A MATEMÁTICA E SUAS CONCEPÇÕES
Considerações Basilares sobre os Fundamentos da Matemática

Carlos Magno Corrêa Dias *

Dada a complexidade e o caráter plurifacetado das estruturas do pensamento que fundamentam o raciocínio matemático, é um lugar comum e um preceito notório considerar que a matemática seja um processo condicionante penoso, necessário, tão somente, para desnortear e/ou reprimir os indivíduos que, por motivos dos mais variados, se vejam "obrigados" a manejá-la; o que, certamente, antes mesmo de quaisquer ponderações atinentes aos diferentes aspectos e às múltiplas dimensões, constitui uma visão em demasia desconexa e equivocada.

O que se observa, com infeliz constância e exacerbada preocupação, é tanto a falta de incentivo, condições e motivação necessários para levar avante o efetivo e eficaz desenvolvimento de métodos e técnicas que venham consolidar a exuberância, o fascínio e a grandeza da matemática; quanto a carência de desafio (valor) intelectual que caracterizam, em grande parte, os sistemas de disseminação cabal dos conteúdos afetos, direta ou indiretamente, às ciências matemáticas. Porquanto, preconceber que o fracasso dos indivíduos em matemática se deve, única e exclusivamente, aos próprios aprendizes, os quais não rezam os "sacrifícios" do conhecimento, é, a bem da verdade, pretender advogar como justificativa insólita que o domínio ou manuseio da matemática é patente particular de gênios sobrenaturais.

Deve-se, porém, reconhecer que o labor matemático, que a investigação científica a respeito dos pressupostos inseridos no conhecimento matemático, correspondem a um caminho árduo e complexo; onde a perseverança, empenho e dedicação devem conduzir a tônica de quaisquer investigações ou intenções, dada a gênese dos fundamentos e as questões delimitadoras do que venha configurar, essencial e categoricamente, a ciência matemática. Por outro lado, transpondo as dificuldades decorrentes do estudo pormenorizado e consciente desta ciência, deve-se encará-la como o ideal do conhecimento e a ela dedicar-se com esmerado comprometimento e com resignada humildade, desde que se professe pretender compreendê-la para, posteriormente, difundi-la.

O espírito de justiça, por outro prisma, obriga mencionar que as falhas constatadas, vivenciadas na evolução dos meios de se difundir a matemática, não se devem, apenas, ao aspecto da competência ou não dos profissionais envolvidos e, nem tão pouco, da insensatez e obscuridade promulgada pelo pedantismo oriundo da detenção do conhecimento; mas, essencial ou predominantemente, tem suas desconcertantes origens na conjuntura científica do país. Pois, é verificado, ao longo do processo histórico, que muitos daqueles que manuseiam entidades matemáticas relegam a um segundo plano, ou mesmo abandonam completamente os estudos sobre os fundamentos e as questões norteadoras que regem a ciência em questão.

Ora, se as considerações fundamentais sobre a filosofia da matemática, sobre as questões do fundamento *a priori – a posteriori* (sobre a gênese da matemática) e outros problemas relacionados ao porque da matemática não assumem a devida importância, como poderá o não cientista desenvolver-se em um mundo abstrato e formal que solicita investigações aprofundadas e periódicas, que, ele próprio, desconhece e/ou renega? E a este tempo saliente-se que o primeiro passo, a primeira intenção necessária, o requisito imprescindível para bem ensinar matemática (ou quaisquer aspectos relacionados com esta) é ter plena consciência de que a matemática é

* Professor de Lógica Matemática, de Lógica Computacional, de Fundamentos de Matemática e de Cálculo Diferencial e Integral do Departamento de Matemática e Física da Pontifícia Universidade Católica do Paraná.

um desenvolvimento cumulativo, sendo praticamente impossível aprender e ensinar as mais novas criações se se desconhecem os fundamentos que lhe dão origem. *(Post hoc, ergo propter hoc).*

O matemático e/ou qualquer estudioso de matemática deve, a despeito de quaisquer atos ou pensamentos preconceituosos, discernir sobre a validade dos elementos concernentes à fundamentação racional (analítico-racional) de seus trabalhos e, sobretudo, que existem propriedades fundamentais (convergentes) entre as concepções *a priori e a posteriori* de seus fundamentos.

Muito embora as gerações atuais têm diante de si um mundo, em sua quase totalidade, "pensado"; um mundo, em essência, "interpretado", estas mesmas gerações não podem anular-se ou atuar passivamente diante do mundo "estabelecido" por gerações anteriores. E, em matemática, principalmente, nada deve ser aceito sem o devido questionamento ou, antes, sem a devida compreensão. Porquanto, o grande mérito, a divina qualidade do homem, ser que "pensa e conhece", reside na constante busca da verdade. Em paralelo, acrescente-se que em matemática cada geração posterior constrói um novo andar no edifício do conhecimento; devido, exatamente, a esta procura constante da ordem (da verdade em si mesma).

Assim, reproduzir, mecânica e desmotivadamente, os compêndios de matemática inscritos em textos poucos originais é, antes de qualquer estudo pormenorizado, uma falta virtual de compreensão daquilo que se pretende difundir. Constata-se, contudo, que tanto professores quanto alunos, em muitas das vezes, não experimentam o desafio emergente do estudo da matemática; sendo exatamente esta falta de desafio que corrobora a aversão, o pavor ou, no melhor dos casos, a indiferença para com a matemática difundida pelos currículos atuais.

Condicionalmente, há de se salientar que o problema da natureza e do fundamento da matemática, para além de posições preconcebidas e de sentimentos pouco ortodoxos, requer, acima de quaisquer outras ponderações, motivação e profunda dedicação; o que emerge, por necessária conseqüência, da busca incessante da "verdade".

Desta forma, ao se banir a investigação do fundamento e dos princípios que consolidam o raciocínio matemático, tem-se instituído a propagação do caos no que diz respeito à difusão da matemática. A falta de conhecimento sobre as concepções ou, de forma globalizante e categórica, sobre a filosofia da matemática conduz ao sombrio estágio da estagnação e da dissimulação. "Ensinar" ou, primeiramente, "estudar" matemática de forma fria, sem vida, sem propósito definido e de forma mecânica é, por assim dizer, destruir todo o sentido e o espírito que tornam a matemática o ideal da ciência. Trabalhar os compêndios da matemática sem motivação, sem lhes caracterizar a importância e o propósito, servindo-se da simples reprodução e da memorização de conceitos, é produzir no ser humano nada além de inércia mental; a qual, por seu turno, vem obscurecer ou, de forma inconteste, tolher o raciocínio subjacente.

A matemática é, por excelência, uma ciência analítica e progressiva, cujas possibilidades são infinitas; não sendo, como alguns céticos desavisados insistem em preconizar, um simples conjunto de tautologias. Deve-se, no entanto, reconhecer que a matemática não se deduz de fatos particulares, mas de condições gerais, nas quais podem estar envolvidos os fatos particulares. As leis mais gerais do pensamento fundamentam as verdades matemáticas; ou seja, as verdades matemáticas fundamentam-se sobre leis lógico-racionais, as quais equacionam um sistema analítico completamente coerente. Assim, toda verdade matemática coaduna uma série de juízos necessários que, incontestáveis, confere ao todo o grau de severidade indispensável para se dissipar quaisquer antinomias. Desta forma, em matemática são utilizados objetos dados diretamente pela razão, sendo que qualquer forma de análise constitui uma efetiva construção do raciocínio e, desconhecer tal realidade intrínseca, é renegar a existência da própria matemática.

Qualquer indivíduo que realize transformações cada vez mais complexas no mundo abstrato-formal (no mundo próprio da matemática), sem estar convencido de que em cada estágio de seu trabalho a antítese dos fundamentos *a priori — a posteriori* é o ponto nodal, é o ponto de distinção, que homologa o elo fundamental entre as superestruturas e os alicerces que lhe dão origem, indubitavelmente, encaminhar-se-á em direção ao vazio conceitual.

Para que o conhecimento matemático se estabeleça de maneira verdadeira e permanente deve-se estimular a curiosidade natural do ser humano em descobrir os porquês do desenvolvimento matemático inserir-se no mais amplo e diversificado panorama do pensar, sendo ideada e orientada por este.

Defendendo a tese de que o estudo das principais concepções a respeito dos pressupostos filosóficos, por parte dos envolvidos nos processos que dizem respeito à matemática, contribuiria, especialmente, para remediar, ao menos, alguns dos problemas anteriormente apresentados; o presente relato apresenta, a seguir, uma visão geral de tais entidades, aqui considerada de vital importância para que a matemática se desenvolva e atinja, potencialmente, todos os campos do conhecimento humano.

Ao percorrer os caminhos históricos que tratam do problema do fundamento da matemática, depara-se com uma série de tendências, muitas das quais de pouca relevância. Assim, no que concerne ao objetivo do presente estudo, serão abordadas algumas das principais escolas que tomam posições diferenciadas no que tange às bases da ciência em análise; quais sejam: o Nominalismo, o Conceptualismo, o Intuicionismo, o Realismo, o Logicismo e o Formalismo.

O nominalismo, diga-se desde já, é insuficiente para qualificar precisamente a natureza da matemática; porquanto, reputa como real e válido tão-somente aquilo que advem de natureza sensível; passando a ignorar que a ciência, em qualquer de seus liames, é, por excelência, fundamentada na construção, na interpretação e na invenção. O nominalismo, de forma global, rejeitando as concepções abstratas e aceitando tão-somente as realidades empíricas deixa-se dominar por verdades de natureza filosófica.

Em face do exposto, cabe o questionamento: o nominalismo sustenta que os números, dentre outros conceitos, são simples representações de realidades empíricas? Contudo, pode-se afirmar, com lauta propriedade, que o mundo da matemática nada tem de natural, não é, por excelência, o mundo do empirismo? A matemática é uma ciência analítica e postulacional regida, exclusivamente, pela criação intelectual do homem? Portanto, pode-se dizer, sem maiores considerações atinentes, que o nominalismo é um sistema que renega o caráter ideal da matemática? Teria a tese nominalista condições de responder a estas questões e, além do mais, poderia apresentar armas suficientemente coerentes para posicionar-se diante da antítese lógico-ontológico, que permeia os fundamentos da matemática?

Já no que diz respeito ao conceptualismo tem-se configurado que os números, enquanto tais, existem e são entidades abstratas produzidas pela mente, são invenções da mente, os quais existem tão somente em pensamento; porém, constituídos de um valor inteligível. Ou seja, o conceptualismo matemático é a escola segundo a qual os conceitos existem a título de idéia e não como realidades à parte dos objetos individuais. A crítica que se apresenta, comumente, ao conceptualismo é o fato de o mesmo predizer que a mente tem o poder de criar, por motu-próprio, quaisquer entidades matemáticas de forma imperiosamente livre. Sobre tal enfoque há de observar que um dos aspectos imprescindíveis na construção matemática é a coerência total e o rigor científico. Portanto, se a coerência é abandonada, o sistema científico que caracteriza a matemática deixa de ter sentido, mesmo que as potencialidades de criação sejam ilimitadas? Quais, então, seriam as prescrições ou interdições, do ponto de vista do conceptualismo, que isentariam a matemática de ser uma ciência dedutiva, inventiva, descobridora de novas verdades?

A despeito das teorias psicológicas, a doutrina segundo a qual em matemática somente devem ser consideradas as entidades que se podem construir por intuição é denominada escola intuicionista ou intuicionismo. Ou seja, para os intuicionistas a matemática tem sua origem na intuição; sendo que, pela própria intuição seus conceitos e entidades se tornam perfeitamente claros. Segundo o intuicionismo o valor das entidades matemáticas apenas alcançam o devido valor enquanto construídas coerentemente por ação do intelecto. Contudo, o intelecto, em tal escola, é competente apenas no âmbito das operações finitas, o que vem limitar a matemática à esfera da intuibilidade; sendo, por tal aspecto, em conseqüência, um dos focos de consideráveis objeções.

Além do mais, dentre as características particulares de tal corrente, esta defende que toda afirmação dada pelo intelecto deve ser demonstrada; uma vez que, o intelecto deve ser capaz de justificar tudo quanto construa. Por outro lado, se o intuicionismo é ditado predominantemente pela intuição e não envolve, portanto, qualquer cogitação prévia ou pensamento refletido, fundamenta-se no *a priori* intelectivo. E, a este ponto, seria lícito afirmar que os entes matemáticos são válidos tão-somente em relação à maneira como são intuídos pela mente, e não em relação ao modo como são em si mesmos? Será a matemática uma ciência fundada, apenas, em processos construtivos? Por outro enfoque, como responderiam os intuicionistas ao fato de a matemática, enquanto instrumento hipotético das ciências naturais, ter seu fundamento *a posteriori?*

Partindo da concepção de que o nominalismo e o conceptualismo limitam a importância e a abrangência da matemática surge, em oposição, o realismo matemático. Uma tal corrente assume que a matemática tem seu fundamento na descoberta e não na criação; porquanto, defende o valor objeto-ideal desta ciência. O realismo matemático trata da natureza, do fundamento e da extensão da matemática, sem, contudo avaliar a técnica correspondente. Defende que os elementos atinentes à matemática são qualificados por estruturas objetivas, não sendo mera criação arbitrária do pensamento.

Para o realismo a matemática não é uma ciência arbitrária ou convencional, pois considera a objetividade e a racionalidade das leis matemáticas como sendo independentes do pensamento arbitrário. No realismo matemático, também denominado platonismo, tem-se reverenciado o aspecto da descoberta em matemática, a qual não sendo uma ciência convencional vem evidenciar as leis racionais do pensamento considerando-as possuidoras de uma racionalidade intrínseca.

Porém, se o platonismo defende que os elementos da matemática existem em sentido literal como conceitos abstratos, então como deixar de recair no racionalismo ao realizar as extrapolações do lógico para o ôntico, do ideal para o real?

Hesitando em aceitar a natureza inteiramente despótica (arbitrária) dos fundamentos matemáticos surge a visão de conjunto que sustenta ser a estrutura lógica a característica essencial da matemática; ou seja, partindo da tese de que as leis matemáticas são originárias de princípios lógicos advem o logicismo. Nesta concepção, toda verdade matemática encerra em si um conjunto de raciocínios emanados de leis lógicas, de leis gerais do pensamento. Sendo que, para o logicismo, a validade de um raciocínio não depende nem dos sujeitos determinados nem do predicado concreto que nele figure; pois, a validade de uma inferência não depende senão da forma estrutural desta.

Observe, entretanto, que a lógica matemática, enquanto ciência das leis do raciocínio analítico-formal, tem sua estruturação processual na instância das relações abstratas dos símbolos e se detem à combinação destes mesmos símbolos entre si quando, então, passa a estudar as inferências (via argumentação) do ponto de vista da validade da estrutura sentencial, subtraindo o significado concreto de sua determinação para atingir a coerência de raciocínio. As leis matemáticas são estabelecidas por juízos necessários, os quais, regimentados pelos princípios fundamentais da lógica matemática, constituem estrutura inteiramente coerente e logicamente formalizada. Tais juízos, ditos analíticos corroboram as verdades matemáticas, dando à estrutura matemática um fundamento cognoscível *a priori* em que a exatidão de suas formas advem de leis racionais ou, antes, da relação entre juízos apoiados em princípios primeiros oriundos da pura razão. Assim, é inquestionável a íntima relação entre lógica e matemática, relação esta defendida pela logicismo e coerente com este.

Contudo, o logicismo teria razão ao pretender fundir as duas ciências (matemática e lógica) em um único corpo conceitual? A matemática é condicionada, irrestritamente, pela lógica ou matemática e lógica convergem para um fim único, mediante a tomada de caminhos distintos? Pode-se, a despeito de quaisquer pressupostos ontológicos, considerar a matemática em si mesma, independente do modo pelo qual a lógica se manifesta? O logicismo é passível de eliminar quaisquer possíveis antinomias em matemática?

Uma posição que pretende ser absoluta em matemática e que suscita o condicionamento desta ciência unicamente às suas próprias regras diz respeito ao formalismo. Escola segundo a qual as questões do significado, do fundamento e da natureza das leis matemáticas e, de resto, das inquirições a respeito das relações da matemática com o mundo empírico não lhe diz respeito. Constitui o formalismo uma concepção que defende, de forma radical, a autonomia e a especificidade da matemática, a qual dependeria tão-somente de suas próprias definições e axiomas.

O formalismo tenta reduzir a matemática a um compêndio de fórmulas, procurando dissociar seu conjunto da realidade emergente. A matemática passa a ser, segundo os pressupostos do formalismo, um jogo formal, legítimo exclusivamente em decorrência única das próprias regras do jogo, e, enquanto tal, a matemática estaria alheia a qualquer interpretação ou aplicação? Mas, no sentido que promulga o formalismo, como este assalta as questões imanentes do fundamento *a priori — a posteriori* da matemática? Simplesmente, ignorando-as? Como se prova a auto-suficiência da matemática? Se, segundo o formalismo, a matemática é consolidada apenas pela coerência e pela completabilidade, como tal concepção encara que a coerência é incompatível com a completabilidade, em certas situações, segundo demonstrou Godel? Pode a matemática isentar-se do comprometimento com questões de ordem empírica ou metafísica?

De forma geral, como tais correntes abordariam as entidades existentes *in se e per se*? E, ainda, quais as posições assumidas no que diz respeito ao infinito matemático? Outrossim, por tal linha condutora, levantar-se-iam inúmeras outras interrogações.

As considerações sobre as concepções da matemática, aqui levantadas de forma condensada, evidentemente, não esgotam o assunto sobre o problema dos fundamentos desta ciência. Mas, é necessário enfatizar, *in extenso*, que tais estudos estender-se-iam para muito além destas poucas linhas. Apesar, porém, do escopo das proposições apresentadas, deve-se observar que as questões a respeito da natureza da matemática, em sua gênese, hão de propiciar o direcionamento no sentido de se compreender o que significa, realmente, matemática.

A julgar pelas ponderações anteriormente consideradas, parece razoável supor que muito ainda deve ser discutido e estudado. Com base nessa assertiva e guiado pela hipótese aqui inserida, espera-se que a retomada constante das questões a respeito dos fundamentos da matemática consubstancie a essência sobre a qual os porquês causais da matemática lhe emprestam fascínio, maior alcance e vigor. Porquanto, pretender ignorar, ou relevar ao plano secundário, as questões fundamentais que dizem respeito à filosofia da matemática, é tão insensato quanto arbitrar que o ser humano, enquanto tal, é desprovido da capacidade inerente de servir-se da razão para conhecer e julgar.