



UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA  
CIVIL – PPGEC



FERNANDO JOSÉ DA SILVA

SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE ESCOAMENTOS DE FLUIDOS INCOMPRESSÍVEIS A  
BAIXO REYNOLDS UTILIZANDO O MÉTODO DE GALERKIN DESCONTÍNUO  
h-ADAPTATIVO

**DISSERTAÇÃO**

PATO BRANCO – PR

2019

FERNANDO JOSÉ DA SILVA

**SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE ESCOAMENTOS DE FLUIDOS  
INCOMPRESSÍVEIS A BAIXO REYNOLDS UTILIZANDO O MÉTODO DE  
GALERKIN DESCONTÍNUO h-ADAPTATIVO**

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do título de “Mestre em Engenharia Civil”

Orientador: Prof. Dr. Francisco Augusto Aparecido Gomes.

Coorientador: Prof. Dr. Paulo Rogério Novak

PATO BRANCO - PR

2019

S586s Silva, Fernando José da.  
Simulação numérica de escoamentos de fluidos incompressíveis a baixo Reynolds utilizando o método de Galerkin descontínuo h-adaptativo / Fernando José da Silva. -- 2019.  
93 f. : il. ; 30 cm.

Orientador: Prof. Dr. Francisco Augusto Aparecido Gomes  
Coorientador: Prof. Dr. Paulo Rogério Novak  
Dissertação (Mestrado) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná.  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil. Pato Branco, PR, 2019.  
Bibliografia: f. 89 - 93.

1. Galerkin, Métodos de. 2. Dinâmica dos fluidos. 3. Análise numérica. 4. Método dos elementos finitos. I. Gomes, Francisco Augusto Aparecido, orient. II. Novak, Paulo Rogério, coorient. III. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil. IV. Título.

CDD 22. ed. 624



---

---

## TERMO DE APROVAÇÃO Nº 32

### Título da Dissertação

***"Simulação Numérica De escoamentos De Fluido Incompressível A Baixo Reynolds Utilizando O Método De Galerkin Descontínuo H-Adaptativo"***

### Autor

***Fernando José da Silva***

Esta dissertação foi apresentada às 14h do dia 30 de abril de 2019, como requisito parcial para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA CIVIL- Linha de pesquisa em Análise de Estruturas, no Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil. O autor foi arguido pela Banca Examinadora abaixo assinada, a qual, após deliberação, considerou o trabalho aprovado.

*Prof. Dr. Francisco Augusto  
Aparecido Gomes*

UTFPR/PB  
Presidente

Prof. Dr. Romel da Rosa da  
Silva

UTFPR/PB  
Examinador

*Prof. Dr. Luiz Carlos Martinelli  
Junior*

UTFPR/PB  
Examinador

*Prof. Dr. João Batista  
Campos Silva*

UNESP/Ilha Solteira  
Examinador

Visto da Coordenação

**Prof. Dr. Murilo Cesar Lucas**  
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em  
**Engenharia Civil- PPGEC**

**O Termo de Aprovação assinado encontra-se na Coordenação do PPGEC**



## DEDICATÓRIA

*A minha noiva, Izabella, meu Pai, José, minha Mãe, Cleusa e meus irmãos,  
Jéderson e Grasi.*

## **AGRADECIMENTOS**

A Deus por me dar saúde e muita força para superar todas as dificuldades.

Ao meu orientador, professor Dr. Francisco, pela orientação na elaboração desta dissertação. Muito obrigado pelas horas dedicadas à minha formação profissional e pessoal.

A minha noiva Izabella, pelo seu companheirismo e amizade demonstrados pela sua compreensão, dedicação e amor. Obrigado por ter me sustentado e auxiliado em todo este percurso. A minha vida é agraciada pela sua presença.

Ao meu Pai, José, e a minha Mãe, Cleusa, que com muito amor e um incansável apoio, me ensinaram valores inestimáveis como a honestidade, a sinceridade, a importância e valor do trabalho árduo.

A minha família, em especial, aos meus irmãos Jéderson e Grasi, pelos inúmeros momentos de alegria e pelas palavras de apoio que facilitaram essa trajetória.

Ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (PPGEC – UTFPR) pela infraestrutura fornecida para a realização desta dissertação.

A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) por possibilitar, através de apoio financeiro, a realização deste trabalho.

E enfim, a todos que contribuíram para a realização deste trabalho, seja de forma direta ou indireta, fica registrado aqui, o meu muito obrigado!

## RESUMO

Em várias aplicações de engenharia o conhecimento dos campos de velocidade e pressão favorecem o entendimento de processos físicos que representam o problema. O estudo do comportamento do escoamento de fluidos pode ser modelado pelas equações de Navier-Stokes. Essas equações, em sua forma completa, não possuem solução analítica, sendo necessário o uso de métodos de aproximação para obtenção de uma solução aproximada. Os métodos de aproximação mais clássicos obtêm o resultado a partir de esquemas de primeira ordem de precisão, os quais podem não representar com boa precisão o fenômeno físico estudado. Resultados com maior precisão são obtidos com métodos de alta ordem de precisão. Recentemente o Método de Galerkin Descontínuo tem sido explorado em larga escala em aplicações da dinâmica dos fluidos, apresentando excelentes resultados. Nesse método, polinômios de alto grau ( $p$ ) são utilizados para interpolar a solução considerando a descontinuidade entre elementos. Por outro lado, malhas com refinamento adaptativo ( $h$ ) também oferecem boa precisão aos resultados considerando as regiões de maior variação da solução. Malhas adaptativas podem ser obtidas a partir da definição de um critério de malha ótima, por exemplo, buscando aumentar a exatidão de uma dada solução aproximada através do aumento da quantidade de elementos apenas nas regiões que apresentam os maiores gradientes na solução. Tal abordagem pode diminuir significativamente o custo computacional se comparado com um refino homogêneo da malha necessário para obtenção do mesmo erro de aproximação. A união  $hp$  representa uma estratégia de solução capaz de aliar o atrativo da solução obtida com polinômios de alto grau em conjunto com o refinamento adaptativo da malha nas regiões críticas do domínio. Esse trabalho utiliza o método de Galerkin Descontínuo  $h$ -adaptativo como ferramenta numérica com objetivo de explorar a precisão dos resultados em conjunto com uma estratégia otimizada de geração de malhas no domínio. Inicialmente, o problema é validado considerando soluções analíticas conhecidas nos regimes estacionário e transiente. O escoamento transiente a baixo Reynolds ao redor do cilindro bidimensional é utilizado para verificar a precisão nos resultados a partir dos esquemas  $h$ -adaptativo. Em todos os casos analisados neste trabalho, o método de Galerkin Descontínuo  $h$ -adaptativo apresentou excelentes resultados quanto à validação e sua comparação com resultados clássicos de literatura.

**Palavras-chave:** Método de Galerkin Descontínuo, Fluido Incompressível, Malhas Adaptativas, Baixo Reynolds, Métodos de Alta Ordem de Precisão.

## ABSTRACT

In several engineering applications the knowledge of the speed and pressure fields favors the understanding of physical processes that represent the problem. The study of fluid flow behavior can be modeled by Navier-Stokes equations. These equations, in its complete form, have no analytical solution and it is necessary to use approximation methods to obtain an approximate solution. The most classical approximation methods obtain the result from first order precision schemes, which may not represent with good precision the physical phenomenon studied. Results with greater precision are obtained with methods of high order of precision. Recently, the Discontinuous Galerkin Method has been explored in large scale in fluid dynamics applications, presenting excellent results. In this method, high-grade polynomials ( $p$ ) are used to interpolate the solution considering the discontinuity between elements. On the other hand, meshes with adaptive refinement ( $h$ ) also offer good precision to the results considering the regions of greatest variation of the solution. Adaptive meshes can be obtained from the definition of an optimal mesh criterion, for example, seeking to increase the accuracy of a given approximate solution by increasing the amount of elements only in the regions that have the highest gradients in the solution. Such an approach can significantly reduce the computational cost when compared to a homogeneous mesh refining required to obtain the same approximation error. The  $hp$  union represents a solution strategy capable of combining the attractiveness of the solution obtained with high-grade polynomials together with the adaptive refinement of the mesh in the critical regions of the domain. This work uses the  $h$ -adaptive discontinuous Galerkin method as a numerical tool in order to explore the precision of the results together with an optimized strategy for the generation of meshes in the domain. Initially, the problem is validated considering known analytical solutions in steady and transient regimes. The Reynolds low transient flow around the two-dimensional cylinder is used to verify the accuracy of the results from the  $h$ -adaptive schema. In all cases analyzed in this work, the  $h$ -adaptive discontinuous Galerkin method presented excellent results regarding validation and its comparison with classical literature results.

**Keywords:** Discontinuous Galerkin Method, Incompressible Fluid, Adaptive Meshes, Low Reynolds, High Order Precision Methods.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1- Notação para o mapeamento entre dois triângulos .....	27
Figura 2- Exemplo de subdivisão triangular .....	36
Figura 3- Padrão formado por elementos que compartilham um nó de vértice genérico .....	41
Figura 4- Distribuição nodal nos elementos para diferentes ordens do polinômio interpolador para o DG .....	43
Figura 5- Diagrama de blocos do processo de cálculo implementado computacionalmente...	46
Figura 6 – Domínio para o problema de Kovasznay .....	47
Figura 7- Problema de Kovasznay: (a) Malha de elementos finitos. (b) Distribuição dos erros avaliados para o gradiente do campo de velocidade na direção $x$ .....	49
Figura 8- Linhas de velocidade $u_x$ para o Problema de Kovasznay: (a) Malha M1. (b) Malha M4 .....	50
Figura 9- Problema de Kovasznay: (a) Malha de elementos finitos com refinamento não adaptativo. (b) Distribuição dos erros na norma L2 .....	51
Figura 10- Problema de Kovasznay: Comportamento do erro analítico em velocidade $u_x$ .....	52
Figura 11- Problema de Kovasznay: Erro em velocidade $u_x$ considerando diferentes ordens polinomiais (N): (a) Malha M1. (b) Malha M4 .....	53
Figura 12- Problema de decaimento do Vortex de Taylor: (a) Malhas de elementos finitos. (b) Distribuição dos erros elementares em $t=1$ .....	55
Figura 13- Campo vetores velocidade para malha 1, (a) $t=1$ e (b) $t=20$ .....	56
Figura 14- Problema de decaimento do Vortex de Taylor: (a) Componente de velocidade $u_x$ ao longo da linha vertical central. (b) Componente de velocidade $u_y$ ao longo da linha horizontal central .....	57
Figura 15- Cilindro caso 1: Modelagem do problema .....	59
Figura 16- Cilindro caso 1: (a) Malha inicial (M1). (b) Velocidade $u_x$ . (c) Linhas de velocidade $u_x$ . (d) Distribuição dos erros a nível elementar .....	60
Figura 17- Cilindro caso 1: (a) Malha inicial (M2). (b) Velocidade $u_x$ . (c) Linhas de velocidade $u_x$ .....	60
Figura 18- Cilindro caso 1: (a) Malha inicial (M3). (b) Velocidade $u_x$ . (c) Linhas de velocidade $u_x$ .....	61

Figura 19- Cilindro caso 1: (a) Malha homogênea (M4). (b) Velocidade $u_x$ . (c) Linhas de velocidade $u_x$ . (d) Distribuição dos erros a nível elementar .....	61
Figura 20- Cilindro caso 1: Comparação dos valores obtidos para $C_d$ máximo entre as malhas M1(inicial), M2 (h-adaptada), M3 (h-adaptada) e M4 (não h-adaptada homogênea) .....	62
Figura 21- Cilindro caso 1: Comparação dos valores obtidos para $C_l$ máximo entre as malhas M1(inicial), M2 (h-adaptada), M3 (h-adaptada) e M4 (não h-adaptada homogênea) .....	62
Figura 22- Parâmetros e condições de contorno para o domínio utilizado na simulação do escoamento sobre um cilindro, $LX=40D$ , $LY=10D$ , $LI=10D$ , $D=0.1$ , $Re=40$ e $t=12$ .....	63
Figura 23- (a) Malha 1 (inicial). (b) Distribuição dos erros elementares em $t=12$ .....	64
Figura 24- (a) Malha 2. (b) Distribuição dos erros elementares em $t=12$ .....	64
Figura 25- (a) Malha 3. (b) Distribuição dos erros elementares em $t=12$ .....	65
Figura 26- Tamanho da zona de separação atrás do cilindro circular para $Re=40$ .....	65
Figura 27- Distribuição da velocidade $u_x$ no domínio .....	66
Figura 28- Linhas de velocidade $u_x$ para a malha M3 em $t=12$ .....	66
Figura 29- Parâmetros para o domínio utilizado na simulação do escoamento sobre dois cilindros dispostos paralelamente ao escoamento, $LX=40D$ , $LY=15D$ , $LI=10D$ , $D=0.1$ , $Re=200$ .....	67
Figura 30- (a) Malha M1 para $L=4D$ , (b) Distribuição dos erros elementares em $t=12$ .....	67
Figura 31- (a) Malha M2 para $L=4D$ . (b) Distribuição dos erros elementares em $t=12$ .....	68
Figura 32- (a) Malha M3 para $L=4D$ , (b) Distribuição dos erros elementares em $t=12$ .....	68
Figura 33- (a) Malha M1 para $L=3D$ , (b) Distribuição dos erros elementares em $t=12$ .....	69
Figura 34- (a) Malha M2 para $L=3D$ . (b) Distribuição dos erros elementares em $t=12$ .....	69
Figura 35- (a) Malha M3 para $L=3D$ . (b) Distribuição dos erros elementares em $t=12$ .....	70
Figura 36- (a) Malha M1 para $L=2D$ , (b) Distribuição dos erros elementares em $t=12$ .....	70
Figura 37- (a) Malha M2 para $L=2D$ . (b) Distribuição dos erros elementares em $t=12$ .....	71
Figura 38- (a) Malha M3 para $L=2D$ . (b) Distribuição dos erros elementares em $t=12$ .....	71
Figura 39- Velocidade $u_x$ em $t=12$ . (a) $L=2D$ . (b) $L=3D$ . (c) $L=4D$ .....	72
Figura 40- Linhas de velocidade $u_x$ em $t=12$ , a) $L=2D$ , b) $L=3D$ , c) $L=4D$ .....	73
Figura 41- Gráficos com valores de $C_d$ no segundo cilindro. (a) $L=2D$ . (b) $L=3D$ . (c) $L=4D$ .....	74
Figura 42- Linhas de vorticidade para $L=4D$ .....	75

Figura 43- Parâmetros para o domínio utilizado na simulação do escoamento sobre dois cilindros dispostos paralelamente ao escoamento, $LX=30D$ , $LY=15D$ , $LI=10D$ , $D=0.1$ , $Re=200$ , $t=12$ e $L$ variando entre $2D$ e $4D$ .....	76
Figura 44- Malha inicial para $L=2D$ . (a) Malha M1. (b) Distribuição dos erros elementares	76
Figura 45- Malha h-adaptada para $L=2D$ . (a) Malha M2. (b) Distribuição dos erros elementares .....	77
Figura 46- Malha inicial para $L=3D$ . (a) Malha M1. (b) Distribuição dos erros elementares .	77
Figura 47- Malha h-adaptada para $L=3D$ . (a) Malha M2. (b) Distribuição dos erros elementares .....	78
Figura 48- Malha inicial para $L=4D$ . (a) Malha M1. (b) Distribuição dos erros elementares	78
Figura 49- Malha h-adaptada para $L=4D$ . (a) Malha M2. (b) Distribuição dos erros elementares .....	79
Figura 50- Distribuição da velocidade $u_x$ em $t=12$ . (a) $L=2D$ . (b) $L=3D$ . (c) $L=4D$ .....	80
Figura 51- Linhas de velocidade $u_x$ em $t=12$ . (a) $L=2D$ . (b) $L=3D$ . (c) $L=4D$ .....	81
Figura 52: Comportamento do coeficiente $C_l$ para $L=2D$ .....	82
Figura 53: Comportamento do coeficiente $C_l$ para $L=3D$ .....	82
Figura 54: Comportamento do coeficiente $C_l$ para $L=4D$ .....	83
Figura 55- Coeficiente de arrasto (a) e sustentação (b) como função da distância entre os cilindros alinhados verticalmente .....	84

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1- Convenção para os contornos .....	30
Tabela 2- Erro analítico calculado via malhas h-adaptativas .....	50
Tabela 3- Problema de Kovasznay: Erros na malha regular (MR) x Erros na malha h-adaptada M4 .....	51
Tabela 4- Problema de Kovasznay: Erros para a malha M1 nas variáveis $(u_x, u_y, p)$ .....	52
Tabela 5- Problema de Kovasznay: Erros para a malha M4 nas variáveis $(u_x, u_y, p)$ .....	52
Tabela 6- Problema de Vortex de Taylor: Erro analítico calculado para as malhas 1,2 e 3 ....	56
Tabela 7- Cilindro caso 1: Valores limites estabelecidos por Schäfer e Turek (1996).....	59



## LISTA DE ABREVIATURAS

DFC	Dinâmica dos Fluídos Computacionais.
DG	<i>Galerkin Discontinuous</i> (Galerkin Descontínuo).
MDF	Método de Diferenças Finitas.
MEC	Método de Elementos Finitos.
MEF	Método de Elementos de Finitos.
MVF	Método de Volumes Finitos.
Re	Número de Reynolds.
BAMG	Gerador de Malha Anisotrópica Bidimensional.
ZZ	Zienkiewicz e Zhu.

## LISTA DE SÍMBOLOS

### Alfabeto Latino

$Cd$	Coeficiente de arrasto.
$Cl$	Coeficiente de sustentação.
$D$	Diâmetro do cilindro.
$d$	Dimensão Física do Problema.
$\ E\ $	Medida total dos gradientes acumulados no sistema.
$\ e_u\ _{L_2}$	Norma do erro em velocidade na norma $L_2$ .
$\ e_p\ _{L_2}$	Norma do erro em pressão na norma $L_2$ .
$\ e\ _k$	Norma do erro para o elemento $k$ da malha.
$\ e_{\nabla u_x^{Ap}}\ _{L_2}$	Norma do erro no gradiente de velocidade na direção $x$ .
$\ e_{\nabla u_y^{Ap}}\ _{L_2}$	Norma do erro no gradiente de velocidade na direção $y$ .
$\ e_{\nabla p^{Ap}}\ _{L_2}$	Norma do erro no gradiente de pressão.
$\bar{e}$	Erro limite admissível por elemento.
$e_u$	Erro elementar.
$e^*$	Erro recuperado.
$f$	Vetor de forças.
$Fd$	Força de arrasto.
$Fl$	Força de sustentação.
$h_{old}$	Tamanho do elemento na malha corrente.
$h_{new}$	Tamanho do elemento na malha futura.
$J$	Jacobiano.
$\bar{\eta}$	Erro percentual relativo admissível.

$\eta$	Erro percentual relativo.
$\hat{n}$	Vetor normal.
$N$	Ordem do polinômio interpolador para no método DG.
$Nel$	Número total de elementos na malha.
$Nel_{new}$	Número total de elementos para a malha futura.
$N_p$	Número de nós em cada elemento.
$V_{ij}$	Matriz de Vandermonde.
$h_c$	Dimensão vertical do canal
$\mathbf{u}$	Vetor de velocidade.
$\mathbf{u}^*$	Vetor de velocidade recuperada.
$\mathbf{u}^{AP}$	Vetor velocidade aproximado pelo método numérico.
$u_x$	Componente x da velocidade.
$u_x^{AP}$	Componente x da velocidade obtida via método numérico.
$u_y$	Componente y da velocidade.
$u_y^{AP}$	Componente y da velocidade obtida via método numérico.
$u_x^*$	Componente recuperado da velocidade na direção x.
$u_y^*$	Componente recuperado da velocidade na direção y.
$U$	Solução analítica.
$U^{AP}$	Solução aproximada pelo método numérico.
$U^*$	Solução recuperada.
$p$	Pressão.
$p^{AP}$	Pressão aproximada por método numérico.
$p^*$	Pressão recuperada.
$P$	Grau polinomial no processo h-adaptativo.
$t$	Tempo.
$\Delta t$	Passo de tempo da solução.
$\nu$	Viscosidade cinemática.

$\mathbf{v}_m^*$  Vetor de velocidades suavizadas no elemento.

$\mathbf{v}_m^*$  Vetor nodal de velocidades recuperadas no elemento.

### **Alfabeto Grego**

$\Delta$  Delta.

$\nabla$  Operador gradiente.

$\Omega$  Domínio global.

$\Omega_h$  Domínio computacional.

$\partial\Omega^I$  Condição de fronteira na entrada.

$\partial\Omega^O$  Condição de fronteira na saída.

$\partial\Omega^W$  Condição de fronteira nas paredes.

$\phi_h$  Função de interpolação.

$\psi_n$  Função base polinomial de ordem n.

$\zeta_K$  Parâmetro de refinamento elementar.

$\omega$  Frequência.

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO .....</b>	<b>15</b>
1.1 OBJETIVOS.....	18
Objetivo Geral .....	18
Objetivos Específicos.....	18
1.2 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO .....	19
<b>2 EQUAÇÕES BÁSICAS DO PROBLEMA .....</b>	<b>20</b>
2.1 EQUAÇÕES DE NAVIER STOKES .....	20
2.2 ADIMENSIONALIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES .....	21
2.3 COEFICIENTES ADIMENSIONAIS .....	22
2.3.1 Coeficiente de arrasto .....	23
2.3.2 Coeficiente de sustentação.....	23
2.3.3 Número de Strouhal (St).....	24
<b>3 MÉTODO DE GALERKIN DESCONTINUO (DG).....</b>	<b>25</b>
3.1 FORMULAÇÃO DO DG BIDIMENSIONAL E DISCRETIZAÇÃO NO ESPAÇO .....	25
3.2 FORMULAÇÃO VARIACIONAL DO PROBLEMA.....	29
3.2.1 Discretização da etapa (a) – advecção.....	32
3.2.2 Discretização da etapa (b) – pressão .....	33
3.2.3 Discretização da etapa (c) – viscosidade .....	33
<b>4 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS H-ADAPTATIVO .....</b>	<b>35</b>
4.1 ESTIMATIVAS DOS ERROS DE DISCRETIZAÇÃO APLICADAS AO PROBLEMA DE NAVIER-STOKES .....	36
4.2 ESTIMADORES DE ERRO BASEADO EM RECUPERAÇÃO .....	40
4.3 TÉCNICAS h-ADAPTATIVAS.....	43
4.4 ALGORITMO ADAPTATIVO APLICADO AO PROBLEMA DE NAVIER-STOKES UTILIZANDO O DG h-ADAPTATIVO.....	45
<b>5 RESULTADOS NUMÉRICOS .....</b>	<b>47</b>

5.1 ESCOAMENTOS DE KOVASZNAY .....	47
5.1.1 Resultados numéricos para o escoamento de Kovasznay h-adaptativo .....	48
5.2 O PROBLEMA DE DECAIMENTO DO VORTEX DE TAYLOR .....	54
5.3 ESCOAMENTO NO ENTORNO DE CILINDROS INSERIDO EM CANAIS RETANGULARES .....	58
5.3.1 Cilindro caso 1 .....	59
5.3.2 Cilindro caso 2 .....	63
5.3.3 Cilindros dispostos paralelamente na horizontal .....	66
5.3.4 Cilindros dispostos paralelamente na vertical .....	75
<b>6 CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>	<b>86</b>
6.1 CONCLUSÃO .....	86
6.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS .....	88
<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>89</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Problemas de diversas áreas da engenharia tais como dinâmica dos fluídos, termodinâmica, resistência dos materiais, dentre outros, são descritos por equações diferenciais parciais. Com exceção de alguns casos particulares, não é possível obter uma solução exata para estes problemas utilizando métodos analíticos. Desse modo, uma alternativa é a utilização de métodos numéricos, como por exemplo: o Método de Diferenças Finitas (MDF), o Método de Elementos de Contorno (MEC), o Método de Volumes Finitos (MVF) e o Método de Elementos Finitos (MEF). Em especial, o MEF tem sido largamente aplicado na busca por uma solução aproximada em problemas complexos de engenharia, tais como: equação de Poisson, equações da elasticidade plana e equações de Navier-Stokes.

As equações de Navier-Stokes buscam determinar os campos de velocidade e pressão em um escoamento. Tais equações descrevem fenômenos relevantes nas mais diversas áreas do conhecimento, possuindo diversas aplicações, tais como: modelagem para previsões climáticas e escoamento de fluidos sobre a superfície de automóveis e aviões.

Nas últimas décadas o Método de Galerkin Descontínuo (DG), considerado uma união entre o MEF e o MVF, tem atraído o interesse de pesquisadores na área de métodos numéricos apresentando diversas vantagens em relação ao método de Elementos Finitos clássico. Hesthaven e Warburton (2008) citam uma série de propriedades do método. De acordo com os autores o método é adequado a diferentes ordens polinomiais e tamanho de elementos, as soluções são suaves por partes, sempre polinomiais e descontínuas entre elementos, as condições de fronteira e a continuidade da interface são aplicadas na forma fraca e todos os operadores são aplicados localmente.

O DG tem tido várias aplicações em problemas de Dinâmica de Fluídos Computacional (DFC). Um aprofundamento teórico do método pode ser encontrado em Cockburn et al, (2000); Arnold et al, (2002); Cockburn (2005); Ern e Proft (2005), Hesthaven e Warburton (2008).

Originalmente, concebido para resolução de problemas puramente advectivos, o DG foi estendido para tratar problemas de advecção-difusão e mostrou-se eficaz na solução das equações de Navier-Stokes (MOUNTLAUR, 2009).

O processo de transformar um modelo de comportamento contínuo em um modelo discreto conduz a erros de aproximação. Quantificar e controlar estes erros têm sido um desafio desde as primeiras aplicações dos métodos numéricos.

O DG caracteriza-se por fazer uso de funções de interpolação descontínuas, fazendo com que sua implementação seja flexível. O método permite alteração no grau das funções de interpolação e na geometria da malha de elementos finitos, sendo ideal para o emprego de otimizações  $h$ ,  $p$  ou  $hp$  adaptativas (HOUSTON, 2000; KLIEBER, 2006).

A utilização de malhas adaptativas, no que concerne a uma discretização espacial construída de forma automatizada, tem se mostrado uma estratégia eficiente para minimizar erros de aproximação. Tais erros, em geral, são avaliados através de diferentes normas. O refinamento da malha, geralmente, é realizado nas regiões em que há a presença de acentuadas variações na solução aproximada, buscando aumentar a qualidade da solução numérica final em conjunto da otimização do esforço computacional, quando comparado com o uso de uma malha uniforme ou com refinamento localizado.

Neste ponto, cabe ressaltar que o processo de adaptatividade de malhas, se não implementado de forma correta, pode piorar o desempenho computacional. Desta forma, os critérios utilizados para definir quais elementos devem ser refinados precisam ser eficientes e ajustados ao problema físico que será resolvido.

Grande parte das estratégias adaptativas utilizam estimativas de erros computadas localmente para o cálculo do parâmetro de refinamento da malha. No DG as estimativas dos erros dividem-se em duas principais categorias: estimativas de erro *a priori* e *a posteriori* (AINSWORTH; ODEN, 2000).

Na estimativa *a priori* os erros são calculados antes que haja uma solução conhecida, fornecendo dados relacionados aos erros de discretização. Segundo (GRATSCH; BATHE, 2005) esse tipo de estimador não é apropriado para estimar o erro real de uma dada malha. Já os estimadores de erro *a posteriori*, de acordo com Zienkiewicz e Zhu (1987), utilizam o próprio resultado numérico e o erro é estimado após uma solução aproximada ser conhecida. Essas estimativas podem ser utilizadas para desenvolver algoritmos de malhas adaptativas de elementos finitos, visto que permite computar o tamanho dos erros locais (PRUDHOMME et al, 2003).

Dois parâmetros fundamentais são obtidos em estimativas de erro *a posteriori*, sendo eles o indicador e o estimador de erro. Um indicador de erro identifica os elementos que possuem os maiores erros através de alguma norma para que seja realizado o refinamento da



malha. Já o estimador de erro indica uma medida global e local do erro e pode ser utilizado como um critério de parada (CHELLAMUTHU, 1995). O nível necessário de refinamento irá depender da precisão desejada para a solução de cada problema físico em questão.

Visto que a solução pode apresentar grande variação no interior do domínio, malhas não uniformes são fundamentais para garantir a precisão de forma eficiente. O refinamento adaptativo busca fazer com que a malha de elementos finitos esteja suficientemente adaptada ao comportamento da solução.

Uma técnica comum para guiar a adaptatividade em problemas relacionados à DFC é através da identificação das características dominantes do escoamento, como por exemplo, as ondas de choque e a camada limite. Desta forma encontram-se as regiões que apresentam os maiores gradientes na solução (BAKER, 1997; PIRZADEH, 1999; WARREN et al, 1991).

Zienkiewicz e Zhu (1987, 1992a, 1992b) propõem a utilização de um estimador de erro baseado em recuperação do gradiente da solução. A ideia consiste em utilizar a solução numérica para obter uma solução recuperada (suavizada), por meio da qual são realizadas as estimativas dos erros. Nesse caso, a solução recuperada é caracterizada por ser contínua entre os elementos e possuir um grau polinomial acima da solução encontrada pelo de aproximação (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000). Assim, a estimativa do erro é realizada comparando-se a solução obtida via DG com a solução recuperada.

A qualidade da estimativa de erro, segundo um estimador baseado em recuperação, está intimamente ligada à qualidade dos valores recuperados dos gradientes da solução. Deste modo, várias pesquisas têm sido desenvolvidas na busca por valores recuperados com maior precisão. Dentre essas se destacam: Zienkiewicz e Zhu (1987), Zienkiewicz e Zhu (1992a, 1992b), Ubertini (2004), Zhang e Naga (2005) e Huang e Yi (2010).

Vários trabalhos e técnicas para uma estimativa do erro a posteriori são utilizados no DG. Podem ser citados: Ainsworth (2007), Becker et al, (2003), Giani et al, (2014), Houston et al, (2002), Karakashian e Pascal (2003), Karasozen et al, (2015).

Jáskowiec (2015) utiliza o método de recuperação de gradiente de Zienkiewicz-Zhu (ZZ) para estimar o erro e posteriormente refinar a malha. O estimador ZZ é simples, eficaz e é amplamente utilizado em análises que empregam elemento finito padrão (ZIENKIEWICZ e ZHU, 1992a, 1992b; KARAKOSE e ASKES, 2015).

Em muitos problemas que envolvem escoamento de fluidos, regiões que apresentam grande variação nos valores das variáveis de interesse estão incorporadas em um domínio amplo que, em geral, apresenta valores de incógnitas que variam lentamente. Além disso, as

regiões que possuem os maiores gradientes na solução, frequentemente, desaparecem ou alteram suas formas e locais conforme o avanço do passo da solução.

Buscando obter soluções com alta acurácia numérica para simulações de escoamento de fluido incompressível através de simulações computacionais utilizando o método DG, este trabalho apresenta a implementação computacional de uma técnica h-adaptativa para geração de malhas de elementos finitos de forma automática que se adequam a diferentes geometrias e problemas físico e que tem como função equidistribuir os erros ao longo do domínio. Além de melhorar a qualidade da solução numérica o emprego de malhas h-adaptativa busca otimizar o custo computacional empregado nas simulações e que muitas vezes é o fator limitante das simulações numéricas.

## 1.1 OBJETIVOS

### **Objetivo Geral**

O corrente estudo tem como objetivo geral a implementação, validação e aplicação de uma técnica h-adaptativa isotrópica da malha de elementos finitos em problemas transientes de escoamento regidos pelas equações de Navier-Stokes para fluidos incompressíveis a baixo Reynolds empregando o Método de Galerkin Descontínuo.

### **Objetivos Específicos**

O objetivo geral pode ser dividido nos seguintes objetivos específicos:

- i. Obter uma estrutura computacional que permita a solução das equações de Navier-Stokes para fluidos incompressíveis em problemas transientes de escoamento empregando o Método de Galerkin Descontínuo.
- ii. Implementar uma técnica h-adaptativa de malha de elementos finitos para problemas bidimensionais, a qual será acoplada ao método de discretização de Galerkin Descontínuo.
- iii. Validar a estratégia h-adaptativa utilizando problemas com solução analítica conhecida.
- iv. Analisar a eficiência do método numérico implementado comparando os resultados obtidos com os existentes na literatura em simulações de escoamento em domínios clássicos.

## 1.2 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Com o intuito de atingir os objetivos apresentados anteriormente, este texto é dividido da seguinte forma:

No corrente capítulo é apresentado a importância e relevância da aplicação do DG em análises de DFC, em especial em escoamentos que apresentam elevados gradientes na solução numérica. Ademais, são apresentados os objetivos gerais e específicos deste trabalho, além de uma breve revisão bibliográfica a respeito de conceitos importantes dentro do estudo da DFC e sobre estimativa de erro e adaptatividade.

No segundo capítulo são apresentadas as equações de Navier-Stokes considerando o escoamento incompressível. Realiza-se o processo de adimensionalização de variáveis importantes e apresenta-se alguns coeficientes aerodinâmicos adimensionais utilizados como parâmetros em simulações numéricas.

No terceiro capítulo apresenta-se o método DG bidimensional e a formulação variacional para resolução do problema de Navier-Stokes incompressível.

No quarto capítulo são apresentados os principais conceitos do método h-adaptativo, a formulação para cálculo do erro e dos gradientes da solução em cada elemento da malha e um algoritmo do processo de cálculo implementado computacionalmente.

No quinto capítulo são expostos e discutidos os resultados numéricos do trabalho.

Por fim, no sexto capítulo apresentam-se as considerações finais desta dissertação.

## 2 EQUAÇÕES BÁSICAS DO PROBLEMA

Apresenta-se neste capítulo um detalhamento das equações de Navier-Stokes. Estas equações possibilitam computar os campos de velocidade e pressão em um escoamento, modelando o comportamento do escoamento de fluidos. Desta forma, é de grande importância para o estudo do comportamento aerodinâmico. Realizando-se a adimensionalização destas equações, surge o número de Reynolds. Este parâmetro é utilizado para definir se o escoamento é laminar, transiente ou turbulento. Por fim são apresentados os coeficientes adimensionais de arrasto, sustentação e o número de Strouhal.

### 2.1 EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES

As equações de Navier-Stokes resultam da aplicação da segunda Lei de Newton a um elemento de fluido em um escoamento, considerando as forças atuantes sobre o elemento e o fluido newtoniano (SOUZA, 2013). Estas equações dependem do tempo e para um fluido incompressível em duas dimensões podem ser escritas como:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad \text{em } [0, t] \times \Omega, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{em } [0, t] \times \Omega, \quad (2)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_0) = \mathbf{u}_0 \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (3)$$

onde  $\mathbf{u} = (u_x(x, y; t), u_y(x, y; t))$  é o vetor velocidade bidimensional,  $p(x, y; t)$  é a pressão,  $\nu$  é a viscosidade cinemática,  $\rho$  é a densidade,  $\mathbf{u}_0$  é a velocidade inicial,  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  é o domínio e  $[0, t]$  o intervalo de tempo.

Considerando o fluxo convectivo  $\mathbf{F}$ , a Eq. (1) também pode ser escrita na forma:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F} = -\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (4)$$

$$\mathbf{F} = [\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2] = \begin{bmatrix} u_x^2 & u_x u_y \\ u_x u_y & u_y^2 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Suprimindo o primeiro termo do lado esquerdo da Eq.(1), obtém-se a forma estacionária das equações de Navier-Stokes, dada por:

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \text{ em } [0, t] \times \Omega. \quad (6)$$

## 2.2 ADIMENSIONALIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES

A adimensionalização é necessária no estudo da Mecânica dos Fluidos, ela permite reduzir o número de variáveis envolvidas nas análises e a compactação das equações que governam o fenômeno físico estudado. Esta técnica ainda possibilita que os resultados obtidos nos programas computacionais sejam comparados aos de ensaios experimentais sem a necessidade de conhecer os valores das grandezas dimensionais aplicadas no experimento, bastando para tanto, o conhecimento apenas dos parâmetros adimensionais envolvidos.

Hughes et al (1999) efetuou a adimensionalização para as equações de Navier-Stokes considerando o fluido incompressível, sendo:

$$\mathbf{u}^* = \frac{\mathbf{u}}{U_0}, \quad (7.1)$$

$$p^* = \frac{p}{\rho U_0^2}, \quad (7.2)$$

$$t^* = \frac{t U_0}{L}, \quad (7.3)$$

$$\mathbf{x}^* = \frac{\mathbf{x}}{L}, \quad (7.4)$$

$$\nabla^* = L\nabla, \quad (7.5)$$

$$\nabla^{*2} = L^2\nabla^2, \quad (7.6)$$

$$\nu^* = \frac{\nu}{LU_0}, \quad (7.7)$$

onde  $L$  e  $U_0$  são respectivamente os valores referência para o comprimento e velocidade respectivamente. Substituindo as Eqs. (7) na Eq. (1), tem-se:

$$\frac{U_0^2}{L} \mathbf{u}^* \cdot \frac{U_0^2}{L} (\mathbf{u}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{u}^* = -\frac{U_0^2}{L} \nabla^* p^* + \frac{U_0}{L^2} \nu \nabla^{*2} \mathbf{u}^*$$

$$\nabla^* \cdot \mathbf{u} = 0.$$

Efetuando-se a multiplicação por  $L/U_0^2$  e suprimindo os asteriscos, chega-se as equações adimensionalizadas de Navier-Stokes.

$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}, \quad \text{em } [0, t] \times \Omega, \quad (8)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{em } [0, t] \times \Omega, \quad (9)$$

sendo  $Re = \frac{U_0 L}{\nu}$  o número de Reynolds.

### 2.3 COEFICIENTES ADIMENSIONAIS

Os coeficientes de arrasto ( $Cd$ ) e sustentação ( $Cl$ ) são largamente utilizados nos estudos da aerodinâmica e medem as forças a que um corpo está submetido quando imerso em um escoamento de fluido.

Estes coeficientes podem ser obtidos por via experimental através de ensaios em túneis de vento utilizando modelos em escala ou por via numérica através da aplicação da dinâmica dos fluidos computacional. De forma numérica as equações da mecânica dos fluidos são discretizadas utilizando um método numérico cuja solução é obtida com o auxílio de computadores. No presente trabalho ( $C_d$ ) e ( $C_l$ ) serão obtidos numericamente.

### 2.3.1 Coeficiente de arrasto ( $C_d$ )

O coeficiente de arrasto é um número adimensional cujo componente da força aerodinâmica é paralela e com direção oposta ao movimento (BATCHELOR, 1967). Este coeficiente é utilizado para quantificar a resistência de um objeto ao escoamento. O valor de ( $C_d$ ) é obtido como segue (PEREIRA, 2010).

$$C_d = \frac{F_D}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2 A}. \quad (10)$$

Sendo:

$U_\infty$  - Velocidade da corrente livre;

$F_D$  - Força de arrasto;

$A$  - Área de referência;

$\rho$  - Massa específica do fluido.

### 2.3.2 Coeficiente de sustentação ( $C_l$ )

O coeficiente de sustentação é um número adimensional e tem relação com a sustentação gerada por um corpo, a pressão dinâmica do escoamento ao redor do corpo e uma área de referência associada a ele, cujo componente da força aerodinâmica é perpendicular à direção do movimento (PEREIRA, 2010).

$$Cl = \frac{F_L}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2 A}. \quad (11)$$

Sendo,  $F_L$  a força de sustentação.

### 2.3.3 Número de Strouhal (St)

O número de Strouhal é um número adimensional que descreve o mecanismo de oscilação do escoamento. Determinadas características em um escoamento variam no tempo com periodicidade bem definida. A adimensionalização da frequência desse fenômeno periódico corresponde ao número de Strouhal (PEREIRA, 2010), sendo:

$$St = \frac{\omega L}{U_\infty}, \quad (12)$$

com  $\omega$  representando a frequência de oscilação do escoamento devido ao desprendimento de vórtices da superfície do corpo e  $L$  um comprimento característico. Sendo o diâmetro do cilindro no caso de um escoamento sobre um cilindro.



### 3 MÉTODO DE GALERKIN DESCONTÍNUO (DG)

O método DG é amplamente difundido e empregado em simulações computacionais envolvendo escoamento de fluidos. As propriedades difusivas do método são reconhecidas quando comparado aos esquemas clássicos de elementos finitos ou diferenças finitas. Esta propriedade está associada a utilização de funções descontínuas e faz com que haja uma menor dissipação numérica para outras partes do domínio em regiões de descontinuidade da solução (HOUSTON, 2000). Este Capítulo traz uma abordagem sucinta do método DG visto que este trabalho tem foco na aplicação do método h-adaptativo de malha. Uma abordagem mais detalhada do método pode ser obtida em Hesthaven e Warburton (2008).

#### 3.1 FORMULAÇÃO DO DG BIDIMENSIONAL E DISCRETIZAÇÃO NO ESPAÇO

A formulação do método DG bidimensional tem como base a teoria expressa em Hesthaven e Warburton (2008).

Considerando um domínio  $\Omega$  subdividido em  $k$  elementos triangulares tem-se:

$$\Omega \simeq \Omega_h = \sum_{k=1}^{Nel} D^k, \quad (13)$$

onde  $D^k$  é assumido como um triângulo equilátero. Deste modo,  $\Omega$  é aproximado por um polígono linear por partes, sendo cada segmento de linha uma face de um triângulo. Uma aproximação local é expressa na Eq. (14).

$$\mathbf{x} \in D^k : \mathbf{u}_h^k(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^{N_p} \mathbf{u}_h^k(\mathbf{x}_i, t) \mathcal{L}_i^k(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{N_p} \hat{\mathbf{u}}_n^k(t) \psi_n(\mathbf{x}). \quad (14)$$

Onde,  $\mathcal{L}_i^k(\mathbf{x})$  é o polinômio multidimensional de Lagrange baseado em pontos da malha,  $\mathbf{x}_i$ , e  $\{\psi_n(\mathbf{x})\}_{n=1}^{N_p}$  é a base polinomial bidimensional de ordem  $N$  e  $N_p$  representa o número total de nós da expansão local a nível elementar. A relação entre  $N$  e  $N_p$  é dada por:

$$N_p = \frac{(N+1)(N+2)}{2}. \quad (15)$$

A forma fraca e forte local genérica do DG considerando uma análise bidimensional pode ser escrita respectivamente através das Eqs. (16) e (17).

$$\int_{D^k} \left[ \frac{\partial \mathbf{u}_h^k}{\partial t} \mathcal{L}_i^k(\mathbf{x}) - \mathbf{f}_h^k \cdot \nabla \mathcal{L}_i^k(\mathbf{x}) \right] dx = - \int_{\partial D^k} \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{f}^* \mathcal{L}_i^k(\mathbf{x}) dx. \quad (16)$$

$$\int_{D^k} \left[ \frac{\partial \mathbf{u}_h^k}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{f}_h^k \right] \mathcal{L}_i^k(\mathbf{x}) dx = \int_{\partial D^k} \hat{\mathbf{n}} \cdot [\mathbf{f}_h^k - \mathbf{f}^*] \mathcal{L}_i^k(\mathbf{x}) dx. \quad (17)$$

Para especificar o fluxo numérico  $\mathbf{f}^*$ , considera-se o fluxo local de Lax-Friedrichs.

$$\mathbf{f}^*(a,b) = \frac{\mathbf{f}(a) + \mathbf{f}(b)}{2} + \frac{C}{2} \hat{\mathbf{n}}(a-b). \quad (18)$$

Onde  $(a,b)$  é a solução interior e exterior ao elemento respectivamente,  $C$  é o máximo local do fluxo Jacobiano direcional, isto é:

$$C = \max_{u \in [a,b]} \left| \hat{n}_x \frac{\partial f_x}{\partial u} + \hat{n}_y \frac{\partial f_y}{\partial u} \right|. \quad (19)$$

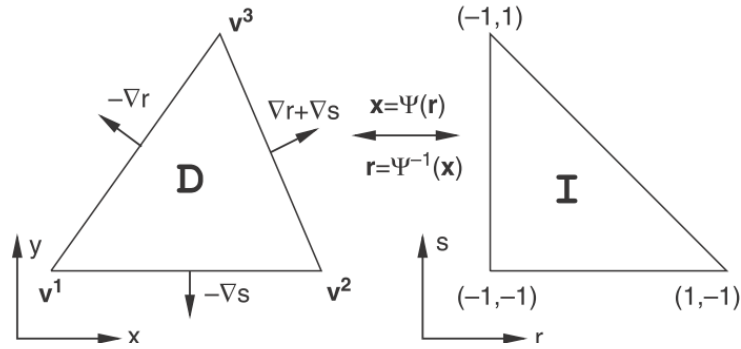
Onde  $\mathbf{f} = (f_x, f_y)$ .

A Figura 1 apresenta o mapeamento,  $\psi$ , conectando o triângulo equilátero,  $x \in D^k$ , com o triângulo padrão, definido por:

$$I = \{ \mathbf{r} = (r,s) / (r,s) \geq -1; r+s \leq 0 \}. \quad (20)$$

Para conectar os dois triângulos,  $D^k$  é expandido por três vértices  $(\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \mathbf{v}^3)$ , contados no sentido anti-horário. As coordenadas do baricentro,  $(\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3)$ , são definidas com a seguinte propriedade:

$$0 \leq \lambda^i \leq 1, \quad \lambda^1 + \lambda^2 + \lambda^3 = 1. \quad (21)$$



**Figura 1-** Notação para o mapeamento entre dois triângulos  
**Fonte-** Adaptado de Hesthaven e Warburton (2008).

Qualquer ponto no triângulo, abrangido pelos três vértices, pode ser expresso por:

$$\mathbf{x} = \lambda^2 \mathbf{v}^1 + \lambda^3 \mathbf{v}^2 + \lambda^1 \mathbf{v}^3. \quad (22)$$

De forma semelhante os pontos em I são expressos como:

$$\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = \lambda^2 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda^3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda^1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Combinando com a Eq. (21) tem-se:

$$\lambda^1 = \frac{s+1}{2}, \lambda^2 = \frac{r+s}{2}, \lambda^3 = \frac{r+1}{2}. \quad (24)$$

E, desta forma, o mapeamento direto:

$$\mathbf{x} = -\frac{r+s}{2} \mathbf{v}^1 + \frac{r+1}{2} \mathbf{v}^2 + \frac{s+1}{2} \mathbf{v}^3 = \psi(\mathbf{r}). \quad (25)$$

O mapeamento é linear em  $r$ . Como consequência tem-se dois triângulos interligados por uma transformação, isto é, uma constante de transformação Jacobiana. A métrica para o mapeamento é expressa por:

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_r & x_s \\ y_r & y_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_x & r_y \\ s_x & s_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (26)$$

Da Eq. (25) tem-se:

$$(x_r, y_r) = x_r = \frac{\mathbf{v}^2 - \mathbf{v}^l}{2}, \quad (x_s, y_s) = x_s = \frac{\mathbf{v}^3 - \mathbf{v}^l}{2}, \quad (27)$$

resultando em:

$$r_x = \frac{y_s}{J}, \quad r_y = -\frac{x_s}{J}, \quad s_x = -\frac{y_r}{J}, \quad s_y = \frac{x_r}{J}, \quad (28)$$

com o Jacobiano (J) sendo:

$$J = x_r y_s - x_s y_r. \quad (29)$$

Através deste mapeamento é possível desenvolver os polinômios e operadores em I. Considerando uma aproximação polinomial local tem-se:

$$u(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{N_p} \hat{u}_n \psi_n(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{N_p} u(\mathbf{r}_i) \mathcal{L}_i(\mathbf{r}). \quad (30)$$

Definem-se os coeficientes da expansão,  $\hat{u}_n$ , através de uma interpolação para evitar problemas com a necessidade de avaliar integrais multidimensionais. Isto leva à expressão:

$$V\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u}, \quad (31)$$

onde  $\hat{\mathbf{u}} = [\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_{N_p}]^T$  são os  $N_p$  coeficientes da expansão e  $\mathbf{u} = [u(\mathbf{r}_1), \dots, u(\mathbf{r}_{N_p})]^T$  representa os  $N_p$  valores da solução nos pontos da malha.

Para garantir um comportamento numérico estável da matriz de Vandermonde  $V$ , tem-se:

$$V_{ij} = \psi_j(\mathbf{r}_i). \quad (32)$$

Identificada uma base ortonormal e uma maneira de construir os conjuntos nodais de forma a melhorar a interpolação para o triângulo, é possível construir a matriz de Vandermonde ( $V$ ) estável para efetuar operações no triângulo. Dessa forma constrói-se uma aproximação local como:

$$u(\mathbf{r}) \approx u_h(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{N_p} \hat{u}_n \psi_n(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{N_p} u(\mathbf{r}_i) \ell_i(\mathbf{r}), \quad (33)$$

onde  $\mathbf{r}_i$  é um conjunto nodal bidimensional e  $\psi_n(\mathbf{r})$  uma base polinomial.

### 3.2 FORMULAÇÃO VARIACIONAL DO PROBLEMA

Nesta seção, a abordagem semi-discreta é utilizada para resolver numericamente as equações de Navier-Stokes. A discretização espacial é realizada através do DG. O avanço do escoamento no tempo é guiado pelo Método de Divisão Temporal expresso em Karniadakis (1991,1999). Este método é conhecido por apresentar alta ordem de convergência. Ou seja, obtém-se um esquema estável mesmo empregando um passo de tempo consideravelmente grande. Outra característica importante deste método é a possibilidade de efetuar a interpolação com polinômios de mesma ordem para os campos de pressão e velocidade (FERRER et al, 2014; RICE e SCHNIPKE, 1986).

Considerando um escoamento transiente, em cada tempo específico, três etapas distintas são resolvidas de acordo com Garcia et al, (2017), sendo elas:

- (a) Advecção;
- (b) Projeção da pressão;
- (c) Termo viscoso.

Começando com os dados iniciais do problema, as velocidades intermediárias aproximadas,  $\tilde{\mathbf{u}}$  e  $\tilde{\tilde{\mathbf{u}}}$ , são computadas das etapas (a) e (b) respectivamente. A velocidade para o tempo analisado é obtida em (c) através dos resultados obtidos nas duas etapas iniciais.

A Tabela 1 apresenta a convenção dos domínios adotados nas equações relativas a este Capítulo.

**Tabela 1-** Convenção para os contornos

$\Gamma_i^k$	$\partial D^k - \{ \partial \Omega_h \}$ (faces interiores)
$\Gamma_o^k$	$\partial D^k \cap \partial \Omega_h$ (saída)
$\Gamma_{IWC}^k$	$\partial D^k \cap \{ \partial \Omega_h \text{ (Entrada) ou } \partial \Omega_h \text{ (Parede) } \}$

**Fonte:** Autor (2019).

Na etapa (a), uma lei de conservação é resolvida para uma primeira velocidade intermediária  $\tilde{\mathbf{u}}$  usando o esquema de segunda ordem de Adams-Bashforth (A-B).

$$\frac{\gamma_0 \tilde{\mathbf{u}}_0 - \alpha_0 \mathbf{u}^n - \alpha_1 \mathbf{u}^{n-1}}{\Delta t} = -\beta_0 \mathcal{A}(\mathbf{u}^n) - \beta_1 \mathcal{A}(\mathbf{u}^{n-1}), \quad (34)$$

onde o termo de advecção da equação de Navier-Stokes no passo de tempo  $j$  é dado por:

$$\mathcal{A}(\mathbf{u}^j) = \nabla \cdot \begin{bmatrix} (u_x^j)^2 & u_x^j u_y^j \\ u_x^j u_y^j & (u_y^j)^2 \end{bmatrix}. \quad (35)$$

Para o primeiro passo de tempo, os seguintes coeficientes são utilizados para reduzir o esquema para o método de Euler.

$$\gamma_0 = 1, \quad \alpha_0 = 1, \quad \alpha_1 = 0, \quad \beta_0 = 1, \quad \beta_1 = 0. \quad (36)$$

Partindo do pressuposto de que  $u_x^0$  e  $u_y^0$  são fornecidos como condições iniciais, os passos de tempo subsequentes utilizam os coeficientes:

$$\gamma_0 = \frac{3}{2}, \quad \alpha_0 = 2, \quad \alpha_1 = -\frac{1}{2}, \quad \beta_0 = 2, \quad \beta_1 = -1. \quad (37)$$

Na etapa (b), uma segunda velocidade intermediária  $\tilde{\tilde{\mathbf{u}}}$ , atualiza a primeira aproximação  $\tilde{\mathbf{u}}$  computada na Eq. (34). Isto é realizado resolvendo:

$$\gamma_0 \frac{\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}}{\Delta t} = -\nabla \bar{p}^{n+1}. \quad (38)$$

Devido à condição de livre divergência de  $\tilde{\mathbf{u}}$ , aplica-se o operador divergente sobre a Eq. (38), levando a seguinte equação elíptica para  $\bar{p}^{n+1}$  como:

$$\nabla \bar{p}^{n+1} = \frac{\gamma_0}{\Delta t} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}. \quad (39)$$

Visando obter uma Equação de Poisson consistente, uma condição de contorno de Newman é aplicado na entrada. Já as condições de contorno nas paredes são concebidas a partir do produto da normal voltada para a parte externa ao domínio com a parte do balanço de momento das equações de Navier-Stokes.

$$\frac{\partial \bar{p}^{n+1}}{\partial \hat{\mathbf{n}}} = -\beta_0 \hat{\mathbf{n}} \cdot [ \mathcal{A}(\mathbf{u}^n) + \nu \nabla \times \boldsymbol{\omega}^n ] - \beta_1 \hat{\mathbf{n}} \cdot [ \mathcal{A}(\mathbf{u}^{n-1}) + \nu \nabla \times \boldsymbol{\omega}^{n-1} ]. \quad (40)$$

Onde  $\boldsymbol{\omega}^j = \nabla \times \mathbf{u}^j$ . Além da propriedade de consistência esta condição de contorno reforça a exigência de incompressibilidade e faz com que o valor do fluxo divergente no contorno seja proporcional ao passo de tempo, resultando em um método estável (KARNIADAKIS, 1999). Tendo avaliado  $\bar{p}$  através das Eqs. (39) e (40), obtém-se  $\tilde{\mathbf{u}}$  usando a Eq. (38).

Finalmente, o intervalo de tempo é totalmente executado resolvendo uma equação elíptica, onde se encontra o campo de velocidade atual  $\mathbf{u}^{n+1}$ , correspondendo à parte viscosa do procedimento.

$$\Delta \mathbf{u}^{n+1} = \frac{\gamma_0}{\nu} \left( \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}}{\Delta t} \right). \quad (41)$$

Define-se o elemento finito descontínuo no espaço  $V_h(\Omega_h)$ :

$$V_h(\Omega_h) = \{ v_h \in L^2(\Omega) : \forall D^k \in \Omega_h, v_h|_{D^k} \in P_N(D^k) \}, \quad (42)$$

onde  $P_N(D^k)$  denota o espaço de polinômios definido sobre  $D^k$ .

Cada uma das etapas de tempo (a), (b) e (c) terão suas equações discretizadas espacialmente.

### 3.2.1 Discretização da etapa (a) – advecção

Inicia-se pelo rearranjo da Eq. (34).

$$\tilde{\mathbf{u}} = \frac{\alpha_0}{\gamma_0} \mathbf{u}^n + \frac{\alpha_1}{\gamma_0} \mathbf{u}^{n-1} - \frac{\beta_0 \Delta t}{\gamma_0} \mathcal{A}(\mathbf{u}^n) - \frac{\beta_1 \Delta t}{\gamma_0} \mathcal{A}(\mathbf{u}^{n-1}). \quad (43)$$

Da Eq. (43) extraísse a forma variacional discreta sobre um elemento  $D^k \subset \Omega_h$ , encontrando  $\tilde{\mathbf{u}} \in V_h$  tal que:

$$\begin{aligned} (\tilde{\mathbf{u}}_h, \phi_h)_{D^k} &= \frac{\alpha_0}{\gamma_0} (\mathbf{u}_h^n, \phi_h)_{D^k} + \frac{\alpha_1}{\gamma_0} (\mathbf{u}_h^{n-1}, \phi_h)_{D^k} - \frac{\beta_0 \Delta t}{\gamma_0} (\mathcal{A}(\mathbf{u}_h^n), \phi_h)_{D^k} \\ &\quad - \frac{\beta_1 \Delta t}{\gamma_0} (\mathcal{A}(\mathbf{u}_h^{n-1}), \phi_h)_{D^k}, \forall \phi_h \in V_h, \end{aligned} \quad (44)$$

onde  $(\cdot, \cdot)_{D^k}$  denota o produto interno  $L^2$  em  $L^2(D^k)$ .

A seguinte notação é introduzida:

$$\mathcal{A}(\mathbf{u}^j) = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_x^j & \mathcal{A}_y^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla \cdot \mathbf{F}_1^j & \nabla \cdot \mathbf{F}_2^j \end{bmatrix}^T, \quad (45)$$

onde  $\mathbf{F}_1^j = \begin{bmatrix} (u_x^j)^2 & u_x^j u_y^j \end{bmatrix}^T$  e  $\mathbf{F}_2^j = \begin{bmatrix} u_x^j u_y^j & (u_y^j)^2 \end{bmatrix}^T$ .

Usando a Eq. (45) desenvolve-se o componente x do vetor da Eq. (44).



$$\begin{aligned}
(\tilde{u}_h, \phi_h)_{D^k} &= \frac{\alpha_0}{\gamma_0} (u_h^n, \phi_h)_{D^k} + \frac{\alpha_1}{\gamma_0} (u_h^{n-1}, \phi_h)_{D^k} - \frac{\beta_0 \Delta t}{\gamma_0} (\nabla \cdot \mathbf{F}_1^n, \phi_h)_{D^k} \\
&\quad - \frac{\beta_1 \Delta t}{\gamma_0} (\nabla \cdot \mathbf{F}_1^{n-1}, \phi_h)_{D^k}, \forall \phi_h \in V_h,
\end{aligned} \tag{46}$$

onde aplicando duas integrações por partes consecutivas sobre os dois últimos termos do lado direito da Eq. (46), tem-se:

$$\begin{aligned}
(\tilde{u}_h, \phi_h)_{D^k} &= \frac{\alpha_0}{\gamma_0} (u_h^n, \phi_h)_{D^k} + \frac{\alpha_1}{\gamma_0} (u_h^{n-1}, \phi_h)_{D^k} - \frac{\beta_0 \Delta t}{\gamma_0} (\nabla \cdot \mathbf{F}_1^n, \phi_h)_{D^k} - \frac{\beta_1 \Delta t}{\gamma_0} (\nabla \cdot \mathbf{F}_1^{n-1}, \phi_h)_{D^k} \\
&\quad - \frac{\beta_0 \Delta t}{\gamma_0} ((\mathbf{F}_1^{*n} - \mathbf{F}_1^n) \cdot \hat{\mathbf{n}}, \phi_h)_{\partial D^k} - \frac{\beta_1 \Delta t}{\gamma_0} ((\mathbf{F}_1^{*n-1} - \mathbf{F}_1^{n-1}) \cdot \hat{\mathbf{n}}, \phi_h)_{\partial D^k}, \forall \phi_h \in V_h,
\end{aligned} \tag{47}$$

sendo que  $\mathbf{F}_1^{*j} = \{\{\mathbf{F}_1^j\}\} + \frac{C}{2} [[u_x]]$  é o fluxo numérico de Lax-Friedrichs, o parâmetro  $C$  é um valor definido para face de cada elemento e representa o máximo valor absoluto entre as componentes normais de velocidade,  $\mathbf{u}^- \cdot \hat{\mathbf{n}}$  e  $\mathbf{u}^+ \cdot \hat{\mathbf{n}}$ , computado em cada nó de face (HESTHAVEN e WARBURTON, 2008). A componente  $y$  de  $\tilde{u}_h$  é obtida da mesma maneira.

### 3.2.2 Discretização da etapa (b) – pressão

A formulação variacional discreta (Symmetric Interior Penalty DG (SIPDG)), descrita por Hartmann (2008) para a Eq. (39) com  $p_h \in V_h$  é tal que:

$$\begin{aligned}
(\nabla p_h, \nabla \phi_h)_{D^k} &- \frac{1}{2} ([[p_h]] \cdot \hat{\mathbf{n}}, \nabla \phi_h \cdot \hat{\mathbf{n}})_{\Gamma_i^k} - (\{\{\nabla p_h\}\} \cdot \hat{\mathbf{n}}, \phi_h)_{\Gamma_i^k} + (\tau^k [[p_h]] \cdot \hat{\mathbf{n}}, \phi_h)_{\Gamma_i^k} \\
&- (\nabla \bar{p}_h, \nabla \phi_h \cdot \hat{\mathbf{n}})_{\Gamma_o^k} - (\nabla \bar{p}_h \cdot \hat{\mathbf{n}}, \phi_h)_{\Gamma_o^k} + (\tau \bar{p}_h, \phi_h)_{\Gamma_o^k} = -\frac{\gamma_0}{\Delta t} (\nabla \cdot \tilde{u}, \phi_h)_{D^k} - (p^o, \nabla \phi_h \cdot \hat{\mathbf{n}})_{\Gamma_o^k} \\
&+ (\beta_0 \frac{\partial p_h^n}{\partial \hat{\mathbf{n}}} + \beta_1 \frac{\partial p_h^{n-1}}{\partial \hat{\mathbf{n}}}, \phi_h)_{\Gamma_{wbc}^k} + (\tau_k p^o, \phi_h)_{\Gamma_o^k}, \forall \phi_h \in V_h.
\end{aligned} \tag{48}$$

### 3.2.3 Discretização da etapa (c) – termo viscoso

A formulação variacional discreta para a Eq. (41) com  $u_h \in V_h$  é expressa por:

$$\begin{aligned}
& (\nabla p_h, \nabla \phi_h)_{D^k} + \frac{\gamma_0}{\nu \Delta t} (u_h, \phi_h)_{D^k} - \frac{1}{2} ([ [u_h] ] \cdot \hat{\mathbf{n}}, \nabla \phi_h \cdot \hat{\mathbf{n}})_{\Gamma_i^k} - (u_h^-, \nabla \phi_h \cdot \hat{\mathbf{n}})_{\Gamma_{iw}^k} - (\nabla u_h \cdot \hat{\mathbf{n}}, \phi_h)_{\Gamma_i^k} \\
& - (\nabla u_H^- \cdot \hat{\mathbf{n}}, \phi_h)_{\Gamma_o^k} + (\tau^k [ [u_h] ] \cdot \hat{\mathbf{n}}, \phi_h)_{\Gamma_i^k} + (\tau^k u_h^-, \phi_h)_{\Gamma_{iw}^k} = \frac{\gamma_0}{\nu \Delta t} (\tilde{u}_h, \phi_h)_{D^k} - (u^{WI}, \nabla \phi_h \cdot \hat{\mathbf{n}})_{\Gamma_{iw}^k} \quad (49) \\
& + \left( \frac{\partial u_h^{n+1}}{\partial \hat{\mathbf{n}}}, \phi_h \right)_{\Gamma_o^k} + (\tau^k u^{IWC}, \phi_h)_{\Gamma_{iw}^k} \quad \forall \phi_h \in V_h.
\end{aligned}$$

#### 4 MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS H-ADAPTATIVO

Técnicas h-adaptativas são caracterizadas por alterar o tamanho dos elementos na malha, contudo o grau do polinômio de aproximação não é modificado (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000). A modificação do tamanho do elemento, em geral, é guiada por informações locais de estimadores de erros, buscando obter soluções convergentes e que retratam os problemas físicos de forma satisfatória. Uma forma de estimar os novos tamanhos elementares e reconstruir a malha de elementos finitos fazendo uso de geradores de malhas é apresentado em Zienkiewicz e Zhu (1987).

As três formas básicas de adaptatividade empregadas são: h, p e r (COOK et al, 2002). A mais comum, e que será utilizada neste trabalho, é a h-adaptatividade de malha. Esta técnica consiste na alteração dos tamanhos dos elementos e consequente modificação do número de graus de liberdade, mantendo-se constante o grau polinomial (ZIENKIEWICZ; ZHU, 1987; ZHU; ZIENKIEWICZ, 1988).

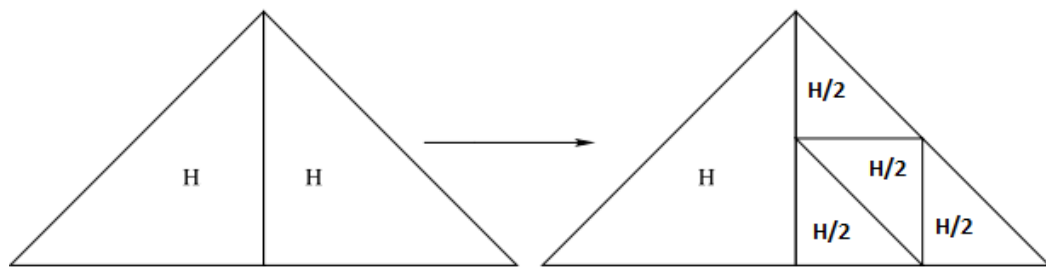
Não há como estabelecer previamente qual procedimento adaptativo irá apresentar melhores resultados em um determinado problema físico. No entanto, Novotny (1998) estabelece que, como regra geral, o refinamento  $h$  se mostra adequado para problemas em que a solução não é suave em todo o domínio, por exemplo, em simulações envolvendo superfícies livres ou com presença de camadas limite, muito comuns em problemas envolvendo escoamento de fluidos. Entretanto, quando não há presença de descontinuidades, o refinamento p tem se mostrado mais eficiente.

Em problemas bidimensionais empregando malhas triangulares isotrópicas (razão de aspecto próxima à unidade), tem-se que a área de qualquer elemento é aproximadamente a de um triângulo equilátero. A medida do tamanho elementar,  $h$ , refere-se ao tamanho da aresta de cada triângulo. A relação entre  $h$  e a área do elemento triangular é dada através da Eq. (50):

$$h = \left( \frac{4A_{\Delta}}{\sqrt{3}} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (50)$$

onde  $A_{\Delta}$  representa o valor da área do domínio do elemento  $\Omega_e$ .

Uma das formas de refinamento h-adaptativo consiste na subdivisão dos elementos triangulares da malha original. Um exemplo de formação de novos elementos triangulares, a partir de um elemento com tamanho ( $h$ ), pode ser visto na Figura 2. Embora esta metodologia possa se mostrar efetiva no controle dos erros de aproximação, muitas vezes acarreta em um custo computacional elevado.



**Figura 2-** Exemplo de subdivisão triangular  
**Fonte:** Autor (2019).

Neste contexto, outra possibilidade de refinamento do tipo h consiste na completa reconstrução da malha de elementos finitos a partir da utilização de um gerador de malhas e da especificação de uma malha de parâmetros (ZIENKIEWICZ; ZHU, 1987). Em geral, estimativas dos novos tamanhos dos elementos são fornecidas tendo como base a aplicação de estimadores de erros.

#### 4.1 ESTIMATIVAS DOS ERROS DE DISCRETIZAÇÃO APLICADAS AO PROBLEMA DE NAVIER-STOKES

Em uma análise numérica envolvendo problemas de engenharia, o erro pode ser definido como a diferença entre a solução exata ( $U$ ) e a solução aproximada obtida pela aplicação de um método numérico ( $U^{AP}$ ). Desta forma, a função erro, medida em termos de um campo escalar, pode ser escrita como (ZIENKIEWICZ; ZHU, 1987):

$$e_u = U - U^{AP}. \quad (51)$$

A determinação da função erro como exposta na Eq. (51) não é possível para a maioria dos problemas visto que a solução exata, em geral, não é conhecida. Deste modo é necessário buscar uma maneira de se estimar o erro.

No contexto de estimadores de erro aplicados ao MEF, uma das alternativas para avaliação dos erros de discretização é a utilização de estimadores de erro *a posteriori* baseados em recuperação do gradiente da solução primária (ZIENKIEWICZ; ZHU, 1987). Tais estimadores consistem na substituição da solução exata por uma solução recuperada,  $U^*$ , a qual deve possuir uma taxa de convergência superior à solução obtida diretamente pelo método de discretização, neste caso, o DG ( $U^{AP}$ ). Assim, o erro estimado pode ser escrito como:

$$e^* = U^* - U^{AP}. \quad (52)$$

De maneira a quantificar o erro a nível escalar no domínio, diferentes normas podem ser empregadas, dentre elas a norma da energia e a norma  $L_2$ .

Em especial, a norma  $L_2$  do erro, quando aplicada aos campos de velocidade e pressão, pode ser expressa por:

$$\|e_u\|_{L_2} = \left[ \int (\mathbf{u} - \mathbf{u}^{AP})^T (\mathbf{u} - \mathbf{u}^{AP}) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (53)$$

$$\|e_p\|_{L_2} = \left[ \int (p - p^{AP})^T (p - p^{AP}) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (54)$$

onde  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{u}^{AP}$  correspondem, respectivamente, a solução vetorial analítica e aproximada via DG do campo de velocidades e  $p$  e  $p^{AP}$  são as soluções escalares analítica e aproximada do campo de pressão.

Em especial, visando identificar as regiões de maiores erros das soluções vinculadas ao problema de Navier-Stokes (campos de pressão e velocidade), o corrente trabalho propõe a utilização dos fundamentos relativos a estimadores de erro *a posteriori* baseados em recuperação do gradiente para a construção de um indicador de erro. Tal indicador de erro consiste em quatro principais etapas, sejam elas:

- i) Dado uma solução aproximada para um campo de velocidade e pressão, obtida através do DG, para cada elemento da malha, realiza-se a identificação dos

valores escalares que definem os campos de velocidade,  $\mathbf{u}^{AP}$  (nas direções  $x$ ,  $u_x^{AP}$ , e  $y$ ,  $u_y^{AP}$ ), e pressão,  $p^{AP}$ , para todos os nós de vértice de um dado elemento.

- ii) Considerando as funções de interpolação lineares de elementos finitos, construídas a partir de uma geometria triangular e dispostas para um campo escalar, avalia-se para cada elemento finito os gradientes do campo escalar de interesse na análise. Neste ponto, cabe mencionar, que o indicador de erro proposto é aplicado visando estimar uma medida no erro de um campo escalar. Assim, o indicador poderá ser aplicado separadamente para um campo de gradiente de velocidades em  $x$  ( $\nabla u_x^{AP}$ ) ou  $y$  ( $\nabla u_y^{AP}$ ) ou um campo de gradientes de pressão ( $\nabla p^{AP}$ ).
- iii) Com base nos dados apontados na etapa 2, aplica-se uma técnica de recuperação de gradiente para levantamento de um campo escalar recuperado em uma das variáveis de interesse.
- iv) Dadas as soluções recuperadas e aproximadas dos gradientes de um dado campo escalar, o erro, segundo a aplicação da norma  $L_2$ , pode ser avaliado como

$$\left\| e_{\nabla u_x^{AP}} \right\|_{L_2} = \left[ \int (\nabla u_x^* - \nabla u_x^{AP})^T (\nabla u_x^* - \nabla u_x^{AP}) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (55)$$

$$\left\| e_{\nabla u_y^{AP}} \right\|_{L_2} = \left[ \int (\nabla u_y^* - \nabla u_y^{AP})^T (\nabla u_y^* - \nabla u_y^{AP}) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (56)$$

$$\left\| e_{\nabla p^{AP}} \right\|_{L_2} = \left[ \int (\nabla p^* - \nabla p^{AP})^T (\nabla p^* - \nabla p^{AP}) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (57)$$

onde,  $\nabla u_x^*$ ,  $\nabla u_y^*$  e  $\nabla p^*$  representam, respectivamente, os campos de gradientes recuperados de velocidade na direção  $x$ , velocidade na direção  $y$  e pressão. Tais campos podem ser avaliados através de algum método de recuperação de gradiente. Como a qualidade da estimativa do erro baseado em recuperação é diretamente associado à qualidade dos valores dos gradientes recuperados, vários trabalhos foram desenvolvidos visando desenvolver métodos para obter valores recuperados mais precisos. Alguns métodos desenvolvidos são *Superconvergent Patch Recovery* (SPR) (ZIENKIEWICZ e ZHU, 1992a, 1992b), *Recovery by*

*Equilibrium of Patches* (REP) (BOROORMAND e ZIENKIEWICZ, 1997), *Polynomial Preserving Recovery* (PPR) (ZHANG e NAGA, 2005) e *The Superconvergent Cluster Recovery Method* (SCR) (HUANG e YI, 2010). Dado a facilidade de implementação e os ótimos resultados encontrados em outros trabalhos (SILVA, 2015; SILVA 2017) quanto à aplicação da técnica de recuperação de gradiente fundamentada na Média Nodal Ponderada pela Área (MNA), o presente trabalho utiliza esta técnica, a qual será descrita na próxima seção.

Neste ponto, cabe frisar que a proposta do indicador descrito acima é baseada na característica de descontinuidade de solução vinculada ao DG e serve somente como um indicador das regiões de maiores erros nos gradientes da solução. Os valores numéricos gerados pela aplicação dessas normas não expressam, de maneira real, os valores dos erros da solução. Ademais, uma vez que são utilizadas funções de interpolação lineares, espera-se que os erros computados pelas normas descritas nas Eqs. (55), (56) e (57), majorem os erros reais da solução encontrada por DG. Tal afirmação está ancorada no fato que o método DG, em geral, utiliza funções de interpolação de ordem elevada.

Porém, embora o indicador possua a limitação aqui citada, os valores de erro avaliados podem ser utilizados como dados de entrada para utilização de uma técnica h-adaptativa, indicando potenciais regiões de aplicação de refino.

Além disso, para descrever o comportamento dos problemas em análise é conveniente definir uma medida percentual do erro mensurado pela norma  $L_2$ , sendo este conhecido como erro relativo percentual  $\eta_{L_2}$ . Considerando o erro para os gradientes de velocidade, o mesmo pode ser expresso por:

$$\eta_{L_2} \% = \frac{\|e_{(\nabla u_{(x,y)}^{AP})}\|_{L_2}}{\|E\|} * 100, \quad (58)$$

$$\|E\| = \left( \int_{\Omega} (\nabla u_{(x,y)}^{AP})^T (\nabla u_{(x,y)}^{AP}) d\Omega \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (59)$$

onde  $\|E\|$  representa uma medida total dos gradientes acumulados no sistema.

## 4.2 ESTIMADORES DE ERRO BASEADO EM RECUPERAÇÃO

Estimadores de erro que fazem uso de uma solução recuperada, obtida via processo de recuperação, em substituição a solução exata, são chamados de estimadores de erro *a posteriori* baseados em recuperação. Este tipo de estimador tem sido empregado por diversos autores, por exemplo, Zienkiewicz e Zhu (1987, 1991) em problemas de elasticidade plana, Wu et al, (1990) em problemas de escoamento de fluidos incompressíveis e Pereira e Silva (2018) em problemas elípticos.

Os estimadores baseados em recuperação abordam uma estimativa de erro a partir de uma solução de elementos finitos conhecida. Este tipo de estimador realiza um pós-processamento do gradiente da solução aproximada, elevando o grau polinomial original e gerando continuidade do gradiente da solução (AINSWORTH; ODEN, 2000).

Muitas vezes o foco do método numérico é o gradiente da aproximação obtido após a solução primária. Em geral, o gradiente da aproximação é descontínuo na interface dos elementos. Esse é o motivo que leva muitos algoritmos a efetuar um pós-processamento a fim de suavizar a aproximação do gradiente. Este processo tende a fornecer uma melhor aproximação quando comparado à aproximação original do problema. Desta forma, estimadores de erros baseados em recuperação utilizam a diferença entre os valores originais (aproximados) e os valores recuperados obtidos pelo pós-processamento para estimar os erros.

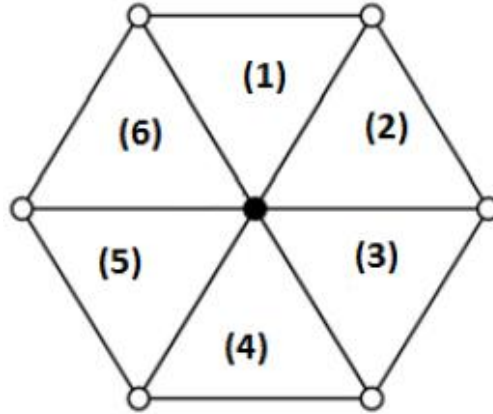
Zienkiewicz e Zhu (1987) são pioneiros tratando-se de estimativa de erro baseado em recuperação. A metodologia de recuperação do gradiente da solução de elementos finitos baseado na Média Nodal Simples (MNS) e a Zienkiewicz e Zhu (ZZ) foi desenvolvida e aplicada ao problema mecânico de elasticidade plana. De acordo com Oh e Batra (1999), o estimador ZZ e o MNS estimam o erro de forma eficiente quando utilizada uma aproximação linear. Neste trabalho utilizar-se-á o estimador MNA pela sua fácil implementação computacional e pelo bom comportamento tratando-se de uma aproximação utilizando funções de forma lineares (SILVA, 2015; SILVA 2017).

### 4.2.1 Estimador de erro baseado na Média Nodal Ponderada pela Área (MNA)

O estimador MNA é um estimador de erro *a posteriori* baseado em recuperação e, portanto, visa obter um gradiente recuperado de uma dada solução numérica, por exemplo, o campo de velocidade  $\mathbf{u}^{AP}$ .



Inicialmente, em um problema de escoamento utilizando elementos triangulares, define-se, para cada  $i$ -ésimo nó de vértice, um padrão (*patch*) formado por todos os elementos ( $Nel$ ) conectados a este respectivo nó conforme Figura 3.



**Figura 3-** Padrão formado por elementos que compartilham um nó de vértice genérico  
**Fonte:** Autor (2019).

Assim, com o objetivo de descrever a obtenção dos valores de gradientes recuperados para uma dada componente escalar, neste caso,  $\nabla u_x^*$ ,  $\nabla u_y^*$  e  $\nabla p^*$ , expressos nas Eqs. (60), (61) e (62) respectivamente, define-se, para cada nó de vértice da malha, a média nodal dos gradientes recuperados ponderados pela área,  $A_j$ , como (COOK et al, 2002):

$$(\nabla u_x^*)^i = \frac{1}{A_{patch}} \sum_{j=1}^{Nel} (\nabla u_x^{AP})_j^i A_j, \quad (60)$$

$$(\nabla u_y^*)^i = \frac{1}{A_{patch}} \sum_{j=1}^{Nel} (\nabla u_y^{AP})_j^i A_j, \quad (61)$$

$$(\nabla p^*)^i = \frac{1}{A_{patch}} \sum_{j=1}^{Nel} (\nabla p^{AP})_j^i A_j, \quad (62)$$

Onde  $(\nabla u_y^{AP})_j^i$ ,  $(\nabla u_x^{AP})_j^i$  e  $(\nabla p^{AP})_j^i$  representam, respectivamente, o vetor de gradiente de velocidades e pressão obtidos via diferenciação direta das funções de forma lineares aplicadas aos valores das velocidades e pressão dos nós de vértices definidos via DG.

Neste caso, tais valores são considerados constantes ao longo de cada elemento finito da malha.

Após a obtenção de todos os vetores de médias nodais, constrói-se um campo suavizado e contínuo entre os elementos através da utilização de funções de forma lineares ( $\psi$ ) para interpolar o campo de gradientes de uma dada variável de interesse. Assim o gradiente de velocidade recuperada sobre um elemento pode ser escrito como:

$$\nabla u_{(x,y)}^* = \Psi \nabla \bar{u}_{(x,y)}, \quad (63)$$

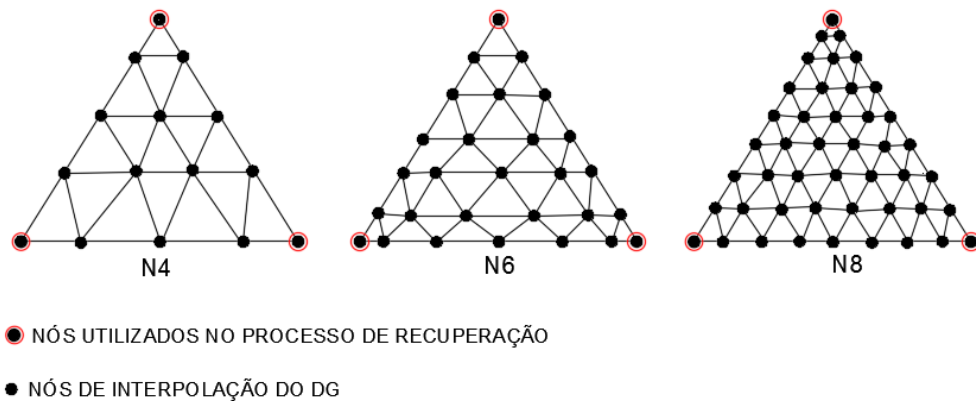
onde  $\nabla \bar{u}_{(x,y)}$  é o vetor nodal dos gradientes das velocidades recuperadas para o elemento em questão. Desta forma, aplicando o conceito da norma  $L_2$  nas Eqs. (55), (56) e (57), a nível do elemento, é possível estimar o erro localmente. Desta forma o erro em cada elemento para os gradientes de velocidades e pressão são apresentados para um elemento genérico ( $k$ ):

$$\| (e_{\nabla u_x})_k \| = \| (\nabla u_x^*)_k - (\nabla u_x^{AP})_k \|, \quad (64)$$

$$\| (e_{\nabla u_y})_k \| = \| (\nabla u_y^*)_k - (\nabla u_y^{AP})_k \|, \quad (65)$$

$$\| (e_{\nabla p})_k \| = \| (\nabla u_p^*)_k - (\nabla u_p^{AP})_k \|. \quad (66)$$

Cabe destacar que enquanto o método de recuperação utiliza apenas os nós de vértice da malha, o DG utiliza vários pontos de interpolação no triângulo, sendo que a quantidade de pontos varia de acordo com o grau do polinômio ( $N$ ) utilizado. O número de pontos ( $N_p$ ) utilizados em cada triângulo é calculado através da Eq.(15). A Figura 4 apresenta os pontos de interpolação utilizados pelo DG para diferentes ordens polinomiais e destaca-se os nós de vértice utilizados no processo de recuperação.



**Figura 4-** Distribuição nodal nos elementos para diferentes ordens do polinômio interpolador para o DG  
**Fonte:** Autor (2019).

### 4.3 TÉCNICAS H-ADAPTATIVAS

O método h-adaptativo isotrópico busca encontrar o tamanho elementar apropriado para os elementos através de um dado critério de malha ótima. Inicialmente, os métodos h-adaptativos simplesmente subdividiam os elementos que apresentavam um erro acima de um limite estabelecido como aceitável (ZIENKIEWICZ, 2006). A simples divisão elementar possibilita a redução e controle dos erros de discretização, contudo, pode acarretar um alto custo computacional. Desta forma, outras técnicas têm sido desenvolvidas buscando otimizar o tamanho elementar.

Um método h-adaptativo isotrópico denominado projeção  $Ch^p$  que permite a geração completa de uma nova malha de elementos finitos através de um gerador de malha foi desenvolvido por Zienkiewicz e Zhu (1987). O tamanho dos novos elementos é obtido via estimador de erro *a posteriori* baseado em recuperação visando limitar e distribuir igualmente os erros ao longo do domínio. Este critério de malha ótima é denominado de critério de equidistribuição do erro elementar.

A técnica de projeção de malha  $Ch^p$  foi posteriormente utilizada em várias aplicações, dentre elas, em problemas planos de condução térmica (ZIENKIEWICZ; BOROOMAND; ZHU, 1999), problemas de elasticidade plana (ZINKIEWICZ; ZHU, 1991) e problemas de escoamento de fluidos incompressíveis (WU et al, 1990). Neste caso, a estimativa do novo tamanho elementar,  $h_{new}$ , considerando ausência de singularidades, é dada por:

$$h_{new} = (h_{old} / \zeta_k^{(1/p)}), \text{ com } \zeta_k = \|e\|_k / \bar{e}, \quad (67)$$

onde  $h_{old}$  representa o tamanho do elemento corrente,  $p$  é o grau polinomial da aproximação,  $\|e\|_k$  é o erro para o elemento  $k$  e  $\bar{e}$  é o erro limite admissível por elemento, definido por:

$$\bar{e} = \bar{\eta} \|E\| / \sqrt{Nel}, \quad (68)$$

sendo  $\bar{\eta}$  o erro percentual global admissível para o problema a ser analisado.

Desta forma,  $\zeta_k$  é o parâmetro de refinamento e indica os elementos que devem sofrer refino com ( $\zeta_k > 1$ ) ou aumento ( $\zeta_k < 1$ ).

Em 1995, uma nova técnica h-adaptativa, aqui denominada de LB, considerada um avanço da técnica  $Ch^p$ , foi proposta por Li e Bettess (1995) e Li et al, (1995). Neste caso, diferentemente da técnica  $Ch^p$ , a técnica LB estima o tamanho dos novos elementos com base na convergência dos erros e considera uma estimativa para o número de elementos da malha adaptada. De acordo com Li e Bettess (1995), adota-se o critério de equidistribuição dos erros ao longo do domínio (ZIENKIEWICZ; ZHU, 1987).

A **técnica LB** determina que o tamanho dos novos elementos em uma malha deve ser calculado como:

$$h_{new} = h_{old} \left( \frac{\bar{\eta} \|E\|}{\sqrt{Nel_{new}} \|e\|_k} \right)^{1/(p+(d/2))}, \quad (69)$$

sendo  $d$  a dimensão física do problema e  $Nel_{new}$  o número de elementos da nova malha estimado como:

$$Nel_{new} = (\bar{\eta} \|E\|)^{-d/p} \left( \sum_{k=1}^{Nel} \|e\|_k \right)^{(p+d/2)/p}. \quad (70)$$

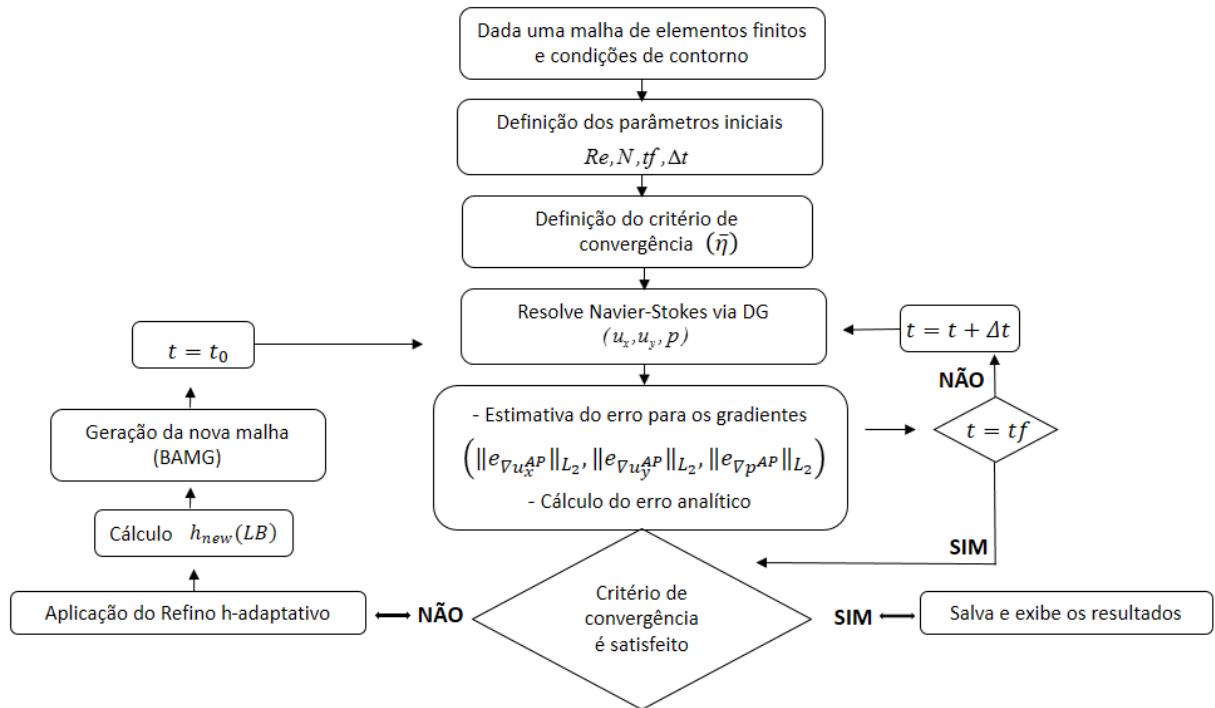
Silva (2017) testou as duas técnicas h-adaptativas no problema de Poisson e Elasticidade Bidimensional e concluiu que a técnica LB apresenta um comportamento mais estável, convergindo, em geral, para um mesmo erro percentual admissível  $\bar{\eta}$  com um menor número de elementos na malha quando comparado ao método  $Ch^p$ .

#### 4.4 ALGORITMO ADAPTATIVO APLICADO AO PROBLEMA DE NAVIER-STOKES UTILIZANDO O DG H-ADAPTATIVO

Para resolver numericamente problemas de escoamento através das equações de Navier-Stokes empregando o DG, uma sequência de cálculo deve ser seguida para cada tempo de solução a ser considerado. O tempo em que se quer avaliar a solução numérica é pré-definido pelo usuário e depende do problema em análise, variando de acordo com as condições de contorno adotadas e tamanho do domínio utilizado. Dentro de um mesmo problema, pode-se aplicar o refino h-adaptativo para qualquer tempo que se mostre necessário avaliar os fenômenos físicos envolvidos.

Escolhido o tempo em que se quer avaliar a solução numérica, o processo h-adaptativo é aplicado de forma iterativa buscando atingir a convergência estimada através do erro percentual na norma  $L_2$ . A técnica LB (Eqs. (69) e (70)), é utilizada para equidistribuir o erro na variável de interesse, podendo ser ela os gradientes de velocidade ou pressão  $(\nabla u_x^{AP}, \nabla u_y^{AP}, \nabla p^{AP})$ . Importante destacar que o erro percentual na norma  $L_2$ , calculado e adotado como guia para o processo h-adaptativo, indica as regiões de aplicação do refino, contudo não representa o erro real do problema. Como são utilizadas funções de interpolação lineares para se estimar o erro na norma  $L_2$ , utilizando os nós de vértice de cada elemento, espera-se uma majoração dos erros reais da solução obtido via DG. Tal afirmação se justifica no fato que o DG utiliza funções de interpolação de ordem elevada com vários pontos de interpolação no triângulo, conforme exemplificado na Figura 4.

A Figura 5 apresenta de forma simplificada a sequência do processo de cálculo implementado no presente trabalho.



**Figura 5-** Diagrama de blocos do processo de cálculo implementado computacionalmente  
**Fonte:** Autor (2019).

A formulação desenvolvida nos capítulos anteriores, com exceção da geração da malha, foi implementada numericamente no *software Matlab®*. A geração das malhas é realizada pelo código *BAMG* (HECHT, 2012). Este código, escrito na linguagem de programação C++, é livre e de código fonte aberto, possibilitando ao usuário realizar adaptações. O estimador de erro *a posteriori* MNA é utilizado para obter um gradiente recuperado de uma dada solução numérica e, desta forma, é possível obter um indicativo dos erros para as variáveis  $u_x, u_y$  ou  $p$ . Com o indicativo dos erros, aplica-se a técnica *LB* (Eqs. (69) e (70)) para estimar os novos tamanhos elementares  $h_{new}$ , os quais guiam a formação da malha futura.

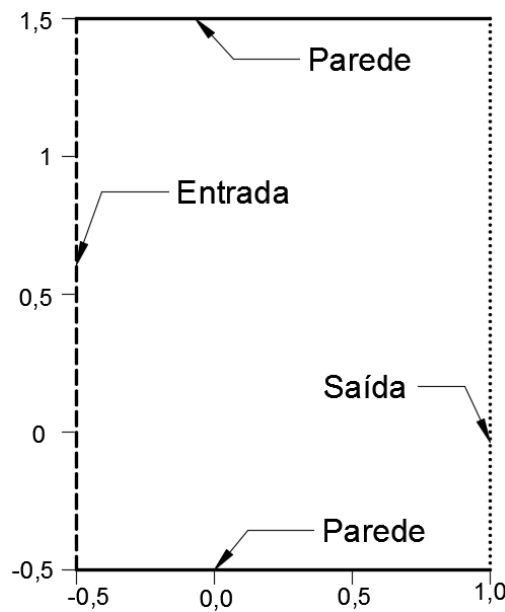
O Capítulo subsequente traz os resultados numéricos obtidos com a implementação computacional deste conjunto de métodos e técnicas. O uso de malhas h-adaptativas são testadas e avaliadas quanto a sua influência na convergência da solução numérica e caracterização dos problemas físicos analisados.

## 5 RESULTADOS NUMÉRICOS

Este Capítulo apresenta os resultados e discussões referentes à aplicação da metodologia h-adaptativa proposta no Capítulo 4 no âmbito de problemas governados pelas equações de Navier-Stokes considerando fluido incompressível e baixo número de Reynolds. Nesta análise, visando discutir a efetividade do método proposto, são considerados exemplos numéricos de casos clássicos da literatura.

### 5.1 ESCOAMENTOS DE KOVASZNAY

O primeiro problema a ser analisado é proposto por Kovasznay (1948). Trata-se de um escoamento laminar em um canal bidimensional. No corrente problema o domínio computacional é definido conforme Hesthaven e Warburton (2008).



**Figura 6** – Domínio para o problema de Kovasznay  
**Fonte-** Adaptado Hesthaven e Warburton (2008).

As Eqs. (71), (72) e (73) expressam a solução analítica para as componentes de velocidade nas direções  $x$  e  $y$ , bem como para o campo de pressão:

$$u_x = 1 - e^{\lambda x} \cos(2\pi y), \quad (71)$$

$$u_y = \frac{\lambda}{2\pi} e^{\lambda x} \sin(2\pi y), \quad (72)$$

$$p = \frac{I}{2}(1 - e^{2\lambda x}). \quad (73)$$

Neste caso,  $\lambda$  pode ser avaliado como:

$$\lambda = \frac{1}{2\nu} - \sqrt{\frac{1}{4\nu^2} + 4\pi^2}. \quad (74)$$

A solução é utilizada para aplicar as condições de contorno de Dirichlet para a velocidade na entrada e as de Neumann para a velocidade na saída. A viscosidade cinemática utilizada nos testes será  $\nu = 1/100$ .

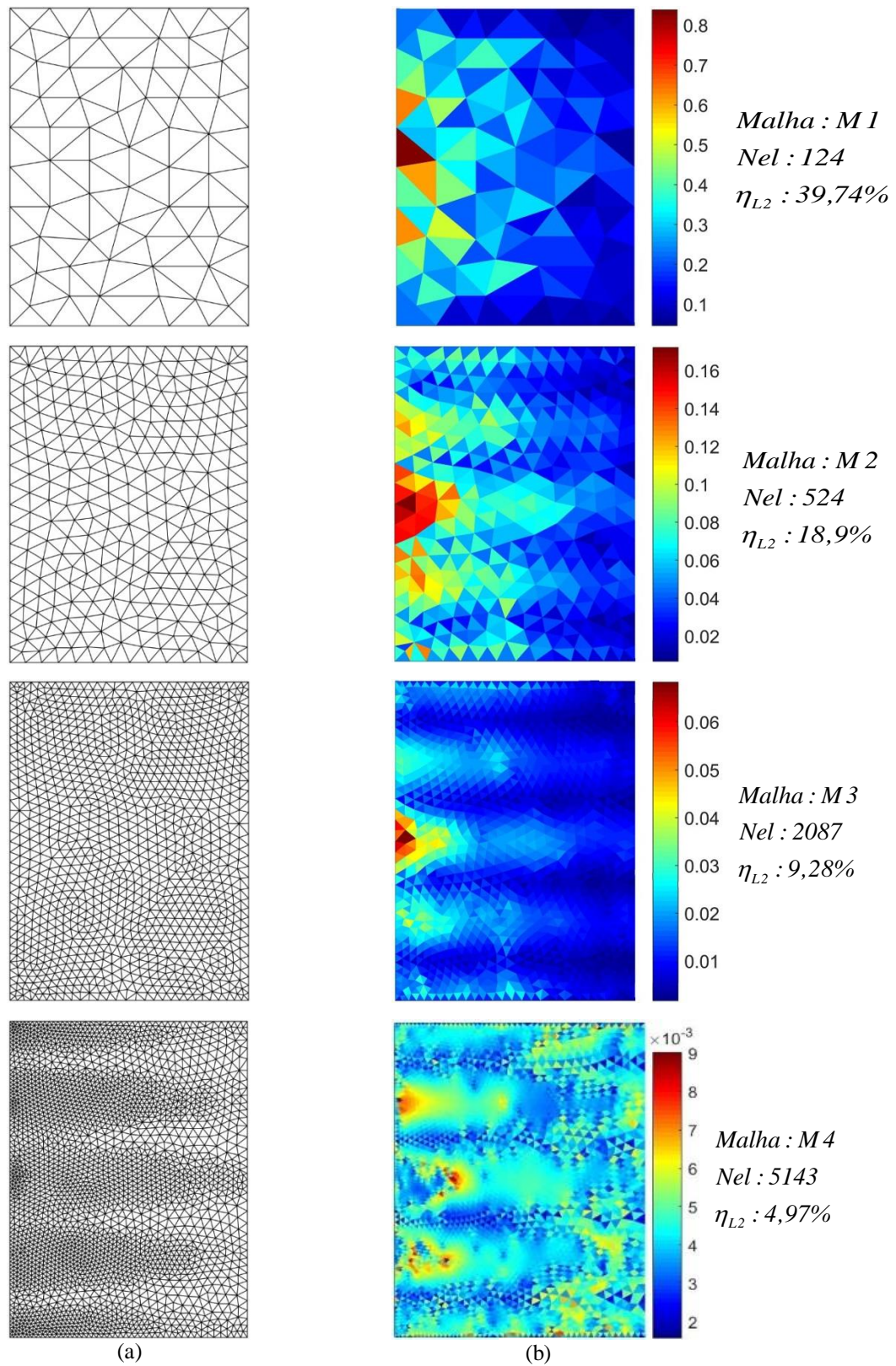
Garcia et al, (2017) realizou um trabalho para verificar as ordens de precisão na discretização espacial do método DG apresentado no Capítulo 3 através de simulações computacionais para o problema de Kovasznay, aplicando o método com diferentes configurações de malha fixa. O presente trabalho faz uso da mesma formulação teórica utilizada por Garcia et al, (2017), contudo aplica uma técnica de refino h-adaptativo capaz de gerar malhas que se adequam ao comportamento da solução numérica visando mitigar o erro em função da alteração do tamanho do elemento (h).

### 5.1.1 Resultados numéricos para o escoamento de Kovasznay h-adaptativo

No corrente problema, o erro na norma  $L_2$  é calculado para os gradientes das propriedades  $(\nabla u_x, \nabla u_y, \nabla p)$ , adotando-se  $Re = 100$ . Ademais, são avaliadas diferentes ordens de polinômio interpolador. A solução analítica é utilizada para avaliar a eficácia do processo h-adaptativo no aumento da precisão da solução numérica.

Neste caso, é utilizado um polinômio interpolador de ordem  $N = 3$  para a solução via método DG e deseja-se adaptar a solução com base no erro do gradiente de velocidade na direção x do escoamento em  $t=8$ . Adotou-se  $\Delta t = 0,01$  como passo para resolução do problema. A Figura 7 apresenta as malhas e a distribuição dos erros no gradiente de velocidade na direção x em cada elemento, obtidos a partir da Eq. (64). O critério de parada adotado para o processo adaptativo é baseado no erro de discretização, tal que  $\bar{\eta}_{L_2} \leq 5\%$ .





**Figura 7-** Problema de Kovasznay: (a) Malha de elementos finitos. (b) Distribuição dos erros avaliados para o gradiente do campo de velocidade na direção  $x$

**Fonte:** Autor (2019).

A malha h-adaptada foi eficaz no sentido de reduzir os erros dos gradientes de velocidade na direção x através da equidistribuição dos erros no domínio. Na Tabela 2 apresenta-se o erro analítico para as malhas adaptativas calculado através das Eqs. (53) e (54) para as variáveis velocidade e pressão respectivamente.

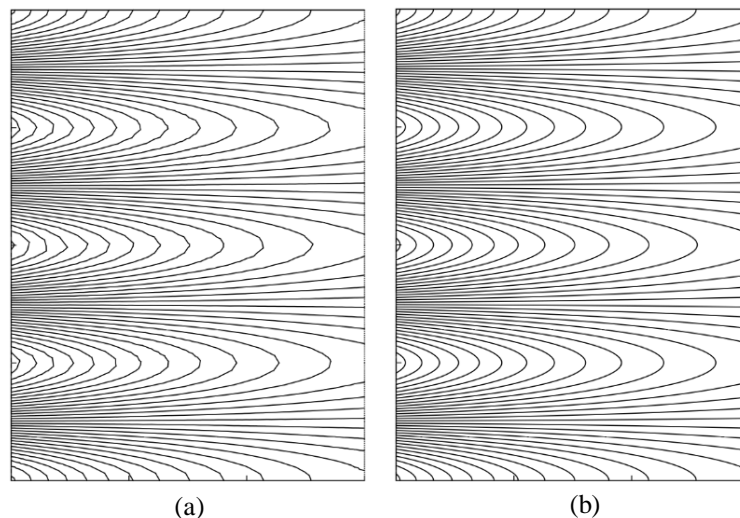
**Tabela 2-** Erro analítico calculado via malhas h-adaptativas

<i>Malha</i>	<i>Nel</i>	<i>Erro <math>u_x</math></i>	<i>Erro <math>u_y</math></i>	<i>Erro <math>p</math></i>
M1	124	2.8251e-05	1.819e-05	6.4764e-05
M2	524	4.0199e-06	3.8795e-06	1.114e-05
M3	2087	1.0116e-06	9.8246e-07	2.7719e-06
M4	5143	4.0972e-07	3.9886e-07	1.1255e-06

**Fonte:** Autor (2019).

Nota-se que o indicador de erro baseado nos gradientes recuperados da solução numérica tende a indicar corretamente potenciais regiões de aplicação de refino na malha. Tal afirmação é respaldada pela diminuição do erro analítico após aplicação do refino h-adaptativo.

Percebe-se através da Figura 7 que os elementos de menor tamanho h na malha M4 estão posicionados na região de maior erro estimado na malha M1. O refino h-adaptativo via indicador de erro promoveu uma diminuição do erro analítico, indicando ser uma técnica eficiente no sentido de melhorar a qualidade da solução numérica. Na Figura 8 é apresentado as linhas de velocidade ( $u_x$ ) para a malha inicial M1 e final M4, ambas representadas na Figura 7.

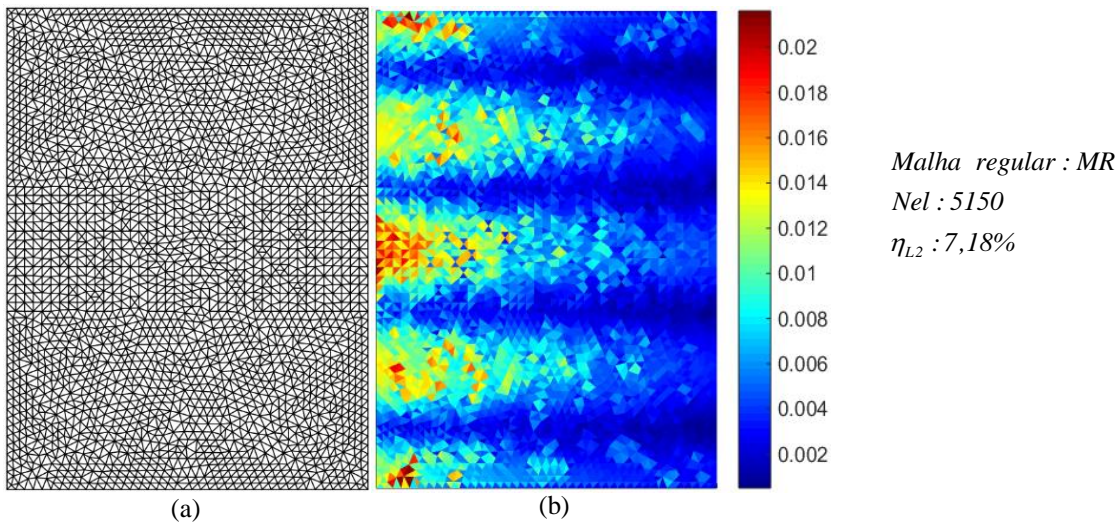


**Figura 8-** Linhas de velocidade  $u_x$  para o Problema de Kovasznay: (a) Malha M1. (b) Malha M4

**Fonte:** Autor (2019).

As linhas de velocidade para a malha M4 são bem definidas quando comparadas as linhas de velocidade geradas com a malha M1. Essa melhor definição é associada ao aumento da precisão da solução, a qual está relacionada com o aumento do número de elementos nas regiões de formação dos vórtices que coincide com a de maiores erros no gradiente de velocidade na direção  $x$ ,  $e_{\nabla u_x}$ .

Para avaliar a efetividade da aplicação do processo h-adaptativo de malha, o erro percentual estimado e o erro analítico são calculados com as mesmas condições de entrada e contorno para uma malha com refinamento não h-adaptativo uniforme com número semelhante de elementos à malha h-adaptada M4 da Figura 7. A Figura 9 apresenta a malha uniforme e sua respectiva distribuição de erros para o campo de velocidades avaliado na direção  $x$ .



**Figura 9-** Problema de Kovasznay: (a) Malha de elementos finitos com refino não adaptativo. (b) Distribuição dos erros na norma L2

**Fonte:** Autor (2019).

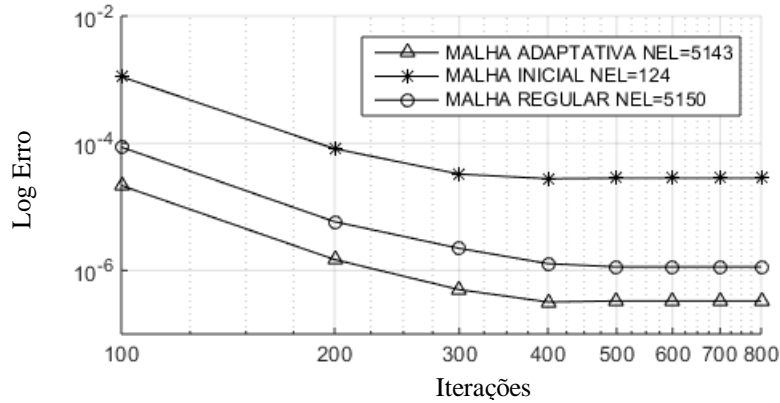
Como esperado, os maiores erros concentram-se nas regiões de vórtice, sendo o erro estimado na norma L2 para o gradiente do campo de velocidades em  $x$  e o erro analítico na mesma variável, maiores para a malha quase uniforme (MR) quando comparado à malha h-adaptada M4. Os erros obtidos são apresentados na Tabela 3.

**Tabela 3-** Problema de Kovasznay: Erros na malha regular (MR) x Erros na malha h-adaptada M4

<i>Malha</i>	<i>Nel</i>	<i>Erro <math>u_x</math></i>	<i>Erro <math>u_y</math></i>	<i>Erro <math>p</math></i>	<i><math>N_{L2\%}</math></i>
MR	5150	1.1070 E-06	1.1238 E-06	1.1340 E-06	7,18
M4	5143	4.0972 E-07	3.9886 E-07	1.1255 E-06	4,97

**Fonte:** Autor (2019).

A Figura 10 apresenta o comportamento do erro analítico em relação ao número de iterações considerando a variável  $u_x$  para as malhas M4 (h-adaptada), M1(inicial) e MR (regular).



**Figura 10-** Problema de Kovaszny: Comportamento do erro analítico em velocidade  $u_x$   
**Fonte:** Autor (2019).

A variável velocidade  $u_x$ , predominante no escoamento, converge para um erro inferior quando utilizado uma malha adaptativa em comparação com uma malha uniforme com um número de elementos semelhante. Este erro é inferior em todas as iterações. Como o processo de refino não é influenciado pela ordem do polinômio de aproximação utilizado para obtenção da solução numérica, utilizou-se as malhas M1 (não h-adaptada) e a malha M4 (h-adaptada) apresentadas na Figura 7 para avaliar o comportamento da solução com diferentes ordens de polinômio interpolador ( $N$ ). A Tabela 4 apresenta os erros analíticos da solução para a malha inicial M1 e a Tabela 5 para a malha h-adaptada M4. O erro analítico é calculado através das Eqs. (53) e (54).

**Tabela 4-** Problema de Kovaszny: Erros para a malha M1 nas variáveis ( $u_x, u_y, p$ )

Ordem do polinômio ( $N$ )	Erro $u_x$	Erro $u_y$	Erro $p$
3	2,8252E-05	1,8190E-05	6,4764E-05
5	1,6842E-05	1,6293E-05	4,5936E-05
7	1,6896E-05	1,6371E-05	4,6189E-05
9	1,6904E-05	1,6377E-05	4,6195E-05

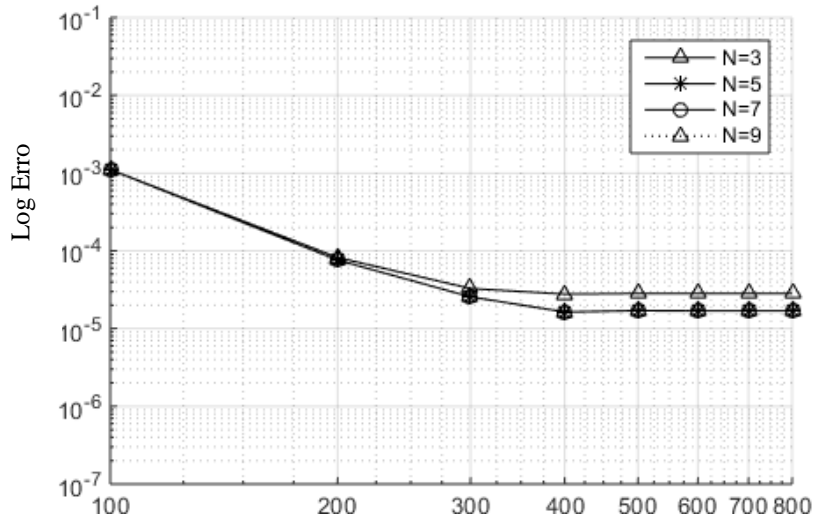
**Fonte:** Autor (2019).

**Tabela 5-** Problema de Kovaszny: Erros para a malha M4 nas variáveis ( $u_x, u_y, p$ )

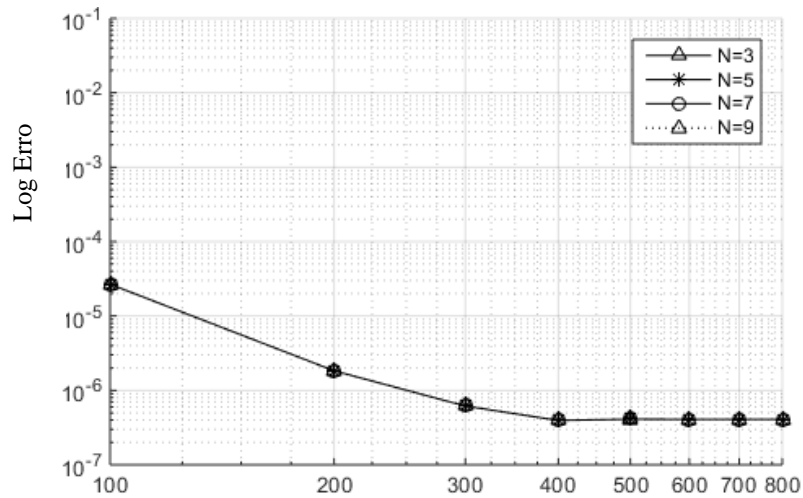
Ordem do polinômio ( $N$ )	Erro $u_x$	Erro $u_y$	Erro $p$
3	4,0674E-07	3,9447E-07	1,1183E-06
5	4,0759E-07	3,9488E-07	1,1137E-06
7	4,0754E-07	3,9439E-07	1,1123E-06
9	4,0744E-07	3,9487E-07	1,1132E-06

**Fonte:** Autor (2019).

O comportamento do erro em  $u_x$  de acordo com o número de iterações do processo de avanço do tempo é demonstrado para as malhas M1 e M4 através da Figura 11.



(a) Iterações



(b) Iterações

**Figura 11-** Problema de Kovasznay: Erro em velocidade  $u_x$  considerando diferentes ordens polinomiais (N): (a) Malha M1. (b) Malha M4

**Fonte:** Autor (2019).

Através da Figura 11 percebe-se que não houve diminuição no erro da solução a partir do aumento do grau do polinômio de interpolação para a malha M4. Já para a malha M1 ocorreu uma pequena diminuição do erro até  $N=5$ . Mesmo com o aumento do grau do polinômio interpolador utilizando a malha inicial M1, não foi possível atingir a mesma precisão obtida com a malha h-adaptada M4.

Considerando o corrente problema, o emprego do processo h-adaptativo baseado em recuperação via estimador de erro MNA e a utilização do critério de equidistribuição dos erros com cálculo do novo tamanho elementar via técnica LB, conduz a uma solução numérica mais próxima da solução exata. Além disso, a simulação numérica executada nesse caso valida o esquema DG h-adaptativo.

## 5.2 O PROBLEMA DE DECAIMENTO DO VORTEX DE TAYLOR

Este é um problema clássico da literatura e frequentemente utilizado como referência para validar uma simulação de escoamento utilizando as equações de Navier-Stokes para um fluido incompressível (KIM e MOIN, 1985; QUARTERONI et al, 2000). A condição inicial para o problema, considerando um domínio quadrado definido no intervalo  $0 \leq (x, y) \leq 2\pi$ , são dadas por:

$$u_x(x, y, 0) = -\cos(x) \sin(y), \quad (75)$$

$$u_y(x, y, 0) = \sin(x) \cos(y), \quad (76)$$

$$p(x, y, 0) = -0.25(\cos 2x + \cos 2y). \quad (77)$$

O problema possui solução exata para os campos de velocidades na direção  $x$  e  $y$ , assim como para pressão, respectivamente, como

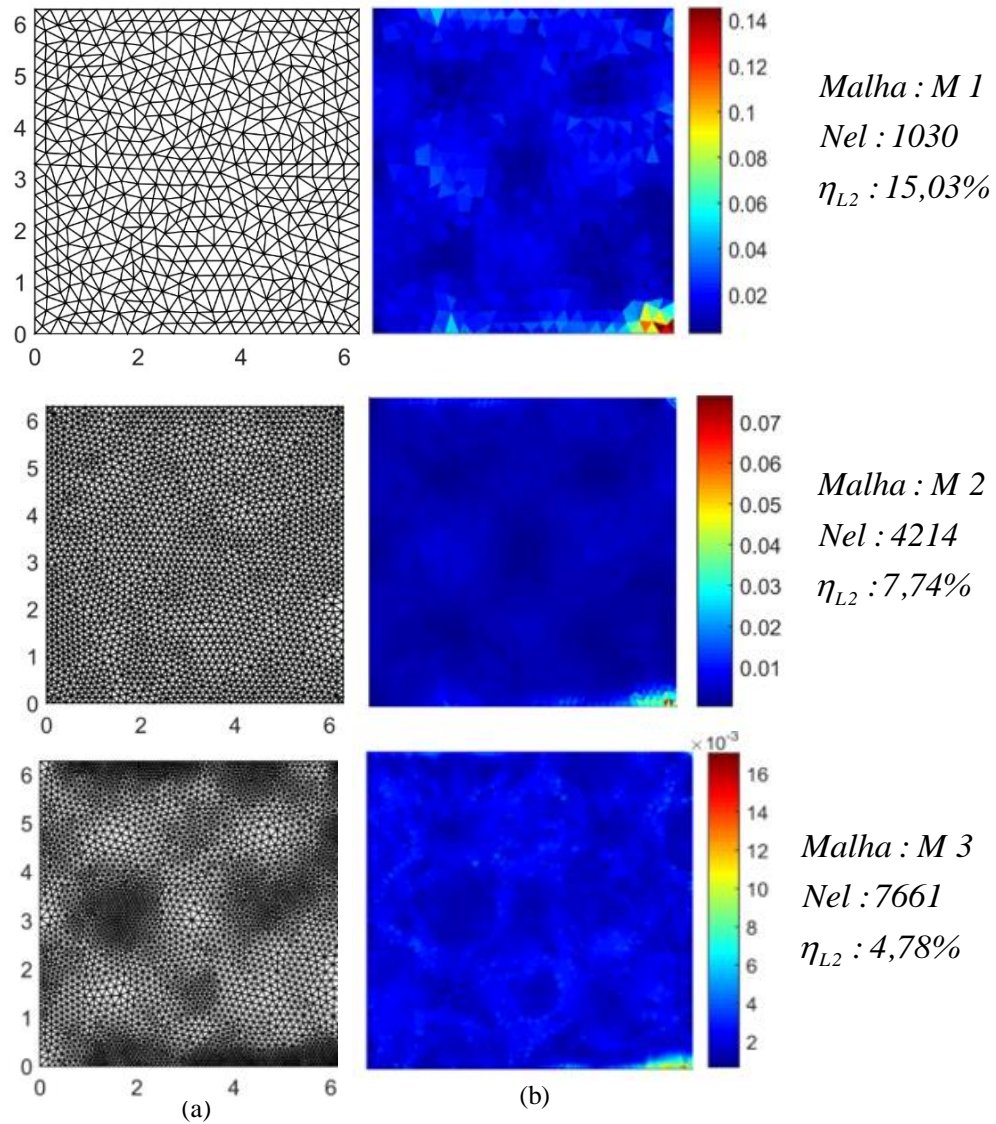
$$u_x(x, y, t) = -\cos(x) \sin(y) \exp(-2t/Re), \quad (78)$$

$$u_y(x, y, t) = \cos(y) \sin(x) \exp(-2t/Re), \quad (79)$$

$$p(x, y, t) = -0.25(\cos 2x + \cos 2y) \exp(-4t/Re). \quad (80)$$

A fim de resolver o escoamento com precisão, submetemos a malha M1 apresentada na Figura 12 a um processo h-adaptativo. Este processo é realizado para  $t=1$  com base em um indicador de erro no gradiente de velocidade na direção  $x$ , utilizando-se  $\Delta t = 0,05$ ,  $Re = 100$ ,  $\bar{\eta}_{L2} \leq 5\%$  e grau do polinômio de interpolação  $N=3$ . O erro é calculado a partir da Eq. (64).





**Figura 12-** Problema de decaimento do Vortex de Taylor: (a) Malhas de elementos finitos. (b) Distribuição dos erros elementares em  $t=1$

**Fonte:** Autor (2019).

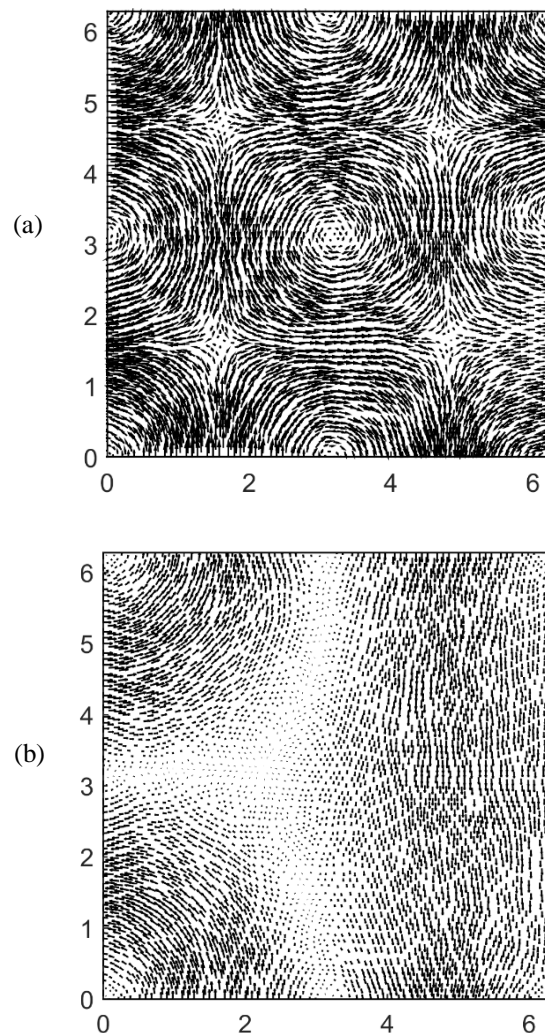
O refino h-adaptativo foi capaz de reduzir e equidistribuir os erros estimados via processo de recuperação. O erro analítico calculado a partir da solução exata do problema (Eqs. (53) e (54)) em  $t=1$  para as malhas apresentadas na Figura 12 é exposto na Tabela 6.

**Tabela 6-** Problema de Vortex de Taylor: Erro analítico calculado para as malhas 1,2 e 3

<i>Malha</i>	<i>Nel</i>	<i>Erro <math>u_x</math></i>	<i>Erro <math>u_y</math></i>	<i>Erro <math>p</math></i>
M1	1030	1,52889 e-04	1,53526 e-04	1,32929 e-03
M2	4214	1,10865 e-04	1,11036 e-04	1,19441e-04
M3	7661	7,5585 e-05	7,6286 e-05	1,11262 e-04

**Fonte:** Autor (2019).

O refino h-adaptativo foi efetivo no sentido de minimizar o erro analítico para as variáveis  $(u_x, u_y)$ . A Figura 13 apresenta o campo de velocidade em  $t=1$  e  $t=20$  para a malha inicial.

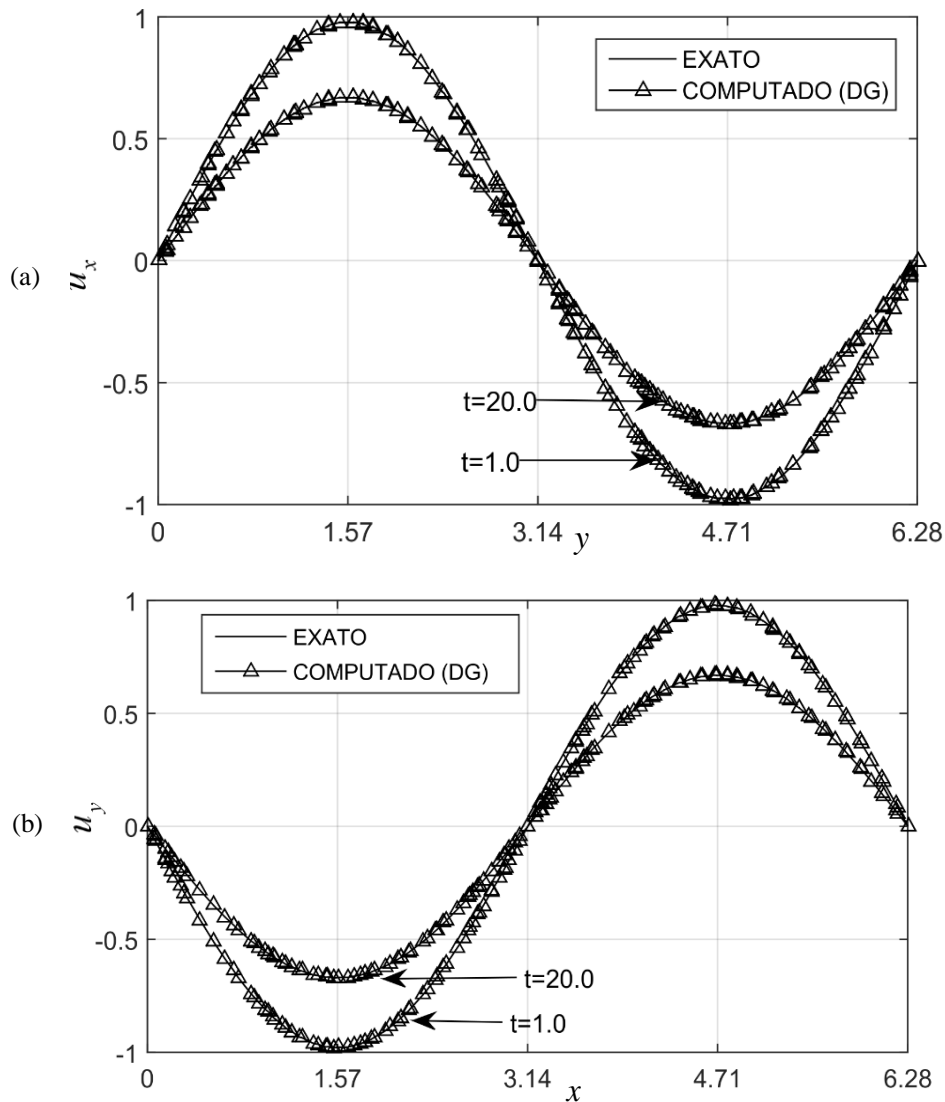


**Figura 13-** Campo vetores velocidade para malha 1, (a)  $t=1$  e (b)  $t=20$

**Fonte:** Autor (2019).



Na Figura 14 faz-se a comparação entre a solução exata e a solução aproximada via método DG para as variáveis  $u_x$  e  $u_y$  em  $t=1$  e  $t=20$  considerando a malha 1 da Figura 12.



**Figura 14-** Problema de decaimento do Vortex de Taylor: (a) Componente de velocidade  $u_x$  ao longo da linha vertical central. (b) Componente de velocidade  $u_y$  ao longo da linha horizontal central

**Fonte:** Autor (2019).

Neste caso, tem-se que a solução obtida via método DG é muito próxima da solução exata, demonstrando a acurácia do método numérico utilizado.

### 5.3 ESCOAMENTO AO REDOR DE CILINDROS INSERIDO EM CANAIS RETANGULARES

O objetivo destas simulações é avaliar a precisão dos resultados obtidos pelo DG com o uso de malhas h-adaptativas. O escoamento bidimensional através de um canal com um ou mais cilindros inseridos em seu interior é dependente do tempo. Conforme o escoamento, que possui condição de velocidade inicial de entrada parabólica, os coeficientes de arrasto ( $C_d$ ) e sustentação ( $C_l$ ) podem ser calculados. As características do escoamento variam de acordo com o número de Reynolds utilizado. O cálculo de ( $C_d$ ) e ( $C_l$ ) na superfície do cilindro é dado por:

$$C_d(t) = -\oint_{Cilindro} -p\hat{n}_x + \nu \left( \hat{n}_x 2 \frac{\partial u_x}{\partial x} + \hat{n}_y \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) \right), \quad (81)$$

$$C_l(t) = -\oint_{Cilindro} -p\hat{n}_y + \nu \left( \hat{n}_x \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) + \hat{n}_y 2 \frac{\partial u_y}{\partial y} \right), \quad (82)$$

onde  $(\hat{n}_x, \hat{n}_y)$  é o vetor normal à superfície do cilindro, com seus componentes nas direções Cartesianas,  $\hat{n}_x$  e  $\hat{n}_y$ .

As simulações são realizadas até um  $t=12$  partindo de um  $t=0$ , com  $\Delta t = 0,0001$ . A velocidade de entrada no canal é parabólica, sendo representada pelas seguintes equações:

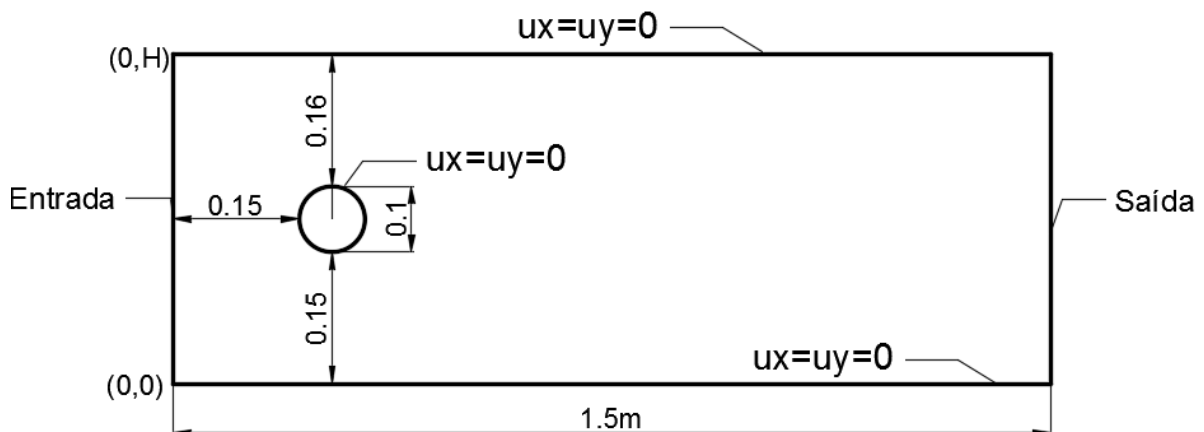
$$u_x(0, y) = 4U_0 y(h_c - y) / h_c^2, \quad (83)$$

$$u_y(0, y) = 0, \quad (84)$$

onde  $h_c$  é a altura do canal e  $U_0$  a velocidade inicial de entrada. Uma condição de contorno com velocidade  $u_x = 0$  e  $u_y = 0$  é imposta para os cilindros e paredes do canal. Na saída, assume-se uma pressão zero e uma condição de contorno natural para a velocidade. Em todas as simulações com cilindros adota-se  $\nu = 10^{-3}$ ,  $\rho = 1,0$  e  $N = 3$ . O processo adaptativo é realizado com base em um indicador de erro no gradiente de velocidade na direção  $x$ . O critério de parada adotado para o processo h-adaptativo é tal que  $\bar{\eta}_{L2} \leq 15\%$ .

### 5.3.1 Cilindro caso 1

O domínio do problema com as respectivas condições de fronteira para esta simulação pode ser observado na Figura 15, onde  $D = 0,1\text{m}$ ,  $H = 0,41\text{m}$ ,  $U_0 = 1,5\text{m/s}$  e  $Re = 100$ . Além disso, uma limitação para o tamanho  $h$  é imposta ( $0,004 \leq h \leq 0,1$ ) de modo a minimizar possíveis erros vinculados à aproximação do domínio real do problema, em especial, ao que concerne à superfície do cilindro.



**Figura 15-** Cilindro caso 1: Modelagem do problema  
**Fonte:** Autor (2019).

Este caso é apresentado e discutido por Schäfer e Turek (1996), onde os autores estipulam valores limites aceitáveis para  $Cd$  e  $Cl$  através da resolução deste mesmo problema por diversos métodos numéricos, incluindo o MDF, MVF e MEF. Tais valores são utilizados como dados de referência nas análises aqui realizadas. Os limites aceitáveis para  $Cd$  e  $Cl$  considerando  $Re = 100$  de acordo com Schäfer e Turek (1996) são especificados na Tabela 7.

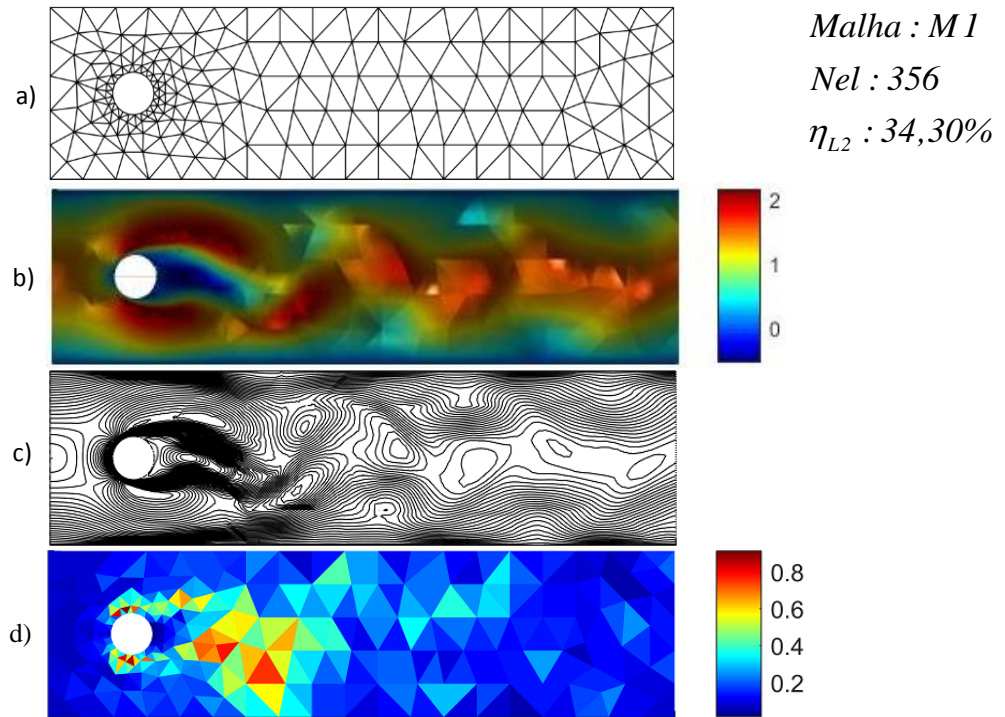
**Tabela 7-** Cilindro caso 1: Valores limites estabelecidos por Schäfer e Turek (1996)

Autor	$Cd$ mínimo	$Cd$ máximo	$Cl$ mínimo	$Cl$ máximo
Schäfer e Turek	3,2200	3,2400	0,9900	1,0100

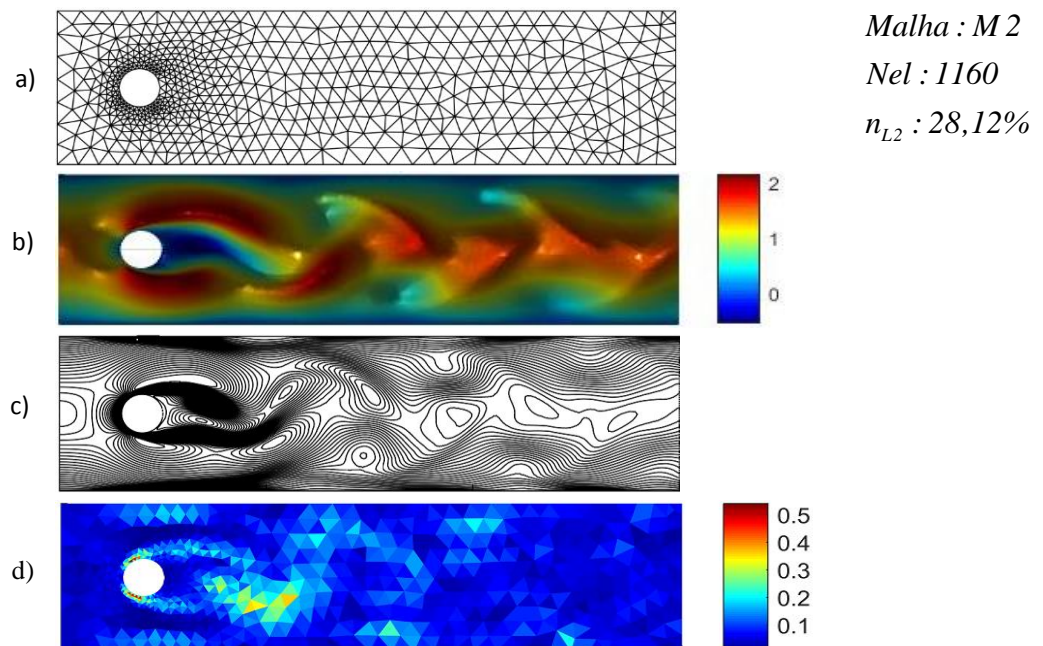
**Fonte:** Schäfer e Turek (1996).

As Figuras (16), (17) e (18) representam os resultados do processo h-adaptativo desde a malha inicial M1 até a malha final M3, a qual cumpre o critério de convergência estipulado. São apresentadas as malhas de elementos finitos, a distribuição da velocidade  $u_x$

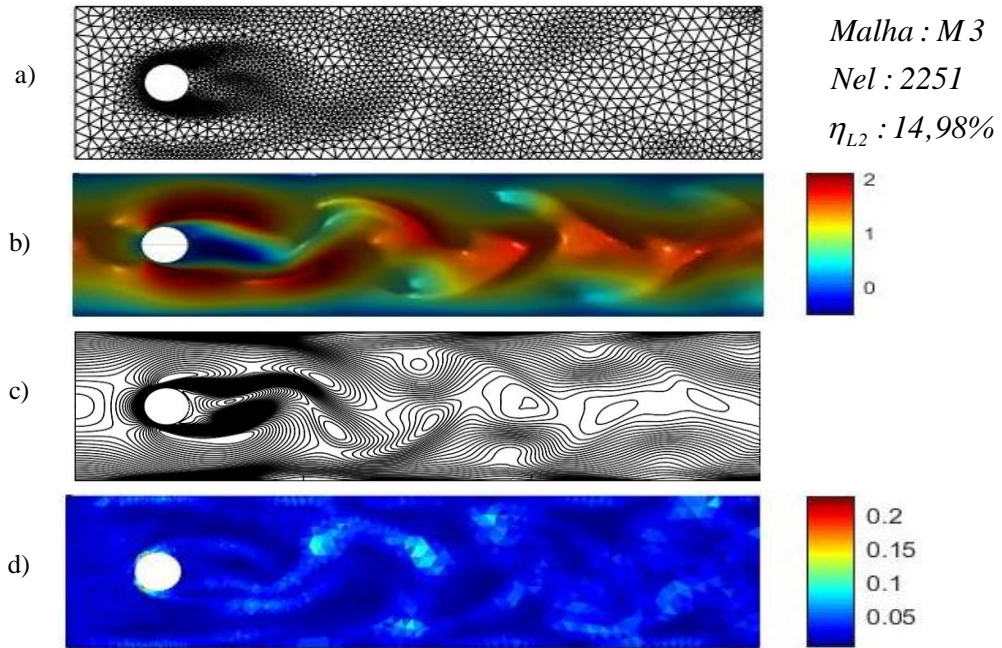
no domínio, as linhas de velocidade  $u_x$  e a distribuição dos erros de discretização no gradiente das velocidades nesta mesma direção.



**Figura 16-** Cilindro caso 1: (a) Malha inicial (M1). (b) Velocidade  $u_x$ . (c) Linhas de velocidade  $u_x$ . (d) Distribuição dos erros a nível elementar  
**Fonte:** Autor (2019).

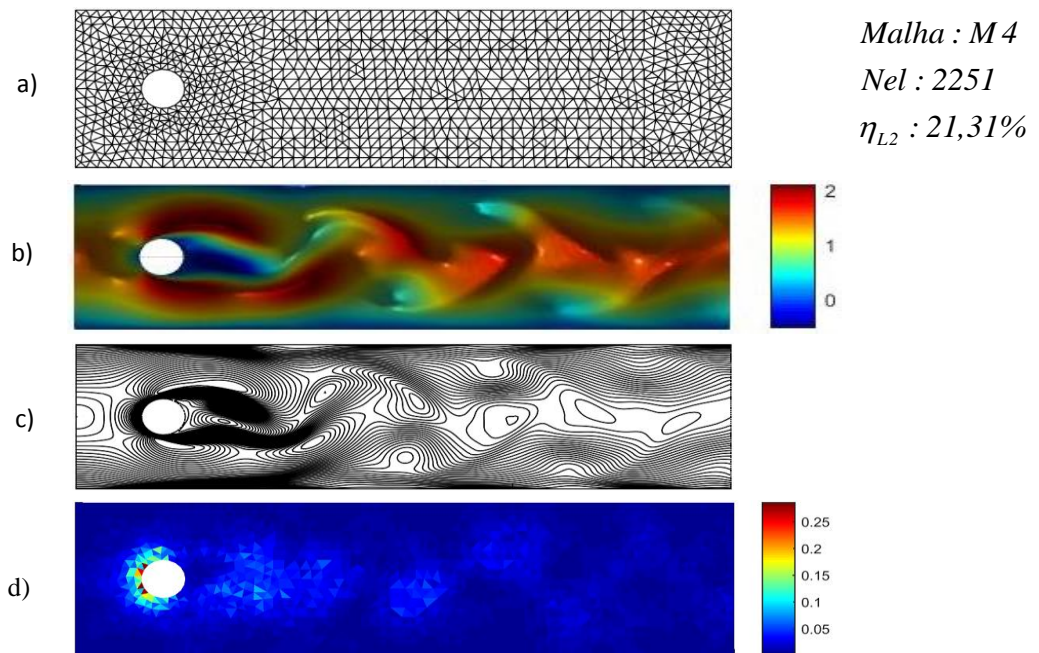


**Figura 17-** Cilindro caso 1: (a) Malha inicial (M2). (b) Velocidade  $u_x$ . (c) Linhas de velocidade  $u_x$ . (d) Distribuição dos erros a nível elementar.  
**Fonte:** Autor (2019).



**Figura 18-** Cilindro caso 1: (a) Malha inicial (M3). (b) Velocidade  $u_x$ . (c) Linhas de velocidade  $u_x$ . (d) Distribuição dos erros a nível elementar  
**Fonte:** Autor (2019).

Buscando confirmar a efetividade da h-adaptatividade na precisão da solução numérica via DG, avalia-se uma malha quase uniforme e com número de elementos semelhante à malha M3 h-adaptada.

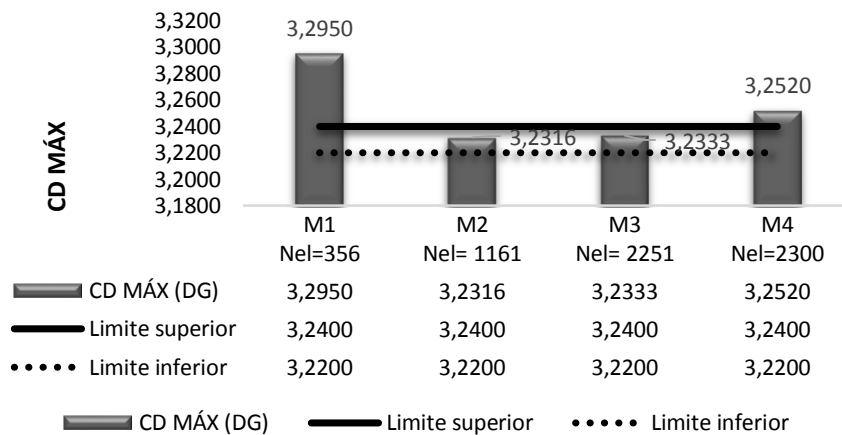


**Figura 19-** Cilindro caso 1: (a) Malha homogênea (M4). (b) Velocidade  $u_x$ . (c) Linhas de velocidade  $u_x$ . (d) Distribuição dos erros a nível elementar  
**Fonte:** Autor (2019).



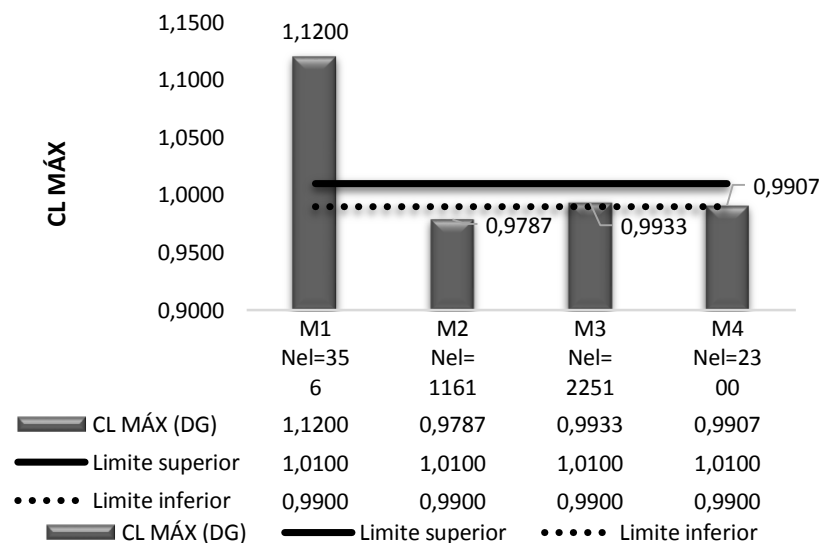
Neste caso, uma análise comparativa entre a malha M3 (adaptada) e M4 (quase uniforme) mostra que a metodologia de adaptação de malha aqui proposta tende a produzir uma uniformização dos erros de discretização ao longo do domínio. Tal fato é esperado uma vez que o critério de malha ótima aplicado visa a equidistribuição dos erros ao longo do domínio.

Além disso, na Figura 20 e Figura 21 compara-se os valores obtidos para  $Cd$  máximo e  $Cl$  máximo via DG h-adaptativo aos limites estabelecidos por Schäfer e Turek (1996).



**Figura 20-** Cilindro caso 1: Comparação dos valores obtidos para  $Cd$  máximo entre as malhas M1(inicial), M2 (h-adaptada), M3 (h-adaptada) e M4 (não h-adaptada homogênea)

**Fonte:** Autor (2019).



**Figura 21-** Cilindro caso 1: Comparação dos valores obtidos para  $Cl$  máximo entre as malhas M1(inicial), M2 (h-adaptada), M3 (h-adaptada) e M4 (não h-adaptada homogênea)

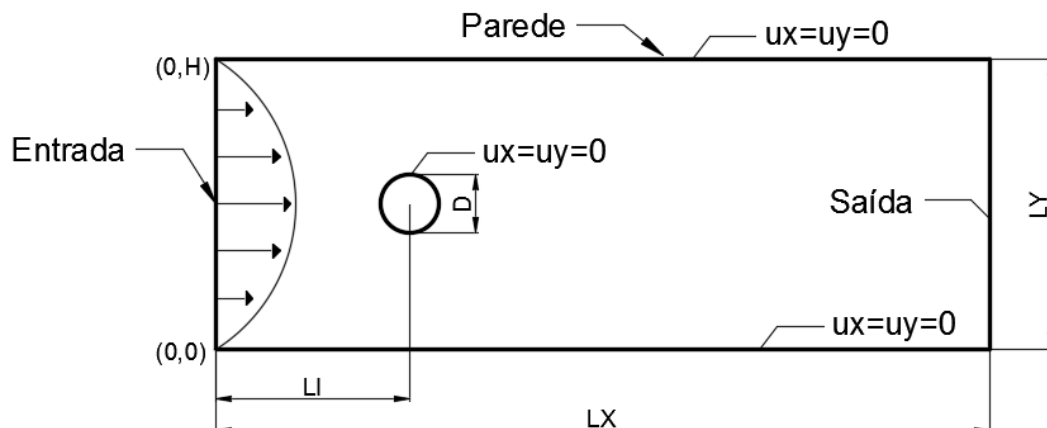
**Fonte:** Autor (2019).

Analisando a Figura 20, percebe-se que a solução numérica utilizando a malha inicial M1 e a malha M4 não h-adaptada apresentaram valores de  $Cd$  máximo sobre o cilindro acima do intervalo preconizado por Schäfer e Turek (1996) como aceitável. Já as malhas M2 e M3, as quais passaram pelo processo h-adaptativo, apresentaram valores de  $Cd$  máximo dentro do intervalo esperado. Quanto a Figura 21, os valores de  $Cl$  máximo nas malhas M3 e M4 tiveram valores dentro do limite tido como satisfatório. Nas malhas M1 e M2 o valor de  $Cl$  máximo divergiu dos valores preconizados.

Portanto, considerando os resultados apresentados, nota-se que o emprego do processo h-adaptativo baseado em recuperação via estimador de erro MNA e a utilização do critério de equidistribuição dos erros com cálculo do novo tamanho elementar via técnica  $LB$  conduz a uma solução numérica com excelente precisão. Tal afirmação é baseada no fato que os resultados obtidos empregando a malha M3 h-adaptada (atendendo o critério de convergência estipulado) apresentou valores de  $Cd$  máximo e  $Cl$  máximo dentro dos limites satisfatórios.

### 5.3.2 Cilindro caso 2

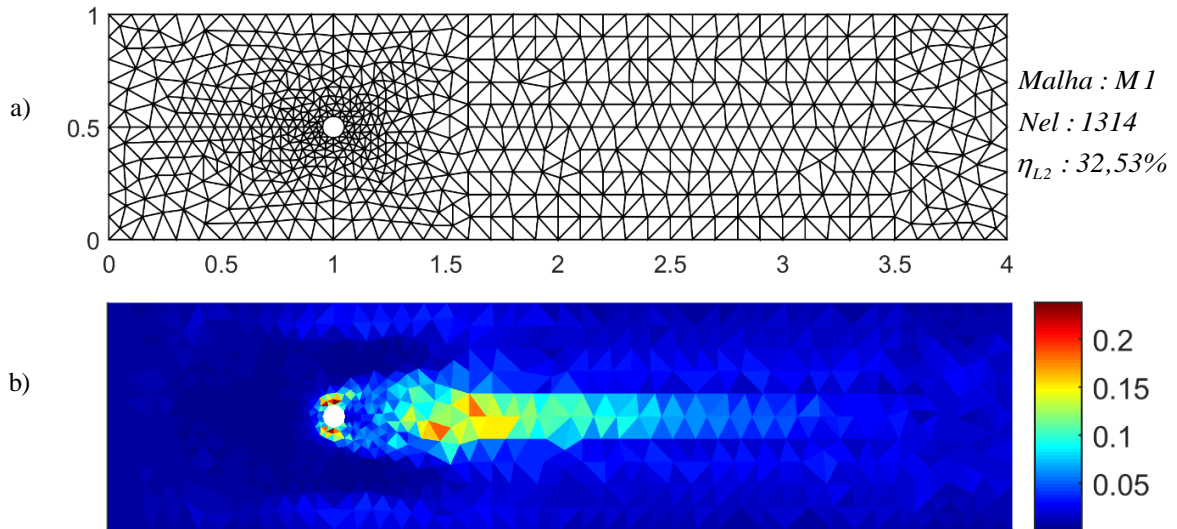
Esta simulação visa efetuar o refino h-adaptativo da malha de elementos finitos considerando  $Re = 40$  e  $t=12s$ . Para  $6 < Re < 40$ , tem-se linhas de separação simétricas para o escoamento. Já quando se utiliza números de Reynolds mais elevados o escoamento se torna instável e essa simetria não é mais encontrada (COUNTANCEAU e BOUARD, 1977).



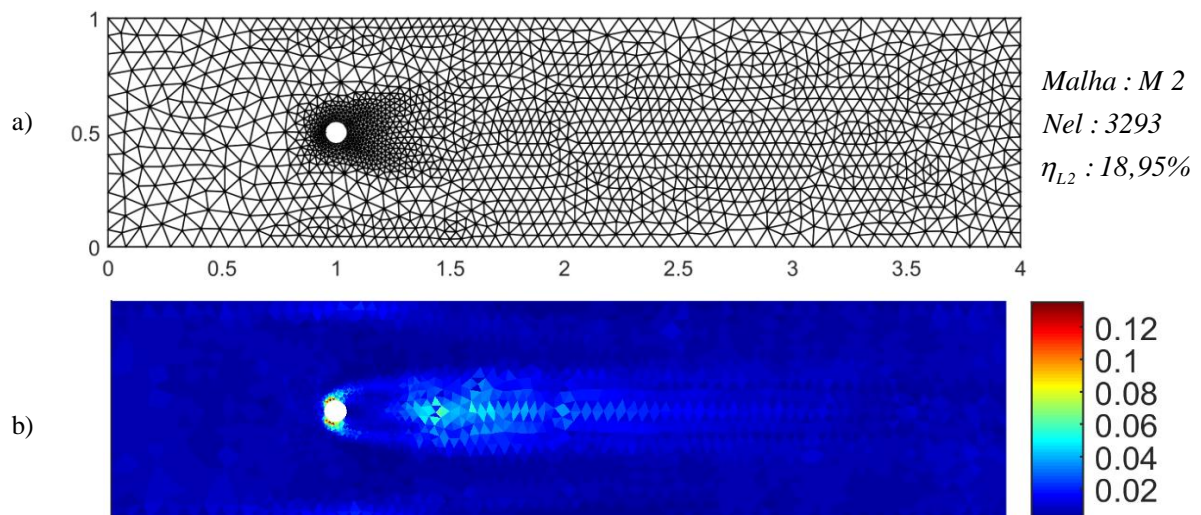
**Figura 22-** Parâmetros e condições de contorno para o domínio utilizado na simulação do escoamento sobre um cilindro,  $LX=40D$ ,  $LY=10D$ ,  $LI=10D$ ,  $D=0.1$ ,  $Re=40$  e  $t=12$

**Fonte:** Autor (2019).

As Figuras (23), (24) e (25) representam os resultados do processo h-adaptativo desde a malha inicial M1 até a malha final M3 que cumpre o critério de convergência estipulado ( $\bar{\eta}_{L_2} \leq 15\%$ ). Uma limitação para o tamanho h é imposta, tal que  $0,004 \leq h \leq 0,1$ .

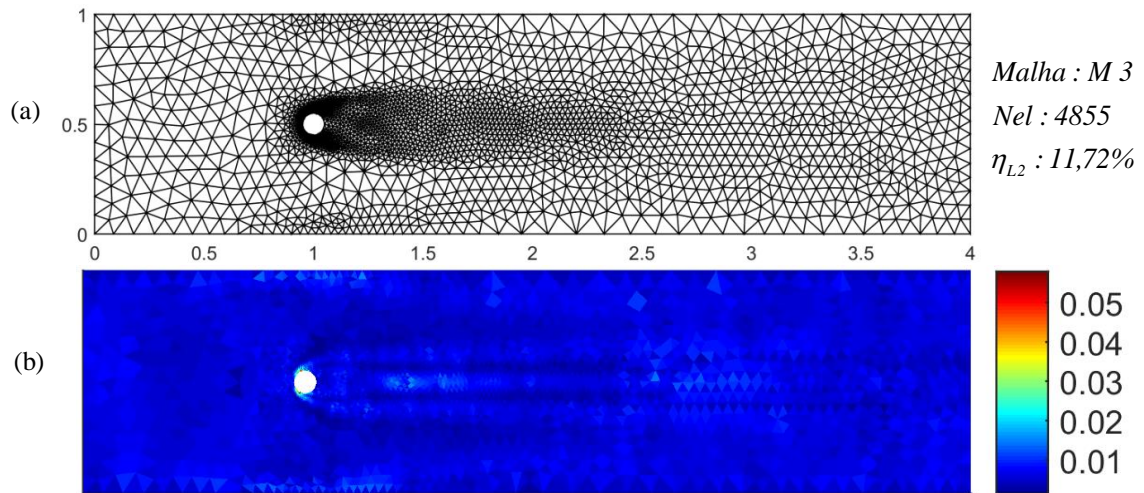


**Figura 23-** (a) Malha 1 (inicial). (b) Distribuição dos erros elementares em t=12  
**Fonte:** Autor (2019).



**Figura 24-** (a) Malha 2. (b) Distribuição dos erros elementares em t=12  
**Fonte:** Autor (2019).

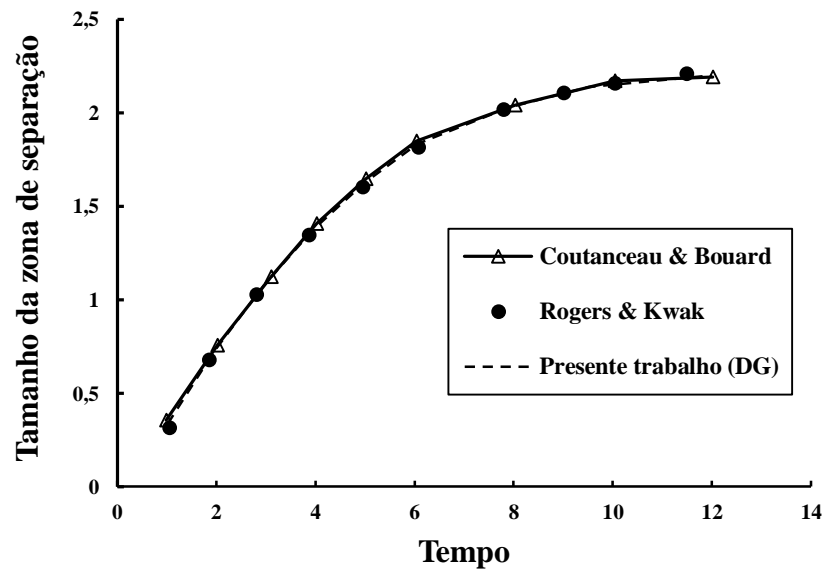




**Figura 25-** (a) Malha 3. (b) Distribuição dos erros elementares em  $t=12$   
**Fonte:** Autor (2019).

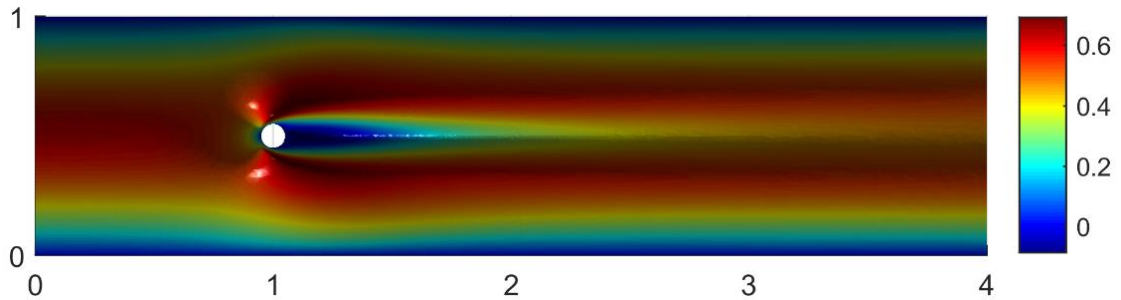
A malha h-adaptativa obtida via indicador de erro se mostra eficiente no sentido de equidistribuir e diminuir os erros a nível elementar.

A evolução temporal para o comprimento da zona de separação atrás do cilindro na malha 3 obtida via processo h-adaptativo é expressa na Figura 26, sendo comparado com resultados obtidos nos trabalhos de Coutanceau e Bouard (1977) e Rogers e Kwak (1991).



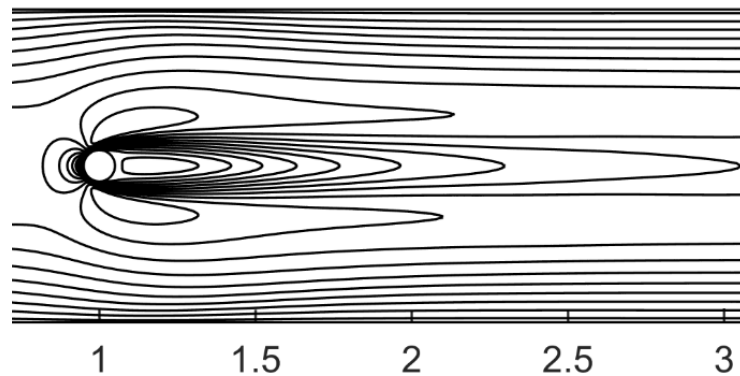
**Figura 26-** Tamanho da zona de separação atrás do cilindro circular para  $Re=40$   
**Fonte:** Autor (2019).

O tamanho da zona de separação atrás do cilindro obtido com a malha 3 h-adaptada foi semelhante aos obtidos por Countanceau e Bouard (1977) e Rogers e Kwak (1991). A Figura 27 apresenta a distribuição da velocidade no domínio enquanto que a Figura 28 apresenta as linhas de velocidade  $u_x$  para a malha M3 em  $t=12$ .



**Figura 27-** Distribuição da velocidade  $u_x$  no domínio

**Fonte:** Autor (2019).



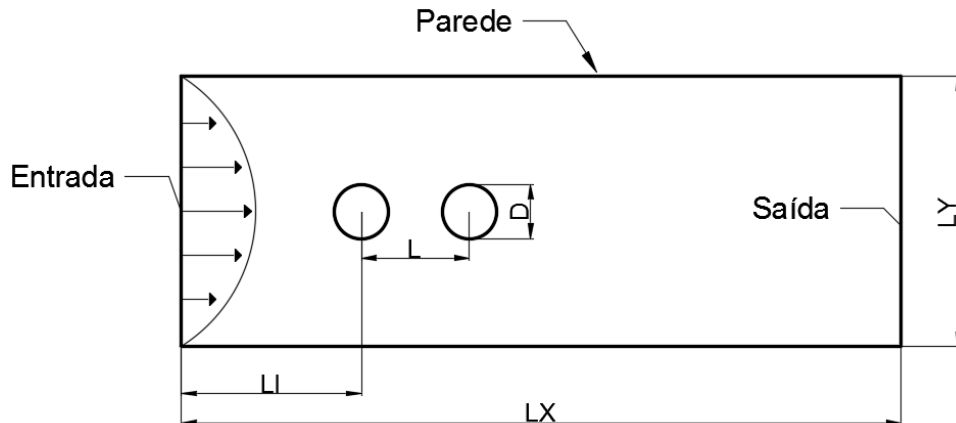
**Figura 28-** Linhas de velocidade  $u_x$  para a malha M3 em  $t=12$

**Fonte:** Autor (2019).

A precisão do método DG h-adaptativo é demonstrada pela simetria bem definida entre as linhas da parte superior e inferior ao cilindro.

### 5.3.3 Cilindros dispostos paralelamente na horizontal

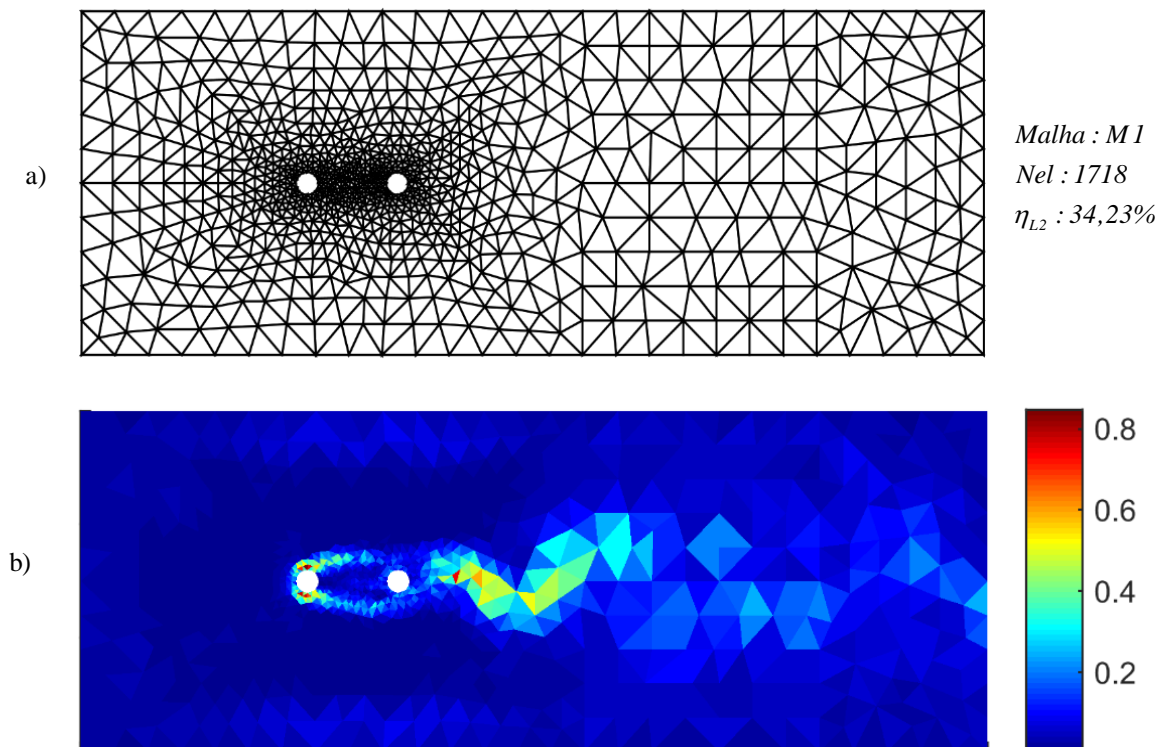
O domínio computacional com as respectivas condições de fronteira para esta simulação é apresentado na Figura 29. A mesma será realizada para  $Re = 200$ , com distância entre os cilindros de  $L=2D$ ,  $L=3D$  e  $L=4D$ .



**Figura 29-** Parâmetros para o domínio utilizado na simulação do escoamento sobre dois cilindros dispostos paralelamente ao escoamento,  $LX=40D$ ,  $LY=15D$ ,  $LI=10D$ ,  $D=0.1$ ,  $Re=200$

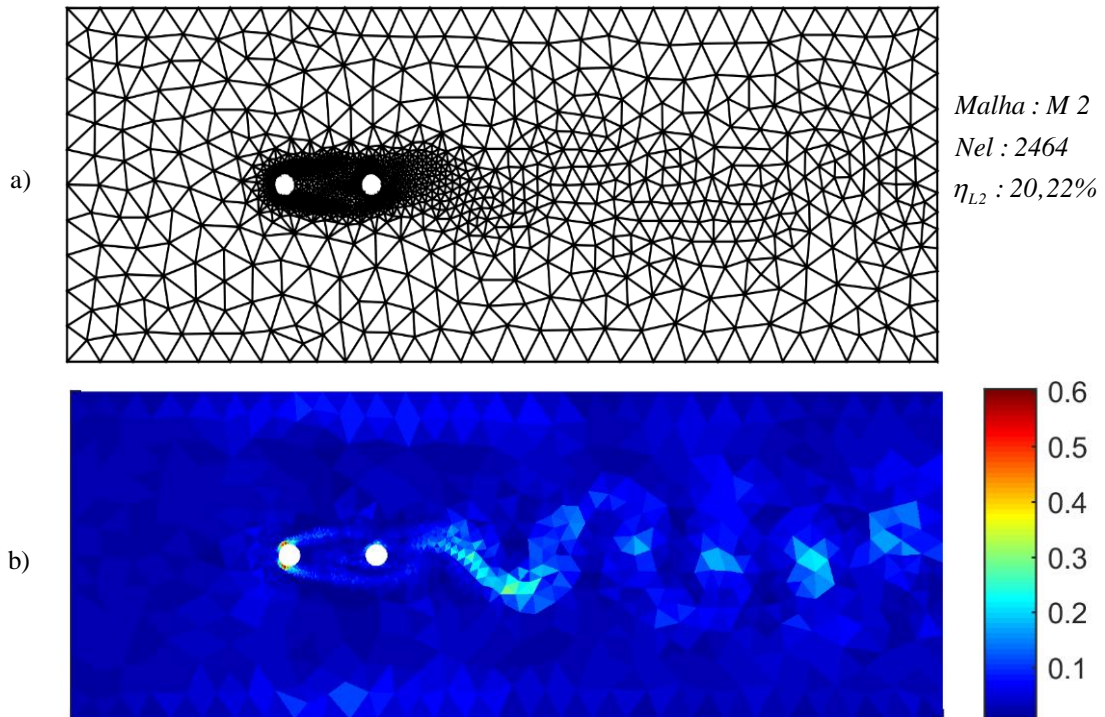
**Fonte:** Autor (2019).

As Figuras (30), (31) e (32) representam os resultados do processo h-adaptativo desde a malha inicial M1 até a malha final M3 que atende ao critério de convergência estipulado ( $\bar{\eta}_{L2} \leq 15\%$ ) para  $L=4D$ . Foi imposta uma limitação ao tamanho do elemento ( $h$ ), tal que  $0,004 \leq h \leq 0,1$ .

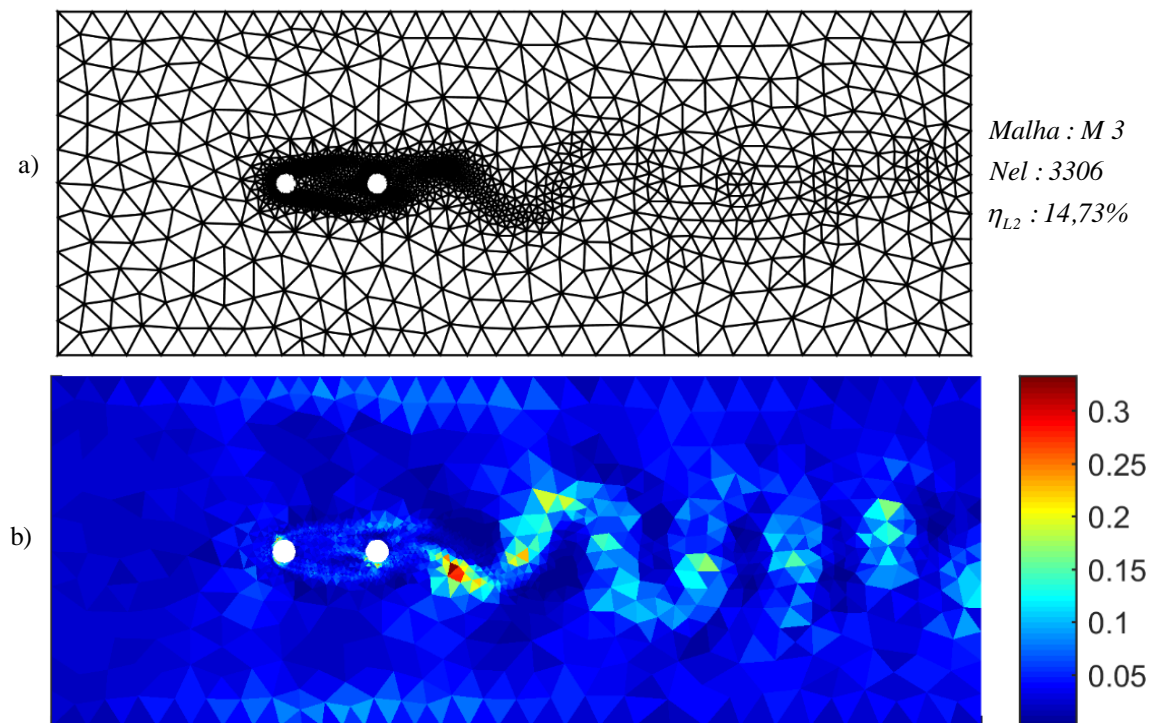


**Figura 30-** (a) Malha M1 para  $L=4D$ , (b) Distribuição dos erros elementares em  $t=12$

**Fonte:** Autor (2019).



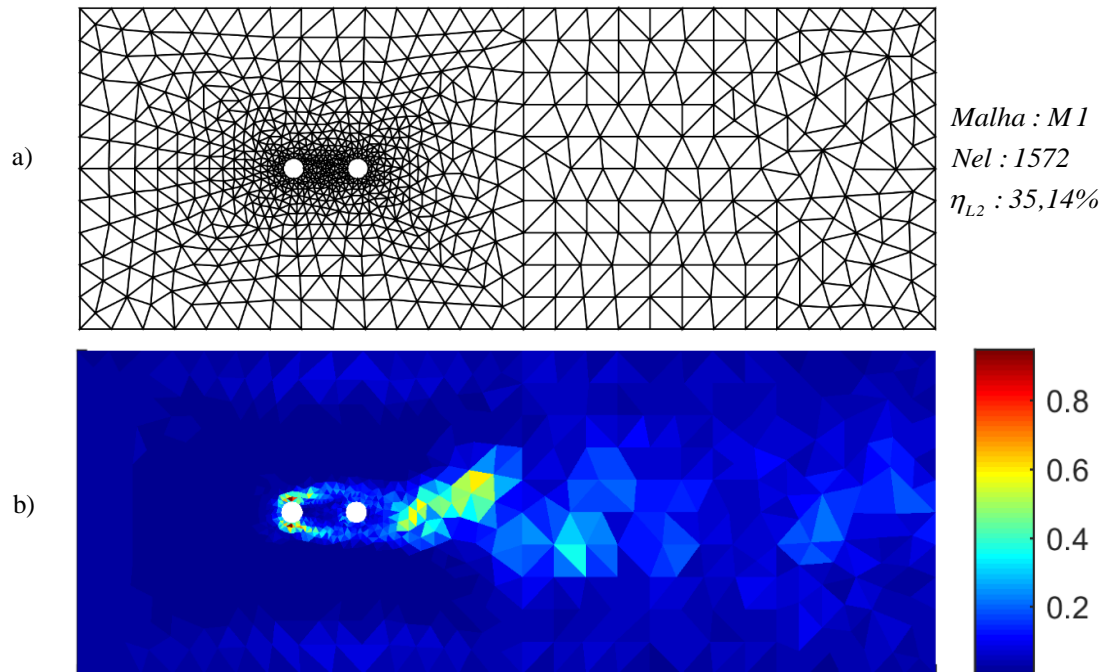
**Figura 31-** (a) Malha M2 para  $L=4D$ . (b) Distribuição dos erros elementares em  $t=12$   
**Fonte:** Autor (2019).



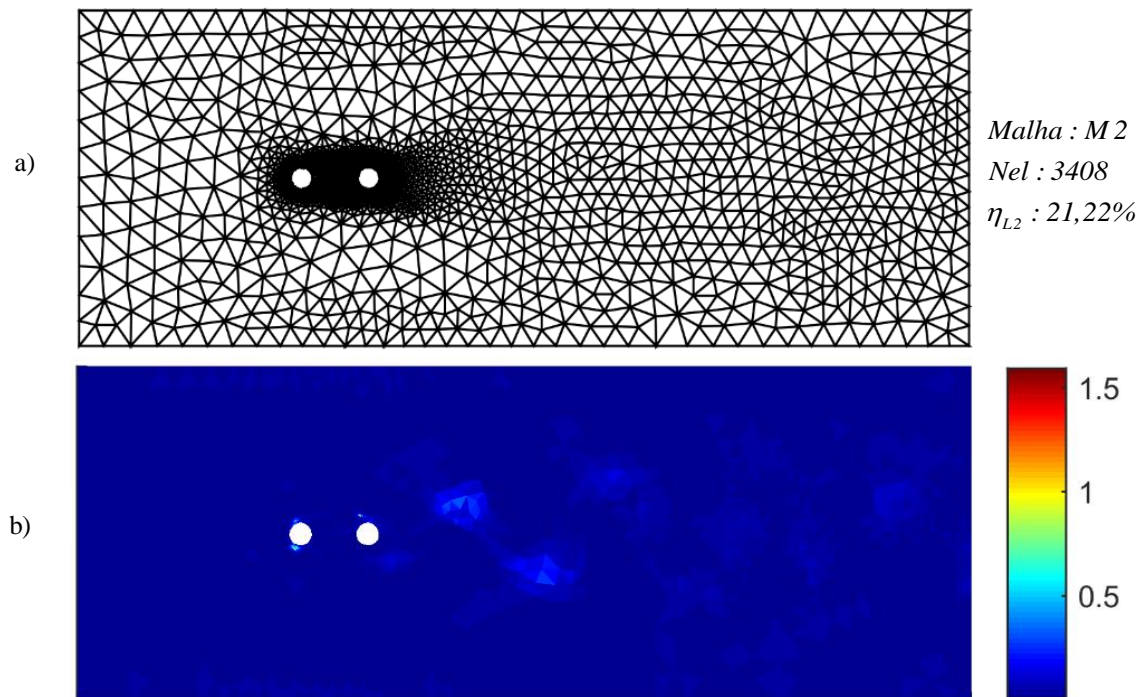
**Figura 32-** (a) Malha M3 para  $L=4D$ . (b) Distribuição dos erros elementares em  $t=12$   
**Fonte:** Autor (2019).



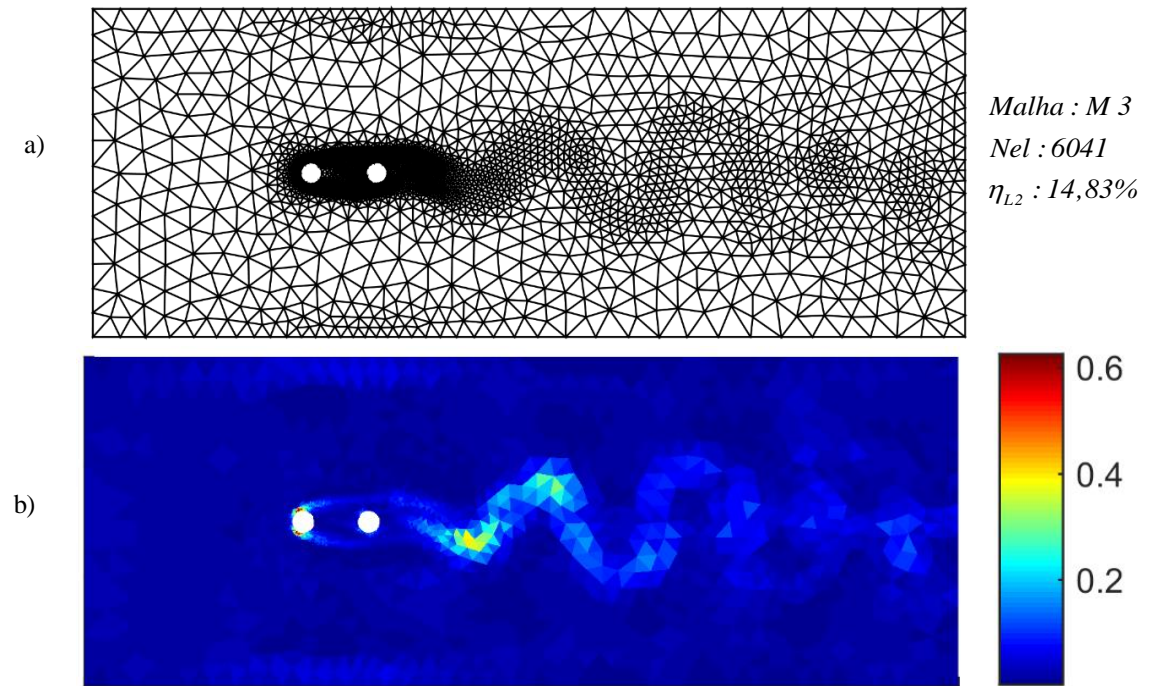
O processo h-adaptativo para L=3D é demonstrado nas Figuras (33), (34) e (35).



**Figura 33-** (a) Malha M1 para L=3D, (b) Distribuição dos erros elementares em t=12  
**Fonte:** Autor (2019).

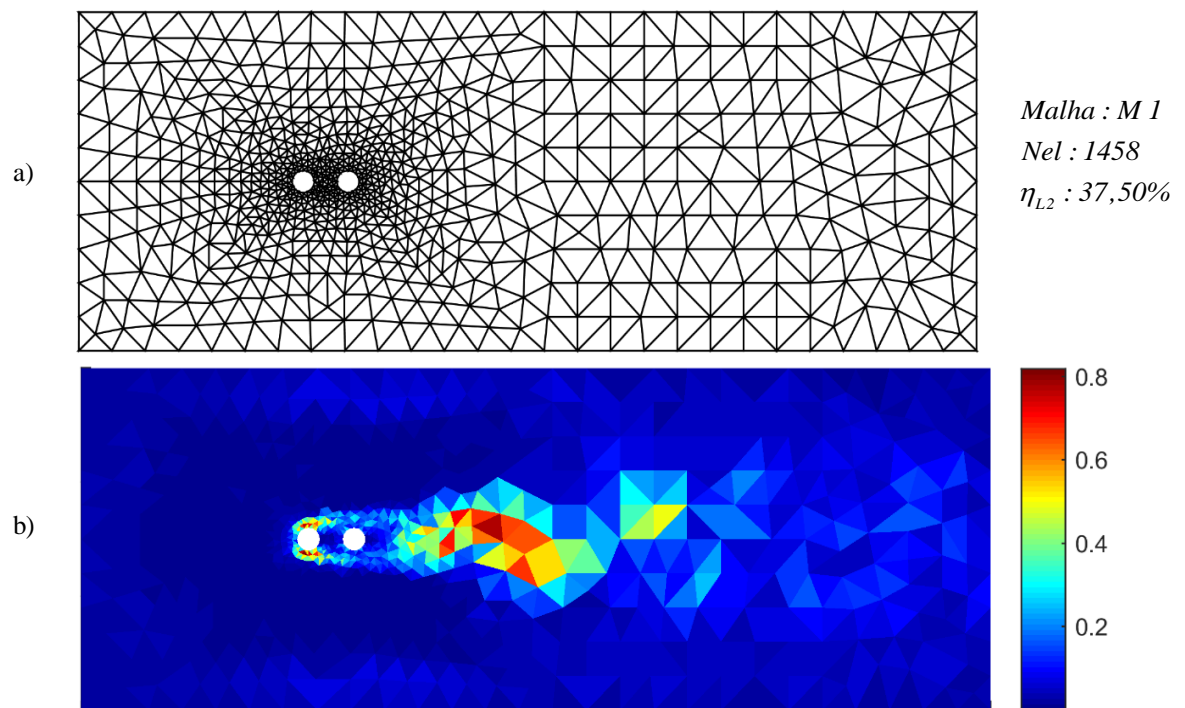


**Figura 34-** (a) Malha M2 para L=3D, (b) Distribuição dos erros elementares em t=12  
**Fonte:** Autor (2019).

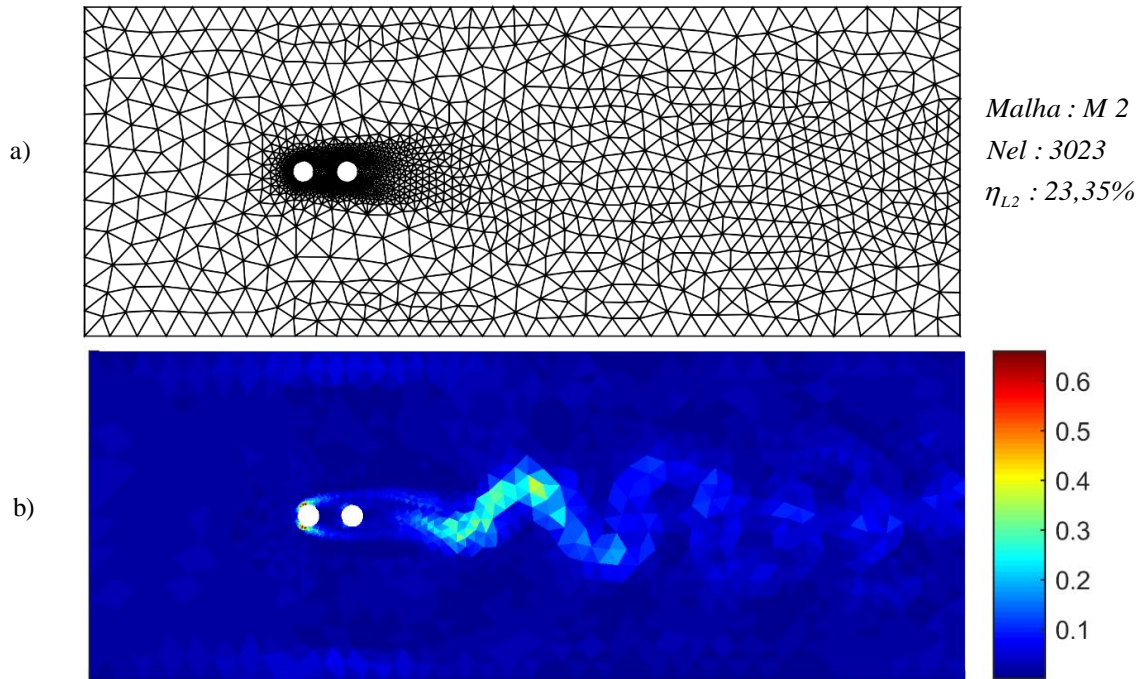


**Figura 35-** (a) Malha M3 para L=3D. (b) Distribuição dos erros elementares em t=12  
**Fonte:** Autor (2019).

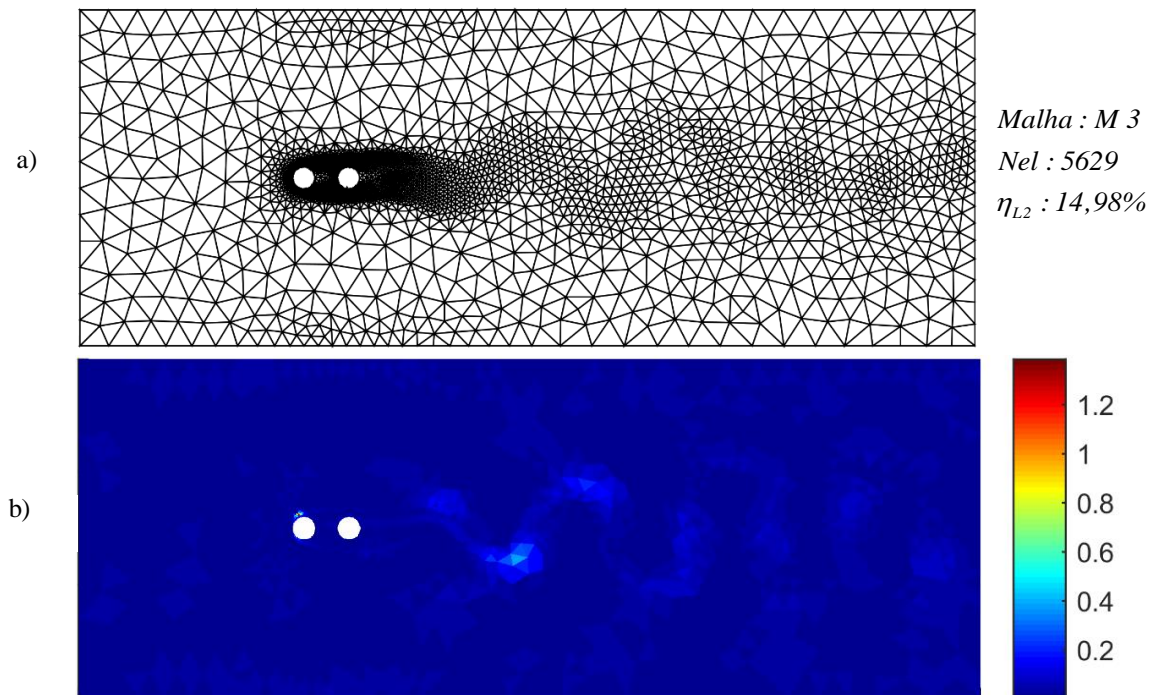
O processo h-adaptativo para L=2D é demonstrado nas Figuras (36), (37) e (38).



**Figura 36-** (a) Malha M1 para L=2D, (b) Distribuição dos erros elementares em t=12  
**Fonte:** Autor (2019).



**Figura 37-** (a) Malha M2 para L=2D. (b) Distribuição dos erros elementares em t=12  
**Fonte:** Autor (2019).



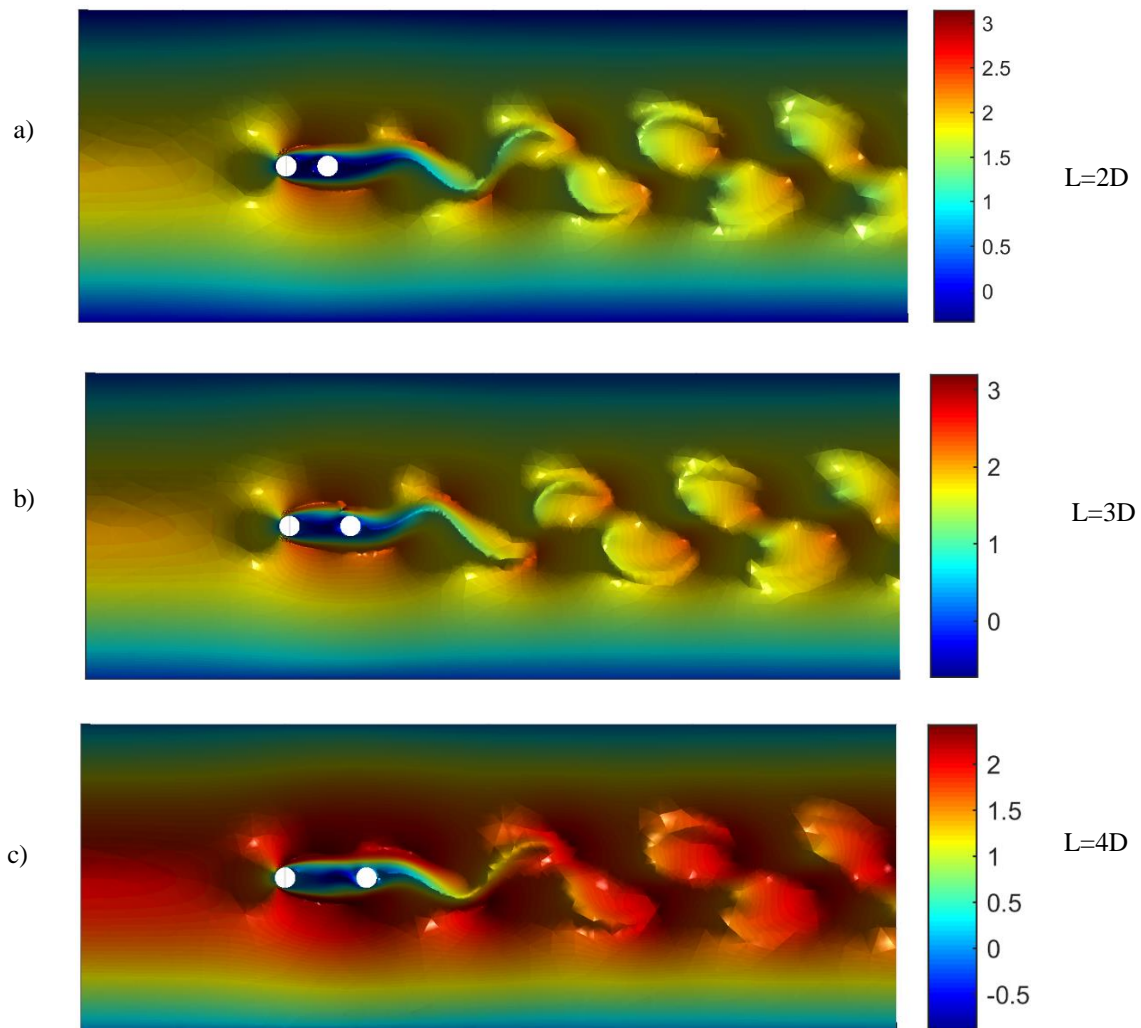
**Figura 38-** (a) Malha M3 para L=2D. (b) Distribuição dos erros elementares em t=12  
**Fonte:** Autor (2019).

A soluções obtidas através das malhas M3 h-adaptadas para L=2D, L=3D e L=4D, representadas respectivamente pelas Figuras 32 (a), 35 (a) e 38 (a) atendem ao critério de convergência estipulado por ( $\bar{\eta}_{L_2} \leq 15\%$ ). O emprego da malha h-adaptativa equidistribui o



erro ao longo domínio e reduz o erro elementar através da otimização do tamanho dos elementos da malha de acordo com o comportamento da solução numérica.

Considerando a velocidade na direção preferencial do escoamento,  $u_x$ , apresenta-se o seu comportamento ao longo do domínio em  $t=12$  na Figura 39. Foram utilizadas na simulação as malhas M3 convergentes para  $L=2D$ ,  $L=3D$  e  $L=4D$ .



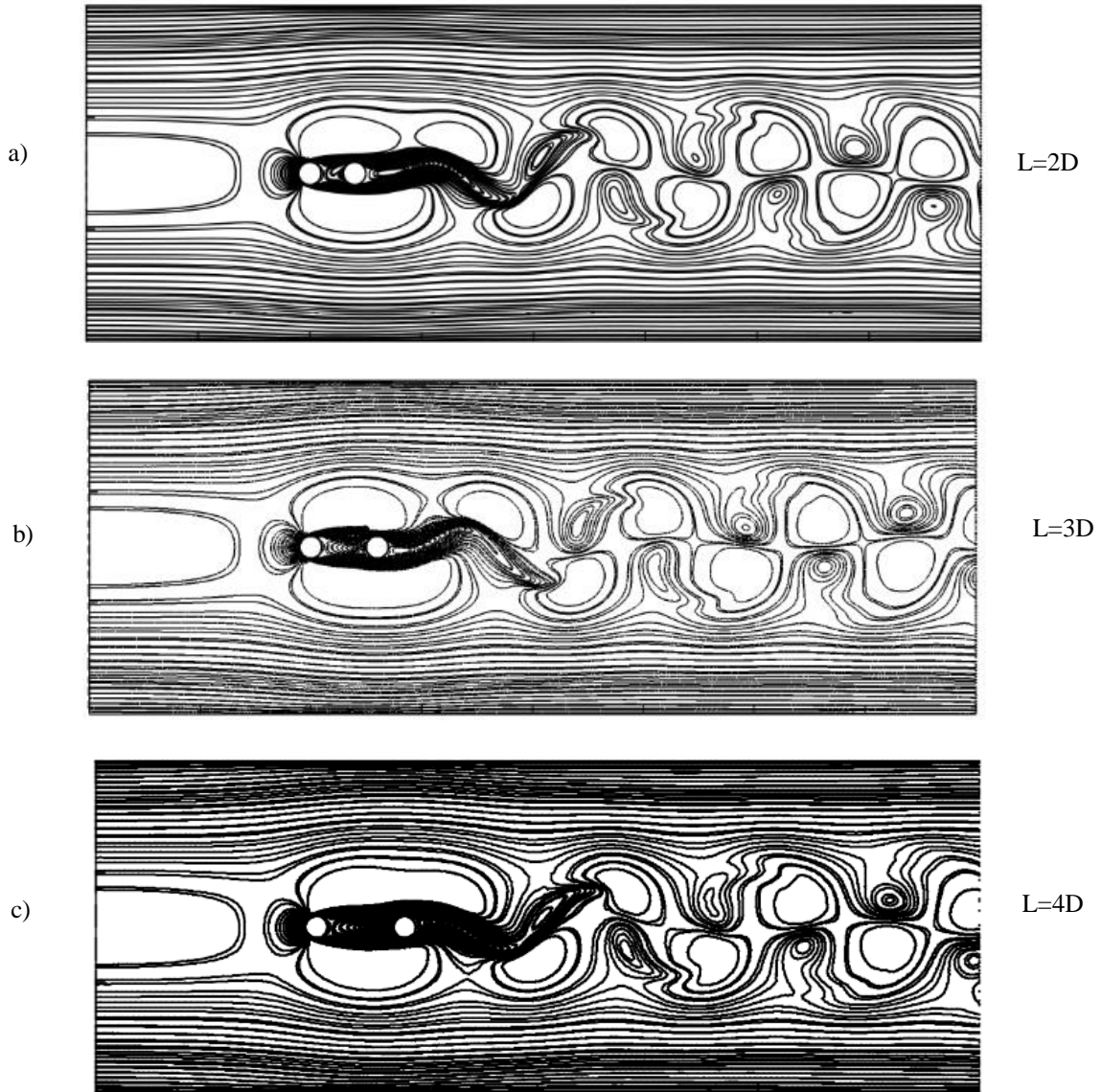
**Figura 39-** Velocidade  $u_x$  em  $t=12$ . (a)  $L=2D$ . (b)  $L=3D$ . (c)  $L=4D$

**Fonte:** Autor (2019).

É possível perceber uma diferença no comportamento da velocidade  $u_x$  oriundo da alteração da distância entre os cilindros. Para  $L=2D$  e  $L=3D$  a simulação apresenta um pico de velocidade maior próximo aos cilindros devido a influência de um cilindro sobre o outro e a velocidade entre os cilindros é nula. Para  $L=4D$  o valor da máxima velocidade é menor e a velocidade entre os cilindros é negativa.



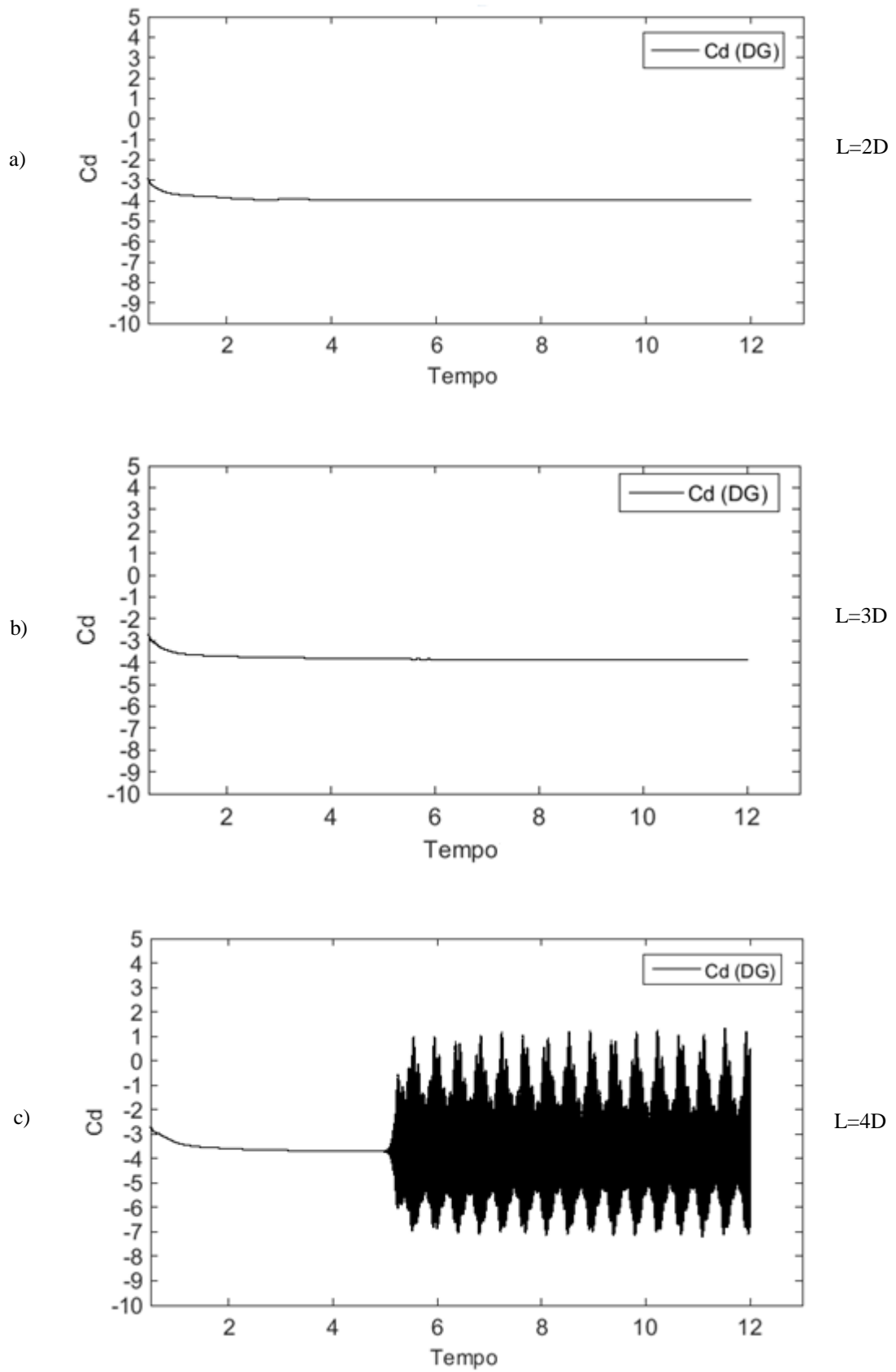
As linhas de velocidade para este caso são apresentadas na Figura 40.



**Figura 40-** Linhas de velocidade  $u_x$  em  $t=12$ , a)  $L=2D$ , b)  $L=3D$ , c)  $L=4D$

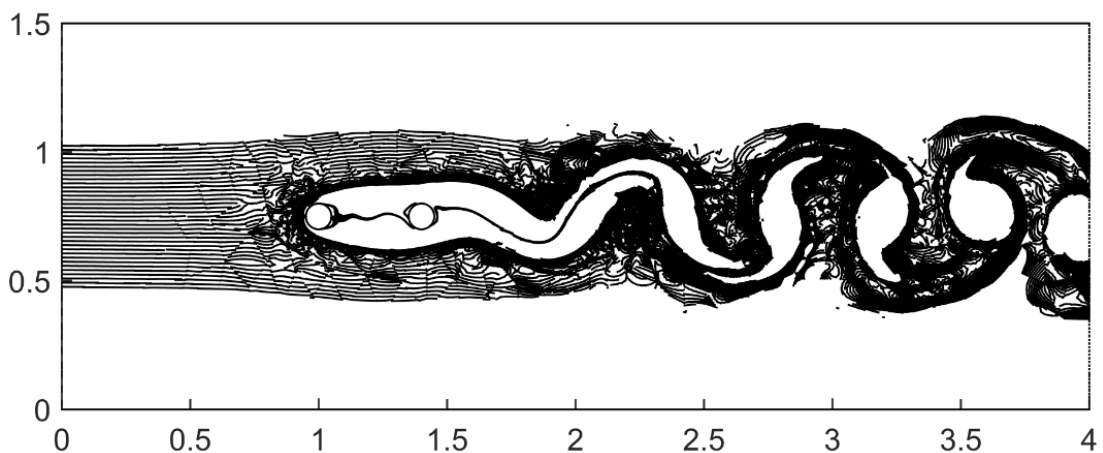
**Fonte:** Autor (2019).

As esteiras de saída formadas pela passagem do escoamento pelos cilindros são diferentes para  $L=2D$ ,  $L=3D$  e  $L=4D$ . Os gráficos com os valores para o coeficiente  $Cd$  para o segundo cilindro é apresentado na Figura 41.



**Figura 41-** Gráficos com valores de Cd no segundo cilindro. (a) L=2D. (b) L=3D. (c) L=4D  
**Fonte:** Autor (2019).

Quando a distância entre os cilindros é  $L=2D$  ou  $L=3D$ , a força de arrasto que age no segundo cilindro é negativa, justificado pela zona de baixa pressão formada na esteira do primeiro cilindro. Quando a distância é aumentada para  $L=4D$  a força torna-se positiva. Assim, os vórtices têm espaço suficiente para se formarem e se desprenderem entre os dois cilindros. A frequência de desprendimento dos vórtices faz com que os valores de  $Cd$  fiquem variando quando  $L=4D$ . A Figura 42 apresenta as linhas de vorticidade para  $L=4D$ .

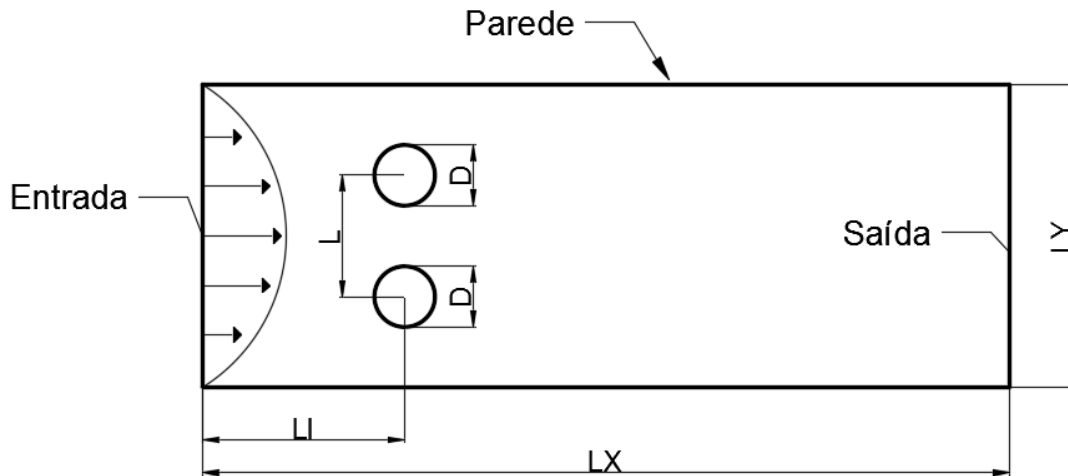


**Figura 42-** Linhas de vorticidade para  $L=4D$   
**Fonte:** Autor (2019).

Na Figura 42 observa-se, próximo à saída do canal, a presença de uma estrutura muito próxima à esteira de Von Kármán. A presença dos dois cilindros induziu o processo de separação do escoamento ao redor do segundo cilindro, provocando o efeito dessa instabilidade no escoamento.

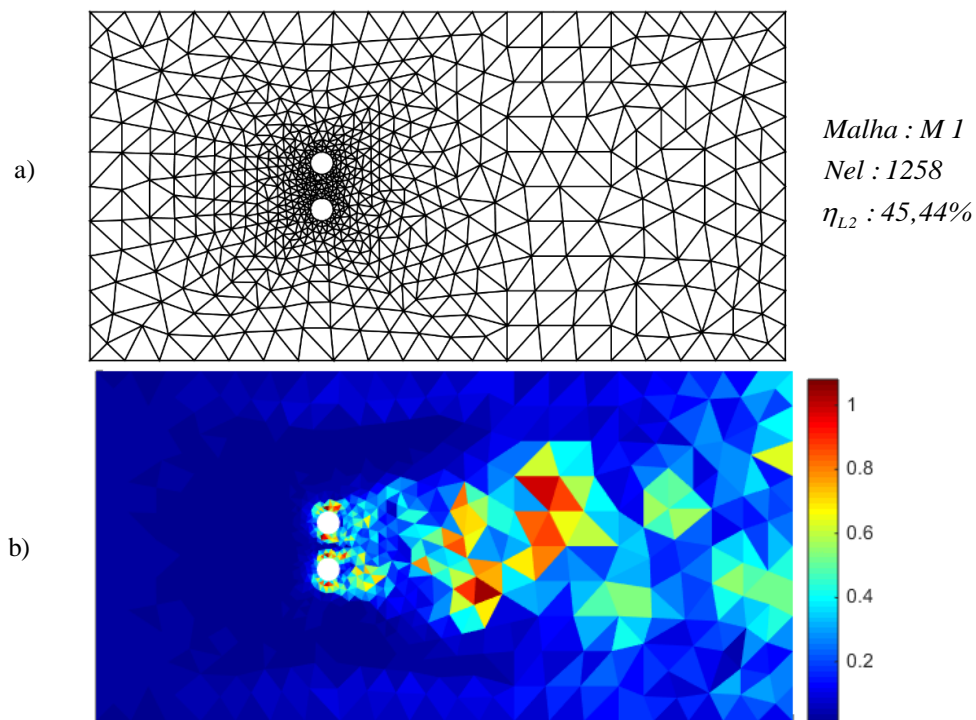
### 5.3.4 Cilindros dispostos paralelamente na vertical

O domínio computacional com as respectivas condições de fronteira para esta simulação é apresentado na Figura 43. Esta simulação será realizada para  $Re = 200$ , com distância entre os cilindros  $L=2D$ ,  $L=3D$  e  $L=4D$ . A ordem do polinômio interpolador utilizado para resolver as equações de Navier-Stokes via método DG é  $N=3$ .

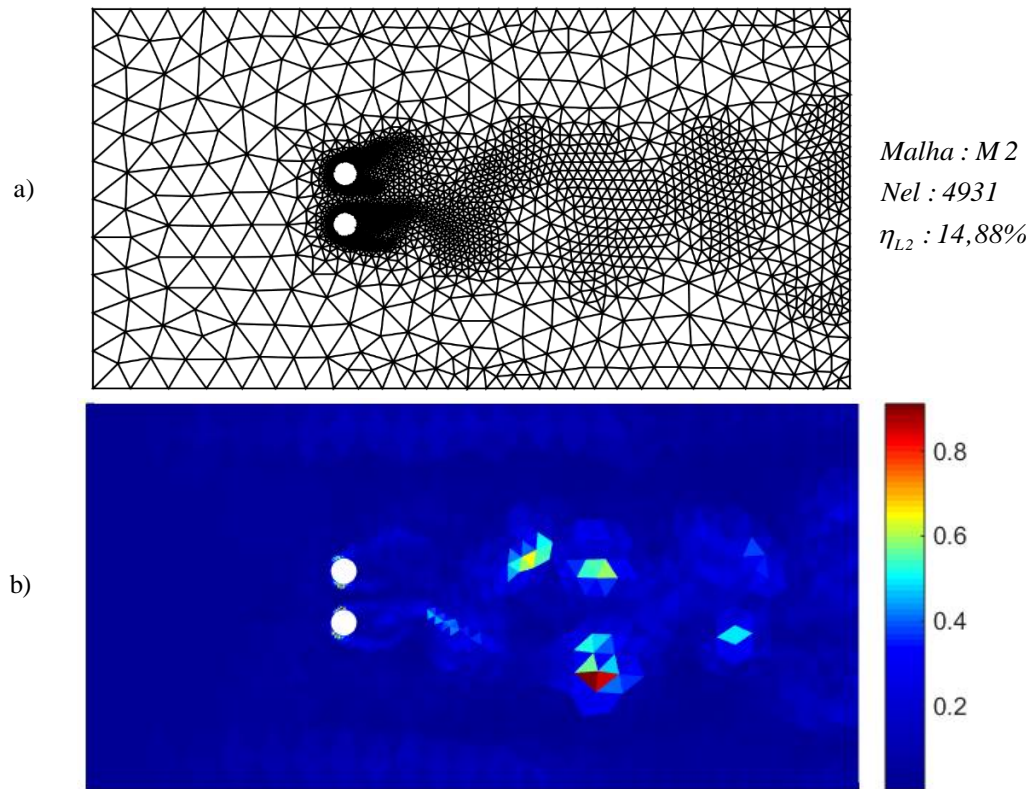


**Figura 43-** Parâmetros para o domínio utilizado na simulação do escoamento sobre dois cilindros dispostos paralelamente ao escoamento,  $LX=30D$ ,  $LY=15D$ ,  $LI=10D$ ,  $D=0.1$ ,  $Re=200$ ,  $t=12$  e  $L$  variando entre  $2D$  e  $4D$   
**Fonte:** Autor (2019).

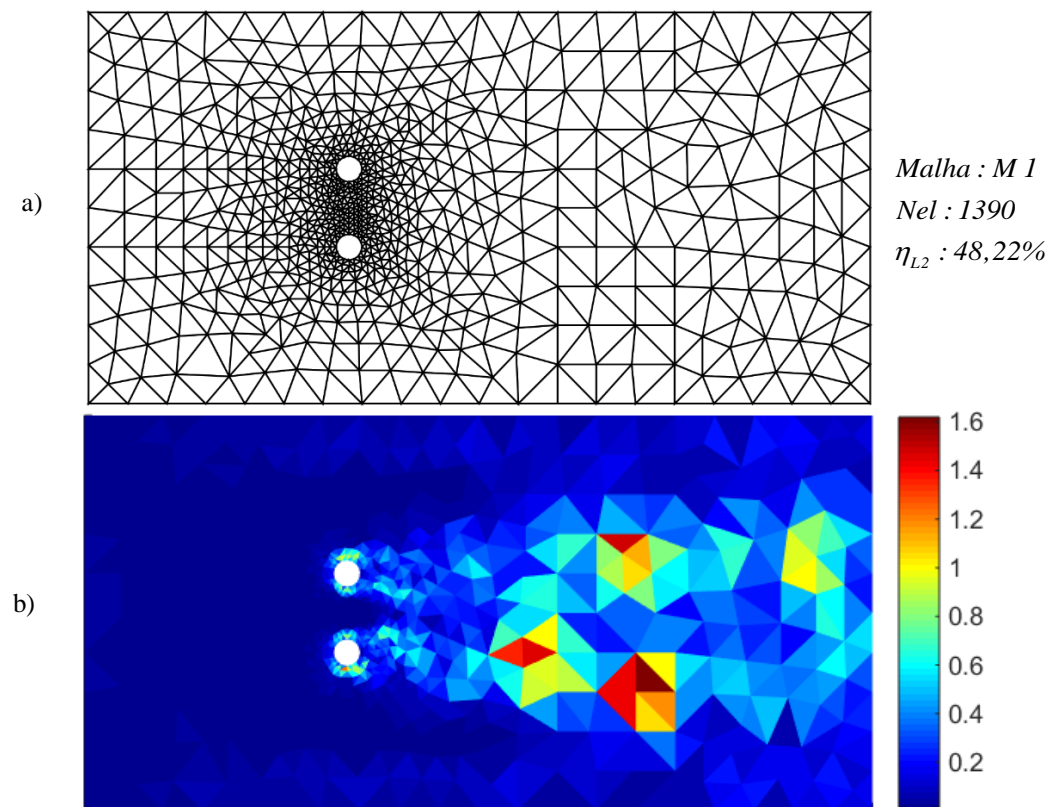
As figuras subsequentes apresentam as malhas iniciais e as malhas h-adaptadas em  $t=12s$  que atendem ao critério de convergência especificado ( $\eta_{L2} \leq 15\%$ ) para  $L=2D$ ,  $L=3D$  e  $L=4D$  respectivamente. Para cada malha é demonstrado a distribuição dos erros estimados a nível elementar que guiam o processo de adaptação. Foi imposta uma limitação ao tamanho do elemento ( $h$ ), tal que  $0,004 \leq h \leq 0,1$ .



**Figura 44-** Malha inicial para  $L=2D$ . (a) Malha M1. (b) Distribuição dos erros elementares  
**Fonte:** Autor (2019).

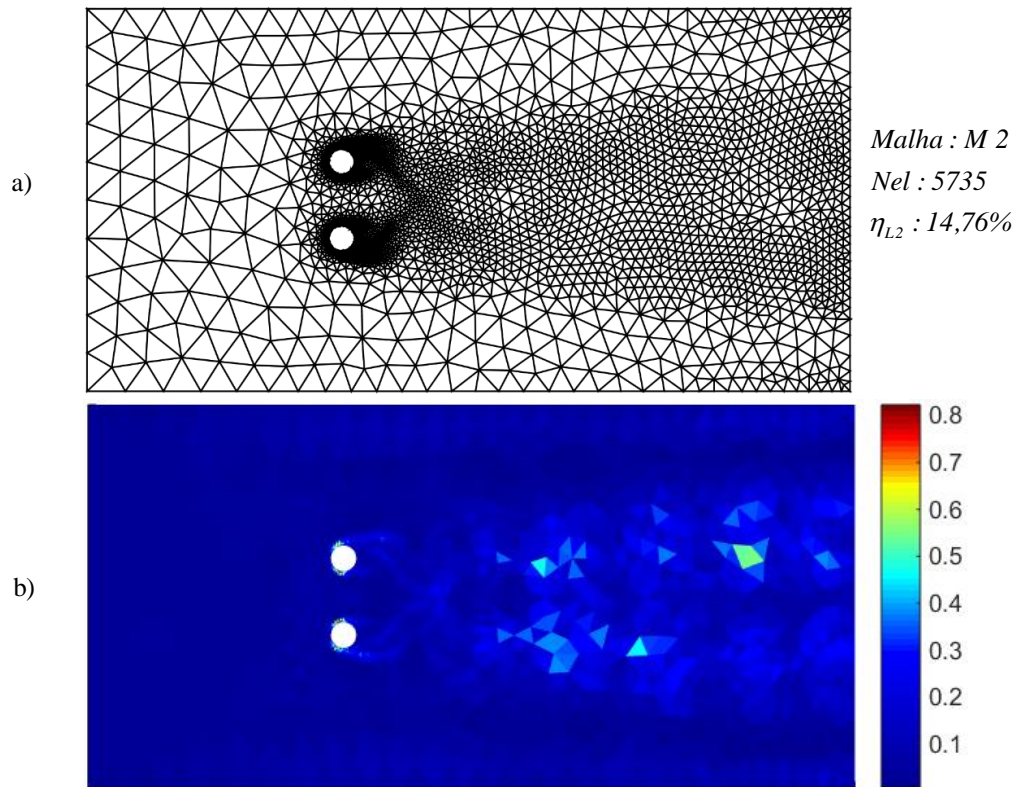


**Figura 45-** Malha h-adaptada para L=2D. (a) Malha M2. (b) Distribuição dos erros elementares  
**Fonte:** Autor (2019).

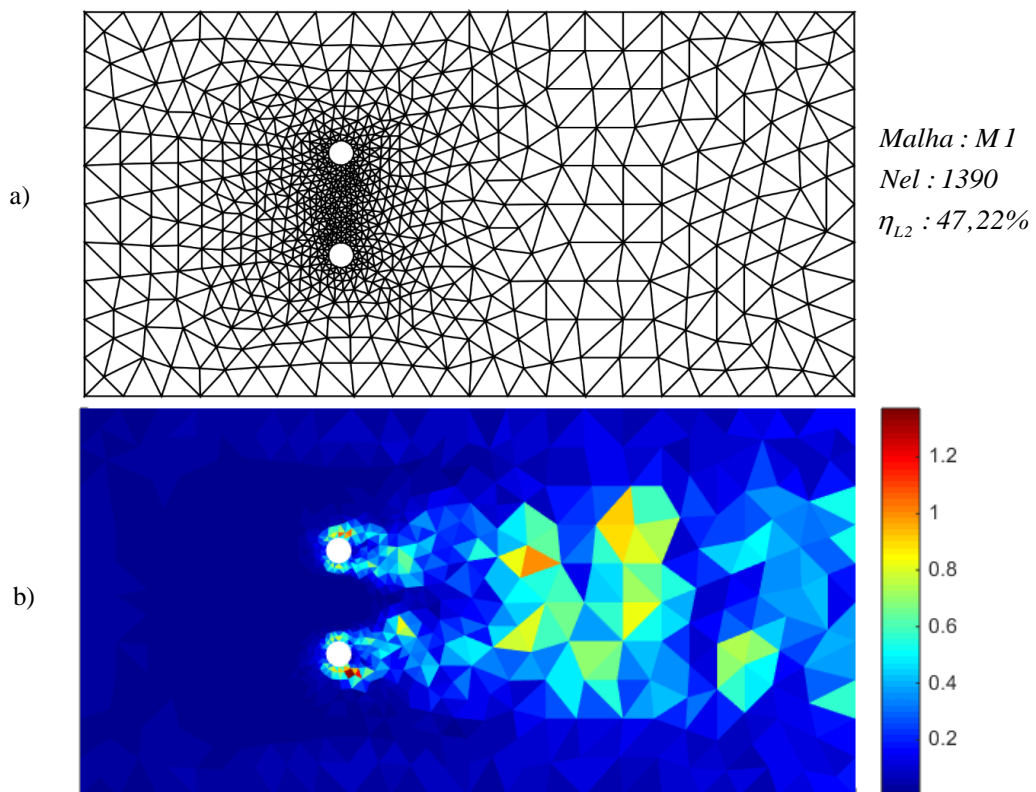


**Figura 46-** Malha inicial para L=3D. (a) Malha M1. (b) Distribuição dos erros elementares  
**Fonte:** Autor (2019).

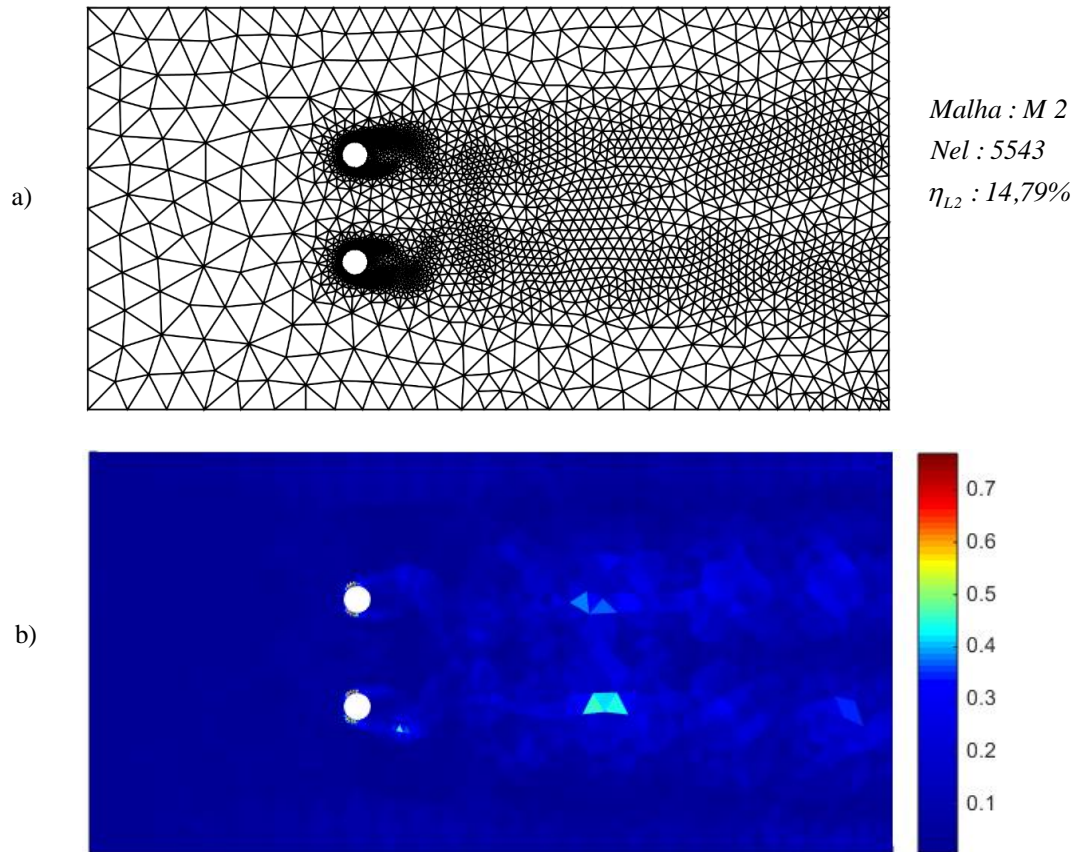




**Figura 47-** Malha h-adaptada para L=3D. (a) Malha M2. (b) Distribuição dos erros elementares  
**Fonte:** Autor (2019).

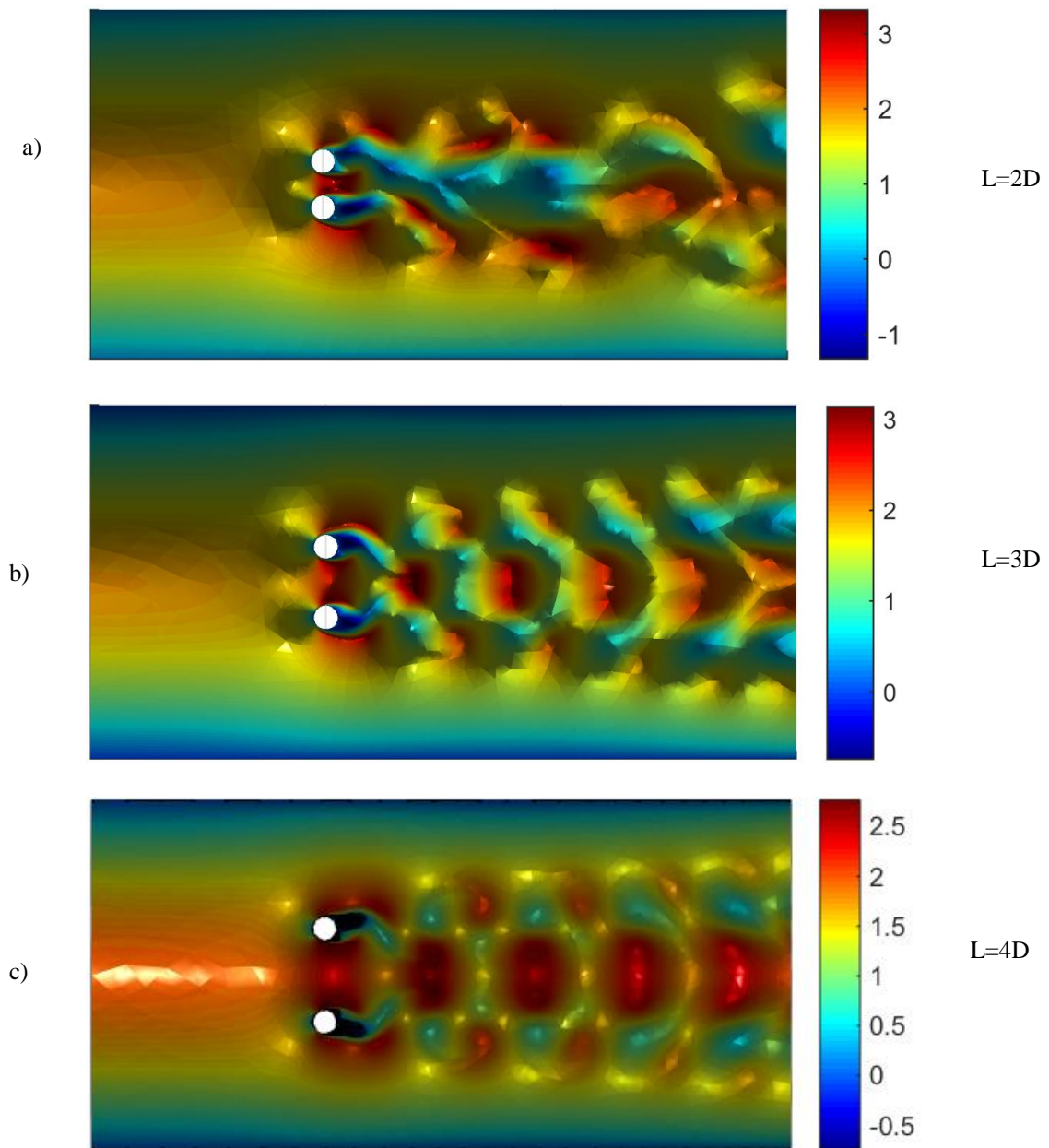


**Figura 48-** Malha inicial para L=4D. (a) Malha M1. (b) Distribuição dos erros elementares  
**Fonte:** Autor (2019).



**Figura 49-** Malha h-adaptada para L=4D. (a) Malha M2. (b) Distribuição dos erros elementares  
**Fonte:** Autor (2019).

A solução para as malhas h-adaptadas (Figuras 45(a), 47(a) e 49(a)) considerando a velocidade na direção preferencial do escoamento,  $u_x$ , que tem seu gradiente utilizado como guia para o processo h-adaptativo, é apresentada nas Figura 50.



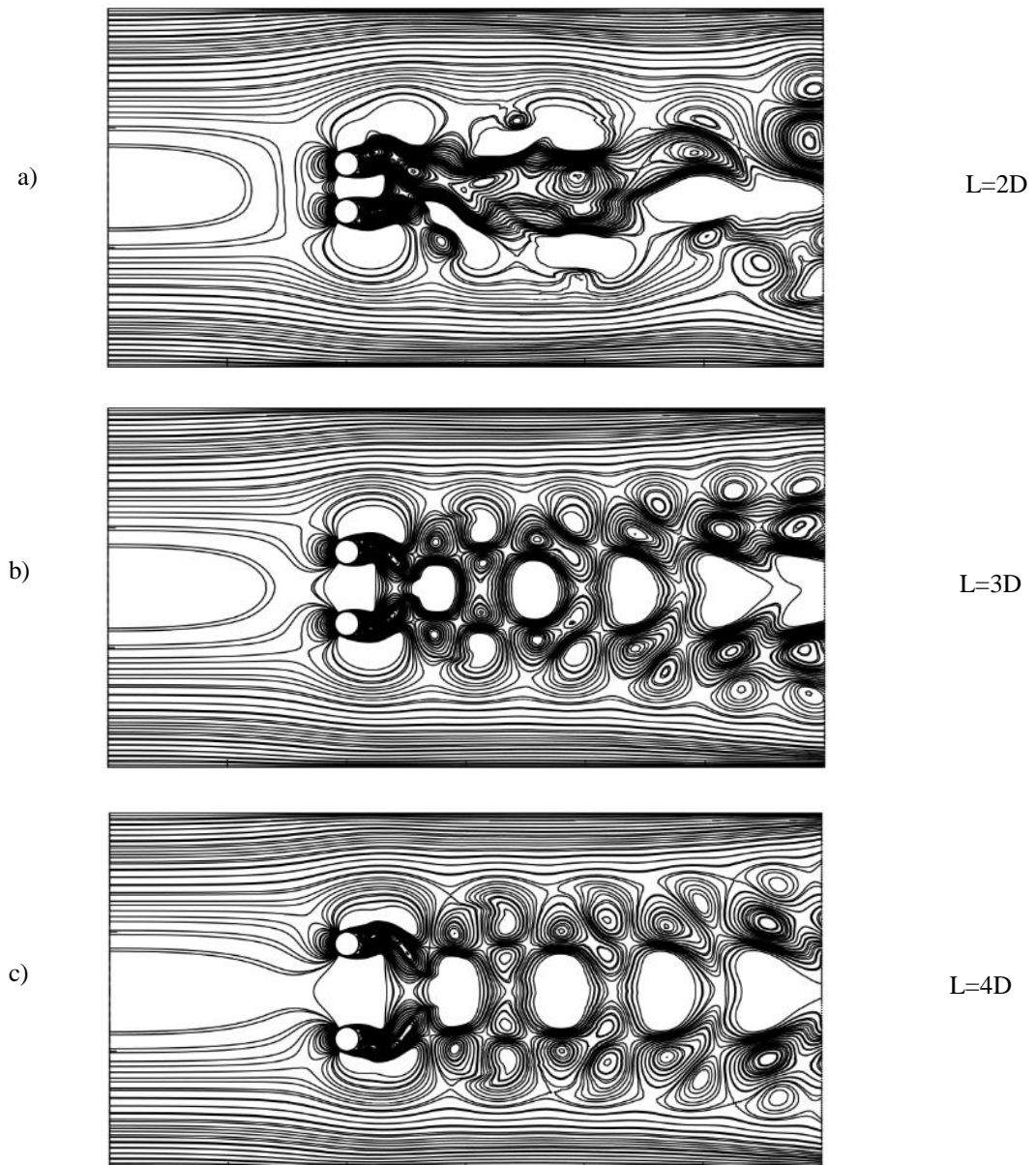
**Figura 50-** Distribuição da velocidade  $u_x$  em  $t=12$ . (a)  $L=2D$ . (b)  $L=3D$ . (c)  $L=4D$

**Fonte:** Autor (2019).

A velocidade no domínio se alterna entre valores positivos e negativos. Esta é uma característica da formação das zonas de recirculação no fluido ocasionada pela perturbação sofrida pelo mesmo ao passar pelos cilindros. Para  $L=3D$  e  $L=4D$  há uma simetria no comportamento do escoamento do fluido que passa pelos dois cilindros. Quando  $L=2D$ , as zonas de recirculação não ficam bem definidas e a simetria no escoamento deixa de existir, evidenciando a presença de efeitos tridimensionais no escoamento. Tais efeitos indicam uma mudança brusca no comportamento do regime do escoamento, isto é, a transição para o regime de escoamento turbulento.

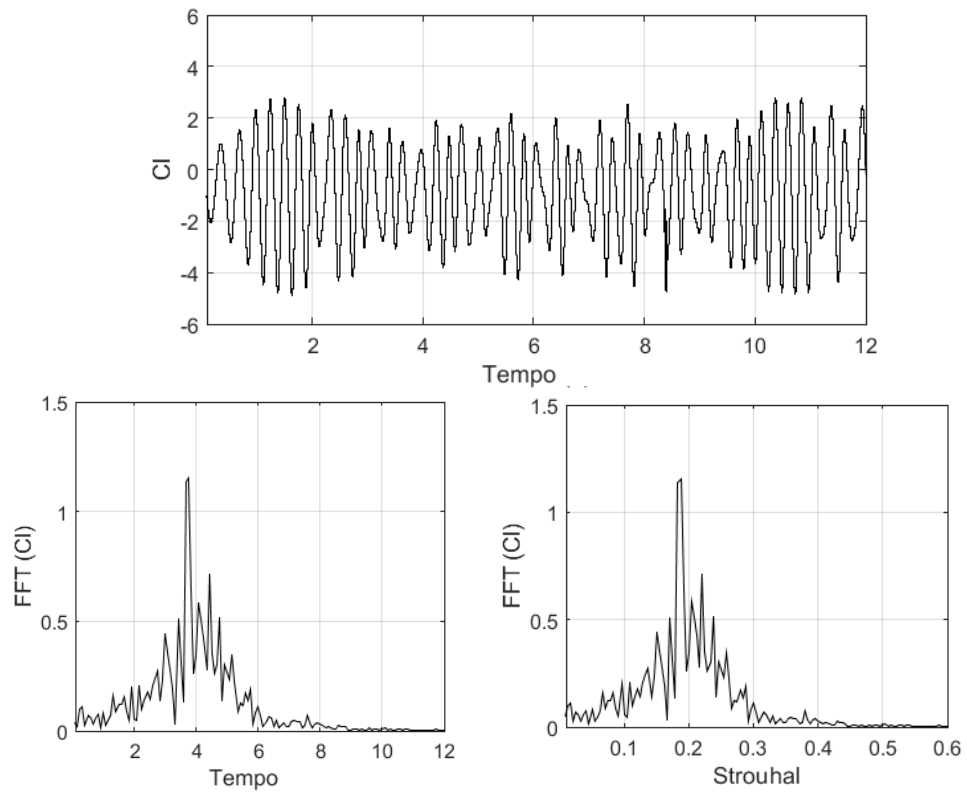


A Figura 50 demonstra as linhas de velocidade  $u_x$  para L=2D, L=3D e L=4D respectivamente.

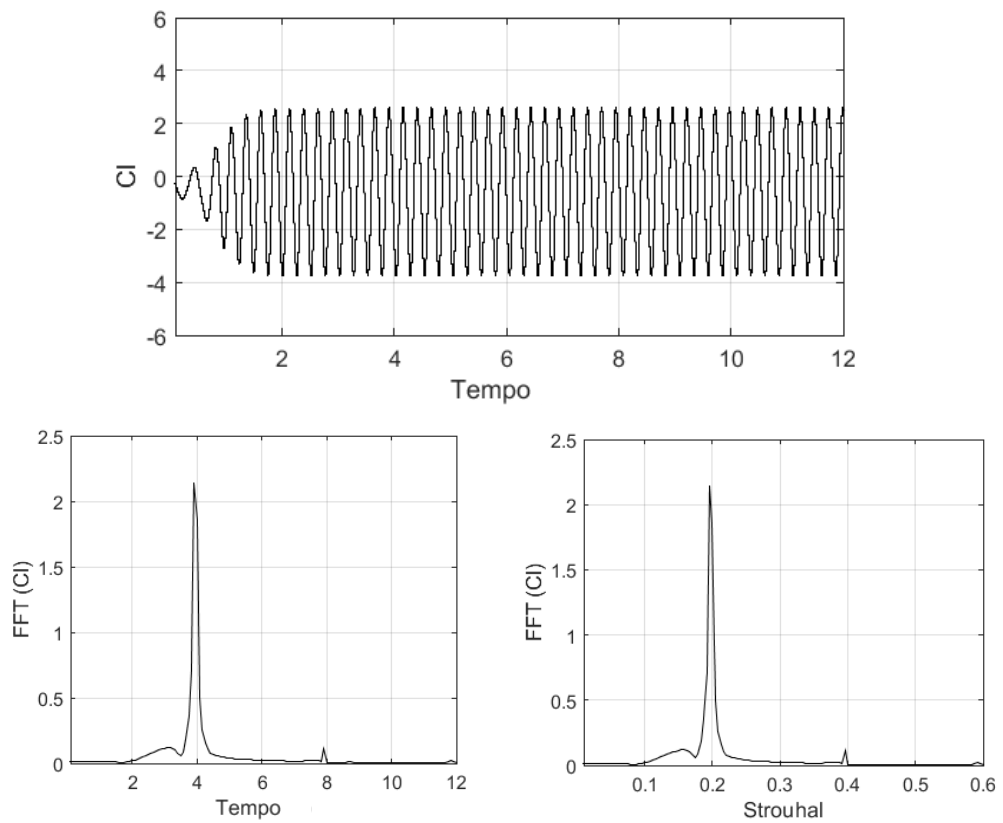


**Figura 51-** Linhas de velocidade  $u_x$  em  $t=12$ . (a) L=2D. (b) L=3D. (c) L=4D  
**Fonte:** Autor (2019).

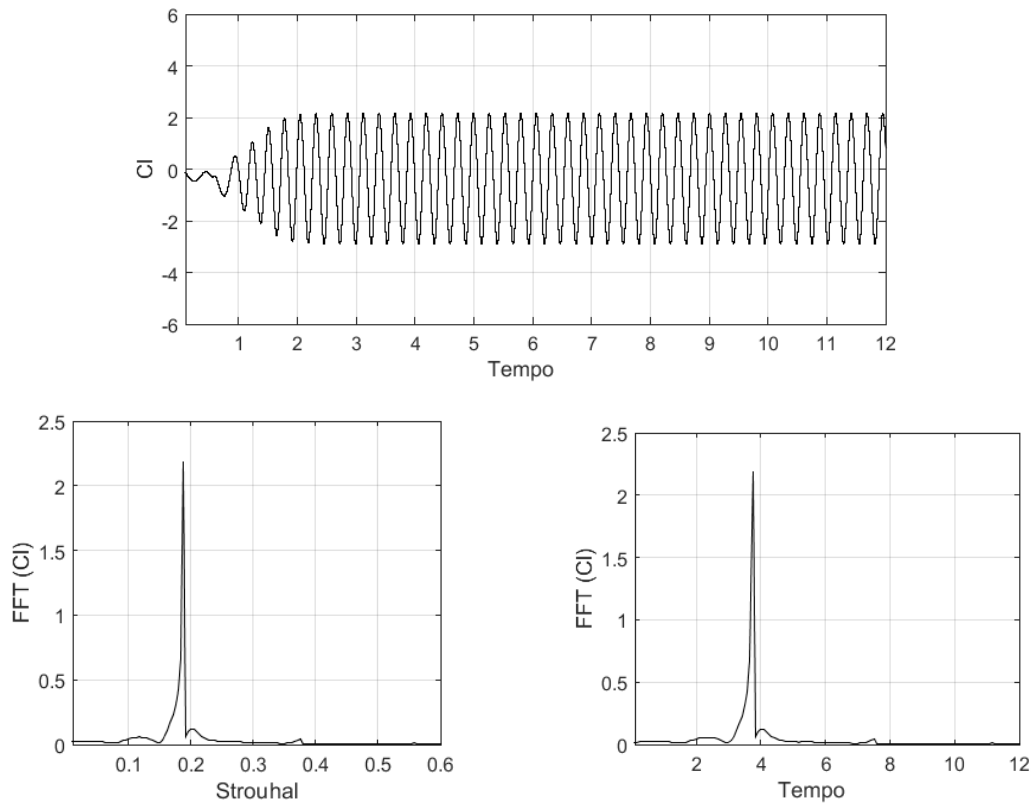
As Figuras (52), (53) e (54) apresentam o comportamento do coeficiente de sustentação para L=2D, L=3D e L=4D, sendo a FFT do seu sinal plotado em função do tempo e do número de Strouhal.



**Figura 52:** Comportamento do coeficiente  $Cl$  para  $L=2D$   
**Fonte:** Autor (2019).



**Figura 53:** Comportamento do coeficiente  $Cl$  para  $L=3D$   
**Fonte:** Autor (2019).



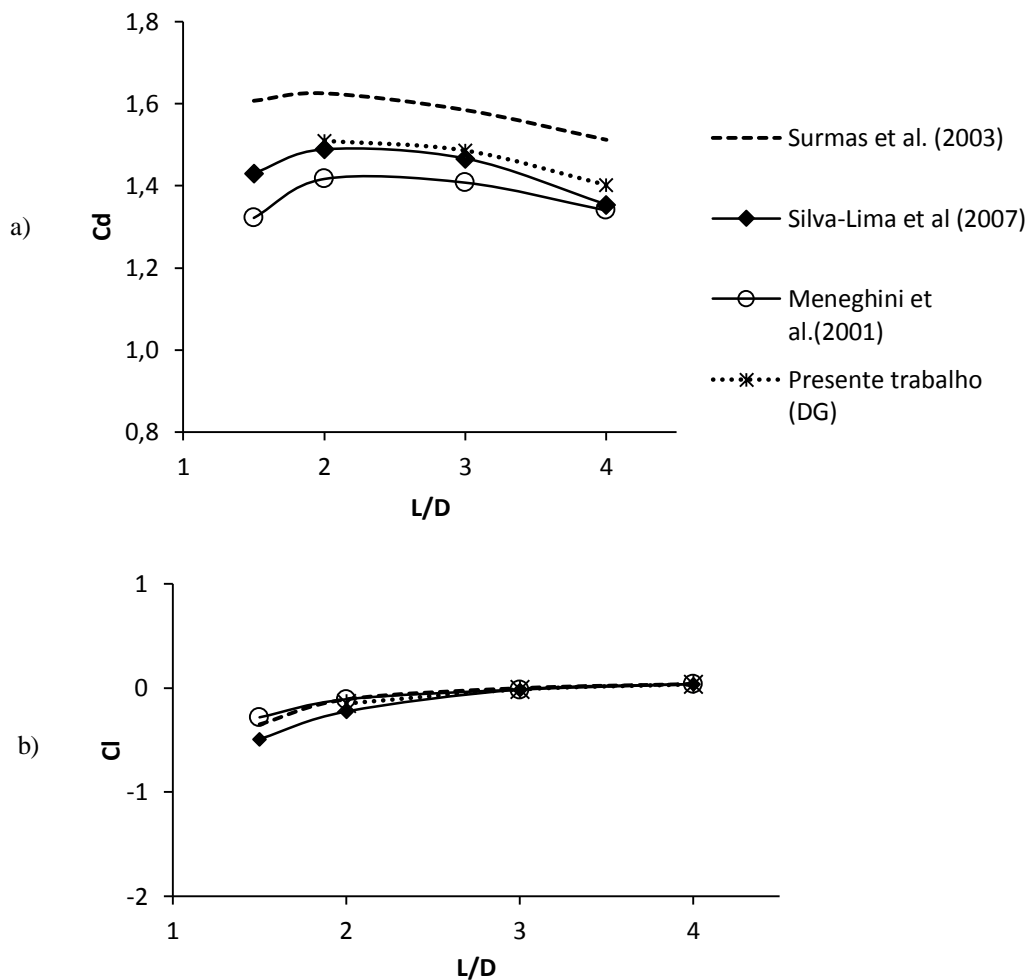
**Figura 54:** Comportamento do coeficiente  $Cl$  para  $L=4D$   
**Fonte:** Autor (2019).

Analisando as linhas de velocidade  $u_x$  (Figura 51) e o comportamento do coeficiente de sustentação no tempo, Figuras (52), (53) e (54), percebe-se que o escoamento sobre um cilindro é pouco influenciado pelo escoamento sobre o outro quando  $L=4D$  e  $L=3D$ , isto é evidenciado pela simetria das recirculações dos dois cilindros e pela baixa interferência no sinal do  $Cl$ . Já quando a distância é igual a  $2D$ , a simetria entre as recirculações do fluido que passa pelos dois cilindros deixa de existir (Figura 51 (a)) e há uma alteração no sinal do  $Cl$  ocasionado pelo efeito de transição para o regime turbulento. Este efeito é visualizado na Figura 52, relacionando o número de Strouhal, que para o caso  $L=2D$  indica a presença de um escoamento com maior complexidade daqueles apresentados para  $L=3D$  e  $L=4D$ . Os mesmos mostram um único pico bem acentuado no gráfico para o número de Strouhal, caracterizando o regime laminar. Já para  $L=2D$ , o comportamento para o número de Strouhal é caótico, sem a presença de um único pico definido, o que sugere a presença de efeitos tridimensionais.

O indicador de erro baseado em recuperação utilizado como guia para o processo h-adaptativo e estimativa do novo tamanho elementar ( $h$ ) para cada elemento da malha, identifica os maiores erros nas zonas de recirculação e na esteira formada pela passagem do escoamento através do cilindro e diminui o tamanho elementar nessas regiões do domínio.

Dessa forma é possível obter uma solução computacional otimizada e capaz de identificar os fenômenos físicos promovidos pelo escoamento utilizando um número de elementos reduzido e sem a necessidade da utilização de polinômios de ordem elevada.

A Figura 55 apresenta uma comparação dos resultados obtidos via DG com malhas h-adaptadas com os trabalhos de Surmas et al, (2003), Lima e Silva et al, (2007) e Meneghini et al, (2001), considerando os valores de  $(C_d)$  e  $(C_l)$  para o cilindro superior em função da distância entre os cilindros.



**Figura 55-** Coeficiente de arrasto (a) e sustentação (b) como função da distância entre os cilindros alinhados verticalmente

**Fonte:** Autor (2019).

Os valores obtidos para  $(C_d)$  e  $(C_l)$  via DG são próximos aos valores obtidos nos trabalhos aos quais é comparado. Uma malha mais densa na região do entorno dos cilindros

devido ao maior erro identificado para os gradientes de velocidade  $\nabla u_x^{AP}$ , contribui para melhorar a acurácia na obtenção destes coeficientes.

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta dissertação tem como principal objetivo a implementação, validação e aplicação de uma técnica h-adaptativa isotrópica da malha de elementos finitos visando otimizar o custo computacional e melhorar a acurácia da resolução de problemas de escoamento regidos pelas equações de Navier-Stokes para fluidos incompressíveis.

O esquema descrito ao longo deste trabalho pode ser dividido nas seguintes etapas:

- i. Resolução das equações de Navier-Stokes para fluidos incompressíveis em problemas transientes de escoamento através do método DG.
- ii. Estimativa dos erros de discretização .
- iii. Aplicação de uma técnica h-adaptativa para determinar os novos tamanhos elementares.
- iv. Validação da técnica h-adaptativa através de problemas com solução analítica conhecida (Kovaznay e Vortex).
- v. Aplicação da estratégia h-adaptativa em simulações com o domínio clássico contendo um ou mais cilindros inserido em um canal retangular.

Baseado nestas etapas, o corrente Capítulo apresenta as conclusões sobre os resultados encontrados e discute algumas possibilidades de trabalhos futuros.

### 6.1 CONCLUSÃO

Quanto à resolução das Equações de Navier-Stokes considerando fluido incompressível através do método DG, propôs-se uma solução numérica baseada no esquema proposto por Hesthaven e Warburton (2008) e de diversas aplicações do DG como em Cockburn (2005) e Ern e Proft (2005). Este método se destaca por permitir o uso de polinômios de alta ordem sendo apropriado para a aplicação de técnicas h-adaptativas.

Este trabalho fez uso de um estimador de erro baseado em recuperação da solução a posteriori para obter um indicativo dos erros que guiam o processo h-adaptativo. Cabe frisar que este estimador de erro oferece um indicativo dos erros, sendo utilizado para apontar as potenciais regiões de refino, não refletindo o erro real na malha. Tal afirmação se dá pelo fato de se utilizar funções de interpolação lineares para obter os gradientes de velocidade e pressão

( $\nabla u_x^{AP}$ ,  $\nabla u_y^{AP}$  e  $\nabla p^{AP}$ ). Além disso, esses valores são obtidos apenas para os nós de vértice. Espera-se que os erros estimados sejam majorados quando comparados aos erros reais da solução obtida via aplicação do DG. A justificativa está no fato de que o DG utiliza funções de interpolação de ordem elevada e obtém a solução em diversos pontos do elemento de acordo com a ordem polinomial adotada, como demonstrado na Figura 4.

Embora o indicador de erro possua a limitação citada, quando utilizado como dado de entrada para aplicação de uma técnica h-adaptativa, indica as potenciais regiões de aplicação de refino com eficácia. Isto acontece devido à característica de descontinuidade das soluções vinculadas ao DG.

O esquema h-adaptativo implementado utilizando a técnica *LB* (LI E BETTESS (1995), LI ET AL, (1995)), mostrou-se efetivo no sentido de reduzir os erros quando aplicado em problemas com solução analítica conhecida (Kovaznay e Vortex de decaimento de Taylor). Especificamente no problema de Kovaznay (1948), quando utilizado a malha h-adaptada para cálculo do erro analítico da solução, observa-se que o aumento do grau polinomial deixa de ter influência no sentido de diminuir o erro analítico visto que o mesmo é controlado pelo aumento da densidade de elementos nas regiões preponderantes do escoamento. Além disso, nota-se uma aproximada equidistribuição dos erros nos gradientes do campo escalar analisado ao longo de todo o domínio após a aplicação do refino adaptativo. Este refino, em geral, conduz a uma maior resolução das linhas de velocidade.

Nos problemas clássicos de escoamentos em um canal retangular, com um ou mais cilindros inseridos em seu interior, conclui-se que o refino h-adaptativo implementado foi eficaz no sentido de aumentar a densidade de elementos no entorno dos cilindros, regiões com maiores gradientes de velocidade  $\nabla u_x^{AP}$ , e permitir a obtenção de valores confiáveis para os coeficientes  $Cd$  e  $Cl$ . Quando  $Re=40$  com escoamento laminar bem definido, a solução com malha h-adaptativa foi capaz de identificar com precisão o tamanho da zona de separação formada a jusante do cilindro. Já com  $Re=100$  e  $Re=200$  a técnica h-adaptativa foi capaz de identificar as zonas de recirculação do fluido, regiões de altos gradientes de velocidade e pressão.

Considerando os resultados apresentados neste trabalho, conclui-se que o emprego do processo h-adaptativo baseado em recuperação via estimador de erro MNA e a utilização do critério de equidistribuição dos erros com cálculo do novo tamanho elementar via técnica *LB* conduz a uma solução numérica a valores com excelente precisão. O uso de malhas h-

adaptativas aplicadas ao DG permite obter soluções com erros reduzidos e com um custo computacional otimizado.

## 6.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Nesta seção apresentam-se algumas sugestões para estudos futuros relacionados ao presente trabalho e que podem ser desenvolvidos, entre estas estão:

- i. Avaliar o comportamento da solução numérica em problemas de escoamento regidos pelas equações de Navier-Stokes considerando fluido incompressível através do refino h-adaptativo com base no erro do gradiente de pressão;
- ii. Aplicar a estratégia h-adaptativa implementada e validada neste trabalho a outros domínios computacionais clássicos. Como exemplo pode-se citar o escoamento no entorno de um quadrado inserido em um canal retangular.
- iii. Avaliar o comportamento de outras técnicas de projeção do novo tamanho elementar na eficiência do processo h-adaptativo, como exemplo a técnica  $Ch^p$  (ZIENKIEWICZ e ZHU, 1987).
- iv. Aplicar em conjunto com a técnica h-adaptativa, uma técnica p-adaptativa, formando a técnica conhecida por hp-adaptativa. O aumento do grau polinomial na resolução do DG apenas nas regiões de maior erro, identificadas pelo estimador de erro, tende a acelerar a convergência da solução.
- v. Simular o comportamento da técnica h-adaptativa utilizando um número de Reynolds elevado em conjunto com um método de estabilização da solução, visando manter a mesma estável na presença de escoamentos complexos similares aqueles presentes no regime turbulento.
- vi. Explorar o DG num esquema de adaptação considerando malhas anisotrópicas.



## REFERÊNCIAS

AINSWORTH, M., ODEN, J. T. **A posteriori Error Estimation in Finite Element Analysis**, 1. ed. John Wiley and Sons, 2000.

AINSWORTH, M. A posteriori error estimation for discontinuous Galerkin finite element approximation. **SIAM Journal on Numerical Analysis**, v. 45, n. 4, p. 1777-1798, 2007.

ARNOLD D.N.; BREZZI F.; COCKBURN B.; Marini L.D. Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems. **SIAM Journal Numerical Analysis**, v. 39, n. 5, p. 1749-1779, 2002.

BAKER, T.J. Mesh adaptation strategies for problems in fluid dynamics. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 25, p. 243–273, 1997.

BATCHELOR, G. K. **An introduction to fluid dynamics**. Cambridge university press, 1967.

BECKER, R.; HANSBO, P.; LARSON, M. G. Energy norm a posteriori error estimation for discontinuous Galerkin methods. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg**, v. 192, p. 723-733, 2003.

BOROOMAND, B.; ZIENKIEWICZ, O. C. An improved REP recovery and the effectivity robustness test. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 40, p.3247–3277, 1997b.

BOROOMAND, B.; ZIENKIEWICZ, O. C. Recovery by equilibrium patches. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 40, p. 137–154, 1997a.

KARAKÖSE-ÇALIK, U.H.; ASKES, H. A recovery-type a posteriori error estimator for gradient elasticity. **Computers & Structures**, v.154, p. 204 – 209, 2015.

CHELLAMUTHU, K.; IDA, N. A posteriori error indicator and error estimators for adaptive mesh refinement. **The International Journal for Computational and Mathematics in Electrical and Eletronical Engineering**, v. 14, p. 139-156, 1995.

COCKBURN, B.; GOPALAKRISHNAN, J. Incompressible finite elements via hybridization. Part I: The Stokes system in two space dimensions, **SIAM Journal Numerical Analysis**, v. 43, n. 4, p. 1627-1650, 2005.

COCKBURN, B.; KARNIADAKIS, G. E.; SHU. C-W. Discontinuous Galerkin methods theory, computation and application. Lecture notes in computational science and engineering. **Springer Science & Business Media**, New York, v. 11, 2000.

COOK, R. D., MALKUS, D. S., PLESHA, M. E., WITT, R. J. **Concepts and Applications of Finite Element Analysis**. Madison, USA: Ed. John Wiley and Sons. p. 719, 2002.

COUNTANCEAU, M.; BOUARD, R. Experimental determination of the main features of the viscous flow in the wake of a circular cylinder in uniform translation. Part 2. Unsteady flow, **J. Fluid Mech.** 79, p. 257-272, 1977.

ERN, A.; PROFT, J. Posteriori discontinuous Galerkin error estimates for transient convection-diffusion equations. **Applied Mathematics Letters**, v. 18, n.7, p. 833 – 841, 2005.

FERRER, E. M. D.; WILLDEN, R. H.J.; SHERWIN, S. J.; Stability of projection methods for incompressible flows using high order pressure-velocity pairs of same degree: continuous and discontinuous galerkin formulations. **Commum Comput Phys**, v. 16(3), p. 817-840, 2014.

GARCIA, A.Q.; GOMES, F.A.A.; HECKE, M.B. On the performance of the DG method with a directional do-nothing boundary condition. **The Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, 2017.

GIANI, S.; SCHOTZAU, D.; ZHU, L. An a-posteriori error estimate for-adaptive {DG} methods for convection-diffusion problems on anisotropically refined meshes. **Computers & Mathematics with Applications**, v. 67, n. 4, p. 869 – 887, 2014.

GRÄTSCH, T.; BATHE, J. K. A posteriori error estimation technique in practical finite element analysis. **Computers and Structures**, v. 83, p. 235–265, 2005.

GRÄTSCH, T.; BATHE, J. K.; HARTMANN, R. A posteriori error estimation techniques in practical Numerical analysis of higher order discontinuous Galerkin finite element methods. In: Herman D (ed) VKILecture Series, p.1–107. ISBN: 13 978-2-930389-88-5, 2008.

HESTHAVEN, J. S., WARBURTON, T. Nodal Discontinuous Galerkin Methods: Algorithms, Analysis, and Applications. **Springer Science & Business Media**, New York, 2008.

HETCH F. New development in freefem++. **Journal of Numerical Mathematics**; vol. 20, p. 251–265, 2012.

HOUSTON, P.; SCHWAB, C.; SÜLI, E. Stabilized hp-finite element methods for first-order hyperbolic problems. **SIAM Journal on Numerical Analysis**, v. 37, n. 5, p. 1618-1643, 2000.

HOUSTON, P.; SENIOR, B.; SULI, E. Hp-Discontinuous Galerkin finite element methods for hyperbolic problems: error analysis and adaptivity. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, v. 40, n. 1-2, p. 153–169, 2002.

HUANG, Y., & YI, N.The Superconvergent Cluster Recovery Method. **Journal of Scientific Computing**, vol. 44, p. 301–322, 2010.

HUGHES, W.; BRIGHTON, J.; WINOWICH, N. **Schaum's Outline of Fluid Dynamics**. McGraw-Hill Companies, Incorporated, 1999.

JÁSKOWIEC, J. **The hp nonconforming mesh refinement in discontinuous Galerkin finite element method based on Zienkiewicz-Zhu error estimation.** University of Technology, Faculty of Civil Engineering, Institute for Computational Civil Engineering, 2015.

KARAKASHIAN, O. A.; PASCAL, F. A posteriori error estimates for a discontinuous Galerkin approximation of second-order elliptic problems. **SIAM Journal Numerical Analysis**, v. 41, p. 2374–2399, 2003.

KARASOZEN, B.; UZUNCA, M.; MANGUOGLU, M. Adaptive discontinuous Galerkin methods for nonlinear diffusion-convection-reaction equations. **Computational Science and Engineering**, v. 103, p. 85–93. Springer International Publishing, 2015.

KARNIADAKIS GE.; SHERWIN SJ. **Spectral/hp element methods for CFD.** Oxford University Press, Oxford, 1999.

KARNIADAKIS, GE.; ISRAELI M.; ORSZAG AS. High-order splitting methods for the incompressible Navier–Stokes equations. **J Comput Phys**, v. 97, n. 2, p. 414-443, 1991.

KIM, J.; MOIN, P. Application of a fractional step methods to incompressible Navier Stokes equations, **J. Comput. Phys**, p. 308-323, 1985.

KLIEBER, W.; RIVIERE, B. Adaptive simulations of two-phase flow by discontinuous Galerkin methods. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, v. 196, n. 1-3, p. 404-419, 2006.

KOVASZNAY, L. I. G. **Laminar flow behind a two-dimensional grid.** In: Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. Cambridge University Press, p. 58-62, 1948.

LI, L-Y.; BETTESS, P. Notes on mesh optimal criteria in adaptive finite element computations. **Communications in Numerical Methods in Engineering**, v. 11, p. 911–915, 1995.

LI, L-Y.; BETTESS, P.; BULL, J. W.; BOND, T.; APPLGARTH, I. Theoretical formulations for adaptive finite element computations. **Communications in Numerical Methods in Engineering**, v. 11, p. 857–868, 1995.

LIMA e SILVA, A.L.F.; SILVA, A.R.; SILVEIRA-NETO, A. Numerical simulation of two-dimensional complex flows around bluff bodies using the immersed boundary method. **J. Braz. Soc. Mech. Sci. & Eng.** Rio de Janeiro, v. 29, n. 4, p. 379-387, dez. 2007.

MATLAB v8.2, **The Language of Technical Computing.** Mathworks Inc, 2014.

MENEGHINI J.R.; SALTARA F.; SIQUEIRA C.L.R.; FERRARI Jr J.A. Numerical simulation of flow interference between two circular cylinders in tandem and side-by-side arrangements, **Journal Fluids and Structures**, Vol.15, p. 327–350, doi:10.1006/jfls.2000.0343, 2001.

MOUNTLAUR, A. **High-order Discontinuous Galerkin Methods For Incompressible Flows.** Tese (Doutorado). Escola Politécnica Superior de Castelldefels. Programa de Doutorado em Ciência e Tecnologia Aeroespacial. Barcelona, setembro, 2009.

NOVOTNY, A.; FANCELLO, E. Um refinamento h, p, hp adaptativo na análise de flexão de placas semi-espessas. **Revista Internacional de Métodos Numéricos para cálculo y Diseño em Ingenieria**, v.14, p. 28-48, 1998.

OH, H.; BATRA, R. C. Application of Zienkiewicz—Zhu's error estimate with superconvergent patch recovery to hierarchical p-refinement. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 31, p. 273–280, 1999.

PEREIRA, I.A.B.B. **Escoamento turbulento em torno de um cilindro a baixo número de Reynolds: comparação entre modelos de turbulência.** Dissertação (Mestrado). Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto. Mestrado Integrado em Engenharia Mecânica. Julho, 2010.

PEREIRA, T. J.; SILVA, J. Anisotropic Mesh Refinement Considering a Recovery-Based Error Estimator and Metric Tensors. **Arabian Journal for Science and Engineering**. 2018.

PIRZADEH, S. Z. **An adaptive unstructured grid method by grid subdivision, local remeshing, and grid movement.** *14th Computational Fluid Dynamics Conference*, p. 99-3255, 1999.

PRUDHOMME, S., ODEN, J. T., WESTERMANN, T., BASS, J., & BOTKIN, M. E. Practical methods for a posteriori error estimation in engineering applications. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 56, p. 1193–1224, 2003.

QUARTERONI, A.; SALERI, F. VENEZIANI. Factorization methods for the numerical approximation of Navier-Stokes equations, **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.** p. 505-526, 2000.

RICE, J.G.; SCHNIPKE, R.J. An equal-order velocity-pressure formulation that does not exhibit spurious pressure modes. **Comput Methods Appl Mech Eng.** p.135–149, 1986.

ROGERS, S.E.; Kwak, D. An upwind differencing scheme for the incompressible Navier-Stokes equations, **Appl. Numer. Math.** 8, p. 43-64, 1991.

SCHÄFER, M.; TUREK, S. The benchmark problem flow around cylinder. In: **Flow Simulation with High-Performance Computers II.** Vieweg+ Teubner Verlag, v. 52, p. 547–566, 1996.

SILVA, J. **Análise De Estimadores De Erro A Posteriori Aplicados Ao Método Dos Elementos Finitos Utilizando Refino H-Adaptativo.** Dissertação (Mestrado). Universidade Federal do Paraná. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. Curitiba, fevereiro, 2015.

SILVA, J. **Otimização Estrutural Topológica Utilizando O Método Dos Elementos Finitos H-Adaptativo Fundamentado Na Recuperação Da Densidade Do Erro Isotrópica**

**E Anisotrópica.** Tese (Doutorado). Universidade Federal do Paraná. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. Curitiba, dezembro, 2017.

SURMAS, R.; SANTOS, L.O.E.; PHILIPPI P.C. Características da formação e desprendimento de vórtices em grupos de cilindros, **II Congresso Brasileiro de Pesquisa e Desenvolvimento em Petróleo e Gás**, 2003.

UBERTINI, F. Patch recovery based on complementary energy. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 59, p. 1501–1538, 2004.

WARREN, G. P.; ANDERSON, W. K.; THOMAS, J. T.; KRIST, S. L. **Grid convergence for adaptive methods.** AIAA Paper, p. 1991-1592, 1991.

WU, J.; ZHU, J. Z.; SZMELTER, J.; ZIENKIEWICZ, O. C. Error estimation and adaptivity in Navier-Stokes incompressible flows. **Computational Mechanics**, v. 6, p. 259–270, 1990.

ZHANG, Z., NAGA, A. A new finite element gradient recovery method: Superconvergence Property. **SIAM Journal on Numerical Analysis**, v. 26, p. 1192–1213, 2005.

ZIENKIEWICZ, O. C., ZHU, J. Z. Adaptive techniques in the finite element method. **Communications in Applied Numerical Methods**, v. 4, p. 197–204, 1987.

ZIENKIEWICZ, O. C.; ZHU, J. Z. The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 1: The recovery technique. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 33, p.1331–1364, 1992a.

ZIENKIEWICZ, O. C.; ZHU, J. Z. The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 2: Error estimates and adaptivity. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 33, p.1365–1382, 1992b.

ZIENKIEWICZ, O. C. The background of error estimation and adaptivity in finite element computations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 195, p. 207–213, 2006.

ZIENKIEWICZ, O. C.; BOOROMAND, B.; ZHU, J.Z. Recovery procedures in error estimation and adaptivity Part I: Adaptivity in linear problems. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 176, p. 111–125, 1999.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. **The Finite Element Method.** v. 1: The Basis. Oxford: 5. ed. Butterworth Heinemann, 2000.

ZIENKIEWICZ, O. C.; ZHU, J. Z. A simple error estimation and adaptive procedure for practical engineering analysis. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 24, p. 337–357, 1987.

ZIENKIEWICZ, O. C.; ZHU, J. Z. Adaptivity and mesh generation. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 32, p. 783–810, 1991.