AS LEIS LÓGICAS DO PENSAR COERENTE

Carlos Magno Corrêa Dias *

Partindo-se da premissa de que a razão é o agente elucidativo (requisito "sui generis" de explicação) que pretende subjugar os acontecimentos caóticos a uma unidade coesa; esta vem romper as sujeições dos fatos singulares e individuais para estabelecer, por força de uma decisão normativa (cujo pressuposto básico é salvaguardar a ordem do processo evolutivo), uma mobilidade de juízos que a impele à constante análise de qualquer que seja a "verdade" a promulgar ou a instaurar como padrão de relevância explicativo. Isto é, a razão vem determinar os elementos de análise da relação de conformidade do pensar com seu objetivo precípuo de conhecimento, para, então, extremar os vínculos da "verdade". "Ratio omnia vincit".

Mas, em essência, o que significa "verdade"? Qual, precisamente, é a "verdade" norteadora nas ciências exatas? Especificamente, qual seria o propósito da "verdade" em Matemática? Sabe-se, por exemplo, que aquilo que reputa um estado "verdadeiro" na geometria euclidiana não o é na geometria do espaço curvo; e, portanto, seria lícito afirmar que a "verdade" nas ciências exatas é contraditória? Certamente que não. Apesar dos equivocados paradoxos concepcionistas da experiência cotidiana (que se deixa enganar por aparências efêmeras alocadas em referenciais distintos) e do ceticismo exacerbado de pseudos cientistas, a "verdade", em qualquer que seja a amálgama das ciências exatas, é uma busca infinita em direção à ordem, ao absoluto formal. Deve-se, em intenção, observar que nas ciências exatas (que são fundamentadas em sistemas formais e, por conseqüência, abstratos) seus entes estão dissociados do mundo real e a legitimidade de seus argumentos cumpre as diretrizes de teorias consistentes, onde dentre todos os teoremas destas teorias, afetas a um determinado universo particular, não existe um outro teorema que seja a negação (a contradição lógica) de quaisquer dos anteriores. Assim, nestas ciências, qualificadas por sistemas fechados, a "verdade" é uma propriedade das proposições e dos enunciados (e/ou de fórmulas proposicionais ou predicativas) disseminadas no "continuum" de conjecturas formalizadas.

É oportuno evidenciar-se que do julgamento da mente a respeito das estruturas formais aflora a "verdade", a qual não teria existência sem o primeiro. Sendo definida como a não contradição de um sistema de juízos analíticos, a "verdade" nas ciências exatas é uma verdade lógica, a qual, por sua vez, ignora a realidade singular (ou mesmo imprecisa) dos fatos e passa a estabelecer a concordância do aparato conceitual com suas próprias convenções; o que vem consolidar seu grau de possibilidade pelo padrão exeqüível de sua existência. E, neste sentido, a "verdade" ou a "falsidade" de uma dada premissa é obtida ao se cotejar a afirmação sobre ela justaposta com a idéia lógico-racional que vem expressar. Desta forma, a verdade lógica não está interessada em caracterizar, ou antes estabelecer, o "verdadeiro" ou o "falso" de proposições ou de predicados de um determinado argumento formal de um dado universo relacional. A verdade lógica pretende, em última análise, auferir as relações existentes entre estados lógicos que venham determinar, por seu turno, a correção ou incorreção (a legitimidade ou não-legitimidade) das inferências no sentido de insurgir o pensamento coerente. Portanto, a verdade lógica, do ponto de vista de sua analítica, vem estruturar a ciência ou o estudo das inferências corretas no sentido de julgar a validade do pensamento lógico-formal; ou seja, estabelece o instru-

* Professor de Lógica Matemática, de Lógica Computacional, de Fundamentos de Matemática e de Cálculo Diferencial e Integral da Pontifícia Universidade Católica do Paraná.

mento de análise no universo relacional da Lógica Matemática e, por conseqüência, da própria Matemática (pois que, o desenvolvimento da Matemática se deve a uma construção lógico-formal e a axiomatização da Lógica Matemática é estabelecida através de processos matemáticos).

Uma verdade lógica é uma verdade formal; a qual é coerente unicamente em decorrência de sua forma, ficando por ela univocamente determinada. Individualizada pelo referencial teórico, vem exteriorizar o liame da coesão implícita entre o pensamento coerente e os sistemas consistentes constituídos, instituindo o avanço progressivo do conhecimento analítico. E, a esta afirmação, acrescente-se que não existe qualquer necessidade lógica incidente sobre fatos naturais que, para promulgarem sua "verdade", necessitam de um estudo empírico. A verdade lógica está divorciada da verificação empírica; porquanto, constitui-se de substituições de enunciados que guardam um completo relacionamento entre a estrutura do argumento formal e as formas de raciocínio que subsidiam as demonstrações notórias (legítimas) da coerência das primeiras.

Sendo a verdade lógico-formal aquela que representa acordo com leis formais do pensamento a partir de princípios estabelecidos, esta referencia a coerência na estrutura do raciocínio quanto a conclusões determinadas. Assim sendo, o enunciado (fórmula proposicional) $p \rightarrow p$ (ou seja, a condicional: "se p, então p"; onde p é uma proposição simples qualquer) é um exemplo de verdade lógica (de verdade formal) verdadeira unicamente em decorrência de sua forma estrutural.

Contudo, observe que o exemplo anteriormente referenciado caracteriza uma forma de enunciado tautológico ou uma Tautologia; uma vez que, tem, tão somente, exemplos de substituição verdadeiros. Isto é, a fórmula proposicional $p \rightarrow p$ é uma forma de enunciado tautológico pois corresponde a uma seqüência de símbolos a qual contém uma única variável de enunciado p, sendo que o valor-verdade da estrutura será sempre a Verdade V, independentemente dos valores lógicos assumidos pela p; ou seja: $V(p \rightarrow p) = V$.

Em decorrência da álgebra estabelecida no Cálculo Proposicional (Sentencial), a forma de enunciado $p \rightarrow p$ contém, como acima caracterizado, somente uma variável de enunciado, a qual, pela bivalência proposicional, possui apenas dois estados de verdade que possibilitam representar todos os exemplos possíveis de substituição; isto é, assume os valores-verdade $V(p) = V$ (verdade) ou $V(p) = F$ (falsidade). Por outro lado, tomando-se o Princípio da Equivalência Lógica, a estrutura enunciativa $p \rightarrow p$ é logicamente equivalente à estrutura $\sim p \vee p$ ("não p ou p"). O que significa afirmar que as formas de enunciado $(p \rightarrow p)$ e $(\sim p \vee p)$ apresentam, para cada estado de verdade, resultados idênticos. Simbolicamente, tal fato pode ser indicado por: $(p \rightarrow p) \Leftrightarrow (\sim p \vee p)$. E, a afirmação em questão será formalizada a partir da seguinte Tabela-Função-de-Verdade; a saber:

p	~p	~p V p	p → p
V	F	V	V
F	V	V	V

Desta forma, os enunciados $(p \rightarrow p)$ e $(\sim p \vee p)$ qualificam exemplos de substituição de formas de enunciados tautológicos e são verdadeiros em função unicamente de suas formas (observe que as colunas correspondentes são constituídas apenas do valor-verdade V (verdade) para ambas as fórmulas proposicionais).

Saliente-se, também, que, pelo Princípio da Substituição Lógica, a partir da forma de enunciado $(p \rightarrow p)$, pode-se afirmar que a estrutura $P(p, q, r, \ldots, p_n) \rightarrow P(p, q, r, \ldots, p_n)$, em que os elementos constituintes são enunciados compostos (compostos de n-variáveis de enunciado), caracteriza, por conseguinte, uma forma de enunciado tautológico; porquanto, sua forma estrutural é a de uma Tautologia.

Partindo-se do referencial teórico aqui considerado, é importante ressaltar que uma forma de enunciado que possua apenas exemplos de substituição falsos é uma Contradição, sendo logicamente falsa. Desta forma, por exemplo, a fórmula proposicional $p \wedge \sim p$ ("p e não p", para p proposição qualquer) é uma Contradição; pois, em sua Tabela-Função-de-Verdade tem-se apenas o valor-verdade correspondente à F (falsidade). Como $V(p \wedge \sim p) = F$, sua correspondente Tabela-Função-de-Verdade será dada por:

p	~p	p Λ ~p
V	F	F
F	V	F

Analogamente ao considerado para Tautologias, pode-se estender a afirmação acima para a fórmula proposicional constituída das n-variáveis de enunciado $p, q, r, \ldots, p_n$, caracterizada pela estrutura $P(p,q, r, \ldots, p_n) \wedge \sim P(p,q, r, \ldots, p_n)$ a qual, segundo a forma, é, também, um exemplo de Contradição.

Sejam as letras proposicionais p e q, designando, respectivamente, as sentenças declarativas "A Matemática é atributo da Lógica." e "A Lógica é fundamento da Matemática."; isto é:

p: A Matemática é atributo da Lógica.

q: A Lógica é fundamento da Matemática.

A proposição composta

"Se a Matemática é atributo da Lógica, então a Lógica não é fundamento da Matemática e/ou a Matemática é atributo da Lógica.", que corresponde à fórmula proposicional designada por P (p, q) e definida pela estrutura:

$$P(p, q): p \rightarrow (\sim q \vee P),$$

é uma forma de enunciado tautológico, é uma verdade lógica. Pois, da Álgebra Proposicional, vem que:

$$p \rightarrow (\sim q \vee P) \Leftrightarrow \sim p \vee (\sim q \vee p) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sim p \vee (p \vee \sim q) \Leftrightarrow (\sim p \vee p) \vee \sim q \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t \vee \sim q \Leftrightarrow t,$$

onde a letra proposicional t designa uma Tautologia. Contudo, como já apresentado, tal verdade lógica poderá ser evidenciada através de uma Tabela-Função-de-Verdade; isto é:

p	q	~q	~q V p	p → (~q V p)
V	V	F	V	V
V	F	V	V	V
F	V	F	F	V
F	F	V	V	V

Em contraposição ao exemplo anterior, a sentença:

"A Matemática é atributo da Lógica, mas não é verdade que a Lógica não é fundamento da Matemática e/ou que a Matemática é atributo da Lógica.", a qual designada por Q (p, q) corresponde à fórmula proposicional dada por:

$$Q(p, q): p \wedge \sim(\sim q \vee p),$$

é uma forma de enunciado Contraválido; ou seja, é uma Contradição, sendo logicamente falsa. Assim, de maneira semelhante ao exemplo anterior, tem-se, pela Álgebra Proposicional, que:

$$p \wedge \sim(\sim q \vee p) \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge \sim p) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p \wedge (\sim p \wedge q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim p) \wedge q \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c \wedge q \Leftrightarrow c,$$

onde a letra proposicional c designa uma Contradição. Ou, tomando-se o procedimento funcional Tabela-Função-de-Verdade, tem-se que:

p	p	$\sim q$	$(\sim q \vee p)$	$\sim(\sim q \vee p)$	$p \wedge \sim(\sim q \vee p)$
V	V	F	V	F	F
V	F	V	V	F	F
F	V	F	F	V	F
F	F	V	V	F	F

Observe que o exemplo acima caracteriza uma substiuição de uma forma de enunciado Contraválido, o qual é falso em virtude unicamente de sua forma; ou seja:
$V\,(p \wedge \sim(\sim q \vee p)) = F$, independentemente dos valores-verdade de suas componentes.

Sabendo-se que um argumento em Lógica Matemática é toda seqüência finita de proposições (denominadas premissas) que conduz, ou acarreta, uma outra proposição (denominada conclusão), tem-se, a partir das fórmulas proposicionais $P\,(p, q)$ e $Q\,(p, q)$, o seguinte argumento válido; a saber:

$$P\,(p,q) \to Q\,(p,q),\ Q\,(p, q) \to$$

$$\to P\,(p, q) \vdash P\,(p, q) \to P\,(p,q).$$

Assim, designando $P\,(p, q) \to$

$\to Q\,(p, q)$ por $P_1\,(p, q)$, $Q\,(p, q) \to$

$\to P\,(p, q)$ por $P_2\,(p, q)$ e $P\,(p, q) \to$

$\to P\,(p, q)$ por $P_3\,(p, q)$, tem-se estruturado o argumento:

$$P_1\,(p, q),\ P_2\,(p, q) \vdash P_3\,(p, q).$$

Contudo, um argumento P_1, $P_2, \ldots, P_n \vdash Q$ (onde cada uma das fórmulas proposicionais $P_1, P_2, \ldots, P_n$, Q podem ser constituídas das n-variáveis de enunciado $p, q, r, \ldots, p_n$) será legítimo se, e somente se, a condicional entre a conjunção das premissas e a conclusão gerar, por equivalência lógica, uma Tautologia, isto é:

$$(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n) \to Q \Leftrightarrow t.$$

Observe, pois, que o exemplo levado em consideração é, realmente, um argumento legítimo (válido); porquanto, tem-se que:

$$(P_1\,(p, q) \wedge P_2\,(p, q)\,) \to P_3\,(p, q) \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow t$, ou seja, $((P\,(p, q) \to Q\,(p, q)) \wedge$

$$\wedge (Q\,(p, q) \to P\,(p, q))) \to (P\,(p, q) \to$$

$$\to P\,(p, q)\,) \Leftrightarrow t.$$

Portanto, através da Álgebra Proposicional, vem que:
como $P\,(p, q) \to P\,(p, q) \Leftrightarrow \sim P\,(p, q)$

$\vee\ P\,(p, q) \Leftrightarrow t$, então ($(P\,(p, q) \to$

$$\to Q\,(p, q)) \wedge (Q\,(p, q) \to P\,(p, q))) \to$$

$$\to (P\,(p, q) \to P\,(p, q) \Leftrightarrow ((P\,(p, q) \to$$

$$\to Q\,(p, q)) \wedge (Q\,(p, q) \to P\,(p, q))) \to$$

$$\to \sim P\,(p, q) \vee P\,(p, q) \Leftrightarrow \sim((P\,(p, q) \to$$

$$\to Q\,(p, q)) \wedge (Q\,(p, q) \to P\,(p, q)))\vee t$$

1

mas o elemento tautológico t é elemento absorvente na operação de disjunção inclusiva (caracterizada pelo símbolo V, que corresponde ao conectivo "ou").

Desta forma, como 1 é equivalente a uma Tautologia t, o argumento $P\,(p, q) \to P\,(p, q)$, $Q\,(p, q) \to$

$$\to P\,(p, q) \vdash P\,(p, q) \to P\,(p, q)$$

é um exemplo de argumento legítimo.

E, assim, através do método acima apresentado (resumidamente, porquanto não é este o objeto principal da presente explanação) poder-se-ia analisar uma infinidade de argumentos, do ponto de vista de sua validade.

Do exposto até este ponto, há de se considerar que a teoria em questão não pode deixar de ter em conta certos pressupostos básicos (leis primeiras) que lhe dão origem. Sendo, então, a verdade lógica o instrumento que orienta a ciência abstrata (abstrato entendido como todo conjunto de teorias dissociadas do real, sendo essencialmente mental), esta está fundamentada em três leis; leis intituladas, pela distinção que as caracterizam, leis fundamentais (primeiras) do pensamento coerente. Cabendo salientar que as leis em questão alicerçam, como fundamento "a priori", a Lógica Matemática e, de resto, a própria Matemática.

Assim, enquanto ciência das leis do pensamento formal, a Lógica Matemática sustenta as seguintes Tautologias (ou Princípios Fundamentais) para que o pensamento se desenvolva de forma coerente; quais sejam: Princípio da Identidade, Princípio da Não-Contradição e Princípio do Terceiro Excluído.

O Princípio da Identidade afirma que todo enunciado da forma "p se, e somente se, p" (bicondicional: $p \leftrightarrow p$) sempre possui valor-verdade correspondente à Verdade V; isto é, corresponde a uma Tautologia. Observe que tal princípio exprime, na realidade, a impossibilidade de se pensar um estrutura e seus elementos constitutivos como opostos e dessemelhantes, enquanto formada por enunciados não-elípticos ou completos. Por conseqüência, um enunciado p é logicamente equivalente a si próprio, não podendo ser, no mesmo universo de juízos, outra coisa senão p. Desta maneira, tem-se a seguinte Tabela-Função-de-Verdade; a saber:

p	$p \leftrightarrow p$
V	V
F	V

O Princípio da Não-Contradição é caracterizado pelo enunciado da forma "não é verdade que p e não p" ($\sim(p \wedge \sim p)$), o qual é logicamente equivalente a uma Tautologia. Portanto, o princípio em questão corresponde à contradição de uma sentença logicamente "falsa", pois que não é possível a existência de um enunciado que possa ser e não-ser simultaneamente em um dado universo de referência. Assim, um enunciado qualquer p, bem definido, não poderá ser (em um mesmo universo) p e não p, uma vez que estados dicotômicos são mutuamente excludentes. A correspondente Tabela-Função-de-Verdade que evidencia o citado princípio é apresentada a seguir; qual seja:

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$	$\sim(p \wedge \sim p)$
V	F	F	V
F	V	F	V

O Princípio do Terceiro Excluído vem afirmar que um dado enunciado é, necessariamene, a verdade (V) ou a não-verdade (F); não existindo a possibilidade de um "meio-termo" entre a afirmação e a respectiva contradição. Ou seja, o Princípio do Terceiro Excluído, que corresponde ao enunciado da forma "p ou não p" ($p \vee \sim p$), caracteriza, tal qual os casos anteriores, uma Tautologia. Assim, a fórmula proposicional p V ~p, no âmbito de um universo bivalente, tem por Tabela-Função-de-Verdade a seguinte estrutura; a saber:

p	~p	p V ~p
V	F	V
F	V	V

Não obstante as considerações apresentadas sobre os Princípios Fundamentais da Lógica Matemática, se faz necessário enfatizar, ainda, que tais princípios não representam as únicas formas de se estabelecer Tautologias. Porquanto, através das Técnicas Dedutivas e da Análise Inferencial poder-se-ia gerar uma infinidade de outras Tautologias; porém, tais estudos fogem ao escopo do presente compêndio.

Saliente-se, por outro lado, que muito embora os Princípios Fundamentais apresentados não constituam exclusivos exemplos de enunciados logicamente verdadeiros (Tautologias), estes dão à Lógica Matemática o fundamento "a priori". Assim, tem-se estabelecido, a partir de tais axiomas, um sistema científico de raciocínio; o qual, sendo inteiramente coerente (em seu universo de análise), encerra em si toda uma série de verdades formais para externar seu caráter analítico, a precisão e exatidão de quaisquer que sejam suas estruturas racionais.

Ao longo da história da ciência, os princípios anteriormente caracterizados foram objeto de ataques fervorosos. Contudo, há de se esclarecer que tais objeções pragmáticas constituem, em verdade, um aglomerado de equívocos; pois que, se os axiomas considerados forem tomados como enunciados que contêm sentenças isentas de quaisquer ambigüidades e sistematizados (formalizados através de uma analítica própria) por intermédio de operações pertinentes a um cálculo específico (Cálculo Sentencial e Cálculo dos Predicados), num universo bivalente, as denominadas leis do pensamento formal são legítimas e indiscutíveis enquanto tais. E, a despeito de quaisquer intenções restritivas e/ou contestações descontextualizadas, tem-se, a partir destes princípios fundamentais, instaurado, seguramente, o poder e a excelência tanto da Lógica Matemática, quanto da própria Matemática.