UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO ACADÊMICO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

CÁSSIA RIBEIRO DE SOUZA

OS LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA, A VARIEDADE DE PROBLEMAS PROPOSTOS E O BINÔMIO DE NEWTON

DISSERTAÇÃO

PATO BRANCO
2019

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO ACADÊMICO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

CÁSSIA RIBEIRO DE SOUZA

OS LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA, A VARIEDADE DE PROBLEMAS PROPOSTOS E O BINÔMIO DE NEWTON

DISSERTAÇÃO

PATO BRANCO
2019

CÁSSIA RIBEIRO DE SOUZA

OS LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA, A VARIEDADE DE PROBLEMAS PROPOSTOS E O BINÔMIO DE NEWTON

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, *Campus* Pato Branco, como exigência parcial a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profª. Drª. Cleonis Viater Figueira

PATO BRANCO

2019

S729l Souza, Cássia Ribeiro de.
Os livros didáticos de matemática, a variedade de problemas propostos e o Binômio de Newton / Cássia Ribeiro de Souza -- 2019.
181 f. : il. ; 30 cm.

Orientadora: Profa. Dra. Cleonis Viater Figueira
Dissertação (Mestrado) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Pato Branco, PR, 2019.
Bibliografia: f. 159 - 167.

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Análise combinatória. 3. Livros didáticos. 4. Solução de problemas. I. Figueira, Cleonis Viater, orient. II. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

CDD (22. ed.) 510

Ficha Catalográfica elaborada por
Suélem Belmudes Cardoso CRB9/1630
Biblioteca da UTFPR Campus Pato Branco

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Câmpus Pato Branco

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Título da Dissertação Nº 36

"OS LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA, A VARIEDADE DE PROBLEMAS PROPOSTOS E O BINÔMIO DE NEWTON"

por

Cássia Ribeiro de Souza

Esta dissertação foi apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Matemática, sob a orientação da Profª Drª Cleonis Viater Figueira, pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR - Câmpus Pato Branco, às 09:30hs do dia 15 de junho de 2019. O trabalho foi aprovado pela Banca Examinadora, composta pelos doutores:

Profª. Cleonis Viater Figueira, Drª
(Presidente – UTFPR/Pato Branco)

Profª. Silvana Matucheski, Drª.
(Pref. Munic. Chapecó/Chapecó)

Profª. Janecler Aparecida Amorin Colombo, Drª
(UTFPR/Pato Branco)

Prof. Adilson da Silveira, Dr.
(Coordenador do PROFMAT/UTFPR)

"A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do PROFMAT/UTFPR"

Ao meu primogênito Heitor, razão do meu viver! Ao meu esposo Edivan pelo apoio incondicional em todos os momentos! Sem vocês eu não teria conseguido!

Aos meus pais Sérgio e Zélia, pelo dom da vida, pelos ensinamentos, incentivos e por serem exemplos de vida.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à Deus e a todos os Santos pela saúde, coragem e força que me deram para concluir essa caminhada.

Ao meu esposo Edivan José Possamai, pela paciência, pelo incentivo, conforto e por inúmeras vezes ter acumulado a função de pai e mãe nos cuidados com o nosso pequeno Heitor.

Ao meu filho Heitor: espero que um dia compreenda minhas ausências e isolamento nos momentos de estudo. Fiz tudo por você.

Aos meus pais e aos meus sogros, especialmente a minha mãe Zélia que esteve sempre à disposição para nos ajudar, deixando muitas vezes o seu lar para assumir o meu e tomar conta do Heitor.

Aos meus irmãos, cunhados e cunhadas pela ajuda nos cuidados com o Heitor e, especialmente, a minha irmã Fernanda, que me auxiliou em inúmeros momentos nos últimos três anos.

A minha orientadora, Professora Doutora Cleonis Viater Figueira, pelos valiosos ensinamentos acadêmicos e de vida, pela atenção, preocupação, pela seriedade e competência, pela compreensão das minhas angustias e encorajamento para concluir este trabalho: minha eterna gratidão.

Às Professoras Doutora Janecler Aparecida Amorim Colombo e Doutora Silvana Matucheski, agradeço, inicialmente, por aceitarem o convite para participar da banca examinadora deste trabalho, pela leitura e valiosas contribuições ao mesmo.

A minha querida amiga Mariza Secco, ser de luz e paz, pelos momentos de equilíbrio e energia que me proporcionastes e pelas palavras de incentivo.

As minhas estimadas colegas de profissão e acima de tudo amigas Patrícia Albani e Zelir Saugo: vocês sempre acreditaram em mim e deram todo o apoio nos momentos mais difíceis desta caminhada: minha gratidão.

Família e amigos: foram dois anos e meio de muitas renúncias, de momentos de solitude em função dos estudos. Meu muito obrigada por compreenderem e estarem dispostos a ajudar sempre. Aos meus tios Adroaldo e Verônica, um agradecimento especial a vocês que sempre torceram e rezaram para que eu conseguisse a aprovação da qualificação e obtivesse o título de Mestre.

A todos dos docentes do PROFMAT- UTFPR Pato Branco pela contribuição inestimável para minha formação acadêmica, especialmente ao Professor Dr. João Biesdorf na primeira batalha vencida: Números Reais e Funções.

Minha eterna gratidão aos colegas da turma do PROFMAT-2017, não esquecendo o meu querido amigo Eleandro Mayer. De colegas a amigos, parceiros que pude contar para compartilhar preocupações, angústias e também momentos de alegria e descontração. Tamiris, minha leitora fiel, o que teria sido de mim sem você?

Aos colegas dos Colégios em que trabalhei nos anos de 2017, 2018 e 2019 - Colégio Estadual São João, Colégio Estadual do Campo São Roque, Colégio Agostinho Pereira, Colégio São Vicente de Paulo, Escola Estadual Carmela Bortot- pelo auxílio para adequar meus horários para que eu pudesse comparecer as aulas do Mestrado, pelas palavras de incentivo, pela vibração em cada etapa alcançada. Suzana Beatriz F. da Silva você alegrou meus dias nos momentos em que meu coração estava angustiado. Marta Muller de Oliveira Marcomin obrigada pela força que sempre destes. Maria do Socorro Brito Telo em vários momentos você acalmou meu coração e com sua experiência me mostrou ser capaz de enfrentar a temida defesa: meu respeito e gratidão pelas palavras e correção deste trabalho.

Além dos professores do Programa, não posso deixar de agradecer a todos os mestres que me acompanharam desde a minha alfabetização! Meu reconhecimento, gratidão e eterno respeito por proporcionarem a mim o bem mais precioso: o conhecimento.

A Capes pelo apoio financeiro durante o primeiro ano do Mestrado.

Enfim, para não cometer nenhuma injustiça por não listar todos os que auxiliaram nessa caminhada, seja de maneira direta ou indireta, deixo meu MUITO OBRIGADA.

“Hoje desaprendo o que tinha aprendido até ontem e que amanhã recomeçarei a aprender.

Todos os dias desfaleço e desfaço-me em cinza efêmera: todos os dias reconstruo minhas edificações, em sonho eternas.

Esta frágil escola que somos, levanto-a com paciência dos alicerces às torres, sabendo que é trabalho sem termo.

E do alto avisto os que folgam e assaltam, donos de riso e pedras. Cada um de nós tem sua verdade, pela qual deve morrer.

De um lugar que não se alcança, e que é, no entanto, claro, minha verdade, sem troca, sem equivalência nem desengano permanece constante, obrigatória, livre: ***enquanto aprendo, desaprendo e torno a reaprender”***

Cecília Meireles

RESUMO

SOUZA, Cássia Ribeiro de. Os livros didáticos de Matemática, a variedade de problemas propostos e o Binômio de Newton. 198 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Pato Branco, PR, 2019.

Nesta pesquisa analisamos e classificamos, de acordo com a categorização de problemas elaborada por Dante (2000), as atividades propostas nos segundos volumes das coleções de livros didáticos aprovadas no Programa Nacional do Livro Didático e do Material Didático (PNLD) de 2015 e 2018, quando da abordagem do conteúdo matemático Binômio de Newton, relacionando-as com as prerrogativas legais que regem o currículo escolar brasileiro a nível federal e estadual. Por meio de uma pesquisa qualitativa com objetivo exploratório, apresentamos no referencial teórico impressões sobre o PNLD e guias de livros didáticos, disponibilizados aos professores da rede pública de ensino para a escolha do livro didático. Tecemos, ainda, reflexões teóricas sobre os aspectos legais que orientam a organização do currículo escolar em relação ao Binômio de Newton e teoria matemática relacionada ao tema, perspectivas da Resolução de Problemas e classificação de problemas formulada por Dante (2000). Essa estrutura teórica sustentou a análise qualitativa das atividades sugeridas nos seis segundos volumes das coleções aprovadas do PNLD 2015 e oito segundos volumes das coleções do PNLD 2018. Sobre a análise dos livros didáticos concluímos que houve uma diminuição no número de coleções que exploram o tema Binômio de Newton no PNLD 2018 em relação do PNLD 2015 e constatamos que as atividades propostas não são suficientes para atender as exigências impostas nas diretrizes curriculares, tão pouco atendem as especificidades citadas nos guias de livros didáticos. Observamos, em sua maioria, atividades solucionáveis com procedimentos mecânicos - exercícios algoritmos. Tais problemas estão em desacordo ao que as diretrizes educacionais almejam para o ensino dos conteúdos matemáticos: apresentação de problemas que propiciem reflexões, questionamentos, fazendo com que os alunos criem e busquem estratégias de resolução e com isso desenvolvam habilidades, produzam conhecimento de maneira prazerosa e motivadora. Desta forma, sugerimos que as produções dos livros didáticos incorporem as indicações constantes nos documentos oficiais e guias de livros didáticos, para que, de fato, sejam instrumentos que proporcionem maior eficácia ao processo ensino aprendizagem, juntamente com outras práticas e políticas educacionais.

Palavras-chave: Binômio de Newton. Livro Didático. Classificação de problemas.

ABSTRACT

SOUZA, Cássia Ribeiro de. The Mathematics textbooks, the variety of proposed problems and Newton's Binomial. 198 f. Master thesis (Master's degree in Mathematics) - Professional Master Program in Mathematics in National Network - PROFMAT, Federal Technological University of Paraná. Pato Branco, PR, 2019.

In this research we analyzed and classified – according to the problem categorization elaborated by Dante (2000) – the activities proposed in the second volumes of the textbook collections approved for the 2015 and 2018 National Program of Textbook and Teaching Material (Programa Nacional do Livro Didático e do Material Didático – PNLD), when referring to the approach of Newton's Binomial as mathematical content, relating them to the legal prerogatives that rule the Brazilian school curriculum at federal and state level. Through a qualitative research with exploratory purposes, in the theoretical framework we presented remarks about the PNLD and guides of textbooks, which were made available to the teachers in public schools for choosing the textbook. We also present theoretical reflections on the legal aspects that guide the organization of the school curriculum in relation to Newton's Binomial and mathematical theory related to the subject, perspectives for Problem Solving and the problem classification formulated by Dante (2000). This theoretical structure supported the qualitative analysis of the activities suggested by six samples of second volumes of the collections approved for the 2015 PNLD and eight samples of second volumes of the collections approved for the 2018 PNLD. Throughout the analysis of the textbooks we concluded that there was a decrease on the number of collections that explore the subject of Newton's Binomial in the 2018 PNLD in relation to the 2015 PNLD. We also verified that the proposed activities are not enough to meet the requirements imposed by the curricular guidelines, nor do they meet the specificities mentioned in the textbook guides. We observed that most of the activities are solvable with mechanical procedures – algorithm exercises. Such problems are in disagreement with what the educational guidelines aim for the teaching of mathematical contents: presentation of problems that lead to reflections, questions, causing students to create and seek resolution strategies and thus develop skills, produce knowledge in a pleasurable and motivating way. Therefore, we suggest that textbook edition incorporate the information contained in the official documents and textbook guides so that they may be actual instruments that provide greater effectiveness to the learning process, along with other educational policies and practices.

Keywords: Newton's Binomial. Textbook. Classification of problems.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE SIGLAS

ABO	Sistema de Grupos Sanguíneos
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CNLD	Comissão Nacional do Livro Didático
COLTED	Comissão do Livro Técnico e Didático
CTI	Centro de Terapia Intensiva
DCE	Diretrizes Curriculares da Educação Básica – Matemática
DCN	Diretrizes Curriculares Nacionais
DNA	Ácido Desoxirribonucleico
DPVAT	Danos pessoais causados por veículos automotores de vias terrestres
EJA	Educação de Jovens e Adultos
EUA	Estados Unidos da América
FAE	Fundação de Assistência ao Estudante
FENAME	Fundação Nacional de Material Escolar
FIPE	Fundação Instituto de Pesquisas Econômicas
FNDE	Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação
INL	Instituto Nacional do Livro
IPVA	Imposto sobre propriedade de veículos automotores
LD15-1	Conexões com a Matemática
LD15-2	Matemática: contexto & aplicações
LD15-3	Matemática Paiva
LD15-4	Matemática – ciência e aplicações
LD15-5	Matemática – Ensino Médio
LD15-6	Novo Olhar: Matemática
LD18-1	Conexões com a Matemática
LD18-2	Matemática: contexto & aplicações
LD18-3	Matemática – Paiva
LD18-4	Matemática – ciência e aplicações
LD18-5	Matemática para compreender o mundo
LD18-6	#Contato Matemática
LD18-7	Quadrante - Matemática
LD18-8	Matemática: Interação e Tecnologia

LDB	Lei de Diretrizes e Bases da Educação
MEC	Ministério da Educação
NCTM	National Council of Teachers of Matemathics
PBA	Programa Brasil Alfabetizado
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PCN+	Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio) - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias
PCNEM	Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio
PISA	Programa Internacional de Avaliação de Alunos
PLIDEF	Programa do Livro Didático para o Ensino Fundamental
PNBE	Programa Nacional Biblioteca da Escola
PNE	Plano Nacional de Educação
PNLA	Programa Nacional do Livro Didático para a Alfabetização de Jovens e Adultos
PNLD	Programa Nacional do Livro e do Material Didático
PNLD EJA	Programa Nacional do Livro Didático para a Educação de Jovens e Adultos
PNLDEM	Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio
PPC	Proposta Pedagógica Curricular
PPP	Projeto Político Pedagógico
PTD	Plano de Trabalho Docente
RH	Rhesus
SISCORT	Sistema de Controle de Remanejamento e Reserva Técnica
UNESCO	Organização das Nações Unidas
USAID	Agência Norte-Americana para o Desenvolvimento Internacional
USP	Universidade de São Paulo

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O conhecimento matemático historicamente acumulado tornou-se essencial para o desenvolvimento tecnológico da humanidade e é impossível desvincular a Matemática das explicações de diversos fenômenos, bem como de artefatos, bens e serviços que usufruímos. Entretanto, apesar da presença constante da Matemática no nosso cotidiano, há lacunas entre o que ensinamos nos espaços escolares, o que os alunos realmente aprendem e o que são capazes de transpor/aplicar na realidade.

Esse distanciamento entre os conteúdos matemáticos abordados nas instituições escolares e a efetiva aplicabilidade ao cotidiano dos nossos educandos nos leva a pensar sobre o que e como ensinamos, e se a função da escola de garantir um processo de ensino aprendizagem de qualidade está sendo cumprida.

Enquanto educadoras, percebemos que, muitas vezes, no desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem dos conteúdos matemáticos, para cumprir o currículo escolar, utilizamos apenas do livro didático, seus conteúdos e atividades para, meramente transmitir conhecimento.

De acordo com Fiorentini e Oliveira (2015, n.p) essa prática decorre, principalmente, em virtude da formação acadêmica dos professores de Matemática. Durante a etapa formativa dos mesmos, a apresentação dos conteúdos se dá de maneira distante das práticas “[...] de ensinar e aprender na escola básica [...]”.

Especificamente falando sobre o conteúdo matemático Binômio de Newton, reconhecemos que, por muitos anos, ensinamos apenas uma ferramenta para cálculos algébricos sem difundir qualquer aplicação do mesmo. Mas, durante a segunda graduação da Mestranda, Ciências Biológicas pela Universidade Federal de Santa Catarina, as aproximações entre o Binômio de Newton e questões relacionadas a outras áreas do saber, foi suficiente para aflorar e mostrar o quão interessante e útil é a temática, despertando o impulso para esta pesquisa.

Percebemos que a produção acadêmica sobre o ensino do Binômio de Newton impunha limitações para difusão dessas aproximações, pois é reduzida, sendo necessária a elaboração de materiais que promovam outras formas de ensino do tema, que não seja a mera reprodução de algoritmo para cálculos algébricos, mas que oportunize aos educandos, aplicações em situações que sejam de seus interesses.

Considerando as prescrições decorrentes das Diretrizes Curriculares Nacionais e Estadual para o Ensino Médio: Diretrizes Curriculares da Educação Básica – Matemática (DCE), (PARANÁ, 2008), Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio) - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias (PCN+), (BRASIL, 2002) e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) da área de Matemática e suas Tecnologias (BRASIL, 2018), materiais que norteiam o processo de ensino e aprendizagem da Matemática na Educação Básica para que este seja conduzido com base na contextualização, na interdisciplinaridade e na resolução de problemas com significação e relacionando-os com a realidade social, torna-se premente questionarmos nossas práticas pedagógicas e os materiais didáticos que utilizamos, especialmente os livros didáticos, que muitas vezes, são os únicos instrumentos usados pelos professores para balizar seus trabalhos.

Ressaltamos, além disso, que em tempos de reforma curricular a nível nacional, a BNCC para o Ensino Médio (BRASIL, 2018), promulgada em 18 de dezembro de 2018, que prescreve para os currículos escolares abordagens contextualizadas e interdisciplinares na apresentação dos conteúdos, investigar estes aspectos nos conteúdos matemáticos é fundamental.

Bonilha e Vidigal (2016, p. 9) evidenciam que o aprendizado matemático está diretamente relacionado ao fato de resolver problemas, pois para elucidá-los é necessário que “dados sejam analisados e que alguma estratégia seja pensada para sua resolução, que depois de executada, precisa ser avaliada para verificação se de fato permitiu ou não chegar à solução da situação inicial”.

Nas diretrizes educacionais se preconiza para o ensino de Matemática, de modo a oferecer a formação integral dos educandos preparando-os para o mercado de trabalho e para o exercício da cidadania, tendo o Ensino Médio como uma etapa complementar de formação que os estudantes

> possam comunicar-se e argumentar; defrontar-se com problemas, compreendê-los e enfrentá-los; participar de um convívio social que lhes dê oportunidades de se realizarem como cidadãos; fazer escolhas e proposições; tomar gosto pelo conhecimento, aprender a aprender (BRASIL, 2002, p. 9).

Apoiando-se nas atividades apresentadas nos livros didáticos do segundo ano do Ensino Médio, quando da apresentação do conteúdo Binômio de Newton, podemos encontrar as prescrições das diretrizes educacionais a nível federal e estadual?

Diante desse questionamento, buscamos classificar e analisar, com base na categorização de problemas elaborada por Dante (2000), a gama de atividades trazidas pelos livros didáticos de Matemática do segundo ano do Ensino Médio aprovados nas edições do PNLD[1] de 2015 e 2018, de modo a verificar o potencial para a formação do educando almejado nas diretrizes oficiais de ensino, quando da abordagem do conteúdo matemático Binômio de Newton.

Para tanto, a pesquisa está assim organizada: no primeiro capítulo exibimos o referencial teórico sobre a temática, dividindo-o em 4 seções. Na primeira seção apresentamos os aspectos históricos que cercam o programa de aquisição de livros didáticos e os indicadores da escolha das coleções aprovadas no PNLD. Na segunda seção, evidenciamos o tratamento do tema Binômio de Newton nas diretrizes oficias da educação brasileira, a nível federal e estadual. Na terceira seção, discorremos sobre a Resolução de Problemas, suas perspectivas, e refletimos sobre a categorização de problemas propostas por Dante (2000), finalizando com a fundamentação teórica referente ao Binômio de Newton e aplicações.

O segundo capítulo destina-se a descrição da metodologia de pesquisa seguida para fomentar este trabalho. No terceiro capítulo, trazemos a análise das atividades relacionadas ao Binômio de Newton presentes nos segundos volumes das coleções de livros didáticos de Matemática aprovadas nos PNLD 2015 e 2018, embasada no referencial teórico produzido no primeiro capítulo.

No quarto capítulo, apresentamos sugestões de diferentes problemas envolvendo o conteúdo Binômio de Newton, e nas considerações finais, tecemos as conclusões da pesquisa e deixamos sugestões para trabalhos futuros.

---

[1] Destinado a avaliar e disponibilizar obras didáticas, pedagógicas e literárias, entre outros materiais de apoio à prática educativa, de forma regular e gratuita para instituições escolares públicas de educação básica (federal, estaduais, municipais e distrital) e às instituições de educação infantil comunitárias, confessionais ou filantrópicas sem fins lucrativos e conveniadas com o Poder Público.

1 REFERENCIAL TEÓRICO

1.1 LIVRO DIDÁTICO

Mesmo havendo diversos recursos tecnológicos[2] a nossa volta, entre os muros escolares poucos estão disponíveis. Neste cenário, apesar de muitas contradições em torno do livro didático, que não serão discutidas nessa pesquisa, ele assumiu um papel preponderante no processo ensino aprendizagem, devido as políticas públicas educacionais adotadas nos últimos anos, sendo amplamente utilizado por professores e alunos, a fim de guiar o trabalho docente e discente, dando suporte ao processo ensino aprendizagem.

Segundo Gérard e Roegiers (1998, p.19) o livro didático é “um instrumento impresso, intencionalmente estruturado para se inscrever num processo de aprendizagem, com o fim de lhe melhorar a eficácia”. Esses autores reforçam que, para os alunos, esse material assume especialmente as funções de transmitir conhecimento e de desenvolver capacidades cognitivas que podem ser aplicadas no seu cotidiano. Já para o professor, as funções estão relacionadas à formação científica e pedagógica, uma vez que os livros didáticos subsidiam o conhecimento científico para o professor, bem como ampliam ofertas para buscar outros recursos didáticos e metodologias de ensino.

Um retrospecto sobre o programa do livro didático no Brasil é apresentado a seguir, demonstrando os avanços que esse importante programa educacional apresentou no decorrer dos anos.

1.1.1 O Programa Nacional do Livro Didático e do Material Didático: aspectos históricos

A história do programa dos livros didáticos no Brasil, de acordo com Oliveira (2007), tem início em 1929, com a criação do Instituto Nacional do Livro (INL).

[2] Consideramos recursos tecnológicos: computador, televisão, câmera, celular, softwares, aplicativos, animações, simuladores, áudios, vídeos, gráficos, imagens, internet, computador, data show, enfim, recursos de tecnologia da comunicação e informação.

Entretanto, foi em 1934, quando Getúlio Vargas[3] empossa Gustavo Capanema[4] como Ministro da Educação que as ações do INL foram postas em prática. Inicialmente, o Instituto ficou responsável pela elaboração de enciclopédia, dicionário nacional, obras literárias para formação cultural e expansão das bibliotecas públicas. Entretanto, dessas ações, apenas a última se concretizou.

Em 1938, por meio do Decreto-Lei nº 1.006/38 (BRASIL, 1938) instituiu-se a Comissão Nacional do Livro Didático (CNLD), cujo objetivo era legislar e controlar a produção e circulação dos livros didáticos no país. Em 1945, o Decreto-Lei nº 8460 (BRASIL, 1945) limitou o professor de escolher as obras a serem utilizados pelos alunos e desta forma a CNLD regulamentou o processo de adoção de LD em todos os estabelecimentos de ensino no território nacional. Contrapondo-se a esta imposição, alguns estados instituíram as Comissões Estaduais do Livro Didático, de modo a desarticular o domínio da esfera federal.

De acordo com Oliveira (2007), em 1966 foi criada a Comissão do Livro Técnico e Didático (COLTED), cujo objetivo era coordenar todas as etapas da distribuição dos livros didáticos. Recursos na ordem de 51 milhões, oriundos do acordo feito entre o Ministério da Educação (MEC) e a Agência Norte-Americana para o Desenvolvimento Internacional (USAID), possibilitaram a distribuição de obras gratuitamente por três anos.

Na década de 1970, a Fundação Nacional de Material Escolar (FENAME) passou a produzir livros didáticos em coedição de obras didáticas com o setor privado, absorvendo a função do INL. Em 1971, o INL implementou o Programa do Livro Didático para o Ensino Fundamental (PLIDEF) assumindo as atribuições do COLTED. Com o final do convênio MEC/USAID os estados passaram a contribuir financeiramente para o Fundo do Livro Didático.

Com o fim do INL, em 1976, a FENAME torna-se responsável pela execução do programa do livro didático. Entretanto os recursos provenientes do Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE), criado em 1968, foram

[3] Getúlio Dornelles Vargas (1882-1954): Presidente do Brasil em dois períodos: de 1930 até 1945 e de 1951 até 1954 quando suicidou-se, conforme exposto em CPDOC/ FGV (2019a).
4 Gustavo Capanema Filho (1900-1985): Advogado, nomeado em julho de 1934 Ministro da Educação e Saúde, onde permaneceu até 1945, conforme exposto em CPDOC/ FGV (2019b).

insuficientes para atender a demanda de matrículas do período, fazendo com que muitos alunos ficassem sem livros didáticos.

Já na década de 1980, mais especificamente em 1983, com o processo de democratização da educação do Brasil em voga, o MEC criou, inicialmente, a Fundação de Assistência ao Estudante (FAE), assumindo as funções do PLIDEF. Nesse momento, é restabelecido o diálogo para que os professores participem da escolha dos livros didáticos e propõe-se a ampliação do programa com a inclusão de mais turmas do Ensino de 1º Grau[5].

Em 1985, o PLIDEF é substituído pelo PNLD, cujo objetivo, de acordo com Silva (2012, p. 810) era "universalizar, gradativamente, o uso do livro didático, através da distribuição gratuita dos títulos escolhidos pelos professores a todos os alunos das escolas públicas e comunitárias do país". Salientamos que a meta do governo era atender todos os alunos do Ensino de 1º Grau, primeira a oitava séries na época, e estabelecer o fim da participação financeira dos estados.

Sobre o livro didático de Matemática, Gonçalves e Teixeira Correa (2016, p. 556) apontam que desde a criação do PNLD, "o livro de matemática deixa de ser um material de prescrição de exercícios algorítmicos e passa a considerar as questões de contextualização do conhecimento".

Em 1992, a distribuição dos livros foi comprometida pelas limitações orçamentárias e o atendimento restringiu-se a alunos até a 4ª série do Ensino de 1º Grau. A partir de 1993, o FNDE disponibilizou regularmente recursos para compra de livros didáticos e nesse período o MEC instituiu comissões de especialistas, cujas atribuições eram: "avaliar a qualidade dos livros mais solicitados ao Ministério e estabelecer critérios gerais para a avaliação das novas aquisições" (BATISTA, 2001, p. 12). Em 1994, foi publicada a "Definição de Critérios para Avaliação dos Livros Didáticos- MEC/FAE/UNESCO"[6] que apresentava critérios críticos para subsidiar a escolha dos livros didáticos de 1ª a 4ª séries, das área de Português, Matemática,

---

[5] O nível de Ensino 1º Grau era composto por oito anos, sendo equivalente ao atual Ensino Fundamental, inicialmente composto por oito anos (Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996), e alterado pela Lei nº 11.274, de 05 de fevereiro de 2006 (BRASIL, 2006), passando a ser composto por nove anos: anos iniciais (1º ao 5º) e anos finais (6º ao 9º).

[6]BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. **Definição de critérios para avaliação dos livros didáticos:** 1º a 4ª séries. Brasília: FAE, 1994.

Estudos Sociais e Ciências.

Com o equilíbrio econômico restabelecido, em 1995, a distribuição voltou a ser universal para o Ensino de 1º Grau, sendo contempladas as disciplinas de Matemática e Língua Portuguesa, Ciências em 1996 e no ano seguinte Geografia e História.

Em 1996, tem início o processo de avaliação pedagógica propriamente dita dos livros inscritos para o PNLD, sendo publicado o primeiro "Guia de Livros Didáticos de 1ª a 4ª série". Com esse guia, de acordo com Batista (2001, p. 15), "os professores puderam ter condições mais adequadas para a escolha do livro que julgavam mais apropriados a seus pressupostos, às características de seus alunos, às diretrizes do projeto político-pedagógico de sua escola". O processo de avaliação de obras passou por adequações e segue sendo feita até os dias de hoje.

A instauração da avaliação dos livros didáticos coincidiu com a implantação da Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB), nº 9.394/96 (BRASIL, 1996), e o estabelecimento dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) em 1997. Assim, o objetivo da avaliação pedagógica dos livros didáticos aprovados no PNLD é garantir a qualidade das obras, com a prerrogativa que apresentem conteúdos básicos definidos pelos PCN, abolindo livros que excitem qualquer tipo de discriminação, entre outros aspectos, tais como erros conceituais, má qualidade editorial e gráfica.

Com a extinção da FAE, em 1997, o PNLD foi transferido para o FNDE. O programa foi ampliado e o MEC passou a adquirir, de forma contínua, livros didáticos para alfabetização, Língua Portuguesa, Matemática, Ciências, História e Geografia para todos os alunos da rede pública de 1ª a 8ª séries do Ensino Fundamental.

A síntese das ações do FNDE no período de 2000 a 2012, no que tange ao PNLD, encontram-se descritas no Quadro 1.

Quadro 1: Síntese das ações do PNLD do período de 2000 a 2012.

ANO	AÇÕES
2000	- Distribuição de Dicionários de Língua Portuguesa para uso dos alunos de 1ª a 4ª série em 2001; - Entrega dos livros didáticos para 2001 até 31/12/00.
2001	- Início da distribuição de livros para alunos com deficiência visual (livros em Braille, caracteres ampliados e na versão MecDAIsy).
2002	- Anos iniciais: 1ª reposição e complementação - 1ª série consumível (propriedade do

	aluno, não podendo ser reutilizável); - Anos finais: distribuição integral; - Distribuição de dicionário de Língua Portuguesa para os ingressantes na 1ª série, e para alunos 5ª e 6ª série; - Executado o PNLD 2003.
2003	- Anos Iniciais: 2ª reposição e complementação - 1ª série consumível; - Anos Finais: 1ª reposição e complementação; - Distribuição de dicionário de Língua Portuguesa para os ingressantes na 1ª série e para alunos das 7ª e 8ª série; - Distribuição do Atlas Geográfico para as escolas que possuem, concomitantemente, EJA e turmas de 5ª a 8ª série do ensino regular; - Publicação da resolução FNDE nº 38/03, que instituiu o Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio (PNLDEM); - Execução do PNLD 2004, para atender alunos do Ensino Fundamental.
2004	- Anos Iniciais: distribuição integral; - Anos Finais – 2ª Reposição e complementação; - Execução do PNLD 2005, com aquisição e distribuição de livros didáticos para alunos de 1ª a 4ª série, para reposição e complementação, e a última reposição e complementação do PNLD 2002 aos alunos de 5ª a 8ª série; - Ensino Médio: Aquisição de livros de Matemática e Português para os alunos do 1º ano do Norte e do Nordeste; - Distribuição de 38,9 milhões de dicionários aos estudantes, sendo atendidos alunos de 1ª série e aos repetentes da 8ª série; - Criação do Sistema de Controle de Remanejamento e Reserva Técnica (SISCORT) sendo implantado em todos os estados, para atender às turmas de 1ª à 4ª série.
2005	- Anos Iniciais: 1ª reposição e complementação (plena para 1ª série consumível); - Anos Finais: distribuição integral – reposição e complementação; - Ensino Médio: distribuição de livros de Português e Matemática para todos os anos e regiões; - Acervo de dicionários para todas as escolas públicas de 1ª a 8ª séries do Ensino Fundamental. Dicionários adaptados ao nível de ensino do aluno. Quantidade de obras distribuídas: Tipo 1: 1 mil a 3 mil verbetes - 281.783 acervos (2.536.047 livros), Tipo 2: 3,5 mil a 10 mil verbetes - 237.406 acervos (2.136.654 livros), Tipo 3:19 mil a 35 mil verbetes - 247.294 acervos (1.731.058 livros).
2006	- Anos Iniciais: 2ª reposição e complementação (plena para 1ª série consumível); - Anos Finais: 1ª reposição e complementação; - Ensino Médio: distribuição parcial (Matemática e Português para todos os anos e regiões do país), e reposição e complementação dos livros de Português e Matemática. Compra integral de livros de Biologia; - Distribuição de livros didáticos para todas as disciplinas para 1ª à 4ª série/1º ao 5º ano do Ensino Fundamental para 2007; - Distribuição de dicionário trilíngues - Língua Brasileira de Sinais/Língua Portuguesa/Língua Inglesa.
2007	- Anos iniciais: distribuição integral (aquisição de 110,2 milhões de livros para reposição e complementação dos livros anteriormente distribuídos para os anos iniciais (sendo plena para 1ª série consumível)); - Anos Finais: 2ª reposição e complementação; - Ensino Médio: distribuição parcial (integral para Biologia mais reposição e complementação de Matemática e Português), aquisição de livros de História e Química. - Distribuição de dicionários trilíngues de Português, Inglês e Libras para alunos surdos das escolas de Ensino Fundamental e Médio. Para alunos surdos de 1ª a 4ª série distribui-se ainda cartilha e livro de Língua Portuguesa em Libras e em CD-Rom; - Publicação da resolução FNDE 18, de 24/04/2007, que regulamenta o Programa Nacional do Livro Didático para a Alfabetização de Jovens e Adultos (PNLA), para distribuição, a título de doação, de obras didáticas às entidades parceiras do Programa Brasil Alfabetizado (PBA), com vistas à alfabetização e à escolarização de pessoas maiores de 15 anos.

2008	- Anos Iniciais: 1ª reposição e complementação (plena para 1ª série consumível); - Anos Finais: distribuição integral; - Ensino Médio: distribuição parcial (integral para Química e História mais reposição e complementação de Matemática, Português e Biologia); - Para utilização em 2009, houve aquisição e distribuição, em caráter de complementação e reposição, dos livros didáticos anteriormente distribuídos aos alunos de todo o Ensino Fundamental (sendo plena para 1ª série consumível). No âmbito do Ensino Médio, houve atendimento integral, sendo incluídos os livros de Física e Geografia. A aquisição dos livros distribuídos no ano anterior para esse segmento (Química e História) foi em caráter de complementação e reposição.
2009	- Anos Iniciais: 2ª reposição e complementação (plena para 1ª série consumível); - Anos Finais: 1ª reposição e complementação; - Ensino Médio: distribuição integral de Matemática, Português, Biologia, Física e Geografia, mais reposição e complementação de Química e História; - Aquisição de 114,8 milhões de livros didáticos para 36,6 milhões de alunos da educação básica pública, para utilização a partir de 2010, representando um investimento de R$ 622,3 milhões. O maior volume de investimento foi direcionado às turmas do 1º ao 5º ano do Ensino Fundamental (distribuição integral) e do 6º ao 9º ano (reposição e complementação), com 103,6 milhões de obras distribuídas. Os estudantes de Ensino Médio receberam 11,2 milhões de exemplares, como complementação e reposição. Compra de 2,8 milhões de obras do PNLA, direcionadas à alfabetização de jovens e adultos, para utilização no mesmo ano; - Publicação da resolução FNDE nº. 51, de 16/09/2009, regulamentando o Programa Nacional do Livro Didático para a Educação de Jovens e Adultos (PNLD EJA) para atender estudantes em fase de alfabetização; - Novas regras para participação no PNLD, com a publicação da resolução FNDE nº. 60, de 20/11/2009: a partir de 2010, as redes públicas de ensino e as escolas federais devem aderir ao programa para receber os livros didáticos. A resolução 60 inclui ainda as escolas de Ensino Médio no âmbito de atendimento do PNLD, além de adicionar a língua estrangeira (com livros de Inglês ou de Espanhol) aos componentes curriculares distribuídos aos alunos de 6º ao 9º ano. Para o Ensino Médio, também foi adicionado o componente curricular língua estrangeira (com livros de Inglês e de Espanhol), além dos livros de Filosofia e Sociologia (em volume único e consumível).
2010	- Anos Iniciais: distribuição integral; - Anos Finais: 2ª reposição e complementação; - Ensino Médio: 1ª reposição e complementação – 17 milhões de livros; - Aquisição de 120 mil livros para o Ensino Fundamental (uso em 2011); - Reposição e complementação para os anos iniciais sendo plena para alfabetização linguística e alfabetização matemática de 1º e 2º anos, e distribuição integral para anos finais; - Distribuição de livros de língua estrangeira pela primeira vez; - Distribuição de mais de 2 milhões de livros direcionados à alfabetização; - Publicação do Decreto nº. 7.084, de 27/01/2010, que dispõe sobre os procedimentos para execução dos programas de material didático: PNLD e o Programa Nacional Biblioteca da Escola (PNBE).
2011	- Anos Iniciais: 1ª reposição e complementação (plena para alfabetização linguística e alfabetização matemática de1º e 2º ano); - Anos Finais: distribuição integral (incluindo língua estrangeira); - Ensino Médio: 2ª reposição e complementação; - Compra integral de livros para o Ensino Médio, inclusive modalidade Educação de Jovens e Adultos, para uso em 2012. Pela primeira vez, os alunos desse segmento receberam livros de língua estrangeira (Inglês e Espanhol) e livros de Filosofia e Sociologia (volumes únicos e consumíveis); - Os alunos de 1º e 2º ano receberão complementação plena dos livros de alfabetização linguística e alfabetização matemática; - Distribuição de 14,1 milhões de livros, para os alunos do Ensino Fundamental da

	Educação de Jovens e Adultos.
2012	- Aquisição e a distribuição integral de livros aos alunos do Ensino Médio, inclusive na modalidade Educação de Jovens e Adultos; - Reposição e complementação do PNLD 2011 (6º ao 9º ano do Ensino Fundamental) e do PNLD 2010 (1º ao 5º ano do Ensino Fundamental); - Publicação de edital para formação de parcerias para estruturação e operação de serviço público e gratuito de disponibilização de materiais digitais a usuários da educação nacional; - Inscrição de objetos educacionais digitais complementares aos livros impressos para PNLD 2014. Os novos livros didáticos trarão também endereços on-line para que os estudantes tenham acesso ao material multimídia, complementem o assunto estudado, além de tornar as aulas mais modernas e interessantes.

Fonte: Elaborada pela autora com base nas informações disponíveis no site do FNDE – Programas do livro (FNDE, 2018).

Observamos que a implementação do PNLDEM ocorreu de forma gradativa, a partir de 2004. Inicialmente foram direcionados livros didáticos para Português e Matemática. Posteriormente, ano a ano, contemplam-se as demais disciplinas do currículo do Ensino Médio, nesta ordem: Biologia, História, Química, Física, Geografia, Língua Estrangeira, Sociologia, Filosofia e Arte.

A regularidade do PNLD abrangendo todas as disciplinas do Ensino Médio instaurou-se em 2012, sendo executado de três em três anos. Observamos também que, concomitante ao PNLD para o Ensino Médio, acontecem outros programas que visam à aquisição de obras didáticas/literárias: PNLD Campo, PNLD Alfabetização na Idade Certa, PNLD EJA, entre outros.

A respeito do PNLD de 2015 e 2018, destinados ao Ensino Médio, destacamos, de acordo com dados do FNDE, que: o programa de 2015 beneficiou 19.363 escolas públicas do país atendendo 7.112.492 alunos, sendo adquiridos nesse ano 87.622.022 exemplares, com custo de R$ 787.905.386,58; e o PNLD 2018 atendeu 19.921 escolas públicas, beneficiando 7.085.669 com a distribuição de 89.381.588 exemplares, perfazendo um total de R$ 879.770.303,13.

Na Tabela 2, apresentamos o número de exemplares de livros didáticos de Matemática, distribuídos por coleção, do segundo volume para estudantes da rede pública no PNLD 2015.

Tabela 1: Quantitativo de obras distribuídas do segundo volume das coleções do PNLD 2015 da disciplina de Matemática.

Título da Coleção	Quantidade de obras distribuídas	% em relação ao total de exemplares adquiridos
Matemática: contexto & aplicações	808.284	0,92
Novo Olhar Matemática	464.433	0,53
Matemática - ciência e aplicações	457.368	0,52
Matemática – Paiva	282.819	0,32
Conexões com a Matemática	239.951	0,27
Matemática Ensino Médio	122.658	0,13
TOTAL	2.375.513	2,7

Fonte: Elaborada pela autora com base nas informações disponíveis no site do FNDE – Programas do livro/Dados estatísticos (FNDE, 2018).

O quantitativo de obras, por título, distribuídas para estudantes do Ensino Médio referente ao PNLD 2018 não foi disponiblizado até o momento. Anualmente, o FNDE adquire obras adicionais das coleções aprovadas para reposição e atender demandas de acréscimos de matrículas. Por isso, imaginamos que somente após o novo PNLDEM, que ocorrerá em 2021, teremos o total de obras entregues.

Antes de qualquer aquisição, além do atendimento a quesitos burocráticos das editoras perante ao FNDE/MEC, as coleções disponibilizadas pelas editoras e adquiridas pelo PNLD são amplamente avaliadas por uma equipe de especialistas instituída pelo MEC. As equipes de cada disciplina do currículo escolar do Ensino Médio são responsáveis pela elaboração do guia de livros didáticos, sobre os quais escrevemos na próxima seção.

1.1.2 Os guias de livros didáticos do Ensino Médio: 2015 e 2018

Como visto na seção anterior, apenas com a publicação da resolução FNDE nº 38/03 (BRASIL, 2003), o PNLD passa a ser aplicado ao Ensino Médio, como uma política pública de educação, cuja finalidade é:

> Prover de livros e materiais didáticos e de referência de qualidade, prioritariamente as escolas públicas do ensino médio das redes federal, estadual, municipal e distrital, visando garantir a eqüidade nas condições de acesso e a qualidade do ensino público brasileiro e, quando possível, distribuí-los aos alunos matriculados e professores de escolas na

> modalidade plurilíngüe, no exterior, que cursem ou lecionem a língua portuguesa como língua estrangeira prioritariamente nos Países do Mercosul (BRASIL, 2007, p. 240).

A execução do PNLDEM segue as mesmas etapas do PNLD geral. Silva (2015, n. p.) elenca as etapas de operacionalização do programa:

> a) Adesão formal das escolas da rede pública. [...] b) Publicação do Edital de Convocação no Diário Oficial da União. O Edital produzido pelo MEC/FNDE tem a finalidade de tornar público as editores a abertura do processo de inscrição, avaliação e seleção de obras didáticas. c) Inscrição das editoras que pretendem ter suas obras didáticas incluídas no PNLDEM. [...] d) Avaliação das obras didáticas. [...] e) Elaboração e divulgação do Guia de Livros Didáticos. [...] f) Escolha dos livros didáticos pelos professores. [...] g) Negociações entre o FNDE e as editoras para a aquisição das obras. [...] h) Produção e distribuição das obras didáticas. [...] i) Recebimento dos livros didáticos pelas escolas.[...] j) Acompanhamento, monitoramento e avaliação do PNLDEM.

No que tange a elaboração e divulgação do guia de livros didáticos, o MEC, juntamente com outras instâncias a ele subordinadas, responsáveis pela confecção do mesmo, somam esforços no sentido de oferecer aos professores subsídios para que as escolhas dos livros didáticos contemplem, da melhor maneira possível, o projeto político pedagógico de suas instituições de ensino.

Além de subsidiar o trabalho docente na escolha das coleções, os guias ditam melhorias que se esperam para próximas edições, ou seja, é “termômetro” para mensurar a qualidade das obras.

Os critérios avaliativos presentes nos guias de livros didáticos do PNLD 2015 e 2018 são estabelecidos na etapa B de operacionalização do PNLD, e dividem-se basicamente em critérios de avaliação: gerais e do componente curricular Matemática.

Reproduzimos do guia de livros didáticos, PNLD 2018, os critérios gerais eliminatórios comuns a todas as coleções:

> a. respeito à legislação, às diretrizes e às normas oficiais relativas ao Ensino Médio; b. observância de princípios éticos e democráticos necessários à construção da cidadania e ao convívio social republicano; c. coerência e adequação da abordagem teórico-metodológica assumida pela obra no que diz respeito à proposta didático-pedagógica explicitada e aos objetivos visados; d. respeito à perspectiva interdisciplinar na abordagem dos conteúdos; e. correção e atualização de conceitos, informações e procedimentos; f. observância das características e finalidades específicas do manual do professor e adequação da obra à linha pedagógica nela

> apresentada; g. adequação da estrutura editorial e do projeto gráfico aos objetivos didático-pedagógicos da obra (BRASIL, 2017, p. 14).

Já os critérios de avaliação do componente curricular Matemática, propostos pelo Ministério da Educação são

> 1. incluir todos os campos da Matemática escolar, a saber, números, álgebra, geometria e estatística e probabilidade; 2. privilegiar a exploração dos conceitos matemáticos e de sua utilidade para resolver problemas; 3. apresentar os conceitos com encadeamento lógico, evitando: recorrer a conceitos ainda não definidos para introduzir outro conceito, utilizar-se de definições circulares, confundir tese com hipótese em demonstrações matemáticas, entre outros; 4. propiciar o desenvolvimento, pelo estudante, de competências cognitivas básicas, como: observação, compreensão, argumentação, organização, análise, síntese, comunicação de ideias matemáticas, memorização, entre outras (BRASIL, 2017, p. 14-15).

O não cumprimento de um desses critérios, gerais ou do componente matemático, exclui a obra do PNLD, ou seja, nos guias dos livros didáticos estão apenas obras que se enquadram nos critérios gerais de avaliação e critérios do componente curricular Matemática.

Há uma crescente preocupação dos autores, e, consequentemente, das editoras no sentido de adequar suas obras às exigências do PNLD, melhorando significativamente a qualidade das publicações e aumentando o número de coleções aprovadas no PNLD disponibilizadas para análise dos professores. Com uma diversidade maior de obras, é oportunizado aos docentes da Rede Pública de Ensino escolher coleções que melhor atendam as especificidades de cada unidade escolar.

De acordo com Batista (2001, p. 23),

> [...] com livros de melhor qualidade nas escolas, o PNLD vem contribuindo para um ensino de melhor qualidade: é uma referência consensual de qualidade para a produção de livros didáticos e para sua escolha, por professores; vem possibilitando uma reformulação dos padrões do manual escolar brasileiro e criando condições adequadas para a renovação das práticas de ensino nas escolas.

Ainda, sobre o guia dos livros didáticos, as coleções aprovadas são analisadas sob vários aspectos: seleção, distribuição e abordagem dos conteúdos matemáticos; metodologia de ensino e aprendizagem; contextualização; formação para a cidadania e características do Manual do Professor. A partir disso, cada obra é exposta por meio de uma resenha, que apresenta uma visão geral da obra.

Nos guia de livros didáticos de 2015 e 2018 os conteúdos matemáticos analisados se condensam nos conteúdos estruturantes apresentados no Quadro 2.

Quadro 2: Conteúdos estruturantes apresentados nos guias de livros didáticos.

Conteúdos estruturantes no guia de livros didáticos	
2015	2018
Número	Números
Funções	Álgebra
Equações algébricas	
Geometria	Geometria
Geometria analítica	Geometria analítica
Estatística e probabilidade	Estatística e probabilidade

Fonte: Elaborada pela autora com base nas informações disponíveis nos guias de livros didáticos-Ensino Médio 2015 e 2018 (BRASIL, 2014; BRASIL, 2017).

Os guias de livros didáticos do PNLD 2015 e 2018 incluem no campo dos números[7] os seguintes conteúdos básicos: teoria de conjuntos, conjuntos numéricos, grandezas, números complexos e análise combinatória.

A análise combinatória é definida nos guias como "uma parte da Matemática cujo objetivo é resolver, entre outros, problemas de contagem dos elementos de conjuntos finitos" (BRASIL, 2014, p. 92; BRASIL, 2017, p. 24). Nos mesmos materiais há uma dura crítica no sentido da falta de inovação na sua abordagem, que prima pelo ensino de fórmulas ante ao princípio fundamental da contagem. Entretanto, salienta-se que "um dos objetivos de um bom ensino de análise combinatória é desenvolver no estudante a capacidade para escolher diferentes técnicas de contagem e usá-las de modo eficiente na resolução dos problemas" (BRASIL, 2017, p. 24).

Sobre a metodologia de ensino e aprendizagem, os critérios utilizados para caracterizar as obras são genéricos, entretanto nos guias há críticas a respeito da forma como os conteúdos são introduzidos e trabalhados. Nesse sentido refutam a

[7]Como nosso objeto de estudo é uma temática da análise combinatória, não traremos os conteúdos dos demais campos do conhecimento.

> [...] formalização precoce dos conceitos, o que limita a possibilidade de o aluno estabelecer suas próprias conclusões. Diversas atividades são indicadas para o trabalho em grupo ou em equipe, com o objetivo de proporcionar a interação entre os alunos. Mas, de fato, muitas delas são análogas às demais e não atingem graus de dificuldade que demandem essa interação (BRASIL, 2014, p. 36).

Quanto às atividades propostas nos livros didáticos, os autores dos guias reprovam o número elevado de atividades nas coleções, bem como os exemplos e atividades resolvidas, que, para os autores, acabam por desmotivar e restringir o desenvolvimento de capacidades que possam contribuir para a aprendizagem dos alunos.

A fim de evitar obras didáticas permeadas com conceitos e procedimentos que não sejam de fato ensinadas e aprendidas, no edital do PNLD 2018, foi estabelecido que o livro do estudante não poderia ultrapassar 288 páginas por volume. Essa redução do número de páginas em relação a outras edições deve-se ao fato de que o currículo escolar deve primar apenas, conforme exposto no guia do livro didático do PNLD 2018, por “conteúdos matemáticos que sejam, de fato, imprescindíveis à formação no Ensino Médio dos jovens, no que diz respeito a: continuidade de estudos; preparação básica para o trabalho; e sua integração na sociedade como cidadão mais crítico” (BRASIL, 2017, p. 18).

Sobre o quesito contextualização, observamos que os autores do guia do livro didático de Matemática discutem a

> falta e reflexões significativas sobre o papel da matemática no contexto social, na medida em que não se esclarece de que modo os conteúdos e conceitos dessa ciência podem ser utilizados para melhor entendimento dos fenômenos do mundo físico e social (BRASIL, 2017, p. 40).

Questiona-se, portanto, a superficialidade das relações propostas pelos autores, para que de fato, se consiga estabelecer um processo educativo contextualizado.

Notamos a presença de diversas críticas formuladas pelos autores dos guias de livros didáticos do PNLD 2015 e 2018 aos livros avaliados, evidenciando e sugerindo alterações, que poderiam melhorar significativamente a qualidade das obras distribuídas nas escolas públicas.

Na próxima seção, apresentamos considerações apuradas nos documentos norteadores da educação brasileira, a nível federal e estadual, sobre o ensino do conteúdo matemático Binômio de Newton.

1.2 ASPECTOS SOBRE O ENSINO DE BINÔMIO DE NEWTON

1.2.1 Questões legais: as Diretrizes Nacionais e Estadual

Nesta etapa da dissertação, buscamos investigar como o conteúdo matemático Binômio de Newton é abordado nos documentos que apresentam diretrizes curriculares para o Ensino Médio. Inicialmente averiguaremos o que está posto nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM), mais especificamente nos PCN+.

1.2.1.1 Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio): Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias (PCN+)

Nos PCN+ a disciplina de Matemática é considerada como ciência essencial para formação final da escolarização básica do educando, preparando-o para continuação dos estudos, para o mundo do trabalho e exercício da cidadania. Nesse sentido, a Matemática, de acordo com os PCN+, “contribui para a construção de uma visão de mundo, para ler e interpretar a realidade e para desenvolver capacidades que deles serão exigidas ao longo da vida social e profissional” (BRASIL, 2002, p. 111).

No que concerne ao ensino de Matemática, os PCN+ defendem a contextualização, interdisciplinaridade e integração de conhecimentos como recursos para desenvolvimento de

> [...] competências e habilidades que são formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender e interpretar situações, para se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias à sua formação (BRASIL, 2002, p. 111).

A fim de promover a contextualização, interdisciplinaridade e integração de conhecimentos, as metodologias de ensino elencadas nos PCN+ são a Resolução de Problemas e projetos. De acordo com PCN+, (BRASIL, 2002), a Resolução de Problemas é indispensável para que se alcancem as aptidões acima propostas, uma vez que a mesma induz ao desenvolvimento do pensamento crítico, norteando o aluno no sentido de enfrentar situações desafiadoras, motivando-os para a criação de estratégias, argumentações para resolução de situações tanto da vida escolar como da vida em sociedade.

Já o desenvolvimento de projetos proporciona a interdisciplinaridade e oferece condições para um trabalho educativo que movimente competências gerais dos alunos, uma vez que a temática do projeto surge de perspectivas cotidianas e reais dos educandos.

Os perfis acima delineados remetem ao desenvolvimento de competências traçadas como metas para complementar o Ensino Fundamental e serem contempladas no Ensino Médio, propostas nos PCN+ (BRASIL, 2002): representação e comunicação, investigação e compreensão, contextualização das ciências no âmbito sociocultural. A primeira refere-se ao desenvolvimento da capacidade de ler, produzir e interpretar textos em diferentes linguagens. A segunda relaciona-se a capacidade do aluno compreender e interpretar problemas, buscando estratégias de resolução, fazer conjecturas, esboçar, produzir e validar argumentos. A última remete a capacitação do aluno para relacionar a Matemática desenvolvida nos bancos escolares com a realidade, aplicando métodos matemáticos, conceitos históricos, entre outros.

Para alcançar as competências acima elencadas, nos PCN+ os conteúdos matemáticos organizam-se em três temas estruturadores ou eixos: 1) Álgebra: números e funções; 2) Geometria e Medidas; 3) Análise de Dados. Esses temas podem ser caracterizados como objetos de estudo, à medida que contemplam conteúdos com linguagens, conceitos e procedimentos comuns. Os eixos, por sua vez, podem ser organizados em unidades temáticas, que elencam diversos conteúdos básicos. Esses conteúdos básicos podem ou não ser contemplados no currículo escolar, dependendo das especificidades de cada realidade.

No Quadro 3, expomos os conteúdos relacionados ao tema estruturador Análise de Dados e suas respectivas unidades temáticas[8].

Quadro 3: Tema estruturador Análise de Dados e unidades temáticas relacionadas ao mesmo.

ANÁLISE DE DADOS		
Unidades temáticas	**Conteúdos a serem contemplados**	**Objetivos**
Estatística	Descrição de dados; representações gráficas; análise de dados: médias, moda e mediana, variância e desvio padrão	• Identificar formas adequadas para descrever e representar dados numéricos e informações de natureza social, econômica, política, científico-tecnológica ou abstrata. • Ler e interpretar dados e informações de caráter estatístico apresentados em diferentes linguagens e representações, na mídia ou em outros textos e meios de comunicação. • Obter médias e avaliar desvios de conjuntos de dados ou informações de diferentes naturezas. • Compreender e emitir juízos sobre informações estatísticas de natureza social, econômica, política ou científica apresentadas em textos, notícias, propagandas, censos, pesquisas e outros meios.
Contagem	Princípio multiplicativo; problemas de contagem	• Identificar regularidades para estabelecer regras e propriedades em processos nos quais se fazem necessários os processos de contagem. • Decidir sobre a forma mais adequada de organizar números e informações com o objetivo de simplificar cálculos em situações reais envolvendo grande quantidade de dados ou de eventos. • Identificar dados e relações envolvidas numa situação-problema que envolva o raciocínio combinatório, utilizando os processos de contagem.
Probabilidade	Possibilidades; cálculo de probabilidades	• Reconhecer o caráter aleatório de fenômenos e eventos naturais, científico tecnológicos ou sociais, compreendendo o significado e a importância da probabilidade como meio de prever resultados. • Quantificar e fazer previsões em situações aplicadas a diferentes áreas do conhecimento e da vida cotidiana que envolvam o pensamento probabilístico. • Identificar em diferentes áreas científicas e outras atividades práticas modelos e problemas que fazem uso de estatísticas e

[8] As unidades temáticas referentes aos eixos Álgebra: números e funções, Geometria e Medidas não serão apresentadas, uma vez que o tema de Binômio de Newton não está relacionado diretamente a elas.

		probabilidades.

Fonte: Elaborada pela autora com base nas informações disponíveis nos PCN+ (BRASIL, 2002).

Notamos que não há citação direta do conteúdo matemático Binômio de Newton dentre as unidades temáticas propostas pelos PCN+. Entretanto, podemos assumi-lo disperso nos temas estruturadores, uma vez que os PCN+ permitem a abordagem de conteúdos na chamada parte flexível do currículo, moldando-o, como citado anteriormente, de acordo com o projeto político pedagógico da escola.

Complementando o exposto acima, observamos que no eixo Análise de Dados, na unidade temática contagem, os objetivos a serem contemplados quando da abordagem dos conteúdos princípio multiplicativo e problemas de contagem podem tornar-se mais desafiadores se forem harmoniosamente interligados a outras unidades temáticas, a saber, probabilidade. Com isso, é possível a abordagem do Binômio de Newton, ampliando as ferramentas, a capacidade de raciocinar e de usar os mais variados conhecimentos em situações concretas.

Assim, as competências e habilidades propostas neste documento estariam de fato sendo atendidas na formação do educando, possibilitando que os conceitos, que poderiam, ao término do Ensino Médio continuarem sendo abstratos, sejam aplicados a diversas situações.

1.2.1.2 Diretrizes Curriculares da Educação Básica - Matemática (DCE)

As Diretrizes Curriculares da Educação Básica – Matemática são resultado de uma ampla discussão efetuada por educadores da Rede Estadual de Ensino do Paraná, no período de 2004 a 2008, culminando com a apresentação de conteúdos considerados básicos para organização das Propostas Pedagógicas Curriculares das Escolas Estaduais do Paraná (PPC), integrantes do Projeto Político Pedagógico (PPP).

Neste documento, recupera-se a importância dos conteúdos matemáticos e da disciplina Matemática, posição antagônica aos PCN+ devido à redução dos conteúdos matemáticos a aqueles capazes de “resolver problemas locais e estímulo a abordagem dos temas matemáticos” (PARANÁ, 2008, p. 47).

A organização do currículo para a disciplina de Matemática, de acordo com as DCE (PARANÁ, 2008), é norteada pela presença dos Conteúdos Estruturantes: Números e Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometrias, Funções, Tratamento da Informação, concebidos de acordo com as DCE como

> [...] os conhecimentos de grande amplitude, os conceitos e as práticas que identificam e organizam os campos de estudos de uma disciplina escolar, considerados fundamentais para a sua compreensão. Constituem-se historicamente e são legitimados nas relações sociais (PARANÁ, 2008, p 49).

Estes, por sua vez, devem estar presentes em todos os anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio. A transição entre um conteúdo estruturante e outro é feita por meio de conteúdos específicos. Há também, uma preocupação nas DCE de não hierarquizar os conteúdos e sim garantir uma abordagem que valorize a conexão entre eles. A exemplo, as DCE (PARANÁ, 2008, p. 57) sugerem que os conhecimentos relacionados à geometria sejam associados à álgebra e aritmética.

Os conteúdos específicos são distribuídos em cada conteúdo estruturante de acordo com o nível de ensino: anos finais do Ensino Fundamental ou Ensino Médio. No Quadro 4 apresentamos a organização curricular proposta nas DCE para os anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio.

Quadro 4: Organização do currículo por nível de ensino, proposta para o Estado do Paraná.

Conteúdo Estruturante	**Conteúdos específicos**	
	Ensino Fundamental	**Ensino Médio**
Números e Álgebra	• Conjuntos numéricos e operações • Equações e inequações • Polinômios • Proporcionalidade	• Números reais • Números complexos • Sistemas lineares • Matrizes e determinantes • Equações e inequações exponenciais, logarítmicas e modulares • Polinômios
Grandezas e Medidas	• Sistema monetário • Medidas de comprimento • Medidas de massa • Medidas de tempo • Medidas derivadas: áreas e volumes • Medidas de ângulos • Medidas de temperatura • Medidas de velocidade • Trigonometria: relações métricas	• Medidas de massa • Medidas derivadas: área e volume • Medidas de informática • Medidas de energia • Medidas de grandezas vetoriais • Trigonometria: relações métricas e trigonométricas no triângulo retângulo e a trigonometria na circunferência

	no triângulo retângulo e relações trigonométricas nos triângulos	
Geometrias	• Geometria plana • Geometria espacial • Geometria analítica • Noções básicas de geometrias não-euclidianas	
Funções	• Função afim • Função quadrática	• Função afim • Função quadrática • Função polinomial • Função exponencial • Função logarítmica • Função trigonométrica • Função modular • Progressão aritmética • Progressão geométrica
Tratamento da informação	• Noções de probabilidade • Estatística • Matemática financeira • Noções de análise combinatória	• Analise combinatória • Binômio de Newton • Estatística • Probabilidade • Matemática financeira

Fonte: Elaborada pela autora com base nas informações disponíveis nas DCE (PARANÁ, 2008).

Quanto ao conteúdo básico Binômio de Newton, pertencente ao eixo estruturante Tratamento da Informação, apresentado no Ensino Médio, as DCE enfatizam sua importância ao expressar que dominá-lo é

> [...] pré-requisito também para a compreensão do conjunto de articulações que se estabelecem entre análise combinatória, estatística e probabilidade. As propriedades do binômio de Newton são ricas em agrupamentos, disposição de coeficientes em linhas e colunas e ideia de conjuntos e subconjuntos. Tanto o teorema das colunas como o teorema das diagonais trazem implícito o argumento binomial e o argumento combinatório, o que possibilita articular esses conceitos com os presentes em outros conteúdos. No cálculo de probabilidades, por exemplo, usa-se distribuição binomial quando o experimento constitui uma sequência de ensaios ou tentativas independentes (PARANÁ, 2008, p. 61).

Desta forma, é evidenciada a possibilidade de um ensino desfragmentado, a medida que é possível aproximar estatística e probabilidade as mais diversas áreas do conhecimento.

Para alcançar os objetivos propostos para cada um dos conteúdos estruturantes, além de nortear a prática docente, são apresentadas nas DCE algumas tendências metodológicas da Educação Matemática: Resolução de Problemas; Modelagem Matemática; Mídias Tecnológicas; Etnomatemática; História da Matemática; Investigações Matemáticas.

As DCE presumem a articulação de diferentes tendências para “realizar com eficácia o complexo processo de ensinar e aprender Matemática" (PARANÁ, 2008, p. 68). Em seu texto, constatamos que o documento direciona em vários momentos a utilização da prática investigativa, por meio da Resolução de Problemas e de tendências correlatas.

Observamos que há orientações no sentido de que as problemáticas empregadas pelos professores, através de diferentes metodologias de ensino aprendizagem, venham transcender as barreiras disciplinares, oportunizando que o conhecimento teórico da sala de aula seja, de fato, relacionado e aplicado a questões do cotidiano discente.

Inferimos que nas DCE (PARANÁ, 2008), o conteúdo Binômio de Newton é considerado estratégico para que, por meio de seus algoritmos, viabilize a compreensão e a resolução das mais variadas atividades. Para isso, é necessário que o professor supere as limitações a que é submetido e seja o mentor de situações de ensino que estimulem novos meios de ensinar e aprender Matemática.

O processo ensino aprendizagem é complexo e não envolve apenas a ação docente, pois, como o próprio nome diz, temos o professor que ensina e o aluno que aprende. Obviamente há uma interdependência entre esses – alunos e professores – e, ao mesmo tempo, entre outros personagens incutidos no ambiente escolar (pais, equipe diretiva, equipe pedagógica, funcionários, entre outros).

Neste cenário, percebemos que as limitações enfrentadas pelos professores vão desde a falta de condições de trabalho, omissão da família do aluno no processo de ensino aprendizagem, indisciplina, violência, drogadição, desvalorização social, baixos salários, sobrecarga de trabalho, entre tantos outros fatores.

1.2.1.3 Base Nacional Comum Curricular (BNCC) – Ensino Médio

As mudanças curriculares ocorrem em consonância com interesses ideológicos, culturais, sociais, pois de acordo com Sacristán (2013, p. 17)

> [...] o currículo proporciona uma ordem por meio da regulação do conteúdo da aprendizagem e ensino [...], uma construção útil para organizar aquilo do

> qual se deve ocupar a escolarização e aquilo que deve ser aprendido.

Nesse cenário, há alguns anos, as discussões em torno da BNCC se iniciaram em todas as etapas da Educação Básica. Nesta pesquisa, examinamos apenas a BNCC do Ensino Médio da área de Matemática e suas tecnologias, que moldará, a partir de 2020, a organização curricular do Ensino Médio.

A BNCC tem como prerrogativa legal normatizar

> [...] aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional de Educação (PNE). [...] , e está orientado pelos princípios éticos, políticos e estéticos que visam à formação humana integral e à construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva, como fundamentado nas Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica (DCN) (BRASIL, 2018, p. 7).

Em suma, a BNCC pretende garantir a qualidade da educação básica brasileira, instituindo um currículo mínimo a ser seguido pelas instituições escolares, possibilitando que os estudantes desenvolvam dez competências gerais (conhecimento; pensamento científico, crítico e criativo; repertório cultural; comunicação; cultura digital; trabalho e projeto de vida; argumentação; autoconhecimento e autocuidado; empatia e cooperação; responsabilidade e cidadania)[9], consideradas direitos mínimos que uma educação de qualidade deve garantir para o estudante brasileiro.

O desenvolvimento das competências está relacionado ao que a BNCC chama de educação integral, caracterizada pela “construção intencional de processos educativos que promovam aprendizagens sintonizadas com as necessidades, as possibilidades e os interesses dos estudantes e, também, com os desafios da sociedade contemporânea“ (BRASIL, 2018, p.14), indo além, preconizando uma nova organização dos saberes ante a disciplinarização, de modo a promover a contextualização.

Para promoção tanto das competências gerais, bem como das competências específicas de cada área, a BNCC prevê, para cada competência, o

[9]Na BNCC, competência é definida como a “mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e sócio emocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho” (BRASIL, 2018, p. 7).

desenvolvimento de habilidades, que são consideradas “aprendizagens essenciais a ser garantidas no âmbito da BNCC a todos os estudantes do Ensino Médio” (BRASIL, 2018, p. 33).

Com o intuito de ampliar as habilidades dos educandos, na área de Matemática, adquiridas até o nono ano do Ensino Fundamental, é posto como desafio para a aprendizagem de Matemática no Ensino Médio o “letramento matemático”, que é o desenvolvimento de

> [...] competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas (BRASIL, 2018, p. 522).

As competências específicas da Matemática para o Ensino Médio aparecem listadas abaixo:

> 1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, ou ainda questões econômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a consolidar uma formação científica geral. 2. Articular conhecimentos matemáticos ao propor e/ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas de urgência social, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, recorrendo a conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática. 3. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos – Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística –, para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente. 4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e fluidez, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas, de modo a favorecer a construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático. 5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas (BRASIL, 2018, p. 523).

Conforme citado anteriormente a BNCC preconiza que para cada competência específica sejam elencadas habilidades. Basicamente na primeira competência está implícita a ideia de favorecer aos educandos a “interpretação e a compreensão da realidade" (BRASIL, 2018, p. 524), de modo a torná-los cidadãos críticos e reflexivos. Para isso, são propostas as seguintes habilidades[10]:

> (EM13MAT101) Interpretar situações econômicas, sociais e das Ciências da Natureza que envolvem a variação de duas grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação com ou sem apoio de tecnologias digitais.(EM13MAT102) Analisar gráficos e métodos de amostragem de pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros de interpretação, como escalas e amostras não apropriadas.(EM13MAT103) Interpretar e compreender o emprego de unidades de medida de diferentes grandezas, inclusive de novas unidades, como as de armazenamento de dados e de distâncias astronômicas e microscópicas, ligadas aos avanços tecnológicos, amplamente divulgadas na sociedade.(EM13MAT104) Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica, tais como índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros, investigando os processos de cálculo desses números.(EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para analisar diferentes produções humanas como construções civis, obras de arte, entre outras (BRASIL, 2018, p. 524).

De modo a ampliar a primeira competência, a segunda mobiliza os educandos para que, por meio de projetos, atuem em situações problemas e dessa forma proponham a solução dos mesmos, desenvolvendo as seguintes habilidades:

> (EM13MAT201) Propor ações comunitárias, como as voltadas aos locais de moradia dos estudantes dentre outras, envolvendo cálculos das medidas de área, de volume, de capacidade ou de massa, adequados às demandas da região.(EM13MAT202) Planejar e executar pesquisa amostral usando dados coletados ou de diferentes fontes sobre questões relevantes atuais, incluindo ou não, apoio de recursos tecnológicos, e comunicar os resultados por meio de relatório contendo gráficos e interpretação das medidas de tendência central e das de dispersão.(EM13MAT203) Planejar e executar ações envolvendo a criação e a utilização de aplicativos, jogos (digitais ou não), planilhas para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros compostos, dentre outros, para aplicar conceitos matemáticos e tomar decisões (BRASIL, 2018, p. 526).

A terceira competência está relacionada ao desenvolvimento de habilidades que possibilitem ao educando a resolução de situações problemas do cotidiano, desde a construção e reconhecimento de modelagens que sejam plausíveis de aplicação. Para essa competência são apresentadas as seguintes habilidades:

---

[10] O código alfanumérico que identifica cada habilidade tem a seguinte composição: o primeiro par de letras indica a etapa de ensino - EM indica Ensino Médio; primeiro par de números indica o ano a que se refere (01: 1º, 02: 2º, 03: 3º) ou ao bloco de anos (13: 1º ao 3º); segundo par de letras corresponde ao componente curricular (MAT: Matemática) e o segundo par de números indica a habilidade.

> (EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, incluindo ou não tecnologias digitais. (EM13MAT302) Resolver e elaborar problemas cujos modelos são as funções polinomiais de 1º e 2º graus, em contextos diversos, incluindo ou não tecnologias digitais. (EM13MAT303) Resolver e elaborar problemas envolvendo porcentagens em diversos contextos e sobre juros compostos, destacando o crescimento exponencial. (EM13MAT304) Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais é necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira e o do crescimento de seres vivos microscópicos, entre outros. (EM13MAT305) Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais é necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros. (EM13MAT306). Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais, como ondas sonoras, ciclos menstruais, movimentos cíclicos, entre outros, e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria. (EM13MAT307) Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais, como o remanejamento e a distribuição de plantações, com ou sem apoio de tecnologias digitais. (EM13MAT308) Resolver e elaborar problemas em variados contextos, envolvendo triângulos nos quais se aplicam as relações métricas ou as noções de congruência e semelhança. (EM13MAT309) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos (cilindro e cone) em situações reais, como o cálculo do gasto de material para forrações ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados. (EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo diferentes tipos de agrupamento de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas como o diagrama de árvore. (EM13MAT311) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade de eventos aleatórios, identificando e descrevendo o espaço amostral e realizando contagem das possibilidades. (EM13MAT312) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos. (EM13MAT313) Resolver e elaborar problemas que envolvem medições em que se discuta o emprego de algarismos significativo e algarismos duvidosos, utilizando, quando necessário, a notação científica. (EM13MAT314) Resolver e elaborar problemas que envolvem grandezas compostas, determinadas pela razão ou pelo produto de duas outras, como velocidade, densidade demográfica, energia elétrica etc. (EM13MAT315) Reconhecer um problema algorítmico, enunciá-lo, procurar uma solução e expressá-la por meio de um algoritmo, com o respectivo fluxograma. (EM13MAT316) Resolver e elaborar problemas, em diferentes contextos, que envolvem cálculo e interpretação das medidas de tendência central (média, moda, mediana) e das de dispersão (amplitude, variância e desvio padrão) (BRASIL, 2018, p. 528).

A quarta competência está relacionada a capacidade de propor diferentes representações a um mesmo objeto, possibilitando alternativas para que os educandos argumentem, comuniquem, interpretem, raciocinem, resolvam problemas e “ampliem a capacidade de pensar matematicamente”, de acordo com BRASIL (2018, p. 530). Para essa competência são instituídas as seguintes habilidades:

> (EM13MAT401) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau para representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica. (EM13MAT402) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau para representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica. (EM13MAT403) Comparar e analisar as representações, em plano cartesiano, das funções exponencial e logarítmica para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada uma, com ou sem apoio de tecnologias digitais, estabelecendo relações entre elas. (EM13MAT404) Identificar as características fundamentais das funções seno e cosseno (periodicidade, domínio, imagem), por meio da comparação das representações em ciclos trigonométricos e em planos cartesianos, com ou sem apoio de tecnologias digitais. (EM13MAT405) Reconhecer funções definidas por uma ou mais sentenças (como a tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, convertendo essas representações de uma para outra e identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento. (EM13MAT406) Utilizar os conceitos básicos de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática. (EM13MAT407) Interpretar e construir vistas ortogonais de uma figura espacial para representar formas tridimensionais por meio de figuras planas. (EM13MAT408) Construir e interpretar tabelas e gráficos de frequências, com base em dados obtidos em pesquisas por amostras estatísticas, incluindo ou não o uso de *softwares* que inter-relacionem estatística, geometria e álgebra. (EM13MAT409) Interpretar e comparar conjuntos de dados estatísticos por meio de diferentes diagramas e gráficos, como o histograma, o de caixa (*box-plot*), o de ramos e folhas, reconhecendo os mais eficientes para sua análise (BRASIL, 2018, p. 531).

De modo a entender a Matemática como uma ciência, presente em diferentes situações, bem como caracterizar a Matemática como atividade humana, sujeita a erros e acertos, as habilidades defendidas pela quinta competência são:

> (EM13MAT501) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau. (EM13MAT502) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$. (EM13MAT503) Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos da Matemática

> Financeira ou da Cinemática, entre outros. (EM13MAT504) Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras. (EM13MAT505) Resolver problemas sobre ladrilhamentos do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados, generalizando padrões observados. (EM13MAT506) Representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas. (EM13MAT507) Identificar e associar sequências numéricas (PA) a funções afins de domínios discretos para análise de propriedades, incluindo dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas. (EM13MAT508) Identificar e associar sequências numéricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos para análise de propriedades, incluindo dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas. (EM13MAT509) Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia, como a cilíndrica e a cônica. (EM13MAT510) Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando tecnologias da informação, e, se apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada. (EM13MAT511) Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, de eventos equiprováveis ou não, e investigar as implicações no cálculo de probabilidades. (EM13MAT512) Investigar propriedades de figuras geométricas, questionando suas conjecturas por meio da busca de contra exemplos, para refutá-las ou reconhecer a necessidade de sua demonstração para validação, como os teoremas relativos aos quadriláteros e triângulos (BRASIL, 2018, p. 533).

Constatamos que na BNCC não há citação direta de conteúdos a serem propostos no currículo do Ensino Médio, e sim as habilidades que devem ser instigadas, de modo a atender as diferentes competências, consideradas essenciais. Para atender essa demanda, novas práticas pedagógicas deverão ser praticadas pelos professores.

Pensando na nova organização curricular, articulada as proposições da BNCC, várias competências podem ser contempladas por diferentes habilidades, na abordagem de um mesmo conteúdo. A exemplo, o Binômio de Newton, que ao ser trabalhado, pode criar condições que colaboram para o desenvolvimento das seguintes habilidades: EM13MAT301, EM13MAT310, EM13MAT311, EM13MAT312 e EM13MAT315, contemplando, por sua vez, as competências 1, 2 e 3.

Outra possibilidade ao abordar o Binômio de Newton é o atendimento das habilidades EM13MAT301 e EM13MAT315, pois muitos problemas probabilísticos do componente curricular Matemática e áreas correlatas podem ser resolvidos através de ferramentas relacionadas a esse conteúdo.

Fugindo dos algoritmos pré-estabelecidos, dependendo da forma de apresentação do Binômio de Newton, é possível criar condições para que problemas sejam resolvidos por meio de estratégias diferenciadas e originais, levando o aluno a produzir seu próprio algoritmo e, portanto, propiciar o desenvolvimento de iniciativa e criatividade, contemplando as habilidades EM13MAT310, EM13MAT311, EM13MAT312.

1.3 PERSPECTIVAS SOBRE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

O conhecimento matemático é indissociável da realidade de cada indivíduo, e por isto, o ensino da Matemática deveria contribuir para a aquisição desse conhecimento. D´Ambrósio (1986, p. 36) atribui à Matemática o

> [...] caráter de uma atividade inerente ao ser humano, praticada com plena espontaneidade, resultante de seu ambiente sociocultural e consequentemente determinada pela realidade material na qual o indivíduo está inserido.

Por isso, é necessário repensar o processo ensino aprendizagem da Matemática, de modo que ela ofereça ao aluno capacidade para atribuição de sentidos e significados ao que aprende, deixando de lado o formalismo e abstração.

Nos PCN+, as orientações educacionais demonstram que a formação do educando não pode estar atrelada a reprodução do conhecimento, mas sim formar o educando para que o mesmo consiga

> [...] saber se informar, comunicar-se, argumentar, compreender e agir; enfrentar problemas de diferentes naturezas; participar socialmente, de forma prática e solidária; ser capaz de elaborar críticas ou propostas; e, especialmente, adquirir uma atitude de permanente aprendizado (BRASIL, 2002, p. 9).

As DCE de Matemática do Paraná corroboram com o proposto acima, enfatizando que o ensino deve estar associado à formação crítica do aluno, pois

> [...] almeja-se um ensino que possibilite aos estudantes análises, discussões, conjecturas, apropriação de conceitos e formulação de ideias. Aprende-se Matemática não somente por sua beleza ou pela consistência de suas teorias, mas, para que, a partir dela, o homem amplie seu conhecimento e, por conseguinte, contribua para o desenvolvimento da

> sociedade. [...] É necessário que o processo pedagógico em Matemática contribua para que o estudante tenha condições de constatar regularidades, generalizações e apropriação de linguagem adequada para descrever e interpretar fenômenos matemáticos e de outras áreas do conhecimento (PARANÁ, 2008, p. 48).

Observamos que é necessário atrelar o ensino da matemática com as necessidades instituídas nos documentos oficiais. Para tanto, o professor tem o papel fundamental para subsidiar essa tarefa, oferecendo aos alunos metodologias que possam despertar nos educados as aptidões propostas nas diretrizes.

Charnay (1996, p. 42) em texto introdutório do seu artigo intitulado “Aprendendo (com) a resolução de problemas”, discorre sobre a construção do conhecimento matemático dizendo que esta ciência se constrói por meio de respostas a “perguntas traduzidas em outros tantos problemas”, ou seja, de que todo conhecimento está alicerçado na atividade de buscar respostas a problemas.

Seguindo esta mesma linha, Polya (1997, p. 2) salienta que a capacidade de resolver problemas é inerente ao ser humano, e que a todo o momento, de certa forma, está buscando inspirações para elucidar as mais diferentes situações. Essa característica de “solucionador” de problemas nos torna únicos e quanto mais usamos essa habilidade, mais aptos estamos para enfrentar as intempéries do cotidiano.

Há uma convergência entre as ideias apresentadas até o momento: D`Ambrósio propõe a matemática como uma atividade inerente ao homem, Charnay expõe a construção do conhecimento baseado em respostas a perguntas, Polya destaca a resolução de problemas como ferramenta que nos torna mais inteligentes. Essas ideias, aliadas as proposições para o ensino da Matemática nos documentos oficiais, trazem a Resolução de Problemas como uma importante ferramenta para a construção de saberes do indivíduo, pois à medida que o aluno resolve problemas, produz conhecimento.

De acordo com Guérios e Junior (2016, p. 210), a partir da década de 1980, com as publicações do National Council of Teachers of Matemathics (NCTM)[11], a Resolução de Problemas foi evidenciada e considerada “um dos meios de fazer

---

[11] Conselho Nacional de Professores de Matemática – organização americana não governamental de estudos relacionados à Educação Matemática.

matemática, constituindo-se assim em estratégia para seu ensino", pois resolver problemas

> [...] significa envolver-se em uma tarefa ou atividade cujo método de solução não é conhecido imediatamente. Para encontrar uma solução, os estudantes devem aplicar seus conhecimentos matemáticos. Solucionar problemas não é apenas buscar aprender Matemática e, sim, fazê-la. Os estudantes deveriam ter oportunidades frequentes para formular, tentar e solucionar problemas desafiadores que requerem uma quantidade significativa de esforço e deveriam, então, ser encorajados a refletir sobre seus conhecimentos. Assim, solucionar problemas não significa apenas resolvê-los, mas aplicar sobre eles uma reflexão que estimule seu modo de pensar, sua curiosidade e seus conhecimentos. (ROMANATTO, 2012, p. 302).

Neste trabalho trazemos três perspectivas que a Resolução de Problemas pode assumir no processo ensino aprendizagem de Matemática. Estas perspectivas também são consideradas na grande maioria dos trabalhos que se reportam a Resolução de Problemas na Educação Matemática. Nos trabalhos de Branca (1997), Bonilha e Vidigal (2016), Onuchic e Allevato (2011), encontramos fundamentos que caracterizam cada uma das perspectivas: ensinar *sobre* a Resolução de Problemas; ensinar *para* resolver problemas e ensinar *através* da Resolução de Problemas.

Ensinar sobre a Resolução de Problemas está intimamente atrelada aos estudos dos trabalhos de George Polya[12], um dos pioneiros em pesquisas sobre a temática. Nesta concepção, tem-se a Resolução de Problemas como um objeto de estudo, e por isso, a Resolução de Problemas é concebida como um conjunto de técnicas e procedimentos, que empregados, elucidam uma problemática.

Allevato (2005, p. 52) cita que ao ensinar sobre a Resolução de Problemas "o aluno é privado da oportunidade de descobrir por si só", pois acaba por reproduzir procedimentos e estratégias, limitando-os a pensar.

Na concepção de ensinar Matemática para a Resolução de Problemas, segundo Redling (2011), Onuchic e Allevato (2011), se estabelece que os conteúdos matemáticos devem ser apresentados pelo professor, que explora conceitos e mostra aplicações por meio de exemplos. Aos alunos cabe utilizá-los na resolução de atividades, que são denominadas como atividades de fixação de aprendizagem

---

[12]Na obra intitulada "How to solve it?", tradução literal: Como resolver isso?, publicada em 1945, o autor descreve métodos de resolução de problemas. A versão em português tem o título "A Arte de Resolver Problemas".

ou verificadores de aprendizagem.

Uma das fragilidades desta concepção, de acordo com Redling (2011, p. 30), está em “ver a Resolução de Problemas apenas como uma atividade que os alunos só podem realizar depois da introdução de um novo conceito ou depois de praticar certas habilidades”.

Onuchic (1999) discorre que ensinar o aluno para resolver problemas não garante a compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos, mesmo que a resolução seja feita corretamente. Com isso, é comum observar o insucesso dos alunos que não compreendem com solidez e profundidade os conceitos matemáticos. Nota-se, portanto, nesta concepção a manutenção do ensino tradicional[13], com foco na transmissão de conteúdos para que esses, por sua vez, subsidiem a Resolução de Problemas.

Ensinar através da Resolução de Problemas, para Onuchic e Allevato (2011) caracteriza a Resolução de Problemas como uma metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação. Nesta perspectiva, o problema é a premissa para a construção do conhecimento, construindo de forma orgânica os saberes, oportunizando aos indivíduos o desenvolvimento de habilidades, ao ponto que os mesmos, de acordo com as autoras, são inseridos num espaço de construção de métodos e argumentações para as problemáticas, tornando-se, dessa forma, geradores de seu próprio conhecimento.

Assumindo essa concepção como metodologia de ensino, espera-se que o aluno “possa se inserir no mundo do conhecimento e do trabalho” (BONILHA e VIDIGAL, 2016, p. 10), atendendo o que se preconiza nas diretrizes curriculares nacional e estadual, como visto na Seção 1.2, que enfatizam que ao resolver problemas o aluno é estimulado a questionar

> [...] sua própria resposta, o problema, a transformar um dado problema numa fonte de novos problemas, a formular problemas a partir de determinadas informações, [...], evidencia uma concepção de ensino e aprendizagem não pela mera reprodução de conhecimentos, mas pela via da ação refletida que constrói conhecimentos (BRASIL, 1998, p. 42).

[13] A perspectiva de ensino tradicional pode ser caracterizada pela tendência de centralizar no professor o papel de detentor do conhecimento, assumindo a função de transmiti-lo ao aluno, este visto como um receptor de saberes, ao qual cabe ouvir, repetir, memorizar e obedecer de forma passiva, sem qualquer tipo de questionamento.

Desta forma, ao partirmos de problemas para ensinar Matemática, estaremos incentivando a abertura de espaço para o desenvolvimento de habilidades que favorecem a reflexões, questionamentos, suposições, conclusões, conexões com outras áreas do conhecimento, argumentações para validação de seus achados, contrapondo-se ao ensino tradicional.

> Se for gerada no aluno a atitude de procurar respostas para suas próprias perguntas problemas, se ele se habilitar a questionar-se ao invés de receber somente respostas já elaboradas por outros, seja pelo livro-texto, pelo professor ou pela televisão. O verdadeiro objetivo final da aprendizagem da solução de problemas é fazer com que o aluno adquira o hábito de propor-se problemas e resolve-los como forma de aprender (ECHEVERRIA e POZO, 1998, p.15).

Outra característica desta concepção, conforme expõem Bonilha e Vidigal (2016, p. 12) é “a não separação entre conteúdo e metodologia”. Ao selecionar um problema, o professor não focará apenas no conteúdo em questão, mas analisará as diferentes habilidades que o aluno desenvolve durante a resolução de um problema, tais como,

> leitura e interpretação do problema, análise de dados [...], estabelecimento de estratégia, tomada de decisão e execução, assim como avaliação da resposta obtida para [...] reconhecer erros ou faltas e recomeçar o processo de resolução (BONILHA e VIDIGAL, 2016, p.13).

Flemming, Luz e Mello (2005) discorrem que o papel do professor que concebe a Resolução de Problemas como perspectiva metodológica, ou seja, ensina Matemática através da Resolução de Problemas, é planejar a escolha de problemas e pensar em questionamentos que guiarão a análise da questão, motivando os alunos para que, vencidas as etapas resolutivas, haja de fato uma aprendizagem sólida, no sentido de que os conhecimentos adquiridos sejam passíveis de aplicações a temas atuais, promovam a integração de saberes, fomentando a formação para a cidadania.

Também, é responsabilidade do professor, prover

> [...] um clima educativo que favoreça a confiança de cada aluno em suas próprias capacidades de aprendizagem, em seu próprio critério, em que não temam enganar-se, mudar de opinião ao raciocinar ou dizer “não sei”; um ambiente em que se tenha prazer com os desafios e com a própria atividade intelectual; em que se avaliem os processos e os progressos de cada aluno e não somente suas respostas; em que se examine mais de um ponto de

> vista para abordar ou solucionar um problema; em que se formulem perguntas pertinentes em torno das situações e se cuidem as generalizações (VILA e CALLEJO, 2006, p. 29).

De modo a respaldar a utilização da Resolução de Problemas como metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação, reproduzimos de Onuchic e Allevato (2011, p. 82), as razões para implementá-la

> • Resolução de problemas coloca o foco da atenção dos alunos sobre as ideias matemáticas e sobre o dar sentido. • Resolução de problemas desenvolve poder matemático nos alunos, ou seja, capacidade de pensar matematicamente, utilizar diferentes e convenientes estratégias em diferentes problemas, permitindo aumentar a compreensão dos conteúdos e conceitos matemáticos. • Resolução de problemas desenvolve a crença de que os alunos são capazes de fazer matemática e de que a Matemática faz sentido; a confiança e a auto-estima dos estudantes aumentam. • Resolução de problemas fornece dados de avaliação contínua, que podem ser usados para a tomada de decisões instrucionais e para ajudar os alunos a obter sucesso com a matemática. • Professores que ensinam dessa maneira se empolgam e não querem voltar a ensinar na forma dita tradicional. Sentem-se gratificados com a constatação de que os alunos desenvolvem a compreensão por seus próprios raciocínios. • A formalização dos conceitos e teorias matemáticas, feita pelo professor, passa a fazer mais sentido para os alunos.

Percebemos que nessa perspectiva metodológica deve haver uma mudança de postura do aluno, que deixa de ser um mero receptor de conhecimento e passa a ser responsável pelo conhecimento que deve atingir. Ao professor, cabe guiar o processo formativo do aluno, oferecendo problemas que tenham potencial para isso. Assim, os problemas são tidos como um meio de ensino de Matemática.

1.3.1 Classificação de Problemas

Inicialmente, a fim de tecermos reflexões sobre a categorização de problemas proposta por Dante (2000), cabe refletirmos sobre o que consideramos problema, ou seja, defini-lo na seara da Matemática. Bonilha e Vidigal (2016, p. 12) consideram problemas como situações que “permitam o processo investigativo”. Já, para Vila e Callejo (2006, p. 6) problema é uma “proposta com finalidade educativa, que propõe uma questão matemática, cujo método de solução não é imediatamente acessível ao aluno/resolvedor”.

Para Onuchic (1999, p. 215) problema "[...] é tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em resolver", salientando que o problema não é uma atividade que requer a aplicação mecânica de um algoritmo e isso que lhe diferencia de um exercício.

Ao buscar as definições para a terminologia problema na literatura, observamos que há uma gama de significações muitas vezes atreladas, pelos autores das mesmas, as concepções de Resolução de Problemas vistas anteriormente.

Isso expõe a dificuldade de assumir a validade de uma única definição para problemas matemáticos, entretanto a fim de guiar nossa pesquisa, adotamos como problema matemático o conceito de Dante (2000, p. 10) que é “qualquer situação que exija a maneira matemática de pensar e conhecimentos matemáticos para solucioná-la”

De modo a auxiliar os docentes na escolha de problemáticas que enriqueçam o processo ensino aprendizagem, possibilitando harmonizar os objetivos traçados para determinado conteúdo as expectativas de aprendizagem dos mesmos, diferentes autores apresentam várias classificações[14] aos problemas matemáticos: Huete e Bravo (2006); Rabelo (2002); Echeverría e Pozo (1998); Polya (1978), Smole e Diniz (2001), Butts (1997), Dante (2000).

De acordo com Allevato (2005, p. 42) as classificações propostas pelos autores estão atreladas as concepções da Resolução de Problemas, discutidas anteriormente, ou seja, as concepções “são determinadas, em grande parte pelo tipo de problema proposto e reciprocamente”. Observamos que existem convergências entre as diferentes formas de classificar os problemas, sendo que, muitas vezes, de um autor para outro, o que muda na classificação é a denominação do tipo de problema, mantendo-se a caracterização.

Para nortear a classificação das atividades apresentadas pelos segundos volumes das coleções de livros didáticos aprovadas no PNLD 2015 e no PNLD 2018, diante das diferentes classificações que um mesmo problema pode assumir,

[14] CORA (2019) em sua dissertação de mestrado intitulada “ANÁLISE DA INSERÇÃO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS IDENTIFICADA EM LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA DO ENSINO FUNDAMENTAL” discorre sobre as diferentes classificações para os problemas matemáticos e as relações entre as concepções da Resolução de Problemas.

optamos pela categorização de problemas propostas por Dante (2000), presente no livro “Didática da Resolução de Problemas de Matemática”.

Escolhemos o autor por ser um dos escritores brasileiros de referência da Educação Matemática quando se trata da Resolução de Problemas e responsável pela autoria de vários livros didáticos.

Além disso, os objetivos da utilização da Resolução de Problemas no ensino da Matemática descritos pelo autor remeterem aos pressupostos explicitados nos documentos oficiais que regem a educação brasileira apresentados na Seção 1.2. Esses objetivos são:

> Fazer o aluno pensar produtivamente; [...] Desenvolver o raciocínio do aluno; [...] Ensinar o aluno a enfrentar situações novas; [...] Dar ao aluno a oportunidade de se envolver com as aplicações da matemática; [...] Equipar o aluno com estratégias para resolver problemas; [...] Dar uma boa base matemática às pessoas. (DANTE, 2000, p.11-15).

Da Seção 1.2 reproduzimos os aspectos dirigidos ao ensino da Matemática no Ensino Médio. Em BRASIL (2002) observamos que essa etapa formativa da Educação Básica é voltada para o desenvolvimento das seguintes competências: representação e comunicação, investigação e compreensão, contextualização das ciências no âmbito sociocultural.

Essas competências estão diretamente relacionadas aos objetivos descritos por Dante, pois a representação e comunicação refere-se ao desenvolvimento da capacidade de ler, produzir e interpretar textos em diferentes linguagens e remete ao último objetivo da Resolução de Problemas ainda descrito por Dante. A esse mesmo objetivo podemos associar a competência contextualização das ciências no âmbito sociocultural, que remete a capacitação do aluno para relacionar a Matemática desenvolvida nos bancos escolares com a realidade, aplicando métodos matemáticos, conceitos históricos, entre outros.

A competência investigativa e de compreensão está relacionada a tornar o educando capaz de compreender e interpretar problemas, buscando estratégias de resolução, fazer conjecturas, esboçar, produzir e validar argumentos e podemos associa-lá aos quatro primeiros objetivos da Resolução de Problemas, expostos por Dante.

Constatamos também que o letramento matemático, habilidade a ser complementada no Ensino Médio proposta na BNCC (BRASIL, 2018), está intimamente associado aos objetivos da Resolução de Problemas sugeridos por Dante. Essa habilidade prevê para os educandos o desenvolvimento

> competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas. BRASIL (2018, p. 522).

Frisamos que o conhecimento do professor sobre os tipos de problemas e os objetivos dos mesmos é crucial para desencadear o ensino da Matemática de modo mais atrativo, pois, dependendo da problemática, é oportunizado espaço para que os alunos aprendam e reflitam sobre os contextos em que estão inseridos.

Apresentamos da obra de Dante (2000, p. 16-21) os seis tipos de problemas descritos por ele e suas especificidades:

- Exercícios de reconhecimento: objetivam o reconhecimento, identificação ou recordação de um conceito, definição ou propriedade;
- Exercícios de algoritmos: visam treinar a execução de algum algoritmo de modo a reforçar conhecimentos, ou seja, “podem ser resolvidos passo a passo”;
- Problemas-padrão: utilizados ao término de capítulos nos livros permitem relembrar e/ou fixar conteúdos, e não envolve o desenvolvimento de nenhum tipo de estratégia, apenas a aplicação de um ou mais algoritmo, entretanto exigem que a linguagem usual seja transformada em linguagem matemática;
- Problemas-processo ou heurísticos: abrange problemas em que as operações não estão explícitas no enunciado, requerendo, portanto, o traçado de estratégia para solucioná-lo;
- Problemas de aplicação ou situações problema: caracterizam-se pela utilização de situações reais para moldá-lo e necessitam de levantamento de dados para resolução. Comumente usados em trabalhos interdisciplinares ou em projetos;
- Problemas de quebra-cabeça: são problemas que não possuem solução

evidente, envolvendo e desafiando os alunos para que busquem solução, que depende de algum artifício.

Ao analisarmos os três primeiros tipos de problemas propostos por Dante (2000), percebemos, nos objetivos descritos, que estes se configuram como atividades de "prática" de algoritmos e recordação/fixação de conceitos matemáticos, ou seja, exercícios, que para Dante (2000, p. 43) "servem para exercitar, para praticar um determinado algoritmo ou processo. O aluno lê o exercício e extrai as informações necessárias para praticar uma ou mais habilidades algorítmicas".

Os exercícios de reconhecimento, exercícios de algoritmos e problemas padrão precisam ser usados racionalmente para que o ensino de Matemática não tenha caráter mecânico, ante a construção sólida de conceitos.

Já os problemas processo, de aplicação e quebra-cabeças tornam-se importantes aliados ao ensino da Matemática, pois inserem os alunos num contexto real, despertando o interesse e exprimindo significado às questões matemáticas que despontam das situações.

De acordo com Dante (2000), independente do tipo de problema que for apresentado para o aluno, é importante que os mesmos sejam instigados a buscar soluções evitando experiências repetitivas. Cabe, portanto, ao professor, a função de oferecer a maior variedade de problemas, que possuam linguagem adequada e apropriada a vivência dos alunos.

Nesse sentido, à medida que se insere e se aprofunda o aluno na Resolução de Problemas, observamos que a mesma pode desencadear a capacidade investigativa e criativa do aluno em busca de soluções para as problemáticas que o rodeia e corrobora para a autonomia na busca do conhecimento.

Em seguida, apresentamos o referencial teórico sobre o conteúdo matemático Binômio de Newton e temas relacionados.

1.4 BINÔMIO DE NEWTON

Para a construção desta seção, consideramos conhecidos os métodos de contagem: definições correlatas, propriedades e processos operatórios, objetos de estudo da Análise Combinatória, tais como: Fatorial (n!), Permutações Simples $\left(P_n = n!\right)$, Arranjos Simples $\left(A_{n,p} = \dfrac{n!}{(n-p)!}\right)$ e Combinações Simples $\left(C_{n,p} = \dfrac{n!}{(n-p)!.p!}\right)$.

1.4.1 Números binomiais ou coeficientes binomiais

<u>Definição 1</u>: *Consideramos dois números naturais n e p, com n ≥ p. Denominamos número binomial ou coeficiente binomial de n sobre p, denotado por* $\binom{n}{p}$*, o número dado por* $\dfrac{n!}{(n-p)!.p!} = \binom{n}{p} = C_{n,p}$*. O termo n é denominado de numerador e p de denominador.*

<u>Exemplo 1</u>:

i) $\binom{12}{8} = \dfrac{12!}{(12-8)!.8!} = \dfrac{12!}{4!.8!} = 495$;

ii) $\binom{5}{2} = \dfrac{5!}{(5-2)!.2!} = \dfrac{5!}{3!.2!} = 10$.

Note que:

i) $\binom{n}{n} = \dfrac{n!}{(n-n)!.n!} = \dfrac{n!}{0!.n!} = 1$;

ii) $\binom{n}{0} = \dfrac{n!}{(n-0)!.0!} = \dfrac{n!}{n!.1} = 1$ e

iii) $\binom{n}{1} = \dfrac{n!}{(n-1)!.1!} = \dfrac{n.(n-1)!}{(n-1)!.1!} = n$.

Definição 2: *Dados dois números binomiais de mesmo numerador n. Denominamos números binomiais complementares aqueles em que a soma dos denominadores é igual ao numerador, ou seja,* $\binom{n}{p}$ *e* $\binom{n}{n-p}$ *são números binomiais complementares.*

Propriedade 1: *Dois números binomiais* $\binom{n}{p}$ *e* $\binom{n}{q}$ *são complementares, então* $\binom{n}{p} = \binom{n}{q}$.

Demonstração: Sendo $\binom{n}{p}$ e $\binom{n}{q}$ números complementares, n = p + q, ou seja, p = n - q, assim:

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-q} = \frac{n!}{(n-q)!.[(n-(n-q)]!} = \frac{n!}{(n-p)!.q!} = \binom{n}{q} \ldots\ldots\ldots\ldots \blacksquare$$

Exemplo 2:

$\binom{8}{5}$ e $\binom{8}{3}$ são números binomiais complementares, pois $\binom{8}{5} = \frac{8!}{(8-5)!.5!}$.= $\frac{8!}{3!.5!} = \binom{8}{3} = \frac{8!}{(8-3)!.3!} = \frac{8!}{5!.3!} = 56$

Na próxima seção, definimos o Triângulo de Pascal, seu histórico e enunciamos e demonstramos suas propriedades.

1.4.2 Triângulo Aritmético de Pascal ou Triângulo de Tartaglia

Definição 3: *Denominamos Triângulo Aritmético de Pascal*[15] *ou Triângulo de*

[15]Blaise Pascal (1623-1662), matemático, filósofo e físico francês.

Tartaglia[16] *a tabela triangular infinita, onde estão organizados coeficientes binomiais, de modo que nas linhas estão dispostos números binomiais de mesmo numerador, iniciando em zero, e nas colunas apresentam-se números binomiais de mesmo denominador, iniciando em zero e estende-se até que o denominador se iguale ao numerador.*

Com base na Definição 3, no Triângulo Aritmético de Pascal, temos que:

- a 1ª linha contém o coeficiente binomial com numerador n = 0;
- a 2ª linha contém o coeficiente binomial com numerador n = 1;
- a 3ª linha contém o coeficiente binomial com numerador n = 2;
- a nª linha contém o coeficiente binomial com numerador n = n; conforme apresentamos na Figura 1.

	Coluna 0	Coluna 1	Coluna 2	Coluna 3	Coluna 4	...	...	Coluna p-1	Coluna n-1	Coluna n
Linha 0	$\binom{0}{0}$									
Linha 1	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$								
Linha 2	$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$							
Linha 3	$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$						
Linha 4	$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$					
⋮										
Linha n-1	$\binom{n-1}{0}$	$\binom{n-1}{1}$	$\binom{n-1}{2}$	$\binom{n-1}{3}$	$\binom{n-1}{4}$	...	...	$\binom{n-1}{p-1}$	$\binom{n-1}{n-1}$	
Linha n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	...	...	$\binom{n}{p-1}$	$\binom{n}{n-1}$	$\binom{n}{n}$

Figura 1: O Triângulo Aritmético de Pascal expresso por números binomiais.
Fonte: Elaboração própria.

[16]Niccoló Fontana Tartaglia (1500-1557), matemático italiano.

Calculando os respectivos valores dos números binomiais, obtemos a representação para o Triângulo de Pascal, exposta na Figura 2.

	Coluna 0	Coluna 1	Coluna 2	Coluna 3	Coluna 4	...	...	Coluna p-1	Coluna n-1	Coluna n
Linha 0	1									
Linha 1	1	1								
Linha 2	1	2	1							
Linha 3	1	3	3	1						
Linha 4	1	4	6	4	1					
⋮										
Linha n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	...	...	$\binom{n}{p-1}$	$\binom{n}{n-1}$	$\binom{n}{n}$

Figura 2: Triângulo Aritmético de Pascal com respectivos valores dos números binomiais.
Fonte: Elaboração própria.

1.4.2.1 Breve Histórico do Triângulo Aritmético de Pascal

Os estudos referentes ao Triângulo Aritmético de Pascal estão registrados a mais de dois mil anos. De acordo com Rosadas (2016, p. 15), um triângulo similar foi produzido pelo matemático indiano Pingala[17], na sua obra “Chandra Sutra” em 200 a.C que relacionava um “sistema numérico binário em conexão à listagem das métricas védicas com uso de sílabas longas e curtas”, aproximado ao que conhecemos hoje do método binomial.

Embasado no conhecimento dos indianos, Rosadas (2016) salienta que o matemático islâmico Al Samaw’al, em sua obra “A deslumbrante álgebra” discorre sobre os trabalhos de Al-karaji[18], expondo que este se utilizou do Triângulo Aritmético para desenvolvimento de binômios elevados a potências de grau 2, 3 e 4, além de demonstrar por indução matemática o Binômio de Newton.

[17] De acordo com Sobral (2015), Pingala viveu no século III a.C. e deixou muitas contribuições à Matemática, tendo descrito um sistema binário que foi refinado por Leibniz, no século XVII.
[18] Al-karaji (953-102), matemático islâmico.

No século XIII, o matemático chinês Yang Hui[19], de acordo com Boyer (1996), dedica aos estudos de somas de séries com o Triângulo Aritmético de Pascal, além de configurá-lo ao modo mais usual de apresentação que vemos na atualidade (forma triangular).

Rosadas (2016) expõe que, na Europa, o Triângulo Aritmético de Pascal foi publicado pela primeira vez no livro "*Kauffmanns Rechnung*" de 1527, do matemático alemão Apianus[20]. Na obra *"Arithmetica Integra*", de 1544, o matemático Michel Stifel[21] estudou e apresentou algumas propriedades do Triângulo.

Niccoló Fontana Tartaglia, no século XVI, despendeu muito tempo nos estudos ao Triângulo Aritmético de Pascal, sendo responsável por elaborar tabela com o número de combinações possíveis num lançamento de um dado. De acordo com Rosadas (2016), Tartaglia reivindicou a invenção do Triângulo Aritmético. Por isso, é comumente chamado também de Triângulo de Tartaglia.

Na França o matemático Blaise Pascal, no século XVII, além de tanto outros trabalhos no campo da Matemática, Física, Filosofia e Teologia, investigou várias propriedades do Triângulo Aritmético de Pascal. De acordo com Affonso (2014, p. 20) essas propriedades foram publicadas, postumamente, em 1665, na obra *"Traité di Triangle Arithmétique"*.

Além das propriedades, Blaise Pascal apresentou uma construção diferenciada do Triângulo Aritmético de Pascal, conforme Figura 3. De acordo com Pulskamp (2009, p. 1, tradução nossa), Pascal construiu o Triângulo Aritmético da seguinte maneira

> [...] de um ponto G, qualquer, desenho duas retas GV e Gζ, uma perpendicular a outra, e, sobre cada uma dessas, tomo tantas partes próximas iguais que se quiser, começando em G, nomeando-as 1, 2, 3, 4, e assim sucessivamente; esses números são os expoentes das divisões da reta[22].

---

[19] Yang Hui (1238-1298), matemático chinês.
[20] Petrus Apianus (1495-1552), matemático alemão.
[21] Michael Stifel (1486-1567), matemático alemão.
[22]“I draw from many point, G, Fig. 1, two perpendicular lines the one to the other, GV, Gζ, from each of which I take as many as I wish of equal and contiguous parts, beginning with G, that I name 1, 2, 3, 4, etc.; and these numbers are the exponents of the divisions of the lines.”.

Figura 3: Construção do Triângulo Aritmético de Pascal apresentada por Blaise Pascal – Fragmento do Livro "*Traité di Triangle Arithmétique".*
Fonte: Ciência de Garagem (2018).

Affonso (2014, p. 23) discorre que as aplicações das propriedades do Triângulo Aritmético de Pascal foram apresentadas nos seguintes obras de Blaise Pascal: "Às ordens numéricas", "As combinações", "Para determinar as partes que cada jogador deve receber quando dois jogadores fazem várias partidas" e "Para achar as potências de binômios e de apótomos (diferença entre duas razões incomensuráveis)".

A denominação mais usual do Triângulo Aritmético de Pascal ou simplesmente Triângulo de Pascal, teve origem em 1730, quando, de acordo com Affonso (2014, p. 23), Abrahan de Moivre[23] em "sua importante e influente obra *"Miscellanea analytica de serie bus et quadraturis"* usou a denominação *"Triangulum Arithmeticum Pascalianum"* para referir-se ao Triângulo Aritmético".

1.4.2.2 Propriedades do Triângulo Aritmético de Pascal

As propriedades do Triângulo Aritmético de Pascal são de grande utilidade para a construção do mesmo. Nesta seção, apresentamos e demonstramos as

[23] Abrahan de Moivre (1667-1754), matemático francês.

propriedades comumente utilizadas. Algumas propriedades serão demonstradas por meio de diferentes métodos de demonstração, possibilitando ao leitor a escolha do método que julgar mais elementar e adequado ao nível de ensino em que for utilizá-lo.

<u>Propriedade 2</u>: *Em cada linha do Triângulo de Pascal, o primeiro elemento* $\binom{n}{0}$ *e o último elemento* $\binom{n}{n}$ *são iguais a 1,* $\forall\, n \in IN$.

Demonstração: Observe que $\binom{n}{0} = \frac{n!}{(n-0)!\,.\,0!} = \frac{n!}{n!\,.\,1} = 1$ e $\binom{n}{n} = \frac{n!}{(n-n)!\,.\,n!} = \frac{n!}{0!\,.\,n!} = 1$. Logo, $\binom{n}{0} = \binom{n}{n}$..■

<u>Propriedade 3 (Números Binomiais Complementares)</u>: *Em uma mesma linha do Triângulo de Pascal, os coeficientes binomiais equidistantes dos extremos são iguais.*

Demonstração: Sejam $\binom{n}{p}$ e $\binom{n}{n-p}$ números binomiais de uma linha n do Triângulo de Pascal, equidistantes dos extremos. Note que $\binom{n}{p}$ é precedido de p elementos: $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$, ... , $\binom{n}{p-1}$ e que $\binom{n}{n-p}$ é sucedido de p elementos: $\binom{n}{n-p+1}$, $\binom{n}{n-p+2}$, ..., $\binom{n}{n}$. Assim, $\binom{n}{n-p} = \frac{n!}{[n-(n-p)]!.(n-p)!} = \frac{n!}{(n-p)!.p!} = .\binom{n}{p}$...............................■

<u>Exemplo 3</u>: Observe a linha 4 do Triângulo de Pascal, Figura 1:

Os números binomiais $\binom{4}{0}$; $\binom{4}{1}$; $\binom{4}{2}$; $\binom{4}{3}$ e $\binom{4}{4}$ equivalem respectivamente aos números 1, 4, 6, 4, 1. Note que: $\binom{4}{0}$ = $\binom{4}{4}$ = 1, pois 4 = 0 + 4, ou seja, $\binom{4}{0}$ e $\binom{4}{4}$ são números binomiais complementares, e $\binom{4}{1}$ = $\binom{4}{3}$ = 4, pois 4 = 1 + 3, ou seja, $\binom{4}{1}$ e $\binom{4}{3}$ são números binomiais complementares.

Observação 1: Alguns autores descrevem essa propriedade da seguinte forma: o Triângulo de Pascal apresenta simetria em relação à altura. Na Figura 4 observamos claramente a Propriedade 3.

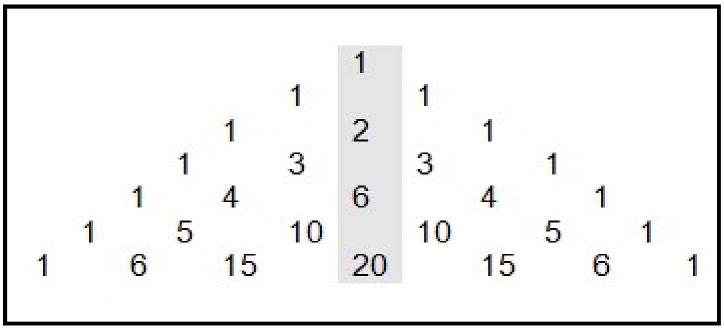


Figura 4: Triângulo de Pascal disposto na forma de pirâmide, evidenciando a simetria em relação à altura.
Fonte: Elaboração própria.

<u>**Propriedade 4**</u>**:** *No Triângulo Aritmético de Pascal, o segundo e o penúltimo elemento de cada linha são iguais a própria ordem da linha, ou seja, para cada n* $\in$ *IN,* $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$.

Demonstração: Seja n $\in$ IN. Pela definição de número binomial temos:

$\binom{n}{1} = \dfrac{n!}{1!.(n-1)!} = \dfrac{n.(n-1)!}{1!.(n-1)!}$ = n. Resta provar que $\binom{n}{n-1}$ = n. Novamente, pela definição de número binomial: $\binom{n}{n-1} = \dfrac{n!}{(n-1)!.(n-n+1)!} = \dfrac{n!}{1!.(n-1)!} = \dfrac{n.(n-1)!}{(n-1)!}$ = n. Portanto, $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1}$ = n...■

<u>Propriedade 5 (Relação de Stifel):</u> *Com exceção do primeiro e do último, cada número binomial, a partir da 2ª linha do Triângulo Aritmético de Pascal, é dado pela soma dos dois números binomiais consecutivos da linha imediatamente acima dele, ou seja,* $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$, *com* $n \geq 2$.

Demonstração: Sejam $\binom{n-1}{p-1}$ e $\binom{n-1}{p}$ dois números binomiais consecutivos. Pela definição de número binomial:

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \frac{(n-1)!}{(p-1)!.(n-p)!} + \frac{(n-1)!}{p!.(n-p-1)!}$$

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \frac{[p.(n-1)]! + (n-p).(n-1)!}{p!.(n-p)!}$$

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \frac{[p+(n-p)].(n-1)!}{p!.(n-p)!}$$

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \frac{n.(n-1)!}{p!.(n-p)!}$$

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \frac{n!}{p!.(n-p)!}$$

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \blacksquare$$

A Propriedade 5 permite construir rapidamente o Triângulo Aritmético, pois, somando dois termos lado a lado no Triângulo de Pascal, obtém-se o termo situado embaixo do termo da direita.

<u>Exemplo 4</u>: Na Figura 5, observamos que:

i) $\binom{1}{0} + \binom{1}{1} = \binom{2}{1} = 1 + 1 = 2$;

ii) $\binom{5}{1} + \binom{5}{2} = \binom{6}{2} = 5 + 10 = 15$;

iii) $\binom{7}{4} + \binom{7}{5} = \binom{8}{5} = 35 + 21 = 56.$

1								
1	1							
1	2	1						
1	3	3	1					
1	4	6	4	1				
1	5	10	10	5	1			
1	6	15	20	15	6	1		
1	7	21	35	35	21	7	1	
1	8	28	56	70	56	28	8	1

Figura 5: Exemplificação da Relação de Stifel.
Fonte: Elaboração própria.

<u>**Propriedade 6 (Teorema das Linhas)**</u>: *A soma de todos os elementos da n-ésima linha é sempre igual a 2 elevado ao número associado a linha, ou seja,* $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$.

Demonstração: i) Pelo Método da Indução Finita[24]:

Seja $S_{(n)} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$, $n \geq 0$. Para n = 0, temos que $S_{(0)} = \binom{0}{0} = 1 = 2^0$. Para n = 1, temos $S_{(1)} = \binom{1}{0} + \binom{1}{1} = 1 + 1 = 2 = 2^1$. Suponhamos agora que a proposição $S_{(n)}$ é verdadeira para n = 0, 1, 2, 3, ..., k. Devemos mostrar que $S_{(n)}$ é válida para n = k+1, isto é, $S_{(k+1)} = \binom{k+1}{0} + \binom{k+1}{1} + \binom{k+1}{2} + \ldots + \binom{k+1}{k+1} = 2^{k+1}$.

Temos que $S_{(k+1)} = \binom{k+1}{0} + \binom{k+1}{1} + \binom{k+1}{2} + \ldots + \binom{k+1}{k} + \binom{k+1}{k+1}$. Aplicando a Relação de Stifel (Propriedade 5), da segunda parcela da soma até a penúltima, e

[24] Para saber mais sobre o Método da Indução Finita consulte: MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. **Matemática Discreta**: Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2014.

sabendo que $\binom{k+1}{0} = \binom{k}{0}$ e $\binom{k+1}{k+1} = \binom{k}{k}$, observamos que: $S_{(k+1)} = \binom{k}{0} + \binom{k}{0} + \binom{k}{1} + \binom{k}{1} + \binom{k}{2} + \binom{k}{2} + \binom{k}{3} + ... + \binom{k}{k-1} + \binom{k}{k} + \binom{k}{k}$,ou seja, $S_{(k+1)} = \binom{k}{0} + \binom{k}{1} + \binom{k}{2} + ...+ \binom{k}{k} + \binom{k}{0} + \binom{k}{1} + \binom{k}{2} + ... + \binom{k}{k}$.

$S_{(k+1)} = 2.S_k$. Como, por hipótese, $S_k = 2^k$, então:

$S_{(k+1)} = 2.\ 2^k = 2^{k+1}$ Logo, $S_{(k+1)}$ é verdadeira e concluímos, pelo Método da Indução Finita, que $S_{(n)}$ é verdadeira para todo $n \in$ IN. ....■

ii) Pelo Teorema Binomial (Teorema 1): Temos que $2^n = (1 + 1)^n$. Desta forma, $(1 + 1)^n = \binom{n}{0}.1^n.1^0 + \binom{n}{1}.1^{n-1}.1^1 + ... + \binom{n}{k}.1^{n-k}.1^k + ... + \binom{n}{n}.1^0.1^n$. Como $1^n = 1$, $\forall\ n \in$ IN, então: $(1 + 1)^n = 2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + ... + \binom{n}{k} + ...+ \binom{n}{n}$, como queríamos demonstrar...■

<u>Exemplo 5</u>: Na Figura 6, evidenciamos o Teorema das Linhas (Propriedade 6). Tomando a soma dos termos da linha n = 6 do Triângulo de Pascal, temos que:

$\binom{6}{0} + \binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6} = 1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 64 = 2^6$.

1									→	2^0
1	1								→	2^1
1	2	1							→	2^2
1	3	3	1						→	2^3
1	4	6	4	1					→	2^4
1	5	10	10	5	1				→	2^5
1	6	15	20	15	6	1			→	2^6
1	7	21	35	35	21	7	1		→	2^7
1	8	28	56	70	56	28	8	1	→	2^8

Figura 6: Exemplificação do Teorema das Linhas.
Fonte: Elaboração própria.

<u>Propriedade 7 (Teorema das Colunas)</u>: *A soma dos elementos de qualquer coluna do Triângulo de Pascal, começando do primeiro elemento da coluna, tem o mesmo valor que o elemento que se encontra na linha e coluna imediatamente posterior ao último número binomial da soma, ou seja,* $\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} + ... + \binom{n+k}{n} = \binom{n+k+1}{n+1}$.

Demonstração: i) Usando a Relação de Stifel (Propriedade 5): Observe que $\binom{n}{n}$ = 1, $\forall$ n $\in$ IN. Aplicando a Relação de Stifel (Propriedade 5) aos elementos da coluna n + 1, a partir da linha n + 2, temos:

$$\binom{n+1}{n+1} = \binom{n}{n};$$

$$\binom{n+2}{n+1} = \binom{n+1}{n+1} + \binom{n+1}{n};$$

$$\binom{n+3}{n+1} = \binom{n+2}{n+1} + \binom{n+2}{n};$$

$$\vdots$$

$$\binom{n+k}{n+1} = \binom{n+k-1}{n+1} + \binom{n+k-1}{n};$$

$$\binom{n+k+1}{n+1} = \binom{n+k}{n+1} + \binom{n+k}{n}.$$

Fazendo a soma telescópica, obtemos:

$\binom{n+k+1}{n+1} = \binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} + ... + \binom{n+k}{n}$, como queríamos demonstrar......■

ii) Pelo Método da Indução Finita: Utilizando o Método da Indução Finita sobre k, fixando n $\in$ IN.

Para k = 0, pois: $\binom{n}{n} = \binom{n+k+1}{n+1} = \binom{n+0+1}{n+1} = \binom{n+1}{n+1}$. Suponhamos agora o resultado válido para k = p, ou seja, que seja válida a igualdade: $\binom{n}{n}$ + $\binom{n+1}{n}$ + $\binom{n+2}{n}$ +...+ $\binom{n+p}{n}$ = $\binom{n+p+1}{n+1}$. Resta mostrar a validade para k = p + 1, ou seja, que $\binom{n}{n}$ + $\binom{n+1}{n}$ + $\binom{n+2}{n}$ + ... + $\binom{n+p}{n}$ + $\binom{n+p+1}{n}$ = $\binom{n+p+2}{n+1}$.

Observe que: $\binom{n}{n}$ + $\binom{n+1}{n}$ + $\binom{n+2}{n}$ + ... + $\binom{n+p}{n}$ + $\binom{n+p+1}{n}$ = $\left[\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}+\binom{n+2}{n}+\ldots+\binom{n+p}{n}\right]$ + $\binom{n+p+1}{n}$.

Pela hipótese de indução $\left[\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}+\binom{n+2}{n}+\ldots+\binom{n+p}{n}\right]$ = $\binom{n+p+1}{n+1}$.

Assim, $\left[\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}+\binom{n+2}{n}+\ldots+\binom{n+p}{n}\right]$ + $\binom{n+p+1}{n}$ = $\binom{n+p+1}{n+1}$ + $\binom{n+p+1}{n}$.

Pela Relação de Stifel, (Propriedade 5), $\binom{n+p+1}{n+1}$ + $\binom{n+p+1}{n}$ = $\binom{n+p+2}{n+1}$. Logo pelo Método da Indução Finita, temos que:

$\binom{n+k+1}{n+1}$ = $\binom{n}{n}$ + $\binom{n+1}{n}$ + $\binom{n+2}{n}$ + ... + $\binom{n+k}{n}$ é válida para todo k $\in$ IN..........■

Exemplo 6: Na Figura 7, observamos que:

i) o termo $\binom{6}{2}$ = 15 = 1+ 2+ 3 + 4+ 5 = $\binom{1}{1}$ + $\binom{2}{1}$ + $\binom{3}{1}$ + $\binom{4}{1}$ + $\binom{5}{1}$ = 1 + 2 + 3 + 4 + 5;

ii) o termo $\binom{8}{6}$ = 28 = 1 + 6 + 21 = $\binom{5}{5}$ + $\binom{6}{5}$ + $\binom{7}{5}$ = 1 + 6 + 21.

1								
1	$\boxed{1}$							
1	$\boxed{2}$	1						
1	$\boxed{3}$	3	1					
1	$\boxed{4}$	6	4	1				
1	$\boxed{5}$	10	10	5	$\boxed{1}$			
1	6	$\boxed{15}$	20	15	$\boxed{6}$	1		
1	7	21	35	35	$\boxed{21}$	7	1	
1	8	28	56	70	56	$\boxed{28}$	8	1

Figura 7: Exemplificação do Teorema das Colunas.
Fonte: Elaboração própria.

<u>Propriedade 8 (Teorema das Diagonais)</u>: *A soma dos termos situados de uma diagonal desde o elemento da primeira coluna até o termo de uma linha qualquer é igual ao elemento imediatamente abaixo do último coeficiente binomial da soma, ou seja,* $\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \ldots + \binom{n+p}{p} = \binom{n+p+1}{p+1}$.

Demonstração: Pela propriedade dos números binomiais complementares, (Propriedade 3), temos que:

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{n} = 0;\ \binom{n+1}{1} - \binom{n+1}{n} = 0;\ \binom{n+2}{2} - \binom{n+2}{n} = 0;\ \ldots;\ \binom{n+p}{p} - \binom{n+p}{n} = 0.$$

Desse modo: $\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \ldots + \binom{n+p}{p} = \binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \ldots + \binom{n+p}{n}$.

Pelo Teorema das Colunas, (Propriedade 7), sabemos que:

$\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} + \ldots + \binom{n+p}{n} = \binom{n+p+1}{n+1}$ e, pela propriedade dos números binomiais complementares, (Propriedade 3), temos: $\binom{n+p+1}{n+1} = \binom{n+p+1}{p}$. Assim,

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \ldots + \binom{n+p}{p} = \binom{n+p+1}{p+1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \blacksquare$$

<u>Exemplo 7</u>: No Triângulo Aritmético da Figura 8, observamos o Teorema da Diagonal. Constamos que:

i) $\binom{1}{0} + \binom{2}{1} + \binom{3}{2} + \binom{4}{3} + \binom{5}{4} + \binom{6}{5} = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21 = \binom{7}{6}$;

ii) $\binom{6}{0} + \binom{7}{1} + \binom{8}{2} = 1 + 7 + 28 = 36 = \binom{9}{2}$.

1									
1	1								
1	2	1							
1	3	3	1						
1	4	6	4	1					
1	5	10	10	5	1				
1	6	15	20	15	6	1			
1	7	21	35	35	21	7	1		
1	8	28	56	70	56	28	8	1	
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

Figura 8: Exemplificação do Teorema das Diagonais.
Fonte: Elaboração própria.

<u>Propriedade 9 (Sequência de Fibonacci[25] no Triângulo de Pascal):</u> *O número de Fibonacci F_n é obtido como a soma da n-ésima "diagonal inversa" do Triângulo de Aritmético de Pascal.*

Demonstração: Reparamos que a soma das "diagonais inversas" gera a sequência 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... Mostraremos que esses números correspondem a sequência de Fibonacci, a qual é definida pela recorrência:

$F_0 = F_1 = 1$

$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ para $n \geq 0$.

Observamos que na formação do Triângulo de Pascal:

$F_0 = \binom{0}{0}$;

[25] Sequência de números descrita, no final do século XII, pelo matemático italiano Leonardo Fibonacci. Para saber mais sobre a Sequência de Fibonacci acesse a obra de LEOPOLDINO (2016) intitulada **Sequências de Fibonacci e a Razão Áurea:** aplicações no Ensino Básico e a obra **A razão áurea e a sequência de Fibonacci** de BELINI (2015).

$F_1 = \binom{1}{0}$;

$F_2 = \binom{2}{0} + \binom{1}{1}$;

$F_3 = \binom{3}{0} + \binom{2}{1}$;

$F_4 = \binom{4}{0} + \binom{3}{1} + \binom{2}{2}$;

$\vdots$

$F_n = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \ldots + \binom{n-k}{k}$;

$F_{n+1} = \binom{n+1}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n-1}{2} + \ldots + \binom{n+1-p}{p}$;

$F_{n+2} = \binom{n+2}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n+2-s}{s}$, onde, k, p e s são os maiores números inteiros que satisfazem:

$$\begin{cases} k \le n - k; \\ p \le n + 1 - p, \\ s \le n + 2 - s \end{cases} \quad \text{ou seja,} \quad \begin{cases} k \le \frac{n}{2}; \\ p \le \frac{n+1}{2}; \\ s \le \frac{n+2}{2} = \frac{n}{2} + 1. \end{cases}$$

Percebemos que quando n é ímpar temos $k = \frac{(n-1)}{2}$ e $p = \frac{(n+1)}{2} = \frac{(n-1+2)}{2} = k + 1$.

Quando n é par tem-se que $k = \frac{n}{2} = p$. Ainda, $s = k + 1$ independente da paridade de n. Verificaremos que a soma de F_n e F_{n+1} é F_{n+2}.

Consideremos inicialmente o caso em que n é ímpar. Neste caso temos:

$F_{n+1} + F_n = \binom{n+1}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n-1}{2} + \ldots + \binom{n+1-(k+1)}{k+1} + \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \ldots + \binom{n-k}{k}$;

$F_{n+1} + F_n = \binom{n+1}{0} + \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\right] + \left[\binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2}\right] + \ldots + \left[\binom{n-k}{k} + \binom{n-k}{k+1}\right].$

Aplicando a Relação de Stifel, (Propriedade 5), aos números binomiais em cada colchetes temos que:

$F_{n+1} + F_n = \binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n+1-k}{k+1}$. Usando o fato de que s = k+1 e que todo número binomial com denominador 0 tem o mesmo valor 1, obtemos:

$F_{n+1} + F_n = \binom{n+2}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n+2-s}{s} = F_{n+2}$

Consideremos agora o caso em que n é par. Já que k = p, F_{n+1} e F_n terão o mesmo número de parcelas. Então, como no caso anterior obtemos:

$F_{n+1} + F_n = \binom{n+1}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n-1}{2} + \ldots + \binom{n+1-k}{k} + \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \ldots + \binom{n+1-k}{k-1}$

$+ \binom{n-k}{k};$

$F_{n+1} + F_n = \binom{n+1}{0} + \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\right] + \left[\binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2}\right] + \ldots + \left[\binom{n+1-k}{k-1} + \binom{n+1-k}{k}\right] +$

$\binom{n-k}{k}$. Novamente aplicando a relação de Stifel, (Propriedade 5), aos números binomiais dos colchetes obtemos:

$F_{n+1} + F_n = \binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n+2-k}{k} + \binom{n-k}{k}.$

Observamos que 2k = n e s = k + 1. Obtemos que n + 2 - k = n + 2 - (s – 1), n - k = k e n + 2 - s = 2k + 2 - s = 2s – s = s.

Daí $\binom{n+1}{0} = 1 = \binom{n+2}{0}$; $\binom{n+2-k}{k} = \binom{n+2-(s-1)}{s-1}$;

$\binom{n-k}{k} = \binom{k}{k} = 1$; $\binom{s}{s} = \binom{n+2-s}{s}$.

Portanto, $F_{n+1} + F_n = F_{n+2}$ também no caso em que n é par.

Assim, $F_{n+1} + F_n = \binom{n+1}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n-1}{2} + \ldots + \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \ldots = \binom{n+1}{0} +$

$$\left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\right] + \left[\binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2}\right] + \ldots = \binom{n+2}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n}{2} + \ldots = F_{n+2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \blacksquare$$

Na Figura 9 observamos os primeiros números que compõem a Sequência de Fibonacci.

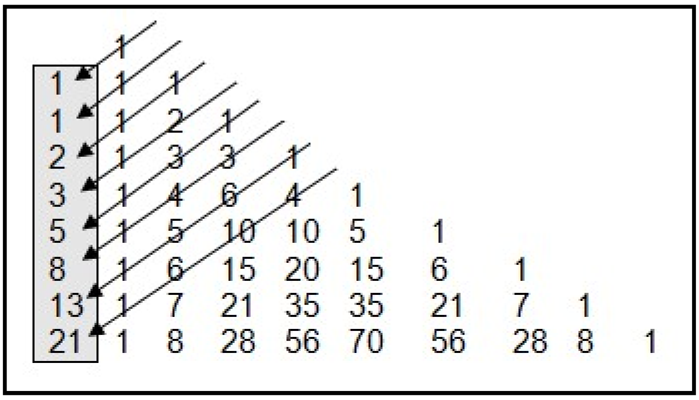


Figura 9: Sequência de Fibonacci no Triângulo Aritmético de Pascal.
Fonte: Elaboração própria.

Na próxima seção oferecemos a revisão teórica sobre o conteúdo matemático Binômio de Newton e algumas de suas aplicações.

1.4.3 Binômio de Newton

<u>Definição 4</u>: *Um binômio é uma adição ou subtração de dois monômios, ou seja, é uma expressão do tipo (a + b) ou (a - b).*

No Ensino Fundamental, mais especificamente no oitavo ano, é apresentado aos alunos, o cálculo de potências de binômios, do tipo $(a + b)^n$ ou $(a – b)^n$, com $0 < n \leq 3$, sendo que esses cálculos são feitos utilizando-se da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição[26] ou através de regras que são, geralmente, decoradas pelos alunos, os chamados produtos notáveis: quadrado de uma soma, quadrado de uma diferença, cubo de uma soma ou cubo de uma diferença.

<u>Exemplo 8</u>: Utilizando a propriedade distributiva observamos o desenvolvimento dos seguintes binômios:

i) $(x + 3)^2 = (x + 3) \cdot (x + 3) = x^2 + 3x + 3x + 9 = x^2 + 6x + 9$;

ii) $(x + 3)^3 = (x + 3)^2 \cdot (x + 3) = (x^2 + 6x + 9).(x + 3) = x^3 + 3x^2 + 6x^2 + 18x + 9x + 27 = x^3 + 9x^2 + 27x + 27$;

iii) $(x + 3)^4 = (x + 3)^2 \cdot (x + 3)^2 = x^4 + 6x^3 + 9x^2 + 6x^3 + 36x^2 + 54x + 9x^2 + 54x + 81 = x^4 + 12x^3 + 54x^2 + 108x + 81$.

Entretanto, quanto maior for o expoente, mais trabalhoso é o cálculo da potência pela propriedade distributiva, exigindo método mais eficiente para encontrar a mesma. Desta forma, no Ensino Médio, quando da abordagem do conteúdo matemático Análise Combinatória, o Teorema Binomial, também chamado Binômio de Newton, é apresentado aos estudantes, oferecendo uma ferramenta do cálculo aplicada a várias áreas do conhecimento

<u>TEOREMA 1</u>: *Sejam a e b elementos do conjunto A e seja $n \in IN$. Chamamos Teorema Binomial ou Binômio de Newton, a seguinte igualdade:*

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}.b + \binom{n}{2}a^{n-2}.b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}a.b^{n-1} + \binom{n}{n}b^n, \text{ ou seja}$$

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}.b^i, \text{ onde } \binom{n}{i} \text{ é coeficiente binomial.}$$

[26] Para saber mais sobre a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição consulte a obra: LIMA, E. L. **Números e Funções Reais**. Rio de Janeiro: SBM, 2013 (Coleção PROFMAT).

Demonstração: i) Utilizando o Método da Indução Finita[27] sobre n, fixando a e b $\in$ IN. Para n = 1, temos: $(a + b)^1 = \binom{1}{0}a^1 + \binom{1}{1}a^{1-1}.b = a + b$, o que mostra a validade para n = 1.

Suponhamos o resultado válido para n = k, ou seja, garantimos válida a igualdade: $(a + b)^k = \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}a^{k-i}.b^i$. Resta mostrar a validade para n = k + 1, ou seja, que $(a + b)^{k+1} = \sum_{i=0}^{k+1}\binom{k+1}{i}a^{k+1-i}.b^i$.

Partindo da hipótese $(a + b)^k = \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}a^{k-i}.b^i$, multiplicamos os membros da igualdade por (a + b), obtendo:

$$(a + b).(a + b)^k = (a + b).\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}a^{k-i}.b^i = (a + b)^{k+1} = (a + b).\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}a^{k-i}.b^i$$

$(a+b)^{k+1} = (a + b).\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}a^{k-i}.b^i$, efetuando a propriedade distributiva da multiplicação em relação a adição temos:

$$(a + b)^{k+1} = a.\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}a^{k-i}.b^i + b.\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}a^{k-i}.b^i = \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}a^{k+1-i}.b^i + \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}a^{k-i}.bi^{+1},$$ ou seja,

$$(a + b)^{k+1} = a^{k+1} + \sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}a^{k+1-i}.b^i + \sum_{i=0}^{k-1}\binom{k}{i}a^{k-i}.b^{i+1} + b^{k+1}.$$

Fazendo uma mudança de índices nos dois últimos somatórios: no primeiro trocamos i por j e no segundo i + 1 por j. Temos:

$$(a + b)^{k+1} = a^{k+1} + \sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j}a^{k+1-j}.b^j + \sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j-1}a^{k+1-j}.b^j + b^{k+1}.$$ Assim,

$$(a + b)^{k+1} = a^{k+1} + \sum_{j=1}^{k}\left[\binom{k}{j} + \binom{k}{j-1}\right]a^{k+1-j}.b^j + b^{k+1}.$$

---

27 A demonstração usando o Método da Indução Finita foi adaptada da obra de STEFFENON e GUARNIERI (2016).

Usando a Relação de Stifel, (Propriedade 5), e como $\binom{k+1}{0} = \binom{k+1}{k+1} = 1$ temos que:

$$(a + b)^{k+1} = \binom{k+1}{0}a^{k+1} + \sum_{j=1}^{k}\binom{k+1}{j}a^{k+1-j}.b^{j} + \binom{k+1}{k+1}b^{k+1} = \sum_{j=1}^{k+1}\binom{k+1}{j}a^{k+1-j}.b^{j}.$$

Logo, pelo Método da Indução Finita a igualdade $(a + b)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}.b^{i}$ é válida para qualquer $n \in$ IN. .... ■

ii) Pela propriedade distributiva da multiplicação em relação a adição temos que: $(a + b)^n = (a + b). (a + b). (a + b). ... . (a + b)$, com n fatores iguais a (a + b). Para cada um desses n fatores escolhemos um dos termos (a ou b) para multiplicar. Cada produto obtido terá exatamente n letras, cada uma delas podendo ser a ou b. Os possíveis produtos são: a^n, $a^{n-1}.b$, $a^{n-2}.b^2$, ..., $a^{n-p}.b^p$,..., b^n. Vamos contar o número de vezes que cada produto ocorre:

a^n ⟶ Só é possível obter a^n ao multiplicarmos a. a. a. a. ... .a (n vezes), isto é, o coeficiente de a^n é $1 = \binom{n}{0}$.

$a^{n-1}.b$ ⟶ Devemos contar o número de sequências de n letras, das quais n - 1 são iguais a a e uma é igual a b. Temos: $\binom{n}{1}a^{n-1}.b$.

$a^{n-2}.b^2$ ⟶ Devemos contar o número de sequências de n letras, das quais n - 2 são iguais a a e duas são iguais a b^2. Temos: $\binom{n}{2}a^{n-2}.b^2$.

(...)

$a^{n-p}. b^p$ ⟶ Em geral, o número de sequências de n letras, das quais n - p são iguais a a e p são iguais a b: $\binom{n}{p}a^{n-p}.b^p$.

(...)

b^n ⟶ O produto b^n só ocorre uma única vez, quando escolhemos em cada fator a letra b para multiplicar b. b. b. b. .... b, (n vezes). Assim o coeficiente de b^n é $1 = \binom{n}{n}$.

Segue daí, que: $(a + b)^n = \binom{n}{0}a^n.b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}.b^1 + ... + \binom{n}{n}a^0.b^n$. .... ■

Observação 2: Para desenvolver a n-ésima potência de $(a - b)^n$, com $n \in$ IN, devemos escrever $(a - b)^n = [a + (-b)]^n$. Aplicando o Binômio de Newton,

$$(a - b)^n = [a + (-b)]^n = \binom{n}{0} a^n.(-b)^0 + \binom{n}{1} a^{n-1}.(-b)^1 + \binom{n}{2} a^{n-2}.(-b)^2 + \quad + \binom{n}{n} a^0.(-b)^n.$$

Em cada um dos termos no desenvolvimento acima, obtemos:

$(-b)^p = (-1)^p.b^p$, onde $(-b)^p = b^p$, se p for par ou $(-b)^p = -b^p$, se p for ímpar. Assim, os sinais dos termos do desenvolvimento de $(a - b)^n$ se alternam, a partir do primeiro termo, que é positivo. Logo,

$$(a - b)^n = \binom{n}{0} a^n.b^0 - \binom{n}{1} a^{n-1}.b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2}.b^2 + ... + (-1)^n \binom{n}{n} a^0.b^n$$

$$(a - b)^n = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \binom{n}{p} a^{n-p}b^p \text{..........} \blacksquare$$

As demonstrações propostas para o Binômio de Newton (Teorema 1), utilizando-se de diferentes métodos possibilitam ao leitor escolher o método mais elementar para ser aplicado ao nível de ensino em que se for trabalhar esse conteúdo matemático.

1.4.3.1 Relação entre o Binômio de Newton e o Triângulo de Pascal

Percebemos que, no Binômio de Newton

$(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n.b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1}.b + \binom{n}{2} a^{n-2}.b^2 + ... + \binom{n}{n-1} a.b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0.b^n$, onde a, b $\in$ IR e n $\in$ IN, $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$, ..., $\binom{n}{n}$ são coeficientes binomiais e por sua ver correspondem a linha n do Triângulo de Pascal, sendo evidenciado no Exemplo 9.

<u>Exemplo 9</u>:

i) $(x + a)^0 = \binom{0}{0} x^0.a^0$;

ii) $(x + a)^1 = \binom{1}{0} x^1.a^0 + \binom{1}{1} x^0.a^1;$

iii) $(x + a)^2 = \binom{2}{0} x^2.a^0 + \binom{2}{1} x^1.a^1 + \binom{2}{2} x^0.a^2;$

iv) $(x + a)^3 = \binom{3}{0} x^3.a^0 + \binom{3}{1} x^2.a^1 + \binom{3}{2} x^1.a^2 + \binom{3}{3} x^0.a^3;$

v) $(x + a)^4 = \binom{4}{0} x^4.a^0 + \binom{4}{1} x^3.a + \binom{4}{2} x^2.a^2 + \binom{4}{3} x.a^3 + \binom{4}{4} x^0 a^4.$

Calculando os coeficientes binomiais:

i) $(x + a)^0 = 1 \longrightarrow$ Linha 0: 1

ii) $(x + a)^1 = 1x + 1a \longrightarrow$ Linha 1: 1 1

iii) $(x + a)^2 = 1x^2 + 2xa + 1a^2 \longrightarrow$ Linha 2: 1 2 1

iv) $(x + a)^3 = 1x^3 + 3x^2a^1 + 3x^1a^2 + 1a^3 \longrightarrow$ Linha 3: 1 3 3 1

v) $(x + a)^4 = 1x^4 + 4x^3a + 6x^2a^2 + 4xa^3 + 1a^4 \longrightarrow$ Linha 4: 1 4 6 4 1

No desenvolvimento de $(a + b)^n$, cada uma das parcelas é denominada de termo. Assim, o primeiro termo chama-se de T_1, segundo termo de T_2 e assim sucessivamente. Observe:

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n.b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1}.b + \binom{n}{2} a^{n-2}.b^2 + \ldots + \binom{n}{p} a^{n-p}.b^p + \ldots + \binom{n}{n-1} a.b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0.b^n$$

$T_1 = \binom{n}{0} a^n.b^0;$

$T_2 = \binom{n}{1} a^{n-1}.b;$

$\vdots$

$T_{p+1} = \binom{n}{p} a^{n-p}.b^p;$

$T_n = \binom{n}{n-1} a.b^{n-1};$

$T_{n+1} = \binom{n}{n} a^0.b^n$. Generalizando: $T_{p+1} = \binom{n}{p} a^{n-p}.b^p$.

Esta fórmula que permite escrever qualquer termo de $(a + b)^n$, sem necessariamente calcular todos os termos da potência, é chamada de *Termo Geral do Binômio de Newton*.

De maneira análoga, para $(a - b)^n$, a fórmula do *Termo Geral do Binômio de Newton* é dada por $T_{p+1} = (-1)^p \binom{n}{p} a^{n-p}.b^p$.

<u>Exemplo 10</u>: Qual é o quarto termo (T_4) do desenvolvimento de $(2x + 3)^8$?

Temos que n = 8; a = 2x; b = 3 e p + 1 = 4, ou seja, p = 3. Aplicando a Fórmula do Termo Geral do Binômio de Newton, $T_{p+1} = \binom{n}{p} a^{n-p}.b^p$,obtemos:

$T_{3+1} = T_4 = \binom{8}{3}(2x)^{8-3}.(3)^3 = 56.(2x)^5.27 = 56.32x^5.27 = 48384x^5$.

1.4.3.2 Por que Binômio de Newton?

A denominação do Binômio de Newton remete a ideia de que o matemático inglês Isaac Newton[28] foi o idealizador de tal estudo, o que é um equívoco. O Teorema Binomial já era conhecido e estudado muito antes de Newton. Segundo Leachenski (2017), indícios do Teorema já haviam sido vistos em um dos livros do matemático grego Euclides[29], onde se apresentava o desenvolvimento binomial com expoente dois.

De acordo com CUNHA (2017, p. 22)

[28] De acordo com FORATO (2019), Isaac Newton (1642 – 1727) deixou muitas contribuições para a Física, Matemática, Filosofia e Astronomia, tendo se dedicado a estudos relacionados à Alquimia, Astrologia, entre outros.
[29] De acordo com E-CÁLCULO- USP (2019), o matemático grego Euclides, considerado “pai da Geometria”, viveu grande parte da sua vida em Alexandria, na primeira metade do século III a.C. A obra de maior importância deste matemático foi "Os Elementos", constituída por treze volumes versando sobre Aritmética, Geometria e Álgebra.

> Os coeficientes binomiais, como quantidades combinatórias que expressam o número de maneiras de selecionar *k* objetos de *n* sem substituição eram de interesse para os hindus antigos. O teorema binomial como tal pode ser encontrado no trabalho do matemático persa do século XI Al-Karaji, que descreveu o padrão triangular dos coeficientes binomiais e também forneceu uma prova matemática do teorema binomial e triângulo de Pascal usando uma forma primitiva de indução matemática.

No fim da Idade Média, como visto nas seções anteriores, Tartaglia, Pascal, Stifel, e outros matemáticos já detinham o conhecimento sobre os números binomiais, Triângulo de Pascal e desenvolvimento de binômios.

O Teorema Binomial é mais conhecido por Binômio de Newton porque Newton obteve um resultado semelhante ao Teorema Binomial, generalizando para o conjunto de valores ao qual pertence o expoente n, cujo tratamento não está em análise neste trabalho.

1.4.4 Aplicações

1.4.4.1 Cálculo de juros compostos

Nas transações financeiras, especialmente no cálculo de juros compostos, quando da utilização da fórmula $M = C.(1 + i)^n$, onde M refere-se ao montante, conhecido também como valor acumulado, dado pela soma do capital inicial (C) com o juro produzido em um determinado período. A variável i refere-se a taxa de juros expressa por uma porcentagem e n é o período, que corresponde ao tempo transcorrido desde a tomada do capital inicial até a devolução do capital, no caso de um empréstimo.

Na expressão $M = C.(1 + i)^n$, o fator $(1 + i)^n$ é um binômio, e consequentemente podemos utilizar as propriedades do Binômio de Newton para calculá-lo, sem a necessidade de uma calculadora[30]. Vejamos a aplicação através

[30] Mesmo com aplicação do Binômio de Newton para cálculo de juros compostos, o cálculo manual é árduo. Entretanto, podemos nos deparar com situações em que a utilização de um aparelho eletrônico não seja permitida, como, por exemplo, em uma prova de Concurso Público. Assim, conhecendo o Binômio de Newton e conteúdos relacionados a ele é possível inferir uma resposta aproximada.

do Exemplo 11.

Exemplo 11: Calcule o montante aproximado de um capital de R$8.000,00, aplicado a juros compostos, durante 1 ano, à taxa de 3,5% ao mês.

Sendo C = R$8.000,00, i = 3,5% = 0,035, n = 1 ano = 12 meses. Substituindo na fórmula:

$M = 8.000,00. (1 + 0,035)^{12}$

$$M = 8.000,00. \left[\binom{12}{0}.1^{12}.(0,035)^{0} + \binom{12}{1}1^{11}.(0,035)^{1} + \binom{12}{2}1^{10}.(0,035)^{2} + ... + \binom{12}{12}1^{0}.(0,035)^{12}\right]$$

M = 8.000,00. [1. 1. 1 + 12. 1. 0,035 + 66.1. 0,001225 + 1. 220. 0,000042875+ ...+ 1.1. $0,035^{12}$].

Note que as potências de 0,035 com n ≥ 2, tornam-se cada vez menores, ou seja, mais próximas de zero, podendo assim, serem desconsideradas para cálculo aproximado do montante.

Logo, utilizamos as três primeiras parcelas da soma [1. 1. 1 + 12. 1. 0,035 + 66.1. 0,001225 + 1. 220. 0,000042875 + ...+ 1.1. $0,035^{12}$] , o que corresponde a: 1 + 0,42 + 0,08085 = 1,50085.

Assim, M = 8.000,00. $(1+ 0,035)^{12}$ = 8.000,00. 1,50085 = 12.006,80. Portanto, o montante gerado ao final de um ano será de aproximadamente R$12.006,80.

O cálculo do montante do Exemplo 11 realizado numa calculadora científica resulta em aproximadamente R$12.088,55, ou seja, a diferença entre o cálculo manual e na calculadora é de R$81,75.

1.4.4.2 Potências de 11

Observamos que 11 = (10 + 1). Calculando as potências de 11 para expoentes naturais, através do Teorema Binomial, obtemos:

i) $11^0 = (10 + 1)^0 = \binom{0}{0}10^0.1^0 = 1.1.1 = 1;$

ii) $11^1 = (10 + 1)^1 = \binom{1}{0}10^1.1^0 + \binom{1}{1}10^0.1^1 = 1.10 + 1.1 = 11;$

iii) $11^2 = (10 + 1)^2 = \binom{2}{0}10^2.1^0 + \binom{2}{1}10^1.1^1 + \binom{2}{2}10^0.1^2 = 1.100 + 2.10.1 + 1.1.1 = 100 + 20 + 1 = 121;$

iv) $11^3 = (10 + 1)^3 = \binom{3}{0}10^3.1^0 + \binom{3}{1}10^2.1^1 + \binom{3}{2}10^1.1^2 + \binom{3}{3}10^0.\ 1^3 = 1.1000 + 3.100.1 + 3.10.1 + 1.1.1 = 1000 + 300 + 30 + 1 = 1331;$

v) $11^4 = (10 + 1)^4 = \binom{4}{0}10^4.1^0 + \binom{4}{1}10^3.1^1 + \binom{4}{2}10^2.1^2 + \binom{4}{3}10^1.1^3 + \binom{4}{4}10^0.1^4 = 1.10000 + 4.1000.1 + 6.100.1 + 4.10.1 + 1.1.1 = 10000 + 4000 + 600 + 40 + 1 = 14641;$

vi) $11^5 = (10 + 1)^5 = \binom{5}{0}10^5.1^0 + \binom{5}{1}10^4.1^1 + \binom{5}{2}10^3.1^2 + \binom{5}{3}10^2.1^3 + \binom{5}{4}10^2.1^4 + \binom{5}{5}10^0.1^4 = 1.100000 + 5.10000.1 + 10.1000.1 + 10.100.1 + 5.10.1 + 1.1.1 = 100000 + 50000 + 10000 + 1000 + 50 + 1 = 161.051.$

De modo geral: $11^n = (10 + 1)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}10^{n-i}.1^i.$

Observamos que as potências de 11, com expoente $0 \leq n \leq 4$ podem ser obtidas diretamente da linha n do Triângulo de Pascal, com a concatenação dos números que compõem a linha, conforme exposto na Figura 10.

$$
\begin{array}{llllll l}
1 & & & & & & \longrightarrow 1 = 11^0 \\
1 & 1 & & & & & \longrightarrow 11 = 11^1 \\
1 & 2 & 1 & & & & \longrightarrow 121 = 11^2 \\
1 & 3 & 3 & 1 & & & \longrightarrow 1331 = 11^3 \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \longrightarrow 14641 = 11^4 \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 &
\end{array}
$$

Figura 10: Potências de 11 obtidas diretamente do Triângulo de Pascal.
Fonte: Elaboração própria.

1.4.4.3 Distribuição Binomial das Probabilidades

Inicialmente, cabe salientar que nesta seção consideramos definidos os conceitos básicos relacionados a probabilidade, assim como demonstrados os teoremas sobre probabilidade em espaço amostral finito. Assim, a preocupação deste trabalho é expressar a relação entre o Binômio de Newton e a probabilidade, apresentando exemplos desta importante ferramenta e definindo o que for relacionando a isso quando necessário.

Definição 5 (Ensaios de Bernoulli): *Consideremos um experimento que consiste de uma sequência de ensaios ou tentativas independentes, isto é, ensaios nos quais a probabilidade de um resultado em cada ensaio não depende dos resultados ocorridos nos ensaios anteriores, nem dos resultados nos ensaios posteriores. Chamamos Ensaios de Bernoulli*[31] *a sequência em que cada ensaio apresenta apenas dois resultados: ocorrência ou não-ocorrência de um certo evento. A ocorrência do evento é denominada sucesso (S) e a não-ocorrência é chamada fracasso (F). A probabilidade de ocorrer sucesso em cada ensaio é sempre p, e consequentemente, a probabilidade de ocorrer fracasso é q = 1 - p.*

Exemplo 12: Consideremos a entrada de 10 pacientes num centro de terapia intensiva (CTI). Suponha que a probabilidade de óbito, ao dar entrada no CTI, seja

[31] Jacob Bernoulli (1654 - 1705), um dos membros da célebre família de matemáticos suíços, que entre os séculos XVII e XVIII, deixou grande legado para as áreas da Matemática e da Física.

de 25% (risco de morte). Obviamente a probabilidade de recuperação é de 75%. Cada um desses pacientes é um Ensaio de Bernoulli, pois ao dar entrada na CTI o paciente pode vir a óbito ou sobreviver. Consideraremos sucesso a sobrevivência e fracasso o óbito. Em cada caso p = 0,75 e q = 0,25.

Exemplo 13: A professora de Matemática, do segundo ano do Ensino Médio, elaborou uma prova de múltipla escolha, composta por 40 questões, cada uma com 5 alternativas. Se um aluno responde a todas baseado em palpite, popularmente chamado de chute, cada questão é considerada um Ensaio de Bernoulli, pois o aluno pode acertar ou errar. A probabilidade de acertar a questão, ou seja, obter sucesso é p = 20%, enquanto que a de errar a questão, ou seja, fracasso é q = 80%.

Para um experimento que consiste na realização de n Ensaios de Bernoulli, ou seja, ocorrem exatamente k sucessos nos n ensaios é formado por um conjunto de n-uplas, onde há k sucessos (S) e n - k fracassos (F). O número de n-uplas ordenadas que satisfaz essa condição é igual ao número de maneiras com que podemos escolher k ensaios para a ocorrência de sucesso dentre o total de n ensaios, pois nos n - k restantes deverão ocorrer fracassos. Este número é igual ao número de combinações de n elementos tomados k a k, ou seja,

$C_{n,k} = \dfrac{n!}{k!.(n-k)!} = \dbinom{n}{k}$, para k = 0,1 ,2 ,3 ,4 ,...n.

A probabilidade de cada n-upla ordenada de k sucessos (S) e (n - k) fracassos (F) é dada por: p. p. p. ... .p. q. q. q. ... $.p^k. (1 - p)^{n-k} = p^k. q^{n-k}$. Logo, se cada n-upla ordenada com exatamente k sucessos tem probabilidade de $p^k.q^{n-k}$ e existem $\dbinom{n}{k}$ n-uplas deste tipo, a probabilidade de k.p(k) ensaios para a ocorrência de sucesso em o total de n ensaios é dada por: $p(k) = \dbinom{n}{k} p^k.q^{n-k}$.

Definição 6 (Distribuição Binomial das Probabilidades): *Seja k o número de sucessos obtidos na realização de n Ensaios de Bernoulli. Diremos que k tem a* *distribuição binomial com parâmetros n e p, em que p é a probabilidade de sucesso em cada ensaio, se sua função de probabilidade for dada por:*

$$p(k) = \binom{n}{k} p^k.(1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} p^k.q^{n-k}.$$

Observação 3: Obter k sucessos em n Ensaios de Bernoulli pode ser encarado como um problema, cujo espaço amostral é Ω = {0, 1, 2,..., n}, isto é, cada elemento de Ω é o número de sucessos em n Ensaios de Bernoulli e a distribuição de probabilidade é dada por $p(k) = \binom{n}{k} p^k.(1 - p)^{n-k} = \binom{n}{k} p^k.q^{n-k}$. Tal distribuição é chamada binomial, pois cada probabilidade p(k) é dada pelo Termo Geral do Binômio de Newton $(p + q)^n$.

Exemplo 14: Um casal é portador de uma doença genética. Após consulta com geneticista sabem que a probabilidade de seus descendentes serem portadores da doença é 35%. O casal pretende ter 4 filhos. Qual a probabilidade do casal ter 3 filhos portadores e um não portador?

Observamos inicialmente que trata-se de um experimento em que cada nascimento é considerado um Ensaio de Bernoulli. Cada filho do casal pode ou não ser portador da doença. Chamamos de p a probabilidade do filho ser portador e q a probabilidade do filho não ser portador. Temos p = 0,35 e q = 0,65.

Descrevemos todos os possíveis nascimentos dos quatro filhos do casal:

p, p, p, p	q, q, q, q	p, p, p, q	p, p, q, p
p, q, p, p	q, p, p, p	p, p, q, q	p, q, q, p
p, q, p, q	q, q, p, p	q, p, q, p	q, p, p, q
q, q, q, p	q, q, p, q	q, p, q, q	p, q, q, q

Com base nas informações acima, pode ocorrer de todos os filhos serem portadores (p, p, p, p), 3 filhos não portadores e um portador (q,q,q,p), 3 filhos portadores e um não portador (p, p, p, q), 2 filhos portadores e 2 não portadores (p, p, q, q) ou todos os filhos não serem portadores (q, q, q, q).

Constatamos que a probabilidade de:

a) todos serem portadores – (p, p, p, p): **p(4)** = $\binom{4}{4}p^4.q^{4-4}$ = $1p^4$ $.q^0$ = 1. $(0,35)^4$ = 1,5%.

b) 3 filhos não portadores e um portador – (q, q, q, p; q, q, p, q; p, q, q, q; p, q, q, q): **p(1)** = $\binom{4}{1}p^1.q^{4-1} = 4p.q^3 = 4.\ 0,35.\ (0,65)^3$ = 38,45%.

c) 2 filhos portadores e 2 não portadores – (p, p, q, q; p, q, q, p; p, q, p, q; q, q, p, p; q, p, q, p; q, p, p, q): **p(2)** = $\binom{4}{2}p^2.q^{4-2} = 6p^2.q^2 = 6.(0,35)^2.(0,65)^2$ = 31,05%.

d) 3 filhos portadores e um não portador – (p, p, p, q; p, p, q, p; q, p, p, p; p, q, p, p): **p(3)** = $\binom{4}{3}p^3.q^{4-3} = 4p^3.q = 4.(0,35)^3.0,65$ = 11,15%.

e) nenhum ser portador – (q, q, q, q): **p(0)** = $\binom{4}{0}p^0.q^{4-0}$ = $1.1.q^4$ = 1. $(0,65)^4$ = 17,85%.

A expansão binomial de $(p + q)^4$, é dada por $1p^4 + 4p^3.q + 6p^2.q^2 + 4\ p.q^3 +1q^4$ e corresponde ao somatório dos itens de a) a e) descritos acima.

Em síntese para responder o problema proposto no Exemplo 14 bastaria calcular o Termo Geral p(3) do Binômio de Newton $(p + q)^4$, onde **p(3)** = $\binom{4}{3}p^3.q^{4-3} = 4p^3.q = 4.(0,35)^3.0,65$ = 11,15%.

Como visto no Exemplo 14, a Distribuição Binomial é uma função matemática extremamente útil para cálculo de probabilidades de experimentos do tipo Ensaios de Bernoulli. Devido a isso, as aplicações à genética são de grande valia, uma vez que aplicando a Distribuição Binomial é possível determinar a probabilidade da expressão de alguma característica genética.

No Capítulo 4, estão propostos problemas que poderão ser adaptados a realidade de cada ambiente escolar e mostram o potencial para o desenvolvimento de estratégias por parte dos alunos, bem como a possibilidade de ampliar seus conhecimentos a respeito do conteúdo Binômio de Newton e suas aplicações.

2 A PESQUISA

A prática da pesquisa é uma ação indispensável para a formação do sujeito, pois sem a mesma não há produção de conhecimento. Para Demo (2000, p. 20), "pesquisa é entendida tanto como procedimento de fabricação do conhecimento, quanto como procedimento de aprendizagem (princípio científico e educativo), sendo parte integrante de todo processo reconstrutivo de conhecimento".

Baseados na ideia de produção do conhecimento, concebemos a pesquisa para resposta de uma problemática como "ferramenta para promover o confronto entre os dados, as evidências, as informações coletadas sobre determinado assunto e o conhecimento teórico acumulado a respeito" (LÜDKE e ANDRE, 1986, p. 1), e a problemática, por sua vez, surge de uma inquietação, curiosidade, necessidade do pesquisador em sistematizar novos saberes.

Assim, para a elaboração dessa pesquisa fomos instigadas pela seguinte problemática: as atividades apresentadas nos livros didáticos de Matemática do segundo ano do Ensino Médio, quando da apresentação do Binômio de Newton, atendem as prescrições das diretrizes educacionais a nível federal e estadual?

Para buscar respostas a essa indagação, este trabalho tem por objetivo geral classificar e analisar, com base na categorização de problemas elaborada por Dante (2000), a gama de atividades trazidas pelos livros didáticos de Matemática do segundo ano do Ensino Médio aprovados nas edições do PNLD de 2015 e 2018, de modo a verificar o potencial para a formação do educando almejado nas diretrizes oficiais de ensino, quando da abordagem do conteúdo matemático Binômio de Newton.

De modo a alcançar esse objetivo fomos guiadas pelos seguintes objetivos específicos:

- conhecer o PNLD e investigar os critérios para escolha dos livros didáticos;
- apresentar as orientações curriculares para o conteúdo Binômio de Newton constantes nas diretrizes curriculares para o Ensino Médio: DCE (PARANÁ, 2008), PCN+ (BRASIL, 2000) e a BNCC (BRASIL, 2018).

- discutir as perspectivas sobre Resolução de Problemas e a classificação de problemas proposta por Dante (2000);
- abordar os conceitos teóricos de Binômio de Newton e suas aplicações;
- classificar as atividades apresentadas nos livros didáticos aprovados no PNLD, nas edições de 2015 e 2018, sobre o tema Binômio de Newton, com base na categorização de problemas elaborada por Dante (2000);
- disponibilizar diferentes tipos de problemas, conforme categorização de Dante (2000), que evidenciam os diálogos existentes entre o Binômio de Newton e outras áreas do saber, de modo a viabilizar o que se almeja nas diretrizes educacionais para o ensino da Matemática.

2.1 JUSTIFICATIVA

Dados da última avaliação do Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA), que ocorreu em 2015, apontam que 44% dos alunos brasileiros estão abaixo do nível 1 de proficiência em Matemática, o que demonstra a ineficiência das instituições escolares no sentido de atender os objetivos do Ensino Médio, que de acordo com os PCN+ deixa de ser uma etapa intermediária de formação e passa a atender a uma crescente legião de jovens que buscam qualificação, por conta das exigências econômicas, e conhecimentos para prosseguir os estudos, o que “significa preparar para a vida, qualificar para a cidadania e capacitar para o aprendizado permanente, em eventual prosseguimento dos estudos ou diretamente no mundo do trabalho” (BRASIL, 2002, p. 8).

As variantes para o baixo nível de aprendizagem dos alunos são muitas, entretanto evidenciamos o processo ensino aprendizagem, pois ensinar Matemática de modo que os educandos compreendam é um desafio. Saviani (1991), Fiorentini e Oliveira (2015) discorrem que, de modo geral, o processo de ensino aprendizagem permanece pautado apenas na transmissão de conteúdos para que os alunos simplesmente os recebam e os acumulem. Essa prática é reflexo, muitas vezes, da formação acadêmica do educador que é distante das práticas de ensino aprendizagem para a Educação Básica.

Nesta perspectiva, especialmente no ensino de Matemática, os conteúdos são abordados de forma a-histórica, descontextualizada, enquanto enunciados e fórmulas estáticos e que pouco se relacionam com a realidade social e o cotidiano dos estudantes. Com isso, a aprendizagem destes conteúdos torna-se mecânica e pouco significativa para os mesmos, o que fica evidente no desempenho apresentado nas avaliações externas desta área do conhecimento.

Desta forma, o ensino de Matemática precisa atender as demandas que a sociedade exige, oportunizando aos estudantes condições para que construam significados e consigam fazer observações, relações, reflexões e intervenções que os tornem verdadeiros sujeitos de sua história, de modo a atuarem na sociedade de forma crítica e reflexiva.

Entretanto, nos espaços escolares, em sua maioria, há uma carência extrema de artefatos tecnológicos que poderiam auxiliar o trabalho docente e melhorar a eficácia do processo ensino aprendizagem. Em muitos destes espaços os livros didáticos são, o único material de apoio do professor e a única fonte de estudos/pesquisa para os estudantes, tendo, portanto, papel preponderante na configuração das práticas pedagógicas envolvendo os conteúdos estabelecidos nos currículos escolares, conforme afirmam Frison *et al.* (2009).

Neste sentido, se faz necessário refletir sobre as características e intencionalidades dos materiais disponibilizados aos estudantes e professores da Rede Pública de Ensino. As reflexões acerca de todas as coleções de livros didáticos é um trabalho extremamente delicado e moroso, não cabendo a uma única dissertação a completude disso. Por isso, optamos pela análise das atividades propostas para a temática Binômio de Newton, nos segundos volumes das coleções aprovadas nos PNLD 2015 e PNLD 2018.

A escolha dessa temática decorre da necessidade de desmistificar a ideia de que o tema Binômio de Newton pode ser excluído do currículo escolar por ser considerado, por muitos educadores, desconexo de outras áreas do conhecimento. Além disso, há necessidade de compreender o modo como esse conteúdo e atividades têm sido trabalhados, entendidos e relacionados com as demais áreas do conhecimento e que venham a superar a superficialidade de como ele é tratado nos livros didáticos.

É necessário também, constatar se as atividades propostas nos livros didáticos possuem características que convergem a um mesmo processo de resolução, limitando o ensino a simples repetição de algoritmos, sendo, portanto, exercícios que possuem procedimentos padrões.

Além disso, a pesquisa pretende contribuir para a produção de conhecimentos na área do ensino da Matemática, fundamentada nas premissas elencadas pelas diretrizes curriculares, com a apresentação de problemas que venham atendê-las e contribuir para a formação crítica do educando, contemplando necessidades humanas e sociais.

2.2 ASPECTOS METODOLÓGICOS

De modo a atingir os objetivos propostos neste trabalho, optamos pelo estudo exploratório, pois de acordo com Severino (2007, p. 112) este método objetiva "[...] levantar informações sobre determinado objeto, delimitando assim um campo de trabalho, mapeando condições de manifestação desse objeto".

Essa modalidade de pesquisa, de acordo com Appolinário (2011), possibilita ao pesquisador ampliar sua compreensão sobre o objeto de estudo.

Levando em consideração a problemática desta pesquisa, a identificação e análise dos dados apresentados, concluímos que ela é uma pesquisa com abordagem qualitativa. Autores como, Lüdke e Andre (1986), Silveira e Córdova (2009) caracterizam a pesquisa qualitativa como uma atitude ativa para busca de novas informações ou relações para aprofundar conhecimentos pré-existentes ou a constatá-los.

Na pesquisa qualitativa não são empregadas técnicas estatísticas para análise de dados, uma vez que esses são descritivos. Desta forma, o pesquisador realiza uma leitura crítica dos dados, aproveitando todas as nuances e nesse sentido um determinando fenômeno é observado de maneira integral.

Quanto ao procedimento de coleta de dados, adotamos a pesquisa documental, uma vez que os livros didáticos constituem-se documentos. Phillips

(1974, p. 187) considera documentos “quaisquer materiais escritos que possam ser usados como fonte de informação sobre o comportamento humano”, ou seja, são considerados documentos leis, regulamentos, normas, pareceres, cartas, memorandos, diários pessoais, jornais, revistas, discursos, roteiros de rádio e TV, livros, estatísticas e arquivos escolares, entre outros.

Lüdke e Andre (1986) afirmam que o uso de documentos na pesquisa oportuniza uma valiosa fonte de informações à medida que eles oferecem subsídios para fundamentar as asserções do pesquisador.

A identificação, análise dos dados coletados, interpretação bem como o estabelecimento de relações entre os dados coletados com o problema de pesquisa foram feitos por meio da análise qualitativa. Gil (2008) descreve que a análise qualitativa de dados é feita geralmente em três etapas: redução, apresentação e conclusão/verificação.

Na primeira etapa, há, por parte do pesquisador, a seleção dos dados e estreitamento dos mesmos “em sumários organizados de acordo com os temas ou padrões definidos nos objetivos originais da pesquisa” (GIL, 2008, p. 175). Já na segunda etapa ocorre a organização dos dados para apresentá-los e analisá-los, por meio de diferentes estruturas (tabelas, diagramas, textos, mapas), possibilitando a compreensão do todo e a descrição de apontamentos coerentes aos objetivos. A conclusão/verificação consiste em abstrair a significação dos dados coletados, de modo a garantir a validade dos mesmos. Quanto à validade, Gil (2008, p. 176) salienta que “significa que as conclusões obtidas dos dados são dignas de crédito, defensáveis, garantidas e capazes de suportar explicações alternativas”.

A interpretação dos dados, de acordo com Gil (2008, p. 177), consiste na “obtenção de um sentido mais amplo para os dados analisados, o que se faz mediante sua ligação com conhecimentos disponíveis”, oriundos, portanto do referencial teórico.

2.3 PROCEDIMENTOS PARA SELEÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS

Para a realização desta pesquisa optamos por classificar e analisar as atividades propostas para a temática Binômio de Newton, nos segundos volumes dos livros didáticos de Matemática das coleções aprovadas no PNLD de 2015 e 2018. A opção pelo segundo volume de cada uma das coleções deve-se ao fato das diretrizes educacionais orientarem que a abordagem do conteúdo Binômio de Newton seja feita no segundo ano do Ensino Médio, conforme apresentado na Seção 1.2.

Ressaltamos que a escolha das coleções aprovadas no PNLD de 2015 e 2018 foi propositalmente estabelecida para que possamos desenvolver uma análise comparativa, verificando avanços e retrocessos, uma vez que há coleções do PNLD 2015 que foram excluídas no PNLD 2018 e outras acrescentadas.

As obras foram identificadas pelas letras LD1#-@, onde # assumirá o valor 5 ou 8, relacionando ao PNLD a qual o volume da coleção pertence, 2015 ou 2018 e @ é um número compreendido entre 1 a 8. Desta forma, os livros didáticos analisados serão tratados como LD15-1, LD15-2, LD15-3 LD15-4, LD15-5, LD15-6, LD18-1, LD18-2, LD18-3, LD18-4, LD18-5, LD18-6, LD18-7, LD18-8, conforme listado no Quadro 5.

Quadro 5: Lista de coleções didáticas de Matemática aprovadas pelo PNLD, edições de 2015 e 2018.

PNLD 2015				
Identificação	**Título do Livro**	**Autor(a)(s)**	**Editora/Edição**	**Ano**
LD15-1	Conexões com a Matemática	Fábio Martins de Leonardo	Moderna/ 2. ed.	2013
LD15-2	Matemática: contexto & aplicações	Luiz Roberto Dante	Ática/ 2. ed.	2013
LD15-3	Matemática Paiva	Manoel Rodrigues Paiva	Moderna/ 2. ed.	2013
LD5-4	Matemática – ciência e aplicações	Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, David Mauro Degenszajn, Roberto Périgo, Nilze Silveira de Almeida	Saraiva/ 7. ed.	2013
LD5-5	Matemática – Ensino Médio	Kátia Cristina Stocco Smole, Maria Ignez de Souza Vieira Diniz	Saraiva/ 8. ed.	2013
LD5-6	Novo Olhar: Matemática	Joamir Souza	FTD/ 2. ed	2013
PNLD 2018				
Identificação	**Título do Livro**	**Autor(a)(s)**	**Editora/Edição**	**Ano**
L18-1	Conexões com a Matemática	Fabio Martins de Leonardo	Moderna/ 3. ed.	2016
LD18-2	Matemática: contexto	Luiz Roberto Dante	Ática/ 3. ed.	2016

	& aplicações			
LD18-3	Matemática Paiva	Manoel Rodrigues Paiva	Moderna/ 3. ed.	2015
LD18-4	Matemática - ciência e aplicações	Gelson Iezzi, David Degenszajn, Nilze de Almeida, Osvaldo Dolce, Roberto Périgo	Saraiva/ 9. ed.	2016
LD18-5	Matemática para compreender o mundo	Kátia Stocco Smole, Maria Ignez Diniz	Saraiva/ 1. ed.	2016
LD18-6	#Contato Matemática	Joamir Souza, Jacqueline Garcia	FTD/ 1. ed.	2016
LD18-7	Quadrante – Matemática	Diego Prestes, Eduardo Chavante	SM/ 1. ed.	2016
LD18-8	Matemática: Interação e Tecnologia	Rodrigo Balestri	Leya/ 2. ed.	2016

Fonte: Elaborada pela autora com base nas informações disponíveis nos guias do livro didático de Matemática, edições de 2015 e 2018 - BRASIL (2014); BRASIL (2017).

As Figuras 11 e 12 mostram, respectivamente, os segundos volumes das coleções aprovadas no PNLD 2015 e PNLD 2018.

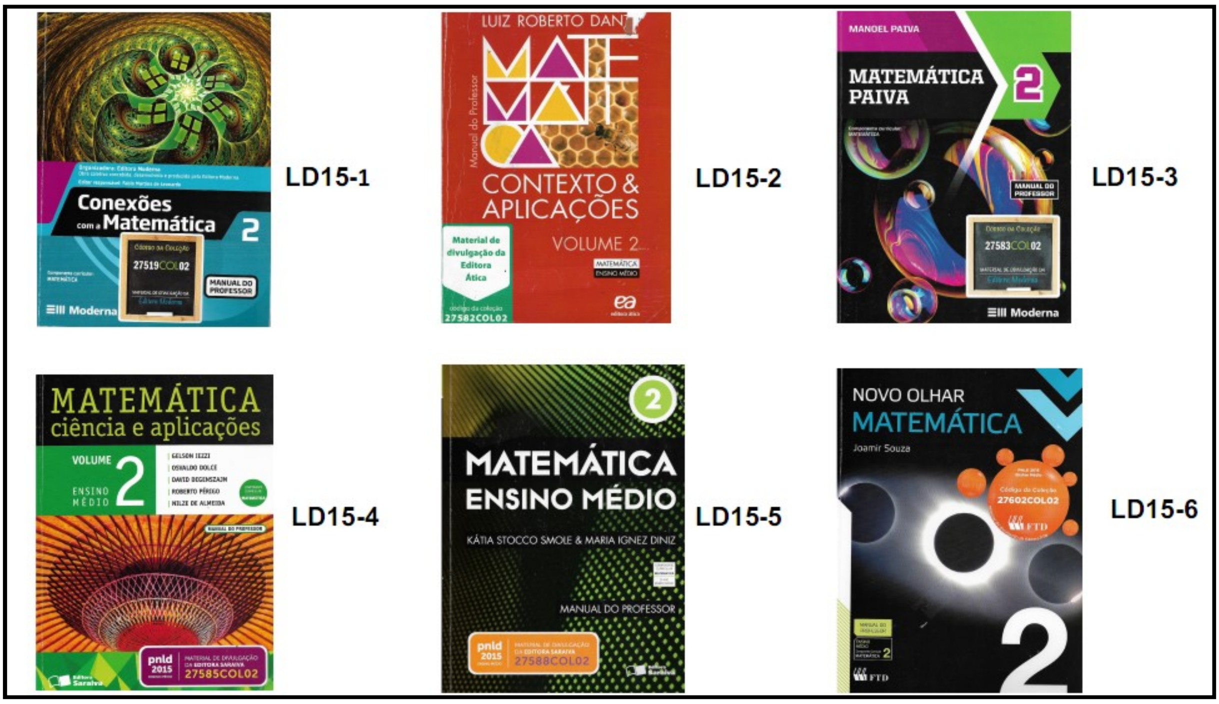


Figura 11: Segundos volumes das coleções de livros didáticos aprovadas no PNLD 2015.
Fonte: Elaboração própria.

Figura 12: Segundos volumes das coleções de livros didáticos aprovadas no PNLD 2018.
Fonte: Elaboração própria.

A escolha pelos segundos volumes das coleções disponibilizadas no PNLD 2015 e 2018, juntamente com a observância da presença ou ausência do conteúdo Binômio de Newton no sumário de cada livro didático constitui-se da primeira fase do método de análise qualitativa, a redução dos dados.

Na fase de coleta de dados, para obtermos impressões gerais da obra, utilizamos o Quadro 6. Neste, fizemos apontamentos sobre a presença do Binômio de Newton, as atividades de exemplo oferecidas sobre o mesmo, que não serão quantificadas nesta pesquisa, classificação das atividades propostas, forma de apresentação do Teorema Binomial e conteúdos relacionados ao Binômio de Newton, tais como Triângulo de Pascal, aspectos históricos e a presença ou ausência da Distribuição Binomial das Probabilidades. Estes aspectos são oriundos do referencial teórico discutido no Capítulo 1.

Quadro 6: Apontamentos sobre aspectos gerais dos segundos volumes das coleções aprovadas no PNLD 2015 e PNLD 2018.

LD#-@		
ASPECTOS GERAIS		
Apresenta o Tema Binômio de Newton	**SIM**	**NÃO**

<table>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Forma de apresentação do Binômio de Newton</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Termo Geral</td><td>SIM</td><td>NÃO</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Histórico sobre Binômio de Newton</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Apresenta Triângulo de Pascal</td><td>SIM</td><td>NÃO</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Histórico sobre Triângulo de Pascal</td><td>SIM</td><td>NÃO</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Apresenta e demonstra Propriedades do Triângulo de Pascal</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Distribuição Binomial das Probabilidades</td><td>SIM</td><td>NÃO</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Atividades de Distribuição Binomial das Probabilidades remetem a</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="3">Atividades resolvidas presentes na abordagem da temática Binômio de Newton</td></tr>
<tr><td rowspan="8">Atividades dadas como exemplos (não quantificadas na análise geral das obras)</td><td>Classificação</td><td>Quantidade</td></tr>
<tr><td>Exercícios de Reconhecimento</td><td></td></tr>
<tr><td>Exercícios de Algoritmos</td><td></td></tr>
<tr><td>Problemas Padrão</td><td></td></tr>
<tr><td>Problemas Processo</td><td></td></tr>
<tr><td>Problemas de Aplicação</td><td></td></tr>
<tr><td>Problemas Quebra-cabeça</td><td></td></tr>
<tr><td>Total</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">Atividades propostas para a temática Binômio de Newton</td></tr>
<tr><td rowspan="8">Classificação das atividades propostas</td><td>Classificação</td><td>Quantidade</td></tr>
<tr><td>Exercícios de Reconhecimento</td><td></td></tr>
<tr><td>Exercícios de Algoritmos</td><td></td></tr>
<tr><td>Problemas Padrão</td><td></td></tr>
<tr><td>Problemas Processo</td><td></td></tr>
<tr><td>Problemas de Aplicação</td><td></td></tr>
<tr><td>Problemas Quebra-cabeça</td><td></td></tr>
<tr><td>Total</td><td></td></tr>
</table>

Fonte: Elaborada pela autora.

A presença ou ausência do tema no segundo volume da coleção foi contemplada com observação do sumário da obra, sendo que para esse item do quadro marcamos com “X” a coluna correspondente ao valor SIM ou NÃO. Caso não seja constada a presença do tema na listagem de conteúdos do sumário a análise se encerra.

Verificada a presença do tema, prosseguimos a coleta de dados buscando, na seção da obra destinada a ele, a “forma de apresentação do Binômio de Newton”:

generalização de $(x + y)^n$, aplicação da propriedade distributiva em relação à adição e generalização de $(x + y)^n$ ou Princípio Fundamental da Contagem com generalização de $(x + y)^n$.

O "Termo Geral" visto na Seção 1.4, permite o cálculo de qualquer termo do desenvolvimento binomial sem a aplicação do Binômio de Newton. A esse item, assinalaremos com "X" a coluna correspondente ao valor SIM ou NÃO.

O uso da história no ensino da Matemática é defendido por Peters (2005, p. 30), pois para ele a história visa

> [...] mostrar as representações alternativas; explicitar a existência de dúvidas e contradições na matemática; o uso das fontes primárias como interlocutores; a simplicidade e motivação didática; a possibilidade de, com a história, mostrar a evolução das ideias e a história da matemática como fonte de redescobrimento e de "vitrine" para os aspectos culturais.

Por isso, para construir uma visão geral da obra optamos por observar a presença de aspectos históricos relacionados ao Binômio de Newton. No item "Histórico sobre Binômio de Newton", citamos se há algum aspecto histórico sendo abordado, por menor que seja, e constataremos equívocos, nos baseando no referencial teórico presente na Seção 1.4.3.

Na Seção 1.4.3.1 observamos a relação existente entre Binômio de Newton e o Triângulo de Pascal. Por isso, o item "Triângulo de Pascal" encontra-se emoldurado no Quadro 6. Marcamos com "X" a coluna correspondente ao valor SIM ou NÃO. Do mesmo modo que buscamos resquícios históricos sobre o Binômio de Newton, devido à importância destes, para o item "Histórico sobre Triângulo de Pascal" também apontamos com "X" a coluna correspondente ao valor SIM ou NÃO.

Como vimos na Seção 1.2, os documentos orientadores do currículo, especialmente as DCE (PARANÁ, 2018) determinam a abordagem do Binômio de Newton juntamente com temas relacionados a ele. Reforçamos, também, a necessidade da presença do tema Triângulo de Pascal nos livros didáticos e propriedades relacionadas a ele, pois, de acordo com as DCE

> [...] Tanto o teorema das colunas como o teorema das diagonais trazem implícito o argumento binomial e o argumento combinatório, o que possibilita articular esses conceitos com os presentes em outros conteúdos (PARANÁ, 2008, p. 61).

Isto posto, observamos que para o item “Apresenta e demonstra Propriedades do Triângulo de Pascal” do Quadro 6 foi atribuído o valor SIM, DEMONSTRA; SIM MAS NÃO DEMONSTRA OU NÃO.

O Binômio de Newton visto na Seção 1.4.4 é aplicado na Distribuição Binomial das Probabilidades, por isso, verificamos a presença deste na obra, assinalando com “X” a coluna correspondente ao valor SIM ou NÃO e trouxemos uma visão geral das atividades relacionados a ela, apontando situações a qual ela está envolvendo, expondo isso no item “Atividades de Distribuição Binomial das Probabilidades remetem a”, do Quadro 6.

Para contemplar os itens “Atividades dadas como exemplos (não quantificadas na análise geral das obras)” e “Classificação das atividades propostas”, nos apoiamos no Quadro 7, que apresenta a classificação das atividades presentes em cada obra, identificação e quantitativo das mesmas.

Quadro 7: Quadro com quantitativo e classificação da variedade de atividades presentes nos segundos volumes das coleções aprovadas no PNLD 2015 e PNLD 2018 para o conteúdo matemático Binômio de Newton.

Classificação das atividades presentes na obra			
Obra	Classificação	Identificação	Total
	Exercícios de Reconhecimento		
	Exercícios de Algoritmos		
	Problemas Padrão		
	Problemas Processo		
	Problemas de Aplicação		
	Problemas Quebra-Cabeça		
	Total Geral		

Fonte: Elaborada pela autora.

Os livros didáticos apresentam diferentes nomenclaturas para as atividades apresentadas (exercícios, problemas, problemas propostos). Ressaltamos que para coletar e classificá-las levamos em consideração as características elencadas por Dante (2000) e não a denominação constante nos livros didáticos.

Consideramos ainda, cada subitem de uma atividade como uma atividade independente. Isso significa que se a atividade XX tem subitens a e b, quantificaremos como duas atividades, indicadas por XXA e XXB. Na coluna identificação, apresentamos, conforme numeração presente no livro, as atividades delimitadas em cada um dos tipos de problemas.

Para garantir uma padronização na classificação das atividades, dentro da categorização proposta por Dante (2000), descrita na Seção 1.3.1, para os exercícios de reconhecimento e exercícios de algoritmos, buscamos nos enunciados das atividades, termos, os quais designamos por “palavras-chave”, que remetem aos objetivos delineados por Dante para cada um dos tipos de problemas e/ou conceitos matemáticos.

Assim, serão classificados como exercícios de reconhecimento questões que possuam em seu enunciado uma das seguintes “palavras-chave”: termo independente, termo médio ou central, número de termos. Notamos que essas palavras fazem alusão a conceitos matemáticos.

Já para classificarmos as atividades como exercícios de algoritmos, as “palavras-chave” são: efetue, desenvolva, calcule, determine, aplique, “n-ésimo” termo, termo “z” na potência “b”, ou seja, fazem referência à aplicação direta do algoritmo (Teorema Binomial ou fórmula do Termo Geral).

Observamos que há questões em que o enunciado usa “palavras-chave” que categorizam o problema a tipologias diferentes. Neste caso, buscamos conceitos incutidos nele. Por exemplo: “Calcule o termo independente de x...”. Notamos que para o aluno resolver a atividade é necessário recordar a definição de termo independente, sendo classificado, portanto, como exercício de reconhecimento.

Para os demais tipos de problemas, nos apoiamos diretamente nos objetivos e características descritas por Dante (2000) e na análise mostramos e justificamos, por meio de exemplos extraídos de cada obra, a afinação à classificação proposta pelo autor.

Com os aspectos gerais e classificação de problemas de cada obra delineados (Quadro 6 e Quadro 7), apresentamos reflexões e analisamos o perfil de cada uma, relacionando ao arcabouço teórico construído no Capítulo 1.

De modo a instigar a aprendizagem do Binômio de Newton, apresentamos, no Capítulo 4, diferentes problemas que levam em consideração os interesses e experiências dos educandos, estimulando o desenvolvimento de capacidades intelectuais sólidas, colaborando para que o conteúdo de Binômio de Newton, que, de modo geral, é tradicionalmente abordado, se torne compreensível e instigante, favorecendo o desenvolvimento de competências exigidas nos documentos reguladores da educação brasileira.

No próximo capítulo apresentamos a visão geral das obras analisadas e a classificação das atividades propostas para o conteúdo matemático Binômio de Newton.

3 ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA – VOLUME 2

Neste capítulo apresentamos uma visão geral da abordagem sobre a temática Binômio de Newton e analisamos qualitativamente as atividades propostas para o conteúdo nos segundos volumes dos livros didáticos de Matemática das coleções aprovadas nas edições de 2015 e 2018 do PNLD.

A análise consiste em identificar e categorizar, de acordo com a classificação proposta por Dante (2000), os diferentes tipos de atividades apresentadas nos livros, relacionando aos conceitos teóricos elencados no Capítulo 1, e refletir sobre o potencial almejado nas diretrizes oficiais de ensino para a formação do educando, quando da abordagem do conteúdo matemático Binômio de Newton.

3.1 CONEXÕES COM A MATEMÁTICA (2013)

Os autores do LD15-1, segunda edição, em sua apresentação, explicitam a preocupação de produzir uma obra com linguagem acessível ao aluno, com projeto editorial que "incentiva a leitura e a atribuição de significados aos conceitos matemáticos" (MODERNA, 2013, p. 3).

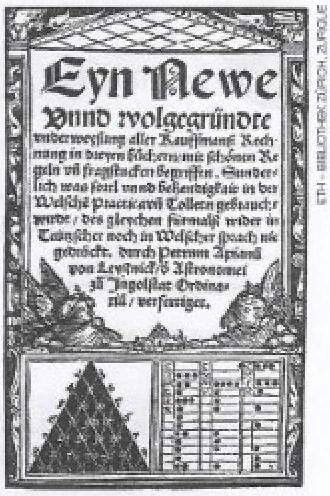
Quanto à apresentação dos conteúdos, os autores exploram uma sequência didática com uma situação contextualizada na abertura do capítulo, e mesclam teoria, exemplos, exercícios resolvidos e propostos. Ao término do capítulo há exercícios complementares e autoavaliação.

No capítulo dez, destinado á Análise Combinatória, apresenta-se o conteúdo Binômio de Newton. Inicialmente, o Triângulo de Pascal é definido e a partir deste associam-se os números que formam as linhas deste Triângulo aos coeficientes do desenvolvimento de um binômio genérico $(x + y)^n$, deduzindo a fórmula do Binômio de Newton e o Termo Geral, Figura 13.

8 Binômio de Newton

Antes de trabalharmos o conceito de binômio de Newton, vamos abordar o **triângulo de Pascal**. Chamamos de triângulo de Pascal a disposição dos coeficientes binomiais em linhas e colunas de forma que os coeficientes binomiais de mesmo numerador fiquem dispostos numa mesma linha, enquanto os de mesmo denominador são colocados numa mesma coluna.

$$
\begin{array}{lcccccccc}
 & \text{coluna 0} & \text{coluna 1} & \text{coluna 2} & \text{coluna 3} & \text{coluna 4} & \text{coluna 5} & & \text{coluna } n \\
\text{linha 0} & \binom{0}{0} \\
\text{linha 1} & \binom{1}{0} & \binom{1}{1} \\
\text{linha 2} & \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} \\
\text{linha 3} & \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} \\
\text{linha 4} & \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} \\
\text{linha 5} & \binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} \\
\text{linha } n & \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \binom{n}{3} & \binom{n}{4} & \binom{n}{5} & \cdots & \binom{n}{n}
\end{array}
$$



O frontispício da aritmética de Petrus Apianus, Ingolstadt, Alemanha, 1527, apresenta a primeira impressão do triângulo de Pascal, mais de um século antes de Pascal investigar as propriedades desse triângulo.

Calculando os valores dos coeficientes binomiais, encontramos outra representação para o triângulo de Pascal.

Observe que os números que formam as linhas desse triângulo são os coeficientes do desenvolvimento binomial $(x + y)^n$:

linha 0 1

linha 1 1 1

linha 2 1 2 1

linha 3 1 3 3 1

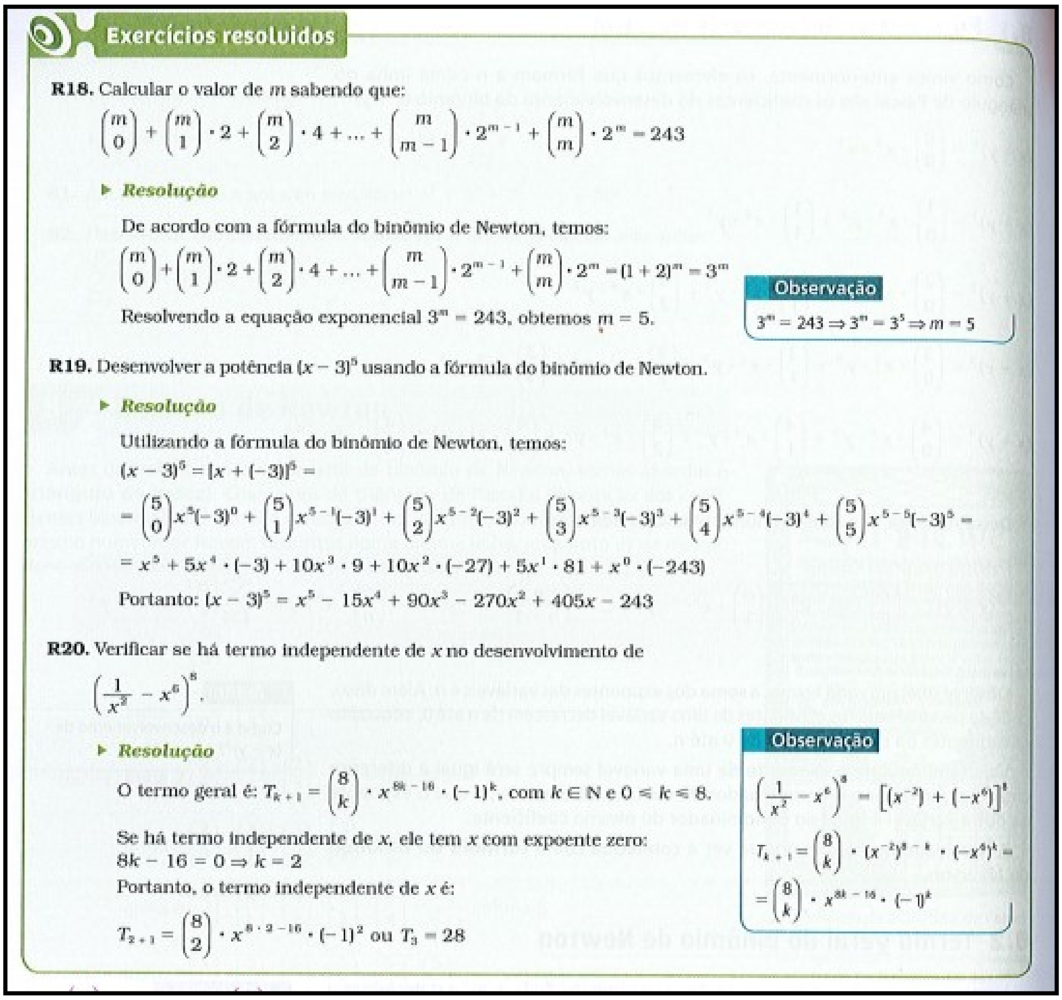
linha 4 1 4 6 4 1 — $(x + y)^4 = \mathbf{1}x^4 + \mathbf{4}x^3y + \mathbf{6}x^2y^2 + \mathbf{4}xy^3 + \mathbf{1}y^4$

linha 5 1 5 10 10 5 1 — $(x + y)^5 = \mathbf{1}x^5 + \mathbf{5}x^4y + \mathbf{10}x^3y^2 + \mathbf{10}x^2y^3 + \mathbf{5}xy^4 + \mathbf{1}y^5$

Figura 13: Trecho da obra LD15-1 onde se mostra a relação entre coeficientes binomiais e os coeficientes dos termos do desenvolvimento binomial.
Fonte: Moderna (2013, p. 264).

Notamos que não são apresentadas, tão pouco exploradas, as propriedades do Triângulo de Pascal (Seção 1.4.2.2), básicas para a construção do mesmo e, consequentemente, para o desenvolvimento binomial. Nada consta a respeito dos aspectos históricos em torno do Binômio de Newton, salvo a imagem da obra de Petrus Apianus, enfatizando a existência do Triângulo de Pascal antes mesmo de Pascal. Verificamos, portanto, uma abordagem histórica rasa dos conceitos apresentados.

No que se refere aos problemas resolvidos, são apresentadas três atividades. A atividade R18 é classificada como um problema padrão, pois para a resolução não está implícito o método a ser utilizado, enquanto que a atividade R19 é um exercício de algoritmo e R20 é um exercício de reconhecimento, conforme observamos na Figura 14.



Exercícios resolvidos

R18. Calcular o valor de m sabendo que:

$$\binom{m}{0} + \binom{m}{1}\cdot 2 + \binom{m}{2}\cdot 4 + \dots + \binom{m}{m-1}\cdot 2^{m-1} + \binom{m}{m}\cdot 2^m = 243$$

▸ ***Resolução***

De acordo com a fórmula do binômio de Newton, temos:

$$\binom{m}{0} + \binom{m}{1}\cdot 2 + \binom{m}{2}\cdot 4 + \dots + \binom{m}{m-1}\cdot 2^{m-1} + \binom{m}{m}\cdot 2^m = (1+2)^m = 3^m$$

Resolvendo a equação exponencial $3^m = 243$, obtemos $m = 5$.

Observação

$3^m = 243 \Rightarrow 3^m = 3^5 \Rightarrow m = 5$

R19. Desenvolver a potência $(x-3)^5$ usando a fórmula do binômio de Newton.

▸ ***Resolução***

Utilizando a fórmula do binômio de Newton, temos:

$(x-3)^5 = [x + (-3)]^5 =$

$$= \binom{5}{0}x^5(-3)^0 + \binom{5}{1}x^{5-1}(-3)^1 + \binom{5}{2}x^{5-2}(-3)^2 + \binom{5}{3}x^{5-3}(-3)^3 + \binom{5}{4}x^{5-4}(-3)^4 + \binom{5}{5}x^{5-5}(-3)^5 =$$

$$= x^5 + 5x^4\cdot(-3) + 10x^3\cdot 9 + 10x^2\cdot(-27) + 5x^1\cdot 81 + x^0\cdot(-243)$$

Portanto: $(x-3)^5 = x^5 - 15x^4 + 90x^3 - 270x^2 + 405x - 243$

R20. Verificar se há termo independente de x no desenvolvimento de $\left(\frac{1}{x^2} - x^6\right)^8$.

▸ ***Resolução***

O termo geral é: $T_{k+1} = \binom{8}{k}\cdot x^{8k-16}\cdot(-1)^k$, com $k \in \mathbb{N}$ e $0 \leq k \leq 8$.

Se há termo independente de x, ele tem x com expoente zero:

$8k - 16 = 0 \Rightarrow k = 2$

Portanto, o termo independente de x é:

$T_{2+1} = \binom{8}{2}\cdot x^{8\cdot 2-16}\cdot(-1)^2$ ou $T_3 = 28$

Observação

$\left(\frac{1}{x^2} - x^6\right)^8 = [(x^{-2}) + (-x^6)]^8$

$T_{k+1} = \binom{8}{k}\cdot(x^{-2})^{8-k}\cdot(-x^6)^k =$

$= \binom{8}{k}\cdot x^{8k-16}\cdot(-1)^k$

Figura 14: Atividades resolvidas propostas na obra LD15-1.
Fonte: Moderna (2013, p. 266).

As atividades propostas para a temática Binômio de Newton perfazem um total de quatorze. Destas, duas são exercícios de reconhecimento (65, 67A), oito são exercícios de algoritmos (63A, 63B, 63C, 64A, 64B, 64C, 64D, 66), e quatro são problemas padrão (67B, 67C, 67D, 68).

Observamos que as atividades 67B, 67C e 67D possuem essa rotulagem por necessitarem a "tradução" para a linguagem matemática, de modo a utilizar ou a fórmula do Termo Geral ou o Teorema Binomial, conforme visto na Figura 15.

67. Classifique em verdadeiro ou falso e justifique sua resposta. No desenvolvimento do binômio $(x + 3y)^9$:

a) existem 9 termos. Ver resolução no Guia do professor.

b) o coeficiente de x^5 é ímpar.

c) o coeficiente de y^7 é par.

d) a soma dos coeficientes é menor que 1.000.

Figura 15: Problemas padrão (67B, 67C, 67D) propostos na obra LD15-1.
Fonte: Moderna (2013, p. 266).

Já os exercícios de algoritmos 64A, 64B, 64C, 64D, (Figura 16) não deixam dúvidas da sua finalidade: reforçar a aplicação do Teorema Binomial e da Fórmula do Termo Geral. Nota-se que o exercício 65 é semelhante à atividade resolvida R20 e configura-se como um exercício de reconhecimento. Observamos que a presença do exemplo resolvido limita o aluno a investigar ou tentar lembrar o conceito de termo independente.

64. Faça a expansão dos binômios abaixo:
Ver resolução no Guia do professor.

a) $(x^2 - y^2)^3$ **c)** $\left(x + \frac{1}{x}\right)^6$

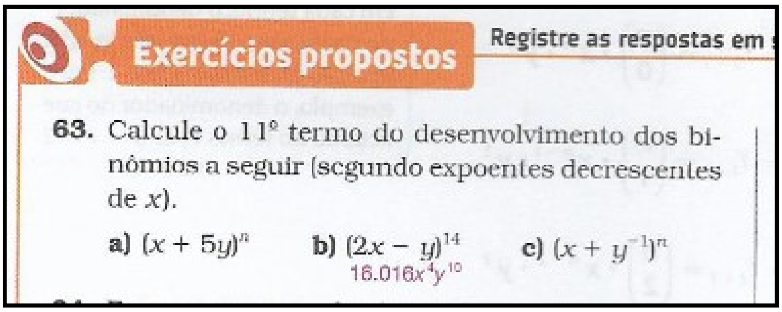
b) $\left(1 + \frac{x}{2}\right)^4$ **d)** $\left(2x - \frac{1}{x}\right)^8$

65. No desenvolvimento de $\left(x^2 + \frac{2}{x}\right)^{12}$ encontre e simplifique o termo independente de x. 126.720

Figura 16: Exercícios de algoritmos e exercício de reconhecimento propostos na obra LD15-1.
Fonte: Moderna (2013, p. 266).

As atividades identificadas pelos números 63A, 63B e 63C também são exercícios algoritmos, pois temos a aplicação direta da fórmula do Termo Geral do

Binômio de Newton, conforme observamos na Figura 17.



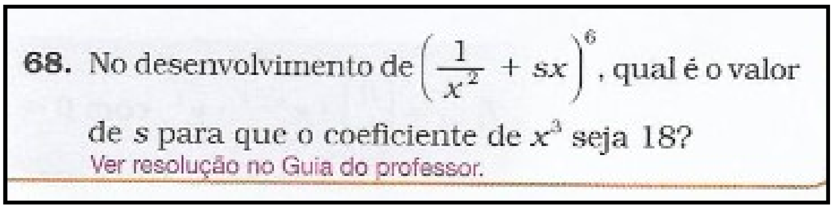
Exercícios propostos Registre as respostas em

63. Calcule o 11º termo do desenvolvimento dos binômios a seguir (segundo expoentes decrescentes de x).

a) $(x + 5y)^n$ **b)** $(2x - y)^{14}$ $16.016x^4y^{10}$ **c)** $(x + y^{-1})^n$

Figura 17: Exercícios algoritmos propostos na obra LD15-1.
Fonte: Moderna (2013, p. 266).

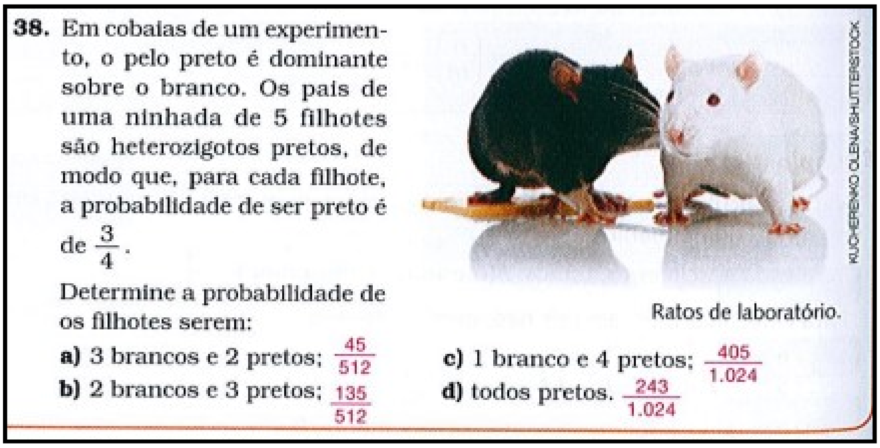
Já o problema proposto 68, Figura 18, é um problema do tipo padrão, pois está incutido que os alunos apenas apliquem a fórmula do Termo Geral para resolver.



68. No desenvolvimento de $\left(\frac{1}{x^2} + sx\right)^6$, qual é o valor de s para que o coeficiente de x^3 seja 18?
Ver resolução no Guia do professor.

Figura 18: Problema padrão proposto na obra LD15-1.
Fonte: Moderna (2013, p. 266).

Verificamos que a Distribuição Binomial das Probabilidades, uma das aplicações do Binômio de Newton, conforme discorremos na Seção 1.4.4, é apresentada no capítulo onze sobre probabilidades, mas em nenhum momento a Distribuição Binomial é relacionada ao Binômio de Newton. As atividades propostas 38A, 38B, 38C e 38D, Figura 19, sugerem uma discussão interdisciplinar com a disciplina de Biologia, pois há diversos termos da genética incutidos na mesma, entretanto podem ser categorizadas como exercícios de algoritmos, pois reforçam a aplicação da Distribuição Binomial das Probabilidades, apresentada nessa seção do livro.



38. Em cobaias de um experimento, o pelo preto é dominante sobre o branco. Os pais de uma ninhada de 5 filhotes são heterozigotos pretos, de modo que, para cada filhote, a probabilidade de ser preto é de $\frac{3}{4}$.

Determine a probabilidade de os filhotes serem:

a) 3 brancos e 2 pretos; $\frac{45}{512}$

b) 2 brancos e 3 pretos; $\frac{135}{512}$

c) 1 branco e 4 pretos; $\frac{405}{1.024}$

d) todos pretos. $\frac{243}{1.024}$

Ratos de laboratório.

KUCHERENKO OLENA/SHUTTERSTOCK

Figura 19: Exercícios de algoritmos com tema interdisciplinar proposto na obra LD15-1.
Fonte: Moderna (2013, p. 290).

Notamos que o presente livro didático primou pela abordagem de atividades que reforçam a fixação de conhecimentos, pois inicialmente explora-se o conteúdo matemático para depois apresentar problemas, e esses, por sua vez, priorizam conceitos, técnicas e procedimentos ante ao desenvolvimento da criticidade, curiosidade e motivação, de modo que, posteriormente, o aluno possa associar as situações relacionadas a outras áreas do saber.

Apresentamos no Quadro 8 a classificação, identificação e quantitativo das atividades propostas na obra LD15-1 para a temática Binômio de Newton.

Quadro 8: Síntese da classificação das atividades presentes na obra LD15-1.

Classificação das atividades presentes na obra			
Obra	Classificação	Identificação	Total
LD15-1	Exercícios de Reconhecimento	65, 67A	2
	Exercícios de Algoritmos	63A, 63B, 63C, 64A, 64B, 64C, 64D, 66, 67A	9
	Problemas Padrão	67B, 67C, 67D, 68	4
	Problemas Processo	------	0
	Problemas de Aplicação	------	0
	Problemas Quebra-cabeça	------	0
		Total Geral	14

Fonte: Elaborada pela autora.

3.2 MATEMÁTICA: CONTEXTO & APLICAÇÕES (2013)

Trata-se da segunda edição da obra, onde na apresentação o autor evidencia a preocupação de exibir os conceitos matemáticos de “maneira simples e compreensível” (DANTE, 2013, p. 3), primando pela aplicação dos conteúdos à resolução de problemas do mundo real. A distribuição dos conteúdos é feita em unidades, compostas por capítulos que se dividem nos conteúdos básicos.

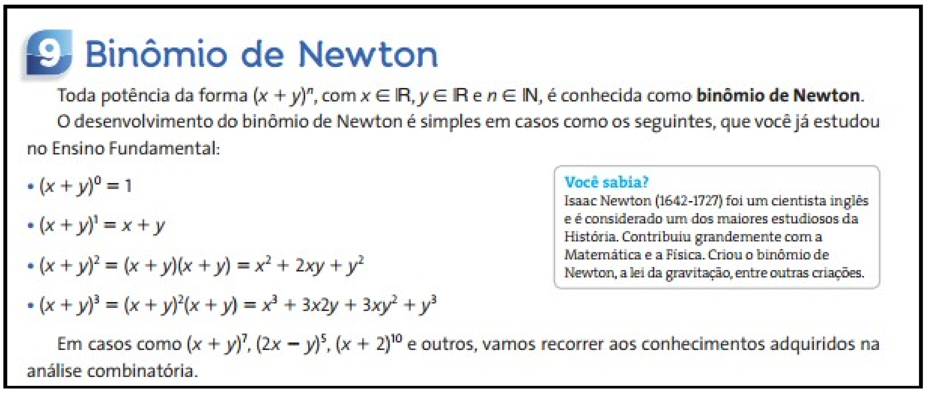
O conteúdo de Binômio de Newton foi enquadrado na unidade quatro - Análise Combinatória e Probabilidade, capítulo onze, denominado Análise Combinatória. Conforme descrito na apresentação, na introdução da unidade há um problema envolvendo Análise Combinatória e Probabilidade. O problema desmistifica uma curiosidade natural de qualquer ser humano: como é definida a cor dos olhos e questiona a probabilidade de um casal ter filhos de olhos azuis. Observando as proposições elencadas pelo autor sob o olhar biológico, podemos ver algumas falhas teóricas, ao citar, por exemplo, que para determinar a cor da íris humana estão envolvidos “4 pares de genes que determinam 9 tonalidades distintas” DANTE (2013, p. 240).

Venturieri e Rosa (2010, p. 20) explicam que para definir essa característica pelo menos dois genes estão envolvidos, havendo cinco possíveis tonalidades diferentes de cor de olhos. O equívoco do autor talvez esteja em contar o alelo de cada gene como um gene independente. Observamos que, considerando um homem heterozigótico para ambos os genes, o mesmo terá genótipo AaBb. De fato, teremos dois pares de genes e não quatro pares.

Sobre o conteúdo matemático Binômio de Newton, há uma definição do que são números binomiais e algumas propriedades, entretanto são expressas sem demonstrá-las. Hierarquicamente, é apresentado o Triângulo de Pascal, a propriedade dos números binomiais complementares, propriedade das linhas e a Relação de Stifel, sem demonstrá-las.

Na seção de Leitura, o autor apresenta aspectos históricos sobre o Triângulo de Pascal, discorrendo sobre suas diferentes nomenclaturas e expondo o que consagrou com o nome de Triângulo de Pascal.

Sobre a abordagem do Binômio de Newton, na seção “Você Sabia?” o autor atribui equivocadamente a Newton a “invenção” do Binômio de Newton, conforme mostramos na Figura 20.



9 Binômio de Newton

Toda potência da forma $(x + y)^n$, com $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, é conhecida como **binômio de Newton**.

O desenvolvimento do binômio de Newton é simples em casos como os seguintes, que você já estudou no Ensino Fundamental:

- $(x + y)^0 = 1$
- $(x + y)^1 = x + y$
- $(x + y)^2 = (x + y)(x + y) = x^2 + 2xy + y^2$
- $(x + y)^3 = (x + y)^2(x + y) = x^3 + 3x2y + 3xy^2 + y^3$

Você sabia?
Isaac Newton (1642-1727) foi um cientista inglês e é considerado um dos maiores estudiosos da História. Contribuiu grandemente com a Matemática e a Física. Criou o binômio de Newton, a lei da gravitação, entre outras criações.

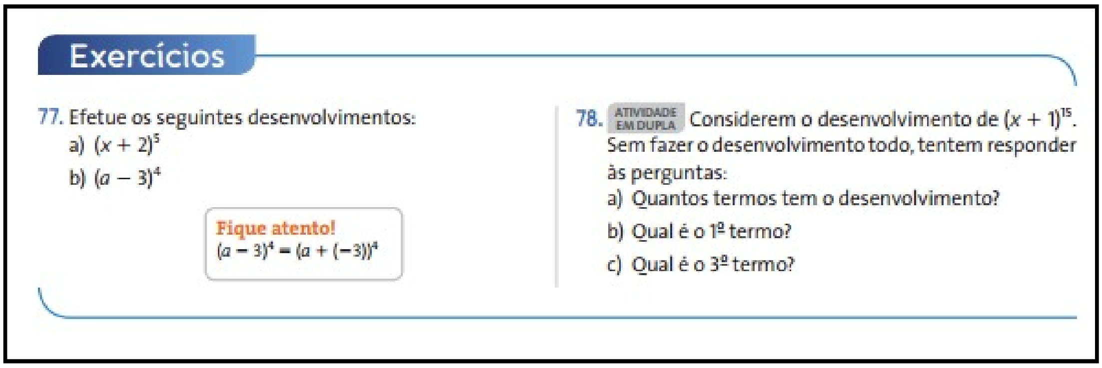
Em casos como $(x + y)^7$, $(2x - y)^5$, $(x + 2)^{10}$ e outros, vamos recorrer aos conhecimentos adquiridos na análise combinatória.

Figura 20: Fragmento da obra LD15-2 com informação equivocada.
Fonte: Dante (2013, p. 264).

Basicamente, o autor apresenta um artifício para o desenvolvimento do Binômio de Newton, discorrendo que, no desenvolvimento de um binômio do tipo $(x + y)^n$, “os expoentes de x começam em n e decrescem de 1 em 1 até 0, enquanto os expoentes de y começam em 0 e crescem de 1 em 1 até n.”, (DANTE, 2013, p. 264). Tão pouco se deduz a fórmula do Termo Geral do Binômio, útil na aplicação da Distribuição Binomial das Probabilidades.

No exemplo apresentado pelo autor, é feito o desenvolvimento de $(x + a)^5$, ou seja, temos um exercício de algoritmo, com a mera reprodução da “receita” descrita pelo autor.

Sobre essa temática são exploradas cinco atividades no livro, sendo que quatro são exercícios de algoritmos (77A, 77B, 78B, 78C), visando a reprodução do Teorema Binomial, e um exercício de reconhecimento (78A) que objetiva recordar a propriedade do número de termos do desenvolvimento binomial, conforme Figura 21.



Exercícios

77. Efetue os seguintes desenvolvimentos:
a) $(x + 2)^5$
b) $(a - 3)^4$

Fique atento!
$(a - 3)^4 = (a + (-3))^4$

78. ATIVIDADE EM DUPLA Considerem o desenvolvimento de $(x + 1)^{15}$. Sem fazer o desenvolvimento todo, tentem responder às perguntas:
a) Quantos termos tem o desenvolvimento?
b) Qual é o 1º termo?
c) Qual é o 3º termo?

Figura 21: Exercícios de algoritmos e exercício de reconhecimento sobre Binômio de Newton na obra LD15-2.
Fonte: Dante (2013, p. 265).

Como assunto opcional, o autor apresenta a Distribuição Binomial das Probabilidades, evidenciando a relação entre o Binômio de Newton e a mesma, apresentando a resolução de alguns exemplos, porém todos relacionados ao cálculo da probabilidade do sexo no nascimento de crianças. Ainda, não deixou claro em que tipo de experimentos a Distribuição Binomial das Probabilidades é válida.

Quanto as atividades relacionados à Distribuição Binomial das Probabilidades, são propostas dez atividades, sendo que seis estão relacionadas com conhecimentos básicos da Biologia (determinação do sexo).

Apesar de haver uma seção destinada exclusivamente a aplicações de probabilidade à Genética, com terminologias da Biologia mais refinadas, o autor ignora o potencial do Teorema Binomial para abordar problemas processo ou problemas de aplicação, de modo a expandir a aplicabilidade do Teorema Binomial.

Nesta obra percebemos que o autor optou por discorrer brevemente a temática Binômio de Newton, retomando-a quando da abordagem do Método Binomial, trazido como assunto opcional, ou seja, notamos um esvaziamento teórico da temática, deixando-a em segundo plano rebaixando a aplicabilidade do Binômio de Newton em diferentes situações. Há também equívocos no tocante ao histórico da temática, distorcendo a importância da história no ensino da Matemática.

Apresentamos no Quadro 9 a classificação, identificação e quantitativo das atividades propostas na obra LD15-2 para a temática Binômio de Newton.

Quadro 9: Síntese da classificação das atividades presentes na obra LD15-2.

Classificação das atividades presentes na obra			
Obra	Classificação	Identificação	Total
LD15-2	Exercícios de Reconhecimento	77A, 77B, 78B, 78C	4
	Exercícios de Algoritmos	78A	1
	Problemas Padrão	------	0
	Problemas Processo	------	0
	Problemas de Aplicação	------	0
	Problemas Quebra-cabeça	------	0
		Total Geral	5

Fonte: Elaborada pela autora.

3.3 MATEMÁTICA PAIVA (2013)

Manoel Paiva, autor da segunda edição deste livro didático, versa na apresentação da obra, que oferece conteúdos fundamentais para o Ensino Médio, e prima, em cada capítulo, por estimular a reflexão sobre o mesmo, através da contextualização. Além disso, oferece um amplo arcabouço de atividades: problemas resolvidos, problemas propostos e complementares, trabalho em equipe que visa oferecer uma temática para pesquisa, de modo a estimular discussões e generalizações entre os alunos, além do roteiro de trabalho que mensura a capacidade de síntese e argumentação dos alunos. Há ainda a seção de análise de resolução, cujo objetivo é refletir sobre os erros mais comuns quando da resolução de problemas.

No capítulo dez, denominado Agrupamento e Métodos de Contagem, insere-se o conteúdo do Binômio de Newton. A abordagem inicia com um histórico sobre os trabalhos de Newton, e evidencia que Newton demonstrou o Teorema Binomial para expoente natural, Figura 22, o que sabemos ser um equívoco (Seção 1.4.3.2).

Por meio desse raciocínio, Isaac Newton demonstrou que:

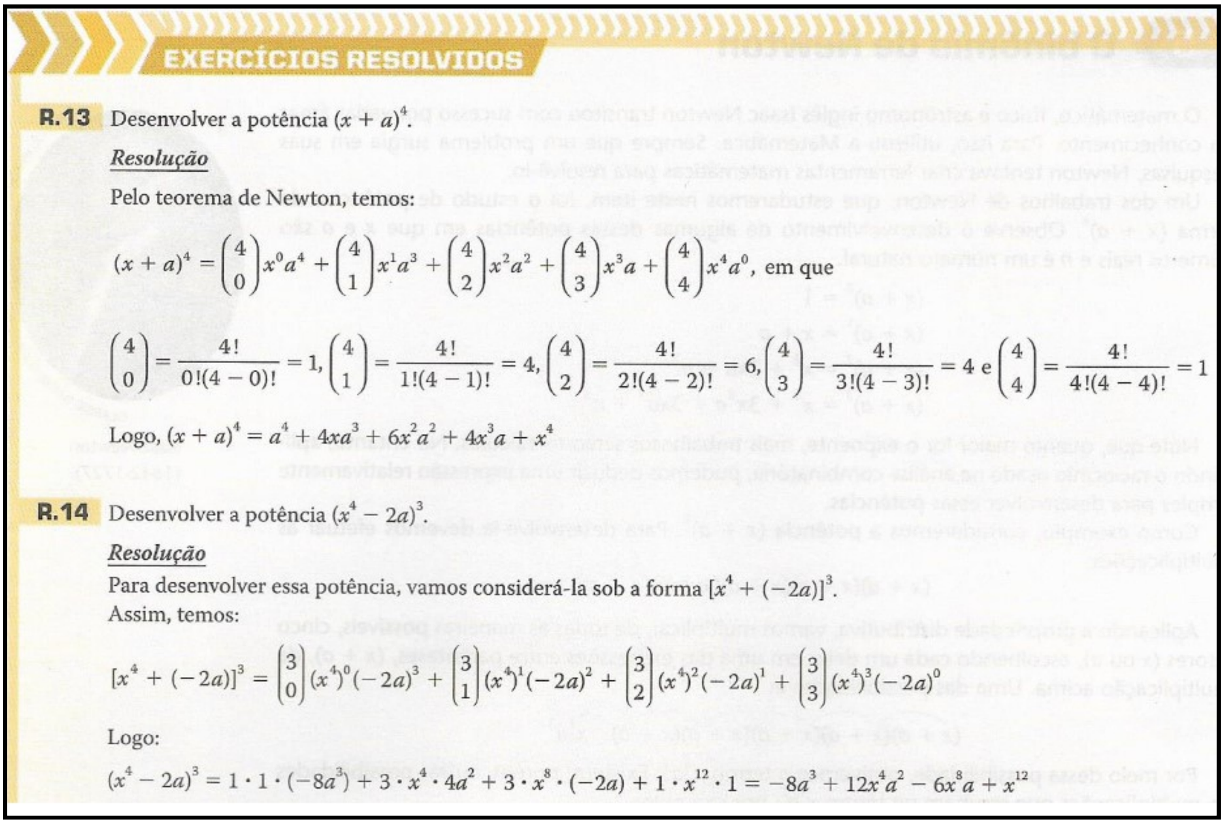
$$(x + a)^n = \binom{n}{0} x^0 a^n + \binom{n}{1} x^1 a^{n-1} + \binom{n}{2} x^2 a^{n-2} + \ldots + \binom{n}{p} x^p a^{n-p} + \ldots + \binom{n}{n} x^n a^0$$

em que x e a representam números quaisquer, $n \in \mathbb{N}$ e cada um dos símbolos $\binom{n}{p}$ representa $C_{n,\,p}$ e é lido como "número binomial n sobre p".

Figura 22: Fragmento da obra LD15-3 atribuindo a Newton o Teorema Binomial.
Fonte: Paiva (2013, p. 175).

O autor, por meio da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, associa as diferentes maneiras de escolher os fatores para efetuar o produto, relacionando a uma combinação simples e generaliza para o Teorema do Binômio do Newton. No teorema, o número binomial é citado, entretanto em nenhum momento é enfatizada a relação com o Triângulo de Pascal. A fórmula do Termo Geral não foi explorada.

São propostas duas atividades resolvidas (R.13 e R.14), categorizadas como exercícios de algoritmos, pois, remetem a fixação do Teorema Binomial com a aplicação direta do mesmo, conforme observado na Figura 23.



EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.13 Desenvolver a potência $(x + a)^4$.

Resolução

Pelo teorema de Newton, temos:

$$(x+a)^4 = \binom{4}{0}x^0a^4 + \binom{4}{1}x^1a^3 + \binom{4}{2}x^2a^2 + \binom{4}{3}x^3a + \binom{4}{4}x^4a^0, \text{ em que}$$

$$\binom{4}{0} = \frac{4!}{0!(4-0)!} = 1, \binom{4}{1} = \frac{4!}{1!(4-1)!} = 4, \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6, \binom{4}{3} = \frac{4!}{3!(4-3)!} = 4 \text{ e } \binom{4}{4} = \frac{4!}{4!(4-4)!} = 1$$

Logo, $(x + a)^4 = a^4 + 4xa^3 + 6x^2a^2 + 4x^3a + x^4$

R.14 Desenvolver a potência $(x^4 - 2a)^3$.

Resolução

Para desenvolver essa potência, vamos considerá-la sob a forma $[x^4 + (-2a)]^3$.
Assim, temos:

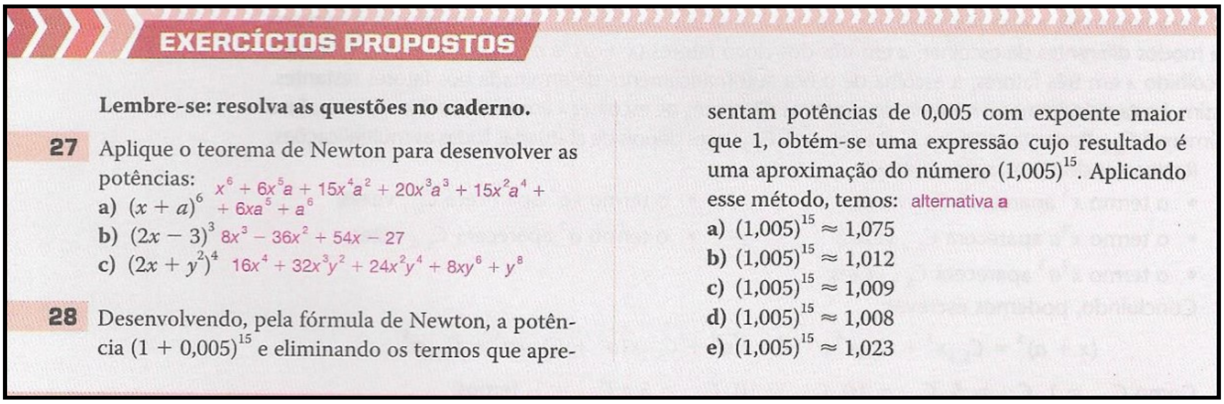
$$[x^4 + (-2a)]^3 = \binom{3}{0}(x^4)^0(-2a)^3 + \binom{3}{1}(x^4)^1(-2a)^2 + \binom{3}{2}(x^4)^2(-2a)^1 + \binom{3}{3}(x^4)^3(-2a)^0$$

Logo:

$$(x^4 - 2a)^3 = 1 \cdot 1 \cdot (-8a^3) + 3 \cdot x^4 \cdot 4a^2 + 3 \cdot x^8 \cdot (-2a) + 1 \cdot x^{12} \cdot 1 = -8a^3 + 12x^4a^2 - 6x^8a + x^{12}$$

Figura 23: Exercícios de algoritmos presentes na obra LD15-3 (atividades resolvidas).
Fonte: Paiva (2013, p. 176).

Quanto às atividades propostas aos alunos, num total de quatro, todas são exercícios de algoritmos (27A, 27B, 27C, 28), as três primeiras similares as atividades resolvidas. A atividade 28 expõe a aplicação do Teorema do Binômio de Newton ao cálculo de juros compostos (Seção 1.4.4.1), Figura 24.



EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Lembre-se: resolva as questões no caderno.

27 Aplique o teorema de Newton para desenvolver as potências:

a) $(x + a)^6$ $x^6 + 6x^5a + 15x^4a^2 + 20x^3a^3 + 15x^2a^4 + 6xa^5 + a^6$

b) $(2x - 3)^3$ $8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$

c) $(2x + y^2)^4$ $16x^4 + 32x^3y^2 + 24x^2y^4 + 8xy^6 + y^8$

28 Desenvolvendo, pela fórmula de Newton, a potência $(1 + 0{,}005)^{15}$ e eliminando os termos que apresentam potências de 0,005 com expoente maior que 1, obtém-se uma expressão cujo resultado é uma aproximação do número $(1{,}005)^{15}$. Aplicando esse método, temos: alternativa a

a) $(1{,}005)^{15} \approx 1{,}075$

b) $(1{,}005)^{15} \approx 1{,}012$

c) $(1{,}005)^{15} \approx 1{,}009$

d) $(1{,}005)^{15} \approx 1{,}008$

e) $(1{,}005)^{15} \approx 1{,}023$

Figura 24: Exercícios de algoritmos propostos na obra LD15-3.
Fonte: Paiva (2013, p. 176).

Nas atividades complementares, não contabilizadas para análise, o autor explora novamente uma aplicação similar a atividade 28, mas no corpo da atividade sugere a aplicação do Binômio de Newton, não dando margem para que o aluno possa, por si só, raciocinar/arquitetar um modelo de resolução.

No roteiro de trabalho, bem como análise de resolução não estão relacionadas questões referentes ao Binômio de Newton. Observa-se também a inexistência da atividade "trabalho em equipe" nesta seção. Por se tratar de uma pesquisa, o autor poderia ter subsidiado um levantamento teórico a respeito dos conteúdos relacionados ao Binômio de Newton, tais como: Triângulo de Pascal: histórico e suas propriedades, Método Binomial e diferentes aplicações.

Quando o autor apresenta seu livro, sugere que as atividades propostas, objetivam, "aplicação mais imediata dos conteúdos, além de algumas conexões com o cotidiano" (PAIVA, 2013, p. 3). Observamos que o tratamento do conteúdo Binômio de Newton nesta obra foi extremamente superficial, primando pela "absorção" do método, ante a aplicabilidade a diferentes temáticas.

No Quadro 10 apresentamos a classificação, identificação e quantitativo das atividades propostas para a temática Binômio de Newton na obra LD15-3.

Quadro 10: Síntese da classificação das atividades presentes na obra LD15-3.

Classificação das atividades presentes na obra			
Obra	Classificação	Identificação	Total
LD15-3	Exercícios de Reconhecimento	------	0
	Exercícios de Algoritmos	27A, 27B, 27C, 28	4
	Problemas Padrão	------	0
	Problemas Processo	------	0
	Problemas de Aplicação	------	0
	Problemas Quebra-cabeça	------	0
		Total Geral	4

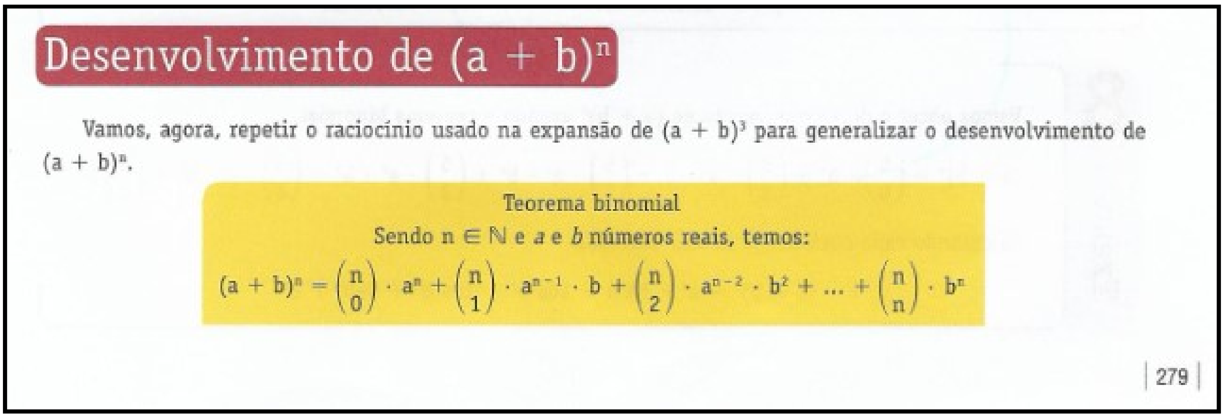
Fonte: Elaborada pela autora.

3.4 MATEMÁTICA – CIÊNCIA E APLICAÇÕES (2013)

Em sua sétima edição, a obra concebida por cinco autores, opta, de acordo com eles, em apresentar "alguns assuntos" através de relatos históricos. Os autores primam pela contextualização, além de sutilmente formalizar propriedades matemáticas apresentadas. Quanto às atividades, os autores citam que estão organizadas "em ordem crescente de dificuldade" (IEZZI *et al.*, 2013, p. 3). Apresentam também, ao fim de cada tema, um problema do tipo quebra-cabeça, que de acordo com os autores, objetiva o aluno a "exercitar a reflexão sobre os mais diversos tipos de problemas" (IEZZI *et al.*, 2013, p. 3), pois pode não ter relação direta a temática estudada.

O livro está organizado em dezesseis capítulos, sendo que a temática Binômio de Newton encontra-se no capítulo de número quinze – Análise Combinatória.

A temática é introduzida com o desenvolvimento do Binômio $(a + b)^3$. Através de um diagrama de árvore (Princípio Fundamental da Contagem), descrevem todos os produtos possíveis de (a + b).(a + b).(a + b). Cada coeficiente dos termos é descrito como uma permutação com elementos repetidos (combinação simples), conteúdo amplamente discutido em seções anteriores da obra. A partir desse caso específico, generalizam o desenvolvimento de $(a + b)^n$, para n natural, definindo o Teorema Binomial, Figura 25.



Desenvolvimento de $(a + b)^n$

Vamos, agora, repetir o raciocínio usado na expansão de $(a + b)^3$ para generalizar o desenvolvimento de $(a + b)^n$.

Teorema binomial

Sendo $n \in \mathbb{N}$ e *a* e *b* números reais, temos:

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} \cdot a^n + \binom{n}{1} \cdot a^{n-1} \cdot b + \binom{n}{2} \cdot a^{n-2} \cdot b^2 + \ldots + \binom{n}{n} \cdot b^n$$

| 279 |

Figura 25: Teorema Binomial descrito na obra LD15-4.
Fonte: Iezzi *et al.* (2013, p. 279).

A demonstração do mesmo é feita com base na propriedade distributiva do produto em relação à adição, de maneira objetiva, para alunos do Ensino Médio é plausível de entendimento.

Os exemplos, ou seja, as atividades resolvidas desta seção (Exemplo 8 e 9, exercícios resolvidos 14, 15) remetem ao uso do Teorema Binomial ou Termo Geral do Binômio, Figura 26, sendo, portanto, categorizados como exercícios de algoritmos. Já o exercício 16 versa sobre o cálculo do termo independente de x, sendo, portanto, exercício de reconhecimento.

9 Exemplo

No desenvolvimento de $\left(x^2 + \frac{3}{y}\right)^8$, segundo potências decrescentes de x, é possível sabermos qual é o termo que contém a potência x^{10} sem conhecermos todo o desenvolvimento.

O termo geral desse binômio é:

$$\binom{8}{k} \cdot (x^2)^{8-k} \cdot \left(\frac{3}{y}\right)^k = \binom{8}{k} \cdot x^{16-2k} \cdot \frac{3^k}{y^k}, \text{ para } k = 0, 1, 2, \ldots, 8 \quad (*)$$

A fim de determinar o termo que contém x^{10}, basta fazer: $16 - 2k = 10 \Rightarrow k = 3$ (convém em (*))

Logo, o termo pedido é:

$$\binom{8}{3} \cdot \frac{x^{10} \cdot 3^3}{y^3} = \frac{1512x^{10}}{y^3}$$

Observe que esse termo ocupa a 4ª posição do desenvolvimento.

Figura 26: Exemplo exercício de algoritmo proposto na obra LD15-4.
Fonte: Iezzi *et al*. (2013, p. 283).

Há vinte e sete atividades sobre Binômio de Newton. Classificamos como exercícios de reconhecimento as atividades 79, 82A, 82B, 82D, 85B, 86, 87D, 88A, 88B. A atividade 79 tem essa classificação, pois o aluno precisa lembrar a conformação do Binômio de Newton. As demais estão relacionadas aos conceitos de termo independente, termo central quando do desenvolvimento do Binômio, Na Figura 27, observamos a atividade 79.

79. Encontre o valor de:

$$99^5 + 5 \cdot 99^4 + 10 \cdot 99^3 + 10 \cdot 99^2 + 5 \cdot 99 + 1$$

Figura 27: Exercício de reconhecimento proposto na obra LD15-4.
Fonte: Iezzi *et al*. (2013, p. 282).

Observamos que nesta atividade, os autores pretendem que o aluno relembre que os termos referem-se ao desenvolvimento do Binômio $(99 + 1)^5$. Obviamente que o resultado da expressão proposta do exercício é 100^5.

Já as atividades 76A, 76B, 76C, 77A, 77B, 77C, 78A, 78B, 83A, 83B, 87A, 87B, 87C são exercícios de algoritmos, pois requerem a aplicação direta ou do Binômio de Newton ou da Fórmula do Termo Geral. Vejamos o enunciado das atividades 83A e 83B, na Figura 28.

83. No desenvolvimento de $\left(\frac{2x}{3}+y^2\right)^8$, segundo potências decrescentes de *x*, determine:

a) o 3º termo; b) o 8º termo.

Figura 28: Exercícios de algoritmos propostos na obra LD15-4.
Fonte: Iezzi *et al*. (2013, p. 283).

Os problemas padrão relacionados ao conteúdo matemático do Binômio de Newton são cinco, identificados pelos números: 80, 81, 82C, 84, 85A. Observamos, na Figura 29, os problemas 80 e 81 que, para resolução, requerem a aplicação do Teorema Binomial. Para isso, o aluno terá que transpor da linguagem usual para a matemática, não requerendo elaboração de qualquer estratégia.

80. Sabendo que a > b, resolva o sistema:

$$\begin{cases} a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4 = 81 \\ a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 = 1024 \end{cases}$$

81. Qual é o valor de: $y = (1+x)^4 + (1-x)^4$?

Figura 29: Problemas padrão propostos na obra LD15-4.
Fonte: Iezzi *et al*. (2013, p. 282).

Nesta obra, os autores abordam, no capítulo sobre probabilidade, a Distribuição Binomial das Probabilidades, enfatizando a relação existente entre o cálculo da probabilidade de eventos que se repetem várias vezes com o Binômio de Newton.

Além da apresentação da temática com um problema relacionado a probabilidade de acertos de questões em um teste de múltipla escolha, é apresentado um problema de exemplo, cujo tema é tiro ao alvo. São propostas 10 atividades ao todo, versando sobre os seguintes temas: probabilidade de sair cara ou coroa no lançamento de moedas, probabilidade de defeitos em uma peça, probabilidade de acertos de questões num exame e por fim um problema relacionado a genética, onde é solicitado o cálculo da probabilidade dos sexos no nascimento de seis crianças.

Observamos que a temática Binômio de Newton atingiu, em partes, os objetivos descritos pelos autores, na apresentação da obra. O Binômio de Newton, assim como a fórmula do Termo Geral foram apresentados “com rigor matemático” (IEZZI *et al.*, 2013, p. 3). Entretanto, apesar dos exemplos, a contextualização do tema foi superficial. Além disso, o método em si teve mais importância do que as relações com outros temas da Matemática, como por exemplo, o Triângulo de Pascal, que em nenhum momento foi citado na obra.

Peca-se também na falta de embasamento teórico sobre a historicidade da temática, o que poderia despertar a curiosidade do leitor.

Apresentamos no Quadro 11 a classificação, identificação e quantitativo das atividades propostas na obra LD15-4 para a temática Binômio de Newton.

Quadro 11: Síntese da classificação das atividades presentes na obra LD15-4.

Classificação das atividades presentes na obra			
Obra	Classificação	Identificação	Total
LD15-4	Exercícios de Reconhecimento	79, 86, 82A, 82B, 82D, 85B, 87D, 88A, 88B	9
	Exercícios de Algoritmos	76A, 76B, 76C, 77A, 77B, 77C, 78A, 78B, 83A, 83B, 87A, 87B, 87C	13
	Problemas Padrão	80, 81, 82C, 84, 85A	5
	Problemas Processo	------	0
	Problemas de Aplicação	------	0
	Problemas Quebra-cabeça	------	0
		Total Geral	27

Fonte: Elaborada pela autora.

3.5 MATEMÁTICA – ENSINO MÉDIO (2013)

A obra de Kátia Stocco Smole e Maria Ignez Diniz, em sua oitava edição, não apresentou o conteúdo Binômio de Newton. Salientamos que na apresentação do livro didático, as autoras discorrem que uma das metas para os alunos do Ensino Médio é

> [...] completar a sua formação como leitor e produtor de textos que envolvam Matemática e ampliar suas habilidades para resolver problemas. [...] é nessa fase de escolaridade que será possível a você entender raciocínios mais elaborados e conhecer a matemática como ciência, com sua forma de organizar os conceitos, desenvolver técnicas e propor e resolver situações-problema. (SMOLE e DINIZ, 2013, p. 3).

A temática Binômio de Newton poderia contribuir para o proposto acima.

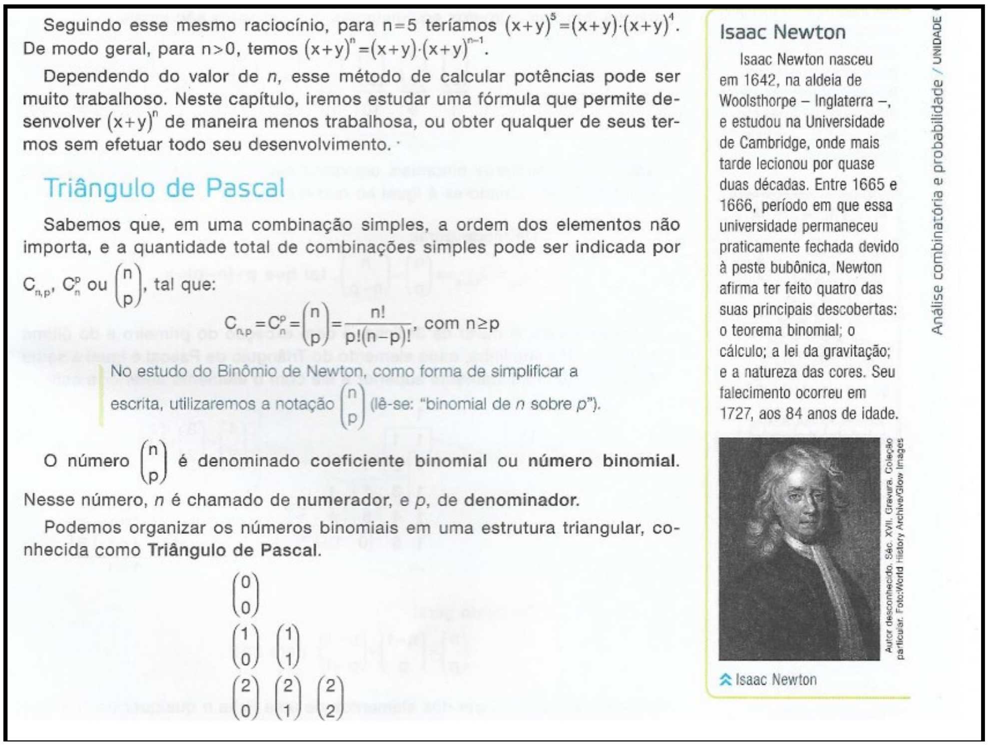
3.6 NOVO OLHAR: MATEMÁTICA (2013)

Na apresentação da obra o autor expõe a sua preocupação de difundir “os conteúdos matemáticos de maneira contextualizada e relacionada a outras disciplinas e áreas do conhecimento” (SOUZA, 2013, p. 3), por meio de exemplos variados e problemas que “promovam a consolidação da aprendizagem”.

O livro encontra-se organizado em cinco unidades e nove capítulos. Na unidade de Análise Combinatória e Probabilidade, especificamente no capítulo de número oito, a temática Binômio de Newton é abordada.

O tema é introduzido com o desenvolvimento de potências da forma $(x + y)^n$, para valores de n variando entre zero e quatro. Antes de generalizar, define o Triângulo de Pascal e apresenta algumas propriedades (números binomiais complementares, Relação de Stifel, propriedade das linhas), entretanto sem demonstrá-las.

O autor atribui a Newton a “descoberta” do Teorema Binomial, conforme descrito em seção anexa ao texto. Observamos isso na Figura 30.



Seguindo esse mesmo raciocínio, para $n=5$ teríamos $(x+y)^5=(x+y)\cdot(x+y)^4$. De modo geral, para $n>0$, temos $(x+y)^n=(x+y)\cdot(x+y)^{n-1}$.

Dependendo do valor de *n*, esse método de calcular potências pode ser muito trabalhoso. Neste capítulo, iremos estudar uma fórmula que permite desenvolver $(x+y)^n$ de maneira menos trabalhosa, ou obter qualquer de seus termos sem efetuar todo seu desenvolvimento.

Triângulo de Pascal

Sabemos que, em uma combinação simples, a ordem dos elementos não importa, e a quantidade total de combinações simples pode ser indicada por $C_{n,p}$, C_n^p ou $\binom{n}{p}$, tal que:

$$C_{n,p}=C_n^p=\binom{n}{p}=\frac{n!}{p!(n-p)!}, \text{ com } n\geq p$$

No estudo do Binômio de Newton, como forma de simplificar a escrita, utilizaremos a notação $\binom{n}{p}$ (lê-se: "binomial de *n* sobre *p*").

O número $\binom{n}{p}$ é denominado **coeficiente binomial** ou **número binomial**. Nesse número, *n* é chamado de **numerador**, e *p*, de **denominador**.

Podemos organizar os números binomiais em uma estrutura triangular, conhecida como **Triângulo de Pascal**.

$$\binom{0}{0}$$
$$\binom{1}{0}\ \binom{1}{1}$$
$$\binom{2}{0}\ \binom{2}{1}\ \binom{2}{2}$$

Isaac Newton

Isaac Newton nasceu em 1642, na aldeia de Woolsthorpe – Inglaterra –, e estudou na Universidade de Cambridge, onde mais tarde lecionou por quase duas décadas. Entre 1665 e 1666, período em que essa universidade permaneceu praticamente fechada devido à peste bubônica, Newton afirma ter feito quatro das suas principais descobertas: o teorema binomial; o cálculo; a lei da gravitação; e a natureza das cores. Seu falecimento ocorreu em 1727, aos 84 anos de idade.

Autor desconhecido. Séc. XVII. Gravura. Coleção particular. Foto:World History Archive/Glow Images

Isaac Newton

Análise combinatória e probabilidade / UNIDADE

Figura 30: Pequeno histórico sobre Isaac Newton presente na obra LD15-6.
Fonte: Souza (2013, p. 235).

Para generalização do Teorema Binomial, o autor relaciona os coeficientes dos termos do desenvolvimento binomial de $(x + y)^n$ a linha n do Triângulo de Pascal, sem explicar que o coeficiente tem relação às diferentes maneiras que podem ser tomados os fatores para multiplicá-los, conforme verificamos na Figura 31 e Figura 32.

Fórmula do Binômio de Newton

Anteriormente, vimos que toda potência da forma $(x+y)^n$, com $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, é chamada de Binômio de Newton. Observe a seguir o desenvolvimento de alguns Binômios de Newton e como podemos associar os coeficientes de cada termo desses desenvolvimentos com uma das linhas do Triângulo de Pascal.

$(x+y)^0=1$	1	$\binom{0}{0}$
$(x+y)^1=x+y$	1 1	$\binom{1}{0}\ \binom{1}{1}$
$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$	1 2 1 →	$\binom{2}{0}\ \binom{2}{1}\ \binom{2}{2}$
$(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$	1 3 3 1	$\binom{3}{0}\ \binom{3}{1}\ \binom{3}{2}\ \binom{3}{3}$
$(x+y)^4=x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$	1 4 6 4 1	$\binom{4}{0}\ \binom{4}{1}\ \binom{4}{2}\ \binom{4}{3}\ \binom{4}{4}$

Substituindo esses coeficientes pelos números binomiais correspondentes, temos:

$$(x+y)^0=\binom{0}{0}x^0y^0$$

$$(x+y)^1=\binom{1}{0}x^1y^0+\binom{1}{1}x^0y^1$$

$$(x+y)^2=\binom{2}{0}x^2y^0+\binom{2}{1}x^1y^1+\binom{2}{2}x^0y^2$$

$$(x+y)^3=\binom{3}{0}x^3y^0+\binom{3}{1}x^2y^1+\binom{3}{2}x^1y^2+\binom{3}{3}x^0y^3$$

$$(x+y)^4=\binom{4}{0}x^4y^0+\binom{4}{1}x^3y^1+\binom{4}{2}x^2y^2+\binom{4}{3}x^1y^3+\binom{4}{4}x^0y^4$$

Figura 31: Introdução exposta na obra LD15-6 para generalizar o Teorema Binomial.
Fonte: Souza (2013, p. 238).

De maneira geral, a **fórmula do Binômio de Newton** é dada por:

$$(x+y)^n=\binom{n}{0}x^ny^0+\binom{n}{1}x^{n-1}y^1+\binom{n}{2}x^{n-2}y^2+\binom{n}{3}x^{n-3}y^3+\ldots+$$

$$+\ldots+\binom{n}{p}x^{n-p}y^p+\ldots+\binom{n}{n-1}x^{n-(n-1)}y^{n-1}+\binom{n}{n}x^0y^n$$

para *n* e *p* naturais e *x* e *y* reais.

A partir dessa fórmula, destacamos:

- Em qualquer dos termos do desenvolvimento de $(x+y)^n$, a soma dos expoentes de *x* e *y* é igual a *n*.
- O desenvolvimento de $(x+y)^n$ possui n+1 termos.
- Os expoentes de *x* decrescem, de 1 em 1, de *n* até 0.
- Os expoentes de *y* crescem, de 1 em 1, de 0 até *n*.
- Os elementos da linha *n* do Triângulo de Pascal correspondem aos coeficientes do desenvolvimento de $(x+y)^n$.

Figura 32: Teorema do Binômio de Newton apresentado na obra LD15-6.
Fonte: Souza (2013, p. 239).

Em seguida, são apresentadas nove atividades resolvidas (R.17A, R.17B, R.18, R.19, R.20A, R.20B, R.20C, R.20D e R.21). As atividades R.20B, R.20C são exercícios de reconhecimento, pois sugerem a lembrança dos conceitos de termo independente, termo central. O problema R19 é um problema padrão, onde está implícita a aplicação da fórmula do Binômio de Newton, enquanto o problema R18, visto na Figura 33, apesar de resolvido, requer o traçado de uma estratégia. As demais atividades resolvidas são exercícios de algoritmos que reforçam a aplicação do Teorema Binomial e a Fórmula do Termo Geral.

R18. Sabendo que $(x+\alpha)^3 = x^3+3x^2\alpha+3x\alpha^2+\alpha^3$, desenvolva o trinômio $(x+y+z)^3$.

Resolução

Considerando $\alpha = y+z$, temos:

- $\alpha^2 = (y+z)^2 = y^2+2yz+z^2$
- $\alpha^3 = (y+z)^3 = y^3+3y^2z+3yz^2+z^3$

Desenvolvendo o trinômio, temos:

$$(x+y+z)^3 = (x+\alpha)^3 = x^3+3x^2\alpha+3x\alpha^2+\alpha^3 = x^3+3x^2(y+z)+3x(y+z)^2+(y+z)^3 =$$
$$= x^3+3x^2y+3x^2z+3x(y^2+2yz+z^2)+y^3+3y^2z+3yz^2+z^3 =$$
$$= x^3+3x^2y+3x^2z+3xy^2+6xyz+3xz^2+y^3+3y^2z+3yz^2+z^3$$

R19. Qual é a soma dos coeficientes dos termos do desenvolvimento de $(5x^2-2y)^3$?

Resolução

Desenvolvendo o binômio, temos:

$$(5x^2-2y)^3 = (5x^2)^3+3\cdot(5x^2)^2\cdot(-2y)+3\cdot 5x^2\cdot(-2y)^2+(-2y)^3$$

Note que, para determinar a soma dos coeficientes dos termos, basta considerarmos $x=y=1$. Assim, substituindo $x=y=1$ em $(5x^2-2y)^3$, segue que:

$$(5\cdot 1^2-2\cdot 1)^3 = (5-2)^3 = 3^3 = 27$$

Portanto, a soma dos coeficientes dos termos é 27.

Figura 33: Problemas do tipo padrão e processo, respectivamente, propostos na obra LD15-6.
Fonte: Souza (2013, p. 239).

Quanto às atividades propostas, há um quantitativo de trinta e três atividades. Destas, estão classificadas como exercícios de reconhecimento as atividades 92A, 92B, 92C, 93A, 93B, 93C, 93D, 95C. As três primeiras (Figura 34) requerem recordar o conceito de termo central.

92. Determine o termo central no desenvolvimento dos binômios. Respostas no final do livro.

a) $(y^2+3)^6$ b) $\left(a^2-\frac{b}{a}\right)^8$ c) $\left(\frac{2}{xy}+\frac{z^3}{5}\right)^{12}$

Figura 34: Exercícios de reconhecimento apresentados na obra LD15-6.
Fonte: Souza (2013, p. 241).

Os exercícios de algoritmos totalizam dezoito atividades (85A, 85B, 85C, 85D, 85E, 85F, 87A, 87B, 87C, 87D, 89A, 89B, 89C, 89D, 90, 91, 94, 95A). Estes visam reforçar a aplicação do Teorema Binomial ou Termo Geral. Nas Figuras 35 e 36, observamos exemplos de exercícios de algoritmos trazidos na obra.

89. Determine a fórmula do termo geral dos binômios.
Respostas no final do livro.

a) $(9-a)^7$

b) $\left(3+\frac{x}{3}\right)^5$

c) $\left(5ab-\frac{c}{7}\right)^9$

d) $\left(\frac{7}{x}+\frac{8y}{3}\right)^6$

Figura 35: Exercícios de algoritmos presentes na obra LD15-6.
Fonte: Souza (2013, p. 241).

94. No desenvolvimento do binômio $\left(x-\frac{2}{y}\right)^{20}$, com expoentes decrescentes de *x*, qual é o termo em x^{18}? $\frac{760x^{18}}{y^2}$

Figura 36: Exercício de algoritmo presente no LD15-6.
Fonte: Souza (2013, p. 241).

São problemas padrão as atividades 86A, 86B, 86C, 86D, 88, 95B, 95D. Na Figura 37 observamos a atividade 88 semelhante à atividade resolvida R19. Poda-se qualquer estímulo para que o aluno reflita sobre a resolução ou busque conhecimentos prévios para elucidar a problemática. Com isso, a atividade passa a ser um mero reforço para fixação.

88. Sabendo que a soma dos coeficientes dos termos do desenvolvimento do binômio $\left(\frac{2}{a^5}+\frac{\sqrt{b}}{b}\right)^n$ é 6 561, determine o valor de *n*. 8

Figura 37: Problema padrão presente na obra LD15-6.
Fonte: Souza (2013, p. 241).

Na mesma unidade, entretanto no capítulo sobre probabilidade, o autor aborda a Distribuição Binomial das Probabilidades, com a nomenclatura Experimentos Binomiais e a partir de um exemplo deduz a Distribuição Binomial das Probabilidades. Mas em nenhum momento o autor relaciona este teorema ao Binômio de Newton. São propostas atividades, todas sobre o cálculo de probabilidades usando a Distribuição Binomial das Probabilidades, versando sobre os seguintes temas: compra de calçados, sorteio de um número inscrito sobre um tetraedro, partida de futebol, salto em distância, jogo de basquete, aprovação em concurso e um problema sobre o cálculo da probabilidade do nascimento de crianças sem Síndrome de Down.

Apesar de alguns equívocos, a obra traz uma boa abordagem do conteúdo Binômio de Newton e suas aplicações. Talvez o fato do autor ter proposto 33 atividades na seção sobre o Binômio de Newton tenha sido proposital, de modo a enfatizar a "prática", para posterior aplicação, tendo assim a concepção de Resolução de Problemas como meta de ensino, ou seja, se ensina Matemática para o aluno resolver problemas, que no caso são exercícios de fixação. O professor deverá guiar o aluno no sentido de associar o Binômio de Newton à Distribuição Binomial das Probabilidades.

Apresentamos no Quadro 12 a classificação, identificação e quantitativo das atividades propostas na obra LD15-6 para a temática Binômio de Newton.

Quadro 12: Síntese da classificação das atividades presentes na obra LD15-6.

Classificação das atividades presentes na obra			
Obra	Classificação	Identificação	Total
LD15-6	Exercícios de Reconhecimento	92A, 92B, 92C, 93A, 93B, 93C, 93D, 95C	8
	Exercícios de Algoritmos	85A, 85B, 85C,85D, 85E, 85F, 87A, 87B, 87C, 87D, 89A, 89B, 89C, 89D, 90, 91, 94, 95A	18
	Problemas Padrão	86A, 86B, 86C, 86D, 88, 95B, 95D	7
	Problemas Processo	------	0
	Problemas de Aplicação	------	0
	Problemas Quebra-cabeça	------	
		Total Geral	33

Fonte: Elaborada pela autora.

3.7 CONEXÕES COM A MATEMÁTICA (2016)

O livro LD18-1 está em sua terceira edição, reedição da obra LD15-1. Na apresentação não há nenhuma alteração. Entretanto, constatamos que houve exclusão de conteúdos na terceira edição: do décimo capítulo relacionado à Análise Combinatória foram excluídos os conteúdos básicos “Coeficiente Binomial, Somatório e Binômio de Newton”. O capítulo sobre probabilidade foi redistribuído para o terceiro volume da coleção, juntamente com a Distribuição Binomial das Probabilidades, seção que permaneceu com mesma abordagem e problemas da segunda edição.

3.8 MATEMÁTICA: CONTEXTO & APLICAÇÕES (2016)

A obra LD18-2 é uma reedição da obra LD15-2. A apresentação da obra pelo autor continua a mesma, todavia houve um “enxugamento” da obra. Na segunda edição há quatro unidades com doze capítulos, enquanto que na terceira edição permanecem quatro unidades compostas por dez capítulos[32].

No capítulo nove, referente à Análise Combinatória encontra-se a temática Binômio de Newton. A única alteração na abordagem da temática foi a exclusão do comentário sobre a história do Binômio de Newton, que estava equivocada na edição anterior.

Novamente a Distribuição Binomial das Probabilidades é tratada como um assunto opcional e as atividades propostas são as mesmas da edição anterior.

No Quadro 13 expomos a classificação, identificação e quantitativo das atividades propostas na obra LD18-2 para a temática Binômio de Newton.

Quadro 13: Síntese da classificação das atividades presentes na obra LD18-2.

Classificação das atividades presentes na obra			
Obra	Classificação	Identificação	Total
LD18-2	Exercícios de Reconhecimento	78A	1

[32]Na edição atual os capítulos referentes a relações trigonométricas e corpos redondos foram redistribuídos entre os volumes 1 e 3.

	Exercícios de Algoritmos	77A, 77B, 78B, 78C	4
	Problemas Padrão	------	0
	Problemas Processo	------	0
	Problemas de Aplicação	------	0
	Problemas Quebra-cabeça	------	0
		Total Geral	5

Fonte: Elaborada pela autora.

3.9 MATEMÁTICA PAIVA (2015)

A obra LD18-3, reedição da LD15-3, em sua terceira edição, teve uma redução de conteúdos. A edição anterior era composta por 14 capítulos. A edição atual foi reduzida a 10 capítulos. Houve a redistribuição de alguns capítulos e, consequentemente, conteúdos em outros volumes da coleção. O capítulo Agrupamentos e Métodos de Contagem permanece, entretanto o conteúdo de Binômio de Newton foi excluído do segundo volume e não se apresenta nos volumes 1 e 3.

3.10 MATEMÁTICA – CIÊNCIA E APLICAÇÕES (2016)

A obra LD18-4, reedição da obra LD15-4, em sua nona edição, teve a temática Binômio de Newton excluída do volume e em verificação aos outros volumes da coleção constatamos que a mesma não foi redistribuída.

3.11 MATEMÁTICA PARA COMPREENDER O MUNDO (2016)

O livro é a nova versão da obra LD15-5. Assim como no LD15-5, no LD18-5 o tema Binômio de Newton não foi abordado.

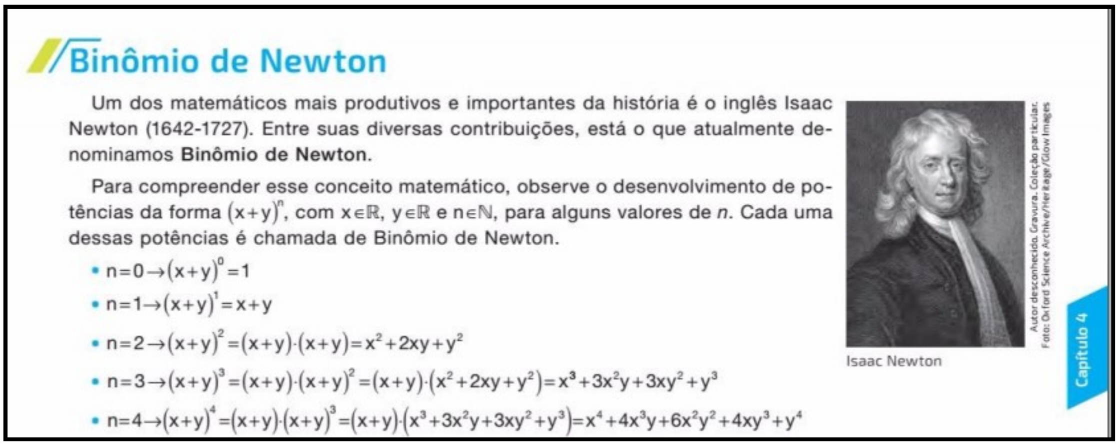
3.12 #CONTATO MATEMÁTICA (2016)

A obra LD18-6, em sua primeira edição, traz a perspectiva de desenvolver nos alunos habilidades matemáticas que os auxiliem tanto na sua vida pessoal, como no ingresso num curso superior ou no mercado de trabalho. Os autores trazem diferentes seções relacionadas a aproximar conteúdos, ampliar conhecimentos, contextualizar e direcionar para utilização de recursos tecnológicos.

São oito capítulos, sendo que o quarto ocupa-se da Análise Combinatória e apresenta a temática Binômio de Newton. Para contextualizar o conteúdo do capítulo os autores trazem um texto sobre jogos de azar.

A mesma abordagem do Binômio Newton feita pelo autor Joamir de Souza na obra “Novo olhar matemática” (LD15-6) é mantida neste novo livro: o tema é introduzido com o desenvolvimento de potências da forma $(x + y)^n$, para valores de n 0,1, 2, 3, e 4. Antes de generalizar definem o Triângulo de Pascal e apresentam algumas propriedades (números binomiais complementares, relação de Stifel, propriedade das linhas), entretanto sem demonstrá-las.

O equívoco sobre a “descoberta” do teorema binomial, continua no texto, como pode ser constatado na Figura 38.



Binômio de Newton

Um dos matemáticos mais produtivos e importantes da história é o inglês Isaac Newton (1642-1727). Entre suas diversas contribuições, está o que atualmente denominamos **Binômio de Newton**.

Para compreender esse conceito matemático, observe o desenvolvimento de potências da forma $(x+y)^n$, com $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, para alguns valores de *n*. Cada uma dessas potências é chamada de Binômio de Newton.

- $n=0 \rightarrow (x+y)^0 = 1$
- $n=1 \rightarrow (x+y)^1 = x+y$
- $n=2 \rightarrow (x+y)^2 = (x+y)\cdot(x+y) = x^2+2xy+y^2$
- $n=3 \rightarrow (x+y)^3 = (x+y)\cdot(x+y)^2 = (x+y)\cdot(x^2+2xy+y^2) = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$
- $n=4 \rightarrow (x+y)^4 = (x+y)\cdot(x+y)^3 = (x+y)\cdot(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3) = x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$

Isaac Newton

Autor desconhecido. Gravura. Coleção particular. Foto: Oxford Science Archive/Heritage/Glow Images

Capítulo 4

Figura 38: Abordagem do Binômio de Newton proposta pelos autores na obra LD18-6.
Fonte: Souza e Garcia (2016, p. 117).

As atividades resolvidas continuam as mesmas da obra LD15-6 tanto para o Binômio de Newton, como para a fórmula do Termo Geral do Binômio de Newton, inclusive permanecem com mesma nomenclatura: R.17A, R.17B, R.18, R.19, R. 20A, R20B, R.20C, R.20D e R.21.

Quanto às atividades propostas, há um quantitativo de trinta e duas atividades. Destas, estão classificadas como exercícios de reconhecimento as atividades 85A, 85B, 85C, 86A, 86B, 86C, 86 D, 88B. As três primeiras visam recordar o conceito de termo central (Figura 39), enquanto as últimas, o conceito de termo independente de x.

85. Determine o termo central no desenvolvimento dos binômios. Respostas no final do livro.

a) $(y^2+3)^6$, com expoentes decrescentes de *y*.

b) $\left(a^2-\frac{b}{a}\right)^8$, com expoentes decrescentes de *a*.

c) $\left(\frac{2}{xy}+\frac{z^3}{5}\right)^{12}$, com expoentes decrescentes de $\frac{1}{xy}$.

Figura 39: Exercícios de reconhecimento propostos na obra LD18-6.
Fonte: Souza e Garcia (2016, p. 123).

Os exercícios de algoritmos totalizam dezoito (78A, 78B, 78C, 78D, 78E, 78F, 80A, 80B, 80C, 80D, 82A, 82B, 82C, 82D, 83, 84, 88A, 88C). Estes visam reforçar a aplicação do Teorema Binomial ou Termo Geral. Na Figura 40 observamos exemplos de exercícios de algoritmos trazidos na obra.

82. Determine a fórmula do termo geral dos binômios. Respostas no final do livro.

a) $(9-a)^7$

b) $\left(3+\frac{x}{3}\right)^5$

c) $\left(5ab-\frac{c}{7}\right)^9$

d) $\left(\frac{7}{x}+\frac{8y}{3}\right)^6$

Figura 40: Exercícios de algoritmos presentes na obra LD18-6.
Fonte: Souza e Garcia (2016, p. 123).

As atividades 79A, 79B, 79C, 79D, 81, 87 são problemas padrão. Na Figura 41 apresentamos as atividades 79A, 79B, 79C e 79D. Ao observamos a atividade resolvida R19, vimos que é semelhante a essa. Com isso, as atividades passam a ser um mero reforço para fixação da tarefa.

79. Determine a soma dos coeficientes dos termos no desenvolvimento dos binômios:

a) $(7a-6b)^{14}$ 1

b) $(3x-4y)^{7}$ −1

c) $\left(\sqrt{a}-\dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)^{9}$ 0

d) $(-7x+9y)^{8}$ 256

Figura 41: Problemas padrão presentes na obra LD18-6.
Fonte: Souza e Garcia (2016, p. 123).

Os autores mantiveram a abordagem da Distribuição Binomial das Probabilidades, do mesmo modo como feito na obra LD15-6. A única alteração foi o acréscimo de um problema relacionado ao cálculo da probabilidade do nascimento de menino e menina.

Apesar do esforço citado na apresentação da obra em contextualizar, aproximar áreas, observamos leves inserções que podem caracterizar isso. Predomina o cálculo e a resolução de problemas como mero “reforço” para aprender determinados algoritmos.

No Quadro 14 expomos a classificação, identificação e quantitativo das atividades propostas na obra LD18-6 para a temática Binômio de Newton.

Quadro 14: Síntese da classificação das atividades presentes na obra LD18-6.

Classificação das atividades presentes na obra			
Obra	Classificação	Identificação	Total
LD18-6	Exercícios de Reconhecimento	85A, 85B, 85C, 86A, 86B, 86C, 86 D, 88B	8
	Exercícios de Algoritmos	78A, 78B, 78C, 78D, 78E, 78F, 80A, 80B, 80C, 80D, 82A, 82B, 82C, 82D, 83, 84, 88A, 88C	18
	Problemas Padrão	79A, 79B, 79C, 79D, 81, 87	6
	Problemas Processo	------	0
	Problemas de Aplicação	------	0
	Problemas Quebra-cabeça	------	0
		Total Geral	32

Fonte: Elaborada pela autora.

3.13 QUADRANTE – MATEMÁTICA (2016)

A obra LD18-7 é novidade no PNLD 2018. Em sua primeira edição, os autores exprimem na apresentação que a proposta da coleção é aproximar a Matemática a outras áreas do conhecimento, além de apresentar “assuntos matemáticos direcionados a sua formação cidadã, fornecendo oportunidades de reflexão sobre atitudes que podemos, e devemos, desenvolver para viver melhor em uma sociedade dinâmica e em plena transformação” (CHAVANTE e PRESTES, 2016, p. 3).

São diversas seções do livro oportunizadas pelos autores para cumprir o exposto acima, dentre elas: “valores em ação”, a qual objetiva a reflexão por parte dos alunos para situações do cotidiano; “verificando rota” que visa a retomada de conteúdos durante o capítulo; “ampliando fronteira” que apresentará temas sobre história e diversas aplicações da matemática e a seção “matemática e ação” que promete relacionar a matemática a outras áreas do conhecimento.

São quatro unidades, compostas por oito capítulos. A temática Binômio de Newton está inserida na unidade dois, no capítulo dois, referente à Análise Combinatória.

O Binômio de Newton é abordado com o desenvolvimento de $(x + a)^2$, utilizando a propriedade distributiva do produto em relação a soma, ampliando-se a discussão para $(x + a)^3$ e generalizando para o desenvolvimento de $(x + a)^n$. Juntamente com o Teorema Binomial apresenta-se também a fórmula do Termo Geral do Binômio, conforme Figura 42.

Do tópico visto na página **58**, sabemos que:

$$P_n^{n-p,p} = \frac{n!}{(n-p)! \cdot p!} = C_{n,p}$$

Logo, para cada $p = 0, 1, 2, ..., n$, há $C_{n,p}$ parcelas iguais a $x^{n-p}a^p$ no desenvolvimento de $(x + a)^n$.

Portanto, utilizando a notação $\binom{n}{p} = C_{n,p}$:

$$(x + a)^n = \binom{n}{0}x^{n-0}a^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}a^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}a^2 + ... + \binom{n}{p}x^{n-p}a^p + ... + \binom{n}{n}x^{n-n}a^n$$

Essa é a chamada fórmula do desenvolvimento do binômio de Newton.

Sejam $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Então:

$$(x + a)^n = \binom{n}{0}x^n a^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}a^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}a^2 + ... + \binom{n}{p}x^{n-p}a^p + ... + \binom{n}{n}x^0 a^n$$

Cada número representado pelo símbolo $\binom{n}{p}$, com $p \in \mathbb{N}$ e $0 \leqslant p \leqslant n$, é chamado **número binomial *n* sobre *p*** e $T_{p+1} = \binom{n}{p}x^{n-p}a^p$ é a expressão do **termo geral do binômio**.

O desenvolvimento do binômio $(x + a)^n$ possui $n + 1$ termos.

Figura 42: Abordagem do Binômio de Newton na obra LD18-7.
Fonte: Chavante e Prestes (2016, p. 65).

As atividades dadas como exemplos na obram totalizam 10. Os exercícios de reconhecimento são as atividades R12, R15B, R15C. Já os exercícios de algoritmos são as atividades A, B, R14A, R14B, onde os autores primam pela aplicação direta do Teorema Binomial, bem como pela Fórmula do Termo Geral. Há dois problemas padrão identificados por R15A e R15D. Já como problema processo temos a atividade R13 (Figura 43), a qual leva o aluno a pensar numa estratégia de resolução antes da aplicação do Binômio de Newton.

R13. Em uma sorveteria, há 4 sabores de sorvete. O cliente pode escolher 1, 2, 3 ou 4 sabores de sorvete. Quantas combinações distintas com esses sabores podem ser formadas?

Resolução

Para um sabor, temos $\binom{4}{1}$ possibilidades; para dois sabores, temos $\binom{4}{2}$ possibilidades, e assim por diante. Dessa maneira, a solução é dada por $\binom{4}{1}+\binom{4}{2}+\binom{4}{3}+\binom{4}{4}$.

Podemos obter essa soma utilizando o binômio de Newton:

$$(x+a)^n = \binom{n}{0}x^n a^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}a^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}a^2 + \dots + \binom{n}{p}x^{n-p}a^p + \dots + \binom{n}{n}x^0 a^n$$

Para isso, é conveniente considerar $x = 1$, $a = 1$ e $n = 4$, pois

$$\binom{4}{0}1^4\cdot 1^0 + \binom{4}{1}1^3\cdot 1^1 + \binom{4}{2}1^2\cdot 1^2 + \binom{4}{3}1^1\cdot 1^3 + \binom{4}{4}1^0\cdot 1^4 = \binom{4}{0}+\binom{4}{1}+\binom{4}{2}+\binom{4}{3}+\binom{4}{4}$$

Logo, podemos considerar $(x+a)^n = (1+1)^4 = 2^4$.

Como $\binom{4}{0}$ não é uma possibilidade, porque o cliente vai escolher pelo menos 1 sabor de sorvete, temos que $\binom{4}{1}+\binom{4}{2}+\binom{4}{3}+\binom{4}{4} = 2^4 - \binom{4}{0} = 16 - 1 = 15$.

Portanto, podem ser formadas 15 combinações com os sabores de sorvete.

Figura 43: Problema processo trazido como exemplo na obra LD18-7.
Fonte: Chavante e Prestes (2016, p. 65).

Para o aluno são propostas vinte e oito atividades sobre Binômio de Newton. Destas sete são exercícios de reconhecimento (46C, 46D, 47, 50, 52, 53, 60), quatorze são exercícios de algoritmos (45A, 45B, 45C, 45D, 45E, 45F, 46A, 46B, 46C, 46D, 48A, 48B, 49A, 50, 54, 55, 56, 58, 59) e sete são problemas padrão (48A, 48B, 49, 55, 56, 58, 59).

As atividades classificadas como exercícios de reconhecimento remetem o educando a recordar os conceitos de termo independente e termo central. No caso da questão 52, conforme apresentamos na Figura 44, a resolução requer a recordação da Relação de Stifel, devido à conformação dos números binomiais.

52. Sendo $n \in \mathbb{N}$ tal que $\binom{11}{5} + \binom{11}{n+1} = \binom{12}{5}$, então um valor de n é:

a) 4 b) 5 c) 3 d) 2

Figura 44: Exercício de reconhecimento trazido na obra LD18-7.
Fonte: Chavante e Prestes (2016, p. 68).

Para exemplificar as atividades do tipo exercícios de algoritmos, trouxemos as atividades 45A, 45A, 45B, 45C, 45D, 45E, 45F (Figura 45), que remetem a fixação da desenvolvimento binomial com a aplicação do Teorema Binomial.

Atividades

45. Desenvolva os seguintes binômios:

a) $(x + 3)^4$

b) $(x - 5)^3$

c) $\left(\sqrt{2} - 3\right)^4$

d) $(a - b)^5$

e) $\left(x - \frac{1}{2}\right)^3$

f) $\left(\sqrt{5} + \sqrt{3}\right)^5$

Figura 45: Exercícios algoritmos existentes na obra LD18-7.
Fonte: Chavante e Prestes (2016, p. 68).

Para exemplificarmos um problema padrão existente na obra, apresentamos a atividades 48A e 48B (Figura 46). Nesta, para obter a soma, basta que o aluno aplique o Teorema Binomial.

48. Calcule a soma dos coeficientes dos binômios a seguir.

a) $(x-2)^4$

b) $(x-3)^5$

Figura 46: Problemas padrões existentes na obra LD18-7.
Fonte: Chavante e Prestes (2016, p. 68).

O livro não faz nenhuma menção ao Triângulo de Pascal ou a aspectos históricos relacionados ao tema.

No capítulo três, sobre probabilidades, a Distribuição Binomial das Probabilidades é retratada por meio de exemplos: problemas relacionados ao lançamento de dado e moedas e generaliza-se para a Distribuição Binomial das Probabilidades, sem fazer nenhuma menção ao Binômio de Newton, conforme demonstra a Figura 47.

Sejam $P(A)$ e $P(B)$ a probabilidade de os eventos A e B ocorrerem em cada uma das n tentativas independentes, respectivamente, em que B é o evento complementar de A (cuja notação é $\overline{A}$). Então, a probabilidade dos eventos A e B ocorrerem exatamente p e $n-p$ vezes em n tentativas é dada por:

$$\binom{n}{p}\left[P(A)\right]^{p}\cdot\left[P(B)\right]^{n-p} \text{ ou } \binom{n}{p}\left[P(A)\right]^{p}\cdot\left[P(\overline{A})\right]^{n-p}$$

em que $p \leq n$, $p, n \in \mathbb{N}$.

Figura 47: Distribuição Binomial das Probabilidades enunciado na obra LD18-7.
Fonte: Chavante e Prestes (2016, p. 90).

Há várias atividades resolvidas sobre o assunto, envolvendo o cálculo da probabilidade de nascerem meninos e meninas, que se assemelha ao problema proposto número 30, Figura 48.

Atividades

30. Um casal pretende ter quatro filhos. Sabendo ser equiprováveis os eventos "nascer menino" e "nascer menina", determine a probabilidade de nascerem:

a) somente meninos;

b) dois meninos e duas meninas;

c) três meninas e um menino.

Figura 48: Atividade sobre Distribuição Binomial das Probabilidades presente na obra LD18-7.
Fonte: Chavante e Prestes (2016, p. 94).

O restante dos problemas propostos trata sobre probabilidade de sortear determinados tamanhos de fichas, número de acertos de questões em uma prova de múltipla escolha, probabilidade de acerto em tiro ao alvo, probabilidade de acerto na cobrança de pênaltis, probabilidade de ser homem/mulher e pertencer a um determinado setor de uma empresa e por último de um grupo de pessoas, a probabilidade de ter curso superior completo ou incompleto. Evidenciamos que o foco dos autores ao propor estes problemas está em priorizar a aplicação da Distribuição Binomial das Probabilidades e não em realçar ligações a outras áreas do conhecimento.

Na seção “ampliando fronteiras”, os autores apresentam um texto sobre genética, definindo vários termos e pedindo que os alunos respondam três problemas que facilmente são elucidados com base no texto. Como citado pelos autores, é uma tentativa de despertar a curiosidade no aluno, expondo um assunto que é da vivência dos mesmos.

No Quadro 15 expomos a classificação, identificação e quantitativo das atividades propostas na obra LD18-7 para a temática Binômio de Newton.

Quadro 15: Síntese da classificação das atividades presentes na obra LD18-7.

Classificação das atividades presentes na obra			
Obra	Classificação	Identificação	Total
	Exercícios de Reconhecimento	46C, 46D, 47, 50, 52, 53, 60	7
LD18-7	Exercícios de Algoritmos	45A, 45B, 45C, 45D, 45E, 45F, 46A, 46B, 51A, 51B, 51C, 51D, 54, 57	14
	Problemas Padrão	48A, 48B, 49, 55, 56, 58, 59	7

	Problemas Processo	------	0
	Problemas de Aplicação	------	0
	Problemas Quebra-cabeça	------	0
	Total Geral		28

Fonte: Elaborada pela autora.

3.14 MATEMÁTICA: INTERAÇÃO E TECNOLOGIA

Em sua segunda edição, a obra LD18-8, em sua apresentação deixa claro o objetivo do autor ao elaborá-la: “estabelecer relações entre os conteúdos matemáticos e entre a matemática e outras áreas do conhecimento” (BALESTRI, 2016, p.3). Para isso, o autor propõe várias seções: “como funciona”, “conexão tecnológica”, “atividades especiais”, entre outras, de modo a “contribuir para a formação como cidadão e em sua preparação para ingressar no Ensino Superior” (BALESTRI, 2016, p. 3).

São oito capítulos, e no quinto capítulo sobre Análise Combinatória encontra-se a temática Binômio de Newton. A abordagem do tema se inicia com o desenvolvimento de $(x + y)^n$ para n = 2, 3, e 4, enfatizando que a potência $(x + y)^n$ pode ser obtida a partir do resultado do desenvolvimento de $(x + y)^{n-1}$, mas o processo acaba sendo demorado quanto maior for o valor de n. A partir de uma árvore de possibilidades, são elencadas a quantidade de vezes que x e y aparecem em cada produto, culminando com a generalização, ou seja, com a Fórmula do Binômio de Newton, vista na Figura 49.

Apesar da inexistência de formalismo matemático, com demonstrações utilizando diferentes métodos, o autor conseguiu associar os coeficientes dos termos da potencia de $(x + y)^n$ aos números da linha n do Triângulo de Pascal, apresentado na seção anterior da obra, juntamente com algumas propriedades, entretanto sem demonstrá-las.

Fórmula do Binômio de Newton:

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n y^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}y^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \ldots + \binom{n}{p}x^{n-p}y^p + \ldots + \binom{n}{n-1}x^{n-(n-1)}y^{n-1} + \binom{n}{n}x^0 y^n$$

para n e p naturais e x e y reais.

Com base nessa fórmula, podemos destacar algumas características:

- Os expoentes de x decrescem de 1 em 1, de n até 0, enquanto os expoentes de y crescem de 1 em 1, de 0 até n.
- O desenvolvimento de $(x+y)^n$ possui n+1 termos. Para cada um desses termos, a soma dos expoentes de x e y é igual a n.
- Os coeficientes do desenvolvimento de $(x+y)^n$ são os números da linha n do Triângulo de Pascal. Professor(a): Lembre os alunos de que a primeira linha do triângulo de Pascal é a linha 0.

$$(x+y)^0 = 1$$
$$(x+y)^1 = 1x + 1y$$
$$(x+y)^2 = 1x^2 + 2xy + 1y^2 \rightarrow$$
$$(x+y)^3 = 1x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 1y^3$$
$$(x+y)^4 = 1x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + 1y^4$$

1				
1	1			
1	2	1		
1	3	3	1	
1	4	6	4	1

A fórmula do Binômio de Newton é válida também para $(x-y)^n$, pois basta escrevermos $(x-y)^n$ como $[x+(-y)]^n$.

Figura 49: Dedução do Teorema Binomial vista na obra LD18-8.
Fonte: Balestri (2016, p.140).

Na seção de atividades resolvidas, encontra-se a dedução da Fórmula do Termo Geral do Binômio de Newton. Nesta seção há um exercício de reconhecimento (R12B), três exercícios de algoritmos (R11A, R11B, R12A) e um problema padrão (R13).

Os exercícios de algoritmos estão relacionados à aplicação do Teorema Binomial. Já o problema padrão proposto (Figura 50) requer ao aluno que aplique o Teorema Binomial.

R13. Se a soma dos coeficientes do binômio $(2x+y)^m$ é 512, então qual deve ser o valor de m?

Resolução

Desenvolvendo o binômio, temos:

$$(2x+y)^m = \binom{m}{0}(2x)^m y^0 + \binom{m}{1}(2x)^{m-1}y^1+\cdots+\binom{m}{m-1}(2x)^1 y^{m-1}+\binom{m}{m}(2x)^0 y^m$$

$$= \binom{m}{0}2^m x^m + \binom{m}{1}2^{m-1}x^{m-1}y^1+\cdots+\binom{m}{m-1}2xy^{m-1}+\binom{m}{m}y^m$$

Tomando $x=1$ e $y=1$, obtemos:

$$(2+1)^m = \underbrace{\binom{m}{0}2^m+\binom{m}{1}2^{m-1}+\cdots+\binom{m}{m-1}2+\binom{m}{m}}_{\text{soma dos coeficientes}}$$

Consequentemente:

$$3^m - 512 \Rightarrow 3^m = 3^8$$

Portanto, $m=8$.

Figura 50: Problema padrão resolvido presente na obra LD18-8.
Fonte: Balestri (2016, p.142).

Observamos que as atividades propostas na seção de problemas resolvidos servem de “modelo” para a resolução das atividades para os alunos, que perfazem um total de dezenove.

Há quatro exercícios de algoritmos (33A, 33B, 33C, 33D) diretamente relacionados ao Teorema Binomial (Figura 51).

Atividades Anote as respostas no caderno.

Professor(a): Veja a resposta desta atividade no final do livro.

33. Desenvolva cada um dos binômios.

a) $(z+w)^5$

b) $(xy+z)^4$

c) $\left(\sqrt{x}-z\right)^6$

d) $\left(1-\frac{w}{2}\right)^4$

Figura 51: Exercícios de algoritmos propostos na obra LD18-8.
Fonte: Balestri (2016, p. 143).

Os exercícios de reconhecimento (36A, 36B, 40A, 40C, 40D) estão atrelados aos conceitos de termo independente e termo central. Já os problemas padrão (34A, 34B, 34C, 34D, 35, 36C, 37, 39, 40B) estão relacionados a cálculos que envolvem a soma dos termos no desenvolvimento binomial, sendo, em sua maioria, resolvidos com base na atividade resolvida R13. Desta forma, com a presença da atividade resolvida, perde-se muito o caráter de problema padrão, pois o aluno irá reproduzir o algoritmo utilizado na atividade resolvida. Observamos a Figura 52, onde apresentamos o problema padrão 35.

35. Se a soma dos coeficientes do binômio $\left(\frac{7}{x} - 3\sqrt{y}\right)^p$ é 4 096, então qual deve ser o valor de p? p = 6

Figura 52: Problema padrão similar a atividade R13, propostos na obra LD18-8.
Fonte: Balestri (2016, p.143).

O único problema processo proposto é a atividade 38 (Figura 53). Note que a atividade exigirá que o aluno amplie de certa forma, seu raciocínio para além de exercícios de fixação de conteúdos, fazendo com que o mesmo planeje e busque argumentações para mostrar o solicitado.

38. Mostre que a soma dos coeficientes do binômio $(x - y)^n$ é igual a zero para todo **n**.

Figura 53: Problema processo proposto na obra LD18-8.
Fonte: Balestri (2016, p.143).

No capítulo sobre probabilidade o autor aborda a Distribuição Binomial das Probabilidades. Para expor a Distribuição Binomial das Probabilidades o autor utiliza exemplos sobre a constituição familiar: o primeiro caso refere-se a uma família que teve 13 filhos homens e o segundo caso é de uma família constituída por 11 filhos, sendo cinco meninas e seis meninos.

Não há associação da Distribuição Binomial das Probabilidades com o Binômio de Newton, sendo isso demonstrado nos exemplos e atividades propostas pelo autor. Nesta seção, as atividades estão relacionadas aos exemplos introdutórios do conteúdo, bem como o cálculo de probabilidades no lançamento de uma moeda, compra de chuteira por homens, número de acertos em uma prova de múltipla escolha.

Na apresentação da obra o autor prima por conexões entre conteúdos matemáticos e outras áreas, entretanto vimos que ao explorar o conteúdo do Binômio de Newton esses quesitos praticamente não foram contemplados.

Expomos no Quadro 16 a classificação, identificação e quantitativo das atividades propostas na obra LD18-8 para o conteúdo Binômio de Newton.

Quadro 16: Síntese da classificação das atividades presentes na obra LD18-8.

Classificação das atividades presentes na obra			
Obra	Classificação	Identificação	Total
LD18-8	Exercícios de Reconhecimento	36A, 36B, 40A, 40C, 40D	5
	Exercícios de Algoritmos	33A, 33B, 33C, 33D	4
	Problemas Padrão	34A, 34B, 34C, 34D, 35, 36C, 37, 39, 40B	9
	Problemas Processo	38	1
	Problemas de Aplicação	------	0
	Problemas Quebra-cabeça	------	0
	Total Geral		19

Fonte: Elaborada pela autora.

3.15 CONSIDERAÇÕES SOBRE OS LIVROS ANALISADOS

As coleções de livros disponibilizadas nos guias de livros didáticos para análise dos professores nas edições de 2015 e 2018 passaram por um processo avaliativo, que leva em consideração aspectos gerais e relacionados a disciplina de Matemática, conforme descrevemos na Seção 1.1.2.

Chamamos a atenção para a observância de um dos critérios de avaliação específicos do componente curricular Matemática: “1. Incluir todos os campos da Matemática escolar, a saber, números, álgebra, geometria e estatística e probabilidade” e para “um dos objetivos de um bom ensino de análise combinatória é desenvolver no estudante a capacidade para escolher diferentes técnicas de contagem e usá-las de modo eficiente na resolução dos problemas” (BRASIL, 2017, p.14 e p. 24).

Além desses descritores, identificamos na Seção 1.2.1, nas questões legais referentes ao ensino do Binômio de Newton, que a temática Binômio de Newton está prescrita nos PCN+ (BRASIL, 2002), bem como na BNCC (BRASIL, 2018). Estes documentos exprimem que o Ensino Médio tem por objetivo ampliar habilidades dos educandos adquiridas até o nono ano do Ensino Fundamental. Isto posto, é imprescindível que essa temática, vista no Ensino Fundamental apenas como algoritmo algébrico, por meio da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, seja retomada no Ensino Médio e tenha abordagem ampliada, contemplando diferentes competências descritas na Seção 1.2.

A presença do Binômio de Newton nos currículos escolares é reforçada também pelas DCE (PARANÁ, 2008) da disciplina de Matemática, que enfatizam a importância de dominá-lo para favorecer articulações com outras áreas.

Avaliando as coleções disponibilizadas pelo PNLD 2015 e 2018 quanto à presença ou ausência do conteúdo Binômio de Newton, constatamos que das seis coleções do PNLD 2015, cinco apresentam a temática Binômio de Newton no segundo volume. No PNLD 2018, apesar do aumento do número de coleções, das oito apenas quatro propõem o trabalho sobre o conteúdo. Portanto, houve uma diminuição no número de coleções que abordam a temática. Na Figura 54 apresentamos, em valores percentuais, as informações a respeito da presença ou ausência da temática nas coleções do PNLD 2015 e PNLD 2018.

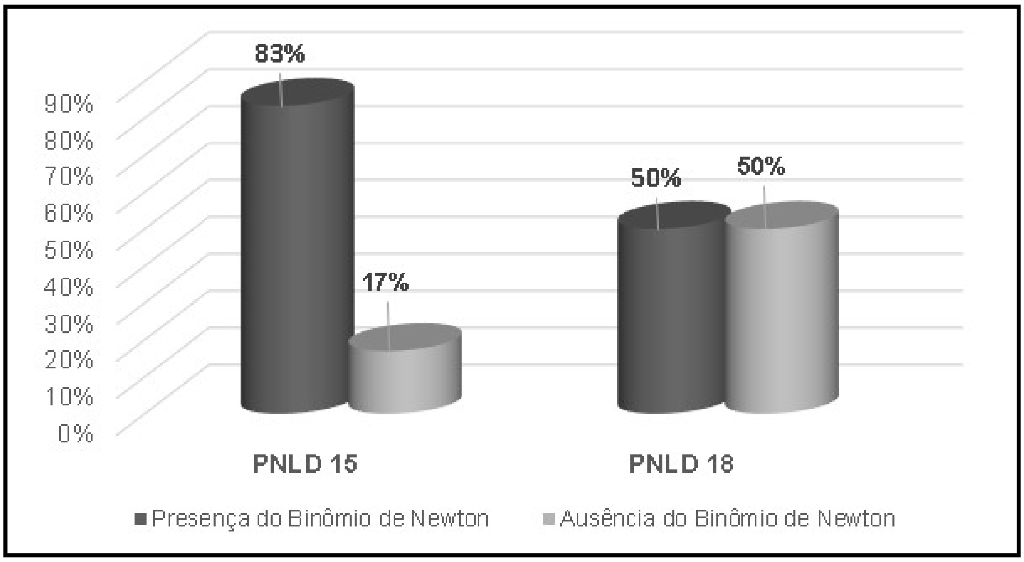


Figura 54: Percentuais de obras com a presença ou ausência da temática Binômio de Newton.
Fonte: Autoria própria.

Reparamos que das seis coleções do PNLD 2015, apenas quatro se mantiveram sem alteração de nomenclatura no PNLD 2018: LD15-1, LD15-2, LD15-3 e LD5-4 que foram reeditadas, e equivalem, respectivamente, a LD18-1, LD18-2, LD18-3, LD18-4. As obras LD15-5 e LD15-6 são similares[33] às obras LD18-5 e LD18-6 respectivamente. A obra LD18-5 sofreu alteração de nomenclatura: de Matemática – Ensino Médio para Matemática para compreender o mundo, de autoria de Kátia Cristina Stocco Smole e Maria Ignez Diniz. Já a obra LD18-6, além da mudança de nomenclatura: Novo Olhar Matemática para #Contato Matemática, teve parceira para autoria de Joamir de Souza e Jacquelina Garcia.

Após a leitura dos guias de livros didáticos (BRASIL, 2017; BRASIL, 2014), vimos que, além de orientar a escolha dos livros didáticos para os professores, eles exercem a função de sugerir melhorias para reedições de livros ou novas obras.

Das obras reeditadas, a obra LD18-1 não aborda a temática Binômio de Newton, mas manteve o conteúdo Distribuição Binomial das Probabilidades no terceiro volume da coleção, juntamente com o Capítulo sobre probabilidades, enquanto que na segunda edição da obra, (PNLD 2015), o conteúdo era abordado.

Já a obra LD18-2 apresenta a temática com a mesma abordagem e problemas da LD15-2, excluindo o equívoco sobre o Histórico do Binômio de Newton[34]. As obras LD18-3 e LD18-4 não contemplam o conteúdo Binômio de Newton. Mas, constatamos que as edições disponibilizadas no PNLD 2015, LD15-3 e LD15-4, quarta e sétima edição respectivamente, apresentavam a temática.

Das obras similares, a obra LD15-5 não contempla o conteúdo Binômio de Newton, assim como a sua similar LD18-5. Constatamos que mesmo sofrendo uma alteração de autoria, as obras LD15-6 e LD18-6 não exprimem nenhuma alteração na abordagem do conteúdo Binômio de Newton.

Observamos, portanto, que obras inéditas do PNLD 2018, em relação ao PNLD 2015, são apenas a LD18-7 e LD8-8 e ambas apresentam o conteúdo Binômio de Newton.

A reorganização das obras com exclusões de conteúdos e redistribuições em outros volumes deve-se ao fato do edital do PNLD 2018 exigir número máximo de

[33] Optamos por assim chamar, devido às alterações serem irrisórias.
[34] Na segunda edição atribuía a Newton a criação do Binômio de Newton.

páginas para o livro do aluno. Observamos que a exclusão de determinados pontos não levou em consideração as proposições dos documentos oficiais que determinam o currículo básico a ser seguido e conteúdos básicos elencados nos guias dos livros didáticos, conforme apresentamos no Capítulo 1.

A maioria das obras considera em suas apresentações, a utilização da História da Matemática como uma importante ferramenta metodológica que pode instigar e motivar o aluno no processo ensino aprendizagem. Ao resgatar o processo histórico de constituição dos saberes podemos dar sentido a conteúdos que, de maneira geral, são abordados de forma descontextualizada. Essa tendência metodológica é proposta, como vimos na Seção 1.2.1.2, pelas DCE (PARANÁ, 2008), e corroboram para a contextualização conforme exposto nos guias de livros didáticos (BRASIL, 2017; BRASIL, 2014).

Entretanto, das obras que apresentam um breve histórico sobre o Binômio de Newton (LD15-1, LD15-2, LD15-3, LD15-4, LD15-6, LD18-2, LD18-6), apenas a LD18-2 corrigiu o equívoco, excluindo o comentário que associava o nome de Isaac Newton ao Binômio de Newton. Os autores insistem em atribuir a Isaac Newton a criação do Binômio de Newton, mas como vimos na Seção 1.4.3.2, o Binômio de Newton foi estudado e demonstrado para expoente natural antes de Isaac Newton nascer.

Como exposto por Gérard e Roegiers (1998, p.19), o livro didático é material que tem a finalidade de assegurar um processo de ensino aprendizagem de qualidade, auxiliando o aluno, pois para muitos é a única fonte de pesquisa e subsidiando o trabalho do professor, que também se ampara nele para aprofundar seus conhecimentos. Por isso, um erro como este é inadmissível e a confiabilidade das obras fica comprometida.

Nas apresentações dos livros, alguns autores discorrem que uma das concepções do livro se baseia em oferecer assuntos de maneira contextualizada, relacionados a outras áreas do saber, aplicação de problemas a situações reais. Entretanto, quando da abordagem do Binômio de Newton, apenas na obra LD15-3 observamos uma atividade similar ao Exemplo 11.

Vimos na Seção 1.4.4.3 que a Distribuição Binomial das Probabilidades é uma das aplicações do Teorema Binomial, entretanto nas obras em que esteve presente foi apresentada juntamente com o conteúdo de probabilidade, e a maioria das obras, não fez relação ao Binômio de Newton.

As atividades propostas para a Distribuição Binomial das Probabilidades são basicamente do tipo exercícios de algoritmos, e versam, em sua maioria, em torno do cálculo de probabilidade de sexo no nascimento de filhos, jogos de azar, cobranças de pênalti, acertos em questões de múltipla escolha.

Levando em consideração que muitos professores seguem o livro didático para preparar suas aulas e estruturar seu PTD (Plano de Trabalho Docente), essa linearidade de conteúdos acaba impossibilitando relações entre os conteúdos matemáticos e consequentemente áreas de saber.

Apresentamos nas Tabelas 2 e 3 a variedade de problemas coletados nos segundos volumes das coleções aprovadas no PNLD 2015 e PNLD 2018, respectivamente, para a temática Binômio de Newton.

Tabela 2: Variedade de problemas presentes nos segundos volumes das coleções aprovadas no PNLD 2015.

	Exercícios de Reconhecimento	Exercícios de Algoritmos	Problemas Padrão	Problemas Processo	Problemas de Aplicação	Problemas Quebra-cabeça	Total
LD15-1	2	8	4	0	0	0	14
LD15-2	1	4	0	0	0	0	5
LD15-3	0	4	0	0	0	0	4
LD15-4	9	13	5	0	0	0	27
LD15-5	0	0	0	0	0	0	0
LD15-6	8	18	7	0	0	0	33
Total	20	47	16	0	0	0	83

Fonte: Elaborada pela autora.

Tabela 3: Variedade de problemas presentes nos segundos volumes das coleções aprovadas no PNLD 2018.

	Exercícios de Reconhecimento	Exercícios de Algoritmos	Problemas Padrão	Problemas Processo	Problemas de Aplicação	Problemas Quebra-cabeça	Total
LD18-1	0	0	0	0	0	0	0
LD18-2	1	4	0	0	0	0	5
LD18-3	0	0	0	0	0	0	0
LD18-4	0	0	0	0	0	0	0
LD18-5	0	0	0	0	0	0	0
LD18-6	8	18	6	0	0	0	32
LD18-7	9	19	0	0	0	0	28
LD18-8	5	4	9	1	0	0	19
Total	23	45	15	1	0	0	84

Fonte: Elaborada pela autora.

Observamos na Tabela 2 que das 83 atividades coletadas e categorizadas de acordo com a classificação dos problemas descrita por Dante (2000), 57% dos problemas se encaixaram nas características de exercícios de algoritmos, seguido pelos exercícios de reconhecimento, 24%, e 19% são problemas padrão. No PNLD 2018 (Tabela 3) constatamos que 54% são exercícios algoritmos, 27% são exercícios de reconhecimento, 18% são problemas padrão e 1% problema processo.

Graficamente, expomos nas Figuras 55 e 56, o quantitativo dos problemas, por coleção, quando da abordagem do conteúdo Binômio de Newton nos segundos volumes das coleções aprovadas no PNLD 2015 e 2018, respectivamente.

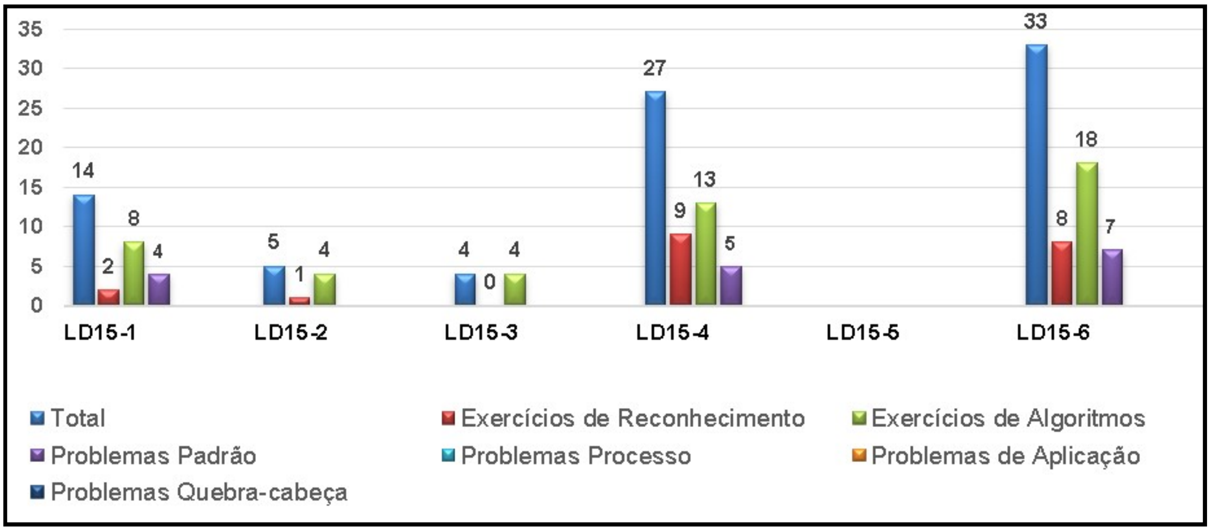


Figura 55: Quantitativo de atividades apresentadas nos segundos volumes das coleções aprovadas no PNLD 2015 para a temática Binômio de Newton.
Fonte: Autoria Própria.

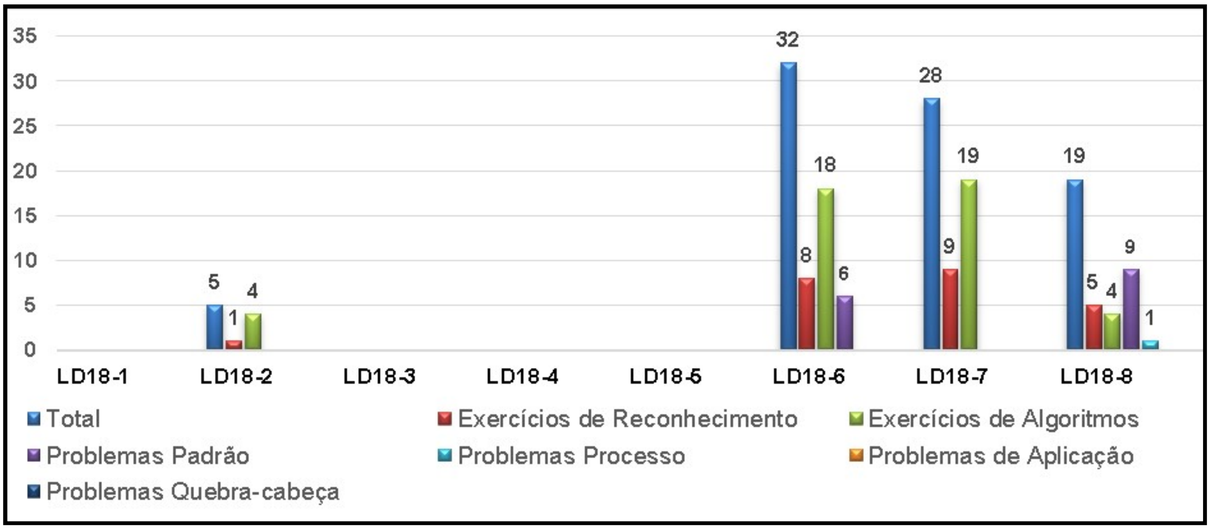


Figura 56: Quantitativo de atividades apresentadas nos segundos volumes das coleções aprovadas no PNLD 2018 para a temática Binômio de Newton.
Fonte: Autoria Própria.

Em relação aos dados observados acima, percebemos que há uma uniformidade de tipos de problemas presentes nas obras, e que essa regularidade se mantém de um PNLD para outro. É consenso entre os autores a apresentação inicial dos conteúdos seguidos por problemas do tipo exercícios de algoritmos. Tais problemas, conforme exposto na Seção 1.3, de acordo com a categorização proposta por Dante (2000, p. 16), objetivam “treinar a habilidade de executar um algoritmo e reforçar conhecimento anteriores”, enquanto que os problemas do tipo exercícios de reconhecimento visam recordar conceitos.

Percebemos, também, que os problemas padrão são frequentemente usados pelos autores, pois, de acordo com Dante (2000, p. 17) visam “recordar e fixar os fatos básicos por meio dos algoritmos [...]. De maneira geral não aguçam a curiosidade do aluno nem o desafiam”.

Esses três tipos de problemas são vistos por Dante (2000, p. 43) como exercícios, pois para ele o exercício “serve para exercitar, para praticar um determinado algoritmo ou processo. O aluno lê o exercício e extrai as informações necessárias para praticar uma ou mais habilidades algorítmicas”.

Nos guias de livros didáticos (BRASIL, 2017; BRASIL, 2014), há uma preocupação por parte dos avaliadores das coleções, como citado na Seção 1.1.2, na forma de exposição dos conteúdos trabalhados. Refutam-se as deduções de conceitos antecipadamente, não dando oportunidades para que os alunos pensem, raciocinem, façam abstrações e, de mesmo modo, as atividades resolvidas existentes nas coleções, que acabam por servir de modelo de resolução às atividades propostas para uma determinada temática.

Nas obras analisadas, constatamos que as mesmas seguem o padrão descrito acima. Primam por atividades que visam recordar e/ou fixar conteúdos, ou seja, apesar das recomendações existentes nos documentos orientadores a nível federal e na diretriz curricular do Estado do Paraná sobre o que se almeja para o ensino da Matemática, e as sugestões dos guias de livros didáticos. Os autores continuam apoiando-se no viés de que é necessário inicialmente explorar a teoria matemática para capacitar o aluno para depois resolver problemas.

Na Seção 1.3, vimos que esta perspectiva reproduz uma prática de ensino tradicional. Inicialmente, aborda-se um conteúdo e em seguida são dados problemas para treinamento e memorização de algoritmos, e como cita Onuchic (1999) isso não garante a compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos, mesmo que a resolução seja feita corretamente, como já dito anteriormente.

Essa concepção é amplamente questionada pelas diretrizes educacionais a nível nacional e estadual, pois espera-se que a formação para os alunos do Ensino Médio vá muito além da simples reprodução de algoritmos.

Resgatamos dos PCN+ (BRASIL, 2002), que ensinar Matemática, apoiando-se na Resolução de Problemas é indispensável para que os indivíduos alcancem as aptidões (argumentar, analisar, tirar, conclusões, tomar decisões, generalizar), uma vez que a mesma induz ao desenvolvimento do pensamento crítico, norteando o aluno no sentido de enfrentar situações desafiadoras, motivando-os para a criação de estratégias, argumentações para resolução de situações tanto da vida escolar como pessoal.

Já na BNCC (BRASIL, 2018, p. 523) umas das competências a serem contempladas pelo Ensino Médio é

> Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos – Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística –, para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir

argumentação consistente.

Para alcançar essa competência o formalismo e a reprodução de algoritmos são insuficientes, como vimos nas atividades sobre Binômio de Newton, das coleções dos PNLD 2015 e 2018. Bonilha e Vidigal (2016, p. 12) discorrem que com a Resolução de Problemas, é possível, por meio de problemáticas que “permitam o processo investigativo”, desenvolver nos alunos atitudes mais pró-ativas diante das mais variadas situações acadêmicas e de mundo.

Nenhuma obra analisada abordou problemas de aplicação, visto na Seção 1.3, como problemas que necessitam de levantamento de dados para resolução, ou seja, problemas que podem ser originados a partir de situações reais e da realidade dos educandos. Constatamos também, que na temática Binômio de Newton, nenhuma obra explorou o potencial de problemas do tipo quebra-cabeça.

Com esses apontamentos, concluímos que os livros didáticos apresentam lacunas que podem ser preenchidas nas próximas edições, no que tange a abordagem do conteúdo matemático Binômio de Newton.

As diretrizes curriculares para a disciplina de Matemática a nível nacional, documento orientador do currículo do Ensino Médio para as instituições escolares paranaenses e as disposições presentes nos guias de livros didáticos evidenciam que é necessário incorporar novas formas de ensinar Matemática. Portanto, devem garantir a formação integral do educando, tornando-os mais ativos diante do processo de ensino aprendizagem e capacitando-os para que a Matemática dos bancos escolares não seja vista como algo abstrato, mas possa ser aplicada a situações reais.

Para isso, a Resolução de Problemas precisa ser melhor entendida pelos profissionais da educação. Os livros didáticos precisam adequar-se e fomentar atividades que assegurem que essa possa ser implementada de modo a superar a dinamicidade do ensino da Matemática pautada na Resolução de Problemas para fixação de conteúdos.

4 SUGESTÕES DE PROBLEMAS

4.1 CONSIDERAÇÕES SOBRE A ELABORAÇÃO DE PROBLEMAS: relatando a experiência

Após analisar as atividades apresentadas sobre a temática Binômio de Newton, contidas nas coleções de livros didáticos de Matemática aprovadas nos PNLD 2015 e 2018, constatamos que poderíamos contribuir para estabelecer um movimento entre a teoria, construída e retratada nessa pesquisa, e a prática docente a fim de romper a forma frequente de elaboração e proposição de atividades para o conteúdo Binômio de Newton, e alcançar o exposto nas diretrizes educacionais.

Para construção das sugestões de problemas, nos apoiamos, inicialmente, na definição de problema enunciada por Dante (2000, p. 9), que considera problema “qualquer situação que exija a maneira matemática de pensar e conhecimentos matemáticos para solucioná-la” e na categorização de problemas prescrita por ele.

Vimos, também, que os diferentes tipos de problemas remetem a várias formas de ensinar Matemática, e, por muitas vezes, torna o ensino desta disciplina mecânico, tanto para o aluno como para o professor. E então se faz necessário buscar outros tipos de problemas, que não sejam os exercícios algoritmos, exercícios de reconhecimento.

Em nossas experiências, como docentes da disciplina de Matemática, regularmente nos apoiamos na interdisciplinaridade e a contextualização.

A interdisciplinaridade, de acordo com Fortunato *et al.* (2013, p. 2) é

> [...] uma perspectiva de trabalho pedagógico que promove o diálogo de saberes, a conversa entre as diversas áreas do conhecimento e seus conteúdos, o entrelaçamento entre os diversos fios que tecem o currículo escolar, de modo a fortalecer, qualificar e contextualizar o processo de aprendizagem dos discentes em seus respectivos níveis de ensino.

Já a contextualização é uma forma de motivar nossos alunos, pois, de acordo com Kato (2007, p. 31), partindo de situações reais e de interesse dos educandos o ensino do conhecimento científico torna-se “[...] possível de ser compreendido, questionado e vivenciado”, pois à medida que insere-se o aluno num espaço ativo de busca a significados aos conteúdos escolares, faz com que eles sintam a necessidade de apropriar-se de novos saberes e utilizar conhecimentos já aprendidos anteriormente.

Tais formas de ensinar requer amplas e interessantes reflexões, mas devido aos objetivos descritos para realização deste trabalho foram incorporadas a ele sem adentrar a teoria das mesmas.

Assim, tendo esses conceitos alinhavados iniciamos a escrita dos diferentes tipos de problemas. A inspiração para o tema de cada problema é oriunda do público estudantil das instituições escolares de Ensino Médio em que atuamos durante nossa vida profissional (instituições do centro, dos bairros e do campo na cidade de Pato Branco – PR). Cada um desses espaços é permeado por uma pluralidade cultural e atender as demandas se faz necessário.

O processo de produção dos problemas foi um árduo trabalho, que exigiu o desenvolvimento de conhecimentos teóricos com os quais muitas vezes não nos deparamos na formação e na prática. Isso é um desafio para que os problemas matemáticos sejam elaborados em um viés interdisciplinar, significativo e contextualizado. Por isso a importância da formação continuada e da qualificação profissional para a construção de práticas pedagógicas mais qualitativas no ensino de Matemática.

Isso posto, apresentamos os problemas elaborados, visando incorporar as perspectivas acima abordadas.

4.2 O PROBLEMA DA GRANJA DE SUÍNOS

João, pequeno agricultor da região Sudoeste do Paraná, pretende implantar uma granja de suínos. Pesquisando sobre o ciclo reprodutivo de suínos constatou que, em cada ninhada, o número de filhotes é em média de 10 leitões. Para João é mais rentável a criação de machos e, por isso, é preferível que a ninhada possua mais machos do que fêmeas. Para calcular a probabilidade de ocorrer isso, ele pediu ajuda a seu filho Pedro, que rapidamente apresentou o percentual probabilístico de tal fato, entretanto não tem certeza do resultado. Ajude Pedro a conferir se sua resposta está correta, fazendo os cálculos relativos ao problema.

CLASSIFICAÇÃO: PROBLEMA PROCESSO

CONTEÚDOS MATEMÁTICOS QUE PODEM SER ABORDADOS:
- Probabilidade;
- Eventos independentes;
- Ensaios de Bernoulli;
- Combinação Simples;
- Número Binomial;
- Binômio de Newton.

CONTEÚDOS RELACIONADOS A OUTRAS ÁREAS DO CONHECIMENTO
Biologia – Meiose (formação dos gametas), tipos de reprodução.

RESOLUÇÃO
O problema busca saber qual a probabilidade de nascer mais machos do que fêmeas em uma ninhada. Como são 10 leitões, busca-se descobrir a probabilidade de nascer todos machos, 9 machos e 1 fêmea, 8 machos e 2 fêmeas, 7 machos e 3 fêmeas, 6 machos e 4 fêmeas.
Note que a fecundação de um ovócito por um espermatozoide masculino não interfere na fecundação de um ovócito por um espermatozoide feminimo, ou seja, a geração de cada suíno é um evento independente. Logo, na geração da ninhada, há 10 eventos independentes e cada um possui duas possibilidades para a sexagem: macho (M) ou fêmea (F). Observamos, portanto, que trata-se de eventos denominados de Ensaios de Bernoulli.
Considerando p = probabilidade de ser macho = 0,5 e q = probabilidade de ser fêmea = 0,5, aplicando o Teorema Binomial em $(p + q)^{10}$,temos:

$$(p+q)^{10} = \binom{10}{0}p^0q^{10} + \binom{10}{1}p^1q^9 + \binom{10}{2}p^2q^8 + \binom{10}{3}p^3q^7 + \binom{10}{4}p^4q^6 + \binom{10}{5}p^5q^5 + \binom{10}{6}p^6q^4 + \binom{10}{7}p^7q^3 + \binom{10}{8}p^8q^2 + \binom{10}{9}p^9q + \binom{10}{10}p^{10}q^0.$$

Para responder o problema, temos que calcular a probabilidade de nascerem todos machos, 9 machos e 1 fêmea, 8 machos e 2 fêmeas, 7 machos e 3 fêmeas, 6 machos e 4 fêmeas, ou seja, $\binom{10}{10}p^{10}q^0$, $\binom{10}{9}p^9q$, $\binom{10}{8}p^8q^2$, $\binom{10}{7}p^7q^3$ e $\binom{10}{6}p^6q^4$, equivalente a: $\binom{10}{10}p^{10}q^0 + \binom{10}{9}p^9q + \binom{10}{8}p^8q^2 + \binom{10}{7}p^7q^3 + \binom{10}{6}p^6q^4 = 1.(0,5)^{10} + 10.\ (0,5)^9.(0,5)^1 + 45.\ (0,5)^8.\ (0,5)^2 + 120.\ (0,5)^7.\ (0,5)^3 + 210.\ (0,5)^6.\ (0,5)^4 = 0,3769 =$ 37,69%...₪

Questões problematizadoras:

a) O nascimento de cada leitão pode ser considerado um evento?

b) Explique porque é mais rentável a criação de suínos machos do que suínos fêmeas.

c) Qual a probabilidade de nascerem mais fêmeas do que machos?

d) A nossa região tem uma produção expressiva de carne suína? O Brasil importa ou exporta este tipo de carne?

4.3 O PROBLEMA DO CÂNCER DE MAMA

> Os cientistas descobriram dois genes específicos que, quando mutados, são importantes no desenvolvimento do câncer de mama. São chamados BRCA1 e BRCA2. Todo mundo tem estes genes, mas algumas pessoas herdam uma forma mutada de um ou dos dois genes. Herdar uma forma mutada do BRCA1 ou BRCA2 aumenta os riscos de uma mulher desenvolver câncer de mama e de ovário. Mutações de genes herdadas, incluindo mutações no BRCA1 e BRCA2, contabilizam cerca de 5 a 10% de todos os casos de câncer de mama nos EUA. A maioria dos cânceres de mama são devido à mutações espontâneas nos genes. Mutações nos genes BRCA não são encontradas apenas em mulheres. Os homens também podem ser portadores genes anormais, o que pode aumentar seu risco para câncer de próstata. Homens com mutação no gene BRCA2 também têm um risco aumentado para câncer de mama. (FACTS FOR LIFE, 2009)

Um casal tem 4 descendentes, todas do sexo feminino. Sabendo que todas foram submetidas a exame genético que detectou a presença da forma mutada dos genes BRCA1 e BRCA2 e há, hipoteticamente, 7% de chance de desenvolvimento de câncer, determine a probabilidade:

a)Das 4 filhas do casal desenvolverem câncer de mama.

b)De pelo menos 3 filhas do casal não desenvolverem câncer de mama.

CLASSIFICAÇÃO: PROBLEMA PADRÃO

CONTEÚDOS MATEMÁTICOS QUE PODEM SER ABORDADOS:

- Probabilidade;
- Eventos independentes;
- Ensaios de Bernoulli;
- Combinação Simples;
- Número Binomial;
- Binômio de Newton;
- Distribuição Binomial das Probabilidades.

CONTEÚDOS RELACIONADOS A OUTRAS ÁREAS DO CONHECIMENTO

Biologia – DNA, duplicação do DNA, alterações no DNA.

RESOLUÇÃO

Sabendo que a probabilidade do desenvolvimento de câncer de mama nessa família é de 7% = 0,07 e de não desenvolver câncer de mama é 93% = 0,93, precisamos calcular a probabilidade de todas as filhas do casal desenvolverem câncer de mama e pelo menos três não desenvolverem. Note que o desenvolvimento de câncer de mama em cada filha é um evento independente dos demais. Além disso, cada filha pode ou não desenvolver câncer de mama. Trata-se, portanto, de Ensaios de Bernoulli.

Tendo conhecido a Distribuição Binomial das Probabilidades e sabendo que:

p = probabilidade de desenvolver câncer de mama = 0,07;

q = probabilidade de não desenvolver câncer de mama = 0,93;

Para responder as duas questões propostas no problema podemos aplicar o Teorema Binomial em $(p + q)^4$.

Aplicando o Teorema Binomial em $(p + q)^4$

$(p + q)^4 = \binom{4}{0}p^0q^4 + \binom{4}{1}p^1q^3 + \binom{4}{2}p^2q^2 + \binom{4}{3}p^3q^1 + \binom{4}{4}p^4q^0 = 1.(0{,}07)^0.(0{,}93)^4 + 4.(0{,}07)^1.(0{,}93)^3 + 6.(0{,}07)^2.(0{,}93)^2 + 4.(0{,}07)^3.(0{,}93)^1 + 1.(0{,}07)^4.(0{,}93)^0$.

Para responder a letra a: A probabilidade das 4 filhas do casal desenvolverem câncer de mama corresponde ao termo $\binom{4}{4}p^4q^0$ do desenvolvimento binomial. Logo

$\binom{4}{4}p^4q^0 = 1.(0{,}07)^4.(0{,}93)^0 = 0{,}002401\%$...₪

Outra alternativa de resolução do item a é a aplicação da Distribuição Binomial das Probabilidades.

a) A probabilidade das 4 filhas do casal desenvolverem câncer de mama é dada por:

$p(k) = \binom{n}{k}p^kq^{n-k}$

$p(4) = \binom{4}{4}p^4q^0 = \binom{4}{4}(0{,}07)^4.(0{,}93)^{4-4}=1.(0{,}07)^4.(0{,}93)^0 = 0{,}00002401 = 0{,}002401\%$.

Para responder a letra b: A probabilidade de pelo menos 3 filhas não desenvolverem câncer de mama, levamos em consideração os termos do desenvolvimento binomial:

$\binom{4}{0}p^0q^4 + \binom{4}{1}p^1q^3 + \binom{4}{2}p^2q^2 + \binom{4}{3}p^3q^1 = 1.(0{,}07)^0.(0{,}93)^4 + 4.(0{,}07)^1.(0{,}93)^3 + 6.(0{,}07)^2.(0{,}93)^2 + 4.(0{,}07)^3.(0{,}93)^1 = 0{,}99997599 = 99{,}99\%$......................................₪

Outra alternativa de resolução do item b é levando em consideração a resposta da alternativa a. Sabendo que a probabilidade das 4 filhas do casal desenvolveram câncer de mama é de 0,00002401, a probabilidade de que pelo menos três não desenvolvam será dada por: 1- 0,00002401 = 0,99997599 = 99,99%. ....₪

Questões problematizadoras:

a) Você faria um exame genético que apontasse as mutações existentes em seu DNA que potencializam a pré-disposição a doenças?

b) Se fossem 4 filhos homens, as chances de desenvolver o câncer de mama seriam as mesmas? E se fossem homens e mulheres?

c) É questão de tempo para que as doenças genéticas sejam identificadas com análise do DNA antes mesmo da fecundação para gerar um novo ser. O que isso pode gerar? Que interesses econômicos estão envolvidos?

4.4 O PROBLEMA DOS SEGUROS VEICULARES

As seguradoras de veículos utilizam vários fatores para determinar o valor a ser cobrado pelo seguro de um carro, entre eles estão: índice de acidentes da região, inflação, mão de obra cobrada pelas montadoras, furtos ou roubos de veículos na região de localização do carro.

Faça um levantamento de dados em sua sala de aula e apresente os dados coletados por meio de gráficos:

a) Seus responsáveis possuem carro próprio?

b) O carro possui seguro?

c) O seguro é total ou apenas contra terceiros?

d) Que outros tipos de seguro você ou sua família possuem? (Vida, Acidentes Pessoais, Previdência complementar aberta, Saúde, Residência, Seguro Desemprego, Equipamentos eletrônicos portáteis).

e) Dentre os n indivíduos participantes da pesquisa, qual é a probabilidade de ser escolhido um indivíduo que possua seguro residencial e seguro de equipamento eletrônico portátil? (RESPOSTA OBTIDA POR MEIO DO LEVANTAMENTO DE DADOS)

f) Sendo x a probabilidade de um indivíduo possuir seguro residencial e seguro para equipamento eletrônico portátil, qual é a probabilidade de que em 8 chamados a seguradora, 3 chamados sejam para acionar seguro residencial e seguro para equipamento eletrônico portátil?

CLASSIFICAÇÃO: PROBLEMA APLICAÇÃO/ PROBLEMA PADRÃO

CONTEÚDOS MATEMÁTICOS QUE PODEM SER ABORDADOS:

- Conceitos estatísticos: População, Amostra, Variáveis, Tipos de Variáveis, Frequência Absoluta, Frequência Relativa;

- Tipos de Gráficos;
- Eventos independentes;
- Ensaios de Bernoulli;
- Combinação Simples;
- Número Binomial;
- Binômio de Newton.

RESOLUÇÃO

f) Consideremos a probabilidade de que um indivíduo possui seguro residencial e seguro para equipamento eletrônico portátil seja, hipoteticamente 0,08.

Ao ser solicitado um atendimento à seguradora, o atendente necessitará saber se é para acionar seguro residencial e seguro para equipamento eletrônico portátil ou outro seguro. Cada ligação é considerada um evento independente dos demais, e, além disso, a ordem das ligações não importa, bem como, para cada ligação temos apenas dois objetivos: acionar seguro residencial e seguro para equipamento eletrônico portátil ou prestação de algum outro serviço. Das 8 ligações, nos interessa aquelas em que 3 sejam referentes a acionar seguro residencial e seguro para equipamento eletrônico portátil e 5 sejam para outros serviços.

Tendo conhecido a Distribuição Binomial das Probabilidades, basta saber que:

p = probabilidade do chamado ser acionar seguro residencial e seguro para equipamento eletrônico portátil = 0,08, e q = probabilidade do chamado ser para outros serviços = 0,92. Aplicando a Distribuição Binomial das Probabilidades:

$$p(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

$$p(3) = \binom{8}{3} p^3 q^{8-3} = \binom{8}{3} (0,08)^3.(0,92)^5 = 56.(0,08)^3.(0,92)^5 = 1,89\% \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ₪$$

Questões problematizadoras:

a) Com o passar dos anos o valor de um carro tende a diminuir, ou seja, sobre desvalorização. O valor do seguro do carro também tende a reduzir? Justifique.

b) Anualmente, todo proprietário de veículo deve recolher três taxas obrigatórias referentes a propriedade veicular: IPVA (Imposto sobre propriedade de veículos automotores), Licenciamento e DPVAT (Danos pessoais causados por Veículos automotores de vias terrestres). Pesquise como são feitos os cálculos desses valores e a quem são destinados.

c) Considerando a frota veicular do estado do Paraná, estime o valor aproximado de arrecadação com a cobrança do seguro obrigatório.

d) O valor de um automóvel, tabelado pela FIPE (Fundação Instituto de Pesquisas Econômicas), para o ano vigente é de R$25.000,00. Qual é o custo que o proprietário do veículo terá com o pagamento das taxas obrigatórias referentes a propriedade veicular? Que percentual esse custo representa do valor do automóvel?

4.5 O PROBLEMA DA REJEIÇÃO EM UM TRANSPLANTE DE CORAÇÃO

> Diversos problemas de saúde podem culminar na total incapacidade de funcionamento de alguns órgãos. Nesses casos, faz-se necessária, muitas vezes, a realização de transplantes para substituir o órgão ineficiente. O primeiro problema enfrentado por pessoas que precisam de um transplante é a dificuldade para encontrar um doador compatível. Após conseguir um órgão, outro problema surge: a possibilidade de rejeição. A rejeição ocorre quando o sistema imunológico do receptor não reconhece o novo órgão ou tecido e inicia a produção de anticorpos. Esse processo pode ocorrer em qualquer transplante, variando apenas em intensidade. Em casos graves, os anticorpos podem iniciar um grande ataque contra o material transplantado, causando sua destruição e até mesmo a morte do paciente receptor (ocorrência mais rara). A rejeição está intimamente relacionada com o grau de compatibilidade entre o receptor e o doador. Quanto maior a compatibilidade, menores são as chances de rejeição e mais fácil será o tratamento caso o processo ocorra. Vale frisar que, na maioria dos casos de rejeição, o tratamento é realizado com sucesso e o quadro é revertido. O tratamento para controlar a rejeição é realizado com medicamentos imunossupressores, que visam à diminuição da ação do sistema imunológico, controlando a quantidade de anticorpos. A imunossupressão pode ser feita de maneira inespecífica, diminuindo a atividade do sistema imune independentemente do antígeno, ou específica, que agirá nos mecanismos de retroalimentação, promovendo reações imunológicas específicas. A imunossupressão inespecífica possui maior risco de infecções. Para evitar a rejeição, o tratamento após o transplante de tecidos e órgãos costuma ser contínuo, ou seja, os medicamentos devem ser tomados por toda a vida. É importante frisar que, mesmo com medicamentos, a rejeição pode ocorrer, sendo necessário, nesses casos, o aumento das doses ou então a troca dos medicamentos. (MUNDO DA EDUCAÇÃO, 2019).

Segundo dados do jornal da USP (USP, 2018), são feitos, em média 5 mil transplantes de coração ao ano no mundo, e a expectativa é de 90% de sucesso nesse tipo de transplante. No Brasil, são feitos em média, sete transplantes de coração por semana. Levando em consideração a expectativa de 90% de não haver rejeição no transplante de coração, qual é a probabilidade de que em sete transplantes de coração:

a) nenhum apresente rejeição?

b) todos apresentem rejeição?

c) pelo menos 2 apresentem sucesso?

CLASSIFICAÇÃO: PROBLEMA PADRÃO

CONTEÚDOS MATEMÁTICOS QUE PODEM SER ABORDADOS:

- Probabilidade;
- Eventos independentes;
- Ensaios de Bernoulli;
- Combinação Simples;
- Número Binomial;
- Binômio de Newton;
- Distribuição Binomial das Probabilidades.

CONTEÚDOS RELACIONADOS A OUTRAS ÁREAS DO CONHECIMENTO

Biologia – Sistema Imunológico.

RESOLUÇÃO

É necessário efetuar o cálculo da probabilidade de nenhum dos sete transplantes apresentar rejeição, todos apresentarem e pelo menos 2 não apresentarem rejeição, levando em consideração que cada transplante tem 90% de chance de ocorrer com sucesso e, consequentemente, 10% de apresentar rejeição.

Note que cada transplante é um evento independente, e os resultados possíveis para o mesmo é sucesso ou rejeição. Portanto, temos sete eventos chamados de

Ensaios de Bernoulli.

Como cada transplante é um Ensaio de Bernoulli, podemos resolver o problema aplicando a Distribuição Binomial das Probabilidades em $(p + q)^7$, considerando que p = probabilidade do transplante ocorrer com sucesso = 0,9 e q = probabilidade do transplante ser rejeitado = 0,1, ou, aplicando o Binômio de Newton.

Aplicando o Teorema do Binômio de Newton de $(p + q)^7$, temos:

$$(p + q)^7 = \binom{7}{0}p^0q^7 + \binom{7}{1}p^1q^6 + \binom{7}{2}p^2q^5 + \binom{7}{3}p^3q^4 + \binom{7}{4}p^4q^3 + \binom{7}{5}p^5q^2 + \binom{7}{6}p^6q^1 + \binom{7}{7}p^7q^0.$$

a)nenhum apresente rejeição?

Nenhum apresentar rejeição é o mesmo que os sete transplantes ocorrerem com sucesso, ou seja, equivale a $\binom{7}{7}p^7q^0 = 1.\ (0,9)^7.\ (0,1)^0 = 47,82\%$..............................₪

b)todos apresentem rejeição?

Equivale a nenhum transplante ocorrer com sucesso (os sete serem rejeitados), ou seja, $\binom{7}{0}p^0q^7$. Assim, $\binom{7}{0}p^0q^7 = 1.\ (0,9)^0.\ (0,1)^7 = 0,00001\%$......................................₪

c) pelo menos 2 apresentem sucesso?

Neste caso, temos que considerar os casos em que dos 7 transplantes 2 aconteceram com sucesso ou 3, ou 4, ou 5 ou 6, ou 7 aconteceram com sucesso.

Note que observando o Binômio de Newton, excluiremos os casos em que todos sejam rejeitados e que um seja rejeitado e outros seis tenham sucesso. Assim, é fácil ver que o cálculo da probabilidade de pelos menos 2 transplantes apresentem sucesso pode ser dado por:

$1 - \left[\binom{7}{0}p^0q^7 + \binom{7}{1}p^1q^6\right] = 1 - [1.(0,9)^0.(0,1)^7 + 7.(0,9)^1.(0,1)^6] = 1 - [0,0000001 + 0,0000063] = 99,99\%$..₪

Questões problematizadoras:

a) Pesquisa sobre número de doares de órgãos em sua sala de aula. Apresente os dados em gráficos.
b) Campanha de doação de medula óssea: você é doador de medula óssea? Apresente os dados sobre doadores de medula óssea em gráficos.
c) Qual é o número de transplantes, por órgão, realizados em instituições hospitalares da cidade nos últimos 5 anos? E no estado?
d) A probabilidade de rejeição de um transplante muda conforme o órgão. Pesquise sobre isso e apresente os dados em gráfico.

4.6 O PROBLEMA DOS DOADORES UNIVERSAIS DE SANGUE

Pessoas com sangue tipo O^- são doadores universais, ou seja, seu sangue é doado sem risco de rejeição para qualquer um. Apenas 8% da população tem sangue do tipo O^-. Um banco de sangue é visitado por 15 doadores em uma certa tarde. Há expectativa otimista para que o banco de sangue seja abastecido por doadores universais. Entretanto esse fato merece uma análise estatística. Há mais chance de que entre os doadores haja pelo menos dois doadores universais ou até 3 doadores universais. Comprove matematicamente.

CLASSIFICAÇÃO: PROBLEMA PROCESSO

CONTEÚDOS MATEMÁTICOS QUE PODEM SER ABORDADOS:
- Probabilidade;
- Eventos independentes;
- Ensaios de Bernoulli;
- Combinação Simples;
- Número Binomial;
- Binômio de Newton.

CONTEÚDOS RELACIONADOS A OUTRAS ÁREAS DO CONHECIMENTO
Biologia – Tipos Sanguíneos, Fator RH, Sistema ABO.

RESOLUÇÃO

O tipo sanguíneo O^- é utilizado para transfusões para indivíduos que apresentem qualquer tipo sanguíneo. Note que apenas 8% da população possui esse tipo sanguíneo. Cada doador é considerado um evento independente dos demais, e pode ou não ter tipo sanguíneo O^-. Por isso, para resolver esse problema, podemos utilizar a Distribuição Binomial das Probabilidades, pois temos Ensaios de Bernoulli.

Considerando que p = probabilidade da pessoa ser doador universal = 0,08 e q = probabilidade da pessoa não ser doador universal = 0,92. Aplicando o Teorema Binomial em $(p + q)^{15}$ temos:

$$(p+q)^{15} = \binom{15}{0}p^0q^{15} + \binom{15}{1}p^1q^{14} + \binom{15}{2}p^2q^{13} + \binom{15}{3}p^3q^{12} + \binom{15}{4}p^4q^{11} + \binom{15}{5}p^5q^{10}$$

$$+ \binom{15}{6}p^6q^9 + \binom{15}{7}p^7q^8 + \binom{15}{8}p^8q^7 + \binom{15}{9}p^9q^6 + \binom{15}{10}p^{10}q^5 + \binom{15}{11}p^{11}q^4 + \binom{15}{12}p^{12}q^3$$

$$+ \binom{15}{13}p^{13}q^2 + \binom{15}{14}p^{14}q^1 + \binom{15}{15}p^{15}q^0.$$

A chance de existirem pelo menos dois doadores universais entre eles, no Teorema Binomial, é dada pelos termos: $\binom{15}{2}p^2q^{13}$, $\binom{15}{3}p^3q^{12}$, $\binom{15}{4}p^4q^{11}$, $\binom{15}{5}p^5q^{10}$, $\binom{15}{6}p^6q^9$, $\binom{15}{7}p^7q^8$, $\binom{15}{8}p^8q^7$, $\binom{15}{9}p^9q^6$, $\binom{15}{10}p^{10}q^5$, $\binom{15}{11}p^{11}q^4$, $\binom{15}{12}p^{12}q^3$, $\binom{15}{13}p^{13}q^2$, $\binom{15}{14}p^{14}q^1$ e $\binom{15}{15}p^{15}q^0$, o que corresponde a: $1 - \left[\binom{15}{0}p^0q^{15} + \binom{15}{1}p^1q^{14}\right] = 1 - [1.(0,08)^0.(0,92)^{15} + 15\,.(0,08)^1.(0,92)^{14}] = 34,03\%$..₪

No Teorema Binomial, a presença de até 3 doadores universais é dada pelos termos $\binom{15}{1}p^1q^{14}$, $\binom{15}{2}p^2q^{13}$, $\binom{15}{3}p^3q^{12}$. Assim, a probabilidade de que existam até 3 doadores universais é dada por: $\binom{15}{1}p^1q^{14} + \binom{15}{2}p^2q^{13} + \binom{15}{3}p^3q^{12} = 15\,.(0,08)^1.(0,92)^{14} + 105.\,(0,08)^2.(0,92)^{13} + 455.\,(0,08)^3.(0,92)^{12} = 68,64\%$....................₪

Cabe nesse instante, socializar as estratégias de resolução, bem como o resultado obtido. Vale também refletir sobre a importância dos resultados acima aplicados a uma quantidade maior de doações.

Questões problematizadoras:

a) Faça um levantamento do tipo sanguíneo dos estudantes da sua sala e apresente os dados em gráfico.

b) Pesquise sobre os tipos sanguíneos em relação as raças.

c) Faça um comparativo para verificar se a proporção do tipo sanguíneo em relação a raça se mantém em relação a sua sala. Explique as causas disso.

d) Eritroblastose fetal, você já ouviu falar sobre essa doença? Pesquise sobre essa doença.

e) Qual é a justificativa biológica para que o tipo sanguíneo O^- seja doador universal?

4.7 O PROBLEMA DO PISCICULTOR

Um piscicultor é um produtor de peixes ornamentais. A última aquisição de um piscicultor foi um casal de peixes da espécie peixe borboleta de ferro, uma das espécies mais caras do mundo. Em uma cruzamento destes peixes, obteve-se uma progênie com 8 indivíduos. Nesta espécie a relação de machos:fêmeas é de 1:3. Determine as seguintes probabilidades

a)Dos 5 serem do sexo masculino

b)De todos possuírem o mesmo sexo

c)De ocorrerem 5 fêmeas

d)De ocorrerem pelo menos 3 fêmeas

CLASSIFICAÇÃO: PROBLEMA PADRÃO

CONTEÚDOS MATEMÁTICOS QUE PODEM SER ABORDADOS:

- Probabilidade;

- Eventos independentes;
- Ensaios de Bernoulli;
- Combinação Simples;
- Número Binomial;
- Binômio de Newton.

CONTEÚDOS RELACIONADOS A OUTRAS ÁREAS DO CONHECIMENTO

Biologia – Meiose (formação dos gametas), tipos de reprodução.

RESOLUÇÃO

É necessário calcular a probabilidade da progênie ser composta por 5 peixes machos, oito machos ou oito fêmeas, de ser composta por 5 fêmeas e de ocorrer uma progênie com pelos menos 3 fêmeas, ou seja, uma progênie composta por 7 machos e uma fêmea, 6 machos e 2 fêmeas e 5 machos e 3 fêmeas. Como o sexo de cada indivíduo da progênie não depende dos demais, e há apenas duas possibilidades para o sexo de cada indivíduo (macho ou fêmea), podemos caracterizar cada indivíduo como um Ensaio de Bernoulli.

Cada indivíduo da progênie é considerado um Ensaio de Bernoulli. Assim, podemos resolver os itens do problema aplicando o Teorema Binomial em $(p + q)^8$, considerando que p = a probabilidade de nascer macho = 1/3 e q = a probabilidade de nascer fêmea = 2/3.

Aplicando o Teorema Binomial em $(p + q)^8$

$$(p + q)^8 = \binom{8}{0}p^0q^8 + \binom{8}{1}p^1q^7 + \binom{8}{2}p^2q^6 + \binom{8}{3}p^3q^5 + \binom{8}{4}p^4q^4 + \binom{8}{5}p^5q^3 + \binom{8}{6}p^6q^2 + \binom{8}{7}p^7q^1 + \binom{8}{8}p^8q^0.$$

a)Dos 5 serem do sexo masculino

Para calcular a probabilidade de todos os indivíduos da progênie serem do sexo masculino, basta observar que se trata do termo $\binom{8}{8}p^8q^0$ no desenvolvimento binomial, ou seja, a probabilidade é dada por: $\binom{8}{8}p^8q^0 = 1.(1/3)^8.(2/3)^0 = 0{,}015\%$......₪

b) De todos possuírem o mesmo sexo

A probabilidade de todos possuírem o mesmo sexo inclui o fato de todos serem machos ou todos serem fêmeas, o que equivale aos termos $\binom{8}{0}p^0q^8$ e $\binom{8}{8}p^8q^0$.

Portanto a probabilidade de todos possuírem o mesmo sexo é dada por:

$\binom{8}{0}p^0q^8 + \binom{8}{8}p^8q^0 = 1.(1/3)^0.(2/3)^8 + 1.(1/3)^8.(2/3)^0 = 3{,}92\%$......................................₪

c)De ocorrerem 5 fêmeas

A probabilidade de ocorrerem cinco fêmeas equivale ao termo $\binom{8}{3}p^3q^5$. Portanto a probabilidade é dada por: $\binom{8}{3}p^3q^5 = 56.(1/3)^3.(2/3)^5 = 27{,}31\%$..................................₪

d)De ocorrerem pelo menos 3 fêmeas

No desenvolvimento binomial, a ocorrência de pelo menos três fêmeas equivale aos termos $\binom{8}{5}p^5q^3$; $\binom{8}{6}p^6q^2$; $\binom{8}{7}p^7q^1$. Assim a probabilidade da ocorrência de pelos menos três fêmeas é dada por:

$\binom{8}{5}p^5q^3 + \binom{8}{6}p^6q^2 + \binom{8}{7}p^7q^1 = 56.(1/3)^5.(2/3)^3 + 28.(1/3)^6.(2/3)^2 + 8.(1/3)^7.(2/3)^1 = 8{,}78\%$..₪

Questões problematizadoras:

a) Para esse piscicultor, o que é mais viável: o nascimento de machos ou fêmeas?

b) Pesquise sobre a espécie de Borboleta de Ferro.

4.8 O PROBLEMA DA LANCHONETE

Joana nasceu para empreender. Ela pretende criar uma rede de lanchonetes que

oferece 10 tipos de sanduíches com sabores diferenciados: peru com ricota, grão de bico, ovo, abobrinha, carne suína, mortadela, carne de rã, queijo azul, peixe e castanha. Entretanto, ela necessita conhecer o paladar de seus futuros clientes. Ajude Joana, fazendo um levantamento sobre os sabores que mais agradam o público da sua escola e apresente-os a ela, por meio de gráficos.
Com base nos dados, Joana precisa prever uma série de questões. Para isso, colabore com ela: dentre 14 clientes que forem à lanchonete, qual é a probabilidade de que menos de 55% desses clientes optem por escolher um único sanduíche, e este seja do sabor que mais agradou o público da sua escola?

CLASSIFICAÇÃO: PROBLEMA DE APLICAÇÃO

CONTEÚDOS MATEMÁTICOS QUE PODEM SER ABORDADOS:
- Porcentagem;
- Conceitos estatísticos: População, Amostra, Variáveis, Tipos de Variáveis, Frequência Absoluta, Frequência Relativa;
- Tipos de Gráficos;
- Eventos independentes;
- Ensaios de Bernoulli;
- Combinação Simples;
- Número Binomial;
- Binômio de Newton.

CONTEÚDOS RELACIONADOS A OUTRAS ÁREAS DO CONHECIMENTO
Biologia – Reino Fungi, Microbiologia: processos de conservação de alimentos.

RESOLUÇÃO

Aplicando o Teorema Binomial em $(p + q)^{14}$.
Considerando que p = a probabilidade de escolher o sanduíche do sabor definido na pesquisa = 1/10 e q = a probabilidade de não ser o sabor definido na pesquisa =

9/10.

$$(p + q)^{14} = \binom{14}{0}p^0q^{14} + \binom{14}{1}p^1q^{13} + \binom{14}{2}p^2q^{12} + \binom{14}{3}p^3q^{11} + \binom{14}{4}p^4q^{10} + \binom{14}{5}p^5q^9 + \binom{14}{6}p^6q^8 + \binom{14}{7}p^7q^7 + \binom{14}{8}p^8q^6 + \binom{14}{9}p^9q^5 + \binom{14}{10}p^{10}q^4 + \binom{14}{11}p^{11}q^3 + \binom{14}{12}p^{12}q^2 + \binom{14}{13}p^{13}q^1 + \binom{14}{14}p^{14}q^0.$$

Para calcular a probabilidade de que menos que 55% desses clientes escolham um único sanduíche que não seja o sabor escolhido pelo público da escola, basta considerarmos os termos $\binom{14}{0}p^0q^{14}$, $\binom{14}{1}$ p^1q^{13}, $\binom{14}{2}p^2q^{12}$,$\binom{14}{3}p^3q^{11}$, $\binom{14}{4}p^4q^{10}$, $\binom{14}{5}p^5q^9$, $\binom{14}{6}p^6q^8$,$\binom{14}{7}p^7q^7$, do desenvolvimento do Binômio de Newton, pois menos que 55% de 14 clientes corresponde a menos que 8 clientes. Assim a probabilidade é dada por:

$$\binom{14}{0}p^0q^{14} + \binom{14}{1} p^1q^{13} + \binom{14}{2}p^2q^{12} + \binom{14}{3}p^3q^{11} + \binom{14}{4}p^4q^{10} + \binom{14}{5}p^5q^9 + \binom{14}{6}p^6q^8 + \binom{14}{7}p^7q^7 = 1.(0,9)^{14} + 14.0,1.(0,9)^{13} + 91.(0,1)^2(0,9)^{12} + 364.(0,1)^3(0,9)^{11} + 1001.(0,1)^4(0,9)^{10} + 2002.(0,1)^5.(0,9)^9 + 3003.(0,1)^6.(0,9)^8 + 3432.(0,1)^7.(0,9)^7 = 99,9..........$$₪

Questões problematizadoras:

a) Que conclusões Joana pode inferir sobre esse resultado?

b) Com base na pesquisa, Joana poderá prever seu estoque de produtos para fabricação dos sanduíches?

c) A resposta mudaria se ao invés de um sanduíche o cliente escolhesse dois?

4.9 O PROBLEMA DA VIAGEM NO TEMPO – DE VOLTA AO PASSADO

Observe as Figuras 57, 58 e 59:

Figura 57: Keanu Reeves.
Fonte: THE MATRIX WIKI (2019).

Figura 58: Obra de Parmigianino.
Fonte: NEC SPE (2019).

Figura 59: Paul Mounet.
Fonte: EXTRA (2019).

Na Figura 57 observamos o ator Keanu Reeves (02/09/1964), mundialmente conhecido pela sua atuação no Filme Matrix. Na Figura 58 temos a obra do Pintor Girolamo Francesco Maria Mazzola (Parmigianino), datada de 1530. Já na Figura 59, a pintura de 1875, atribuída a Louis-Maurice Boutet de Monvel retrata o ator Francês Paul Mounet (05/10/1847), aos 28 anos de idade. Você deve ter notado semelhanças entre os rostos das pinturas e o ator Keanu Reeves!! Seria Keanu Reeves no retrato de Parmigianino? Seria ele imortal? Estaria ele assumindo diferentes identidades ao passar dos anos? Como a Matemática pode explicar as semelhanças entre esses homens?

CLASSIFICAÇÃO: PROBLEMA QUEBRA-CABEÇA

CONTEÚDOS RELACIONADOS A OUTRAS ÁREAS DO CONHECIMENTO
Biologia – Genética e Evolução.

RESOLUÇÃO

Pensando nos nossos genes, que são formados por uma sequência de nucleotídeos. Cada nucleotídeo é composto por três partes (pentose, uma base nitrogenada e um ou mais grupos de fosfato). A repetição de 4 bases nitrogenadas, (Adenina (A), Guanina (G), Citosina (C), Timina (T)), compõe o nosso DNA. Essa sequência é finita, e num contexto finito as combinações das bases nitrogenadas se repetem (pois, só há 4 elementos para combinar).

Imagine uma pequena porção da sequência de nucleotídeos e suponhamos que essa porção seja formada por apenas duas bases nitrogenada. Observamos que uma determinada base pode estar presente ou não nessa sequência, e os termos do Binômio de Newton irão indicar a probabilidade de ocorrência disso.

Exemplificando: Numa sequência com 3 bases em que ocorre só dois tipos de base (tomemos adenina (A) ou guanina (G)). Determine a probabilidade de serem duas adeninas e uma guanina.

Observe as sequências possíveis: AAA, AAG, AGA, GAA, GGG, AGG, GAG, GGA, logo, a probabilidade de ocorrer duas adeninas e uma guanina é 3/8 = 37,5%.

Usando Binômio de Newton:

Sendo p = 0,5 a probabilidade de ser uma adenina e q = 0,5 a probabilidade de ser uma guanina. No desenvolvimento de $(p + q)^3 = \binom{3}{0}p^0q^3 + \binom{3}{1}p^1q^2 + \binom{3}{2}p^2q^1 + \binom{3}{3}p^3q^0$, a probabilidade de ocorrer duas adeninas e uma guanina é dada por:

$\binom{3}{2}p^2q^1 = 3.(0,5)^2.0,5 = 3.\ (0,125) = 0,375 = 37,5\%$.

Imagina agora o DNA completo, formado por aproximadamente 3.10^{10} bases. Em algum momento ocorre uma determinada sequência (ACTCACTGCTAGCTGC...) e essa, por sua vez, irá se repetir novamente em algum momento da eternidade!

Por isso, Keanu Reeves não está assumindo outras identidades ou tem vida eterna. Ele possui a sequência de nucleotídeos muito similar a Paul Mounet e a do homem do retrato de Parmigianino, o que lhe confere as semelhanças fenotípicas. ....₪

Questão problematizadora:

Se a sequência de nucleotídeos se repete no decorrer dos anos, como explicamos a evolução das espécies?

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho nos propusemos a responder a seguinte problemática: *apoiando-se nas atividades apresentadas nos livros didáticos do segundo ano do Ensino Médio, quando da apresentação do Binômio de Newton, podemos encontrar as prescrições das diretrizes educacionais a nível federal e estadual?*

Para responder essa indagação, o objetivo deste trabalho foi classificar e analisar, com base na categorização de problemas elaborada por Dante (2000), as atividades trazidas pelos livros didáticos de Matemática do segundo ano do Ensino Médio aprovados nas edições do PNLD de 2015 e 2018, de modo a verificar o potencial para a formação do educando almejado nas diretrizes oficiais de ensino, quando da abordagem do conteúdo matemático Binômio de Newton.

Por meio de uma pesquisa exploratória, tendo os livros didáticos de Matemática como fonte de dados, tecemos reflexões, muitas delas inacabadas e passíveis de questionamentos, mas ancoradas na problemática de pesquisa e neste momento cabe apresentá-las.

Inicialmente, atentemo-nos aos livros didáticos. Vimos que ao longo da história educacional brasileira, esses materiais são objetos de suma importância no processo ensino aprendizagem, especialmente a partir da década de 1990, quando houve avanços na política de execução do PNLD, no que tange a avaliação e elaboração dos guias dos livros didáticos e a crescente universalização para atendimento de todas as disciplinas da Educação Básica da Rede Pública.

Os guias dos livros didáticos apresentam livros que devem atender a critérios gerais de avaliação e critérios específicos de cada componente curricular, descritos em edital específico produzido pelo MEC para abertura de processo de avaliação e seleção das obras.

Entretanto, averiguamos que alguns critérios avaliativos relacionados à Matemática não são cumpridos quando da apresentação do conteúdo e atividades relacionadas ao Binômio de Newton, nos segundos volumes das coleções aprovadas no PNLD 2015 e 2018. Estes critérios são:

> 1. incluir todos os campos da Matemática escolar, a saber, números, álgebra, geometria e estatística e probabilidade; 2. privilegiar a exploração

> dos conceitos matemáticos e sua utilidade para resolver problemas; [...] 4. propiciar o desenvolvimento, pelo estudante, de competências cognitivas básicas, como: observação, compreensão, argumentação, organização, análise, síntese, comunicação de ideias matemáticas, memorização, entre outras (BRASIL, 2017, p. 14-15).

As diretrizes educacionais orientam que o Ensino Médio tem como uma das premissas a expansão de abordagens de conteúdos apresentados aos alunos no Ensino Fundamental. Desta forma, a exclusão da temática Binômio de Newton das coleções, ou seja, o não atendimento ao primeiro critério de avaliação, precisa ser revista, uma vez que esse conteúdo amplia o repertório acadêmico do aluno, possibilitando que este desenvolva competências essenciais para a sua formação, como o desenvolvimento de conjecturas entre áreas do saber, defendida quando da exposição do conteúdo Binômio de Newton nas DCE (PARANÁ, 2008).

Nas obras em que a temática esteve presente, constatamos equívocos relacionados ao tratamento histórico do tema, que se perpetuaram de uma edição para outra do PNLD, apesar das obras terem sido reeditadas.

Em nossa fundamentação teórica, observamos que a Resolução de Problemas possibilita gerir condições para que o aluno consolide competências que levam a reflexões, deduções, generalizações e aplicações do conhecimento para além dos muros escolares.

Entretanto, ao analisar as atividades das obras relacionadas ao Binômio de Newton constatamos que se tratam, em sua maioria, de atividades cuja finalidade é fixar algoritmos e processos resolutivos, não cumprindo o segundo e quarto critérios avaliativos, contrariando as prescrições propostas nas diretrizes educacionais a respeito do que se anseia para a formação do aluno ao término do Ensino Médio.

Nas diretrizes educacionais do Ensino Médio, a Matemática é tida como uma ciência fundamental para a formação do educando, pois de acordo com BRASIL (2002, p. 111) “contribui para a construção de uma visão de mundo, para ler e interpretar a realidade e para desenvolver capacidades que deles serão exigidas ao longo da vida social e profissional”.

As competências elencadas na BNCC (BRASIL, 2018), a serem atendidas no Ensino Médio, estão relacionadas basicamente a capacitar os alunos a apropriar-se de conhecimentos matemáticos para tornar-se críticos, reflexivos, capazes de atuar em suas realidades, resolvendo problemáticas. Para a organização do currículo do Ensino Médio, a BNCC orienta que se preze pelas relações entre áreas do saber, primando por práticas interdisciplinares e contextualizadas. Desta forma, evidenciamos que o processo de ensino aprendizagem da Matemática precisa ser revisto.

Na Seção 1.3 destinada a Resolução de Problemas, vimos que dentro da Educação Matemática, a maioria dos trabalhos se reportam a três perspectivas da Resolução de Problemas: ensinar sobre a Resolução de Problemas, ensinar para resolver problemas e através da Resolução de Problemas. Ao analisarmos essas perspectivas, constatamos que para atender estas proposições descritas nos parágrafos anteriores poderíamos nos apoiar no ensino da Matemática através da Resolução de Problemas.

Nessa perspectiva, o problema é ponto de partida para construção do conhecimento, e dependendo da sua tipologia, pode subsidiar práticas interdisciplinares e contextualizadas. Por isso, defendemos que para o ensino de Matemática através da Resolução de Problemas, é necessário que o professor reconheça cada tipo de problema e os objetivos dos mesmos.

Retomamos a classificação dos problemas propostas por Dante (2000): exercícios de reconhecimento, exercícios algoritmos, problemas-padrão, problemas processo, problemas de aplicação e problemas quebra-cabeça. Observamos que os três primeiros são atividades de repetição de técnicas e algoritmos, e pouco contribuem para o desenvolvimento de estratégias. Já os três últimos tipos de problemas desafiam os alunos para levantar questionamentos, analisar, traçar estratégias resolutivas, estabelecer relações entre diferentes áreas do saber e apreciar resultados.

Como já citamos no início das considerações sobre esse trabalho, vimos que os livros didáticos apresentam, em sua maioria, problemas do tipo exercícios de algoritmos. Estes, por sua vez, exigem do aluno a reprodução mecânica de técnicas operatórias e são pouco significativos para a promoção do ensino da Matemática almejado pelas diretrizes educacionais de ensino a nível federal e estadual.

Sendo assim, para que consigamos vislumbrar mudanças no cenário educacional no que concerne ao processo de ensino aprendizagem da Matemática e consequentemente a melhoria nos indicadores de qualidade da educação, é possível inferir a necessidade de que as produções dos livros didáticos incorporem as indicações constantes nos documentos oficiais e nos guias de livros didáticos, para que sejam materiais que proporcionem maior eficácia ao processo ensino aprendizagem, juntamente com outras práticas e políticas educacionais.

Com a produção dos problemas apresentados no Capítulo 4, lançamos possibilidades para que o conteúdo Binômio de Newton seja abordado por meio de problemáticas que conduzam a aprendizagem dos mais variados temas através da Resolução de Problemas. Acreditamos que esta perspectiva de ensino pode promover uma aprendizagem mais significativa para os educandos, mostrando-lhes aplicações e relacionando a outras áreas do saber, atendendo ao exposto nas diretrizes educacionais.

Ressaltamos também que o livro didático não pode ser o único elemento de apoio do professor no processo de ensino devido às suas limitações, algumas delas constatadas na pesquisa.

Além das melhorias nos materiais didáticos disponibilizados aos alunos e professores, já que este material é muitas vezes o único material de pesquisa para o aluno e subsidia o trabalho do professor, cabe salientar também que são necessárias políticas de valorização dos profissionais de educação, programas de formação continuada e espaços escolares com infraestrutura adequadas, para que produções como as que sugerimos no Capítulo 4 possam ser aplicadas.

É importante frisar que esta pesquisa possibilitou à autora o avanço nos conhecimentos a respeito do ensino da temática Binômio de Newton, lançando um novo olhar nos materiais didáticos e no processo de ensino aprendizagem, contribuindo para qualificar as práticas de ensino da Matemática no Ensino Médio, especialmente a partir da Resolução de Problemas.

Em função da delimitação da temática, relacionada aos objetivos propostos, sugerimos, para trabalhos futuros que seja feita análise da aplicação dos problemas produzidos nesta pesquisa, além da abordagem do Binômio de Newton a partir de outras tendências metodológicas de ensino aprendizagem da Educação Matemática, visando contribuir para a melhoria dos processos de elaboração de materiais didáticos e de formação inicial e continuada dos professores da disciplina de Matemática.

REFERÊNCIAS

AFFONSO, A. O **Triângulo de Pascal e o Binômio de Newton.** Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – UFF. 49 p. Niterói, 2014. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=56>. Acesso em: 08 jan. 2019.

ALLEVATO, N. S. G. **Associando o computador à resolução de problemas fechados:** análise de uma experiência. 2005. 370 f. Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2005. Disponível em: <http://hdl.handle.net/11449/102164>. Acesso em: 05 mai. 2019.

APPOLINÁRIO, F. **Dicionário de Metodologia Científica**. 2. ed. São Paulo: Atlas, 2011.

BALESTRI, R. **Matemática:** interação e tecnologia. 2. ed. São Paulo: Lea, 2016, 2 v.

BATISTA, A. A. G. **Recomendações para uma política pública de livros didático**. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Fundamental, 2001. Disponível em:<http://www.dominiopublico.gov.br/download/texto/me002406.pdf>. Acesso em: 03 nov. 2018.

BELINI, M. M. **A razão áurea e a sequência de Fibonacci**. 2015. Dissertação (Mestrado em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2015. Disponível em: <http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/55/55136/tde-06012016-161056/pt-br.php>. Acesso em: 19 jun. 2019.

BONILHA, M. A. de C.; VIDIGAL, S. M. P. O recurso problemateca. In: SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. (Org.). **Resolução de Problemas nas aulas de matemática**: O Recurso Problemateca. Porto Alegre: Penso, 2016.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. 2. ed. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1996.

BRANCA, N. A. A resolução de problemas como meta, processo e habilidade básica. In: KRULIK, R.; REYS, R. E. **A resolução de problemas na matemática escolar.** São Paulo: Atual, 1997.

BRASIL. Decreto-Lei nº 1.006 de 30 de Dezembro de 1938. **Coleção de Leis do Brasil**. Rio de Janeiro, v. 4, p. 350. 1938. Disponível em: <https://www2.camara.leg.br/legin/fed/declei/1930-1939/decreto-lei-1006-30-dezembro-1938-350741-publicacaooriginal-1-pe.html>. Acesso em: 17 jun. 2019.

______ Decreto-Lei nº. 8.460 de 26 de Dezembro de 1945. **Coleção de Leis do Brasil**. Rio de Janeiro, v. 7, p. 299. 1945. Disponível em: < http://legis.senado.leg.br/norma/533500/publicacao/15710885>. Acesso em: 17 jun. 2019.

______. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental. MEC, 1998.

______. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **PCN+ Ensino Médio:** orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, SEMTEC, 2002. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em: 03 nov. 2018.

______ Ministério da Educação e do Desporto. **Definição de critérios para avaliação dos livros didáticos:** 1ª a 4ª séries. Brasília: FAE, 1994. Disponível em: <http://www.dominiopublico.gov.br/download/texto/me002396.pdf>. Acesso em: 03 nov. 2018.

______ Ministério da Educação. Lei nº. 9.394 de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. **Diário Oficial da União**. Brasília, DF, 23 dezembro 1996. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9394.htm>. Acesso em: 17 de jun. 2019.

______ FNDE. **Resolução FNDE nº 038** de 15 de outubro de 2003**.** Brasília: Ministério da Educação, 2003. Disponível em: <https://www.fnde.gov.br/index.php/acesso-a-informacao/institucional/legislacao/item/4256-resolu%C3%A7%C3%A3o-cd-fnde-n%C2%BA-38,-de-15-de-outubro-de-2003>. Acesso em: 17 jun. 2019.

______ Lei nº 11.274 de 06 de fevereiro de 2006. Altera a redação dos arts. 29, 30, 32 e 87 da Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996, que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional, dispondo sobre a duração de 9 (nove) anos para o ensino fundamental, com matrícula obrigatória a partir dos 6 (seis) anos de idade. **Diário Oficial da União**, Brasília, DF, 07. Fev. 2006. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2004-2006/2006/lei/l11274.htm>. Acesso em: 17 de jun. 2019.

______ Ministério da Educação. **PNLD 2015:** matemática – guia de livros didáticos- Ensino Médio/ Ministério da Educação – Secretária de Educação Básica – SEB, DF, 2014.

______ Ministério da Educação. **PNLD 2018:** matemática – guia de livros didáticos – Ensino Médio/ Ministério da Educação – Secretária de Educação Básica – SEB –

Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação. Brasília, DF, 2017.

______ Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular:** Educação é a Base – Ensino Médio. Brasília: 2018.

BUTTS, T. Formulando problemas adequadamente. In: KRULIK, R.; REYS, R. E. **A resolução de problemas na matemática escolar.** São Paulo: Atual, p. 32-48, 1997.

CHARNAY, R. Aprendendo (com) a Resolução de Problemas. In: SAIZ, C.P. **Didática** da Matemática: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

CHAVANTE, E.; PRESTES, D. **Quadrante matemática, 2º ano**: ensino médio. 1. ed. São Paulo: Edições SM, 2016, 2.v. (Quadrante Matemática).

CIÊNCIA DE GARAGEM. **O Triângulo de Pascal e divisões de polinômios.** Disponível em: <https://cienciadegaragem.blogspot.com/2018/11/o-triangulo-de-pascal-e-divisoes-com.html>. Acesso em: 02 jan. 2018

CORÁ, J. R. **Análise da inserção da Resolução de Problemas identificada em Livros Didáticos de Matemática do Ensino Fundamental.** 2019. 144 f. Dissertação de Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Pato Branco, PR, 2019. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org. br/sca_v2/get_tcc3.php?id=160650334>. Acesso em: 18 jun. 2019.

CPDOC/ FGV. **A Era Vargas:** dos anos 20 a 1945. Disponível em: <https://cpdoc.fgv.br/producao/dossies/AEraVargas1/apresentacao>. Acesso em 17 de jun. 2019a.

______ **A Era Vargas:** dos anos 20 a 1945. Disponível em: <https://cpdoc.fgv.br/producao/dossies/AEraVargas1/biografias/gustavo_capanema>. Acesso em 17 de jun. 2019b.

CUNHA, L. S. C da. **Uma conexão entre Binômio de Newton e Probabilidade.** 2017. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)-UFBA. 51 f. Salvador. Disponível em: <https://repositorio.ufba.br/ri/bitstream /ri/23416/1/DissertacaoLeandro.pdf>. Acesso em: 08 jan. 2019.

D'AMBRÓSIO, U**. Da realidade à ação:** reflexões sobre a educação matemática. São Paulo: Summus, 1986.

DANTE, L. R. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática.** 12. ed. São Paulo: Ática, 2000.

______ **Matemática:** contexto & aplicações. 2. ed. Ática, 2013, 2 v.

______ **Matemática:** contexto & aplicações. 3. ed. Ática, 2016, 2 v.

DEMO, P. **Metodologia do conhecimento científico**. São Paulo: Atlas, 2000.

E-CÁLCULO- USP. **Euclides de Alexandria.** Disponível em: <http://ecalculo.if.usp.br/historia/euclides.htm>. Acesso em: 18 jun. 2019.

ECHEVERRÍA, M. P. P; POZO, J. I. Aprender a resolver problemas e resolver problemas para aprender. In: POZO, J. I. (Org.). **A solução de problemas.** Porto Alegre: Artes Médicas,1998.

EXTRA. **Paul Mounet.** Disponível em: <https://ketonetworth.com/blog/paul-mounet/>. Acesso em: 20 de jun. 2019.

FACTS FOR LIFE. **Genética e o Câncer de Mama**. Disponível em: <https://ww5.komen.org/uploadedFiles/Content_Binaries/translate/Genetics%20and %20Breast%20Cancer_Portuguese.pdf>. Acesso em: 20 de jun. 2019.

FIORENTINI, D.; OLIVEIRA, A. T. de C. C. de. O papel e o lugar da didática específica na formação inicial do professor de matemática. Trabalho apresentado no GT19-4183 **In: Anais da 37a Reunião Científica da ANPEd**. Florianópolis, Outubro de 2015. Disponível em <http://37reuniao.anped.org.br/wp-content/uploads/2015/02/Trabalho-GT19-4183.pdf>. Acesso em: 22 jun. 2019.

FLEMMING, D. M.; LUZ, E. L.; MELLO, A. C. C. **Tendências em educação matemática.** 2. ed. Palhoça: Unisul Virtual, 2005.

FORATO, T. C. M. Isaac Newton. **Grupo de História, Teoria e Ensino de Ciências.** Universidade de São Paulo – USP. São Paulo. Disponível em: <http://www.ghtc.usp.br/Biografias/Newton/Newton3.htm>. Acesso em: 18 jun. 2019.

FORTUNATO, R.; *et al.* **Interdisciplinaridade nas escolas de educação básica:** da retórica à efetiva ação pedagógica. Vol. 8 – Nº 17 - Janeiro - Junho 2013 Semestral ISSN: 1809-6220. Disponível em: <https://www.ideau.com.br/getulio/restrito/upload/revistasartigos/28_1.pdf>. Acesso em: 17 de mar. 2018.

FRISON, M. D. *et al.*. Livro didático como instrumento de apoio para construção de propostas de ensino de ciências naturais. In: **VII- ENPEC: Encontro Nacional de pesquisa em Educação em Ciências**. Atas do VII-ENPEC. ISSN: 21766940, Florianópolis, 2009. Disponível em: <http://posgrad.fae.ufmg.br/posgrad/viienpec/

pdfs/425.pdf>. Acesso em: 28 out. 2018

FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO. **Programas do livro.** Disponível em:<https://www.fnde.gov.br/programas/programas-do-livro>. Acesso em: 12 out. 2018.

GÉRARD, F. M.; ROEGIERS, X. **Conceber e Avaliar manuais Escolares**. Porto: Porto Editora, 1998. (Ciências da Educação).

GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social.** 6. ed. São Paulo: Atlas, 2008.

GONÇALVES, A. O.; TEIXEIRA CORREA, R. L.. O livro didático de matemática e cultura escolar em pesquisas: primeiras aproximações. **Revista Diálogo Educacional**, vol. 16, núm. 49, julho-setembro, 2016, pp. 553-566. Pontifícia Universidade Católica do Paraná. Disponível em: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=189147556003>. Acesso em: 31 jan. 2019.

GUÉRIOS, E., JUNIOR, R. J. M. Resolução de problema e matemática no Ensino Fundamental: uma perspectiva didática. In: BRANDT, C., MORETTI, M. **Ensinar e aprender matemática:** possibilidades para a prática educativa (orgs). Ponta Grossa: Editora UEPG, 2016.

HUETE, J. C.; BRAVO, J. A. F. **O ensino da matemática:** fundamentos teóricos e bases psicopedagógicas. Porto Alegre: Artmed, 2006.

IEZZI, G. *et al.* **Matemática -** ciência e aplicações. 7. ed. São Paulo: Saraiva, 2013, v. 2.

______.**Matemática -** ciência e aplicações. 9. ed. São Paulo: Saraiva, 2016, v. 2.

KATO, D. S. **O significado pedagógico da contextualização para o ensino de ciências:** análise dos documentos curriculares oficiais e de professores. 2007. 109f. Dissertação (mestrado) Programa Investigações em Ensino de Ciências –área de concentração: Ensino de Ciências e Matemática) – Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo. Disponível em: <http://dedalus.usp.br/F/JH2HSREK66QUERUX6B7MI3CP 1H1TNJPK4685QSLT3X5Q7DF58S-12672?func=item-global&doc_library=USP01 &doc_number=002262329&year=&volume=&sub_library=>. Acesso em: 21 jun. 2019.

LEACHENSKI, A. A. **Binômio de Newton com expoente negativo e fracionário**. 2017, 55f. Dissertação (Mestrado em Matemática), Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, 2017. Disponível em: <http://tede2.uepg.br/jspui/handle/prefix/2430>. Acesso em: 19 dez. 2018.

LEOPOLDINO, K. S. M. **Sequências de Fibonacci e a Razão Áurea**: aplicações no ensino básico. 2016. 117f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Centro de Ciências Exatas e da Terra, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2016. Disponível em: < https://repositorio.ufrn.br/jspui/handle/123456789/21244>. Acesso em: 19 jun. 2019.

LIMA, E. L. **Números e Funções Reais**. Rio de Janeiro: SBM, 2013 (Coleção PROFMAT)

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em educação:** abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1986.

MODERNA. **Conexões com a matemática.** Org. Editora moderna, obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna, editor responsável: Fabio Martins Leonardo. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013, 2 v.

______ **Conexões com a matemática.** Org. Editora moderna, obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna, editor responsável: Fabio Martins Leonardo. 3. ed. São Paulo: Moderna, 2016, 2 v.

MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. **Matemática Discreta**: Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2014

MUNDO DA EDUCAÇÃO. **Rejeição de transplantes**. [online]. Disponível em: <https://mundoeducacao.bol.uol.com.br/saude-bem-estar/rejeicao-orgaos.htm>. Acesso em: 20 jun. 2019.

NEC SPE, NEC METU. **Girolamo Francesco Maria Mazzola Parmigianino.** [online] Disponível em: <https://necspenecmetu.tumblr.com/post/11215843730/girolamo-francesco-maria-mazzola-parmigianino>. Acesso em: 20 de jun. 2019.

OLIVEIRA, E. M. Q de, **O uso do livro didático de matemática por professores do Ensino Fundamental**. 152 páginas, 2007. Dissertação (Mestrado). Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2007. Disponível em: <https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/4542>. Acesso em: 13 out. 2018.

ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). **Pesquisa em Educação Matemática.** São Paulo: Editora UNESP, 1999. p.199-220.

ONUCHIC, L. R; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 25, n. 41, p. 73-98, dez. 2011.

PAIVA, M. **Matemática:** Paiva. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013, 2 v.

______. **Matemática:** Paiva. 3. ed. São Paulo: Moderna, 2015, 2 v.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Paraná**: Matemática. Curitiba: Seed/DEB-PR, 2008.

PETERS, J. R. **A História da Matemática no Ensino Fundamental:** uma analise de livros didáticos e artigos sobre história. 144 páginas. Dissertação (mestrado) Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2005. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/102559/221350.pdf?sequence=1>. Acesso em: 20 nov. 2018.

PHILLIPIS, B. S. **Pesquisa social:** estratégias e táticas. Rio de Janeiro, Livraria Agir Editora, 1974.

POLYA, G. **A Arte de Resolver Problemas.** Rio de Janeiro: Editora Interciência, 1978.

______. Sobre a resolução de problemas de matemática na high school. In: KRULIK, R.; REYS, R. E. **A resolução de problemas na matemática escolar.** São Paulo: Atual, 1997.

PULSKAMP, R. **The Arithmetic Triangle: Blaise Pascal.** Disponível em: <https://www.cs.xu.edu/math/Sources/Pascal/Sources/arith_triangle.pdf>. Acesso em: 18 dez. 2018.

RABELO, E. H. **Textos matemáticos:** produção, interpretação e resolução de problemas. 3. ed. Petropólis. Rio de Janeiro: Vozes, 2002.

REDLING, J. P. **A metodologia de resolução de problemas:** concepções e práticas pedagógicas de professores de matemática do ensino fundamental. 2011. 166 f. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Ciências, 2011. Disponível em: <http://hdl.handle.net/11449/90928>. Acesso em: 09 mai. 2019.

ROMANATTO, M. C. Resolução de problemas nas aulas de Matemática. **Revista Eletrônica de Educação**. São Carlos: UFSCar, v.6, n.1, p. 299-311, mai., 2012. Disponível em: <http://www.reveduc.ufscar.br/index.php/reveduc/article/view/413/178>. Acesso em: 08 mai. 2019.

ROSADAS, V. D. S. **Triângulo de Pascal:** curiosidades e aplicações na escola básica. 2016. 70f. Dissertação (mestrado) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática. Rio de Janeiro. Disponível em: <https://www.maxwell.vrac.puc-rio.br/28192/28192.PDF>. Acesso em: 02 jan. 2019.

SACRISTÁN, J. G. O que significa o currículo? In: SACRISTÁN, J. G. (Org.). **Saberes e incertezas sobre o currículo**. Porto Alegre: Penso, 2013. p. 16-35.

SAVIANI, D. **Escola e democracia.** 24. ed. São Paulo: Cortez, 1991.

SEVERINO, A. J. **Metodologia do Trabalho Científico**. São Paulo: Cortez, 2007

SILVA, I. A. da. O Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio (Pnld/Em): Uma Política de Educação Implementada pelo Estado Brasileiro no início do Século XXI. In: **37ª Reunião Nacional da ANPEd**.- 04 a 08 de outubro, UFSC – Florianópolis, 2015. Disponível em: <http://37reuniao.anped.org.br/wp-content/uploads/2015/02/Trabalho-GT05-3544.pdf>. Acesso em: 03 nov. 2018.

SILVA, M. A., A Fetichização do Livro Didático no Brasil. In: **Educação &Realidade** [online]. 2012, vol. 37, n.3, pp.803-821. ISSN 2175-6236. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?pid=S2175-62362012000300006&script=sci_arttext&tlng=pt>. Acesso em: 13 out. 2018.

SILVEIRA, D. T.; CÓRDOVA, F. P. A pesquisa científica. In: GERHARDT, T. E.; SILVEIRA, D. T. **Métodos de pesquisa.** Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009. Disponível em: <http://www.ufrgs.br/cursopgdr/downloadsSerie/derad005.pdf>. Acesso em: 04 abr. 2018.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. **Matemática ensino médio 2**. 8. ed. São Paulo: Saraiva, 2013, 2 v.

______. **Matemática para compreender o mundo**. São Paulo: Saraiva, 2016, 2 v.

SMOLE, K. S; DINIZ, M. I. (Org.). **Ler, escrever e resolver problemas**: habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: Artmed, 2001.

SOBRAL, J. B. M. **Dos primórdios da Matemática aos Sistemas Formas da Computação** (recurso eletrônico). Florianópolis: Edição do Autor, 2015. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/157316/teste-livro-1vFINAL.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 19 jun. 2019.

SOUZA, J. R de. **Novo olhar matemática:** 2**.** 2.ed. São Paulo: FTD, 2013, 2 v.

SOUZA, J.; GARCIA, J. **#Contato matemática.** 1. ed. São Paulo: FTD, 2016, 2 v.

(#contato matemática)

STEFFENON, R. R.; GUARNIERI, F. M. **Belos Problemas de Matemática Indução e Contagem.** In: IV Colóquio de Matemática da Região Sul. UFRG. 2016. Disponível em: <https://www.sbm.org.br/coloquio-sul-4/wp-content/uploads/sites/4/2016/04/Minicurso_Belos_Problemas.pdf>. Acesso em: 07 jan. 2019.

THE MATRIX WIKI. **Keanu Reeves.** [online] Disponível em: <https://matrix.fandom.com/wiki/Keanu_Reeves>. Acesso em: 20 jun. 2019.

USP. Brasil realiza 380 transplantes de coração por ano e rejeição cai. [on line]. In: **Jornal da USP.** São Paulo, 07 jun. 2018. Atualidades, p. s/n. Disponível em: <https://jornal.usp.br/atualidades/brasil-realiza-380-transplantes-de-coracao-por-ano-e-rejeicao-cai/>. Acesso em: 21 jun. 2019.

VENTURIERI, G. A.; ROSA, V. L. da. **Genética Clássica.** Florianópolis: BIOLOGIA/EAD/UFSC, 2010.

VILA, A.; CALLEJO, M. L. **Matemática para aprender a pensar**: o papel das crianças na resolução de problemas. Porto Alegre: Artmed, 2006.

APÊNDICE

Quadros com visão geral de cada obra.

<table>
<tr><th colspan="3">LD15-1</th></tr>
<tr><th colspan="3">ASPECTOS GERAIS</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Apresenta o Tema Binômio de Newton</td><td>SIM</td><td>NÃO</td></tr>
<tr><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>Forma de apresentação do Binômio de Newton</td><td colspan="2">Generalização de $(x + y)^n$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Termo Geral</td><td>SIM</td><td>NÃO</td></tr>
<tr><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>Histórico sobre Binômio de Newton</td><td colspan="2">Não</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Apresenta Triângulo de Pascal</td><td>SIM</td><td>NÃO</td></tr>
<tr><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Histórico sobre Triângulo de Pascal</td><td>SIM</td><td>NÃO</td></tr>
<tr><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>Apresenta e demonstra Propriedades do Triângulo de Pascal</td><td colspan="2">Não</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Distribuição Binomial das Probabilidades</td><td>SIM</td><td>NÃO</td></tr>
<tr><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>Atividades de Distribuição Binomial das Probabilidades remetem a</td><td colspan="2">Genética, jogos de azar, peso produto abaixo do limite</td></tr>
<tr><th colspan="3">Atividades resolvidas presentes na abordagem da temática Binômio de Newton</th></tr>
<tr><td rowspan="8">Atividades dadas como exemplos (não quantificadas na análise geral das obras)</td><td>Classificação</td><td>Quantidade</td></tr>
<tr><td>Exercícios de Reconhecimento</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Exercícios de Algoritmos</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Problemas Padrão</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Problemas Processo</td><td>---</td></tr>
<tr><td>Problemas de Aplicação</td><td>---</td></tr>
<tr><td>Problemas Quebra-cabeça</td><td>---</td></tr>
<tr><td>Total</td><td>3</td></tr>
<tr><th colspan="3">Atividades propostas para a temática Binômio de Newton</th></tr>
<tr><td rowspan="8">Classificação das atividades propostas</td><td>Classificação</td><td>Quantidade</td></tr>
<tr><td>Exercícios de Reconhecimento</td><td>2</td></tr>
<tr><td>Exercícios de Algoritmos</td><td>8</td></tr>
<tr><td>Problemas Padrão</td><td>4</td></tr>
<tr><td>Problemas Processo</td><td>---</td></tr>
<tr><td>Problemas de Aplicação</td><td>---</td></tr>
<tr><td>Problemas Quebra-cabeça</td><td>---</td></tr>
<tr><td>Total</td><td>14</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="3">LD15-2</th></tr>
<tr><th colspan="3">ASPECTOS GERAIS</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Apresenta o Tema Binômio de Newton</td><td>SIM</td><td>NÃO</td></tr>
<tr><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>Forma de apresentação do Binômio de Newton</td><td colspan="2">Generalização de $(x + y)^n$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Termo Geral</td><td>SIM</td><td>NÃO</td></tr>
<tr><td></td><td>X</td></tr>
<tr><td>Histórico sobre Binômio de Newton</td><td colspan="2">Sim, mas como equívocos</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Apresenta Triângulo de Pascal</td><td>SIM</td><td>NÃO</td></tr>
<tr><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Histórico sobre Triângulo de Pascal</td><td>SIM</td><td>NÃO</td></tr>
<tr><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>Apresenta e demonstra Propriedades do Triângulo de Pascal</td><td colspan="2">Sim, mas sem demonstrá-las</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Distribuição Binomial das Probabilidades</td><td>SIM</td><td>NÃO</td></tr>
<tr><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>Atividades de Distribuição Binomial das Probabilidades remetem a</td><td colspan="2">Genética, jogos de azar, saltador alcançar meta</td></tr>
<tr><th colspan="3">Atividades resolvidas presentes na abordagem da temática Binômio de Newton</th></tr>
<tr><td rowspan="8">Atividades dadas como exemplos (não quantificadas na análise geral das obras)</td><td>Classificação</td><td>Quantidade</td></tr>
<tr><td>Exercícios de Reconhecimento</td><td>---</td></tr>
<tr><td>Exercícios de Algoritmos</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Problemas Padrão</td><td>---</td></tr>
<tr><td>Problemas Processo</td><td>---</td></tr>
<tr><td>Problemas de Aplicação</td><td>---</td></tr>
<tr><td>Problemas Quebra-cabeça</td><td>---</td></tr>
<tr><td>Total</td><td>1</td></tr>
<tr><th colspan="3">Atividades propostas para a temática Binômio de Newton</th></tr>
<tr><td rowspan="8">Classificação das atividades propostas</td><td>Classificação</td><td>Quantidade</td></tr>
<tr><td>Exercícios de Reconhecimento</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Exercícios de Algoritmos</td><td>4</td></tr>
<tr><td>Problemas Padrão</td><td>---</td></tr>
<tr><td>Problemas Processo</td><td>---</td></tr>
<tr><td>Problemas de Aplicação</td><td>---</td></tr>
<tr><td>Problemas Quebra-cabeça</td><td>---</td></tr>
<tr><td>Total</td><td>5</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="3">LD15-3</th></tr>
<tr><th colspan="3">ASPECTOS GERAIS</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Apresenta o Tema Binômio de Newton</td><td>SIM</td><td>NÃO</td></tr>
<tr><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>Forma de apresentação do Binômio de Newton</td><td colspan="2">Aplicação da propriedade distributiva em relação à adição e generalização de $(x + y)^n$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Termo Geral</td><td>SIM</td><td>NÃO</td></tr>
<tr><td></td><td>X</td></tr>
<tr><td>Histórico sobre Binômio de Newton</td><td colspan="2">Sim, mas como equívocos</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Apresenta Triângulo de Pascal</td><td>SIM</td><td>NÃO</td></tr>
<tr><td></td><td>X</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Histórico sobre Triângulo de Pascal</td><td>SIM</td><td>NÃO</td></tr>
<tr><td></td><td>X</td></tr>
<tr><td>Apresenta e demonstra Propriedades do Triângulo de Pascal</td><td colspan="2">Não</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Distribuição Binomial das Probabilidades</td><td>SIM</td><td>NÃO</td></tr>
<tr><td></td><td>X</td></tr>
<tr><td>Atividades de Distribuição Binomial das Probabilidades remetem a</td><td colspan="2">-----</td></tr>
<tr><th colspan="3">Atividades resolvidas presentes na abordagem da temática Binômio de Newton</th></tr>
<tr><td rowspan="8">Atividades dadas como exemplos (não quantificadas na análise geral das obras)</td><td>Classificação</td><td>Quantidade</td></tr>
<tr><td>Exercícios de Reconhecimento</td><td>---</td></tr>
<tr><td>Exercícios de Algoritmos</td><td>2</td></tr>
<tr><td>Problemas Padrão</td><td>---</td></tr>
<tr><td>Problemas Processo</td><td>---</td></tr>
<tr><td>Problemas de Aplicação</td><td>---</td></tr>
<tr><td>Problemas Quebra-cabeça</td><td>---</td></tr>
<tr><td>Total</td><td>2</td></tr>
<tr><th colspan="3">Atividades propostas para a temática Binômio de Newton</th></tr>
<tr><td rowspan="8">Classificação das atividades propostas</td><td>Classificação</td><td>Quantidade</td></tr>
<tr><td>Exercícios de Reconhecimento</td><td>---</td></tr>
<tr><td>Exercícios de Algoritmos</td><td>4</td></tr>
<tr><td>Problemas Padrão</td><td>---</td></tr>
<tr><td>Problemas Processo</td><td>---</td></tr>
<tr><td>Problemas de Aplicação</td><td>---</td></tr>
<tr><td>Problemas Quebra-cabeça</td><td>---</td></tr>
<tr><td>Total</td><td>4</td></tr>
</table>

LD15-4		
ASPECTOS GERAIS		
Apresenta o Tema Binômio de Newton	**SIM**	**NÃO**
	X	
Forma de apresentação do Binômio de Newton	Princípio Fundamental da contagem com generalização de $(a + b)^n$	
Termo Geral	**SIM**	**NÃO**
	X	
Histórico sobre Binômio de Newton	Não	
Apresenta Triângulo de Pascal	**SIM**	**NÃO**
		X
Histórico sobre Triângulo de Pascal	**SIM**	**NÃO**
		X
Apresenta e demonstra Propriedades do Triângulo de Pascal	Não	
Distribuição Binomial das Probabilidades	**SIM**	**NÃO**
	X	
Atividades de Distribuição Binomial das Probabilidades remetem a	Jogos de azar, defeito em componente eletrônico, genética, acerto de questões	
Atividades resolvidas presentes na abordagem da temática Binômio de Newton		
Atividades dadas como exemplos (não quantificadas na análise geral das obras)	**Classificação**	**Quantidade**
	Exercícios de Reconhecimento	1
	Exercícios de Algoritmos	4
	Problemas Padrão	---
	Problemas Processo	---
	Problemas de Aplicação	---
	Problemas Quebra-cabeça	---
	Total	5
Atividades propostas para a temática Binômio de Newton		
Classificação das atividades propostas	**Classificação**	**Quantidade**
	Exercícios de Reconhecimento	9
	Exercícios de Algoritmos	13
	Problemas Padrão	5
	Problemas Processo	---
	Problemas de Aplicação	---
	Problemas Quebra-cabeça	---
	Total	27

<table>
<tr><th colspan="3">LD15-5</th></tr>
<tr><th colspan="3">ASPECTOS GERAIS</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Apresenta o Tema Binômio de Newton</td><th>SIM</th><th>NÃO</th></tr>
<tr><td></td><td>X</td></tr>
<tr><td>Forma de apresentação do Binômio de Newton</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Termo Geral</td><th>SIM</th><th>NÃO</th></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Histórico sobre Binômio de Newton</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Apresenta Triângulo de Pascal</td><th>SIM</th><th>NÃO</th></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Histórico sobre Triângulo de Pascal</td><th>SIM</th><th>NÃO</th></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Apresenta e demonstra Propriedades do Triângulo de Pascal</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Distribuição Binomial das Probabilidades</td><th>SIM</th><th>NÃO</th></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Atividades de Distribuição Binomial das Probabilidades remetem a</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><th colspan="3">Atividades resolvidas presentes na abordagem da temática Binômio de Newton</th></tr>
<tr><td rowspan="8">Atividades dadas como exemplos (não quantificadas na análise geral das obras)</td><th>Classificação</th><th>Quantidade</th></tr>
<tr><td>Exercícios de Reconhecimento</td><td>---</td></tr>
<tr><td>Exercícios de Algoritmos</td><td>---</td></tr>
<tr><td>Problemas Padrão</td><td>---</td></tr>
<tr><td>Problemas Processo</td><td>---</td></tr>
<tr><td>Problemas de Aplicação</td><td>---</td></tr>
<tr><td>Problemas Quebra-cabeça</td><td>---</td></tr>
<tr><td>Total</td><td>---</td></tr>
<tr><th colspan="3">Atividades propostas para a temática Binômio de Newton</th></tr>
<tr><td rowspan="8">Classificação das atividades propostas</td><th>Classificação</th><th>Quantidade</th></tr>
<tr><td>Exercícios de Reconhecimento</td><td>---</td></tr>
<tr><td>Exercícios de Algoritmos</td><td>---</td></tr>
<tr><td>Problemas Padrão</td><td>---</td></tr>
<tr><td>Problemas Processo</td><td>---</td></tr>
<tr><td>Problemas de Aplicação</td><td>---</td></tr>
<tr><td>Problemas Quebra-cabeça</td><td>---</td></tr>
<tr><td>Total</td><td>---</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="3">LD15-6</th></tr>
<tr><th colspan="3">ASPECTOS GERAIS</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Apresenta o Tema Binômio de Newton</td><td>SIM</td><td>NÃO</td></tr>
<tr><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>Forma de apresentação do Binômio de Newton</td><td colspan="2">Generalização de $(x + y)^n$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Termo Geral</td><td>SIM</td><td>NÃO</td></tr>
<tr><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>Histórico sobre Binômio de Newton</td><td colspan="2">Sim, com equívocos</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Apresenta Triângulo de Pascal</td><td>SIM</td><td>NÃO</td></tr>
<tr><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Histórico sobre Triângulo de Pascal</td><td>SIM</td><td>NÃO</td></tr>
<tr><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>Apresenta e demonstra Propriedades do Triângulo de Pascal</td><td colspan="2">Sim, números complementares, teorema das linhas e relação de Stifel, mas não demonstra</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Distribuição Binomial das Probabilidades</td><td>SIM</td><td>NÃO</td></tr>
<tr><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>Atividades de Distribuição Binomial das Probabilidades remetem a</td><td colspan="2">Jogos de azar, compra de calçados, atividades esportivas, Síndrome de Down, aprovação em concurso</td></tr>
<tr><th colspan="3">Atividades resolvidas presentes na abordagem da temática Binômio de Newton</th></tr>
<tr><td rowspan="8">Atividades dadas como exemplos (não quantificadas na análise geral das obras)</td><td>Classificação</td><td>Quantidade</td></tr>
<tr><td>Exercícios de Reconhecimento</td><td>2</td></tr>
<tr><td>Exercícios de Algoritmos</td><td>5</td></tr>
<tr><td>Problemas Padrão</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Problemas Processo</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Problemas de Aplicação</td><td>---</td></tr>
<tr><td>Problemas Quebra-cabeça</td><td>---</td></tr>
<tr><td>Total</td><td>9</td></tr>
<tr><th colspan="3">Atividades propostas para a temática Binômio de Newton</th></tr>
<tr><td rowspan="8">Classificação das atividades propostas</td><td>Classificação</td><td>Quantidade</td></tr>
<tr><td>Exercícios de Reconhecimento</td><td>8</td></tr>
<tr><td>Exercícios de Algoritmos</td><td>18</td></tr>
<tr><td>Problemas Padrão</td><td>7</td></tr>
<tr><td>Problemas Processo</td><td>---</td></tr>
<tr><td>Problemas de Aplicação</td><td>---</td></tr>
<tr><td>Problemas Quebra-cabeça</td><td>---</td></tr>
<tr><td>Total</td><td>33</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="3">LD18-1</th></tr>
<tr><th colspan="3">ASPECTOS GERAIS</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Apresenta o Tema Binômio de Newton</td><td>SIM</td><td>NÃO</td></tr>
<tr><td></td><td>X</td></tr>
<tr><td>Forma de apresentação do Binômio de Newton</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Termo Geral</td><td>SIM</td><td>NÃO</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Histórico sobre Binômio de Newton</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Apresenta Triângulo de Pascal</td><td>SIM</td><td>NÃO</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Histórico sobre Triângulo de Pascal</td><td>SIM</td><td>NÃO</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Apresenta e demonstra Propriedades do Triângulo de Pascal</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Distribuição Binomial das Probabilidades</td><td>SIM</td><td>NÃO</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Atividades de Distribuição Binomial das Probabilidades remetem a</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><th colspan="3">Atividades resolvidas presentes na abordagem da temática Binômio de Newton</th></tr>
<tr><td rowspan="8">Atividades dadas como exemplos (não quantificadas na análise geral das obras)</td><td>Classificação</td><td>Quantidade</td></tr>
<tr><td>Exercícios de Reconhecimento</td><td>---</td></tr>
<tr><td>Exercícios de Algoritmos</td><td>---</td></tr>
<tr><td>Problemas Padrão</td><td>---</td></tr>
<tr><td>Problemas Processo</td><td>---</td></tr>
<tr><td>Problemas de Aplicação</td><td>---</td></tr>
<tr><td>Problemas Quebra-cabeça</td><td>---</td></tr>
<tr><td>Total</td><td>---</td></tr>
<tr><th colspan="3">Atividades propostas para a temática Binômio de Newton</th></tr>
<tr><td rowspan="8">Classificação das atividades propostas</td><td>Classificação</td><td>Quantidade</td></tr>
<tr><td>Exercícios de Reconhecimento</td><td>---</td></tr>
<tr><td>Exercícios de Algoritmos</td><td>---</td></tr>
<tr><td>Problemas Padrão</td><td>---</td></tr>
<tr><td>Problemas Processo</td><td>---</td></tr>
<tr><td>Problemas de Aplicação</td><td>---</td></tr>
<tr><td>Problemas Quebra-cabeça</td><td>---</td></tr>
<tr><td>Total</td><td>---</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="3">LD18-2</th></tr>
<tr><th colspan="3">ASPECTOS GERAIS</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Apresenta o Tema Binômio de Newton</td><td>SIM</td><td>NÃO</td></tr>
<tr><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>Forma de apresentação do Binômio de Newton</td><td colspan="2">Generalização de $(x + y)^n$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Termo Geral</td><td>SIM</td><td>NÃO</td></tr>
<tr><td></td><td>X</td></tr>
<tr><td>Histórico sobre Binômio de Newton</td><td colspan="2">Sim</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Apresenta Triângulo de Pascal</td><td>SIM</td><td>NÃO</td></tr>
<tr><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Histórico sobre Triângulo de Pascal</td><td>SIM</td><td>NÃO</td></tr>
<tr><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>Apresenta e demonstra Propriedades do Triângulo de Pascal</td><td colspan="2">Sim, mas sem demonstrá-las</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Distribuição Binomial das Probabilidades</td><td>SIM</td><td>NÃO</td></tr>
<tr><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>Atividades de Distribuição Binomial das Probabilidades remetem a</td><td colspan="2">Genética, jogos de azar, saltador alcançar meta</td></tr>
<tr><th colspan="3">Atividades resolvidas presentes na abordagem da temática Binômio de Newton</th></tr>
<tr><td rowspan="8">Atividades dadas como exemplos (não quantificadas na análise geral das obras)</td><td>Classificação</td><td>Quantidade</td></tr>
<tr><td>Exercícios de Reconhecimento</td><td>---</td></tr>
<tr><td>Exercícios de Algoritmos</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Problemas Padrão</td><td>---</td></tr>
<tr><td>Problemas Processo</td><td>---</td></tr>
<tr><td>Problemas de Aplicação</td><td>---</td></tr>
<tr><td>Problemas Quebra-cabeça</td><td>---</td></tr>
<tr><td>Total</td><td>1</td></tr>
<tr><th colspan="3">Atividades propostas para a temática Binômio de Newton</th></tr>
<tr><td rowspan="8">Classificação das atividades propostas</td><td>Classificação</td><td>Quantidade</td></tr>
<tr><td>Exercícios de Reconhecimento</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Exercícios de Algoritmos</td><td>4</td></tr>
<tr><td>Problemas Padrão</td><td>---</td></tr>
<tr><td>Problemas Processo</td><td>---</td></tr>
<tr><td>Problemas de Aplicação</td><td>---</td></tr>
<tr><td>Problemas Quebra-cabeça</td><td>---</td></tr>
<tr><td>Total</td><td>5</td></tr>
</table>

LD18-3			
ASPECTOS GERAIS			
Apresenta o Tema Binômio de Newton	**SIM**	**NÃO**	
		X	
Forma de apresentação do Binômio de Newton			
Termo Geral	**SIM**	**NÃO**	
Histórico sobre Binômio de Newton			
Apresenta Triângulo de Pascal	**SIM**	**NÃO**	
Histórico sobre Triângulo de Pascal	**SIM**	**NÃO**	
Apresenta e demonstra Propriedades do Triângulo de Pascal			
Distribuição Binomial das Probabilidades	**SIM**	**NÃO**	
Atividades de Distribuição Binomial das Probabilidades remetem a			
Atividades resolvidas presentes na abordagem da temática Binômio de Newton			
Atividades dadas como exemplos (não quantificadas na análise geral das obras)	**Classificação**	**Quantidade**	
	Exercícios de Reconhecimento	---	
	Exercícios de Algoritmos	---	
	Problemas Padrão	---	
	Problemas Processo	---	
	Problemas de Aplicação	---	
	Problemas Quebra-cabeça	---	
	Total	---	
Atividades propostas para a temática Binômio de Newton			
Classificação das atividades propostas	**Classificação**	**Quantidade**	
	Exercícios de Reconhecimento	---	
	Exercícios de Algoritmos	---	
	Problemas Padrão	---	
	Problemas Processo	---	
	Problemas de Aplicação	---	
	Problemas Quebra-cabeça	---	
	Total	---	

LD18-4		
ASPECTOS GERAIS		
Apresenta o Tema Binômio de Newton	**SIM**	**NÃO**
		X
Forma de apresentação do Binômio de Newton		
Termo Geral	**SIM**	**NÃO**
Histórico sobre Binômio de Newton		
Apresenta Triângulo de Pascal	**SIM**	**NÃO**
Histórico sobre Triângulo de Pascal	**SIM**	**NÃO**
Apresenta e demonstra Propriedades do Triângulo de Pascal		
Distribuição Binomial das Probabilidades	**SIM**	**NÃO**
Atividades de Distribuição Binomial das Probabilidades remetem a		
Atividades resolvidas presentes na abordagem da temática Binômio de Newton		
Atividades dadas como exemplos (não quantificadas na análise geral das obras)	**Classificação**	**Quantidade**
	Exercícios de Reconhecimento	---
	Exercícios de Algoritmos	---
	Problemas Padrão	---
	Problemas Processo	---
	Problemas de Aplicação	---
	Problemas Quebra-cabeça	---
	Total	---
Atividades propostas para a temática Binômio de Newton		
Classificação das atividades propostas	**Classificação**	**Quantidade**
	Exercícios de Reconhecimento	---
	Exercícios de Algoritmos	---
	Problemas Padrão	---
	Problemas Processo	---
	Problemas de Aplicação	---
	Problemas Quebra-cabeça	---
	Total	---

<table>
<tr><th colspan="3">LD18-5</th></tr>
<tr><th colspan="3">ASPECTOS GERAIS</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Apresenta o Tema Binômio de Newton</td><td>SIM</td><td>NÃO</td></tr>
<tr><td></td><td>X</td></tr>
<tr><td>Forma de apresentação do Binômio de Newton</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Termo Geral</td><td>SIM</td><td>NÃO</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Histórico sobre Binômio de Newton</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Apresenta Triângulo de Pascal</td><td>SIM</td><td>NÃO</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Histórico sobre Triângulo de Pascal</td><td>SIM</td><td>NÃO</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Apresenta e demonstra Propriedades do Triângulo de Pascal</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Distribuição Binomial das Probabilidades</td><td>SIM</td><td>NÃO</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Atividades de Distribuição Binomial das Probabilidades remetem a</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><th colspan="3">Atividades resolvidas presentes na abordagem da temática Binômio de Newton</th></tr>
<tr><td rowspan="8">Atividades dadas como exemplos (não quantificadas na análise geral das obras)</td><td>Classificação</td><td>Quantidade</td></tr>
<tr><td>Exercícios de Reconhecimento</td><td>---</td></tr>
<tr><td>Exercícios de Algoritmos</td><td>---</td></tr>
<tr><td>Problemas Padrão</td><td>---</td></tr>
<tr><td>Problemas Processo</td><td>---</td></tr>
<tr><td>Problemas de Aplicação</td><td>---</td></tr>
<tr><td>Problemas Quebra-cabeça</td><td>---</td></tr>
<tr><td>Total</td><td>---</td></tr>
<tr><th colspan="3">Atividades propostas para a temática Binômio de Newton</th></tr>
<tr><td rowspan="8">Classificação das atividades propostas</td><td>Classificação</td><td>Quantidade</td></tr>
<tr><td>Exercícios de Reconhecimento</td><td>---</td></tr>
<tr><td>Exercícios de Algoritmos</td><td>---</td></tr>
<tr><td>Problemas Padrão</td><td>---</td></tr>
<tr><td>Problemas Processo</td><td>---</td></tr>
<tr><td>Problemas de Aplicação</td><td>---</td></tr>
<tr><td>Problemas Quebra-cabeça</td><td>---</td></tr>
<tr><td>Total</td><td>---</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="3">LD18-6</th></tr>
<tr><th colspan="3">ASPECTOS GERAIS</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Apresenta o Tema Binômio de Newton</td><td>SIM</td><td>NÃO</td></tr>
<tr><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>Forma de apresentação do Binômio de Newton</td><td colspan="2">Generalização de $(x + y)^n$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Termo Geral</td><td>SIM</td><td>NÃO</td></tr>
<tr><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>Histórico sobre Binômio de Newton</td><td colspan="2">Sim, com equívocos</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Apresenta Triângulo de Pascal</td><td>SIM</td><td>NÃO</td></tr>
<tr><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Histórico sobre Triângulo de Pascal</td><td>SIM</td><td>NÃO</td></tr>
<tr><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>Apresenta e demonstra Propriedades do Triângulo de Pascal</td><td colspan="2">Sim, números complementares, teorema das linhas e relação de Stifel, mas não demonstra</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Distribuição Binomial das Probabilidades</td><td>SIM</td><td>NÃO</td></tr>
<tr><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>Atividades de Distribuição Binomial das Probabilidades remetem a</td><td colspan="2">Jogos de azar, compra de calçados, atividades esportivas, Síndrome de Down, aprovação em concurso</td></tr>
<tr><th colspan="3">Atividades resolvidas presentes na abordagem da temática Binômio de Newton</th></tr>
<tr><td rowspan="8">Atividades dadas como exemplos (não quantificadas na análise geral das obras)</td><td>Classificação</td><td>Quantidade</td></tr>
<tr><td>Exercícios de Reconhecimento</td><td>2</td></tr>
<tr><td>Exercícios de Algoritmos</td><td>5</td></tr>
<tr><td>Problemas Padrão</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Problemas Processo</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Problemas de Aplicação</td><td>---</td></tr>
<tr><td>Problemas Quebra-cabeça</td><td>---</td></tr>
<tr><td>Total</td><td>9</td></tr>
<tr><th colspan="3">Atividades propostas para a temática Binômio de Newton</th></tr>
<tr><td rowspan="8">Classificação das atividades propostas</td><td>Classificação</td><td>Quantidade</td></tr>
<tr><td>Exercícios de Reconhecimento</td><td>8</td></tr>
<tr><td>Exercícios de Algoritmos</td><td>18</td></tr>
<tr><td>Problemas Padrão</td><td>6</td></tr>
<tr><td>Problemas Processo</td><td>---</td></tr>
<tr><td>Problemas de Aplicação</td><td>---</td></tr>
<tr><td>Problemas Quebra-cabeça</td><td>---</td></tr>
<tr><td>Total</td><td>32</td></tr>
</table>

LD18-7		
ASPECTOS GERAIS		
Apresenta o Tema Binômio de Newton	**SIM**	**NÃO**
	X	
Forma de apresentação do Binômio de Newton	Aplicação da propriedade distributiva em relação à adição, associando coeficiente de termos a combinação e generalização de $(x + a)^n$	
Termo Geral	**SIM**	**NÃO**
	X	
Histórico sobre Binômio de Newton	Não	
Apresenta Triângulo de Pascal	**SIM**	**NÃO**
	X	
Histórico sobre Triângulo de Pascal	**SIM**	**NÃO**
		X
Apresenta e demonstra Propriedades do Triângulo de Pascal	Não	
Distribuição Binomial das Probabilidades	**SIM**	**NÃO**
	X	
Atividades de Distribuição Binomial das Probabilidades remetem a	Genética, jogos de azar, tiro ao alvo, acertos numa questão de múltipla escolha, cobrança de pênaltis.	
Atividades resolvidas presentes na abordagem da temática Binômio de Newton		
Atividades dadas como exemplos (não quantificadas na análise geral das obras)	**Classificação**	**Quantidade**
	Exercícios de Reconhecimento	3
	Exercícios de Algoritmos	4
	Problemas Padrão	2
	Problemas Processo	1
	Problemas de Aplicação	---
	Problemas Quebra-cabeça	---
	Total	10
Atividades propostas para a temática Binômio de Newton		
Classificação das atividades propostas	**Classificação**	**Quantidade**
	Exercícios de Reconhecimento	7
	Exercícios de Algoritmos	14
	Problemas Padrão	7
	Problemas Processo	---
	Problemas de Aplicação	---
	Problemas Quebra-cabeça	---
	Total	28

<table>
<tr><th colspan="3">LD18-8</th></tr>
<tr><th colspan="3">ASPECTOS GERAIS</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Apresenta o Tema Binômio de Newton</td><td>SIM</td><td>NÃO</td></tr>
<tr><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>Forma de apresentação do Binômio de Newton</td><td colspan="2">Aplicação da propriedade distributiva em relação à adição, princípio fundamental da contagem culminando com e generalização de $(x + y)^n$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Termo Geral</td><td>SIM</td><td>NÃO</td></tr>
<tr><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>Histórico sobre Binômio de Newton</td><td colspan="2">Não</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Apresenta Triângulo de Pascal</td><td>SIM</td><td>NÃO</td></tr>
<tr><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Histórico sobre Triângulo de Pascal</td><td>SIM</td><td>NÃO</td></tr>
<tr><td></td><td>X</td></tr>
<tr><td>Apresenta e demonstra Propriedades do Triângulo de Pascal</td><td colspan="2">Não</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Distribuição Binomial das Probabilidades</td><td>SIM</td><td>NÃO</td></tr>
<tr><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>Atividades de Distribuição Binomial das Probabilidades remetem a</td><td colspan="2">Genética, jogos de azar, tiro ao alvo, acertos numa questão de múltipla escolha, cobrança de pênaltis.</td></tr>
<tr><th colspan="3">Atividades resolvidas presentes na abordagem da temática Binômio de Newton</th></tr>
<tr><td rowspan="8">Atividades dadas como exemplos (não quantificadas na análise geral das obras)</td><td>Classificação</td><td>Quantidade</td></tr>
<tr><td>Exercícios de Reconhecimento</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Exercícios de Algoritmos</td><td>3</td></tr>
<tr><td>Problemas Padrão</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Problemas Processo</td><td>---</td></tr>
<tr><td>Problemas de Aplicação</td><td>---</td></tr>
<tr><td>Problemas Quebra-cabeça</td><td>---</td></tr>
<tr><td>Total</td><td>5</td></tr>
<tr><th colspan="3">Atividades propostas para a temática Binômio de Newton</th></tr>
<tr><td rowspan="8">Classificação das atividades propostas</td><td>Classificação</td><td>Quantidade</td></tr>
<tr><td>Exercícios de Reconhecimento</td><td>5</td></tr>
<tr><td>Exercícios de Algoritmos</td><td>4</td></tr>
<tr><td>Problemas Padrão</td><td>9</td></tr>
<tr><td>Problemas Processo</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Problemas de Aplicação</td><td>---</td></tr>
<tr><td>Problemas Quebra-cabeça</td><td>---</td></tr>
<tr><td>Total</td><td>19</td></tr>
</table>