UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ - UTFPR
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

WAGNER SOKOLSKI

IMO

CURITIBA

2019

WAGNER SOKOLSKI

IMO

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Tecnológica Federal do Paraná em Curitiba - PROFMAT-UTCT como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre.
Orientador: Roy Wilhelm Probst

CURITIBA

2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

S683i Sokolski, Wagner
IMO [recurso eletrônico] / Wagner Sokolski.-- 2019.
1 arquivo texto (43 f.) : PDF ; $c 702 KB

Modo de acesso: World Wide Web.
Texto em português com resumo em inglês.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Área de concentração: Matemática Aplicada, Curitiba, 2019.
Bibliografia: f. 42-43.

1. Matemática - Dissertações. 2. Olimpíada Internacional de Matemática. 3. Matemática - Estudo e ensino (Ensino médio) – Competições. 4. Competições escolares - Matemática - História. 5. Matemática - Problemas, exercícios, etc. 6. Solução de problemas. I. Probst, Roy Wilhelm, orient. II. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

CDD: Ed. 23 – 510

Biblioteca Central do Câmpus Curitiba – UTFPR
Bibliotecária: Luiza Aquemi Matsumoto CRB-9/794

TERMO DE APROVAÇÃO DE DISSERTAÇÃO Nº 60

A Dissertação de Mestrado intitulada **IMO**, defendida em sessão pública pelo candidato **Wagner Sokolski**, no dia **27 de fevereiro de 2019**, foi julgada para a obtenção do título de Mestre em **Matemática**, área de concentração **Matemática Aplicada**, e aprovada em sua forma final, pelo Programa de Pós-Graduação em **Matemática em Rede Nacional**.

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. Roy Wilhelm Probst - Presidente - UTFPR
Prof. Dr. Rafael Aleixo de Carvalho - UFSC/Blumenau
Prof. Dr. Francismar Ferreira Lima - UTFPR

A via original deste documento encontra-se arquivada na Secretaria do Programa, contendo a assinatura da Coordenação após a entrega da versão corrigida do trabalho.

Curitiba, 27 de fevereiro de 2019.

Carimbo e Assinatura do Coordenador do Programa

AGRADECIMENTOS

- A Jesus, como sendo meu exemplo e guia.
- A minha Tia Ane, por iluminar meus passos.
- Ao meu pai Marcelo, mãe Jeanine, e meus irmãos Gabriel e Bianca, por me amarem e serem pessoas especiais na minha vida.
- A minha namorada Tamara Wilinski, pela paciência e compreensão de meu tempo de estudo e na elaboração do trabalho.
- À Elaine F.L.C Gomes e a Adriele L. Kraj por me auxiliarem nas concordâncias dos textos.
- Aos meus professores do PROFMAT, que me auxiliaram em meu desenvolvimento como Matemático e Professor.
- Ao meu professor e orientador Roy Wilhelm Probst que, além de me ensinar muito na disciplina de cálculo, auxiliou-me muito na escrita da Dissertação. Ajuda essa que, sem a qual, o trabalho aqui apresentado não seria possível.
- À Capes, pela recomendação do PROFMAT por meio do parecer do Conselho Técnico Científico da Educação Superior.
- À Sociedade Brasileira de Matemática que na busca da melhoria do ensino de Matemática na Educação Básica viabilizou a implementação do PROFMAT.

RESUMO

SOKOLSKI, Wagner. **IMO** 43 f. Dissertação - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2019.

O objetivo deste trabalho é divulgar a Olimpíada Internacional de Matemática (IMO, sigla em inglês para *International Mathematical Olympiad*). A IMO é a competição de Matemática mais importante que um aluno do Ensino Médio pode participar. O Brasil sediou a IMO em 2017, sendo este um dos fatores para a escolha do tema. O trabalho está dividido em duas partes. A primeira parte traz um histórico da IMO, formato da competição, desempenho dos países participantes, em especial do Brasil e seus medalhistas. A segunda parte traz alguns problemas da IMO, que foram escolhidos por tratarem de conceitos abordados no PROFMAT, ou serem considerados famosos, ou serem considerados difíceis, ou serem escolhidos para a edição realizada no Brasil em 2017. Além disso, traz uma solução proposta para cada problema selecionado.

Palavras-chave: Olimpíada Internacional de Matemática. Olimpíadas de Matemática. Divulgação de Matemática.

ABSTRACT

SOKOLSKI, Wagner. **IMO.** 43 f. Dissertation - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2019.

This study aims to explore the International Mathematical Olympiad (IMO), the most prestigious mathematical competition a high-school student could aspire to participate. One of the main reasons this topic was selected is that the 2017 IMO was held in Brazil. The first part of this work addresses the IMO history, its format, the performance by country, in particular, by Brazil and its medalists. The second part of this work shows some IMO problems that: share some similarity with PROFMAT, or are considered famous, or considered hard, or were presented at 2017 IMO in Brazil. It also shows a proposed solution to each selected problem.

Keywords: International Mathematical Olympiad. Mathematical Olympiads. Mathematics Dissemination.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Muitas vezes a beleza da matemática se compara a beleza da música: gostamos de uma música porque de repente ela muda sutilmente e essa pequena mudança nos leva a caminhos totalmente novos e inesperados. Isso faz com que músicas novas sejam compostas. Da mesma forma, uma ideia matemática um pouquinho só diferente pode nos levar a lugares que nem imaginamos. E é por isso que, assim como a música, a matemática nunca cessa: sempre alguém inventa algo novo que é belo e inesperado (SHINE, 2009).

É de grande importância encontrar meios que auxiliem os alunos a criarem, além do desenvolvimento de habilidades, o gosto pelo aprendizado da Matemática. Um ótimo instrumento para a obtenção de tais objetivos são as Olimpíadas de Matemática. Segundo o regulamento da OBMEP (Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas), os objetivos dessa olimpíada são (OBMEP, 2018, Acesso em: 12 jun. 2018):

- Estimular e promover o estudo da Matemática no Brasil.
- Contribuir para a melhoria da qualidade da educação básica, possibilitando que o maior número de alunos brasileiros possa ter acesso a material didático de qualidade.
- Promover a difusão da cultura matemática.
- Identificar jovens talentos e incentivar seu ingresso em universidades nas áreas científicas e tecnológicas.
- Incentivar o aperfeiçoamento dos professores das escolas públicas, contribuindo para a sua valorização profissional.
- Contribuir para a integração das escolas brasileiras com as universidades públicas, com os institutos de pesquisa e com as sociedades científicas.
- Promover a inclusão social por meio da difusão do conhecimento.

Analisando os objetivos, pode-se afirmar que o professor deve tirar muito proveito de uma Olimpíada de Matemática como essa. É possível resolver questões em sala de aula que sejam condizentes com o conteúdo que está sendo estudado, mostrar exercícios que possam ser aplicados no cotidiano do aluno, auxiliá-los a raciocinarem sobre determinados exercícios expostos e a procurarem métodos de solucioná-los, além de mostrar aos estudantes a importância que tem a Matemática nos dias atuais.

Para (ALVES, 2010), a sala de aula é um ambiente propício para discussões de conhecimentos e inovações dos saberes para o desenvolvimento de desafios matemáticos. Ao propor um desses desafios, o professor pode ficar surpreso ao se deparar com resposta inimaginável realizada pelo estudante.

Nesse sentido, as Olimpíadas de Matemática podem enriquecer o espaço da sala de aula, auxiliando os alunos a desenvolverem capacidades de raciocínio lógico. Em muitas dessas olimpíadas, são expostos problemas que os alunos precisam ter muita criatividade e imaginação para resolvê-los. (BAGATINI, 2010) afirma que:

> Diante das diversas tentativas de incentivar o estudo da Matemática, alguns se sobressaem, entre elas as Olimpíadas de Matemática realizadas em diversas escalas (mundial, nacional, regional, etc.). Essa forma de competição ocorre a muito tempo e nasceu primeiramente com o objetivo de selecionar os melhores alunos em Matemática para investir na sua carreira e possivelmente contribuir para o avanço científico e tecnológico do país.

Alunos com um bom desempenho nas Olimpíadas de Matemática recebem premiações, como por exemplo, na OBM (Olimpíada Brasileira de Matemática) e na OBMEP. O PICME (Programa de Iniciação Científica e Mestrado) é um programa que oferece aos estudantes universitários que se destacaram nas Olimpíadas de Matemática (medalhistas da OBMEP ou da OBM) a oportunidade de realizar estudos avançados em Matemática, simultaneamente com sua graduação. Os participantes recebem as bolsas de Iniciação Científica através de uma parceria com o CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico) e bolsas de Mestrado e Doutorado com a CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) (OBMEP, Acesso em: 27 mai. 2018).

Muitos alunos medalhistas em Olimpíadas de Matemática possuem altas habilidades em raciocinar matematicamente e criar estratégias de resolução de problemas. Da mesma forma que, estudantes com dificuldades de aprendizagem necessitam de atenção especial, os alunos "superdotados" precisam de algo voltado a eles (BAGATINI, 2010).

Seguindo essa ideia, a participação efetiva nas Olimpíadas de Matemática oportuniza ao educando o estímulo necessário para a valorização do raciocínio e de esquemas de pensamentos mais elaborados, capazes de auxiliar, medir e desenvolver o conhecimento mais apurado daqueles que se tornam medalhistas. As Olimpíadas de Matemática proporcionam aos estudantes uma fantástica oportunidade de conhecer uma Matemática diferente, com pequenas novas ideias que levam a um grande e novo mundo de conhecimento. Às vezes, uma ideia nova traz a sensação de ter descoberto algum lugar novo: primeiro, tem-se a sensação do desconhecido; em seguida, é inevitável a vontade de explorar (SHINE, 2009).

A revista Eureka (SBM, 1998) afirma:

> Entendemos que não é suficiente para a formação do futuro cidadão um aprendizado burocrático da Matemática e percebemos a importância de estimular os alunos desde tenra idade a resolver problemas novos e desafiantes, propiciando o desenvolvimento da imaginação e da criatividade.

> O programa de Olimpíadas de Matemática é reconhecido em todos os países do mundo desenvolvido como o mais eficiente instrumento para atingir esses objetivos. Aproveitando o natural gosto dos jovens pelas competições, as Olimpíadas de Matemática tem conseguido estimular alunos a estudar conteúdos além do currículo escolar e, também, por outro lado, aumentar e desenvolver a competência dos professores.

Portanto, as Olimpíadas de Matemática podem contribuir muito para a melhoria do ensino de Matemática nas escolas, trazendo novas oportunidades de crescimento aos alunos e a seus professores. A Olimpíada Internacional de Matemática (IMO, sigla em inglês para *International Mathematical Olympiad*) é uma das mais importante dessas olimpíadas. Segundo (DJUKIĆ et al., 2011):

> A Olimpíada Internacional de Matemática existe a mais de 50 anos e já criou um legado muito rico e firmemente se estabeleceu como a mais prestigiada competição de Matemática em que um estudante do Ensino Médio pode aspirar a participar. Além da oportunidade de lidar com problemas matemáticos interessantes e desafiadores, a IMO representa uma grande oportunidade para estudantes do Ensino Médio de se comparar com estudantes do resto do mundo. Talvez até mais importante, é a oportunidade de fazer amigos e socializar com alunos que tem interesses semelhantes e, possivelmente, até para se familiarizar com seus futuros colegas nesta primeira jornada da sua vida no mundo da Matemática profissional e científica. Acima de tudo, por mais agradável ou decepcionante que a pontuação final possa ser, preparar-se para uma IMO e participar de uma é uma aventura que, sem dúvida, perdura na memória para o resto da vida.

O objetivo deste trabalho é divulgar a Olimpíada Internacional de Matemática. O trabalho está dividido em duas partes. A primeira parte traz uma descrição da IMO: histórico, regulamento, formato da competição, desempenho dos países participantes, em especial do Brasil e seus medalhistas e a relação entre IMO e pesquisa matemática. A segunda parte traz alguns problemas dessa Olimpíada, que foram escolhidos por tratarem de conceitos abordados no PROFMAT, ou serem considerados famosos, ou considerados difíceis, ou os escolhidos para a edição realizada no Brasil em 2017. Além disso, traz uma solução proposta para cada problema selecionado.

A motivação para a escolha deste tema foi o Biênio da Matemática no Brasil. O Brasil sediou, em 2017 e 2018, dois grandes eventos de relevância internacional: a Olimpíada Internacional de Matemática IMO 2017 e o Congresso Internacional de Matemáticos ICM 2018 (SBM, Acesso em: 19 out. 2018).

1 A OLIMPÍADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA

Este capítulo mostra uma visão geral da Olimpíada Internacional de Matemática (IMO, sigla em inglês para *International Mathematical Olympiad*). Além do seu histórico, mostra o formato da competição e o desempenho de alguns países, incluindo o Brasil. As informações deste capítulo são baseadas principalmente na página da IMO (IMO, Acesso em: 02 set. 2018) e na referência (DJUKIĆ et al., 2011).

1.1 HISTÓRICO

A Olimpíada Internacional de Matemática (IMO) é a competição matemática mais importante e prestigiosa para estudantes de ensino médio. Ela desempenha um papel importante na geração de interesse na Matemática, além de identificar talentos (DJUKIĆ et al., 2011).

Os objetivos da IMO são (IMO, Acesso em: 02 set. 2018):

- Descobrir, encorajar e desafiar jovens matematicamente talentosos em todos os países.
- Promover relações internacionais amigáveis entre matemáticos de todos os países.
- Criar uma oportunidade para a troca de informações sobre programas e práticas escolares em todo o mundo.
- Promover a matemática em geral.

A Figura 1 mostra o logo da IMO, utilizado desde a IMO de 1995 no Canadá.

Figura 1 – Logo da IMO

Fonte: (IMO, Acesso em: 02 set. 2018)

A IMO começou como uma competição muito menor do que nos dias atuais. Em 1959, contava com apenas 7 países, todos do leste europeu. Desde então, vem sendo realizada anualmente, com exceção de 1980 - por razões financeiras, nenhum país se ofereceu para sediar o evento (DJUKIĆ et al., 2011). Em 2017, alcançou o número recorde de 111 países participantes. A Tabela 1 mostra os países sedes e o crescimento da competição.

Ano	Sede	Países	Participantes
1959	Romênia	7	52
1960	Romênia	5	39
1961	Hungria	6	48
1962	Checoslováquia	7	56
1963	Polônia	8	64
1964	União Soviética	9	72
1965	República Democrática Alemã	10	80
1966	Bulgária	9	72
1967	Iugoslávia	16	99
1968	União Soviética	12	96
1969	Romênia	14	112
1970	Hungria	14	112
1971	Checoslováquia	15	115
1972	Polônia	14	107
1973	União Soviética	16	125
1974	República Democrática Alemã	18	140
1975	Bulgária	17	135
1976	Áustria	18	139
1977	Iugoslávia	21	155
1978	Romênia	17	132
1979	Reino Unido	23	166
1981	Estados Unidos da América	27	185
1982	Hungria	30	119
1983	França	32	186
1984	Checoslováquia	34	192
1985	Finlândia	38	209
1986	Polônia	37	210
1987	Cuba	42	237
1988	Austrália	49	268
1989	Alemanha	50	291
1990	China	54	308
1991	Suécia	56	318
1992	Rússia	56	322
1993	Turquia	73	413
1994	Hong Kong	69	385
1995	Canadá	73	412

1996	Índia	75	424
1997	Argentina	82	460
1998	Taiwan	76	419
1999	Romênia	81	450
2000	Coreia do Sul	82	461
2001	Estados Unidos da América	83	473
2002	Reino Unido	84	479
2003	Japão	82	457
2004	Grécia	85	486
2005	México	91	513
2006	Eslovênia	90	498
2007	Vietnã	93	520
2008	Espanha	97	535
2009	Alemanha	104	565
2010	Cazaquistão	95	522
2011	Holanda	101	563
2012	Argentina	100	547
2013	Colômbia	97	527
2014	África do Sul	101	560
2015	Tailândia	104	577
2016	Hong Kong	109	602
2017	Brasil	111	615
2018	Romênia	107	594

Tabela 1 – Países sede e quantidade de participantes

O formato da competição variou nos primeiros anos, mas rapidamente se tornou estável e permanece sem modificações. Cada país pode enviar até seis participantes e cada um compete individualmente, sem qualquer ajuda ou colaboração. Cada país envia também um líder de time, que participa da seleção dos problemas e fica isolado do resto do time até o final da competição, e um vice-líder, que cuida dos participantes (DJUKIĆ et al., 2011).

Para participar da IMO o estudante deve ter menos de 20 anos e não pode estar cursando qualquer universidade. No Brasil o processo de seleção é feito a partir da OBM (Olimpíada Brasileira de Matemática) (OBM, 2017, Acesso em: 30 dez. 2017).

A competição dura dois dias e a prova consiste em resolver seis problemas. A cada dia os estudantes têm quatro horas e meia para resolver três problemas. O primeiro problema é geralmente o mais fácil do dia e o último, o mais difícil, com raras exceções. Cada problema vale 7 pontos, ou seja, a pontuação máxima é 42 pontos. O número de pontos obtidos por um participante em cada problema é resultado da negociação entre os coordenadores do problema, indicados pelo país sede, e pelos líderes e vice-líderes de time, que defendem os interesses dos seus participantes.

Apesar dos países compararem seus desempenhos por equipes, apenas prêmios individuais são oferecidos pela organização. O número de participantes premiados é o mais próximo possível, porém sem ultrapassar, de metade dos participantes. As medalhas de ouro, prata e bronze são distribuídas entre os premiados em uma proporção aproximada de 1:2:3, respectivamente. Os participantes que não ganharam medalhas, mas marcaram 7 pontos em, pelo menos, um problema, recebem uma menção honrosa (IMO, Acesso em: 02 set. 2018).

Estatisticamente, o ano com os problemas mais difíceis da IMO ocorreu em 1971, seguido de 1996 e 1993. A IMO com a menor pontuação para a equipe vencedora foi a de 1977, seguido de 2017 e 1999 (IMO, Acesso em: 02 set. 2018).

Os problemas podem ser de qualquer área da matemática do Ensino Médio sobre Geometria, Teoria dos Números, Álgebra e Análise Combinatória. Os países participantes podem propor problemas (inéditos) para os organizadores da IMO, sendo que o país sede não propõe problemas. O comitê de problemas seleciona uma lista (chamada de lista curta de problemas) entre a lista de todos os problemas propostos (chamada de lista longa de problemas). Os seis problemas da IMO são selecionados pelo júri da IMO, formado pelos líderes de cada time, entre os problemas da lista curta (IMO, Acesso em: 02 set. 2018).

Além da competição matemática, a IMO é também um grande evento social. Depois da competição, os estudantes participam de eventos e excursões organizados pelo país sede, além de interagir e socializar com estudantes de todas as partes do mundo (DJUKIĆ et al., 2011).

1.2 DESEMPENHO POR PAÍSES

Embora apenas prêmio individuais sejam distribuídos, é natural que os países comparem seus desempenhos de forma extra-oficial. A Tabela 2 mostra os três primeiros colocados no quadro de medalhas em cada ano (IMO, Acesso em: 02 set. 2018).

Ano	1° Colocado	2° Colocado	3° Colocado
1959	Romênia	Hungria	Checoslováquia
1960	Checoslováquia	Hungria	Romênia
1961	Hungria	Polônia	Romênia
1962	Hungria	União Soviética	Romênia
1963	União Soviética	Hungria	Romênia
1964	União Soviética	Hungria	Romênia
1965	União Soviética	Hungria	Romênia
1966	União Soviética	Hungria	Alemanha Oriental
1967	União Soviética	Alemanha Oriental	Hungria
1968	Alemanha Oriental	União Soviética	Hungria

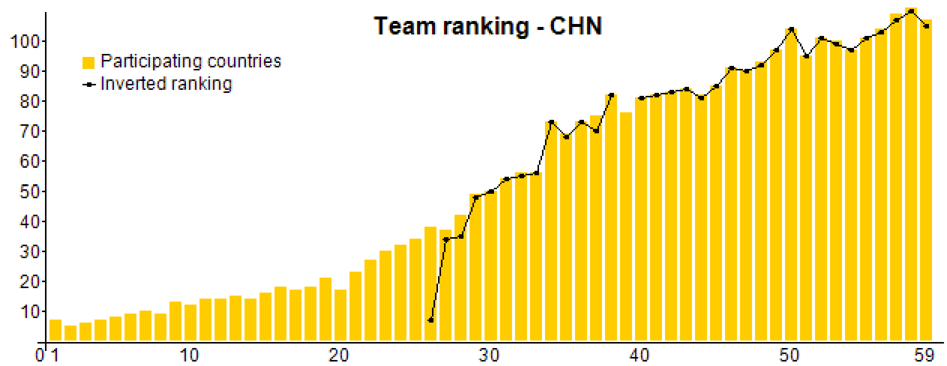
1969	Hungria	Alemanha Oriental	União Soviética
1970	Hungria	Alemanha Oriental	União Soviética
1971	Hungria	União Soviética	Alemanha Oriental
1972	União Soviética	Hungria	Alemanha Oriental
1973	União Soviética	Hungria	Alemanha Oriental
1974	União Soviética	Estados Unidos	Hungria
1975	Hungria	Alemanha Oriental	Estados Unidos
1976	União Soviética	Reino Unido	Estados Unidos
1977	Estados Unidos	União Soviética	Hungria
1978	Romênia	Estados Unidos	Reino Unido
1979	União Soviética	Romênia	Alemanha
1981	Estados Unidos	Alemanha	Reino Unido
1982	Alemanha	União Soviética	Alemanha Oriental
1983	Alemanha	Estados Unidos	Hungria
1984	União Soviética	Bulgária	Romênia
1985	Romênia	Estados Unidos	Hungria
1986	Estados Unidos	União Soviética	Alemanha
1987	Romênia	Alemanha	União Soviética
1988	União Soviética	China	Romênia
1989	China	Romênia	União Soviética
1990	China	União Soviética	Estados Unidos
1991	União Soviética	China	Romênia
1992	China	Estados Unidos	Romênia
1993	China	Alemanha	Bulgária
1994	Estados Unidos	China	Rússia
1995	China	Romênia	Rússia
1996	Romênia	Estados Unidos	Hungria
1997	China	Hungria	Irã
1998	Irã	Bulgária	Hungria
1999	China	Rússia	Vietnã
2000	China	Rússia	Estados Unidos
2001	China	Rússia	Estados Unidos
2002	China	Rússia	Estados Unidos
2003	Bulgária	China	Estados Unidos
2004	China	Estados Unidos	Rússia
2005	China	Estados Unidos	Rússia
2006	China	Rússia	Coreia do Sul
2007	Rússia	China	Coreia do Sul
2008	China	Rússia	Estados Unidos

2009	China	Japão	Rússia
2010	China	Rússia	Estados Unidos
2011	China	Estados Unidos	Singapura
2012	Coreia do Sul	China	Estados Unidos
2013	China	Coreia do Sul	Estados Unidos
2014	China	Estados Unidos	Taiwan
2015	Estados Unidos	China	Coreia do Sul
2016	Estados Unidos	Coreia do Sul	China
2017	Coreia do Sul	China	Vietnã
2018	Estados Unidos	Rússia	China

Tabela 2 – Classificação extra-oficial por países

O país que mais venceu essa olimpíada foi a China, 19 vezes, que começou a participar em 1985, sendo que nesse mesmo ano obteve a 32ª posição no ranking e, desde 1988, apenas não ficou entre as 3 primeiras colocações no ano de 1996 e de 1998. Portanto, a China é um país que obteve excelentes colocações e apresentou significativa evolução na IMO. A Figura 2 mostra o desempenho da China.

Figura 2 – Desempenho da China



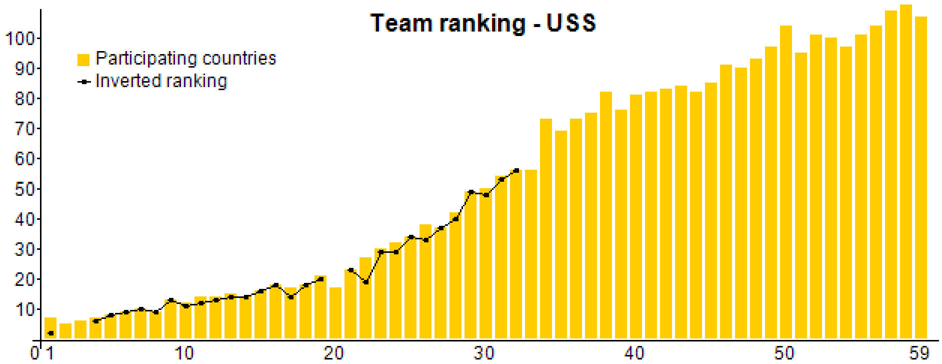
Fonte: (IMO, Acesso em: 02 set. 2018)

A antiga União Soviética (união de vários países que era liderada pela Rússia) venceu 13 vezes essa Olimpíada e obteve, em muitos outros anos, resultados também excelentes. Em 1991, que foi o último ano de sua participação, acabou vencendo essa competição. A Figura 3 mostra o desempenho da União Soviética.

A Hungria venceu 6 vezes a competição, porém suas vitórias e melhores resultados apareceram nos primeiros anos de participação. Desde 2006, o país não consegue uma posição melhor que a 10ª colocação. A Figura 4 mostra o desempenho da Hungria.

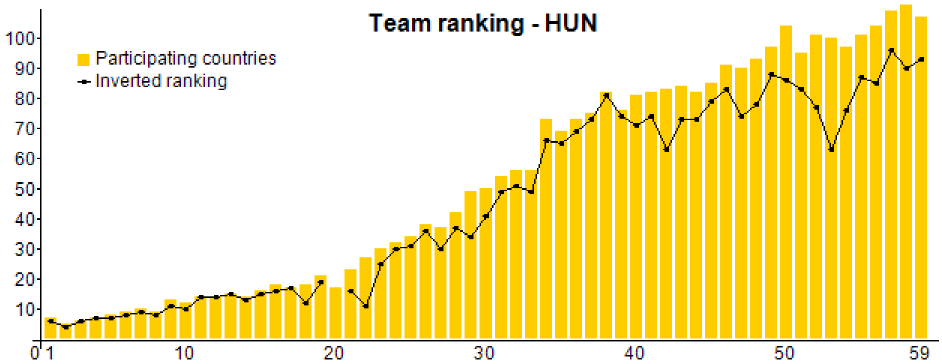
Os Estados Unidos venceram 7 vezes. É um dos países que mais possui regularidade em seus resultados. Iniciou sua participação na olimpíada em 1974, participando em todas as IMO,

Figura 3 – Desempenho da União Soviética



Fonte: (IMO, Acesso em: 02 set. 2018)

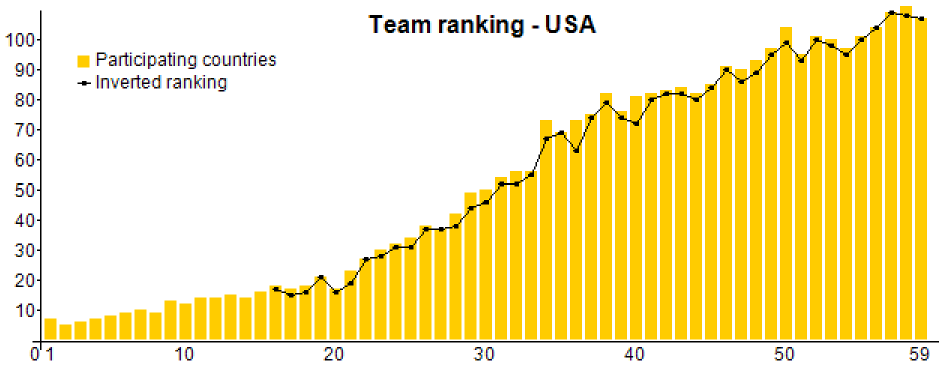
Figura 4 – Desempenho da Hungria



Fonte: (IMO, Acesso em: 02 set. 2018)

desde então. Sua pior colocação foi a 11ª, obtida em 1995. A Figura 5 mostra o desempenho dos Estados Unidos.

Figura 5 – Desempenho dos Estados Unidos

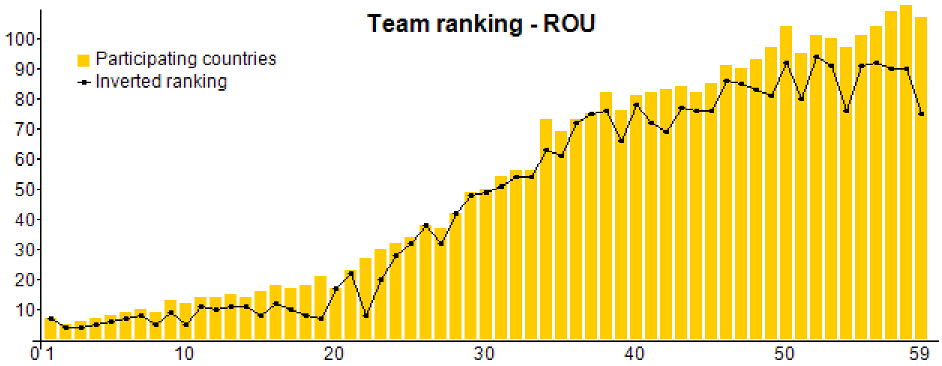


Fonte: (IMO, Acesso em: 02 set. 2018)

A Romênia venceu quatro vezes a competição, porém não vence desde 1996. A partir de 1997, sua melhor colocação foi a 4ª posição, em 1999. A Figura 6 mostra o desempenho da

Romênia.

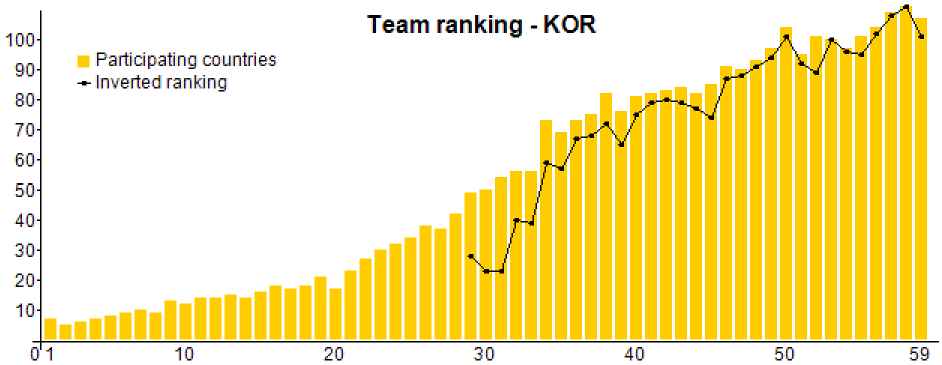
Figura 6 – Desempenho da Romênia



Fonte: (IMO, Acesso em: 02 set. 2018)

Importante ressaltar a Coreia do Sul, que começou a participar dessa olimpíada em 1988 e vem atingindo atualmente posições muito significativas. No ano de 1988 ficou com a 22ª posição num total de 49 países participantes. Já em 2017, que foi sediada no Brasil, conseguiu o primeiro lugar dentre os 111 países participantes. A Figura 7 mostra o desempenho da Coreia do Sul.

Figura 7 – Desempenho da Coreia do Sul



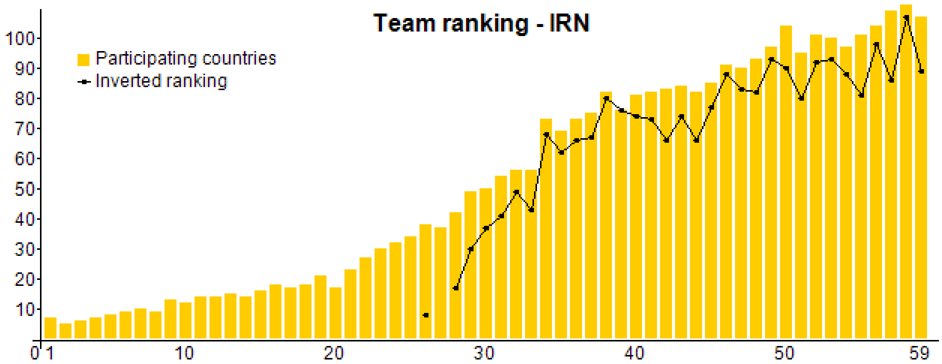
Fonte: (IMO, Acesso em: 02 set. 2018)

Outro país que já foi campeão dessa olimpíada é o Irã. Venceu uma única vez essa competição, em 1998. Em apenas outro ano conseguiu ficar entre os três primeiros colocados. Em 2017 conseguiu a 5ª colocação. A Figura 8 mostra o desempenho do Irã.

A Bulgária também venceu, uma única vez, em 2003. Depois dessa vitória, o país não tem conseguido resultados tão expressivos. Teve um 5° lugar em 2004 e um 9° lugar em 2007. Nos demais anos, a partir de 2004, teve colocações acima do 10° lugar. No Brasil em 2017, conseguiu a 18ª colocação, apenas. A Figura 9 mostra o desempenho da Bulgária.

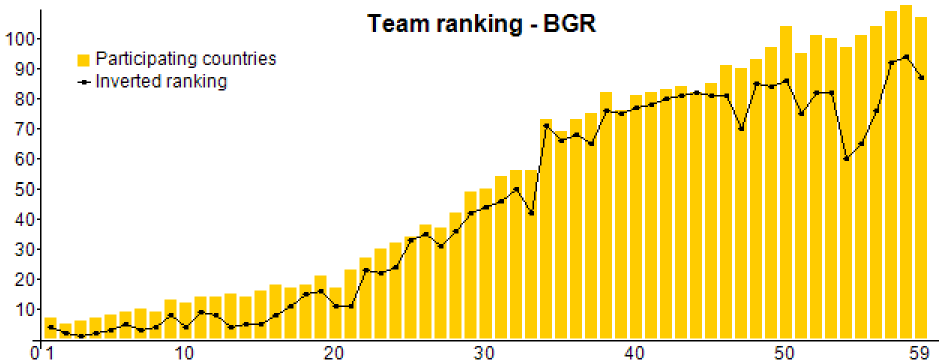
A Alemanha venceu três vezes a competição. Uma vez sendo a Alemanha Oriental e duas vezes sendo a Alemanha Ocidental. Até o ano de 1993, a Alemanha vinha obtendo resultados

Figura 8 – Desempenho do Irã



Fonte: (IMO, Acesso em: 02 set. 2018)

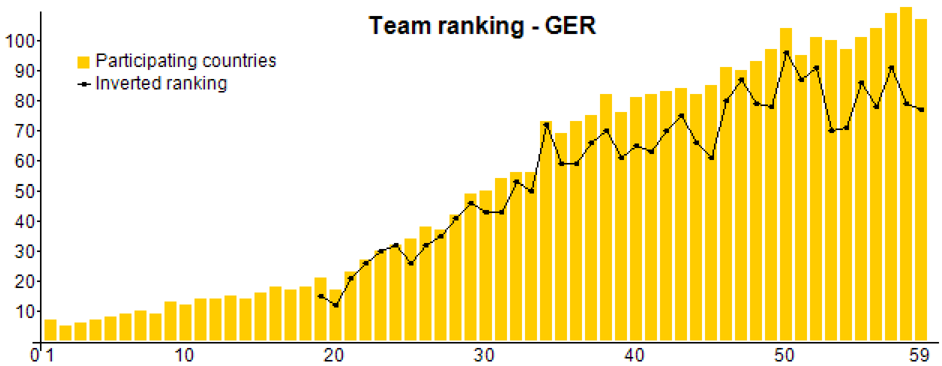
Figura 9 – Desempenho da Bulgária



Fonte: (IMO, Acesso em: 02 set. 2018)

muito bons. A partir de 1994, teve apenas três resultados entre os 10 primeiros colocados, que foi em 2006, com a 4ª colocação e em 2009 e 2010, com a 9ª colocação. A Figura 9 mostra o desempenho da Alemanha.

Figura 10 – Desempenho da Alemanha



Fonte: (IMO, Acesso em: 02 set. 2018)

1.3 DESEMPENHO DO BRASIL

O Brasil participa da IMO desde 1979 e já conseguiu 10 medalhas de ouro, 43 medalhas de prata, 77 medalhas de bronze e 33 menções honrosas. A melhor participação foi em 2016, conseguindo a 15ª colocação. A Tabela 3 mostra o desempenho do Brasil em cada edição (IMO, Acesso em: 02 set. 2018).

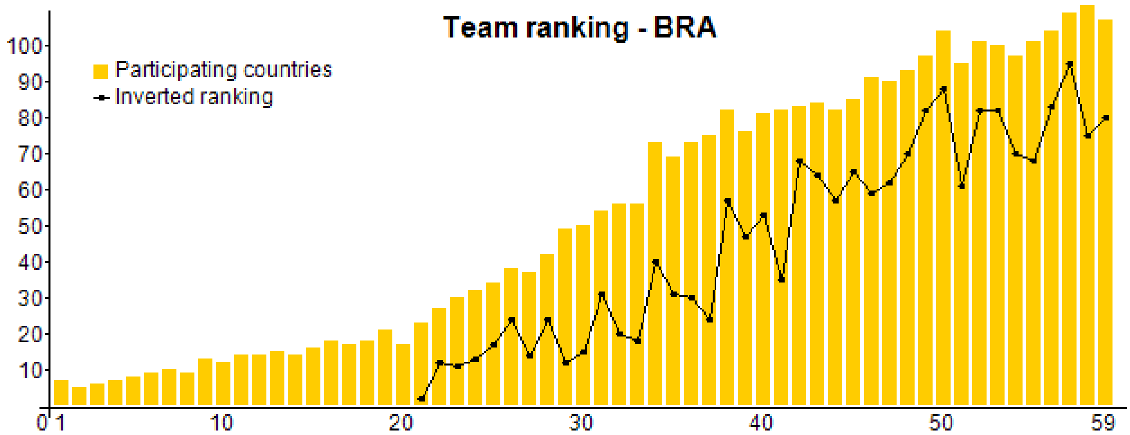
Ano	Colocação	Ouro	Prata	Bronze	Menção
1979	22	0	0	0	0
1981	16	1	0	0	0
1982	20	0	0	1	0
1983	20	0	0	3	0
1984	18	0	0	3	0
1985	15	0	0	1	0
1986	24	1	0	0	0
1987	19	1	0	2	0
1988	38	0	0	0	2
1989	36	0	0	3	0
1990	24	1	0	2	0
1991	37	0	0	1	1
1992	39	0	0	1	0
1993	34	0	0	1	2
1994	39	0	2	0	3
1995	44	1	0	0	3
1996	52	0	0	0	1
1997	26	0	1	4	1
1998	30	1	0	1	2
1999	29	0	0	4	0
2000	48	0	0	3	1
2001	16	0	4	2	0
2002	21	0	1	5	0
2003	26	0	1	3	2
2004	21	0	2	4	0
2005	33	1	0	1	2
2006	29	0	0	6	0
2007	24	0	2	3	1
2008	16	0	5	1	0
2009	17	1	3	2	0
2010	35	0	2	1	3
2011	20	0	3	2	0

2012	19	1	1	3	1
2013	28	0	3	1	2
2014	34	0	3	2	1
2015	22	0	3	3	0
2016	15	0	5	1	0
2017	37	0	2	1	2
2018	28	1	0	4	1

Tabela 3 – Desempenho do Brasil

A Figura 11 mostra a colocação do Brasil comparada com o total de participantes.

Figura 11 – Desempenho do Brasil



Fonte: (IMO, Acesso em: 02 set. 2018)

O estudante brasileiro com melhor desempenho na IMO foi Ralph Costa Teixeira, com duas medalhas de ouro (1986 e 1987), acertando todas as questões em sua totalidade em 1987. Fez Doutorado em Matemática (1998) na Universidade de Harvard e atualmente é professor do Departamento de Matemática Aplicada da Universidade Federal Fluminense (TEIXEIRA, Acesso em: 18 jun. 2018).

Entre outros, destacam-se:

- Rodrigo Sanches Angelo, com uma medalha de ouro (2012) e duas de pratas (2013 e 2014). Conseguiu sua medalha de ouro tendo apenas 16 anos de idade, em sua primeira participação na IMO.
- Henrique Pondé de Oliveira Pinto, com uma medalha de ouro (2009) e duas de prata (2007 e 2008).
- Rui Lopes Viana Filho, com uma medalha de ouro (1998) e uma de prata (1997).

- Gabriel Tavares Bujokas, com uma medalha de ouro (2005) e uma de prata (2004). Fez graduação em Matemática (2010) no MIT (Massachusetts Institute of Technology) e Doutorado em Matemática (2015) na Universidade de Harvard (BUJOKAS, Acesso em: 18 jun. 2018).

- Carlos Gustavo Tamm de Araújo Moreira, com uma medalha de ouro (1990) e uma de prata (1989). Atualmente é pesquisador titular do IMPA e membro da comissão brasileira de Olimpíadas de Matemática (IMPA, Acesso em: 21 mai. 2018).

- Nicolau Corção Saldanha, com uma medalha de ouro (1981) na sua única participação, acertando todas as questões em sua totalidade. Fez Doutorado em Matemática (1989) na Universidade de Princeton e atualmente é professor do Departamento de Matemática da PUC-Rio (SALDANHA, Acesso em: 18 jun. 2018).

Artur Ávila Cordeiro de Melo, o matemático brasileiro mais condecorado internacionalmente, participou da IMO em 1995 e obteve a medalha de ouro. Fez Doutorado em Matemática (2001) no IMPA e atualmente é pesquisador do IMPA e do CNRS (Centre National de la Recherche Scientifique) (MELO, Acesso em: 18 jun. 2018). Em 2014, Artur Ávila foi o primeiro brasileiro a ganhar a medalha Fields, maior honraria que um matemático pode receber.

1.4 RELAÇÃO ENTRE IMO E PESQUISA MATEMÁTICA

Analisando a carreira de alguns dos medalhistas, percebe-se que existe uma ligação entre a IMO e a pesquisa matemática. Muitos estudantes medalhistas da IMO tiveram carreiras de pesquisa extremamente bem sucedidas, enquanto outros acabaram por abandonar a matemática (muitas vezes passando a grande sucesso em outros campos) (SCHLEICHER; LACKMANN, 2011). Vale ressaltar as semelhança e diferenças entre pesquisa em matemática e a participação da IMO. A semelhança é que ambas estejam resolvendo problemas matemáticos, o que é bastante óbvio. Das diferenças, destacam-se (SCHLEICHER; LACKMANN, 2011):

- Os problemas de pesquisa envolvem conceitos de nível universitário, que não se encontram na IMO;

- Os problemas da IMO são feitos para serem resolvidos individualmente em um período de, em média, 90 minutos cada um. Já os problemas de pesquisa demoram muito mais que isso para serem resolvidos (na grande maioria das vezes) e necessitam muitas vezes de mais pessoas envolvidas na sua resolução;

- Um problema da IMO possui uma solução já encontrada. Já nos problemas de pesquisa não há certeza que haja uma solução em absoluto;

- Devido sua complexidade, precisa-se ter muito mais determinação numa pesquisa matemática do que num exercício da IMO;
- Dos problemas da IMO, três deles cabem facilmente em uma folha de papel, enquanto que a maioria das questões abertas de uma pesquisa matemática precisam muito mais do que isso.

A Tabela 4 mostra o desempenho de todos os vencedores da medalha Fields que competiram na IMO.

Matemático	IMO	Medalha Fields
Peter Scholze	2004 (P), 2005 (O), 2006 (O) e 2007 (O)	2018
Akshay Venkatesh	1994 (B)	2018
Artur Avila	1995 (O)	2014
Maryam Mirzakhani	1994 (O) e 1995 (O)	2014
Elon Lindenstrauss	1988 (B)	2010
Ngô Báo Châu	1988 (O) e 1989 (O)	2010
Stanislav Smirnov	1986 (O) e 1987 (O)	2010
Terence Tao	1986 (B), 1987 (P) e 1988 (O)	2006
Grigori Perelman	1982 (O)	2006 (declinada)
Laurent Lafforgue	1984 (P) e 1985 (P)	2002
William Timothy Gowers	1981 (O)	1998
Richard Borcherds	1977 (P) e 1978 (O)	1998
Jean-Christophe Yoccoz	1973 (P) e 1974 (O)	1994
Pierre-Louis Lions	1973 (sem medalha)	1994
Vladimir Drinfeld	1969 (O)	1990
Grigory Margulis	1962 (P)	1978

Tabela 4 – Desempenho de medalhistas Fields (O = Ouro, P = Prata e B = Bronze)

Ao longo da história, 16 vencedores da medalha Fields competiram na IMO, sendo que 11 deles ganharam a medalha de ouro. Pelo menos um medalhista da IMO esteve entre os vencedores da medalha Fields nas últimas 8 cerimônias (IMO, 2017).

2 PROBLEMAS RESOLVIDOS

Este capítulo mostra alguns problemas da IMO. Entre os motivos para a escolha dessa coleção, pode-se citar:

- Problemas que tratam de conceitos abordados nas avaliações nacionais do PROMAT (conhecidas como AV);
- Problemas historicamente relevantes e/ou famosos;
- Problemas mais difíceis (questões com menor média, menor quantidade de acertos ou maior quantidade de pontuações zeradas, por exemplo) da história da IMO;
- Problemas da prova realizada no Brasil em 2017.

Em uma famosa citação, o matemático Paul Erdős afirma que “Você não precisa acreditar em Deus, mas você deveria acreditar n’O Livro”, onde O Livro seria o lugar onde Deus guarda as melhores demonstrações para todos os teoremas matemáticos (AIGNER; ZIEGLER, 2017).

Embora os problemas apresentados nesse capítulo não tenham solução única, a solução apresentada busca sempre ser a mais simples e elegante possível, ou seja, “a solução d’O Livro”.

A menos que seja indicado o contrário, as soluções apresentadas encontram-se na referência (DJUKIĆ et al., 2011).

2.1 PROBLEMA 1 DE 1959

Esta é primeira questão da primeira edição da IMO. Além do seu valor histórico, esse problema foi selecionado por abordar conceitos vistos no curso de Aritmética (MA14), tanto que esse problema apareceu como a questão 2 da AV1 dessa disciplina em 2012 (PROFMAT, Acesso em: 22 ago. 2018).

Problema. Prove que a fração
$$\frac{21n+4}{14n+3}$$
é irredutível para todo número natural n.

Solução. Como
$$3 \cdot (14n+3) - 2 \cdot (21n+4) = 1,$$
o máximo divisor comum entre o numerador e o denominador é 1, ou seja, a fração não pode ser reduzida.

□

Este problema pode ser considerado fácil demais para ser selecionado como uma questão da IMO nos dias atuais.

2.2 PROBLEMA 2 DE 1964

Este problema foi selecionado por exibir conceitos vistos no curso de Matemática Discreta (MA12), tanto que um problema semelhante foi abordado na questão 5 da AV2 dessa disciplina em 2015 (PROFMAT, Acesso em: 22 ago. 2018).

Problema. Suponha que a, b e c são os lados de um triângulo. Prove que

$$a^2(b+c-a)+b^2(a+c-b)+c^2(a+b-c)\leq 3abc.$$

Solução. Fazendo as substituições $a=x+y$, $b=x+z$ e $c=y+z$, a desigualdade pode ser escrita como

$$x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y\geq 6xyz$$

ou ainda

$$\frac{x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y}{6}\geq xyz=\sqrt[6]{x^2yx^2zy^2xy^2zz^2xz^2y},$$

que é verdadeira pela desigualdade das médias aritmética e geométrica.

□

2.3 PROBLEMA 6 DE 1988

Este problema é considerado histórico e foi submetido em 1988 pela Alemanha Ocidental. Em seu famoso livro “Problem-Solving Strategies”, Arthur Engel descreveu a dificuldade do problema (ENGEL, 1998):

> Nenhum dos seis membros do comitê australiano de problemas conseguiu resolver o problema. Dois dos membros eram Georges Szekeres e sua esposa, ambos famosos por propor e resolver problemas matemáticos. Como era um problema da Teoria de Números, foi enviado para quatro australianos especialistas na área. Pediram que eles trabalhassem no problema por seis horas. Nenhum deles conseguiu resolvê-lo neste tempo. O comitê de problemas mandou a submissão para os jurados da 29^a IMO marcado com dois asteriscos, o que significava um problema super difícil, possivelmente difícil demais para concorrer. Após longa discussão, os jurados finalmente tiveram coragem de escolher o problema como o último da competição. Onze estudantes deram respostas perfeitas.

A média de pontuação dessa questão foi 0.634. Dos 268 estudantes, apenas 11 acertaram totalmente e 189 não pontuaram. Entre os onze estudantes que receberam nota máxima estavam: Ngo Bao Chau (medalha Fields de 2010), Ravi Vakil (professor de Stanford) e Zvezdelina

Stankova (professor da Mills College). Outro participante notável dessa edição foi Terence Tao, que ganhou a medalha Fields de 2014 e ainda é o mais jovem medalhista de ouro, prata e bronze, respectivamente, da história da IMO. Embora tenha vencido uma medalha de ouro em 1988 com apenas 13 anos, Tao conseguiu apenas um ponto (do máximo de sete) no problema 6 (IMO, Acesso em: 02 set. 2018).

Problema. Seja a e b números inteiros positivos tais que $ab + 1$ divida $a^2 + b^2$. Mostre que

$$\frac{a^2 + b^2}{ab + 1}$$

é o quadrado de um inteiro.

Solução. Seja

$$k = \frac{a^2 + b^2}{ab + 1}. \tag{2.1}$$

Assuma que existam inteiros positivos a e b tais que k não seja um quadrado perfeito. Para qualquer valor k fixo, seja A e B a solução que minimiza $A + B$ e, sem perda de generalidade, considere $A \geq B$. Reescrevendo (2.1) para essa solução e substituindo A pela variável x, tem-se a equação quadrática:

$$x^2 - (kB)x + (B^2 - k) = 0. \tag{2.2}$$

Uma das raízes de (2.2) é $x_1 = A$ e a outra pode ser expressa pelas fórmulas de Viète (que no Brasil são conhecidas como relações de Girard) de duas formas:

$$x_2 = kB - A \text{ e } x_2 = \frac{B^2 - k}{A}.$$

A primeira expressão mostra que x_2 é inteiro, enquanto que a segunda implica que $x_2 \neq 0$, pois k não é um quadrado perfeito. Além disso, de

$$\frac{x_2^2 + B^2}{x_2 B + 1} = k$$

tem-se que x_2 é positivo.

Finalmente, $A \geq B$ implica que

$$x_2 = \frac{B^2 - k}{A} < A$$

e portanto $x_2 + B < A + B$, o que contradiz A e B minimizarem $A + B$.

$\square$

A técnica utilizada na solução é conhecida como *Vieta jumping*. Esta técnica é relativamente nova e esse foi o primeiro problema proposto na IMO a usar essa técnica (GE, 2007).

2.4 PROBLEMA 6 DE 1995

A média de pontuação dessa questão foi 1.058. Dos 412 participantes, apenas 34 acertam totalmente e 291 não pontuaram. A solução a seguir foi proposta pelo britânico John Scholes (SCHOLES, Acesso em: 9 ago. 2018), medalhista de prata na IMO em 1968 .

Problema. Seja p um número primo ímpar. Quantos subconjuntos A de $\{1, 2, \ldots, 2p\}$ com p elementos existem tal que a soma dos elementos é divisível por p?

Solução. Seja A um subconjunto próprio de $\{1, 2, \ldots, p\}$ e $\{p + 1, p + 2, \ldots, 2p\}$. Considere os r elementos de A em $\{1, 2, \ldots, p\}$. O número r satisfaz $0 < r < p$. Podemos mudar esses elementos para outro conjunto de r elementos de $\{1, 2, \ldots, p\}$ somando 1 a cada elemento (e reduzindo $\bmod p$ se necessário). Podemos repetir esse processo e obter p conjuntos. A soma dos elementos de cada conjunto obtido é acrescido de r cada vez. Assim, como p é primo, as somas formam um conjunto completo de resíduos $\bmod p$. Em particular, eles devem ser todos distintos e, portanto, todos os conjuntos são diferentes.

Agora considere os elementos de A em $\{p + 1, \ldots, 2p\}$. Suponha que a soma dos elementos desse subconjunto seja $k \bmod p$. Podemos obter p conjuntos pelo mesmo processo descrito anteriormente e exatamente um deles somará $-k \bmod p$ para os seus elementos em $\{1, 2, \ldots, p\}$. Em outras palavras, exatamente um dos p grupos terá a soma de seus elementos divisível por p.

Existem C_p^{2p} subconjuntos de $\{1, 2, \ldots, 2p\}$ com p elementos. Excluindo $\{1, 2, \ldots, p\}$ e $\{p+1, \ldots, 2p\}$ sobram $C_p^{2p} - 2$. Acabamos de mostrar que $(C_p^{2p} - 2)/p$ desses subconjuntos tem a soma divisível por p. Os dois subconjuntos excluídos também tem a soma divisível por p, logo existem

$$\frac{C_p^{2p} - 2}{p} + 2$$

subconjuntos no total tal que a soma é divisível por p.

$\square$

Para exemplificar a solução dada, considere $p = 7$. Ou seja, quantos subconjuntos A de $\{1, 2, \ldots, 14\}$ com 7 elementos existem, tal que a soma dos elementos é divisível por 7?

Tem-se $\{1, 2, \ldots, 14\} = \{1, 2, \ldots, 7\} \cup \{8, 9, \ldots, 14\}$. Por exemplo, se

$$A = \{3, 5, 8, 10, 12, 13, 14\},$$

então os elementos de A em $\{1, 2, \ldots, 7\}$ são $\{3, 5\}$ (ou seja, $r = 2$) e pelo processo descrito obtêm-se:

$$\{3, 5\}, \{4, 6\}, \{5, 7\}, \{6, 1\}, \{7, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}.$$

Note que todos os conjuntos são diferentes, pois a soma dos elementos de cada conjunto obtido é acrescido de $r = 2$ cada vez e, como 7 é primo, as somas formam um conjunto completo de resíduos $\mod 7$.

conjunto	soma $(\mathrm{mod}\ 7)$
$\{3, 5\}$	1
$\{4, 6\}$	3
$\{5, 7\}$	5
$\{6, 1\}$	7
$\{7, 2\}$	2
$\{1, 3\}$	4
$\{2, 4\}$	6

Os elementos de A em $\{8, 9, \ldots, 14\}$ são $\{8, 10, 12, 13, 14\}$. Repetindo o processo descrito obtêm-se:

conjunto	soma $(\mathrm{mod}\ 7)$
$\{8, 10, 12, 13, 14\}$	$1 \equiv -6$
$\{9, 11, 13, 14, 8\}$	$6 \equiv -1$
$\{10, 12, 14, 8, 9\}$	$4 \equiv -3$
$\{11, 13, 8, 9, 10\}$	$2 \equiv -5$
$\{12, 14, 9, 10, 11\}$	$7 \equiv -7$
$\{13, 8, 10, 11, 12\}$	$5 \equiv -2$
$\{14, 9, 11, 12, 13\}$	$3 \equiv -4$

Para $\{3, 5\}$, somente a soma com $\{9, 11, 13, 14, 8\}$ é divisível por 7.

Existem $C_7^{14} = 3432$ subconjuntos de $\{1, 2, \ldots, 14\}$ com 7 elementos. Excluindo $\{1, 2, \ldots, 7\}$ e $\{8, \ldots, 14\}$ sobram $3432 - 2 = 3430$. Apenas $3430/7 = 490$ desses subconjuntos tem a soma divisível por 7. Os dois subconjuntos excluídos também tem a soma divisível por 7. Logo, existem $490 + 2 = 492$ subconjuntos tal que a soma de seus elementos é divisível por 7.

2.5 PROBLEMA 5 DE 1996

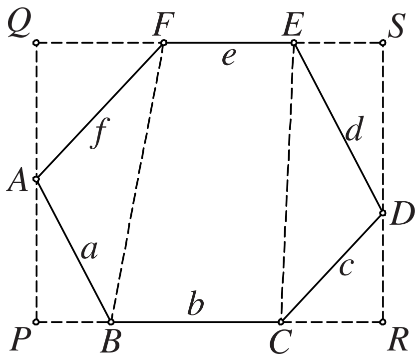
Em cada dia de competição, geralmente o primeiro problema é o mais fácil e o último é o mais difícil. Uma das poucas exceções é o problema 5 de 1996, considerado um dos mais difíceis da história, pois apenas 6 dos 424 participantes acertaram-no totalmente e a média da mesma foi 0.493 (IMO, Acesso em: 02 set. 2018).

Problema. Seja $ABCDEF$ um hexágono convexo tal que AB é paralelo a DE, BC é paralelo a EF, e CD é paralelo a AF. Sejam R_A, R_C, R_E os raios das circunferências circunscritas aos triângulos FAB, BCD, DEF respectivamente, e seja P o perímetro do hexágono. Prove que

$$R_A + R_C + R_E \geq \frac{P}{2}.$$

Solução. Sejam a, b, c, d, e e f os comprimentos dos lados AB, BC, CD, DE, EF e FA respectivamente. Note que $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ e $\angle C = \angle F$. Desenhe as linhas PQ e RS passando por A e D perpendiculares a BC e EF, respectivamente $(P, R \in BC$ e $Q, S \in EF)$, conforme a Figura 12.

Figura 12 – Problema 5 de 1996



Fonte: (DJUKIĆ et al., 2011)

Note que $BF \geq PQ = RS$ e portanto $2BF \geq PQ + RS$, ou seja:

$$\begin{aligned} 2BF &\geq (a \operatorname{sen} B + f \operatorname{sen} C) + (c \operatorname{sen} C + d \operatorname{sen} B) \text{ e similarmente} \\ 2BD &\geq (c \operatorname{sen} A + b \operatorname{sen} B) + (e \operatorname{sen} B + f \operatorname{sen} A) \text{ e} \\ 2DF &\geq (e \operatorname{sen} C + d \operatorname{sen} A) + (a \operatorname{sen} A + b \operatorname{sen} C). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Pela lei dos senos, tem-se:

$$R_A = \frac{BF}{2 \operatorname{sen} A}, \qquad R_C = \frac{BD}{2 \operatorname{sen} C}, \qquad R_E = \frac{DF}{2 \operatorname{sen} E}.$$

Substituindo (2.3), segue que:

$$\begin{aligned} R_A + R_C + R_E &\geq \frac{1}{4}a\left(\frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A} + \frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} B}\right) + \frac{1}{4}b\left(\frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} B} + \frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} C}\right) + \dots \\ &\geq \frac{1}{2}(a + b + \dots) = \frac{P}{2}, \end{aligned}$$

com igualdade ocorrendo se, e somente se, $\angle A = \angle B = \angle C = 120°$ e $FB \perp BC, \dots$, ou seja, se o hexágono for regular.

$\square$

A lei dos senos permite achar uma relação entre os raios citados no problema e algumas diagonais do hexágono, o que facilita a resolução do problema (FONTELES, 2001).

2.6 PROBLEMA 3 DE 2007

Esta questão é considerada uma das mais difíceis da história da IMO, pois apenas 2 estudantes acertaram totalmente, sendo essa a menor quantidade de acertos em uma questão na história. A média de pontuação foi 0.304, sendo que 437 dos 520 estudantes não pontuaram (IMO, Acesso em: 02 set. 2018).

Problema. Numa competição de matemática alguns competidores são amigos. Amizade é sempre mútua. Chame um grupo de competidores de *panelinha* se cada dois deles são amigos. (Em particular, qualquer grupo de menos de dois competidores é uma panelinha). O número de membros de uma panelinha é chamado seu *tamanho*.

Dado que, nesta competição, o maior tamanho de uma panelinha é par, prove que os competidores podem ser divididos em duas salas tais que o maior tamanho de panelinha em uma sala é igual ao maior tamanho de panelinha na outra sala.

Solução. Considere que a maior panelinha tenha tamanho $2n$ e coloque todos os seus membros na sala X. Chame esses estudantes de Π-estudantes. Coloque os outros na sala Y. Sejam $d(X)$ e $d(Y)$ os tamanhos das maiores panelinhas em X e Y em um dado momento. Se um estudante move-se de X para Y, então $d(X) - d(Y)$ decresce em 1 ou 2. Repetindo esse procedimento, pode-se fazer essa diferença ser 0 ou -1.

Assuma que é -1, com $d(X) = l$ e $d(Y) = l + 1$. Se a sala Y contem um Π-estudante que não pertence a uma panelinha em Y de tamanho $l + 1$, após mover esse estudante para X tem-se $d(X) = d(Y)$. Portanto, assuma que todos os $2n - l$ Π-estudantes em Y pertençam a todas as panelinhas em Y de tamanho $l + 1$. Cada uma dessas panelinhas precisa conter $2(l - n) + 1 \geq 1$ não Π-estudantes. Escolha uma panelinha arbitrária em Y de tamanho $l + 1$ e mova um não Π-estudante para X. Repita esse procedimento enquanto tiver $l + 1$ panelinhas em Y. Note que $d(X)$ permanece l depois de cada um desses movimentos. Caso contrário, considere uma panelinha de tamanho $l + 1$ em X. Todos os seus membros iriam conhecer todos os $2n - l$ Π-estudantes em Y. Juntos eles formariam uma panelinha de tamanho $2n+1$, o que é impossível. Portanto, chega-se na configuração $d(X) = d(Y) = l$.

$\square$

A ideia é mover os estudantes um de cada vez de um quarto para o outro e vice-versa até obter o resultado desejado. Note que quase nenhum conhecimento técnico é necessário.

2.7 PROBLEMA 6 DE 2007

Esta questão é considerada uma das mais difíceis da história da IMO, pois possui a menor média de pontuação (0.152) até esse ano. Dos 520 estudantes, apenas 5 acertaram totalmente e 473 não pontuaram (IMO, Acesso em: 02 set. 2018). A solução a seguir foi proposta por Peter Scholze, vencedor da medalha Fields em 2018 e um dos cinco estudantes que acertaram a questão em 2007 (SCHLEICHER; LACKMANN, 2011).

Problema. Seja n um inteiro positivo. Considere

$$S = \{(x, y, z) : x, y, z \in \{0, 1, \ldots, n\}, x + y + z > 0\}$$

como um conjunto de $(n+1)^3 - 1$ pontos no espaço tridimensional. Determine o menor número possível de planos cuja união contêm S, mas não inclui $(0, 0, 0)$.

Solução. Note que para os problemas análogos em dimensão 1 e 2 as respostas parecem ser n e $2n$, respectivamente. Por analogia, espera-se que a resposta para o problema proposto seja $3n$. De fato, uma coleção com $3n$ planos é suficiente: $x = k$, $y = k$ e $z = k$, para $k = 1, \ldots, n$ atendem ao enunciado. Suponha que existam $m < 3n$ planos que passam por S, mas não pela origem. Esses planos podem ser escritos como m equações lineares nas variáveis x, y e z:

$$a_i x + b_i y + c_i z + d_i = 0 \qquad (d_i \neq 0, 1 \leq i \leq m).$$

Multiplicando todas essas equações, obtemos o polinômio

$$P(x, y, z) = \prod_{i=1}^{m} (a_i x + b_i y + c_i z + d_i)$$

de grau m, que é zero em S e diferente de zero na origem.

Defina agora o operador Δ_x, que substitui um polinômio Q pelo polinômio $\Delta_x Q$, onde

$$\Delta_x Q(x, y, z) = Q(x + 1, y, z) - Q(x, y, z)$$

e, analogamente, para os operadores Δ_y e Δ_z (essas são versões discretas do operador derivada). Note que cada um desses operadores diminuem o grau de um polinômio em pelo menos 1 (defina o polinômio nulo como tendo grau $-\infty$).

Ao repetir a aplicação desses três operadores no polinômio P, percebe-se por indução que $\Delta_x^r \Delta_y^s \Delta_z^t P(0, 0, 0)$ nunca é zero para $r, s, t \leq n$ e, em particular, que $\Delta_x^n \Delta_y^n \Delta_z^n P(0, 0, 0) \neq 0$. Mas, isso contradiz o fato de que o polinômio $\Delta_x^n \Delta_y^n \Delta_z^n P$ tem grau no máximo $m - 3n < 0$, logo precisa ser o polinômio nulo.

Logo, a quantidade mínima de planos é $3n$.

$\square$

Note que, embora o problema pareça ser de combinatória, a solução é obtida através de um método algébrico (SCHLEICHER; LACKMANN, 2011).

2.8 PROBLEMA 1 DE 2017

Esta questão é considerada a mais fácil da IMO 2017, por possuir maior média de pontuação (5.943). Dos 615 participantes desse ano, 446 acertaram em sua totalidade e apenas 40 pessoas não pontuaram nada nesta questão (IMO, Acesso em: 02 set. 2018). A solução a seguir foi proposta por Hadyn Tang, que apenas acertou esta questão em sua totalidade, ficando assim apenas com a menção honrosa (PASQUALE; DO; MCAVANEY, 2018).

Problema. Para cada inteiro $a_0 > 1$, define-se a sequência $a_0, a_1, a_2, ...$ tal que, para cada $n \geq 0$:

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n}, & \text{se } \sqrt{a_n} \text{ é inteiro,} \\ a_n + 3, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Determine todos os valores de a_0 para os quais existe um número A tal que $a_n = A$ para infinitos valores de n.

Solução. Todos os inteiros positivos n que são múltiplos de 3.

<u>Caso 1:</u> $a_0 \equiv 0 \bmod 3$

Claramente todos os termos da sequência são múltiplos de 3. Seja a_i o termo da sequência com valor mínimo.

Suponha por contradição que $a_i > 9$. Seja $x \geq 1$ para o maior inteiro tal que $3^{2^x} < a_i$. A sequência $a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots$ é formada acrescentando 3 a cada vez até que chegue num quadrado perfeito a_j. Observe que a_j não pode exceder $3^{2^{x+1}}$ porque $3^{2^{x+1}}$ é um quadrado perfeito que é múltiplo de 3. Segue que

$$a_{j+1} = \sqrt{a_j} \leq \sqrt{3^{2^{x+1}}} = 3^{2^x} < a_i,$$

o que contradiz a minimalidade de a_i.

Consequentemente, $a_i \leq 9$. Segue que a sequência entra no ciclo

$$3 \rightarrow 6 \rightarrow 9 \rightarrow 3 \rightarrow 6 \rightarrow 9 \rightarrow \ldots$$

que contém o número 3 uma quantidade infinita de vezes.

<u>Caso 2:</u> $a_0 \equiv 2 \bmod 3$

Como nenhum quadrado perfeito é congruente a 2 módulo 3, segue por indução que $a_{n+1} = a_n + 3$ para todos os inteiros não negativos n. Como a sequência é estritamente crescente, não pode conter o mesmo valor uma quantidade infinita de vezes.

<u>Caso 3:</u> $a_0 \equiv 1 \bmod 3$

Claramente, nenhum desses termos é múltiplo de 3.

Se $a_i \equiv 2 \bmod 3$ para algum inteiro positivo i, então por um argumento similar ao caso 2, a sequência não pode conter o mesmo valor uma quantidade infinita de vezes.

Resta discutir o caso que $a_n \equiv 1 \bmod 3$ para todos os inteiros não negativos n. Seja a_i o termo da sequência de menor valor.

Suponha, por contradição, que $a_i > 16$. Seja $x \geq 1$ o maior inteiro tal que $2^{2^x} < a_i$. A sequência $a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots$ é formada adicionando 3 a cada vez até que chegue num quadrado perfeito a_j. Note que a_j não pode exceder $2^{2^{x+1}}$ porque $2^{2^{x+1}}$ também é um quadrado perfeito que é congruente a 1 módulo 3. Segue que

$$a_{j+1} = \sqrt{a_j} \leq \sqrt{2^{2^{x+1}}} = 2^{2^x} < a_i,$$

o que contradiz a minimalidade de a_i.

Consequentemente, $a_i \leq 16$. É fácil ver, indutivamente, que $a_0 > 1$ implica $a_n > 1$ para todo inteiro positivo n. E como

$$7 \to 10 \to 13 \to 16 \to 4 \to 2,$$

percebe-se que qualquer sequência desse tipo eventualmente acaba no número 2, que não é congruente a 1 módulo 3. Essa contradição final conclui a prova.

$\square$

A contradição final do caso 3 pode levar a pensar que se $a_0 \equiv 1 \bmod 3$, então a sequência resultante sempre contém o número 2. Mas isso não decorre da argumentação acima. Ao invés disso, a contradição final mostra apenas que é impossível ter $a_i \equiv 1 \bmod 3$ para todos os inteiros não negativos i. Por exemplo, se $a_0 \equiv 19$, então $a_1 = 22$, $a_2 = 25$ e $a_3 = 5 \equiv 2 \bmod 3$.

2.9 PROBLEMA 3 DE 2017

Esta questão é considerada a mais difícil da história da IMO, pois possui a menor média de pontuação (0.042) da história, batendo o recorde anterior da questão 6 de 2007 (0.304). Apenas 2 estudantes acertaram totalmente, a menor quantidade de acertos em uma questão na história. Além disso, 608 dos 615 estudantes não pontuaram, a maior quantidade de zeros em uma questão na história (IMO, Acesso em: 02 set. 2018). A solução a seguir foi proposta por Linus Cooper, medalhista de prata na IMO em 2017 e um dos dois estudantes que acertaram a questão em 2017 (PASQUALE; DO; MCAVANEY, 2018).

Problema. Um coelho invisível e um caçador jogam da seguinte forma no plano euclidiano. O ponto de partida A_0 do coelho e o ponto de partida B_0 do caçador são iguais. Depois de $n-1$ rodadas do jogo, o coelho encontra-se no ponto A_{n-1} e o caçador encontra-se no ponto B_{n-1}. Na n-ésima rodada do jogo, ocorrem três coisas na seguinte ordem:

(i) O coelho move-se de forma invisível para um ponto A_n tal que a distância entre A_{n-1} e A_n é exatamente 1.

(ii) Um aparelho de localização informa um ponto P_n ao caçador. A única informação garantida pelo aparelho ao caçador é que a distância entre P_n e A_n é menor ou igual a 1.

(iii) O caçador move-se de forma visível para um ponto B_n tal que a distância entre B_{n-1} e B_n é exatamente 1.

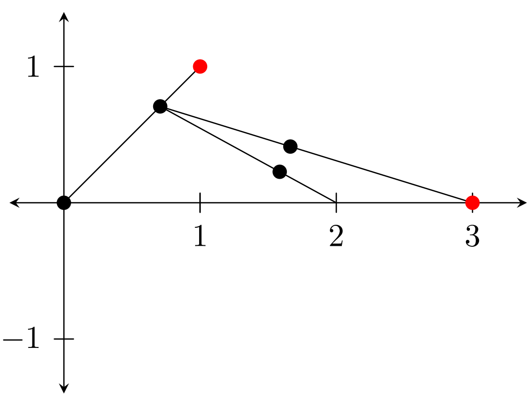
É sempre possível que, qualquer que seja a maneira em que se mova o coelho e quaisquer que sejam os pontos informados pelo aparelho de localização, o caçador possa escolher os seus movimentos de modo que depois de 10^9 rodadas o caçador possa garantir que a distância entre ele e o coelho seja menor ou igual que 100?

Discussão. Chame o ponto fornecido pelo aparelho de localização de *ping*. Parte da dificuldade do problema é pensar que, sendo o coelho invisível, a melhor estratégia para o caçador é seguir o ping a cada movimento. Porém, isso está errado, como mostra o exemplo concreto a seguir.

Sem perda de generalidade, assuma inicialmente que tanto o coelho quanto o caçador estão na origem do plano cartesiano. Suponha que o primeiro ping seja em $(1, 1)$. Ao seguir o ping, o caçador chega a $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ em seu primeiro movimento.

Suponha que o segundo ping seja em $(3, 0)$. Então, é obvio que o único lugar que o coelho pode estar depois do seu segundo movimento é $(2, 0)$ e o caçador é capaz de deduzir isso. Portanto, a melhor estratégia para o caçador no seu segundo movimento não é seguir o ping e se mover em direção à $(3, 0)$, mas sim seguir o coelho movendo-se para $(2, 0)$ porque ele sabe onde o coelho está, conforme Figura 13.

Figura 13 – Discussão



Fonte: (PASQUALE; DO; MCAVANEY, 2018)

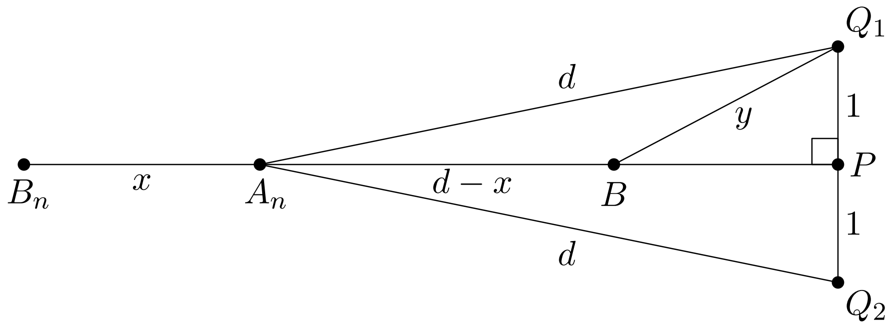
O cenário descrito só ocorre pois o segundo ping torna possível determinar a localização exata do coelho. Mas, se o segundo ping estivesse em $(2, 99; 0)$, o caçador não poderia determinar a posição exata do coelho. Entretanto, o caçador ainda poderia deduzir que o coelho está muito mais perto de $(2, 0)$ do que de $(2, 99; 0)$. Portanto, mesmo no caso onde a localização exata do coelho não é conhecida, o caçador pode deduzir a localização do coelho e perceber que seguir o ping não é necessariamente a melhor estratégia.

A falha em assumir que seguir o ping é a melhor estratégia para o caçador é assumir que o caçador tem algum tipo de amnésia e não lembra das informações anteriores do ping. Se o caçador tivesse tal amnésia, então seguir o ping seria sua melhor estratégia. No entanto, não se pode assumir isso. Consequentemente, qualquer tentativa de solução que implicitamente assumiu que o caçador tinha tal amnésia não foi considerada na correção.

Solução. Será provado que não existe estratégia para o caçador que garanta que a distância entre ele e o coelho seja menor ou igual a 100 depois de 10^9 rodadas.

A chave do problema é considerar o cenário ilustrado na Figura 14. Lembre-se que A_n e B_n são as posições do coelho e do caçador, respectivamente, depois de n rodadas. Sejam l a linha B_nA_n e x a distância entre B_n e A_n. Os pontos Q_1 e Q_2 distam 1 da linha l e distam d do ponto A_n, em que $d > x$ é inteiro positivo que será escolhido depois.

Figura 14 – Solução



Fonte: (PASQUALE; DO; MCAVANEY, 2018)

Imagine que o coelho lance uma moeda em A_n. Se for cara, o coelho segue para Q_1 nas próximas d rodadas. Se for coroa, o coelho segue para Q_2 nas próximas d rodadas. Suponha ainda que, a cada rodada, o aparelho de localização forneça o ping na linha l, no pé da perpendicular baixada a partir da localização do coelho. Note que esses pontos são compatíveis com caminho do coelho, independentemente se o coelho está indo para Q_1 ou Q_2.

Desviando a atenção para o caçador, uma possibilidade é se mover uma unidade para a direita ao longo de l por rodada. Isso o colocaria no ponto B, que dista d de B_n. Nesse caso, depois de d rodadas a distância entre o caçador e o coelho seria $y = BQ_1 = BQ_2$. Note que se o caçador fizer qualquer outra coisa, ele vai acabar estritamente à esquerda de B. Se ele terminar acima de l, então a distância entre ele e Q_2 seria maior que y. Se ele acabar abaixo de l, a distância entre ele e Q_1 seria maior do que y. Então, nenhuma escolha do caçador pode garantir que a distância entre ele e o coelho seja menor que y depois de d rodadas.

Será calculado um limite inferior para y. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo

A_nPQ_1, tem-se que $AP = \sqrt{d^2-1}$. Portanto, $BP = \sqrt{d^2-1} - (d-x)$. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo BPQ_1, tem-se

$$\begin{aligned} y^2 &= 1^2 + (x + \sqrt{d^2-1} - d)^2 \\ &= x^2 + 2d^2 - 2d\sqrt{d^2-1} - 2x(d - \sqrt{d^2-1}) \\ &= x^2 + 2(d-x)(d - \sqrt{d^2-1}) \\ &= x^2 + \frac{2(d-x)}{d+\sqrt{d^2-1}} \\ &> x^2 + \frac{2(d-x)}{d+\sqrt{d^2}} \\ &= x^2 + 1 - \frac{x}{d}. \end{aligned}$$

Escolhendo $d = 2\lceil x \rceil$, onde $\lceil x \rceil$ é o menor inteiro maior ou igual a x, tem-se

$$y^2 > x^2 + \frac{1}{2}.$$

Mas, para $x \geq 1$, tem-se

$$x^2 + \frac{1}{2} > \left(x + \frac{1}{5x}\right)^2.$$

Portanto,

$$y > x + \frac{1}{5x}.$$

Para resumir, foi demonstrado o seguinte lema.

Lema: Se, em alguma etapa, a distância entre o caçador e o coelho é $x > 1$, então, depois de mais $2\lceil x \rceil$ rodadas, a distância entre o caçador e o coelho potencialmente excede $x + \frac{1}{5x}$.

Para clarificar a terminologia, dizer que a distância entre o caçador e o coelho potencialmente excede algo significa dizer que o caçador não pode garantir que a distância entre ele e o coelho é menor do que esse algo.

Chame um conjunto de movimentos do lema que o coelho pode fazer de *swoop* se a distância entre o caçador e o coelho potencialmente excede $x + \frac{1}{5x}$.

Será usado o lema e o conceito de swoop para terminar o problema.

Para começar, note que, depois de uma rodada, a distância entre o caçador e o coelho é potencialmente igual a 2. Isso ocorre porque o aparelho de localização pode simplesmente mostrar a posição inicial do coelho e do caçador, o que não dá nova informação para o caçador. Então, seja qual for a direção que o caçador se move na rodada 1, o coelho pode ir para a direção oposta.

Em seguida, suponha que, depois de algumas rodadas, a distância entre o caçador e o coelho é de pelo menos $x \geq 2$. Seja $n = \lfloor x \rfloor$, onde $\lfloor x \rfloor$ é o maior inteiro menor ou igual a x. Será mostrado a afirmação que, depois de mais $10(n+1)^2$ rodadas, a distância potencial entre o caçador e o coelho é pelo menos $n+1$.

Assuma, por contradição, que esse não é o caso. Pelo lema, cada swoop potencialmente aumenta a distância entre o caçador e o coelho em mais de $\frac{1}{5(n+1)}$. Assim, depois de, no máximo $5(n+1)$ swoops, a distância entre o caçador e o coelho é potencialmente aumentada em mais de 1 e, portanto, é potencialmente, pelo menos, $n+1$. Como cada swoop precisa de não mais do que $2(n+1)$ rodadas, um total de no máximo $2(n+1) \times 5(n+1) = 10(n+1)^2$ rodadas foram usadas no processo. Isso contradiz a afirmação.

Com essa afirmação pode-se calcular um limite superior U para o número de rodadas necessárias para garantir que a distância entre o caçador e o coelho é potencialmente pelo menos 101. Isso é dado por

$$\begin{aligned} U &\leq 1 + 10 \cdot 3^2 + 10 \cdot 4^2 + \cdots + 10 \cdot 101^2 \\ &\ll 10 \cdot 100 \cdot 101^2 \\ &\ll 10^9. \end{aligned}$$

Logo, a distância entre o caçador e o coelho potencialmente excede 100 em bem menos de 10^9 rodadas. Quando isso ocorrer, o coelho poderia simplesmente pular diretamente longe do caçador até que as 10^9 rodadas tenham ocorrido. Desta forma, o caçador não pode garantir que a distância entre ele e o coelho seja menor que 100.

$\square$

O número 100 dado no problema está longe de ser preciso. Tomando um pouco mais de cuidado na conta final acima mostraria que depois de 10^9 rodadas a distância entre o coelho e o caçador é potencialmente de 668.

2.10 PROBLEMA 4 DE 2017

Esta questão é considerada a segunda mais fácil da IMO de 2017, obtendo a média de pontuação de 5.029 (IMO, Acesso em: 02 set. 2018). A solução apresentada a seguir é baseada nas soluções de Matthew Cheah e de William Hu, medalhistas de prata e bronze respectivamente (PASQUALE; DO; MCAVANEY, 2018).

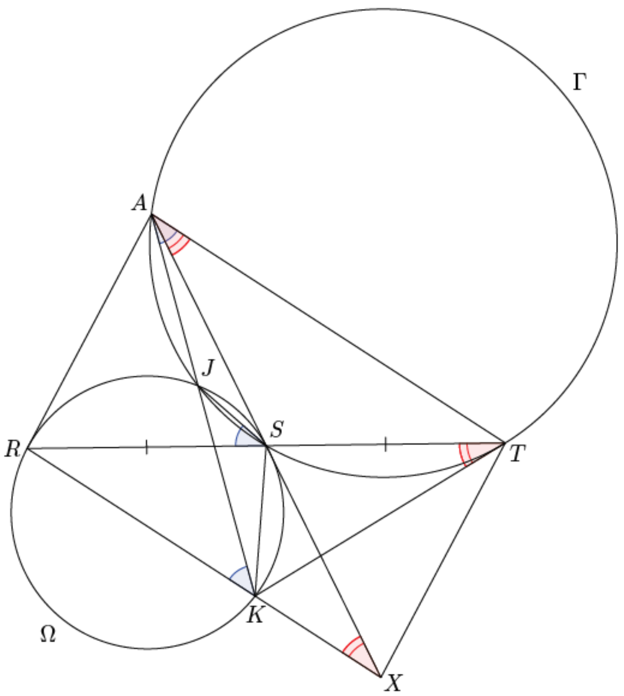
Problema. Sejam R e S pontos distintos sobre a circunferência Ω tais que RS não é um diâmetro de Ω. Seja l a reta tangente a Ω em R. O ponto T é tal que S é o ponto médio do segmento RT. Escolhe-se o ponto J no menor arco RS de Ω de maneira que Γ, a circunferência circunscrita ao triângulo JST, intercepta l em dois pontos distintos. Seja A o ponto comum de Γ

e l mais próximo de R. A reta AJ intercepta pela segunda vez Ω em K. Demonstre que a reta KT é tangente a Γ.

Solução. Dos quadriláteros inscritíveis numa circunferência $RKSJ$ e $STAJ$ tem-se que

$$\angle JKR = \angle JSR = \angle JAT$$

Figura 15 – Solução



Fonte: (PASQUALE; DO; MCAVANEY, 2018)

Como A, J e K são colineares, segue que $RK//AT$.

Uma vez que $RX//AT$ e S é o ponto médio de RT, segue que $RXTA$ é um paralelogramo.

A partir do paralelogramo $RXTA$ e usando o teorema do segmento do círculo Ω e a linha AR, tem-se que

$$\angle SKR = \angle SRA = \angle XTS$$

Consequentemente, o quadrilátero $KXTS$ é inscritível na circunferência. Isso junto com o paralelogramo $RXTA$ implica que

$$\angle STK = \angle SXK = \angle SAT$$

Assim sendo, pelo teorema do segmento, KT é tangente a Γ em T.

□

2.11 PROBLEMA 5 DE 2017

Esta questão possui média de 0.969 dentre os participantes, dentre os quais 451 erraram esta questão na totalidade e apenas 59 acertaram-na integralmente (IMO, Acesso em: 02 set. 2018). Esta resolução foi desenvolvida por Matthew Cheah e, como citado na questão anterior, foi medalhista de prata na IMO de 2017 (PASQUALE; DO; MCAVANEY, 2018).

Problema. Seja $N \geq 2$ um inteiro dado. Um conjunto de $N(N+1)$ jogadores de futebol, todos de diferentes alturas, são colocados em fila. O treinador deseja retirar $N(N-1)$ jogadores desta fila, de modo que a fila que sobra formada pelos $2N$ jogadores restantes satisfaça as N condições seguintes:

(1) Não resta ninguém entre os dois jogadores mais altos

(2) Não resta ninguém entre o terceiro jogador mais alto e o quarto jogador mais alto.

$\vdots$

(N) Não resta ninguém entre os dois jogadores mais baixos.

Demonstre que isso é sempre possível.

Solução. Considere camisetas de n cores diferentes distribuídas entre os jogadores da seguinte forma: os $(n+1)$ menores jogadores vestem a cor 1, os $(n+1)$ segundos menores jogadores vestem a cor 2, assim até os $(n+1)$ mais altos jogadores que usam a cor n. Basta mostrar ser possível remover $n(n-1)$ jogadores tal que cada cor das camisetas é representada duas vezes entre os restantes dos $2n$ jogadores, e tal que não tenha nenhum jogador entre dois jogadores que usam a mesma cor de camisetas.

A prova é apresentada junto com um exemplo que ilustra o que está acontecendo em cada etapa. O exemplo é o caso $n = 4$, onde as cores das camisetas da esquerda para a direita são a seguinte:

$$4\ 2\ 1\ 2\ 3\ 2\ 4\ 3\ 1\ 1\ 4\ 1\ 3\ 2\ 3\ 4\ 4\ 1\ 2\ 3$$

Começa-se analisando da esquerda para à direita até identificar-se duas camisetas da mesma cor pela primeira vez. Note que isso vai acontecer nos primeiros $(n+1)$ jogadores, pelo princípio da casa dos pombos. Suponha que a cor X seja a primeira a ocorrer duas vezes. No exemplo, $X = 2$. Remova cada jogador à esquerda do segundo X que não está vestindo a cor X das camisetas. No exemplo, isso produz o seguinte:

$$\cancel{4}\ \underline{2}\ \cancel{1}\ \underline{2}\ 3\ 2\ 4\ 3\ 1\ 1\ 4\ 1\ 3\ 2\ 3\ 4\ 4\ 1\ 2\ 3$$

A seguir, remova todas as ocorrências de X que estão à direita do segundo X. No exemplo, isso produz o seguinte:

$$2\ 2\ 3\ \cancel{2}\ 4\ 3\ 1\ 1\ 4\ 1\ 3\ \cancel{2}\ 3\ 4\ 4\ 1\ \cancel{2}\ 3$$

Observe que a cor X agora ocorre exatamente duas vezes, e que os dois X se mantém a esquerda de todos os jogadores restante na fila. Além disso, as demais cores ocorrem nesse momento n ou $(n+1)$ vezes.

A seguir, para as cores diferente de X que ocorrem $(n+1)$ vezes, remova uma ocorrência dessa aleatoriamente. No exemplo, somente um número 3 precisa ser removido. Escolhendo um 3 aleatoriamente produz-se o seguinte:

$$2\ 2\ 3\ 4\ \cancel{3}\ 1\ 1\ 4\ 1\ 3\ 3\ 4\ 4\ 1\ 3$$

Nesse momento, tem-se XX seguido por um grupo G de $n(n-1)$ jogadores. Note que em G, existem $(n-1)$ cores diferentes de camisetas, cada uma ocorrendo n vezes. Isso mostra que o caso com n cores diferentes de camisetas onde cada cor ocorre $n+1$ vezes ser verdadeiro implica, por indução, que o caso com $n-1$ cores diferentes de camisetas onde cada cor ocorre n vezes também é verdadeiro. Para completar a prova por indução, basta provar a veracidade do caso $n=1$, que é trivial.

$\square$

3 CONCLUSÃO

O objetivo deste trabalho é a divulgação da Olimpíada Internacional de Matemática (IMO). Alunos e professores podem adquirir mais conhecimentos dessa olimpíada e se aperfeiçoarem na Matemática com os problemas expostos. A presente dissertação atinge esse objetivo, esclarecendo diversas questões sobre essa Olimpíada e servindo como material de consulta sobre diversos pontos da mesma.

O trabalho retrata a história da IMO, sua importância frente a disseminação da Matemática, o desempenho do Brasil e outros países participantes, bem como o desempenho individual de alguns brasileiros medalhistas. Além disso, mostra vários exemplos de resolução de problemas da IMO, mostrando a diversidade das soluções. As resoluções foram escolhidas de modo que fossem as mais elegantes possíveis - as soluções d'O Livro, parafraseando Paul Erdős. Vale observar que os problemas mais difíceis nem sempre são os mais interessantes ou com a matemática mais difícil, mas muitas vezes com o enunciado mais confuso para modelar.

Para terminar, cabe destacar algumas dificuldades na elaboração dessa dissertação. Uma delas é no que se refere ao LaTeX, primeira vez que o utilizei e muitas dúvidas me surgiram no decorrer da escrita deste trabalho, sendo que muitas delas foram sanadas pelo meu orientador. Outra dificuldade, na escrita dos textos, foi que precisei de auxílio para elaborar um material com nível requerido de Mestrado. Outra grande dificuldade foi na resolução de questões da IMO, pois muitas questões são bem difíceis e precisei de muito tempo para entendê-las e para procurar as melhores soluções possíveis para cada questão aqui exposta.

Por tudo isso, o PROFMAT foi muito importante para mim, fazendo com que eu me tornasse alguém mais capacitado na função de Professor. Adquiri mais conhecimento, superei meus limites e me tornei mais seguro em sala de aula, com um entendimento da Matemática maior do que tinha anteriormente.

REFERÊNCIAS

AIGNER, M.; ZIEGLER, G. **Paul Erdős: as mais belas demonstrações matemáticas**. 5. ed. São Paulo: Blucher, 2017. ISBN 978-85-212-1005-4.

ALVES, W. J. S. **O impacto da olimpíada de matemática em alunos da escola pública**. Dissertação (PROFMAT) — PUC/SP, 2010.

BAGATINI, A. **Olimpíadas de Matemática, Altas Habilidades e Resolução de Problemas**. Monografia (Licenciatura em Matemática) — UFRGS/Porto Alegre, 2010.

BUJOKAS, G. T. **Currículo Lattes**. Acesso em: 18 jun. 2018. Disponível em: <http://buscatextual.cnpq.br/buscatextual/visualizacv.do?id=K8741162T1>.

DJUKIĆ, D. et al. **The IMO Compendium: A Collection of Problems Suggested for The International Mathematical Olympiads: 1959-2009**. 2. ed. [S.l.]: Springer New York, 2011. (Problem Books in Mathematics). ISBN 978-1-4419-9853-8.

ENGEL, A. **Problem-Solving Strategies**. [S.l.]: Springer-Verlag New York, 1998. (Problem Books in Mathematics). ISBN 978-0-387-98219-9.

FONTELES, R. T. Trigonometria e desigualdades em problemas de olimpíadas. **EUREKA!**, n. 11, 2001.

GE, Y. The method of Vieta jumping. **Mathematical Reflections**, n. 5, 2007.

IMO. IMO = Springboard for Field medals. **IMO News Magazine**, 2017.

IMO. **International Mathematical Olympiad**. Acesso em: 02 set. 2018. Disponível em: <https://www.imo-official.org/>.

IMPA. **Carlos Gustavo Tamm de Araújo Moreira (Gugu)**. Acesso em: 21 mai. 2018. Disponível em: <http://w3.impa.br/~gugu/>.

MELO, A. A. C. de. **Currículo Lattes**. Acesso em: 18 jun. 2018. Disponível em: <http://buscatextual.cnpq.br/buscatextual/visualizacv.do?id=K4794781E6>.

OBM. **Processo de seleção para formação das equipes internacionais**. 2017, Acesso em: 30 dez. 2017. Disponível em: <http://www.obm.org.br/opencms/competicoes/internacionais/selecao_internacional.html>.

OBMEP. **Dos objetivos**. 2018, Acesso em: 12 jun. 2018. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/regulamento.htm>.

OBMEP. **PICME (Programa de Iniciação Científica e Mestrado)**. Acesso em: 27 mai. 2018. Disponível em: <http://picme.obmep.org.br/index/sobre>.

PASQUALE, A. D.; DO, N.; MCAVANEY, K. L. **Mathematics Contests: The Australian Scene 2017**. [S.l.]: AMT Publishing - Australian Mathematics Trust, 2018.

PROFMAT. **Provas Nacionais**. Acesso em: 22 ago. 2018. Disponível em: <www.profmat-sbm.org.br/provas-nacionais/>.

SALDANHA, N. C. **Currículo Lattes**. Acesso em: 18 jun. 2018. Disponível em: <http://buscatextual.cnpq.br/buscatextual/visualizacv.do?id=K4780058D7>.

SBM. Apresentação. **EUREKA!**, n. 1, 1998.

SBM. **Biênio da Matemática no Brasil**. Acesso em: 19 out. 2018. Disponível em: <https://www.bieniodamatematica.org.br/>.

SCHLEICHER, D.; LACKMANN, M. **An Invitation to Mathematics: From Competitions to Research**. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 2011. ISBN 978-3-642-19532-7.

SCHOLES, J. **Maths problems**. Acesso em: 9 ago. 2018. Disponível em: <https://mks.mff.cuni.cz/kalva/index2.html>.

SHINE, C. Y. **21 Aulas de Matemática Olímpica**. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2009. ISBN 978-85-85818-39-5.

TEIXEIRA, R. C. **Currículo Lattes**. Acesso em: 18 jun. 2018. Disponível em: <http://buscatextual.cnpq.br/buscatextual/visualizacv.do?id=K4782546P6>.