},$$

ou seja,

$$A\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2+C\left(y+\frac{E}{2C}\right)^2=M, \tag{41}$$

onde $M=\dfrac{-4ACF+CD^2+AE^2}{4AC}$. Aplicando a translação

$$\begin{bmatrix} X\\ Y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x\\ y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \frac{D}{2A}\\ \frac{E}{2C}\end{bmatrix} \tag{42}$$

em (41), obtemos

$$AX^2+CY^2=M. \tag{43}$$

Analisaremos os dois casos possíveis para M:

**Caso 1.** $M=0$.

Se $AC>0$ e $M=0$, a equação (43) implica que $X=Y=0$. Logo, de (42) temos que $x=-\dfrac{D}{2A}$ e $y=-\dfrac{E}{2C}$, ou seja, a equação (40) representa o ponto $P=\left(-\dfrac{D}{2A},-\dfrac{E}{2C}\right)$.

Agora, se $AC<0$ e $M=0$, a equação (43) representa as retas concorrentes

$$Y=\pm\sqrt{-\frac{A}{C}}X.$$

Assim, de (42) a equação (40) representa as retas concorrentes

$$y = \pm\sqrt{-\frac{A}{C}}\left(x + \frac{D}{2A}\right) - \frac{E}{2C}.$$

**Caso 2.** $M \neq 0$.
Neste caso podemos escrever a equação (43) da seguinte forma

$$\frac{X^2}{\left(\frac{M}{A}\right)} + \frac{Y^2}{\left(\frac{M}{C}\right)} = 1. \tag{44}$$

Se $AC > 0$ e $MA > 0$, podemos considerar $a = \sqrt{\frac{M}{A}}$ e $b = \sqrt{\frac{M}{C}}$ na equação (44) e obter assim a elípse

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1.$$

Logo, a equação (40) representa uma elipse centrada em $P = \left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2C}\right)$.
Se $AC > 0$ e $MA < 0$, a equação (44) representa o conjunto vazio, pois $\frac{M}{A} < 0$ e $\frac{M}{C} < 0$. Logo a equação (40) também representa o conjunto vazio.
Se $AC < 0$ e $MA > 0$, podemos considerar $a = \sqrt{\frac{M}{A}}$ e $b = -\sqrt{-\frac{M}{C}}$ na equação (44), de onde obtemos a hipérbole

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1.$$

Neste caso, (40) representa uma hipérbole de centro $P = \left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2C}\right)$ e abertura leste-oeste.
Finalmente, se $AC < 0$ e $MA < 0$, podemos considerar $a = -\sqrt{-\frac{M}{A}}$ e $b = \sqrt{\frac{M}{C}}$ na equação (44), de onde obtemos a hipérbole

$$-\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1.$$

Aqui, (40) representa a hipérbole de centro $P = \left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2C}\right)$ e abertura norte-sul. □

**Proposição 3.53.** O conjunto $S$ dos pontos $(x, y)$ que satisfazem a equação quadrática

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \tag{45}$$

com $B \neq 0$ é dado por:

(i) Uma elípse;

(ii) Uma hipérbole;

(iii) Uma parábola;

(iv) Um ponto;

(v) Uma reta;

(vi) Um par de retas paralelas;

(vii) Um par de retas concorrentes;

(viii) O conjunto vazio.

**Demonstração.** Aplicaremos uma rotação $R_\theta : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ na curva representada pela equação (45) de modo a obtermos uma nova equação que não contenha o termo misto.

Temos que

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = R_\theta\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos(\theta) - y\operatorname{sen}(\theta) \\ x\operatorname{sen}(\theta) + y\cos(\theta) \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$\begin{cases} X = x\cos(\theta) - y\operatorname{sen}(\theta) \\ Y = x\operatorname{sen}(\theta) + y\cos(\theta). \end{cases} \tag{46}$$

Resolvendo o sistema (46) em $x$ e $y$, obtemos

$$\begin{cases} x = X\cos(\theta) + Y\operatorname{sen}(\theta) \\ y = -X\operatorname{sen}(\theta) + Y\cos(\theta). \end{cases} \tag{47}$$

Substituindo (47) em (45),

$$\begin{aligned} &AX^2\cos^2(\theta) + 2AXY\cos(\theta)\operatorname{sen}(\theta) + AY^2\operatorname{sen}^2(\theta) \\ &-2BX^2\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta) + 2BXY(\cos^2(\theta) - \operatorname{sen}^2(\theta)) + 2BY^2\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta) \\ &+CX^2\operatorname{sen}^2(\theta) - 2CXY\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta) + CY^2\cos^2(\theta) \\ &+DX\cos(\theta) + DY\operatorname{sen}(\theta) - EX\operatorname{sen}(\theta) + EY\cos(\theta) + F, \end{aligned}$$

e utilizando as identidades trigonométricas

$$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}(2\theta) = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta,$$

$$
\begin{aligned}
&X^2(A\cos^2(\theta)-2B\,\mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta)+C\,\mathrm{sen}^2(\theta))\\
&+XY((A-C)\,\mathrm{sen}(2\theta)+2B\cos(2\theta))\\
&+Y^2(A\,\mathrm{sen}^2(\theta)+2B\,\mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta)+C\cos^2(\theta))\\
&+X(D\cos(\theta)-E\,\mathrm{sen}(\theta))\\
&+Y(D\,\mathrm{sen}(\theta)+E\cos(\theta))\\
&+F.
\end{aligned}
$$

Assim, obtemos

$$\tilde{A}X^2+2\tilde{B}XY+\tilde{C}Y^2+\tilde{D}X+\tilde{E}Y+\tilde{F}=0, \tag{48}$$

com

$$
\begin{aligned}
\tilde{A} &= A\cos^2(\theta)-2B\,\mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta)+C\,\mathrm{sen}^2(\theta)\\
2\tilde{B} &= (A-C)\,\mathrm{sen}(2\theta)+2B\cos(2\theta)\\
\tilde{C} &= A\,\mathrm{sen}^2(\theta)+2B\,\mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta)+C\cos^2(\theta)\\
\tilde{D} &= D\cos(\theta)-E\,\mathrm{sen}(\theta)\\
\tilde{E} &= D\,\mathrm{sen}(\theta)+E\cos(\theta)\\
\tilde{F} &= F.
\end{aligned}
$$

Queremos encontrar um ângulo $\theta$ de forma que a rotação efetuada torne $\tilde{B}=0$, ou seja,

$$(A-C)\,\mathrm{sen}(2\theta)+2B\cos(2\theta)=0. \tag{49}$$

Assim, como $B\neq 0$, basta tomar um ângulo $\theta_0$, tal que

$$\mathrm{cotg}(2\theta_0)=\frac{C-A}{2B}. \tag{50}$$

Portanto, para este ângulo $\theta_0$, teremos

$$\tilde{A}X^2+\tilde{C}Y^2+\tilde{D}X+\tilde{E}Y+\tilde{F}=0. \tag{51}$$

Pelas Proposições 3.46, 3.47, 3.48, 3.49, 3.50, 3.51 e 3.52, o conjunto $\tilde{S}$ dos pontos $(X,Y)$ que satisfazem a equação (51) representa um dos seguintes conjuntos: uma elípse, uma hipérbole, uma parábola, um ponto, uma reta, um par de retas paralelas, um par de retas concorrentes, ou o conjunto vazio. Portanto, como $R_\theta$ é uma isometria, o conjunto $S$ dos pontos $(x,y)$ que satisfazem a equação

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

representa o mesmo conjunto a menos de isometria. $\square$

# 4 SEMELHANÇA DE MATRIZES E DIAGONALIZAÇÃO

Neste capítulo, apresentaremos o conceito de matrizes semelhantes de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ e como aplicação, classificaremos as matrizes de ordem $2 \times 2$ diagonalizáveis sem utilizarmos o conceito de autovetores. Apresentaremos o cálculo de potência de matrizes, e resolveremos recorrências lineares de segunda ordem.

## 4.1 MATRIZES SEMELHANTES

Nesta seção apresentaremos o conceito de matrizes semelhantes e suas principais propriedades. Veremos que matrizes semelhantes formam uma relação de equivalência.

**Definição 4.1.** Sejam $A$ uma matriz de ordem $2 \times 2$. O polinômio

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I),$$

onde $I$ é a matriz identidade, é chamado de **polinômio característico** de $A$. Além disso, as raízes do polinômio característico de $A$ são chamadas de **autovalores** de $A$.

**Definição 4.2.** Sejam $A$ e $B$, matrizes de ordem $2 \times 2$. Dizemos que $A$ é **semelhante** a $B$, e denotaremos $A \sim B$, se existir $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ invertível, tal que

$$B = M^{-1}AM.$$

**Proposição 4.3.** Sejam $A$, $B$ e $C$ matrizes em $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. A relação de semelhança de matrizes é uma relação de equivalência, ou seja, satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $A \sim A$ (propriedade reflexiva);

(ii) Se $A \sim B$, então $B \sim A$ (propriedade simétrica);

(iii) Se $A \sim B$ e $B \sim C$, então $A \sim C$ (propriedade transitiva).

**Demonstração.**

$(i)$ *De fato, como* $A = I^{-1}AI$*, temos pela definição de matriz semelhante que* $A \sim A$*.*

$(ii)$ *Como* $A \sim B$*, temos pela definição que existe* $M$ *invertível tal que* $B = M^{-1}AM$*. Assim, denotando* $N = M^{-1}$*, temos que* $N$ *é invertível e multiplicando a igualdade* $B = M^{-1}AM$*, por* $N^{-1}$ *à esquerda e por* $N$ *à direita, obtemos*

$$N^{-1}BN = N^{-1}M^{-1}AMN = MM^{-1}AMM^{-1} = A,$$

*ou seja,* $B \sim A$*.*

$(iii)$ *Como* $A \sim B$ *e* $B \sim C$*, temos que existem matrizes invertíveis* $M$ *e* $N$*, tais que* $B = M^{-1}AM$ *e* $C = N^{-1}BN$*. Logo, considerando* $P = MN$*, temos por propriedades de multiplicação de matrizes e matrizes inversas que* $P$ *é invertível e* $P^{-1} = N^{-1}M^{-1}$*. Assim*

$$P^{-1}AP = N^{-1}M^{-1}AMN = N^{-1}BN = C,$$

*ou seja* $A \sim C$*.* □

**Proposição 4.4.** Sejam $A$ e $B$ matrizes em $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Assim

(i) se $A \sim B$, então $\det A = \det B$;

(ii) se $A \sim B$, então $A$ e $B$ possuem os mesmos autovalores.

**Demonstração.**

$(i)$ *Como* $A \sim B$*, existe uma matriz invertível* $M$ *tal que* $B = M^{-1}AM$*. Assim, utilizando as propriedades de determinantes, ver* Proposição 2.23*, temos*

$$\det B = \det(M^{-1}AM) = (\det M^{-1})(\det A)(\det M) = \left(\frac{1}{\det M}\right)(\det A)(\det M) = \det A.$$

□

$(ii)$ *Como* $A \sim B$*, existe* $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ *invertível tal que* $B = M^{-1}AM$*. Assim para* $\lambda \in \mathbb{R}$*, temos*

$$\begin{aligned} B - \lambda I &= M^{-1}AM - \lambda I \\ &= M^{-1}AM - \lambda M^{-1}M \\ &= M^{-1}(AM - \lambda M) \\ &= M^{-1}(AM - \lambda IM) \\ &= M^{-1}(A - \lambda I)M, \end{aligned}$$

*isto é,* $(A - \lambda I) \sim (B - \lambda I)$*. De sorte que, por (i), temos* $\det(A - \lambda I) = \det(B - \lambda I)$*. Portanto, pela definição de autovalor, A e B possuem os mesmos autovalores.* □

**Definição 4.5.** Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz quadrada de ordem $2 \times 2$. O **traço** de $A$, denotado por $\text{tr}(A)$, é definido por

$$\text{tr}(A) = a_{11} + a_{22}.$$

**Teorema 4.6.** *Sejam $A$ e $B$, duas matrizes de ordem $2 \times 2$. Se $A$ é semelhante a $B$, então* $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$

**Demonstração.** Como $A \sim B$, existe uma matriz invertível $M$, tal que $B = M^{-1}AM$. Considerando

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ e } M = \begin{bmatrix} x & y \\ w & z \end{bmatrix},$$

temos

$$\begin{aligned}
B &= \frac{1}{xz - yw} \cdot \begin{bmatrix} z & -y \\ -w & x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ w & z \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{xz - yw} \cdot \begin{bmatrix} az - cy & bz - dy \\ cx - aw & dx - bw \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ w & z \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{xz - yw} \cdot \begin{bmatrix} axz - cxy + bzw - dyw & ayz - cy^2 + bz^2 - dyz \\ cx^2 - axw + dxw - bw^2 & cxy - ayw + dxz - bzw \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \dfrac{axz - cxy + bzw - dyw}{xz - yw} & \dfrac{ayz - cy^2 + bz^2 - dyz}{xz - yw} \\ \dfrac{cx^2 - axw + dxw - bw^2}{xz - yw} & \dfrac{cxy - ayw + dxz - bzw}{xz - yw} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Logo, o traço de $B$ é dado por

$$\begin{aligned}
\text{tr}(B) &= \frac{axz - cxy + bzw - dyw}{xz - yw} + \frac{cxy - ayw + dxz - bzw}{xz - yw} \\
&= \frac{axz - cxy + bzw - dyw + cxy - ayw + dxz - bzw}{xz - yw} \\
&= \frac{axz - dyw - ayw + dxz}{xz - yw} = \frac{(a+d)xz - (a+d)yw}{xz - yw} \\
&= \frac{(a+d)(xz - yw)}{xz - yw} = (a+d) = \text{tr}(A),
\end{aligned}$$

ou seja, $\text{tr}(B) = \text{tr}(A)$, como queríamos. □

## 4.2 DIAGONALIZAÇÃO DE MATRIZES

Nesta seção, encontraremos sem utilizarmos o conceito de autovetores, condições necessárias e suficientes para que uma matriz 2 por 2 seja diagonalizável, bem como a matriz diagonal correspondente e a matriz conjugadora.

**Definição 4.7.** Seja $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ uma matriz. Dizemos que $A$ é diagonalizável, se existir uma matriz diagonal $D \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ tal que $A \sim D$, ou seja, se existir uma matriz diagonal $D$ tal que

$$D = M^{-1}AM$$

para alguma matriz invertível $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

**Exemplo 4.8.** Toda matriz diagonal é uma matriz diagonalizável.

Seja $A$ uma matriz diagonal, como $A = I^{-1}AI$, temos que $A$ é diagonalizável.

**Proposição 4.9.** Se $A$ é uma matriz em $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ diagonalizável e $D$ é uma matriz diagonal semelhante a $A$, então os elementos da diagonal principal de $D$ são os autovalores de $A$.

**Demonstração.** Sejam $D$ uma matriz diagonal semelhante a $A$, e $d_{11}$ e $d_{22}$ os elementos da diagonal principal de $D$. Como $D$ é uma matriz diagonal, então o polinômio característico de $D$ é

$$p(\lambda) = \det(D - \lambda I) = (d_{11} - \lambda)(d_{22} - \lambda).$$

Assim, $p(d_{11}) = 0$ e $p(d_{22}) = 0$, ou seja, $d_{11}$ e $d_{22}$ são autovalores de $D$. Logo, como $d_{11}$ e $d_{22}$ são autovalores de $D$, e $D$ é semelhante a $A$, segue do item *iv* da Proposição 4.3, que $d_{11}$ e $d_{22}$ são os autovalores de $A$. $\square$

**Proposição 4.10.** A terna de matrizes de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, $(A, D, M)$, com $M$ sendo uma matriz invertível e $D$ uma matriz diagonal, satisfaz a equação matricial $MDM^{-1} = A$ se, e somente se, uma das condições abaixo ocorre.

(i) $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$, $M = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & w \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$, com $a \neq d$, $x \neq 0$ e $w \neq 0$;

(ii) $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$, $M = \begin{bmatrix} 0 & y \\ z & 0 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} d & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$, com $y \neq 0$, $z \neq 0$ e $a \neq d$;

(iii) $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ e $M$ com $\det(M) \neq 0$;

(iv) $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & d \end{bmatrix}$, $M = \begin{bmatrix} 0 & y \\ z & \frac{cy}{a-d} \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} d & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$, com $c \neq 0$, $z \neq 0$, $y \neq 0$ e $a \neq d$;

(v) $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & d \end{bmatrix}$, $M = \begin{bmatrix} x & 0 \\ \frac{cx}{a-d} & w \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$, com $c \neq 0$, $x \neq 0$, $w \neq 0$ e $a \neq d$;

(vi) $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix}$, $M = \begin{bmatrix} x & \frac{bw}{d-a} \\ 0 & w \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$, com $b \neq 0$, $x \neq 0$, $w \neq 0$ e $a \neq d$;

(vii) $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix}$, $M = \begin{bmatrix} \frac{bz}{d-a} & y \\ z & 0 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} d & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$, com $b \neq 0$, $z \neq 0$, $y \neq 0$ e $a \neq d$;

(viii) $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $M = \begin{bmatrix} x & y \\ \frac{(\lambda_1 - a)x}{b} & \frac{(\lambda_2 - a)y}{b} \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$, com $b \neq 0$, $c \neq 0$, $x \neq 0$ e $y \neq 0$, desde que $\lambda_1$ e $\lambda_2$ sejam soluções reais da equação $(\lambda - a)(\lambda - d) = bc$ com $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

**Demonstração.** Sejam

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \; M = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

satisfazendo $D = M^{-1}AM$, Assim $MD = AM$, ou seja,

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}.$$

Logo

$$\begin{bmatrix} x\lambda_1 & y\lambda_2 \\ z\lambda_1 & w\lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+bz & ay+bw \\ cx+dz & cy+dw \end{bmatrix}$$

donde obtemos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} 0 = (a-\lambda_1)x + bz \\ 0 = (a-\lambda_2)y + bw \\ 0 = cx + (d-\lambda_1)z \\ 0 = cy + (d-\lambda_2)w. \end{cases} \tag{52}$$

**Caso 1.** Se $b = 0$ e $c = 0$, então o sistema (52) torna-se

$$\begin{cases} 0 = (a-\lambda_1)x & (53) \\ 0 = (a-\lambda_2)y & (54) \\ 0 = (d-\lambda_1)z & (55) \\ 0 = (d-\lambda_2)w. & (56) \end{cases}$$

**Subcaso 1.1.** Se $a \neq d$ e $x = 0$, então por $M$ ser invertível temos que $\det M \neq 0$ e $\det M = yz$, ou seja, $y \neq 0$ e $z \neq 0$. Assim, de (54) e (55) temos que $\lambda_2 = a$ e $\lambda_1 = d$. Além disso, por (56) temos que $w = 0$. Reciprocamente, se

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix},\ M = \begin{bmatrix} 0 & y \\ z & 0 \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} d & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix},$$

com $y \neq 0$, $z \neq 0$ e $d \neq a$, então $MD = AM$.

**Subcaso 1.2.** Se $a \neq d$ e $x \neq 0$, então por (53), $\lambda_1 = a$. Com isso, por (55) temos $z = 0$. Como $M$ é invertível temos que $\det M = xw - zy \neq 0$, que neste caso $w \neq 0$ e por (56), $\lambda_2 = d$. Além disso, como $\lambda_1 \neq \lambda_2$, temos por (54) que $y = 0$. Reciprocamente, se

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix},\ M = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & w \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix},$$

com $x \neq 0$, $w \neq 0$ e $a \neq d$, então $MD = AM$.

**Subcaso 1.3.** Se $a = d$, então $A$ é uma matriz diagonal. Logo $\lambda_1 = a$, $\lambda_2 = a$ e $M$ pode ser uma matriz invertível qualquer de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Reciprocamente, se

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix},\ M = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix},$$

com $xw \neq yz$, então $MD = AM$.

**Caso 2.** Se $b = 0$ e $c \neq 0$, então o sistema (52) torna-se

$$\begin{cases} 0 = (a - \lambda_1)x & (57) \\ 0 = (a - \lambda_2)y & (58) \\ 0 = cx + (d - \lambda_1)z & (59) \\ 0 = cy + (d - \lambda_2)w. & (60) \end{cases}$$

**Subcaso 2.1.** Se $x = 0$, então por $M$ ser invertível, temos que $\det M = yz$ com $y \neq 0$ e $z \neq 0$. Assim por (58) e (59) temos que $\lambda_2 = a$ e $\lambda_1 = d$. Com isso temos por (60) que $(d - \lambda_2)w \neq 0$, assim $w \neq 0$ e $\lambda_1 \neq d$, ou seja $a \neq d$, onde podemos escrever

$$w = \frac{cy}{\lambda_2 - d} = \frac{cy}{a - d}.$$

Reciprocamente, se

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & d \end{bmatrix},\ M = \begin{bmatrix} 0 & y \\ z & \frac{cy}{a-d} \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} d & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix},$$

com $c \neq 0$, $z \neq 0$, $y \neq 0$ e $a \neq d$, então $MD = AM$.

**Subcaso 2.2.** Se $x \neq 0$, então por (57), $\lambda_1 = a$. Como $c \neq 0$, por (59), temos $(d-\lambda_1)z \neq 0$, ou seja, $z \neq 0$ e $a \neq 0$. Pelo Teorema 4.6 temos que $\mathrm{tr}A = \mathrm{tr}D$, ou seja $a+d = \lambda_1 + \lambda_2$, logo $\lambda_2 = d$. Assim por (60), $y = 0$ e como $M$ é invertível temos que $\det M = xw - yz \neq 0$, com $w \neq 0$. Reescrevendo (59) temos

$$z = \frac{cx}{\lambda_1 - d} = \frac{cx}{a-d}.$$

Reciprocamente, se

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & d \end{bmatrix},\ M = \begin{bmatrix} x & 0 \\ \frac{cx}{a-d} & w \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix},$$

com $c \neq 0$, $x \neq 0$, $w \neq 0$ e $a \neq d$, então $MD = AM$.

**Caso 3.** Se $b \neq 0$ e $c = 0$, então o sistema (52) torna-se

$$\begin{cases} 0 = (a-\lambda_1)x + bz & (61) \\ 0 = (a-\lambda_2)y + bw & (62) \\ 0 = (d-\lambda_1)z & (63) \\ 0 = (d-\lambda_2)w. & (64) \end{cases}$$

**Subcaso 3.1.** Se $z = 0$, então por $M$ ser invertível o $\det M = xw$, com $x \neq 0$ e $w \neq 0$. Assim, por (61) e (64) temos $\lambda_1 = a$ e $\lambda_2 = d$. Como $w \neq 0$ e $b \neq 0$, por (62), temos que $y \neq 0$ e $a \neq d$, onde podemos escrever

$$y = \frac{bw}{\lambda_2 - a} = \frac{bw}{d-a}.$$

Reciprocamente, se

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix},\ M = \begin{bmatrix} x & \frac{bw}{d-a} \\ 0 & w \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix},$$

com $b \neq 0$, $x \neq 0$, $w \neq 0$ e $a \neq d$, então $MD = AM$.

**Subcaso 3.2.** Se $z \neq 0$, então por (63), $\lambda_1 = d$, assim pelo Teorema 4.6 $\lambda_1 + \lambda_2 = a+d$, ou seja $\lambda_2 = a$. Como $b \neq 0$, $z \neq 0$ e por (61) temos que $x \neq 0$ e $a-d \neq 0$, assim podemos escrever

$$x = \frac{bz}{\lambda_1 - a} = \frac{bz}{d-a}.$$

Por (64), $w \neq 0$ e como $M$ é invertível temos que $\det M = yz \neq 0$, ou seja, $y \neq 0$. Reciprocamente, se

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix},\ M = \begin{bmatrix} \frac{bz}{d-a} & y \\ z & 0 \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} d & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix},$$

com $b \neq 0$, $z \neq 0$, $y \neq 0$ e $a \neq d$, então $MD = AM$.

**Caso 4.** Se $b \neq 0$ e $c \neq 0$, então por (52) obtemos

$$\begin{cases} x = \dfrac{(\lambda_1 - d)z}{c} & (65) \\ y = \dfrac{(\lambda_2 - d)w}{c} & (66) \\ w = \dfrac{(\lambda_2 - a)y}{b} & (67) \\ z = \dfrac{(\lambda_1 - a)x}{b}, & (68) \end{cases}$$

o que implica que

$$xz = \frac{(\lambda_1 - a)(\lambda_1 - d)xz}{bc}$$

e

$$wy = \frac{(\lambda_2 - a)(\lambda_2 - d)wy}{bc}.$$

Como $M$ é invertível, temos que $xw - yz \neq 0$, ou seja $xw \neq 0$ ou $yz \neq 0$. Se $xw = 0$, por (66) e (68) teríamos $yz = 0$ e $M$ não seria invertível. Reciprocamente, se $yz = 0$, por (65) e (67) teríamos $xw = 0$ e $M$ não seria invertível. Assim temos que $xw \neq 0$ e $yz \neq 0$, ou seja, $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$ e $w \neq 0$.

Logo

$$\begin{cases} (\lambda_1 - a)(\lambda_1 - d) = bc \\ (\lambda_2 - a)(\lambda_2 - d) = bc, \end{cases} \tag{69}$$

ou seja $\lambda_1$ e $\lambda_2$ são raízes da equação

$$(\lambda - a)(\lambda - d) = bc.$$

Além disso, como $M$ é invertível e por (65), (66), (67) e (68), temos

$$xw - yz = \frac{(\lambda_1 - d)(\lambda_2 - a)yz}{bc} - \frac{(\lambda_2 - d)(\lambda_1 - a)xw}{bc}.$$

Se $\lambda_1 = \lambda_2$, temos

$$xw - yz = \frac{(\lambda_2 - d)(\lambda_2 - a)}{bc}(yz - xw).$$

Como $xw - yz \neq 0$

$$(\lambda_2 - d)(\lambda_2 - a) = -bc,$$

o que contradiz (69). Logo $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Reciprocamente, se

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \ M = \begin{bmatrix} x & y \\ \frac{(\lambda_1 - a)x}{b} & \frac{(\lambda_2 - a)y}{b} \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix},$$

com $b \neq 0$, $c \neq 0$, $x \neq 0$ e $y \neq 0$, desde que $\lambda_1$ e $\lambda_2$ sejam soluções da equação $(\lambda - a)(\lambda - d) = bc$ com $\lambda_1 \neq \lambda_2$, então $MD = AM$.

Finalmente concluímos que (i) segue do Subcaso 1.2; (ii) segue do Subcaso 1.1; (iii) segue do Subcaso 1.3; (iv) segue do Subcaso 2.1; (v) segue do Subcaso 2.2; (vi) segue do Subcaso 3.1; (vii) segue do Subcaso 3.2; (viii) segue do Caso 4. □

**Corolário 4.11.** Uma matriz $A$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ não é diagonalizável se, e somente se, $A$ não possui autovalores reais ou $A$ possui apenas um autovalor e $A$ não é uma matriz escalar.

**Demonstração.** Pela Proposição 4.9 $A$ é diagonalizável se, e somente se $A$ possuir autovalor real. Se $A$ é diagonalizável, então pela Proposição 4.10, $A$ possui dois autovalores reais iguais se, e somente se, $A$ é a matriz escalar. Então se $A$ possui dois autovalores iguais e $A$ não é a matriz escalar, então $A$ não é diagonalizável. Se $A$ possui autovalores reais distintos, então pelos itens (i), (ii), (iv), (v), (vi), (vii) e (viii) da Proposição 4.10, temos que $A$ é diagonalizável. □

**Corolário 4.12.** Seja $A$ uma matriz de ordem $2 \times 2$. Se $A$ é simétrica, então $A$ é diagonalizável.

**Demonstração.** Dizemos que uma matriz $A$ é simétrica, se $A^T = A$. Assim uma matriz de ordem $2 \times 2$ simétrica pode ser escrita da forma

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}.$$

Se $b = 0$, temos pelos itens (i) e (ii) da Proposição 4.10 que $A$ é diagonalizável. Se $b \neq 0$, temos que $A$ possui os autovalores

$$\lambda_1 = \frac{(a+d) + \sqrt{(a-d)^2 + 4b^2}}{2} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \frac{(a+d) - \sqrt{(a-d)^2 + 4b^2}}{2},$$

ou seja, $A$ possui dois autovalores distintos. Assim pelo item (viii) da Proposição 4.10 temos que $A$ é diagonalizável. □

## 4.3 POTÊNCIA DE MATRIZ

Conforme Definição 2.17, se $n \in \mathbb{N}$, a $n$-ésima potência de uma matriz $A$ é definida por

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{n\text{-fatores}}.$$

Se n for um número consideravelmente grande, calcular $A^n$ envolve um esforço computacional elevado. Nesta seção, apresentaremos um método para calcular a $n$-ésima potência de uma matriz $A$ diagonalizável com um baixo custo computacional em comparação com o cálculo de $A^n$ utilizando as $n-1$ multiplicações de matrizes em $\underbrace{A \cdot A \cdots A}_{n\text{-fatores}}$ com a proposição a seguir.

**Proposição 4.13.** Sejam A,D e P matrizes em $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, com $P$ sendo invertível e $D$ uma matriz diagonal, tais que $A = PDP^{-1}$. Então,

$$A^n = PD^nP^{-1}.$$

**Demonstração.** Mostraremos por indução em n. Seja $P(n) : A^n = PD^nP^{-1}$.

(i) Se $n = 1$, como A é diagonalizável, existem D e P tais que $A = PDP^{-1}$.

(ii) Vamos supor que p é verdadeira para $n = k$, ou seja $A^k = PD^kP^{-1}$.

(iii) vamos mostrar a validade para $k+1$.

$$\begin{aligned} A^{k+1} &= A^kA \\ &= (PD^kP^{-1})(PDP^{-1}) \\ &= PD^k(P^{-1}P)DP-1 \\ &= PD^kDP^{-1} \\ &= PD^{k+1}P^{-1}. \end{aligned}$$

Assim, de (i),(ii) e (iii), segue do Princípio de Indução Matemática, que P(n) é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

□

**Exemplo 4.14.** Determine a $n$-ésima potência da matriz $A$, onde

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

com $a^2 > -4b$.

De fato, como os autovalores de $A$ satisfazem $(a-\lambda)(-\lambda) = b$, temos que

$$\lambda_1 = \frac{a - \sqrt{a^2+4b}}{2} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \frac{a + \sqrt{a^2+4b}}{2}.$$

Uma vez que $a^2 > -4b$, obtemos $\lambda_1 \neq \lambda_2$ e assim, do item $(viii)$ da Proposição 4.10 e da Proposição 4.13, obtemos

$$
\begin{aligned}
A^n &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{-a-\sqrt{a^2+4b}}{2b} & \frac{-a+\sqrt{a^2+4b}}{2b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2} \end{bmatrix}^n \frac{b}{\sqrt{a^2+4b}} \begin{bmatrix} \frac{-a+\sqrt{a^2+4b}}{2b} & -1 \\ \frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2b} & 1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{b}{\sqrt{a^2+4b}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{-a-\sqrt{a^2+4b}}{2b} & \frac{-a+\sqrt{a^2+4b}}{2b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(\frac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(\frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-a+\sqrt{a^2+4b}}{2b} & -1 \\ \frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2b} & 1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{b}{\sqrt{a^2+4b}} \begin{bmatrix} \left(\frac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^n & \left(\frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^n \\ \left(\frac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^{n-1} & \left(\frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-a+\sqrt{a^2+4b}}{2b} & -1 \\ \frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2b} & 1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{b}{\sqrt{a^2+4b}} \begin{bmatrix} \frac{1}{b}\left(\frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{b}\left(\frac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^{n+1} & \left(\frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^n - \left(\frac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^n \\ \frac{1}{b}\left(\frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^n - \frac{1}{b}\left(\frac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^n & \left(\frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^{n-1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\left(\frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{a^2+4b}} & \frac{b\left[\left(\frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^n - \left(\frac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^n\right]}{\sqrt{a^2+4b}} \\ \frac{\left(\frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^n - \left(\frac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^n}{\sqrt{a^2+4b}} & \frac{b\left[\left(\frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^{n-1}\right]}{\sqrt{a^2+4b}} \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

## 4.4 RECORRÊNCIAS LINEARES DE SEGUNDA ORDEM

As recorrências lineares de segunda ordem sobre $\mathbb{R}$ são equações da forma $x_{n+1} = ax_n + bx_{n-1}$, com $a, b \in \mathbb{R}$ que envolvem os termos de uma sequência $(x_n)$ cujos termos são elementos de $\mathbb{R}$. Se a relação $x_{n+1} = ax_n + bx_{n-1}$ é satisfeita para todo $x_n$ de uma sequência $(x_n)$, dizemos que a sequência $(x_n)$ é uma solução para a recorrência linear.

Nesta seção, encontraremos soluções para recorrências lineares de segunda ordem para o caso particular em que $x_{n+1} = ax_n + bx_{n-1}$, onde $n \geq 2$, $a^2 > -4b$ e $x_1$ e $x_2$ são conhecidos. Para isto utilizaremos a seguinte Proposição:

**Proposição 4.15.** A solução geral para a equação de recorrência $x_{n+1} = ax_n + bx_{n-1}$, onde $n \geq 2$, $a^2 > -4b$ e os valores iniciais $x_1$ e $x_2$ são conhecidos é dados por

$$x_n = x_2 \frac{\left(\frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^{n-1}}{\sqrt{a^2+4b}} + x_1 \frac{b\left[\left(\frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^{n-2} - \left(\frac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^{n-2}\right]}{\sqrt{a^2+4b}}.$$

**Demonstração.** Como $x_1$ e $x_2$ são dados, temos $x_3 = ax_2 + bx_1$ e $x_4 = ax_3 + bx_2$. Na forma matricial podemos reescrever estas igualdades como

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} x_4 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}.$$

Utilizando argumento de Indução, obtemos

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-2} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-1} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}.$$

Pela Proposição 4.13 e Exemplo 4.14, temos

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\left(\frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^n - \left(\frac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^n}{\sqrt{a^2+4b}} & \frac{b\left[\left(\frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^{n-1}\right]}{\sqrt{a^2+4b}} \\ \frac{\left(\frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^{n-1}}{\sqrt{a^2+4b}} & \frac{b\left[\left(\frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^{n-2} - \left(\frac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^{n-2}\right]}{\sqrt{a^2+4b}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}.$$

Portanto

$$x_n = x_2 \frac{\left(\frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^{n-1}}{\sqrt{a^2+4b}} + x_1 \frac{b\left[\left(\frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^{n-2} - \left(\frac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^{n-2}\right]}{\sqrt{a^2+4b}}.$$

O próximo exemplo apresentará o termo geral para a conhecida *Sequência de Fibonacci*, que é definida por meio de uma recorrência linear de segunda ordem.

**Definição 4.16.** A solução da relação de recorrência $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, com $F_1 = 1$ e $F_2 = 1$ é conhecida como Sequência de Fibonacci.

**Exemplo 4.17.** O termo geral $F_n$ da Sequência de Fibonacci é dada por

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

De fato, pela Proposição 4.15, a relação de recorrência definida por $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, com $F_1 = 1$ e $F_2 = 1$, possui como solução a sequência definida por

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}}{\sqrt{5}} + \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}}{\sqrt{5}}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right].
\end{aligned}
$$

# 5 SISTEMAS DE DUAS EQUAÇÕES LINEARES COM DUAS INCÓGNITAS

Neste capítulo, discutiremos soluções para sistemas de equações lineares com duas incógnitas, através da multiplicação de matrizes invertíveis. Apresentaremos o conceito de sistemas de equações lineares e sua representação matricial na forma $AX = B$, onde $A$ é uma matriz de ordem dois e $X, B$ são matrizes colunas de ordem $2 \times 1$.

Uma equação linear com duas incógnitas $x$ e $y$ é uma equação da forma

$$a_{11}x + a_{12}y = b_1, \tag{70}$$

onde $a_{11}$, $a_{12}$ e $b_1$ são números reais. A equação $2x + 3y = 13$ é um exemplo de equação linear com duas incógnitas.

Dada uma equação linear como em (70), estamos interessados em saber quais são as suas soluções, ou seja, os pares ordenados de números reais $(\alpha_1, \alpha_2)$ que satisfazem (70). Em outras palavras $a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 = b_1$. O conjunto $S$ formado por todos os pares ordenados que são soluções para (70) é chamado de conjunto solução da equação.

Como exemplo, temos que o par ordenado $(2, 3)$ é uma solução para a equação $2x + 3y = 13$, pois $2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 13$. Além disso, o par ordenado $(5, 1)$ também é uma solução para a equação $2x + 3y = 13$. Na verdade, o conjunto solução $S$ desta equação é o conjunto de pares ordenados dado por

$$S = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; y = \frac{13 - 2x}{2} \right\}.$$

Diante do que foi exposto até o momento, definiremos a seguir o que é um sistemas de duas equações lineares com duas incógnitas e seu conjunto solução.

**Definição 5.1.** Um sistema de duas equações lineares com duas incógnitas é um conjunto formado pelas equações, $a_{11}x + a_{12}y = b_1$ e $a_{21}x + a_{22}y = b_2$, onde representamos da seguinte forma

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2. \end{cases} \tag{71}$$

O par ordenado de números reais $(\alpha_1, \alpha_2)$ é uma solução para o sistema (71) quando $\alpha_1$ e $\alpha_2$ satisfazem simultaneamente $a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 = b_1$ e $a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 = b_2$. O conjunto formado por todas as soluções para (71) é chamado de conjunto solução do sistema.

Matricialmente, o sistema (71) pode ser representado por

$$AX = B,$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

Como exemplo, considere o seguinte sitema de equações

$$\begin{cases} 3x + y = 9 \\ 2x + 3y = 13. \end{cases} \tag{72}$$

Resolveremos este sistema utilizando sua representação matricial. Denotando

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 9 \\ 13 \end{bmatrix},$$

temos que $A$ é invertível, pois $\det(A) = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 1 = 7 \neq 0$ e assim $AX = B$, implica que $X = A^{-1}B$, isto é,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 9 \\ 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{27-13}{7} \\ \frac{-18+39}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Logo, pela igualdade de matrizes, temos que $x = 2$ e $y = 3$, ou seja, o par ordenado (2,3) é a solução para o sistema 72. Neste caso, como a inversa $A^{-1}$ é única, o conjunto solução é dado por $S = (2,3)$.

Um sistema de equações lineares pode ser classificado quanto ao número de suas soluções da seguinte forma:

- se um sistema de equações lineares possuir apenas uma solução, dizemos que o sistema é possível e determinado;

- se possuir infinitas soluções, dizemos que o sistema é possível e indeterminado;
- se o sistema de equações lineares não possuir solução, dizemos que ele é um sistema impossível.

O sistema 72 é um exemplo de sistema possível e determinado. Não é difícil ver que o sistema

$$\begin{cases} 3x+y=9 \\ 6x+2y=1 \end{cases}$$

é impossível, e o sistema

$$\begin{cases} 3x+y=9 \\ 9x+3y=27 \end{cases}$$

é possível e indeterminado.

A seguinte proposição é uma forma particular da conhecida Regra de Cramer, e generaliza esta forma de resolução de sistemas de duas equações lineares com duas incógnitas.

**Proposição 5.2** (Regra de Cramer)**.** Considere o sistema de duas equações lineares com duas incógnitas

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y=b_1 \\ a_{21}x+a_{22}y=b_2, \end{cases} \tag{73}$$

cuja representação matricial é dada por $AX=B$, com

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \ X=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \ \text{ e } \ B=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

Se a matriz $A$ for invertível, então $(x,y)$ é solução do sistema (73) se, e somente se,

$$x=\frac{\det(A_x)}{\det(A)} \quad \text{e} \quad y=\frac{\det(A_y)}{\det(A)},$$

onde

$$A_x=\begin{bmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{bmatrix} \ \text{ e } \ A_y=\begin{bmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{bmatrix}.$$

**Demonstração.** Se $A$ é uma matriz invertível, então, como a inversa de $A$ é única, temos que $AX=B$ se, e somente se, $X=A^{-1}B$. Logo, pelo Teorema 2.29, temos que $(x,y)$ é solução de

(73) se, e somente se,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{\det(A)} \\ \dfrac{-a_{21}b_1 + a_{11}b_2}{\det(A)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\det(A_x)}{\det(A)} \\ \dfrac{\det(A_y)}{\det(A)} \end{bmatrix},$$

onde

$$A_x = \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A_y = \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{bmatrix}.$$

□

**Corolário 5.3.** Todo sistema de duas equações lineares com duas incógnitas escrito na forma matricial $AX = B$ com $\det A \neq 0$ é possível e determinado.

Mostraremos agora uma propriedade das matrizes quadradas de ordem 2, que não é encontrada em matrizes quadradas de ordens superiores.

**Proposição 5.4.** Seja $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Então $A$ possui uma linha múltipla da outra se, e somente se, $A$ possuir uma coluna múltipla da outra.

**Demonstração.** Suponha que a matriz $A$ seja representada por

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Assim, para que $A$ possua uma linha múltipla da outra, devemos ter

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ \lambda a & \lambda b \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad A = \begin{bmatrix} \lambda c & \lambda d \\ c & d \end{bmatrix},$$

para algum $\lambda \in \mathbb{R}$.No primeiro caso se $b = 0$, claramente a segunda coluna é múltipla da primeira. Se $b \neq 0$, então a segunda coluna é múltipla da primeira por um coeficiente $\alpha$ tal que $\alpha = \frac{b}{a}$. No segundo caso, o resultado segue com o mesmo argumento.

Reciprocamente, se $A$ possuir uma coluna múltipla da outra, temos

$$A = \begin{bmatrix} a & \lambda a \\ c & \lambda c \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad A = \begin{bmatrix} \lambda b & b \\ \lambda d & d \end{bmatrix},$$

para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. Utilizando o mesmo argumento anterior, mas na linha ao invés da coluna temos que $A$ possui uma linha múltipla da outra. □

**Proposição 5.5.** Seja $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Então o $\det(A) = 0$, se e somente se, $A$ possuir uma linha múltipla da outra.

**Demonstração.** Suponha que $A$ seja dada por

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Como $\det(A) = ad - bc = 0$, temos que $ad = bc$. Desta forma temos que $ad = bc = 0$ ou $ad = bc \neq 0$. Se $ad = bc = 0$, então $A$ assume uma das seguintes formas

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto, pela Proposição 5.4, temos que $A$ possui uma linha múltipla da outra.

Por outro lado, se $ad = bc \neq 0$, então

$$\frac{c}{a} = \frac{d}{b} = \lambda$$

para algum $\lambda \neq 0$. Portanto a matriz $A$ assume a seguinte forma

$$\begin{bmatrix} a & b \\ \lambda a & \lambda b \end{bmatrix}.$$

Em ambos os casos, se $\det(A) = 0$, então $A$ possui uma linha múltipla da outra.

Reciprocamente, se $A$ possui uma linha múltipla da outra, então $A$ assume uma das seguintes formas

$$A = \begin{bmatrix} \lambda c & \lambda d \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} a & b \\ \lambda a & \lambda b \end{bmatrix},$$

ou seja, $\det(A) = \lambda cd - c\lambda d = 0$ ou $\det(A) = a\lambda b - \lambda ab = 0$. □

**Proposição 5.6.** Todo sistema de duas equações lineares com duas incógnitas escrito na forma matricial $AX = B$, com $A \neq 0$, $\det A = 0$, $\det A_x = 0$ e $\det A_y = 0$ é possível e indeterminado.

**Demonstração.** Como $A \neq 0$, podemos supor, sem perda de generalidade, que $a_{21} \neq 0$ ou $a_{22} \neq 0$.

Mostraremos que existe $\lambda$ tal que

$$\begin{cases} a_{11} = \lambda a_{21} \\ a_{12} = \lambda a_{22} \\ b_1 = \lambda b_2 \end{cases} \tag{74}$$

Como $\det A = 0$, temos da Proposição 5.5 que existe $\lambda$ tal que

$$\begin{cases} a_{11} = \lambda a_{21} & (75) \\ a_{12} = \lambda a_{22}. & (76) \end{cases}$$

Por outro lado, como $det A_x = 0$ e $\det A_y = 0$, segue da Proposição 5.5 que exitem $\lambda_1$ e $\lambda_2$ tais que

$$\begin{cases} a_{12} = \lambda_1 a_{22} & (77) \\ b_1 = \lambda_1 b_2 & (78) \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} a_{11} = \lambda_2 a_{21} & (79) \\ b_1 = \lambda_2 b_2. & (80) \end{cases}$$

Se $a_{21} \neq 0$, por (75) e (79), obtemos que $\lambda_2 = \lambda$. Portanto, por (75), (76), (79) e (80), obtemos (74).

Se $a_{22} \neq 0$, por (76) e (77), obtemos que $\lambda_1 = \lambda$. Portanto, por (75), (76), (77) e (78), obtemos (74).

De fato, um sistema de equações lineares com duas incógnitas é possível e indeterminado quando as equações desse sistema forem equivalentes. Neste caso, para resolver o sistema de equações basta resolver uma equação linear de duas incógnitas, que possui infinitas soluções. $\square$

**Proposição 5.7.** Todo sistema de duas equações lineares com duas incógnitas escrito na forma matricial $AX = B$ com $\det A = 0$ e $\det A_x \neq 0$ ou $\det A_y \neq 0$ é impossível.

**Demonstração.** Suponha que o sistema tenha solução. Como $\det A = 0$, as equações devem possuir os coeficiente das respectivas incógnitas proporcionais. Além disso, como $\det A_x \neq 0$ ou $\det A_y \neq 0$, então os termos independentes das equações não seguem a mesma proporção. Assim, o sistema de equações lineares pode ser escrito na forma

$$\begin{cases} ax + by = c \\ \lambda ax + \lambda by = d, \end{cases}$$

onde $d \neq \lambda c$. Portanto, $d = \lambda ax + \lambda by = \lambda(ax + by) = \lambda c$, o que é uma contradição. $\square$

## 5.1 INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DAS SOLUÇÕES

O conjunto solução de cada equação do sistema (71) representa uma reta no plano. Desta forma, o conjunto solução deste sistema pode ser interpretado utilizando posições relativas de retas no plano. Sejam $r_1$ e $r_2$ as retas representadas pelos conjuntos soluções das equações $a_{11}x + a_{12}y = b_1$ e $a_{11}x + a_{12}y = b_2$, respectivamente. Assim, geometricamente, as posições relativas das retas $r_1$ e $r_2$ são determinadas a partir da análise do sistema (71) da seguinte forma: Se as retas $r_1$ e $r_2$ são transversais, ou seja, se interceptam num único ponto (Figura 17), então o sistema (71) tem solução única que é o ponto de interseção.

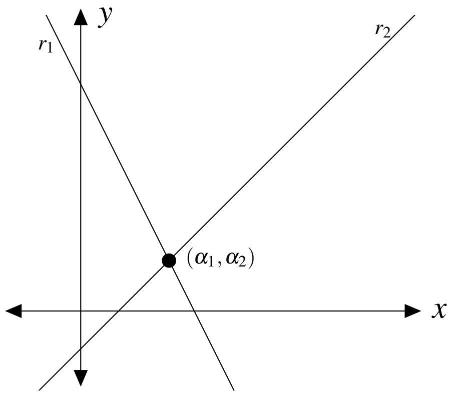


**Figura 17: Retas transversais.**

Se as retas $r_1$ e $r_2$ são paralelas e coincidentes como na Figura 18, então este sistema é indeterminado, ou seja, possui infinitas soluções que são os pontos sobre as retas $r_1$ e $r_2$.

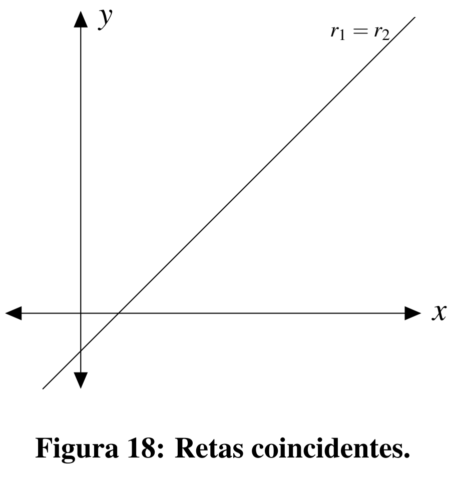


**Figura 18: Retas coincidentes.**

E se as retas $r_1$ e $r_2$ são paralelas e não se interceptam em nenhum ponto, como na Figura 19, temos que este sistema é impossível, ou seja não possuí soluções.

O próximo exemplo ilustra o caso de um sistema com duas equações lineares e duas incógnitas, o qual resolveremos utilizando a Proposição 5.2, e apresentaremos o gráfico das

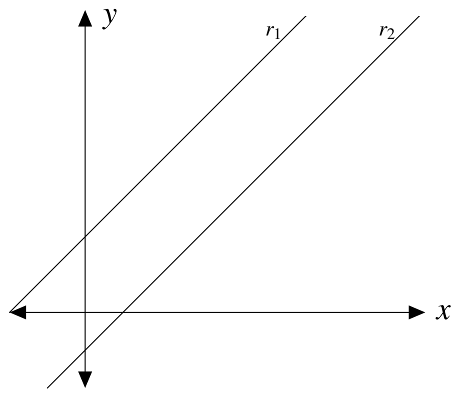


**Figura 19: Retas paralelas.**

posições relativas das retas no plano.

**Exemplo 5.8.** Em um determinado dia o preço do etanol era de R\$ $3,20$ reais o litro e o da gasolina R\$ $4,00$ reais. Um automóvel abasteceu com etanol e gasolina totalizando 40 litros de combustível. Sabendo que o total a pagar foi de R\$ $140,00$ reais, determine a quantidade de etanol e gasolina com que o automóvel foi abastecido.

**Resolução.** Considerando $x$ e $y$ a quantidade de etanol e gasolina respectivamente, temos o seguinte sistema

$$\begin{cases} x+y=40 \\ 3,2x+4y=140. \end{cases}$$

Escrevendo na forma matricial $AX=B$, temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3,2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 \\ 140 \end{bmatrix}.$$

Como o $\det A \neq 0$, pela Regra de Cramer obtemos $x=25$ e $y=15$. Concluímos assim que o automóvel foi abastecido com $25l$ de etanol e $15l$ de gasolina. Na Figura 20 ilustramos a interpretação geométrica dessa solução.

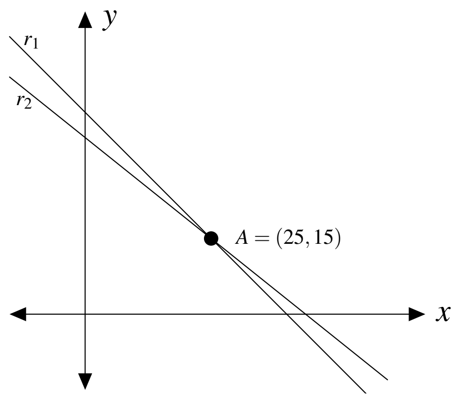


**Figura 20: Interpretação geométrica da solução do Exemplo 5.8.**

# 6 CRIPTOGRAFIA UTILIZANDO MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZES

A criptografia é a ciência que busca manter informações em segurança, ou seja, através dela é possível guardar ou transmitir informações de forma sigilosa por meios inseguros, como a internet, em que o risco de interceptação é alto.

Embora existam técnicas avançadas de Criptografia, tais como o RSA, veja Paar (2009) para mais detalhes, abordaremos neste capítulo uma técnica de Criptografia bastante simples que utiliza apenas multiplicação de matrizes e o cálculo de matrizes inversas para a obtenção da mensagem original.

Para este estudo utilizaremos como referência Anton (2001) e seguiremos o seguinte procedimento:

**Passo 1** Associar a cada caractere do alfabeto um valor numérico distinto para criar uma tabela de conversão.

**Passo 2** Escolher uma matriz de ordem 2 por 2 invertível, que será utilizada para codificar a mensagem.

**Passo 3** Para cifrar uma mensagem, tomamos sequencialmente os caracteres da mensagem original em pares na forma de matriz coluna, utilizando um caractere extra para representar os espaços.

**Passo 4** Converter cada matriz coluna de símbolos obtidos no Passo 3 na ordem em que aparecem na matriz coluna de valores numéricos utilizando a tabela de conversão feita no Passo 1.

**Passo 5** Utilizamos a matriz invertível encontrada no Passo 2, para multiplicar cada matriz coluna obtida no Passo 4, obtendo outra sequência de matrizes colunas com outros valores numéricos para formar a mensagem criptografada.

Para descriptografar a mensagem, o destinatário deverá multiplicar cada matriz coluna obtida no Passo 5, pela matriz inversa $A^{-1}$ do Passo 2. Posteriormente utilizar a Tabela 1 para encontrar a mensagem descriptografada.

A seguir, apresentaremos um exemplo em que criptografaremos uma mensagem utilizando os passos descritos.

**Passo 1** Consideramos para este exemplo a Tabela 1, onde o símbolo ”–”representará os espaços em branco.

| – | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |

| N | O | P | Q | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 |

**Tabela 1: Tabela para conversão de letras em números**

**Passo 2** Escolhemos a matriz invertível

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

**Passo 3** Reescrevemos a mensagem original, ”PROFMAT”, tomando sequencialmente as letras de duas em duas, dispondo-as em matrizes colunas, e usamos o caractere ”–”para representar o espaço.

$$\begin{bmatrix} P \\ R \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} O \\ F \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} M \\ A \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} T \\ - \end{bmatrix}.$$

**Passo 4** Convertemos cada matriz coluna de caracteres obtidos no Passo 3 na ordem em que aparecem na matriz coluna de valores numéricos utilizando a Tabela 1 de conversão feita no Passo 1.

$$\begin{bmatrix} P \\ R \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} O \\ F \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} M \\ A \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} T \\ - \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 16 \\ 18 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 15 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 13 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 20 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

**Passo 5** Multiplicamos cada uma dessas matrizes colunas pela matriz invertível $A$ escolhida no Passo 2.

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \cdot 16 + 3 \cdot 18 \\ 3 \cdot 16 + 2 \cdot 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 64 + 54 \\ 48 + 36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 118 \\ 84 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \cdot 15 + 3 \cdot 6 \\ 3 \cdot 15 + 2 \cdot 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 + 18 \\ 45 + 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 78 \\ 57 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \cdot 13 + 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot 13 + 2 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 52 + 3 \\ 39 + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 55 \\ 41 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \cdot 20 + 3 \cdot 0 \\ 3 \cdot 20 + 2 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80 + 0 \\ 60 + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80 \\ 60 \end{bmatrix}.$$

Assim, temos a mensagem criptografada

$$\begin{bmatrix} 118 \\ 84 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 78 \\ 57 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 55 \\ 41 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 80 \\ 60 \end{bmatrix}.$$

Para descriptografar a mensagem, seguiremos os seguintes passos:

**Passo 1** Encontrar a matriz inversa de $A$

$$A^{-1} = \frac{1}{4 \cdot 2 - 3 \cdot 3} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}.$$

**Passo 2** Multiplicar cada uma das matrizes colunas da mensagem criptografada por $A^{-1}$.

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 118 \\ 84 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \cdot 118 + 3 \cdot 84 \\ 3 \cdot 118 - 4 \cdot 84 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -236 + 252 \\ 354 - 336 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 18 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 78 \\ 57 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \cdot 78 + 3 \cdot 57 \\ 3 \cdot 78 - 4 \cdot 57 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -156 + 171 \\ 234 - 228 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 6 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 55 \\ 41 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \cdot 55 + 3 \cdot 41 \\ 3 \cdot 55 - 4 \cdot 41 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -110 + 123 \\ 165 - 164 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 80 \\ 60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \cdot 80 + 3 \cdot 60 \\ 3 \cdot 80 - 4 \cdot 60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -160 + 180 \\ 240 - 240 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Assim temos a mensagem descriptografada:

$$\begin{bmatrix} 16 \\ 18 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 15 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 13 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 20 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

**Passo 3** Substituir cada número pela letra correspondente da Tabela 1:

$$\begin{bmatrix}16\\18\end{bmatrix},\begin{bmatrix}15\\6\end{bmatrix},\begin{bmatrix}13\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}20\\0\end{bmatrix}\Longrightarrow\begin{bmatrix}P\\R\end{bmatrix},\begin{bmatrix}O\\F\end{bmatrix},\begin{bmatrix}M\\A\end{bmatrix},\begin{bmatrix}T\\-\end{bmatrix}.$$

Reescrevendo temos a palavra ”PROFMAT”.

# 7 CONCLUSÃO

Neste trabalho, procuramos abordar aplicações restritas ao contexto de matrizes de ordem 2 por 2. Procuramos também, expor todos os temas tratados sem utilizarmos os conceitos de espaços vetoriais e vetores, permitindo assim, que leitores com menos conhecimento técnico possam tirar proveito do texto.

Embora os resultados aqui apresentados possam ser generalizados, utilizando matrizes de qualquer ordem, precisaríamos de técnicas mais avançadas que são utilizadas em Álgebra Linear mas buscamos omitir neste trabalho. Para um aprofundamento nos assuntos tratados neste trabalho sugere-se procurar referências mais especializadas, tais como COELHO e LOURENÇO (2005), Boldrini (1980), Anton (2001), Ávila (1995), Lima (2007), Muniz Neto (2013) e Paar (2009).

Com o objetivo de apresentar outras aplicações envolvendo o tema em trabalhos futuros, sugerimos utilizar o fato de que qualquer função real $f$ pode ser estendida para matrizes diagonalizáveis da seguinte forma: $f(A) = Mf(D)M^{-1}$ onde $f(D)$ nada mais é do que aplicar $f$ a cada elemento da diagonal. Como por exemplo, a raiz $n$-ésima $\sqrt[n]{(A)} = M\sqrt[n]{(D)}M^{-1}$. Temos também, a função exponencial envolvendo matrizes, que é definida por $e^A = M(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{D^p}{p!})M^{-1}$ e pode ser aplicado na solução de sistemas lineares de Equações Diferenciáveis Ordinárias, para mais detalhes veja Santos (2011).

# REFERÊNCIAS


ANTON, Howard. **Álgebra Linear com aplicações**. 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2001.

ÁVILA, Geraldo. **Cálculo 2**: Funções de uma variável. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1995.

BOLDRINI, José Luiz. **Álgebra Linear**. 3. ed. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1980.

COELHO, Flávio Ulhoa.; LOURENÇO, M.L. **Curso de Álgebra Linear**. [S.l.]: EDUSP, 2005.

HEFEZ, Abramo. **Curso de álgebra - volume 1**. 5. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

LIMA, Elon Lages. **Álbebra Linear**. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LIMA, Elon Lages. **Isometrias**. Rio de Janeiro: SBM, 2007.

MUNIZ NETO, Antonio Caminha. **Geometria**. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

PAAR, C. **Understanding Cryptography**: A textbook for students and practitioners. [S.l.]: Springer, 2009.

SANTOS, Reginaldo J. **Introdução às equações diferenciais ordinárias**. Belo Horizonte: Imprensa Universitária da UFMG, 2011.