# ÁLGEBRA BOOLEANA E LÓGICA DIGITAL UMA APLICAÇÃO DA LÓGICA MATEMÁTICA

CARLOS MAGNO CORRÊA DIAS *

Advogando a evolução contínua e permanente aplicação da Matemática (tendo em conta as decisões e condicionamentos estruturais diversos que se traduzem na escolha da forma pela qual se analisa o conteúdo de um determinado problema) tem-se, inegável e inequivocamente, a necessidade notória de se referir à linha de pensamento, suficientemente fecunda, promulgada pelo *The Mathematical Analysis of Logic*, o qual, fundando a Álgebra da Lógica, dá proveniência à Lógica Matemática (ou por outras asserções contestes, vem opugnar as questões acerca da matematicidade da Lógica e do logicismo da Matemática).

Dissociando rasgos de parcialidade, o trabalho referenciado constitui um marco na história da Matemática e corresponde ao conjunto fundamental de "idéias" que possibilita identificar, mais adequadamente, os ideais centrais em Lógica Matemática (concebida em moldes atuais) e vem nortear, de forma sistematizada, o estudo especializado tanto ao nível das Lógicas Não-Clássicas, quanto às infinitas extensões da Lógica Clássica.

Tomando-se por base o pressuposto estrutural de que as discussões acerca da Matemática não podem mais limitar-se aos elementos que a constituem, pois que sua característica relevante, hodiernamente, é não tanto seu conteúdo quanto sua forma; no presente compêndio, assentam-se considerações sobre o sistema, originalmente proposto por George Boole, a respeito da qualificação da Álgebra da Lógica a qual permeia a Lógica de Classes (batizada de Álgebra Booleana) e a Lógica Sentencial (difundida como a Álgebra das Relações Binárias); para, ulteriormente, apresentar uma aplicação específica de uma tal sistematização à Lógica Digital.

Antes, porém, de progredir no estudo do pensamento booleano, se faz necessário introduzir a concepção de classe que adiante será tomada para a sistematização do assunto aqui tratado. Inicialmente, há de se dizer que uma classe encerra uma multiplicidade de entes de qualquer ordem (quer seja lógica, matemática, humana, física, ou outras) e uma função entre estes mesmos entes. Uma classe, desta maneira, é constituída por todos os termos que verificam uma determinada função. Como uma função diz-se função proposicional quando os termos que lhe correspondem são indeterminados, estabelece-se que cada função proposicional determina uma classe, enquanto que duas funções formalmente equivalentes haverão de determinar a mesma classe. Reciprocamente, entretanto, duas funções que venham determinar a mesma classe são formalmente equivalentes.

Dando início à sistematização proclamada, sejam, preliminarmente, apresentados os elementos que estruturam a Álgebra da Lógica ou Álgebra Booleana; isto é, tomam-se as letras x, y, z, ... para a designação de classes (quer sejam números, pensamentos, ou quaisquer outras entidades, conforme já enfatizado). Dentre tais classes, saliente-se, é imprescindível, contudo, particularizar as chamadas classes universal (classe de que tudo é membro) e nula (classe de que nada é membro). Assim, desejando-se conservar, o máximo possível, o formalismo algébrico, atribua-se ao símbolo 1 a especificação da classe universal e utilize-se o símbolo 0 para a classe nula.

A seguir, sejam definidas as funções dos símbolos + e ·, utilizados para gerar novas classes a partir de classes precedentes. Em primeiro lugar, estabeleça-se que o

* Professor de Lógica Matemática, de Fundamentos de Matemática e de Cálculo Diferencial e Integral do Departamento de Matemática e Física da PUC PR.

símbolo + entre duas letras ou símbolos de classes (por exemplo, x + y) indica a união destas duas classes; quer seja, a classe x + y corresponde ao conjunto formado de todos os elementos x ou y, ou ambos (o que, sob o ponto de vista da Lógica Matemática, corresponderia a "pensar" na disjunção inclusiva de duas funções proposicionais); defindo-se o que se arbitra chamar de adição lógica. Já o símbolo ·, entre duas classes (x · y, por exemplo), vem indicar a interseção de tais classes, afirmando que x · y indica a classe dos elementos que pertencem à classe x e à classe y simultaneamente (o que, correlativamente, em Lógica Matemática, qualifica a conjunção entre funções proposicionais).

No novo cálculo se faz necessário instituir a relação de identidade; sem a qual não se poderia comparar as classes originárias com outras delas derivadas pelas operações basilares de · e + . Portanto, tome-se o símbolo = para identificá-la. Ou seja, considerando-se o símbolo = entre os símbolos que designam duas classes quaisquer (x e y, por exemplo) está a indicar-se que as classes têm os mesmos membros e denota-se: x = y.

Definidos os elementos, os operadores binários e a relação de identidade da Álgebra da Lógica, apresente-se a definição de sistema algébrico ou de álgebra abstrata; isto é, denomina-se Álgebra Abstrata ou Sistema Algébrico a um conjunto não vazio munido de um ou mais operadores binários sobre ele definidos. Logo, designando por A o conjunto em questão, tem-se que (A, *, #) indica uma Álgebra com dois operadores.

De forma sumária, portanto, registre-se que uma Álgebra Booleana (B, +, ·) é um conjunto B de elementos x, y, z, ... e de duas operações binárias, denominadas soma e produto, designadas, respectivamente, por + e ·, tais que as seguintes leis fundamentais da Álgebra Ordinária permaneçam válidas; quais sejam:

A1. LEIS DO FECHAMENTO:
$\forall x, y \in B,\ \exists!\,(x+y) \in B$; e
$\forall x, y \in B,\ \exists!\,(x \cdot y) \in B$.

A2. LEIS COMUTATIVAS:
$\forall x, y \in B,\ (x+y) = (y+x)$; e
$\forall x, y \in B,\ (x \cdot y) = (y \cdot x)$.

A3. LEIS ASSOCIATIVAS:
$\forall x, y, z \in B,\ ((x+y)+z) = (x+(y+z))$; e
$\forall x, y, z \in B,\ ((x \cdot y) \cdot z) = (x \cdot (y \cdot z))$.

A4. LEI DISTRIBUTIVA:
$\forall x, y, z \in B,\ (x \cdot (y+z)) = ((x \cdot y)+(x \cdot z))$.

Contudo, uma Álgebra de Boole difere da Álgebra Ordinária; senão considere. Se x denota uma classe, a interseção dessa classe com ela própria haverá, obviamente, de gerar a mesma classe x; ou seja: tem-se que x · x = x; o que pode ser generalizado para x · x · x · ... · x = $x^n$ = x , tornando a Álgebra da Lógica especial em relação à Álgebra Ordinária. E, partindo-se do mesmo universo conceitual, tem-se que x + x = x, como também, x + x + x + x + ... + x = x; uma vez que a soma lógica denota a união entre classes. Conseqüentemente, tem-se a propriedade:

A5. LEIS DA IDENTIDADE:
$\forall x \in B,\ x \cdot x = x$ e $\forall x \in B,\ x + x = x$.

A Álgebra Booleana difere, também, da Álgebra Ordinária tendo em vista que z · x = z · y, onde a classe z sendo distinta do conjunto vazio, não conduz à expressão x = y. Além do mais, se x · y = 0, tal fato não assegura que x ou y devem ser 0, como se pode claramente constatar tomando-se os princípios anteriores. Por conseqüência, postula-se, também, em complementação à lei distributiva, que:

A4'. LEI DISTRIBUTIVA COMPLEMENTAR:
$\forall x, y, z \in B,\ (x+(y \cdot z)) = (x+y) \cdot (x+z)$.

É oportuno salientar que a lei acima estabelecida (A4') não é válida na Álgebra convencional, na Álgebra Ordinária.

Convenciona-se, na Álgebra da Lógica (B, +, ·), chamar as classes 0 e 1, respectivamente, de Elemento Neutro da Soma Lógica e Elemento Neutro da Multiplicação Lógica; tendo em vista que:

A6. ELEMENTOS NEUTROS:
$\forall x \in B, \exists!\, 0 \in B / (x+0) = (0+x) = x$; e
$\forall x \in B, \exists!\, 1 \in B / (x \cdot 1) = (1 \cdot x) = x$.

Ressalte-se, entretanto, que neste compêndio tomam-se considerações acerca, apenas, das Álgebras de Boole ditas não-degeneradas; isto é, onde $0 \neq 1$ (a classe universal é distinta da classe nula); sendo decorrente das afirmações aqui prestadas denominar os elementos 0 e 1 de elementos absorventes da Multiplicação Lógica e da Soma Lógica, respectivamente; pois que:

A7. ELEMENTOS ABSORVENTES:
$\forall x \in B, \exists!\, 0 \in B / (x \cdot 0) = (0 \cdot x) = 0$; e
$\forall x \in B, \exists!\, 1 \in B / (x+1) = (1+x) = 1$.

Tomando-se o sistema algébrico aqui apresentado, pergunta-se: qual é a classe de todos os elementos que não pertencem à classe chamada x? Qual, portanto, é o complemento da classe chamada x? Ora, é a classe denotada por x' e denominada Complemento de x; de tal forma que:

A8. COMPLEMENTO DE X:
$\forall \in B,\ \exists!\, x'\ B / (x+x') = (x'+x) = 1, (x \cdot x') = (x' \cdot x) = 0$

Mas, observe-se que, por tais implicações, as denominadas Regras de De Morgan (para a Soma Lógica e para a Multiplicação Lógica), resultam, também, legítimas;

obtendo-se, portanto, a seguinte lei complementar, qual seja:

> A9. REGRAS DE DE MORGAN:
> $\forall x, y \in B, \exists! x', y' \in B \,/\, (x \cdot y)' = x' + y'$ e $(x + y)' = x' \cdot y'$.

Ao interpretar x + y como sendo a representação da união ou da Soma Lógica (em um sentido inclusivo), das classes x e y, de forma que a classe x + y contenha a classe $x \cdot y$; tal particularidade traz vantagens consideráveis do ponto de vista formal, pois que permite afirmar a legitimidade da equação x + x = x e estabelecer todo o cálculo de acordo com o princípio da dualidade para a união e para a interseção.

O Princípio da Dualidade, em essência, por sua vez, vem afirmar que todo resultado dedutível dos axiomas de uma Álgebra de Boole permanece válido se no mesmo é trocado + por · e 0 por 1, e vice-versa. Assim, o dual de qualquer teorema em uma Álgebra Booleana, é, também, um teorema (desta mesma Álgebra de Boole); isto é, "se determinada proposição é uma conseqüência dos axiomas de uma Álgebra Booleana, o dual é, também, uma conseqüência dos mesmos axiomas"; uma vez que a proposição dual permite ser provada tomando-se o dual de cada parte da demonstração da proposição original.

No presente estudo, ressalte-se, explicitamente, considerar-se-á o Sistema de Boole como sendo uma Álgebra a dois valores; ou seja, o Sistema Booleano será tomado como sendo correspondente a um cálculo de classes supondo que qualquer classe é coextensa ou com a classe universal (1) ou com a classe nula (0) e, por tal restrição, advém o princípio: "dada a Álgebra de Boole (B, +, ·), $\forall x \in B$, ou x = 1 ou x = 0; sendo tais valores mutuamente excludentes". Alerte-se, contudo, que as equações x = 1 e x = 0 passam a compor, em última análise, respectivamente, as assertivas "x é verdadeiro" e "x é falso" (conforme consagrado em Lógicas Bivalentes).

Do escorço teórico aqui apresentado, pode-se, sem prejuízo da forma, associar as entidades de uma Álgebra Booleana ao Cálculo Proposicional em Lógica Matemática; ou seja, pode-se aplicar, por analogia, as operações fundamentais do Cálculo dos Enunciados aos elementos de um tal sistema. Assim, a partir das proposições (ou enunciados) simples p e q, bivalentes (enunciados regidos pelos Princípios da Identidade, da Não-Contradição e do Terceiro Excluído), da Lógica Matemática, tem-se as operações de Negação ($\sim p$, $\sim q$), Conjunção ($p \wedge q$), Disjunção Inclusiva ($p \vee q$), Disjunção Exclusiva ($p \veebar q$), Condicional ($p \rightarrow q$) e Bicondicional ($p \leftrightarrow q$). Porém, do estudo das Formas Normais (fórmulas proposicionais constituídas, quando muito, das operações de Negação, Conjunção e Disjunção Inclusiva) e das relações de equivalência lógica (simbolizadas por $\Leftrightarrow$) em Álgebra Proposicional, resulta que:

$$p \veebar q \Leftrightarrow \sim(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$$

$$p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q$$

$$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)$$

Desta forma, por correlação analógica, tem-se estabelecido o seguinte quadro de correspondências entre os operadores fundamentais da Lógica Matemática e as operações de Adição Lógica e de Multiplicação Lógica da Álgebra de Boole; qual seja:

| Operações: | Em Lógica Matemática: | Em Álgebra Booleana: |
|---|---|---|
| Negação: | $\sim p$ | $x'$ |
| Conjunção: | $p \wedge q$ | $x \cdot y$ |
| Disjunção Inclusiva: | $p \vee q$ | $x + y$ |
| Disjunção Exclusiva: | $p \veebar q$ | $(x \cdot y') + (y \cdot x')$ |
| Condicional: | $p \rightarrow q$ | $x' + y$ |
| Bicondicional: | $p \leftrightarrow q$ | $(x' + y) \cdot (y' + x)$ |

Partindo-se, portanto, das operações lógicas definidas no Cálculo Proposicional (em Lógica Matemática), e tomando-se as correspondências acima consideradas, pode-se estruturar, em Álgebra Booleana, os seguintes quadros possíveis para as operações de Negação, Conjunção, Disjunção Inclusiva, Disjunção Exclusiva, Condicional e Bicondicional, onde tais operações lógicas são expressas em função das operações booleanas de Adição e Multiplicação Lógica; quais sejam:

C1. Negação:

| x | x' |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

C2. Conjunção:

| x | y | x · y |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

C3. Disjunção Inclusiva:

| x | y | x + y |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

C4. Disjunção Exclusiva:

| x | y | $(x \cdot y') + (y \cdot x')$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

C5. Condicional:

| x | y | $x' + y$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

C6. Bicondicional:

| x | y | $(x' + y) + (y' + x)$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

No sistema em estudo tem-se qualificado, como não poderia deixar de ser, a Subtração Lógica; isto é, a classe $x - y$ a qual é constituída dos elementos da classe x, retirados os elementos da classe y. Assim, por exemplo, se x é a classe dos estudantes e y é a classe dos estudantes brasileiros, $x - y$ é a classe dos estudantes não brasileiros. Logo, $1 - x$ corresponde à classe formada por todos os elementos do universo (1 é a classe universal) que não fazem parte da classe x. Porquanto, de $x \cdot x = x$, subtraindo cada membro de x, resulta que $x - (x \cdot x) = x - x$ e $x \cdot (1 - x) = 0$. Mas, $1 - x$ é a classe dos não x, isto é, é a classe (complementar) $x'$. Nestas condições, uma vez que nenhum objeto pode ter duas propriedades contraditórias, vem que $x \cdot (1 - x) = x \cdot x' = 0$; o que pode ser interpretado como uma formulação do Princípio da Não-Contradição em Lógica Matemática; ou seja: $\sim(\sim p \wedge p) \Leftrightarrow t$ (que se lê: não é fato que ocorre não p e p), onde t indica uma tautologia (enunciado logicamente "verdadeiro").

A Álgebra da Lógica aqui condensada, permite, via Método Dedutivo, portanto, a minimização de quaisquer estruturas através da aplicação das propriedades operatórias estabelecidas para as operações (Complementação), $\cdot$ (Multiplicação Lógica) e + (Adição Lógica).

Para ilustração da afirmação acima, tome-se, por exemplo, estrutura definida por:

$$\boxed{(((x' + y) \cdot (x \cdot y') + x)' + x') + (x' + (y' + x)')}$$

A expressão em análise contém, como parte integrante de sua estrutura, mais de uma vez as classes x e y. Logo, pelo Princípio da Unicidade, pode ser simplificada; levando a uma expressão contendo, tão-somente, uma vez cada elemento x e y. Desta forma, reduzindo-se os termos tem-se que:

$$(((x' + y) \cdot \underbrace{(x \cdot y')}_{= (x' + y)'} + x)' + x') + \underbrace{(x' + (y' + x)')}_{= x' + (y \cdot x') \text{ (por De Morgan)}} =$$

$$= (((\underbrace{x' + y) \cdot (x' + y)'}_{= z \cdot z' = 0 \text{ (pela definição de complementar)}} + x)' + x') + (x' + (y \cdot x')) =$$

$$= ((0 + x)' + x') + \underbrace{(x' + (y \cdot x'))}_{= x' \text{ (pela lei da absorção)}} =$$

$$= ((\underbrace{0 + x}_{= x \text{ (pelo elemento neutro da adição lógica)}})' + x') + x' =$$

$$= (x' + x') + x' = x' + x' = x' \text{ (pela idempotência)}$$

e, finalmente, escreve-se que:

$$\boxed{(((x' + y) \cdot (x \cdot y') + x)' + x') + (x' + (y' + x)') = x'}$$

O Sistema Algébrico acima qualificado dá origem (dentre outras aplicações), por suas particularidades próprias, ao que se convencionou denominar "Lógica Digital", a qual a seguir passa-se a estruturar.

A Álgebra da Lógica além de corresponder ao fundamento matemático da análise, dá origem, como salientado, à denominada "Lógica Digital", a qual constitui o projeto dos circuitos de interruptores ou circuitos de comutação que compõem os sistemas digitais; sendo, também, denominada, Álgebra dos Interruptores ou Álgebra de Comutação.

De forma geral, uma Lógica Digital toma por base o sistema conceitual da Álgebra Booleana; sendo que, por sua parte, a simbologia e as características (físicas) dos elementos com que opera modificam-se no sentido de operacionalizar máquinas elétricas; onde, os impulsos elétricos representam os "valores lógicos".

Em uma Lógica Digital, pode-se dizer, sem prejuízo da técnica, tem-se dois "estados lógicos" (de forma análoga à Álgebra da Lógica), quais sejam: o estado lógico 1 e o estado lógico 0. Fisicamente, entretanto, tais estados estão associados à posição de um interruptor ligado a um ponto de um dado circuito elétrico. Ou seja, o estado lógico 1 passa a indicar o correspondente ao interruptor fechado; isto é, quando o interruptor encontra-se fechado o mesmo permite que a corrente flua através do ponto onde este se encontra. Por outro lado, o estado lógico 0 relaciona-se ao interruptor aberto e, conseqüentemente, nenhuma corrente pode passar pelo ponto considerado. Assim, por esta analogia, relativamente, simples, atinge-se extraordinários recursos técnicos para a avaliação instrumental neste campo do saber (conforme a seguir uma introdução será apresentada).

Para efeito de ilustração, tome-se a seguir o mais simples dos circuitos elétricos, onde representado por A tem-se uma fonte de energia, por L uma lâmpada e suponha um interruptor (chave) entre A e L.

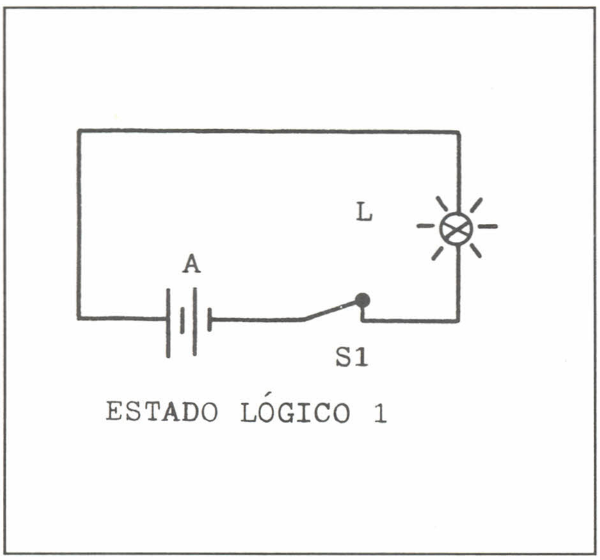


Figura 01

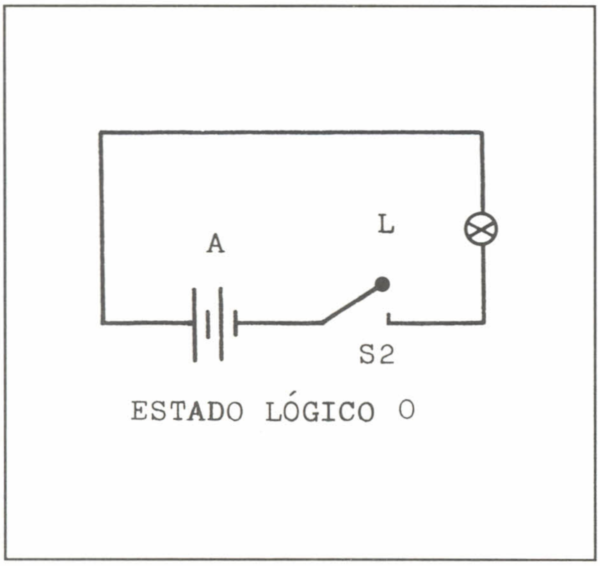


Figura 02

Obviamente, quando o interruptor está ligado - posição S1 - (figura 01), em condição de circulação de corrente elétrica, L se acende e, por outro lado, quando o interruptor está desligado - posição S2 - (figura 02), impedindo a circulação de corrente elétrica, L permanece apagada. Assim, pelas analogias estabelecidas, tem-se que o estado lógico 1 pode ser atribuído quando L está acesa e o estado lógico 0 quando L está apagada.

Estabelecida a relação em questão, é fácil de ser verificado que as funções booleanas descritas, inicialmente, sob a forma algébrica, podem ser associadas, fisicamente, aos diversos circuitos elétricos, com o objetivo de estudá-los sistematizadamente. Nesta introdução, porém, estabelecer-se-á, unicamente, a associação das funções booleanas aos circuitos básicos denominados AND, OR, NO, NAND e NOR.

Partindo-se, pois, da correlação inicial (condução de corrente associada aos estados lógicos), considere um circuito constituído de dois interruptores S1 e S2 ligados em série (figura 03); isto é, tal que exista um único caminho para a corrente percorrer entre S1 e S2.

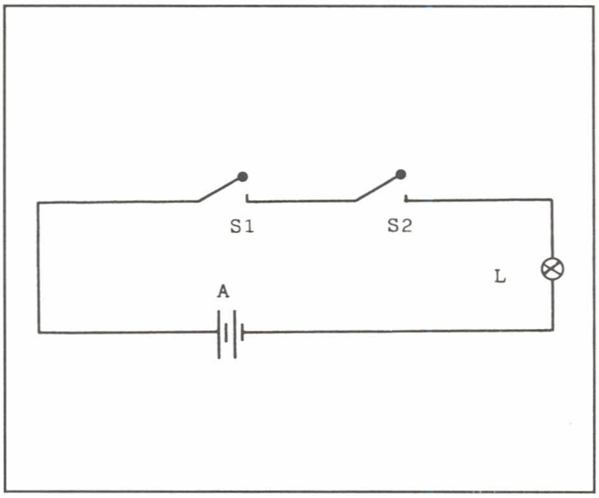


Figura 03

Das ponderações estabelecidas e partindo-se da Lógica Bivalente (a qual guarda, apenas, dois estados-de-verdade, mutuamente incompatíveis e que esgotam todas as situações possíveis), tem-se que L somente se acenderá quando os dois interruptores, S1 e S2, estiverem ligados. Mas, se L estiver acesa, haverá condução plena de corrente, gerando o estado lógico 1. Contudo, se ao menos um dos interruptores estiver desligado, L permanecerá apagada, o que conduz ao estado lógico 0.

Nestas condições, resulta, portanto, o seguinte quadro de valores possíveis, o qual vem definir o circuito AND; ou seja:

| S1 | S2 | L |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

Porém, tomando-se as proposições p e q, bivalentes, da Lógica Matemática (as quais assumem os valores lógicos Verdade V e Falsidade F, mutuamente excludentes), tem-se que a correspondente Tabela-Função-de-Verdade da Conjunção lógica, $p \wedge q$, é dada por:

| p | q | $p \wedge q$ |
|---|---|---|
| F | F | F |
| F | V | F |
| V | F | F |
| V | V | V |

O que permite dizer que o estado lógico 0, em Lógica Digital, é equivalente, funcionalmente falando, à Falsidade F em Lógica Matemática e o estado lógico 1, em conseqüência, é equivalente ao valor lógico Verdade V.

Mas, em Álgebra Booleana, a Conjunção lógica corresponde à multiplicação lógica e, portanto, o circuito AND está associado à função booleana:

$$\boxed{x = S1 \cdot S2}$$

Admita-se, por outro lado, que os interruptores S1 e S2 estejam ligados em paralelo; isto é, que a corrente tenha duas opções de caminho a seguir (conforme é ilustrado na figura 04).

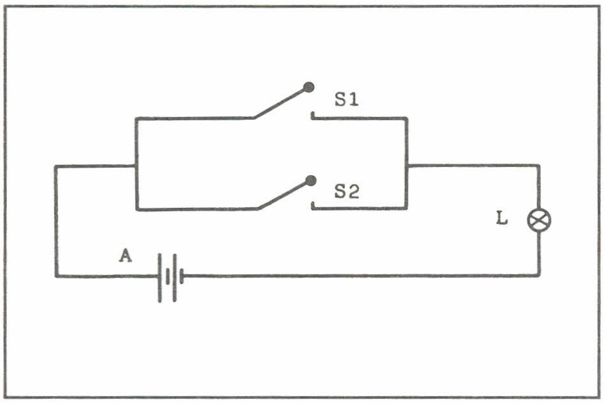


Figura 04

É fácil perceber que se ao menos um dos interruptores estiver ligado (possuir valor lógico 1), L se acenderá. Ao passo que se ambos os interruptores estiverem desligados (possuírem valor lógico 0), L permanecerá apagada; o que pode ser sistematizado segundo o quadro de valores a seguir apresentado:

| S1 | S2 | L |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

Correlativamente, no entanto, saliente-se que em Lógica Matemática ter-se-ia a seguinte Tabela-Função-de-Verdade:

| p | q | $p \vee q$ |
|---|---|---|
| F | F | F |
| F | V | V |
| V | F | V |
| V | V | V |

Assim, conclui-se que o circuito OR pode ser determinado pela função booleana definida por:

$$\boxed{x = S1 + S2}$$

Das considerações acima, resulta dizer que a Disjunção Inclusiva da Álgebra Proposicional (em Lógica Matemática) corresponde (funcionalmente), em Álgebra Booleana, à Adição Lógica já evidenciada.

Outro dentre os circuitos fundamentais diz respeito ao circuito NO ou circuito inversor, o qual permite a inversão de estados lógicos. Para a qualificação do mesmo considere o circuito estruturado conforme mostra a figura 05.

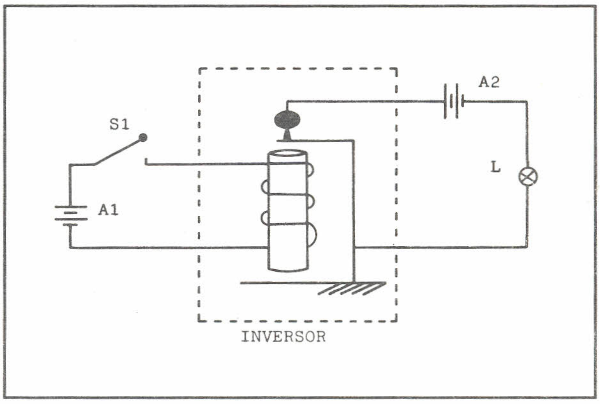


Figura 05

Todavia, para efeito de simplificação, neste texto, o circuito da figura 05 será a seguir tomado conforme seu correspondente representado na figura 06; ou seja:

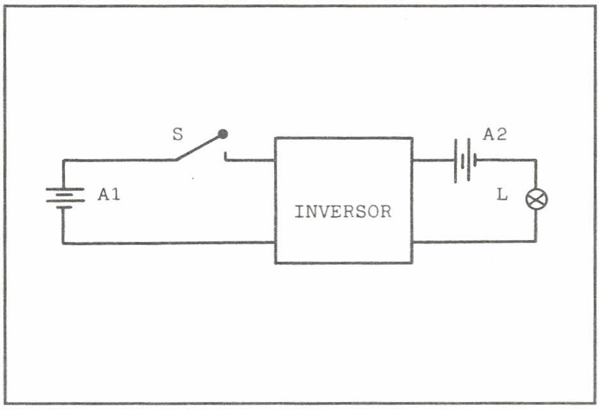


Figura 06

Deste modo, quando S está ligado (estado lógico 1), tem-se que L encontra-se apagada (estado lógico 0), uma vez que cria-se um campo magnético que atrai a lâmina do circuito da lâmpada L. Já, quando S está desligado (estado lógico 0), L permanece acesa (estado lógico 1), tendo em vista estar o circuito fechado. Opera-se, desta forma, a inversão do estado lógico entre S e L; o que dá origem ao seguinte quadro de valores:

| S | L |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

Mas em Lógica Matemática a Contradição (ou Negação) lógica de uma proposição (ou enunciado) simples p, a proposição p, define-se segundo a Tabela-Função-de-Verdade representada por:

| p | ~p |
|---|---|
| F | V |
| V | F |

Nestes termos, tem-se estabelecido que o circuito NO, em Álgebra Booleana, é caracterizado pela função definida por:

$$x = S'$$

De acordo com o inicialmente proposto, quanto à Lógica Digital, resta, ainda, qualificar os circuitos NAND e NOR; os quais, simplesmente, correspondem aos inversores lógicos dos circuitos AND e OR, respectivamente.

O circuito NAND, a seu tempo, pode ser estruturado conforme o esquema gráfico dado pela figura 07, a saber:

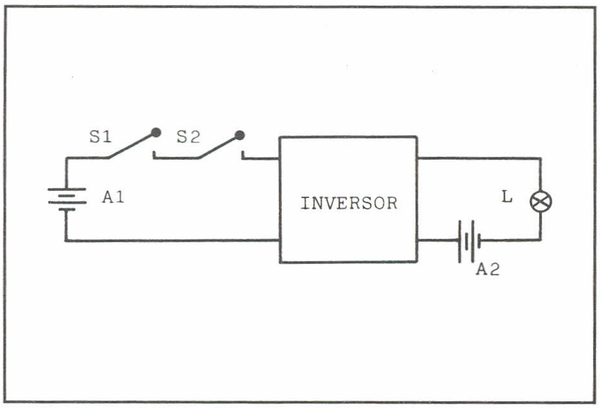


Figura 07

Um tal circuito, sendo o inversor do circuito AND, sob o ponto de vista dos estados lógicos da Álgebra Booleana, pode ser estruturado através do seguinte quadro de valores, qual seja:

| S1 | S2 | AND | NAND |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

Assim, em termos de funções booleanas, a função que exemplifica o circuito NAND é dada por:

$$x = (S1 \cdot S2)'$$

Mas, aplicando-se as leis de De Morgan o circuito NAND poderá, também, ser definido pela seguinte função booleana; qual seja:

$$x = S1' + S2'$$

A seu tempo, o circuito NOR, guardando as considerações anteriores, tem, por correspondência, a forma estrutural dada pela figura 08; a saber:

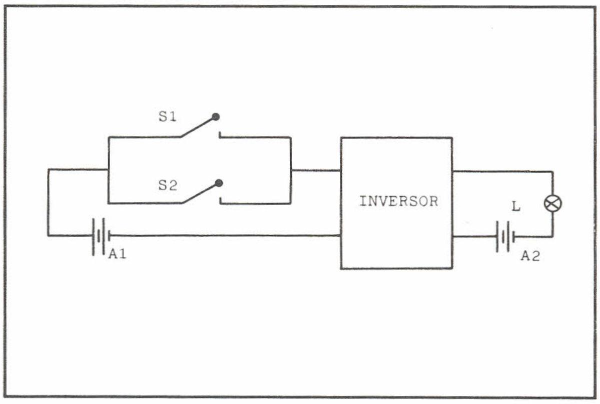


Figura 08

O que, em termos de quadros de valores lógicos, pode ser estruturado de acordo com a seguinte estrutura formal, qual seja:

| S1 | S2 | OR | NOR |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

Algebricamente, portanto, o circuito NOR corresponde à função booleana determinada pela expressão:

$$x = (S1 + S2)'$$

Contudo, aplicando-se as leis de De Morgan sobre a função booleana acima considerada, tem-se a seguinte função correspondente:

$$\boxed{x = S1' \cdot S2'}$$

As considerações algébricas acima estabelecidas, para os circuitos NAND e NOR, encontram correspondentes lógicos na Álgebra Proposicional (como não poderia deixar de ser); uma vez que, analogamente, apresentam-se, respectivamente, como a negação da Conjunção e a negação da Disjunção Inclusiva. Assim sendo, compare os resultados lógicos das fórmulas proposicionais $\sim(p \wedge q)$ e $\sim(p \vee q)$, indicados pela Tabela-Função-de-Verdade abaixo, com aqueles apresentados acima para os circuitos NAND e NOR; ou seja:

| p | q | $p \wedge q$ | $p \vee q$ | $\sim(p \wedge q)$ | $\sim(p \vee q)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| F | F | F | F | V | V |
| F | V | F | V | V | F |
| V | F | F | V | V | F |
| V | V | V | V | F | F |

Das considerações até aqui apresentadas, há de se enfatizar, uma vez mais, que o estudo do comportamento básico de determinados circuitos elétricos corresponde a uma das inúmeras aplicações do pensamento abstrato sistematizado em Lógica Matemática ou em Álgebra Booleana. Contudo, deve-se observar, também, que a análise e representação de diversas funções em circuitos mais complexos tornar-se-ião relativamente extensas ao adotar-se, apenas, os circuitos aqui expostos.

Para atenuar as dificuldades originárias da demasiada extensão dos circuitos elétricos, adota-se uma simbologia particular a qual possibilita indicar as funções booleanas graficamente de forma a tornar o respectivo estudo facilitado. Para tanto, tomam-se símbolos padronizados, estabelecidos por normas internacionais, denominados blocos ou portas lógicas.

Dentre os diversos sistemas de padronização, neste estudo, apresentam-se particularidades sobre a aplicação das normas americanas, quanto às portas lógicas, intituladas MIL-STD-806B (MILITARY STANDARD). Desta forma, seja o seguinte conjunto de símblos e suas respectivas funções booleanas:

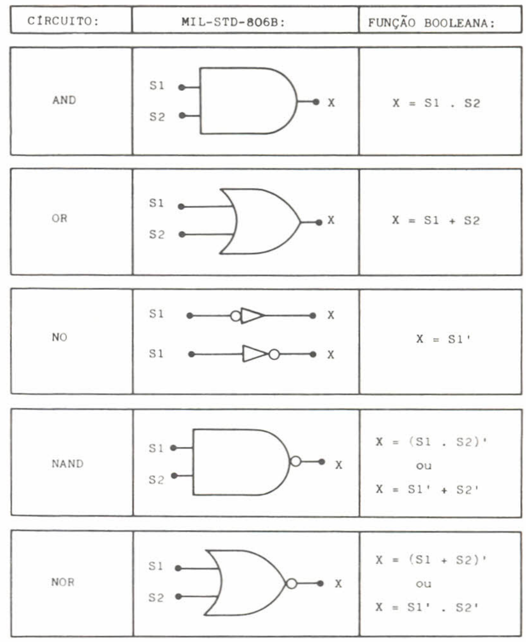


Figura 09

Para exemplificar a aplicação dos símbolos acima, considere um determinado circuito, o qual após a tradução de seus elementos segundo o quadro de símbolos ilustrados na figura 09, seja estruturado conforme mostra a figura 10.

Ao deparar-se com a estrutura acima, objetivando a análise funcional dos interruptores S1 e S2, deve-se, primeiramente, segundo o referencial teórico aqui estabelecido, traduzir o circuito analisado em termos de uma função booleana que venha identificá-lo formalmente (algebricamente). Assim, realizando a leitura (e posterior codificação) dos símbolos constantes da figura 10, chega-se à função booleana definida por:

$$\boxed{x = ((((S1 \cdot S2') + (S1' \cdot S2))' \cdot (((S1 \cdot S2)' + S2)' + S1)')) + (S1 \cdot S2')) \cdot S1}$$

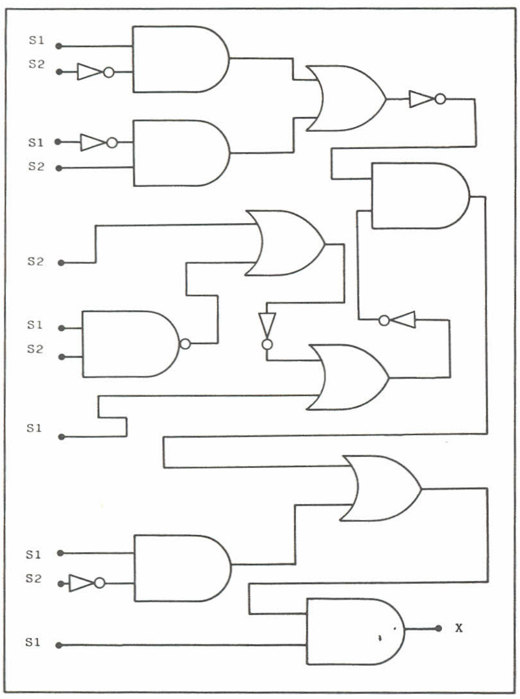


Figura 10

Observe-se, a despeito das afirmações referenciadas, que a fórmula acima nada tem de "simples", relativamente falando. Se se pretende analisá-la é necessário, pois, como já estabelecido, simplificá-la, uma vez que a mesma contém as entidades (interruptores) S1 e S2 repetidas sucessivamente.

Primeiramente, para melhor visualização (e manipulação) do desenvolvimento algébrico, adotar-se-ão as seguintes convenções: S1 = a e S2 = b; permitindo-se escrever a expressão x na forma:

$$\boxed{x = ((((a \cdot b') + (a' \cdot b))' \cdot (((a \cdot b)' + b)' + a)') + (a \cdot b')) \cdot a}$$

Logo, aplicando as propriedades operatórias sobre a fórmula em análise, tem-se, progressivamente, que:

$x = ((((a \cdot b') + (a' \cdot b))' \cdot ((( a \cdot b)' + b)' + a)') + (a \cdot b')) \cdot a =$
(por De Morgan)
$= (((a \cdot b')' \cdot (a' \cdot b)' \cdot (((a \cdot b) \cdot b') + a)') + (a \cdot b')) \cdot a =$
(por De Morgan)
$= (((a' + b) \cdot (a + b') \cdot (((a \cdot b) \cdot b') + a)') + (a \cdot b')) \cdot a =$
(pela Associativa)
$= (((a' + b) \cdot (a + b') \cdot ((a \cdot b \cdot b') + a)') + (a \cdot b')) \cdot a =$
(pela Classe Nula)
$= (((a' + b) \cdot (a + b') \cdot ((a \cdot 0) + a)') + (a \cdot b')) \cdot a =$
(pelo Absorvente de $\cdot$)
$= (((a' + b) \cdot (a + b') \cdot (0 + a)') + (a \cdot b')) \cdot a =$
(pelo Neutro da +)
$= (((a' + b) \cdot (a + b') \cdot (a')) + (a \cdot b')) \cdot a =$
(pelo Complemento de a)
$= (((a' + b) \cdot (a + b') \cdot a') + (a \cdot b')) \cdot a =$
(pela Comutativa)
$= ((a' \cdot (a' + b) \cdot (a + b')) + (a \cdot b')) \cdot a =$
(pela Absorção)
$= ((a' \cdot (a + b')) + (a \cdot b')) \cdot a =$
(pela Distributiva)
$= (((a' \cdot a) + (a' \cdot b')) + (a \cdot b')) \cdot a =$
(pela Classe Nula)
$= (0 + (a' \cdot b') + (a \cdot b')) \cdot a =$
(pelo Neutro da +)
$= ((a' \cdot b') + ( a \cdot b')) \cdot a =$
(pela Distributiva)
$= ((a' + a) \cdot b')) \cdot a =$
(pela Classe Universal)
$= (1 \cdot b') \cdot a =$
(pelo Neutro da $\cdot$)
$= b' \cdot a =$
(pela Comutativa)
$= a \cdot b'$ .

Da simplificação acima processada e retomando-se a convenção original, a expressão objeto de análise conduz à função booleana:

$$\boxed{x = S1 \cdot S2'}$$

Por outro lado, há de se salientar ainda, que o circuito apresentado na figura 10 pode ser substituído pelo circuito considerado na figura 11; o qual é seu equivalente lógico, desempenhando as mesmas funções daquele originalmente tomado. Portanto, considere um tal circuito:

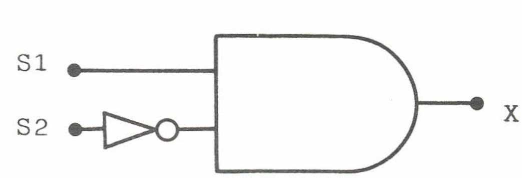


Figura 11

Saliente-se, contudo, que a estrutura analisada acima poderia, ressalvadas as ponderações sobre os elementos físicos e a natureza conceitual envolvidas, ser estudada mediante a simplificação de uma fórmula proposicional do Cálculo dos Enunciados, em Lógica Matemática, através da substituição de equivalências lógicas sucessivas. Portanto, a estrutura em estudo encontra em Álgebra Proposicional, quando substituído, respectivamente, os símbolos ( ' ), ( · ) e ( + ) pelos símbolos ( ~ ), ( ∧ ) e ( v ), bem como, os elementos S1 e S2 pelas proposições simples p e q, o equivalente lógico determinado pela seguinte fórmula proposicional:

$$\boxed{P(p, q):\ ((\sim((p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)) \wedge \sim(\sim(\sim(p \wedge q) \vee q) \vee p)) \vee (p \wedge \sim q)) \wedge p}$$

Simplificando uma tal fórmula proposicional, por substituição de equivalências sucessivas, resulta que:

$$P(p, q): ((\sim((p\wedge\sim q) \vee (\sim p\wedge q)) \wedge \sim(\sim(\sim(p\wedge q)\vee q)\vee p)) \vee (p\wedge\sim q)) \wedge p \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (((\sim p \vee q) \wedge (p\vee\sim q) \wedge \sim(\sim t \vee p)) \vee (p\wedge\sim q)) \wedge p \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (((\sim p \vee q) \wedge (p\vee\sim q)\wedge \sim p) \vee (p\wedge\sim q)) \wedge p \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow ((\sim p \wedge (p\vee\sim q)) \vee (p\wedge\sim q)) \wedge p \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow ((\sim p\wedge\sim q) \vee (p\wedge\sim q)) \wedge p \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow ((\sim p \vee p) \wedge \sim q) \wedge p \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (t\wedge\sim q) \wedge p \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \sim q \wedge p \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow p \wedge \sim q;
\end{aligned}$$

o que se converte, naturalmente, S1 · S2' .

Dada, porém, a correspondência estabelecida entre a Álgebra Booleana e a Lógica Matemática, e, por particularidade relacional, entre a Álgebra de Boole e a Lógica Digital, é certo que os estados lógicos de S1 e de S2 serão, quando muito, ou 1 ou 0 (cada qual excludente em relação ao outro). Conseqüentemente, tem-se operado quatro arranjos binários de valores lógicos possíveis para os valores particulares de S1 e S2, cada um dos quais dando origem a um único valor resultante para x; pois que este último terá valor lógico 1 ou 0 e não ambos simultaneamente.

Por exemplo, admitindo-se que o valor lógico de S1 é igual a 1 e que o valor lógico de S2 é igual a 0, obtém-se, processando-se as respectivas operações, que:

$$\begin{aligned}
x &= ((((1 \cdot 0') + (1' \cdot 0))' \cdot (((1 \cdot 0)' + 0)' + 1)') + (1 \cdot 0')) \cdot 1 = \\
&= ((((1 \cdot 1) + (0 \cdot 0))' \cdot (((1 \cdot 0)' + 0)' + 1)') + (1 \cdot 1)) \cdot 1 = \\
&= (((1 + 0)' \cdot (((0)' + 0)' + 1)') + (1)) \cdot 1 = \\
&= (((1)' \cdot ((1 + 0)' + 1)') + 1) \cdot 1 = \\
&= ((0 \cdot ((1)' + 1)' + 1) \cdot 1 = \\
&= ((0 \cdot (0 + 1)') + 1) \cdot 1 = \\
&= ((0 \cdot (1)') + 1) \cdot 1 = \\
&= ((0 \cdot 0) + 1) \cdot 1 = \\
&= (0 + 1) \cdot 1 = \\
&= (1) \cdot 1 = \\
&= 1 \cdot 1 = \\
&= 1 \ .
\end{aligned}$$

Verificando, assim, para as outras três possibilidades de arranjos dos valores binários 1 e 0, obter-se-ia a tábua de valores dada por:

| S1 | S2 | ((((S1·S2')+(S1'·S2))' | · | (((S1.S2)'+S2)'+S1)') | + | (S1.S2')) | · | S1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

Observe, em conseqüência, que a coluna ressaltada na tabela acima corresponde aos resultados possíveis de x = S1 · S2'; senão considere a tabela de valores a seguir ilustrada, qual seja:

| S1 | S2 | S2' | S1 · S2' |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |

O método de análise exemplificado neste estudo engloba, certamente, uma série de outras conseqüências, as quais não podem ser consideradas na delimitação deste conjunto sem adentrar-se em nível de detalhamento incompatível com o propósito de sua apresentação; pois que os extraordinários recursos técnicos de que dispõe a Lógica Matemática para a análise das mais variadas e complexas formas de argumentação (abstrata e/ou empírica) dedutiva ou indutiva, vão muito além do aqui exposto e apresentam uma importância instrumental inegável em todos os campos do saber.

A investigação, pode-se assim qualificá-la, conduzida no presente compêndio sobre a aplicação da Lógica Matemática à Lógica Digital, partindo-se da Álgebra de Boole, demonstra, substituindo posições preconcebidas e contrárias, particularizadamente, via logicismo, a interconexão da Matemática com outra determinada ciência. Contudo, o resumo aqui apresentado não pretende ser uma compilação integral das possibilidades inerentes ao assunto abordado e, nem tão pouco, limita-se ao enfoque aqui apresentado. Porquanto, o caráter a *posteriori* da Matemática, sua aplicação aos problemas do mundo real, não poderia ser, completamente abordado, em quaisquer de suas dimensões, na limitação deste espaço; uma vez que o tema em específico atacado, a bem da verdade, encontra-se, na melhor das reflexões, em pleno desenvolvimento.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

CALABRESE, Giuseppe. L'Algebra di Boole. Milano, Delfino, 1973.

CIANFLONE, Franco. L'Algebra di Boole i e circuiti logici. Milano, Etas Libri SPA, 1978.

FLEGG, H. Graham. Boolean algebra and its applications. Blackie: london and Glasgow, 1964.

GABBAY, D. e GUENTHER, F. Handbook of philosophical logic. Reidel, 1983-1986.

HAMILTON, A. G. Logic for Mathematicians. Cambridge Univ. Press, 1978.

MATES, Benson. Elementary Logic. Oxford Univ. Press, 1972.

MENDELSON, E. Introduction to Mathematical Logic. Wadsworth & Brooks, 1987.

SOUTH, G. F. Boolean algebra and its uses. Van Nostrand Reinhold, 1974.

SUPPES, P. Introduction to Logic. Princeton Univ. Press, 1975.

WHITESITT, J. Eldon. Boolean algebra and its applications. Addison Wesley, 1961.