

ppgmat

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE
MATEMÁTICA**

ROSIANE NOVAIS DA COSTA

**ANÁLISE DOS PROCESSOS DE RACIOCÍNIO MATEMÁTICO
MOBILIZADOS POR ALUNOS DE 1º ANO NA REALIZAÇÃO
DE TAREFAS EXPLORATÓRIAS DE ADIÇÃO**

LONDRINA
2026

ROSIANE NOVAIS DA COSTA

ANÁLISE DOS PROCESSOS DE RACIOCÍNIO MATEMÁTICO
MOBILIZADOS POR ALUNOS DE 1º ANO NA REALIZAÇÃO DE
TAREFAS EXPLORATÓRIAS DE ADIÇÃO

ANALYSIS OF MATHEMATICAL REASONING PROCESSES MOBILIZED BY 1ST
YEAR STUDENTS IN PERFORMING EXPLORATORY TASKS ON ADDITION

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, campus Cornélio Procópio e Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientadora: Prof.^a Dra. Eliane Maria de Oliveira Araman

LONDRINA
2026



[4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)

Esta licença permite que outros remixem, adaptem e criem a partir do trabalho para fins não comerciais, desde que atribuam o devido crédito e que licenciem as novas criações sob termos idênticos.

Conteúdos elaborados por terceiros, citados e referenciados nesta obra não são cobertos pela licença.



**Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Londrina**



ROSIANE NOVAIS DA COSTA

ANÁLISE DOS PROCESSOS DE RACIOCÍNIO MATEMÁTICO MOBILIZADOS POR ALUNOS DE 1º ANO NA REALIZAÇÃO DE TAREFAS EXPLORATÓRIAS DE ADIÇÃO

Trabalho de pesquisa de mestrado apresentado como requisito para obtenção do título de Mestre Em Ensino De Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Área de concentração: Ensino De Matemática.

Data de aprovação: 30 de Março de 2026

Dra. Eliane Maria De Oliveira Araman, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dra. Adriana Quimentao Passos, Doutorado - Universidade Norte do Paraná (Unopar)

Dr. Jader Otavio Dalto, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Documento gerado pelo Sistema Acadêmico da UTFPR a partir dos dados da Ata de Defesa em 30/03/2026.

Dedico esse trabalho aos meus pais (Everaldo e Joana) que sempre me incentivaram a estudar, à minha irmã Carina que me fez acreditar ser possível e tanto me apoiou e aos meus filhos (Richard, Gustavo, Derek e Heitor) que sempre acreditaram no meu sonho.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por mais esta conquista e por ter sido meu porto seguro em todos os momentos desafiadores desta jornada.

Aos meus pais, Joana e Everaldo, sou profundamente grata pela vida, pelos valores e pelos ensinamentos que me conduziram e incentivaram no caminho dos estudos.

Ao meu amigo Rafael Machado, que me apresentou o programa, incentivou-me desde o início e me acompanhou em todas as fases deste trabalho, muito obrigada!

À minha irmã Carina, que, mesmo distante fisicamente, sempre me fortaleceu com palavras de incentivo e confiança no meu esforço e no meu sonho.

Aos meus filhos — Richard, Gustavo, Derek e Heitor — agradeço pelo amor incondicional, pelo apoio diário e por acreditarem em mim. Foram eles que me ofereceram abrigo afetivo nas horas difíceis, que me presentearam com beijos, abraços e chamegos e que compreenderam com maturidade minha ausência em tantos momentos familiares. Minha gratidão se estende à minha nora Estela, pela ajuda constante com mídias, designs e apresentações.

À minha orientadora, Eliane Maria de Oliveira Araman, deixo meu profundo reconhecimento e admiração. Agradeço não apenas pela orientação deste trabalho, mas, sobretudo, por sua dedicação incansável, acolhimento sensível e disponibilidade — até mesmo em horários inesperados, como em plenos domingos. Sua generosidade, paciência, rigor acadêmico e humanidade foram essenciais para que eu chegasse até aqui.

Agradeço a todos os professores que, direta ou indiretamente, contribuíram para minha formação ao longo desta caminhada. Aos docentes do PPGMAT, em especial, sou grata pelos aprendizados, reflexões e pelo ambiente acadêmico estimulante.

À banca examinadora, agradeço pela leitura atenta, pelas contribuições valiosas e pelo tempo dedicado ao aprimoramento deste trabalho.

Aos colegas do mestrado, agradeço pela convivência, pela parceria e pelos lanches deliciosos que tornaram nossa caminhada mais especial. Obrigada pelos momentos compartilhados e por tornarem essa experiência mais leve e significativa.

Agradeço, também, à equipe gestora da escola onde realizei a coleta de dados — instituição na qual permaneço atuando — pelo apoio e pela colaboração durante essa etapa tão importante da pesquisa. Meu agradecimento especial vai aos alunos que participaram do estudo e que deram vida a esta investigação.

Por fim, expresso minha gratidão à UTFPR e ao Programa de Pós-Graduação em Matemática (PPGMAT) pela oportunidade de realizar o sonho de cursar o mestrado em uma instituição reconhecida pela excelência em ensino e pesquisa.

“Para isso existem as escolas: não para ensinar as respostas, mas para ensinar as perguntas.”

(Rubem Alves, 1994, p.67)

RESUMO

O presente estudo, de natureza qualitativa e caráter interpretativo, teve como objetivo analisar os processos de raciocínio matemático mobilizados por alunos do 1º ano do Ensino Fundamental durante a resolução de tarefas de natureza exploratória. O raciocínio matemático, entendido como um processo de comunicação e inferência que permite construir novos enunciados matemáticos a partir de outros já conhecidos, constitui-se como um elemento essencial para a aprendizagem matemática desde os anos iniciais da escolarização. Documentos oficiais, como a Base Nacional Comum Curricular – BNCC (Brasil, 2018) e o National Council of Teachers of Mathematics - NCTM (2020), ressaltam a importância de promover, aos estudantes, competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente. Nesse contexto, a tarefa exploratória destaca-se como uma ferramenta pedagógica relevante, por incentivar os alunos a descobrirem relações, desenvolverem criatividade e adquirirem autonomia intelectual. A pesquisa foi realizada em uma turma de 1º ano do Ensino Fundamental de uma escola municipal de Apucarana-PR, envolvendo 24 alunos organizados em duplas. As tarefas propostas abordaram conteúdos de adição. A coleta de dados foi feita por meio de observações, registros escritos, gravações em áudio, vídeo e fotografias. A análise baseou-se nos processos de raciocínio matemático descritos por Jeannotte e Kieran (2017), contemplando a busca por semelhanças e diferenças, validação e exemplificação. Os resultados evidenciaram a mobilização ativa de diferentes processos de raciocínio matemático pelos alunos, tais como conjecturar, justificar, comparar, generalizar e validar. Observou-se que os estudantes elaboraram conjecturas, apresentaram justificativas matemáticas, compararam estratégias, identificaram regularidades e generalizaram propriedades para outros casos. Conclui-se que a aplicação de tarefas exploratórias, articulada à abordagem de ensino exploratório, contribuiu para o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos, promovendo a construção de novos conhecimentos a partir de conceitos prévios e fortalecendo a aprendizagem matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Palavras-chave: Raciocínio Matemático. Tarefas Exploratórias. Anos Iniciais. Adição.

ABSTRACT

This qualitative and interpretive study aimed to analyze the mathematical reasoning processes mobilized by 1st-grade students during the resolution of exploratory tasks. Mathematical reasoning, understood as a process of communication and inference that allows the construction of new mathematical statements based on previously known ones, is considered essential for meaningful mathematics learning from the early years of schooling. Official documents, such as the Brazilian National Common Core Curriculum (BNCC)(Brasil, 2018) and the National Council of Teachers of Mathematics (NCTM)(2020), emphasize the importance of developing students' abilities to reason, represent, communicate, and argue mathematically. In this context, exploratory tasks stand out as valuable pedagogical tools, encouraging students to discover new relationships, develop creativity, and gain intellectual autonomy. The research was conducted in a 1st-grade classroom at a municipal school in Apucarana, Paraná, Brazil, involving 24 students organized in pairs. The tasks were focused on addition. Data collection involved classroom observations, written records, audio and video recordings, and photographs. The analysis drew on the mathematical reasoning processes proposed by Jeannotte and Kieran (2017), encompassing the search for similarities and differences, validation, and exemplification. The results showed that students actively mobilized different mathematical reasoning processes, such as conjecturing, justifying, comparing, generalizing, and validating. Students formulated hypotheses, provided mathematical justifications, compared strategies, identified regularities, and generalized properties to other cases. It was concluded that the use of exploratory tasks, integrated with an exploratory teaching approach, significantly contributed to the development of students' mathematical reasoning, fostering the construction of new knowledge from prior concepts and strengthening mathematical learning in the early years of schooling.

Keywords: Mathematical Reasoning. Exploratory Tasks. Elementary School. Addition.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 –Primeira Tarefa exploratória aplicada na turma do primeiro ano.	33
Figura 2 – Segunda Tarefa exploratória aplicada na turma do primeiro ano.	34
Figura 3 – Terceira Tarefa exploratória aplicada na turma do primeiro ano.....	35
Figura 4 – Registro escrito da tarefa.	38
Figura 5 –Realização da tarefa em duplas.	40
Figura 6 – Registro escrito da tarefa.	41
Figura 7 – Realização da tarefa em duplas.....	44
Figura 8 – Registro escrito da tarefa.	44
Figura 9 –Realização da tarefa em duplas.	47
Figura 10 – Registro escrito da tarefa.	49
Figura 11 – Realização da tarefa em duplas.....	52
Figura 12 – Registro escrito da tarefa.	52
Figura 13 –Realização da tarefa em duplas.....	54
Figura 14 – Registro escrito da tarefa.	55
Figura 15 – Realização da tarefa em duplas.....	58
Figura 16 – Registro escrito da tarefa.	61
Figura 17 –Realização da tarefa em duplas.....	64
Figura 18 – Registro escrito da tarefa.	65
Figura 19 – Realização da tarefa em duplas.....	68
Figura 20 – Registro escrito da tarefa.	69
Figura 21 – Realização da tarefa em duplas.....	72

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Aspecto Estrutural do Raciocínio Matemático.....	16
Quadro 2 – Diferenças entre o Ensino exploratório e o Ensino Direto.....	25
Quadro 3 – Etapa do estudo das operações.	27
Quadro 4 – Resultados dos Processos do RM mobilizados pelos alunos na tarefa 1.	49
Quadro 5 – Resultados dos Processos do RM mobilizados pelos alunos na tarefa 2.	60
Quadro 6 – Resultados dos Processos do RM mobilizados pelos alunos na tarefa 3.	74

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CPA	Concreto-Pictórico-Abstrato
IBD	Investigação Baseada em Design
NCTM	National Council of Teachers of Mathematics
RM	Raciocínio Matemático
UTFPR	Universidade Tecnológica Federal do Paraná

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.....	13
1 RACIOCÍNIO MATEMÁTICO	16
1.1 ASPECTO ESTRUTURAL	18
1.2 ASPECTO PROCESSUAL	19
1.2.1 Processos relacionados à Busca de Semelhanças e Diferenças	19
1.2.2 Processos relacionados à Validação	20
1.2.3 Processo de suporte	21
1.3 TAREFAS EXPLORATÓRIAS	22
1.4 A OPERAÇÃO DA ADIÇÃO	28
2 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS.....	33
3 PRODUTO EDUCACIONAL.....	39
4 APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS.....	41
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	77
REFERÊNCIAS.....	81
APÊNDICE A – CÉDULAS.....	85
APÊNDICE B – MOEDAS.....	86
ANEXO A – FICHA DE AVALIAÇÃO DE PRODUTO/PROCESSO EDUCACIONAL.....	87

INTRODUÇÃO

O Raciocínio Matemático (RM) constitui um eixo central no ensino e na aprendizagem da Matemática, sendo reconhecido por pesquisadores e documentos oficiais como uma competência fundamental a ser desenvolvida desde os primeiros anos escolares. A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) enfatiza que o ensino da Matemática deve possibilitar “novas possibilidades de ler e formular hipóteses sobre os fenômenos, de testá-las, de refutá-las, de elaborar conclusões, em uma atitude ativa na construção de conhecimentos” (Brasil, 2018, p. 265), promovendo, assim, o desenvolvimento das competências de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente. De forma semelhante, o National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2020) destaca que o raciocínio e a prova são processos matemáticos essenciais que devem permear toda a escolarização, permitindo aos estudantes compreender a matemática como uma disciplina lógica e coerente.

O RM ultrapassa a aplicação mecânica de procedimentos ao se constituir como um processo de natureza inferencial, comunicativa e cognitiva. Para Jeannotte e Kieran (2017), raciocinar matematicamente é “um processo de comunicação com outros ou consigo mesmo que permite inferir enunciados matemáticos a partir de outros enunciados matemáticos” (p. 7). Stylianides (2009 *apud* Araman; Serrazina, 2020) reforça essa perspectiva ao defini-lo como “um processo que utiliza informação já conhecida para obter, justificadamente, novas conclusões”. Mata-Pereira e Ponte (2018) ampliam essa visão ao caracterizar o RM como um conjunto de processos mentais complexos pelos quais se obtêm novas proposições (conhecimento novo) a partir de proposições conhecidas ou assumidas (conhecimento prévio).

Essas definições convergem para a compreensão do RM como uma prática cognitiva e discursiva, que permite construir e validar conhecimento matemático e estimula funções cognitivas superiores, como a análise, a síntese, a generalização e a argumentação (Ponte; Quaresma; Mata-Pereira, 2020). O desenvolvimento do RM contribui, portanto, para que os estudantes compreendam a Matemática de maneira lógica, coerente e com significado (Bellini, 2022).

O grupo de pesquisa Raciocínio Matemático e formação de professores e o PPGMAT vêm consolidando investigações sobre raciocínio matemático e tarefas exploratórias no Ensino Fundamental, evidenciando resultados consistentes. Estudos, como o de Júlio (2023), demonstram que a metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação por meio da Resolução de Problemas favorece a autonomia, a argumentação, a formulação e validação de conjecturas, além da reflexão sobre o próprio conhecimento matemático. Morais (2022)

destaca a participação ativa dos alunos, o diálogo e a busca por diferentes estratégias e ressalta o papel fundamental do professor ao promover questionamentos que estimulam a construção e validação das ideias. Bellini (2022), por sua vez, confirma que tarefas exploratórias, articuladas a ações pedagógicas intencionais, contribuem para o desenvolvimento do raciocínio matemático e para a aprendizagem de conteúdos, como as medidas de comprimento. Em conjunto, essas pesquisas reforçam o potencial do ensino exploratório para mobilizar processos de raciocínio matemático e promover aprendizagens significativas.

Nesse contexto, o ensino exploratório se apresenta como uma abordagem didática potente para o desenvolvimento do RM. Fundamentado em uma seleção criteriosa de tarefas e em um ambiente de comunicação matemática, o ensino exploratório organiza a aula em quatro fases: (1) introdução da tarefa, (2) resolução autônoma pelos estudantes, (3) discussão coletiva das resoluções e (4) sistematização das aprendizagens (Ponte *et al.*, 2012; Morais; Serrazina; Ponte, 2018). As tarefas exploratórias, ao proporem desafios abertos e não procedimentais, incentivam os alunos a conjecturar, justificar, comparar e generalizar, de modo a promover aprendizagens significativas.

Assim, compreender e promover o RM requer tanto uma fundamentação teórica consistente quanto práticas pedagógicas que favoreçam a investigação e a argumentação matemática. A presente pesquisa discute as dimensões estruturais e processuais do raciocínio matemático, bem como as suas definições e o papel das tarefas exploratórias no campo aditivo desenvolvidas com alunos do primeiro ano do Ensino Fundamental de uma escola municipal de Apucarana, à luz da literatura recente.

Para alcançar uma compreensão aprofundada dessas dimensões, esta pesquisa teve, como objetivo, analisar os processos de raciocínio matemático mobilizados por alunos do 1º ano do Ensino Fundamental durante a resolução de tarefas de natureza exploratória. Para atingir esse objetivo, foram selecionadas, aplicadas e analisadas tarefas de natureza exploratória, à luz da literatura especializada e implementadas em uma turma de uma escola municipal de Apucarana. O processo investigativo envolveu a observação das interações em sala, o registro das produções dos estudantes e a análise dos processos de raciocínio mobilizados durante a resolução das tarefas e nas discussões.

Essa dissertação está organizada em cinco capítulos. No capítulo 1, apresenta-se o referencial teórico que fundamenta o raciocínio matemático, as tarefas exploratórias no ensino de Matemática e o estudo da adição. O capítulo 2 descreve os procedimentos metodológicos da pesquisa, incluindo o contexto, os instrumentos de coleta de dados e os procedimentos de

análise. No capítulo 3, explica-se o produto educacional estruturado a partir dos processos do raciocínio matemático, em consonância com o referencial teórico que sustenta esta investigação. O produto constitui-se como um instrumento formativo e orientador da prática pedagógica ao articular fundamentos teóricos e encaminhamentos metodológicos que favorecem a organização de situações de ensino exploratório e, desse modo, busca contribuir para que professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental promovam a construção e a compreensão dos conceitos matemáticos, de modo a fortalecer o desenvolvimento do raciocínio dos alunos. No capítulo 4, são discutidos os resultados obtidos a partir da implementação das tarefas e da observação dos processos de raciocínio matemático utilizados pelos alunos. Por fim, o capítulo 5 apresenta as considerações finais, destacando as contribuições da pesquisa, suas limitações e possíveis desdobramentos para estudos futuros.

1 RACIOCÍNIO MATEMÁTICO

O raciocínio matemático tem se consolidado como um dos eixos centrais do ensino e da aprendizagem em Matemática, sendo amplamente discutido por pesquisadores e reconhecido em documentos curriculares nacionais e internacionais (Brasil, 2018; NCTM, 2000, 2009). Tal reconhecimento se deve à sua relevância na construção de conhecimentos matemáticos, que vão além da simples memorização de regras e procedimentos.

Diversos autores têm buscado conceituar o raciocínio matemático a partir de diferentes perspectivas, ainda que existam convergências em alguns aspectos fundamentais. Para Jeannotte e Kieran (2017), o raciocínio matemático é um processo de comunicação, tanto com os outros quanto consigo mesmo, que permite inferir enunciados matemáticos a partir de outros já conhecidos. Essa definição está em sintonia com a de Stylianides (2009 *apud* Araman; Serrazina, 2020), que entende o raciocínio como um processo de inferência baseado em conhecimentos prévios para a produção de novas conclusões.

De forma semelhante, Mata-Pereira e Ponte (2018) descrevem o raciocínio matemático como um processo justificativo que utiliza informações conhecidas para construir novas conclusões. Já Lannin, Ellis e Elliot (2011) enfatizam os processos envolvidos nesse raciocínio, tais como a formulação de questões, a elaboração e testagem de conjecturas e a construção de justificativas e argumentos. Nesse sentido, o raciocínio matemático é entendido como um fenômeno dinâmico que integra análise, síntese, validação e comunicação de ideias.

No contexto educacional, Ponte, Mata-Pereira e Henriques (2012) destacam que o desenvolvimento do raciocínio matemático deve ser um dos principais objetivos do ensino da Matemática desde os anos iniciais, visto que a compreensão de conceitos matemáticos não deve se limitar a conhecer definições, ela deve compreender como esses conceitos se relacionam e podem ser aplicados em situações diversas. Brodie (2010) corrobora essa visão ao afirmar que o raciocínio matemático é essencial para dar sentido à atividade matemática, que se configura, também, como um instrumento importante de convencimento e argumentação.

O desenvolvimento do raciocínio matemático em sala de aula é crucial para uma aprendizagem que posiciona o aluno como sujeito ativo do aprendizado. Há um consenso sobre a importância de trabalhar com o raciocínio matemático, apontada por diversos autores que reconhecem a necessidade de aprofundamento e estudo para compreendê-lo e saber como desenvolvê-lo eficazmente, a exemplo de Araman e Serrazina (2020) e Araman, Serrazina e Ponte (2019; 2020).

Documentos curriculares, como a BNCC (Brasil, 2018), ressaltam a importância do raciocínio matemático para os alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental, enfatizando o compromisso com o desenvolvimento do letramento matemático. Este letramento é definido como o conjunto de competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, a fim de favorecer o estabelecimento de conjecturas, formulação e resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas.

A importância do desenvolvimento de novos conhecimentos a partir de conhecimentos já existentes é destacada também pelo NCTM (2000), que preconiza a compreensão do que os alunos sabem e precisam aprender e, em seguida, o desafio e apoio para que aprendam apropriadamente. Moraes, Serrazina e Ponte (2018) defendem que é importante o envolvimento dos alunos em tarefas que favoreçam o raciocínio matemático desde os primeiros anos de escolaridade. Jeannotte e Kieran (2017), assim como Stylianides (2009), sublinham a necessidade de se trabalhar o raciocínio matemático em diferentes níveis de escolarização, tornando as tarefas que envolvem o raciocínio central nas experiências matemáticas dos alunos em diferentes conteúdos e séries escolares. A condução dessas tarefas pelos professores é de suma importância para proporcionar, aos alunos, a capacidade de raciocinar e chegar a novas conclusões.

Nesse cenário, torna-se necessário distinguir o termo “raciocinar” de outros como “pensar”, uma vez que o raciocínio matemático exige inferências fundamentadas e justificadas. Conforme Ponte, Quaresma e Mata-Pereira (2020), raciocinar implica partir de informações dadas para construir novas informações por meio de um processo lógico e argumentativo. Essa distinção é importante para a clareza conceitual e para o trabalho docente.

Jeannotte e Kieran (2017) propõem um modelo conceitual que organiza o raciocínio matemático em dois grandes aspectos que são apresentados na sequência: o estrutural e o processual.

1.1 ASPECTO ESTRUTURAL

O aspecto estrutural do raciocínio matemático é descrito como estático, e refere-se à forma do raciocínio. Mais especificamente, ele descreve "a maneira pela qual os elementos discursivos se combinam em um sistema ordenado que descreva os elementos e sua a reação entre si" Jeannotte e Kieran (2017). As três formas mais comuns de raciocínio citadas na literatura são a **dedução, a indução e a abdução**, como mostrado no Quadro 1. Toulmin e Pierce (2007 *apud* Jeannotte; Kieran, 2017) são referências-chave para discutir este aspecto, esquematizando-o em quatro elementos de natureza narrativa, que estruturam o discurso matemático: elementos básicos (dados, reivindicação, garantia), qualificadores (valor epistêmico), suporte (para apoiar a garantia) e réplica (para antecipar contra-argumentos).

Quadro 1: Aspecto Estrutural do Raciocínio Matemático

dedutivo	permite conclusões válidas e irrefutáveis a partir de premissas verdadeiras, sendo central na construção de provas;
indutivo	está associado à generalização e não garante conclusões absolutamente válidas, mas permite criar conhecimentos;
abdutivo	refere-se à formulação de hipóteses razoáveis, muitas vezes associadas à identificação de padrões e à conjectura.

Fonte: A autora, baseado em Jeannotte e Kieran (2017)

O raciocínio **dedutivo** é caracterizado pela obtenção de conclusões necessariamente verdadeiras a partir de premissas conhecidas e é central nos processos formais de prova e prova formal, que exigem reestruturação dedutiva. Duval (1995 *apud* Jeannotte; Kieran, 2017) descreve o raciocínio dedutivo como a única forma de raciocínio capaz de mudar o valor epistêmico do conhecimento matemático de provável para verdadeiro. A tradição axiomática, herdada dos Elementos de Euclides, segue o método dedutivo.

O raciocínio **indutivo** está associado à generalização de propriedades observadas em casos particulares, ainda que não leve, necessariamente, a conclusões válidas (Mata-Pereira; Ponte, 2018). As inferências indutivas estão associadas a processos como a generalização, ou seja, o ato de identificar uma propriedade, conceito ou ideia de uma classe ampliada de objetos matemáticos. O raciocínio indutivo é, por vezes, formulado de maneira inconsistente. Visto que se refere a todo raciocínio que não é dedutivo, ele infere uma garantia a partir dos dados e da afirmação sobre os dados. O valor epistêmico da conclusão da etapa indutiva é de possível (ou provável/muito provável).

Ao contrário do raciocínio dedutivo, o raciocínio indutivo não leva necessariamente a conclusões válidas, mas é importante para a criação de novos conhecimentos. Aliseda (2003) exemplifica que o raciocínio indutivo serve para verificar previsões.

Já o raciocínio **abduativo** envolve a formulação de hipóteses plausíveis e é frequentemente utilizado na etapa inicial de resolução de problemas ou na produção de conjecturas (Araman; Serrazina, 2020). Ele está relacionado principalmente com os processos de generalizar e conjecturar. É uma estrutura menos discutida e, por vezes, misturada à etapa indutiva, pois pode ser um elemento de todo o processo do raciocínio matemático, gerando dados e justificando a busca de semelhanças e diferenças. O raciocínio abduativo consiste em formular hipóteses razoáveis sobre um determinado fenômeno e, assim como o indutivo, o raciocínio abduativo não conduz necessariamente a uma afirmação válida. Aliseda (2003) afirma que ele serve para construir hipóteses para fenômenos intrigantes. Mata-Pereira e Ponte (2018), por sua vez, resumem as diferenças entre esses dois tipos de raciocínio, indicando que o indutivo elabora conjecturas a serem verificadas, enquanto o abduativo formula hipóteses razoáveis, e nenhum dos dois necessariamente leva a conclusões válidas, diferente do dedutivo.

Apesar de sua relevância, o aspecto estrutural, por apresentar os elementos narrativos, relações e valores epistêmicos de forma estática, negligencia a temporalidade que é central para a atividade de raciocínio. Essa limitação aponta para a necessidade de explorar o aspecto processual do raciocínio matemático.

1.2 ASPECTO PROCESSUAL

No que se refere aos processos de raciocínio matemático, Jeannotte e Kieran (2017) identificam um conjunto de ações que expressam a temporalidade e a dinâmica do raciocínio, organizando-as em três categorias: processos relacionados à busca de semelhanças e diferenças (como conjecturar, generalizar, identificar padrões, comparar e classificar), processos voltados à validação (como justificar, provar e provar formalmente) e o processo de exemplificar, que serve de apoio aos demais.

1.2.1 Processos Relacionados à Busca de Semelhanças e Diferenças

- **Conjecturar:** envolve raciocinar sobre relações matemáticas para desenvolver afirmações que são provisoriamente consideradas verdadeiras, mas que não são conhecidas como verdadeiras. Ao formular uma conjectura, o aluno precisa raciocinar sobre as relações

matemáticas e desenvolver afirmações que visam ser verdadeiras, mesmo que ainda não possam confirmar sua veracidade. A observação de relações e o pensamento sobre elas ajudam os alunos a identificar pontos comuns, que contribuem para a compreensão de conceitos, símbolos e representações. Os Alunos formulam conjecturas (mesmo que inconscientemente) ao elaborar estratégias de resolução. Eles podem criar conjecturas válidas ou inválidas, baseadas em raciocínios válidos ou inválidos, sendo que os inválidos podem servir como ponto de partida para o entendimento.

- **Generalizar:** um processo com características próprias. Ao fazer conjecturas, os alunos iniciam a identificação de padrões, que levam à generalização e permitem relacionar um conjunto de dados a um conjunto maior. Stylianides (2008, p. 9) interpreta a generalização como o "transporte de relações matemáticas de conjuntos dados para novos conjuntos para os quais os conjuntos originais são subconjuntos". O processo acontece quando os alunos identificam algo em comum com os casos analisados, elevando o raciocínio a uma dimensão mais vasta. Embora, em matemática, uma generalização (teorema) seja considerada verdadeira apenas com uma demonstração válida, os alunos fazem generalizações o tempo todo, mesmo sem provar formalmente, o que é válido para a aprendizagem. O raciocínio matemático envolve investigar por que uma generalização é verdadeira ou falsa.

- **Identificar um Padrão:** pode levar a conjecturas, mas não pode ser igualado a elas. Esse processo exige a comparação de casos ou exemplos para destacar o padrão e vai além de comparar, porque não infere apenas uma narrativa sobre semelhanças e diferenças.

- **Comparar:** é um processo que infere, pela busca de semelhanças e diferenças, uma narrativa sobre objetos ou relações matemáticas. Diferente de conjecturas e generalizações, por ser um padrão aplicável a algo dentro de um conjunto menor, sem se estender para um conjunto mais amplo, pode ocorrer junto com outros processos de raciocínio, como a generalização, a identificação de padrões e a validação.

- **Classificar:** um processo importante que viabiliza o desenvolvimento no nível dos objetos, colocando-os juntos ou separando-os. Esse processo pode ser associado à comparação, conjectura e generalização.

1.2.2 Processos Relacionados à Validação

- **Justificar:** processo que busca por elementos para validar ou refutar uma conjectura de provável para mais provável. É um processo essencial do raciocínio matemático e deve ser desenvolvido desde os primeiros anos de escolaridade.

- **Provar:** é um processo que busca dados e garantias para modificar uma conjectura de provável para verdadeira. Ele é essencial à legitimação do raciocínio matemático desenvolvido.

- **Provar Formalmente:** além de ser um processo que busca dados e garantias para modificar uma conjectura de provável para verdadeira, é formalizado e reconhecido pela classe da comunidade matemática.

1.2.3 Processo de Suporte

- **Exemplificar:** dá suporte aos demais processos por meio da construção de exemplos, auxiliando na busca por semelhanças e diferenças e na busca por validação. A exemplificação está relacionada com todos os processos, infere dados e gera elementos que auxiliam a justificar e validar (Jeannotte; Kieran, 2017, p.14).

Carneiro, Araman e Serrazina (2020) indicam que o raciocínio matemático consiste em "produzir um enunciado matemático a partir de outros que são assumidos como verdadeiros". É fundamental salientar a distinção entre "raciocinar" e "pensar". Embora sejam frequentemente usados de forma imprecisa ou como sinônimos na Educação Matemática, autores como Ponte, Quaresma e Mata-Pereira (2020) concluem que "raciocinar possui um significado mais restrito do que pensar". Para eles, "raciocinar é fazer inferências de forma fundamentada, ou seja, partir de informação dada para obter nova informação através de um processo justificado". Brodie (2010) complementa que "raciocinar" vai além da mera aceitação, é um processo de argumentação sobre questões consideradas verdadeiras, que desencadeia questionamentos e aprendizagens e requer a apropriação de conceitos para desenvolver habilidades, impulsionada por tarefas desafiadoras, como as exploratórias. "Pensar" envolve interpretar, refletir, estabelecer conexões, formular ideias, levantar hipóteses, imaginar possibilidades e organizar mentalmente informações, ainda que nem sempre de forma estruturada ou explicitamente justificada. Desse modo, todo raciocínio é uma forma de pensamento, mas nem todo pensamento se configura como um raciocínio. No contexto da Educação Matemática, essa distinção é relevante, pois evidencia que promover o pensamento matemático significa criar oportunidades para que os alunos mobilizem ideias, explorem relações e construam significados, ao passo que promover o raciocínio matemático requer levá-los a justificar, argumentar e validar as conclusões a que chegam.

Araman e Serrazina (2020) ressaltam que o raciocínio matemático é uma das bases para o ensino e a aprendizagem, estando diretamente relacionado com a capacidade de

resolver tarefas exploratórias e construir soluções matemáticas. Essas habilidades são fundamentais para o ensino de conteúdos matemáticos mais avançados, imprescindíveis desde os primeiros anos de escolarização. Mata-Pereira (2018, p. 1) complementa ao afirmar que o raciocínio matemático bem estruturado contribui para a aprendizagem matemática ao longo da vida escolar, destacando que, nos anos iniciais, é necessário fomentar um raciocínio que permita aos alunos não apenas resolver tarefas, mas, também, justificar suas respostas, comparar diferentes soluções e generalizar os resultados, o que fortalece sua compreensão dos conceitos matemáticos.

1.3 TAREFAS EXPLORATÓRIAS

Diversos autores destacam a relevância das tarefas exploratórias como instrumentos para promover o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos (Araman; Serrazina, 2020; Brodie, 2010; Lannin; Ellis; Elliot, 2011; Mata-Pereira; Ponte, 2017, 2018; Trevisan; Araman, 2021). Segundo Brodie (2010), a natureza das tarefas propostas em sala de aula é determinante para fomentar o raciocínio matemático. Para a autora, tarefas que incentivam múltiplas vozes, discordâncias e desafios, bem como a consideração dos argumentos de outros colegas, promovem ambientes de aprendizagem em que os estudantes são instigados a raciocinar de forma mais profunda. Ao exporem suas ideias, os alunos precisam construir e apresentar argumentos coerentes e fundamentados em raciocínios matemáticos, a fim de comunicar seus pensamentos.

Morais, Serrazina e Ponte (2018) defendem que é importante o envolvimento dos alunos em tarefas que favoreçam o raciocínio matemático desde os primeiros anos de escolaridade. Jeannotte e Kieran (2017), assim como Stylianides (2009), sublinham a necessidade de se trabalhar o raciocínio matemático em diferentes níveis de escolarização, tornando as tarefas que envolvem o raciocínio centrais nas experiências matemáticas dos alunos, em diferentes conteúdos e séries escolares. A condução dessas tarefas pelos professores é de suma importância para proporcionar, aos alunos, a capacidade de raciocinar e chegar a novas conclusões.

Ponte (2005, 2014) ressalta que as tarefas desempenham um papel mediador essencial no ensino e na aprendizagem da Matemática. De acordo com o autor, tarefas podem assumir diferentes formatos — problemas, exercícios, investigações, explorações ou projetos — variando conforme seu nível de desafio e sua estrutura, que pode ser aberta ou fechada. Os exercícios, por exemplo, configuram-se como tarefas fechadas, pois especificam claramente o

que deve ser realizado e apresentam baixo nível de desafio. Os problemas, por outro lado, mantêm uma estrutura fechada, mas exigem um nível de desafio mais elevado. As tarefas investigativas, por sua vez, combinam um alto nível de desafio com uma estrutura aberta e permitem múltiplas possibilidades de abordagem (Ponte, 2005).

As tarefas exploratórias se distinguem por apresentarem uma estrutura mais aberta e um nível de desafio reduzido, o que possibilita que os alunos iniciem sua resolução sem a necessidade de um planejamento prévio detalhado (Ponte, 2005). Diferentemente dos exercícios, os estudantes não possuem, de imediato, todos os conhecimentos necessários para solucioná-las, sendo levados a mobilizar conhecimentos prévios e a construir novas estratégias de resolução. Para Ponte (2005), é possível que os alunos encontrem soluções mesmo para tarefas que não lhes foram previamente ensinadas, desde que sejam instigados a investigar e explorar.

Ponte, Quaresma e Mata-Pereira (2020) argumentam que a abordagem exploratória constitui um terreno fértil para o desenvolvimento do raciocínio matemático, uma vez que tais tarefas não apresentam uma resolução imediata e possuem um certo grau de indeterminação inicial. Ao não explicitar objetivos de forma direta, essas tarefas permitem que os alunos analisem diferentes aspectos da situação-problema, o que lhes confere um caráter de imprevisibilidade, diferentemente dos problemas tradicionais, cujos caminhos e resultados são previamente conhecidos pelo professor.

A literatura também enfatiza o papel das discussões coletivas durante a realização das tarefas em sala de aula. Ponte (2014) aponta que tais momentos potencializam reflexões e favorecem a construção de significados matemáticos compartilhados. Nessas interações, os alunos têm a oportunidade de explicitar seus pensamentos, apresentar justificativas e validar argumentos com seus pares. Para Ponte (2005), as discussões são tão fundamentais quanto a seleção de boas tarefas, pois constituem momentos de elaboração de conjecturas, justificações e negociação de significados. Esse aspecto das discussões coletivas é especialmente relevante em tarefas abertas e exploratórias, que priorizam o protagonismo discente ao estimular a formulação de conjecturas, generalizações e justificações em um ambiente que valoriza a discussão coletiva (Ponte; Quaresma; Mata-Pereira, 2020).

Embora a escolha de tarefas apropriadas seja condição necessária, não é suficiente para garantir o desenvolvimento do raciocínio matemático. O papel do professor é igualmente central nesse processo. Brodie (2010) observa que, quando os alunos questionam a correção de suas respostas, é mais proveitoso que o professor explore os raciocínios junto com os estudantes do que simplesmente confirme ou negue as soluções. Ao incentivar os alunos a

justificarem suas respostas, corretas ou não, o professor promove a consciência dos processos de raciocínio e reforça a importância da argumentação na Matemática. Questionamentos que levam os estudantes a comparar, verificar e justificar conjecturas contribuem significativamente para esse desenvolvimento, embora possam representar um desafio inicial para aqueles não habituados a esse tipo de prática (Brodie, 2010).

Nesse sentido, diferentes autores discutem as ações docentes que favorecem o raciocínio matemático, como convidar, guiar, apoiar, informar, sugerir ou desafiar os alunos durante a resolução de tarefas (Araman; Serrazina; Ponte, 2019, 2020; Mata-Pereira; Ponte, 2017, 2018). Em abordagens exploratórias, o professor deve permitir que os alunos assumam o protagonismo no processo de descoberta e construção do conhecimento, evitando fornecer respostas ou explicações completas (Ponte, 2005).

A importância do esforço e da perseverança como componentes naturais e desejáveis da aprendizagem matemática é ressaltada pelo NCTM (2014). Segundo o documento, muitos professores, ao perceberem frustrações ou dificuldades iniciais dos estudantes, tendem a intervir rapidamente, o que reduz o nível de desafio e, conseqüentemente, limita as oportunidades de engajamento significativo com o conteúdo matemático. O NCTM (2014) recomenda que os professores valorizem a perseverança dos alunos, adotando práticas que envolvam a proposição de tarefas que promovam o raciocínio, o incentivo explícito à persistência e o apoio sem a retirada dos desafios propostos. Além disso, enfatiza-se a importância de solicitar justificativas e explicações detalhadas sobre os procedimentos utilizados, valorizando tanto a qualidade dos raciocínios quanto dos resultados finais.

Dessa forma, observa-se que o desenvolvimento do raciocínio matemático envolve a articulação entre a seleção de tarefas adequadas e a mediação intencional do professor. Ensinar para o raciocínio matemático implica em criar oportunidades para que os alunos investiguem, analisem, expliquem, conjecturem e justifiquem seus pensamentos, além de interagirem com seus colegas (Brodie, 2010; Araman; Serrazina; Ponte, 2019).

As tarefas propostas em sala de aula constituem um elemento central na organização curricular e no desenvolvimento da aprendizagem dos alunos, pois determinam, em grande medida, as oportunidades de raciocínio e reflexão que lhes são oferecidas (Stein; Smith, 1998). No contexto do ensino de Matemática, as tarefas exploratórias assumem um papel fundamental, uma vez que favorecem o desenvolvimento do raciocínio matemático e estimulam a construção ativa do conhecimento pelos estudantes (Ponte; Brocardo; Oliveira, 2003). Essas tarefas têm, por objetivo, criar situações que desafiam os alunos a investigar,

formular hipóteses, testar estratégias e mobilizar conhecimentos prévios para resolver problemas que não possuem uma solução imediata ou única.

Segundo Serrazina (2021, p. 5), “nem todas as tarefas proporcionam as mesmas oportunidades para o desenvolvimento do pensamento e para a aprendizagem dos estudantes”. Portanto, as tarefas devem ser selecionadas para que os objetivos propostos sejam alcançados. Uma mesma tarefa pode possibilitar diferentes formas de ensinar e aprender, “dependendo do modo como é apresentada aos alunos, do modo como estes aceitam o desafio que lhes é proposto e do modo como evolui a situação de trabalho na sala de aula” (Ponte, 2013, p. 6). Para mobilizar, aos alunos, os processos de raciocínio matemático, são necessárias uma tarefa exploratória com potencial e ações dos professores que desafiem, guiem e motivem os alunos a agir com autonomia durante as resoluções.

Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2003), uma tarefa exploratória distingue-se das tarefas tradicionais por oferecer maior abertura e exigir que os estudantes assumam um papel ativo na resolução. O objetivo não é apenas aplicar técnicas previamente ensinadas, mas explorar ideias matemáticas, formular conjecturas e desenvolver formas próprias de argumentação. Assim, as tarefas constituem o meio pelo qual os estudantes se envolvem e refletem acerca de sua própria atividade, o que é essencial para o aprendizado.

De acordo com o National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000), uma tarefa de qualidade deve se basear em conceitos matemáticos corretos e relevantes, bem como considerar as compreensões, interesses e experiências dos alunos e respeitar as diferentes formas pelas quais aprendem. Além disso, a tarefa deve apelar à inteligência dos estudantes, desenvolver compreensão e habilidades matemáticas, estimular a formulação de conexões e um enquadramento coerente das ideias, promover a resolução de problemas e o raciocínio matemático, incentivar a comunicação matemática e apresentar a Matemática como uma atividade humana significativa. Essas diretrizes de uma boa tarefa reforçam que a seleção de tarefas não é neutra, ela define a natureza das práticas matemáticas vivenciadas pelos alunos em sala.

As tarefas exploratórias, especificamente, possibilitam que o estudante examine diferentes aspectos de uma situação, de modo a favorecer o desenvolvimento de uma compreensão mais profunda e integrada. Por proporcionarem condições mais ricas de aprendizagem, elas se destacam frente aos exercícios tradicionais, que tendem a privilegiar a repetição mecânica. Fonseca, Brunheira e Ponte (1999, p. 4) destacam que essas tarefas proporcionam, aos alunos, a oportunidade de descobrir relações entre conceitos matemáticos e de adquirir maior segurança em suas ideias. A tarefa exploratória é uma atividade que vai

além do simples exercício de repetição, permitindo que os alunos testem hipóteses, explorem diferentes abordagens e reflitam sobre os resultados.

O trabalho com tarefas exploratórias tem sido amplamente reconhecido como uma estratégia primordial para o desenvolvimento do raciocínio matemático (Jeannotte; Kieran, 2017; Ponte; Brocardo; Oliveira, 2003). Ao invés de focar na reprodução de procedimentos, as tarefas exploratórias criam um ambiente propício para que os alunos compreendam e produzam matemática, mobilizando conhecimentos prévios e construindo novas estratégias de resolução.

As tarefas incentivam, também, a mobilização de diferentes processos de raciocínio, tais como a formulação de conjecturas, a comparação de ideias, a validação de argumentos e a generalização de resultados (Jeannotte; Kieran, 2017). Além disso, favorecem o questionamento e a argumentação, uma vez que os estudantes são estimulados a discutir, defender e revisar suas ideias com base em raciocínios lógicos e matemáticos.

O ensino exploratório, também conhecido como ensino-aprendizagem exploratório (Ponte, 2005), caracteriza-se por uma abordagem em que "o professor não procura explicar tudo, mas deixa uma parte importante do trabalho de descoberta e de construção do conhecimento para os alunos realizarem" (Ponte, 2005, p. 13).

De acordo com Canavarro (2011), essa prática envolve os alunos em tarefas matematicamente desafiadoras, que são posteriormente discutidas e sistematizadas em grande grupo, o que favorece o desenvolvimento de competências transversais como a comunicação matemática, a resolução de problemas e o raciocínio matemático. Essa estratégia de ensino contrasta com o modelo de ensino direto (Ponte, 2005), em que a ênfase está na atividade do professor, que transmite o conhecimento e valida ou refuta as respostas dos alunos. No ensino direto, o professor geralmente propõe tarefas de natureza fechada, enquanto os alunos se limitam a ouvir as explicações do professor e responder às questões que lhe são apresentadas. Por outro lado, o ensino exploratório proporciona, aos alunos, a oportunidade de aprender por meio da resolução de tarefas desafiadoras, que incentiva o surgimento de diferentes ideias, conceitos e procedimentos matemáticos, os quais são discutidos, compreendidos e sistematizados em grupo (Canavarro, 2011; Ponte, 2005; Stein *et al.*, 2008).

Assim, essa estratégia de ensino coloca o aluno no centro do processo e permite que ele procure e construa seu próprio conhecimento por meio da resolução de tarefas ricas e significativas. Os alunos discutem suas soluções tanto coletivamente quanto em pares e assumem um papel ativo em sua própria aprendizagem (Ponte, 2005). Como afirma Ponte (2005, p. 15), "a aprendizagem decorre assim, sobretudo, de não ouvir diretamente o professor

ou de fazer esta ou aquela atividade prática, mas sim da reflexão realizada pelo aluno a propósito da atividade que realizou". Para ilustrar as diferenças entre essas duas abordagens de ensino, Ponte (2010) destaca o tipo de tarefas propostas, os papéis distintos dos alunos e do professor e a natureza da comunicação que ocorre em cada uma das situações.

Quadro 2: Diferenças entre o Ensino exploratório e o Ensino direto

	Ensino direto	Ensino exploratório
TAREFAS	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Tarefa padrão: Exercício ✓ As situações são artificiais ✓ Para cada problema existe uma estratégia e uma resposta certa. 	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Variedade: Exploração; Investigação; Projetos; Exercícios ✓ As situações são realistas ✓ Existem várias estratégias para lidar com um problema
PAPÉIS	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Os alunos recebem “explicações” ✓ O professor e o manual escolar são as únicas autoridades na sala de aula ✓ O professor mostra “exemplos” para os alunos “aprenderem a fazer” 	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Os alunos exploram tarefas para descobrirem estratégias para resolvê-las ✓ O professor pede ao aluno para explicar e justificar o seu raciocínio ✓ O aluno é autoridade se usar raciocínio lógico para fundamentar as afirmações
COMUNICAÇÃO	<ul style="list-style-type: none"> ✓ O professor coloca questões e fornece feedback imediato (sequência I-R-F). ✓ O aluno coloca dúvidas 	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Os alunos são encorajados a discutir com os colegas (trabalhando em grupos ou em pares) ✓ No fim de um trabalho significativo, fazem-se discussões com toda a turma ✓ Significados negociados na sala de aula

Fonte: Adaptado de Ponte (2010, p. 24)

A sequência I-R-F: Refere-se a uma sequência de comunicação típica do Ensino direto, onde: I (iniciação); R (resposta) e F (feedback), ou seja, o professor inicia com a questão, o aluno dá a resposta e o professor fornece o feedback imediato sobre a resposta do aluno.

Ao trabalharem com tarefas abertas, os estudantes desenvolvem habilidades, como formular questões, testar hipóteses, justificar soluções e apresentar argumentos coerentes, o que lhes permite avançar de um nível inicial de compreensão para formas mais elaboradas de pensamento. Mais do que buscar um resultado final, a ênfase recai sobre os processos de criação e elaboração do conhecimento, estimulando a reflexão crítica, a autonomia e o pensamento matemático independente.

Para que as tarefas exploratórias cumpram seu potencial pedagógico, a ação docente desempenha um papel decisivo. Durante as discussões coletivas, os alunos apresentam conjecturas, justificam soluções e questionam uns aos outros, negociando significados e construindo novos conhecimentos (Jeannotte; Kieran, 2017). Nesses momentos, a atuação docente envolve orientar, desafiar, apoiar ou sugerir caminhos, sem retirar, dos alunos, o protagonismo na construção do saber. O professor deve valorizar não apenas as respostas corretas, mas, também, a qualidade dos raciocínios apresentados, incentivando a comparação, a verificação e a justificação das estratégias utilizadas.

Segundo Ponte *et al.* (2003), é fundamental que o professor crie um ambiente de confiança e colaboração, no qual os estudantes sintam-se encorajados a expressarem ideias, compartilhar raciocínios e participar ativamente das discussões. O professor atua como mediador, que promove normas de interação que valorizem a formulação e refutação de conjecturas e estimule a escuta atenta e a argumentação fundamentada.

Ensinar para o raciocínio matemático implica, portanto, em oferecer oportunidades de investigação, análise, explicação e conjectura, tanto na escolha quanto no desenvolvimento das tarefas. A combinação entre tarefas adequadas e intervenções docentes intencionais possibilita que os alunos avancem de um conhecimento inicial para níveis mais sofisticados de compreensão matemática. Assim, as tarefas exploratórias, quando articuladas a uma mediação que estimula a argumentação e a perseverança, configuram-se como uma estratégia pedagógica potente para promover a aprendizagem matemática significativa.

1.4 A OPERAÇÃO DE ADIÇÃO

De acordo com Ferreira (2008 *apud* Vieira, 2016, p. 41), o estudo da adição está inserido na área curricular da Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental, portanto, é essencial que os alunos adquiram fluência de cálculo e destreza no uso desta operação. Nesse sentido, a aprendizagem da adição é construída a partir das experiências de contagem que se iniciam no pré-escolar (Vieira, 2016, p. 122), em que as crianças começam a resolver situações aditivas utilizando os dedos das mãos e a contagem de um em um. O trabalho primário com os números deve ter a contagem como base, sendo uma atividade que permite às crianças atribuir significado aos números e estabelecer relações entre eles.

O ensino da adição nos primeiros anos deve ir além da memorização de fatos básicos e enfatizar a flexibilidade e a compreensão das operações. A habilidade de selecionar e aplicar diferentes estratégias favorece o desenvolvimento do pensamento numérico e sustenta

aprendizagens posteriores em operações mais complexas. Dessa forma, a adição deixa de ser apenas um procedimento mecânico e passa a ser uma ferramenta cognitiva capaz de suportar raciocínios matemáticos mais sofisticados (Menino, 2023; Buys, 2001). Um dos requisitos essenciais para a aprendizagem da adição é a exploração das decomposições dos números até 10, por meio dos esquemas todo-partes. Esses esquemas representam a relação entre um número (*todo*) e suas partes, inicialmente de forma concreta e, posteriormente, de forma mental (Santos; Teixeira, 2015). Durante o processo, os alunos devem:

- investigar todas as possibilidades de decomposição dos números até 10;
- compreender que as partes podem ser trocadas sem alterar a decomposição, baseando-se na propriedade comutativa da adição;
- verbalizar as decomposições utilizando a terminologia adequada.

Na adição, os significados fundamentais estão relacionados às ideias de juntar e acrescentar. Na combinação, duas quantidades são unidas para formar um único total; já na mudança por meio de junção, uma quantidade inicial é aumentada para determinar o total (Ponte; Serrazina, 2000).

De acordo com Pires (1994 *apud* Ponte; Serrazina, 2000), o estudo das operações aritméticas nos anos iniciais do Ensino Fundamental deve ser organizado em três etapas conforme o quadro abaixo. Essa progressão favorece a construção de modelos mentais sólidos, nos quais as operações são compreendidas como ferramentas cognitivas aplicáveis a diferentes contextos.

Quadro 3 – Etapa do estudo das operações

compreensão do sentido da operação	se inicia com ações concretas e evolui para representações simbólicas;
desenvolvimento do sentido operatório	centrado no cálculo mental e nas propriedades das operações;
construção do algoritmo	etapa em que se sistematizam os procedimentos formais.

Fonte: A autora, baseado em Pires (1994 *apud* Ponte; Serrazina, 2000)

A noção de sentido de número constitui um elemento central para o desenvolvimento do cálculo mental. Ela envolve a capacidade de aplicar conhecimentos e habilidades numéricas de maneira flexível e significativa, reconhecer a existência de múltiplas estratégias, escolher representações adequadas e rever criticamente dados e resultados (Fosnot; Dolk, 2001). Essa competência está diretamente ligada à construção de redes de relações numéricas, nas quais os números e suas propriedades se articulam, de modo a permitir que os alunos

avancem de estratégias informais para modelos matemáticos mais estruturados. No contexto da aprendizagem inicial, destaca-se o sentido de número, entendido como “a compreensão geral dos números e operações, e a destreza para usar essa compreensão de modo flexível” (Menino, 2023, p. 114). Essa competência envolve a capacidade de aplicar números e técnicas de cálculo de maneira ajustada ao contexto, selecionando estratégias mentais adequadas para cada situação. O cálculo mental é uma habilidade fundamental do sentido de número caracterizado por:

- i) operar-se sobre os números e não sobre os dígitos; ii) utilizar-se as propriedades das operações e relações numéricas; e iii) permitir a realização de registros, mesmo sendo um cálculo mental (Buys, 2001, citado em Menino, 2023, p. 114).

O desenvolvimento do sentido de número, que abrange as capacidades de cálculo, implica na progressiva aquisição da compreensão dos números, competências específicas de contagem, decomposição dos números e a capacidade de raciocinar a partir de relações e generalizações. O uso de diferentes estratégias para chegar ao mesmo resultado ajuda os alunos a compreender o sentido de número e a desenvolver estratégias de cálculo mental.

A flexibilidade no cálculo mental apoia-se na compreensão das relações entre números e entre operações. A memorização de fatos básicos, por exemplo, não decorre de repetição mecânica, mas da identificação de padrões e relações, como as ideias de compensação e parte-todo, que funcionam como atalhos cognitivos (Buys, 2001). Essa abordagem contribui para reduzir a quantidade de fatos isolados a serem memorizados e favorece a apropriação de grandes ideias matemáticas.

As estratégias de cálculo mental evoluem em complexidade à medida que se amplia o domínio numérico. Para números até 20, os alunos utilizam inicialmente estratégias de contagem, tais como “contar todos”, “contar a partir do primeiro número” e “contar a partir do maior” no caso da adição (Thompson, 1999; Carpenter; Moser, 1984). Gradualmente, essas estratégias dão lugar a estratégias baseadas em relações, que permitem cálculos mais eficientes e revelam um avanço na estruturação do pensamento numérico, como o uso de par ou ímpar, contar até 10, compensação e fatos derivados (Fosnot; Dolk, 2001).

A aprendizagem das operações fundamentais da aritmética, particularmente da adição e da subtração, constitui um dos eixos estruturantes do desenvolvimento do pensamento numérico nos primeiros anos de escolarização. A compreensão dessas operações não deve se restringir à aplicação mecânica de algoritmos, mas envolver a construção de

significados, o desenvolvimento do sentido de número e a mobilização de estratégias mentais diversificadas e flexíveis (Fosnot; Dolk, 2001; Ponte; Serrazina, 2000).

O ensino da Matemática na Educação Básica deve ser estruturado de forma a garantir que os conceitos fundamentais sejam explorados na ordem adequada, permitindo que a base do conhecimento matemático seja sólida e progressiva (Martins *et al.*, 2020). Abordagens como o *Singapore Math* são sustentadas em teorias que interligam o concreto e o abstrato e promovem uma aprendizagem significativa com compreensão. A abordagem concreto-pictórico-abstrato (CPA), adotada no currículo de Singapura, tem origem nos estudos do psicólogo norte-americano Jerome Bruner. Segundo Bruner (1966; 1998), os conceitos matemáticos devem ser introduzidos, inicialmente, a partir de experiências concretas, que permitam que os alunos percebam a Matemática como uma ferramenta de resolução de problemas reais. O uso de representações pictóricas facilita a esquematização do raciocínio, enquanto o trabalho abstrato com símbolos deve estar fundamentado nas experiências concretas.

A adição é uma operação fundamental que os alunos aprendem nas primeiras etapas da educação matemática. O ensino da adição deve ir além da simples memorização de fatos aritméticos, incluindo a compreensão das suas propriedades, como a comutatividade, a associatividade e o elemento neutro. Ao aprender as propriedades da adição, os alunos não só desenvolvem uma compreensão mais profunda dessa operação, eles também começam a perceber a relação entre diferentes conceitos matemáticos, como as relações de número e a estrutura do sistema numérico.

A BNCC (Brasil, 2018, p. 270) reforça essa abordagem ao sugerir que o ensino de operações, como a adição, deve ser contextualizado e compreendido em seu significado, não apenas associado ao uso de fórmulas ou regras. O currículo nacional preconiza que, para uma aprendizagem significativa da adição, é essencial que o aluno explore suas propriedades e entenda como as operações podem ser manipuladas de diferentes formas.

Edda Curi (2010), ao discutir o ensino das operações aritméticas nos anos iniciais, enfatiza a importância de se trabalhar os conceitos básicos de forma significativa para promover o raciocínio lógico e matemático. A autora aborda o ensino da adição dentro do Campo Aditivo, destacando a formação do raciocínio matemático e a exploração das propriedades da adição como parte do processo de aprendizagem que prepara os alunos para resolver problemas matemáticos mais complexos.

Em síntese, o estudo da adição nos anos iniciais do Ensino Fundamental constitui um eixo estruturante para o desenvolvimento do pensamento numérico e deve ser conduzido de

forma progressiva, significativa e com ênfase na compreensão. A aprendizagem dessa operação parte de experiências concretas de contagem e evolui para a utilização de estratégias mentais flexíveis que envolvem decomposição numérica, exploração dos esquemas todo–partes e compreensão das propriedades fundamentais da adição (Ponte; Serrazina, 2000; Santos; Teixeira, 2015). Ao privilegiar a construção do sentido de número e o domínio do cálculo mental em detrimento da mera memorização mecânica, promove-se a formação de redes de relações numéricas que sustentam aprendizagens posteriores mais complexas (Fosnot; Dolk, 2001; Buys, 2001; Menino, 2023). Assim, a adição deixa de ser um procedimento isolado para se tornar uma ferramenta cognitiva central no raciocínio matemático, que permitindo que os alunos avancem com segurança para novos conceitos e algoritmos de acordo com uma progressão sólida e coerente do conhecimento matemático (Martins *et al.*, 2021; Bruner, 1966; 1998).

Diante desse percurso teórico e didático, o ensino exploratório mostra-se particularmente adequado ao conteúdo da adição, pois cria condições para que os alunos construam significados a partir da investigação de situações aditivas, da comparação de estratégias e da explicitação de raciocínios. Ao propor tarefas abertas e desafiadoras, que valorizam diferentes caminhos de resolução, o professor favorece a mobilização do sentido de número, a compreensão das relações parte–todo e a apropriação das propriedades da operação, em vez de restringir a aprendizagem à execução mecânica de algoritmos. Nesse contexto, a discussão coletiva das estratégias, a argumentação e a validação das soluções permitem que a adição seja compreendida como estrutura matemática dotada de sentido e coerência interna. Assim, o ensino exploratório potencializa o desenvolvimento do raciocínio matemático, da comunicação e da autonomia intelectual, tornando a aprendizagem da adição mais significativa, reflexiva e conceitualmente fundamentada nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

2 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Essa pesquisa é de cunho qualitativo e interpretativo (Bogdan; Biklen, 1994) e está inserida num projeto mais amplo intitulado “Raciocínio matemático e seus processos no ensino e na aprendizagem matemática”, que segue os pressupostos da Investigação Baseada em Design- IBD (Ponte *et al*, 2016) e foi aprovado pelo Comitê de Ética da Universidade Tecnológica Federal do Paraná sob o parecer nº 5.161.835. A pesquisa qualitativa ultrapassa a mera recolha de dados e busca compreender, em profundidade, como os participantes atribuem significado às suas experiências e vivências por meio de uma análise descritiva e interpretativa do contexto em que estão inseridos (Bogdan; Biklen, 1994).

No contexto da Educação Matemática, isso envolve a observação detalhada das interações dos alunos e a análise contínua dos dados coletados, como áudios, vídeos e registros escritos. A abordagem qualitativa, portanto, possibilita identificar e entender como os alunos mobilizam processos de conjectura, justificação, generalização e outros processos do Raciocínio Matemático durante a resolução de tarefas exploratórias. Esses processos são essenciais para a construção de uma compreensão detalhada das estratégias de resolução dos alunos e de como eles interpretam e aplicam os conceitos matemáticos explorados.

A coleta de dados foi realizada durante o ano de 2024 e participaram das tarefas, 24 alunos organizados em duplas. Os alunos tiveram total liberdade para escolherem seus pares, sendo que apenas uma dupla optou por se manter nas três tarefas realizadas (Sonia e Odete), sob a justificativa de que os outros alunos “não sabiam fazer como elas”. É importante dizer, ainda, que todos os nomes são fictícios. Os dados foram coletados por meio da gravação em áudio, vídeo e fotografias durante todas as etapas da aplicação da tarefa, de acordo com o ensino exploratório (Serrazina, 2021). Foram coletados, também, os registros escritos das resoluções dos alunos. É necessário mencionar que todos os alunos participantes da pesquisa tiveram seus Termos de Assentimento Livre e Esclarecido assinados por seus responsáveis.

Na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), a álgebra aparece como uma unidade temática a ser trabalhada a partir do primeiro ano e se estende ao longo do percurso escolar e propõe um trabalho com as ideias de regularidade, generalizações de padrão e propriedades de igualdade. Desse modo, optou-se por trabalhar o conteúdo de adição e a propriedade comutativa nas tarefas exploratórias conforme os pressupostos do ensino exploratório (Ponte, 2010), os quais foram analisados à luz da fundamentação teórica do Raciocínio Matemático e seus processos, que compreendem a busca por semelhanças e diferenças, validação e

exemplificação, foram utilizados para identificar as etapas de Raciocínio Matemático desenvolvidas pelas duplas conforme a definição de Jeannotte e Kieran (2017).

2.1 DESCRIÇÃO DA PESQUISA

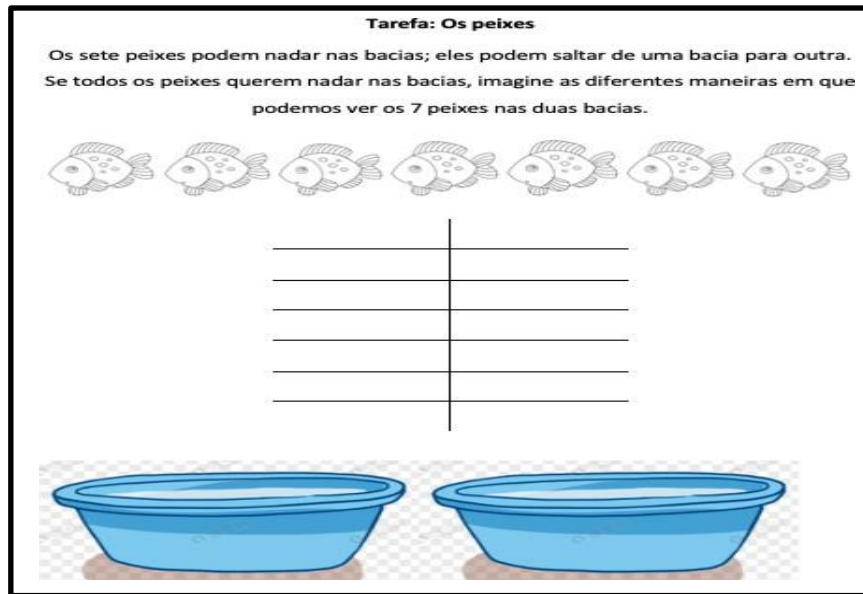
A pesquisa e coleta de dados foram realizadas durante o ano de 2024, quando a autora e professora da turma iniciou o Mestrado no PPGMAT, em uma escola pública de ensino em tempo integral na cidade de Apucarana/PR, onde leciona há 12 anos, numa turma de 1º ano dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental com 24 alunos de 6 e 7 anos de idade. Foram realizadas três tarefas exploratórias com a turma em três momentos diferentes e cada tarefa precisou de 2 aulas na disciplina de Matemática para ser implementada. Houve a participação de todos os alunos da turma, que foram organizados em duplas para a realização das tarefas exploratórias, pois a discussão é um elemento importante para o ensino exploratório e para a análise dos processos de raciocínio matemático mobilizados.

Nesta pesquisa, são analisados os processos de raciocínio matemático mobilizados pelos alunos do primeiro ano, no conteúdo de adição e propriedade comutativa, mediante os estudos realizados anteriormente por Jeannotte e Kieran (2017). Para o desenvolvimento das tarefas com os alunos, seguimos as orientações do ensino exploratório de Ponte (2005, p.15): "a aprendizagem decorre assim, sobretudo, de não ouvir diretamente o professor ou de fazer esta ou aquela atividade prática, mas sim da reflexão realizada pelo aluno a propósito da atividade que realizou".

O ensino exploratório organiza a aula em momentos distintos que favorecem a investigação e a construção do conhecimento matemático. Esse tipo de abordagem se inicia com a apresentação da tarefa, etapa em que o professor introduz a proposta e assegura que os alunos compreendam o que deve ser explorado, sem antecipar procedimentos ou soluções. Em seguida, ocorre o desenvolvimento da tarefa, a partir do trabalho autônomo ou em pequenos grupos, no qual os alunos passam a investigar a tarefa, formular conjecturas e testar estratégias enquanto o professor acompanha o processo, questiona e observa as diferentes formas de raciocínio emergentes. O terceiro momento corresponde à discussão coletiva, considerada central na aula exploratória. É nesse momento que os alunos apresentam suas resoluções, justificam suas ideias e confrontam estratégias, cabendo, ao professor, a função de orquestrar as intervenções e promover um diálogo matemático. Por fim, o professor deve sistematizar as aprendizagens, de modo a consolidar e formalizar os conceitos, procedimentos e generalizações construídos ao longo da investigação. Dessa forma, as etapas estruturam um ambiente de aprendizagem que valoriza o raciocínio matemático.

A primeira tarefa (figura 1), realizada em maio de 2024, consistia em descobrir quantas possibilidades diferentes existiam para colocar 7 peixinhos em duas bacias. Vale ressaltar que, na propriedade comutativa da adição, ao trocar os números de posição, o valor correspondente ao número de peixinhos não se altera.

Figura 1:Tarefa exploratória aplicada na turma do 1º ano



Fonte: Adaptado de Araman; Serrazina e Ponte (2019, p. 475)

A professora iniciou a aula com uma conversa com os alunos sobre como seria a atividade. Em seguida, organizou as crianças em duplas e distribuiu a tarefa. Como se tratava de uma turma de primeiro ano, a professora realizou a leitura e pediu para que cada dupla conversasse sobre o assunto proposto e achasse a solução para a situação apresentada na tarefa. Os alunos começaram as discussões com suas duplas (etapa de resolução autônoma da tarefa), enquanto a professora passava nas carteiras para orientar e instigar os estudantes. Por ser a primeira vez que realizavam este tipo de tarefa, os alunos apresentaram várias dúvidas.

No decorrer da aula, os alunos resolveram a tarefa e, assim que todas as duplas terminaram, a professora foi até a lousa e a preparou para que os próprios alunos escrevessem sobre as resoluções que encontraram. Foram chamados para a lousa 8 alunos, um de cada vez. Cada um escrevia sua resposta, e a professora, com o restante da turma, discutia e validava as resoluções (etapa da discussão coletiva). Caso a resposta não estivesse correta, a professora levantava questões para os alunos como “Por que não está correto?”, “O que está faltando?” e “Como pode ser feito então?”. Conforme os alunos respondiam a professora fazia as considerações e formalizavam os conteúdos abordados (etapa da sistematização). Os alunos

usaram o método de contagem nos dedos e o método de "quanto falta pra chegar no 7" para encontrarem os números corretos em cada linha da tarefa.

A segunda tarefa (figura 2), realizada em agosto de 2024, consistia em formar a quantia de R\$13,00 com moeda de 1 real e notas de 2, 5 e 10 reais, respeitando a regra de não existirem possibilidades iguais.

Figura 2:Tarefa exploratória aplicada na turma do 1º ano

Quais as diferentes maneiras de formar R\$ 13 usando cédulas de R\$ 10, R\$ 5, R\$ 2 e moedas de R\$ 1?



13 = _____

13 = _____

13 = _____

13 = _____

13 = _____

13 = _____

Fonte: Adaptado de Araman e Serrazina (2020)

A professora iniciou a aula explicando que fariam novamente uma tarefa exploratória. Desde a realização da primeira tarefa, as crianças já se sentavam em duplas, então a professora distribuiu as moedas e notas que foram confeccionadas e reproduzidas pela professora (conforme Apêndices A e B), para que elas usassem na tarefa exploratória a ser realizada. A professora realizou a leitura da tarefa e pediu para que cada dupla conversasse sobre o assunto proposto e achasse a solução para a situação apresentada na tarefa. Os alunos começaram as discussões nas duplas (etapa de resolução autônoma da tarefa) enquanto a professora passava nas carteiras para orientar e instigar os estudantes.


Foram chamados para o quadro 6 alunos, um de cada vez. Cada um escrevia sua resposta e a professora, com o restante da turma, discutia e validava as resoluções, o que corresponde à etapa da discussão coletiva. Caso a resposta não estivesse correta a professora levantava questões para os alunos como “Por que não está correto?”, “O que está faltando?”, “Chegou ao resultado de R\$13?” ou “Como pode ser feito então?”. Conforme os alunos

respondiam, a professora fazia as considerações e formalizava os conteúdos abordados (etapa da sistematização).

A terceira tarefa (figura 3), realizada em novembro de 2024, finalizou a coleta de dados para a pesquisa, em que os alunos, em duplas e em posse do material simbólico do dinheiro, teriam que encontrar maneiras de compor R\$18,00, conforme as regras indicadas na tarefa exploratória proposta.

Figura 3:Tarefa exploratória aplicada na turma do 1º ano

Quais as diferentes maneiras de formar R\$ 18 usando cédulas de R\$ 10, R\$ 5, R\$ 2 e moedas de R\$ 1?



COM MOEDAS DE 1 REAL

18 = + + **2** +

18 = + + + + **1**

18 = **10** + + + +

18 = + **5** + + + +

SE NÃO TEM MOEDAS DE 1 REAL

18 = + + + +

18 = + + + + +

Fonte: Adaptado de Araman e Serrazina (2020)

Ao receberem a tarefa, os alunos pensaram que teriam que fazer novamente a tarefa anterior (R\$13,00), porém, ao observarem com atenção, descobriram que se tratava de outra tarefa com dados diferentes. Eles perceberam, também, que existiam algumas regras para desenvolvê-la, notaram que existiam lacunas ou “quadrinhos” (como eles as chamaram), com números já postos e outros quadrinhos em branco. Então, a professora pediu para que os alunos conversassem com suas duplas e descobrissem como resolveriam as lacunas da tarefa (etapa de resolução autônoma da tarefa). A maioria dos alunos já liam, por isso não foi necessário que a professora fizesse a leitura, que somente orientou e explicou as regras de resolução. Após a etapa de resolução das duplas, iniciou-se as apresentações dos resultados (etapa da discussão coletiva). Os alunos foram chamados à lousa para registrarem suas respostas independente de seus resultados estarem corretos ou não. Durante esta etapa, quando algum aluno colocava respostas que não atendiam às regras de resolução da tarefa, os

outros alunos corrigiam e a professora perguntava: “o que está errado?”, “o que está faltando?”, “por que está errado?”, “Repetiu alguma sequência?” ou “Como podemos fazer para deixar correta?” Conforme os alunos respondiam e corrigiam, a professora formalizava as respostas e sistematizava os conteúdos abordados (etapa da sistematização).

Após a implementação das tarefas e a coleta dos áudios e das respostas escritas, o material foi organizado. O primeiro passo foi ouvir os áudios e separar os que pudessem ser usados na pesquisa, foram gravados 12 áudios em cada tarefa, totalizando 36 áudios para serem ouvidos e transcritos. Após serem ouvidos todos os áudios e com os indícios de processos de raciocínio matemático em todas as discussões realizadas pelos alunos e nas estratégias de resoluções em mente, foram selecionados 3 áudios de cada tarefa.

Em seguida, os áudios coletados foram transcritos, e, a partir delas, foram identificados os processos de raciocínio matemático que os alunos mobilizaram durante a resolução da tarefa, com base na literatura estudada sobre o tema. A todo o momento, as transcrições foram confrontadas com a produção escrita dos estudantes para um melhor entendimento de suas resoluções. Além disso, um dos desafios foi encontrar indícios de processos de raciocínio matemático em todas as discussões realizadas pelos alunos e nas estratégias de resoluções, portanto, neste trabalho, foram analisados 3 áudios e transcrições de cada tarefa.

3 PRODUTO EDUCACIONAL

De acordo com o Comunicado nº 001/2012 da Capes, a produção acadêmica nos mestrados profissionais da área de ensino deve, obrigatoriamente, contemplar a elaboração de um Produto Educacional que possa ser objeto de divulgação, análise e utilização por docentes e demais profissionais envolvidos com a educação, seja em ambientes formais ou informais. A Resolução PPGMAT/UTFPR nº 01/2021 dispõe que o discente deve desenvolver e aplicar o referido Produto/Processo Educacional, o qual deve estar em consonância com as normas determinadas pelo Documento de Área de Ensino vigente, emitido pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes), e ser passível de aplicação em contextos reais. O Documento elenca, entre os exemplos de Produtos Educacionais, mídias educacionais, protótipos, materiais para atividades experimentais, textos, recursos interativos e ações de extensão.

Neste contexto, considerando a relevância de promover o desenvolvimento do Raciocínio Matemático, optou-se pela elaboração de um Produto Educacional sob a forma de um guia, que apresenta tarefas para promover o RM na perspectiva do Ensino Exploratório para Adição, contém a fundamentação teórica do RM e das tarefas exploratórias, uma cópia de cada tarefa e sua análise, mostrando quais processos foram mobilizados em algumas resoluções, e os procedimentos para auxiliar os professores a compreender e desenvolver o RM em sala de aula. O objetivo do guia é contribuir com professores em explorar novas abordagens de ensino da matemática e fomentar o aprimoramento do raciocínio matemático por meio de tarefas de caráter exploratório.

O Produto Educacional contempla os processos do raciocínio matemático, fundamentando-se no referencial teórico adotado nesta investigação. As tarefas nele apresentadas e discutidas foram desenvolvidas em uma turma de 1º. Ano do Ensino Fundamental, ou seja, em um contexto real de ensino. Esses aspectos mencionados evidenciam que o Produto Educacional está estritamente relacionado à dissertação desenvolvida, sendo fruto da pesquisa realizada.

Além disso, o guia é um recurso que pode contribuir para a prática docente de profissionais da educação que buscam promover uma aprendizagem dos conceitos matemáticos entre os alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental, que procura articular os conhecimentos oriundos das instituições de Ensino Superior com os conhecimentos oriundos da prática profissional, o que traz significado e consistência ao mesmo.

PRODUTO EDUCACIONAL

**Raciocínio Matemático de
Alunos do 1º Ano na Realização
de Tarefas Exploratórias de
Adição**

**Mathematical Reasoning of First-Grade
Students in Solving Exploratory Addition Tasks**



4 APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS

Neste capítulo, são apresentadas as análises realizadas das tarefas 1, 2 e 3 resolvidas pelas duplas. Foram utilizados, nestas análises, as transcrições dos áudios, os registros escritos e fotografias dos alunos durante as resoluções e discussões das tarefas.

O capítulo está organizado por sequência de tarefas, apresentando os resultados de cada dupla, mostrando os registros escritos, as transcrições dos áudios e as discussões. Ao fim de cada tarefa, discute-se a tarefa e os processos mobilizados pelos alunos e apresenta-se um quadro que sintetiza os processos do Raciocínio Matemático mobilizados pelas duplas durante a resolução das tarefas de acordo com os destacados na literatura por Jeannotte e Kieran (2017).

4.1 TAREFA 1:

4.1.1 Dupla 1: (Sonia e Odete)

Figura 4: Registro escrito da tarefa

The image shows two versions of a math task titled 'Tarefa: Os peixes'. The text in both versions is: 'Os sete peixes podem nadar nas bacias; eles podem saltar de uma bacia para outra. Se todos os peixes querem nadar nas bacias, imagine as diferentes maneiras em que podemos ver os 7 peixes nas duas bacias.' The left version shows 7 colorful fish in a row and one fish below. The right version shows 7 striped fish in a row and one fish below. Below each diagram is a vertical number line with a dashed midline. The left number line has '0' at the bottom and '7' at the top, with handwritten numbers 5, 6, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 from bottom to top. The right number line has '0' at the bottom and '6' at the top, with handwritten numbers 1, 2, 3, 4, 5, 6 from bottom to top.

Fonte: Dados da pesquisa

Transcrição do áudio: (Sonia e Odete):

Odete: Um peixe aqui.

Sonia: Odete, se pôr um peixe lá, quantos vai pôr na outra bacia?

Odete: Aí dá pra pôr seis peixes.

Sonia: Ô, tia, tá certo aqui?

Professora: Deu sete peixinhos?

Odete: Deu sim, ó.

Sonia: Agora vou fazer na bacia.

Professora: É melhor fazer os números na linha.

Odete: Tá, então, vou pôr três aqui e quatro ali.

Sonia: Deu sete também.

Odete: Ô, tia, pode pôr sete?

Professora: Você acha que dá?

Sonia: Dá, porque eu tenho sete peixinhos, ó.

Professora: E se você pôr sete, quanto sobra na outra bacia?

Odete: Nenhum.

Professora: E que número é nenhum?

Sonia: Hum, é o zero. Pode pôr?

Professora: Sete mais zero dá sete? 7?

Odete: Dá sim, olha na bacia!

Professora: Agora acabou?

Alunas: Não! Faltam duas linhas para colocar.

Professora: E que números você vai colocar?

Odete: 4 e 3.

Sonia: Verdade, dá 7.

Odete: Aqui eu vou pôr o 2 agora, e aqui o 5. Olha, vai dar 7 também.

Sonia: Eu vou pôr o 4 mais o 3.

Odete: Já tem ali em cima, ó.

Sonia: E se pôr 5 mais 2? Dá 7 também.

Odete: É, então acabou.

Alunas: Ô, tia, acabamos!

Professora: Não tem mais chances nem possibilidades?

Sonia: No nosso não, mas no da Milena dá. Pode ajudar ela?

Professora: Não. Pode pintar o de vocês que eu vou conversar com a Milena.

- Análise do diálogo entre Sonia e Odete sob a luz dos processos do raciocínio matemático conforme a definição de Jeannotte e Kieran (2017):

Desde o início, as alunas fazem suposições sobre a quantidade de peixes a serem distribuídos entre as bacias, formulando **conjecturas**. Por exemplo: Sonia pergunta à Odete quantos peixes serão colocados na outra bacia, incentivando a reflexão sobre diferentes possibilidades. Além disso, ao questionar a professora se “*sete mais zero dá sete*”, as alunas estão recorrendo às propriedades da adição. Nesta fala, pode-se ver claramente o elemento neutro dando suporte à elaboração de conjecturas.

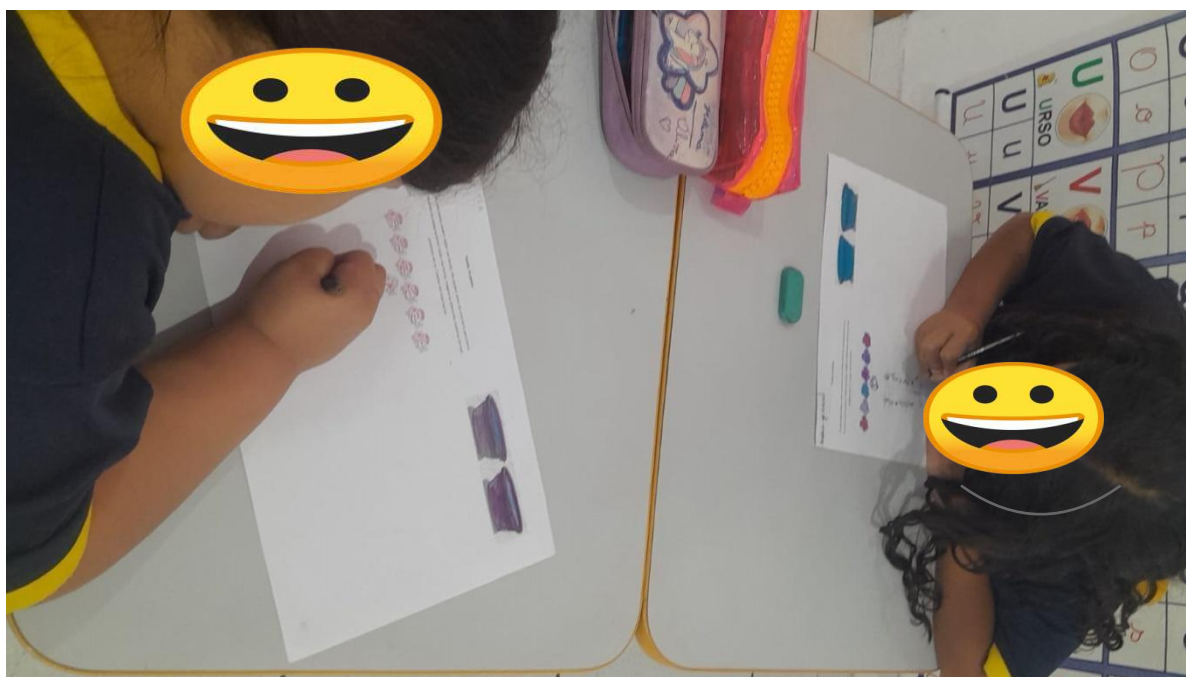
As alunas logo começam a perceber que diferentes combinações de números podem resultar no mesmo total de sete, o que fica evidente quando Sonia diz “*E se pôr 5 mais 2? Dá 7 também*”, reconhecendo um padrão na soma de diferentes pares de números. A **generalização** de Sonia fortalece a compreensão da decomposição do número 7.

Durante a tarefa, Sonia e Odete **justificam** suas escolhas e verificam os resultados. Quando a professora pergunta “*sete mais zero dá sete?*”, Odete responde com confiança e aponta para a bacia, com um recurso visual para validar sua resposta. Outro exemplo ocorre

quando Sonia verifica que “ $4 + 3$ dá 7” e explica que já havia usado essa combinação antes. A validação acontece ao longo do diálogo, principalmente quando as alunas revisam suas respostas e conferem com a professora. Elas também percebem que já usaram certas combinações antes, o que as ajuda a garantir que todas as possibilidades foram exploradas corretamente. Além disso, ao final, verificam se há mais possibilidades antes de considerar a tarefa concluída.

Em síntese, a análise do diálogo entre Sonia e Odete evidencia a mobilização de três processos do raciocínio matemático propostos por Jeannotte e Kieran (2017): formulação de conjectura, generalização e justificação. Inicialmente, as alunas formulam hipóteses sobre a distribuição dos peixes entre as bacias, demonstrando a capacidade de levantar suposições e explorar possibilidades numéricas. Posteriormente, avançam para a generalização ao reconhecer que distintas combinações numéricas resultam no mesmo total, evidenciando a compreensão de padrões e da decomposição do número 7. Por fim, realizam a validação ao revisar suas estratégias, conferir os resultados com a professora e verificar se todas as possibilidades foram contempladas. Em seguida, recorrem à justificação ao explicitar seus raciocínios e utilizar representações visuais para sustentar as respostas. Esses elementos indicam a importância de tarefas exploratórias para o desenvolvimento do raciocínio matemático nos primeiros anos de escolaridade.

Figura 5: Realização da tarefa em duplas



Fonte: Dados da pesquisa

4.1.2 Dupla 2: (Bruno e José)

Figura 6: Registro escrito da tarefa

refa: Os peixes

Os sete peixes podem nadar nas bacias; eles podem saltar de uma bacia para outra.
Se todos os peixes querem nadar nas bacias, imagine as diferentes maneiras em que podemos ver os 7 peixes nas duas bacias.

9	4
1	6
6	1
2	5
4	2
0	7
7	0
5	2

Tarefa: Os peixes

Os sete peixes podem nadar nas bacias; eles podem saltar de uma bacia para outra.
Se todos os peixes querem nadar nas bacias, imagine as diferentes maneiras em que podemos ver os 7 peixes nas duas bacias.

3	4
1	6
6	1
2	5
4	2
0	7
7	0
5	2

Fonte: Dados da pesquisa

Transcrição do áudio: (Bruno e José):**Bruno:** Eu vou pôr três.**José:** O três depois o quatro, ó. Um, dois, três, quatro.**Bruno:** Que quatro?**José:** É sim. Três e quatro dá sete, conta aí pra você ver.**Bruno:** Ah, é? Deu sete.**José:** Vou pôr o seis aqui e o quatro.**Professora:** Mas, gente, quanto que dá seis mais quatro?**Bruno:** Deixa eu pensar. Seis mais um, dois, três, quatro, dá dez.**Professora:** E vocês têm dez peixinhos?**Alunos:** Não. Só sete.**José:** Bruno, aqui eu vou pôr um.**Bruno:** Sobrou um, dois, três, quatro, cinco e seis. Então, dá pra pôr seis.**José:** Isso, ficam um e seis.**Bruno:** Agora vou por seis.**Professora:** Então, se deixar os seis aqui, quanto vocês vão pôr lá?**José:** Eu vou apagar e contar até chegar nos sete.**Bruno:** Vai ficar só um.**Professora:** Deu sete?**José:** Dá sim.**Bruno:** Então, agora, vamos pintar.**José:** Vamos continuar, depois a gente pinta.**Bruno:** Vamos colocar três aqui e contar pra ver quanto falta.**José:** Três a gente já colocou e o um também.**Bruno:** Verdade, então vamos tentar com o número dois.**José:** Acho que com o dois dá sim, ó...**Bruno:** Dois e quanto pra chegar no sete?**José:** Vou contar 2, né. Agora 3, 4, 5, 6 e 7.

Bruno:Então vai ficar dois e cinco pra dar sete.

José:Isso mesmo, vamos fazer outro.

Bruno:José, você percebeu que estamos usando números de 1 até 7?

José:É porque temos que colocar esses 7 peixinhos nas bacias e não pode repetir.

Bruno:E qual número a gente ainda não usou?

José:Vou ver

(silêncio)

Bruno:No meu falta os números 4 e 7.

José:Será que o zero conta também?

Bruno:Não sei depois a gente pergunta pra professora, vamos colocar quatro nessa linha.

José:Tá, é quatro com três pra dar sete, porque lá em cima a gente colocou trocado.

Bruno:Será que é assim? Só trocar os números?

José:Vou usar o zero, ele não tá em nenhuma linha.

Bruno: Zero com quem que dá sete?

José:Vou perguntar pra professora. Prof que a gente coloca com zero?

Professora: Quanto vale o zero?

Alunos: Nada, o zero é nada.

Professora: Então se vocês não colocarem nada numa bacia, quantos peixes sobram para a outra bacia?

Alunos: Sobram todos, os sete peixes vão pra outra bacia.

Professora: Como escrever isso na tarefa?

Bruno: Zero de um lado e sete do outro.

José: E dá pra trocar também 7 e 0.

Bruno: Que legal, nós terminamos.

- Análise do diálogo entre Bruno e José sob a luz dos processos do raciocínio matemático conforme a definição de Jeannotte e Kieran (2017):

A interação em questão evidencia a mobilização do processo de **conjecturar** continuamente, no qual diferentes possibilidades são levantadas, testadas e reformuladas em função dos resultados obtidos. Os alunos iniciam o diálogo a partir da formulação de hipóteses sobre possíveis combinações numéricas que resultam em sete. Bruno propõe “três”, ao que José complementa com “três e quatro”, convidando-o a verificar a soma por meio da contagem. Ao longo da interação, novas conjecturas são apresentadas, como “seis e quatro”, “um e seis”, “dois e cinco”, “quatro e três” e, posteriormente, “zero e sete”.

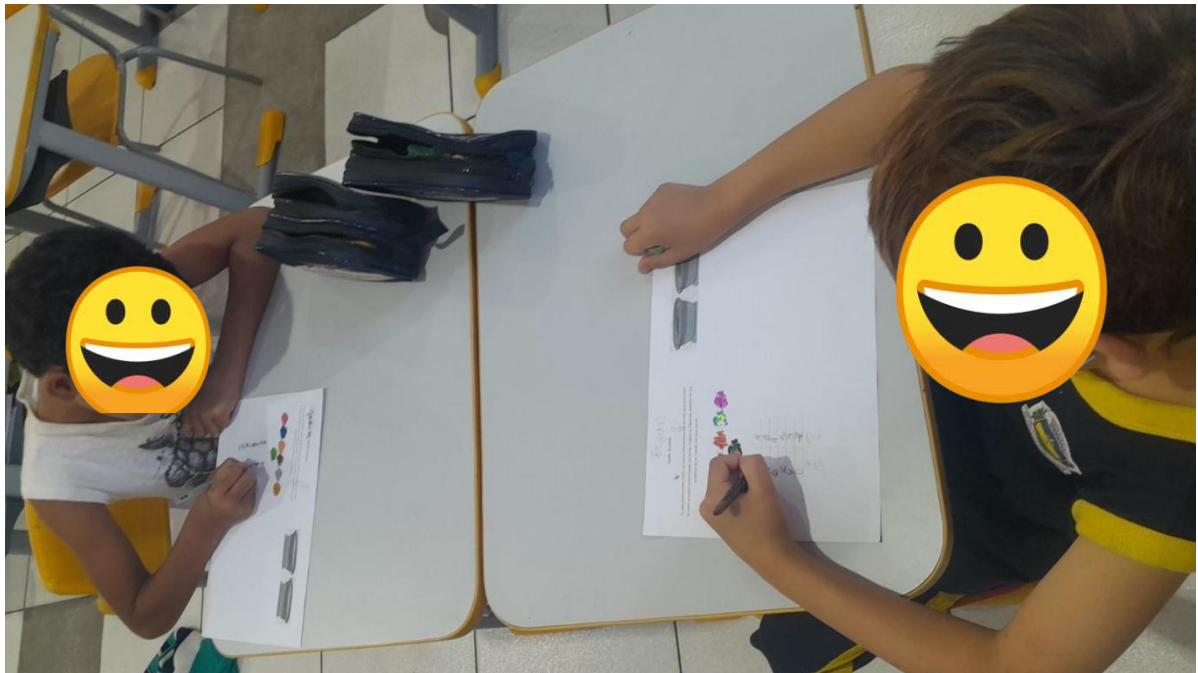
No decorrer da tarefa, os alunos avançam para um nível mais abstrato de raciocínio, mobilizando o processo de **generalização** e reconhecendo regularidades no processo de decomposição do número sete. Bruno observa: “Você percebeu que estamos usando números de 1 até 7?” José responde que isso ocorre porque é necessário distribuir os sete peixinhos “sem repetir”. Esse momento do diálogo demonstra a identificação de um padrão estrutural relacionado ao conjunto de possibilidades numéricas disponíveis. A inclusão das combinações envolvendo o zero (0 e 7; 7 e 0) evidencia, ainda, uma ampliação desse padrão, que mostra a flexibilidade, a compreensão da estrutura aditiva e o reconhecimento de zero como o elemento neutro da adição.

A **justificação** ocorre tanto entre os pares quanto na interação com a professora. José afirma: “*Três e quatro dá sete, conta aí pra você ver*”, utilizando a contagem como estratégia para fundamentar a proposição. De modo semelhante, ao discutirem o uso do número zero, os alunos recorrem à professora para esclarecer seu significado como elemento neutro da adição, compreendendo que somar zero a um número não altera o seu valor e analisando como essa propriedade se aplica à tarefa. A argumentação oral e a utilização de estratégias de cálculo mental funcionam como instrumentos para explicitar e sustentar as ideias apresentadas.

A validação está presente de maneira recorrente ao longo do diálogo. Os alunos revisam suas hipóteses utilizando estratégias de contagem, confrontam combinações já registradas para evitar repetições e recorrem à mediação docente para confirmar a adequação das respostas. A professora, ao questionar “*quanto vale o zero?*”, conduz os alunos a refletirem sobre a natureza desse número no contexto da tarefa e permite que validem autonomamente as combinações que envolvem o zero. O processo de verificação evidencia uma postura investigativa, na qual os alunos assumem um papel ativo na conferência e consolidação dos resultados. De forma geral, a interação entre Bruno e José exemplifica a articulação dos processos de raciocínio matemático em um ambiente colaborativo, como sugere o ensino exploratório (Ponte, 2005).

A tarefa possibilitou que os alunos desenvolvessem uma compreensão mais profunda das propriedades da adição e da decomposição numérica. Os dados analisados permitem inferir que, ao longo da tarefa, os alunos mobilizaram e aprofundaram sua compreensão de importantes propriedades da adição. A formulação de pares como “*três e quatro*” e “*quatro e três*” evidencia o reconhecimento da propriedade comutativa, o que revela que compreenderam que a ordem das parcelas não altera o resultado. A inclusão das combinações “*0 e 7*” e “*7 e 0*” demonstra um entendimento da propriedade do elemento neutro ao perceberem que adicionar zero não modifica o valor do número. Além disso, o conjunto de combinações produzido indica o domínio crescente da estrutura aditiva, especialmente no que se refere à decomposição do número sete e ao reconhecimento de padrões, aspecto que sustenta o processo de generalização. As verificações realizadas por contagem reforçam, ainda, a compreensão da propriedade da igualdade, mostrando que diferentes pares de números podem compor o mesmo total.

Figura 7: Realização da tarefa




Fonte: Dados da pesquisa

4.1.3 Dupla 3: (Emília e Fernando)

Figura 8: Registro escrito da tarefa

Tarefa: Os peixes


Os sete peixes podem nadar nas bacias; eles podem saltar de uma bacia para outra.
Se todos os peixes quiserem nadar nas bacias, imagine as diferentes maneiras em que podemos ver os 7 peixes nas duas bacias.



7	0
2	5
3	4
4	3
0	7
1	6
5	2

Tarefa: Os peixes

Os sete peixes podem nadar nas bacias; eles podem saltar de uma bacia para outra.
Se todos os peixes quiserem nadar nas bacias, imagine as diferentes maneiras em que podemos ver os 7 peixes nas duas bacias.



7	0
2	5
3	4
4	3
6	1
0	7
1	6
5	2

Fonte: Dados da pesquisa

Transcrição do áudio: (Fernando e Emília):

Fernando: Sete mais zero dá quantos?

Emília: Sete!

Fernando: Sete! Isso mesmo

Emília: Sim! E agora qual a gente vai colocar?

Fernando: Agora a gente vai pegar 3 mais 4.

Emília: 1, 2, 3, 4... 5, 6, 7. Dá sete!

Fernando: Dá sete mesmo?

Emília: Sim! Mas tem que colocar um número de cada lado.

Fernando: Tá certo prô?

Professora: Vamos ver... Até aqui onde fizeram tá certo sim. E agora? Vocês têm que olhar os números que não usaram ainda.

Fernando: E se fizermos 1 mais 5?

Emília: Dá seis. Mas precisa dar sete!

Fernando: Ah, então errei aqui. Espera aí... E se fizermos 2 mais 5?

Emília: Dá sete!

Fernando: Sim, agora conseguimos mais uma maneira! (aplausos)

Emília: E se fizermos 4 mais 3?

Fernando: Dá sete também!

Emília: Então, o que falta?

Fernando: Acho que o 6! Se colocar o 6 de um lado, o que colocar no outro?

Emília: O 1!

Fernando: Sim! 6 mais 1 dá sete.

Emília: Agora falta o zero! Se colocar o zero de um lado, o que colocar no outro?

Fernando: O sete!

Professora: Muito bem! E agora, tem mais alguma combinação possível?

Emília: Acho que acabamos!

Fernando: Sim, conseguimos todas as formas de somar sete!

Professora: Parabéns! Vocês conseguiram encontrar todas as combinações.

- Análise do diálogo entre Fernando e Emília, sob a luz dos processos do raciocínio matemático conforme a definição de Jeannotte e Kieran (2017):

Os alunos formulam **conjecturas** ao testar diferentes somas para obter o total de 7. As conjecturas ocorrem quando eles sugerem combinações como: "Agora a gente vai pegar 3 mais 4." Ou "E se fizermos 1 mais 5?" ou "Acho que o 6! Se colocar o 6 de um lado, o que colocar no outro?" "Esse comportamento demonstra que estão raciocinando sobre possíveis soluções antes de confirmar a resposta. A interação entre Fernando, Emília e a professora é um aspecto que favorece o raciocínio matemático. Eles verbalizam o que estão pensando, explicam suas escolhas e ajustam suas respostas com base no feedback mútuo. Além disso, a professora atua como mediadora ao incentivar o raciocínio autônomo: "Vocês têm que olhar os números que não usaram ainda." Ou "Muito bem! E agora, tem mais alguma combinação possível?" O diálogo fortalece a construção coletiva do conhecimento e promove uma compreensão mais profunda dos conceitos matemáticos.

Ao longo da tarefa, Fernando e Emília começam a perceber padrões nas somas que resultam em 7. Eles exploram diversas possibilidades até identificarem que existe um conjunto limitado de combinações possíveis: "Então, o que falta?"; "Acho que o 6!"; "Agora

falta o zero! Se colocar o zero de um lado, o que colocar no outro?" Essa **generalização** é um processo do raciocínio matemático. Os alunos percebem padrões nas somas que resultam em 7, o que demonstra um avanço no reconhecimento de regularidades matemáticas. A generalização reflete a abordagem investigativa recomendada por Jeannotte e Kieran (2017), na qual os alunos constroem o conhecimento por meio da exploração e da revisão contínua de suas próprias soluções.

Os alunos verificam e validam suas respostas por meio da contagem: "1, 2, 3, 4... 5, 6, 7. *Dá sete!*"; "*Dá sete mesmo?*"; "*Sim, agora conseguimos mais uma maneira!*" Esse processo de **justificação** matemática é essencial para consolidar o conhecimento, pois eles não apenas tentam diferentes combinações, mas, também, garantem que os cálculos estejam corretos. Durante a tarefa, os alunos demonstram um processo ativo de tentativa e erro, o que evidencia o raciocínio matemático associado à validação. Esse movimento aparece quando reconhecem equívocos, revisam procedimentos e ajustam suas estratégias — "*Ah, então errei aqui. Espera aí...*". O comportamento demonstrado está alinhado ao que afirmam Ponte, Brocardo e Oliveira (2009), visto que, segundo os autores, a validação envolve analisar criticamente os resultados obtidos, confrontar estratégias utilizadas e verificar a adequação das respostas produzidas. Assim, ao revisarem suas combinações e conferirem cada possibilidade, os alunos mobilizam esse processo de validação de forma autônoma.

A análise do diálogo à luz dos conceitos de Jeannotte e Kieran (2017) revela que Fernando e Emília estão engajados em um processo ativo de raciocínio matemático. Eles fazem conjecturas, testam diferentes estratégias de resolução, justificam suas respostas, identificam padrões e comunicam suas descobertas. Além disso, a mediação da professora contribui para que os alunos reflitam e explorem diversas possibilidades antes de consolidar o aprendizado. A professora age como mediadora, de modo a incentivar os alunos a pensarem sobre suas respostas em vez de simplesmente fornecer a solução (Ponte; Brocardo; Oliveira, 2009). Ela estimula a reflexão e a descoberta autônoma. Esse tipo de abordagem favorece a construção do raciocínio matemático e permite que os alunos não apenas cheguem a respostas corretas, mas, também, desenvolvam autonomia e habilidades para resolver tarefas matemáticas.

Figura 9: Realização da tarefa em duplas



Fonte: Dados da pesquisa

4.1.4 Discussão dos resultados da tarefa 1:

A análise dos diálogos evidencia que tarefas exploratórias estruturadas, quando realizadas em contexto colaborativo e mediadas pelo professor, apresentam grande potencial para mobilizar os processos de raciocínio matemático descritos por Jeannotte e Kieran (2017). Observa-se que os alunos não apenas executam procedimentos de cálculo, mas engajam-se em tarefas cognitivas complexas, formulam conjecturas, testam estratégias, justificam escolhas e verificam a consistência de suas respostas, o que caracteriza uma mobilização do raciocínio matemático.

O processo de **conjectura** se manifestou quando os alunos levantaram diferentes possibilidades de decomposição do número 7, explorando combinações numéricas e antecipando resultados, ainda que algumas conjecturas fossem inicialmente incorretas. Conforme Araman e Serrazina (2020), a elaboração de conjecturas permite que os alunos criem narrativas prováveis ou possíveis, possibilitando uma construção ativa de conhecimento.

O processo de **generalização** foi evidenciado quando os alunos reconheceram padrões estruturais, como a propriedade comutativa da adição, aplicando o entendimento a diferentes combinações que resultam no mesmo total. Esse movimento de generalização demonstra a capacidade dos estudantes de transpor situações concretas para regras matemáticas mais amplas, o que corrobora Morais, Serrazina e Ponte (2018), que destacam

que alunos de diferentes anos escolares desenvolvem generalizações de acordo com sua experiência e maturidade cognitiva.

Por fim, a validação ocorreu durante a revisão de estratégias, a verificação de resultados e a consulta à professora para confirmar hipóteses, o que evidencia a consciência da necessidade de conferir a correção e a completude das soluções propostas. A **justificação**, por sua vez, emergiu tanto nas interações entre os pares — por meio da explicitação verbal do raciocínio e do uso de estratégias de contagem — quanto na interlocução com a professora, que estimulava a fundamentação das respostas, alinhando-se à definição de Jeannotte e Kieran (2017, p. 12), que propõe que o processo de justificar significa buscar evidências que permitam modificar ou consolidar o valor epistêmico de uma afirmação.

Em síntese, a articulação desses processos indica que as tarefas exploratórias e o ensino exploratório, combinados à interação entre pares e à mediação docente reflexiva, promove um ambiente propício para o desenvolvimento do raciocínio matemático nos anos iniciais. Mais do que alcançar respostas corretas, essas práticas favorecem a autonomia intelectual, a capacidade argumentativa e a reflexão crítica, o que permite que os alunos construam significados matemáticos de forma estruturada e lógica, conforme preconizado por Jeannotte e Kieran (2017). Tais resultados reforçam a relevância de práticas pedagógicas que integrem exploração, comunicação e validação colaborativa, conforme preconiza o ensino exploratório (Serrazina, 2021), consolidando competências essenciais para a aprendizagem matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Além disso, a análise revela que, ao longo da tarefa, os alunos mobilizaram importantes propriedades da adição, o que contribuiu para a compreensão conceitual da operação. A propriedade da decomposição aditiva é observada quando exploram diferentes maneiras de formar o número 7, reconhecendo que uma mesma quantidade pode ser representada por diversas combinações de parcelas. A propriedade comutativa se torna evidente quando percebem que a ordem das parcelas não altera o resultado da soma, o que valida combinações equivalentes, como $3 + 4$ e $4 + 3$. Ademais, a discussão sobre o uso do zero demonstra a compreensão inicial da propriedade do elemento neutro, uma vez que os alunos identificam que somar zero não modifica o valor da outra parcela ($0 + 7 = 7$; $7 + 0 = 7$). A mobilização dessas propriedades indica que, para além da execução de cálculos, os estudantes avançam na construção de significados estruturais da adição, elemento essencial para o desenvolvimento do raciocínio matemático nos primeiros anos escolares.

No Quadro 4, há uma síntese do que foi levado em consideração nas resoluções e diálogos dos alunos e permitiu identificar a presença das ações de conjecturar, generalizar e justificar em todas as duplas analisadas:

Quadro 4: Resultados dos Processos do RM mobilizados pelos alunos



Processos do RM	Indicadores	Dupla
Conjecturar	Elaboraram uma estratégia de resolução da tarefa apoiada na propriedade comutativa da adição.	1, 2 e 3
Generalizar	Perceberam que a propriedade comutativa pode ser estendida para todos os casos do domínio.	1, 2 e 3
Justificar	Apresentaram uma justificativa matemática para validar ou refutar a resolução obtida.	1, 2 e 3

Fonte: Dados da pesquisa

4.2 TAREFA 2:

4.2.1 Dupla 1: (Sonia e Odete)

Figura 10: Registro escrito da tarefa

<p>Quais as diferentes maneiras de formar R\$ 13 usando cédulas de R\$ 10, R\$ 5, R\$ 2 e moedas de R\$ 1?</p>  <p>13 = <u>10-1-1-1</u></p> <p>13 = <u>5-5-2-1</u></p> <p>13 = <u>2-2-1-1-1-1-1-1-2-1-1-1</u></p> <p>13 = <u>10-2-1</u></p> <p>13 = <u>1-1-1-1-1-1-1-1-1-1-1-1-1-1-1-1</u></p> <p>13 = <u>2-2-2-2-2-2-1</u></p>	<p>Quais as diferentes maneiras de formar R\$ 13 usando cédulas de R\$ 10, R\$ 5, R\$ 2 e moedas de R\$ 1?</p>  <p>13 = <u>10-1-1-1</u></p> <p>13 = <u>5-5-2-1</u></p> <p>13 = <u>2-2-1-1-1-1-1-1-1-1-1-1</u></p> <p>13 = <u>10-2-1</u></p> <p>13 = <u>1-1-1-1-1-1-1-1-1-1-1-1-1-1-1-1</u></p> <p>13 = <u>2-2-2-2-2-2-1</u></p>
--	---

Fonte: Dados da pesquisa

Transcrição do áudio: (Sonia e Odete):

Odete: Eu já pensei no primeiro jeito. Pega o dez. A gente vai pegar o dez e três moedinhas de um real.

Sonia: Peguei o dez e três moedinhas de um real.

Odete: Tá bom. $10 + 1 + 1 + 1 = 13$ reais

Sonia: Agora pega o 5. E depois mais 5. Agora, três moedinhas.

Odete: Não. Pega dois reais para não repetir com muito 1.

Sonia: Dois reais não, porque vai dar quatorze reais, vai ficar errado.

Odete: Só uma nota de dois. Vai dar certo, quer ver $5 + 5 + 2 + 1$.

Sonia: Então vamos fazer...

Odete: Cinco mais cinco. Depois, dois mais, uma moedinha de um real deu certo, 13 reais

Sonia: Agora Odete, agora é... Pega duas notas de 2 reais e termina tudo com moedinhas de 1 real até dar 13 reais.

Odete: Pronto. Agora vamos contar $2 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 13$ reais.

Sonia: É pra gente fazer, não é pra você ficar contando as moedinhas.

Odete: Tô fazendo... Pronto, vamos na outra linha.

Sonia: Olha já montei outro jeito aqui, ó.

Odete: Calma, não coloca 10.

Sonia: Porque não Odete, a gente já fez com 10 e moedinhas de 1 real. Nesse eu troquei 2 moedinhas por uma nota de 2 reais.

Odete: Tem dez, aí depois 2 reais e depois uma moeda, vai ficar igual o cinco?

Sonia: Não, aí a gente tem 10 também. Aí lembra que não pode repetir os dinheiros, né? Chama a professora.

Odete: Oh prô, a Sonia falou que não pode repetir, é verdade?

Professora: O jeito que vocês montaram com o dinheiro é o jeito que vocês têm que passar no papel. Tá bom? E é verdade sim, não pode repetir.

Odete: Então desse jeito que você fez está certo, vou escrever $10 + 2 + 1 = 13$ reais.

Sonia: Isso mesmo, vamos escrever aqui na folha.

Odete: Olha eu pensei de colocar tudo com moedinhas de 1 real: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13.

Sonia: Aí, ó. 1, 2, 3, 4. Quantas moedinhas?

Odete: Treze moedinhas.

Sonia: Mas, Odete será que vai dar certo um mais um, mais um, mais um, mais um, mais um, mais um, mais um, mais um, mais um. É bem mais. Um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete. Um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove, dez, onze, doze, treze.

Odete: Sim. É um real.

Sonia: Sempre tem que dar 13 né?

Odete: Isso sempre 13 reais. Viu deu certo (risos).

Sonia: Então eu sei outro.

Odete: Mas você não pode repetir.

Sonia: Odete, já sei. Vamos colocar notas de dois.

Odete: Tudo 2?

Sonia: Odete, é assim: é dois em tudo e 1 moedinha. Aí, no final, coloca um real.

Odete: Eu contei assim $2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2$ vai dar 12.

Sonia: E agora coloca uma moedinha. $12 + 1 = 13$ reais

Odete: Nós terminamos tudo, vamos chamar a prô.

Sonia: Calma vamos conferir tudo primeiro depois a gente chama ela (risos).

Odete: Todas as linhas deu 13 reais.

Sonia: Mas vamos olhar se não tem nenhum repetido.

Odete: No meu não tem.

Sonia: O meu também está certo.

Alunas: Prô, nós terminamos tudo (aplausos).

Professora: E aí, terminou aqui meninas? Deu tudo certo aí?

Alunas: Sim.

Professora: Nenhum repetido?

Alunas: Não.

Professora: Não? Então coloca o nome, pinta e pode recolher o dinheiro agora.

- Análise do diálogo entre Odete e Sonia sob a luz dos processos do raciocínio matemático conforme a definição de Jeannotte e Kieran (2017):

A interação entre Odete e Sonia evidencia a mobilização de diferentes processos de raciocínio matemático durante a realização da tarefa de composição do valor de R\$ 13,00 a partir de notas e moedas de diferentes valores e destacaram, principalmente, os processos de conjecturar, comparar, identificar padrões e justificar.

O processo de conjectura manifesta-se logo no início, quando Odete propõe a primeira possibilidade de decomposição do valor total ao sugerir: “Pega o dez e três moedinhas de um real”. Essa formulação representa uma conjectura inicial de como compor o número 13, a qual é prontamente verificada por Sonia ao calcular “ $10 + 1 + 1 + 1 = 13$

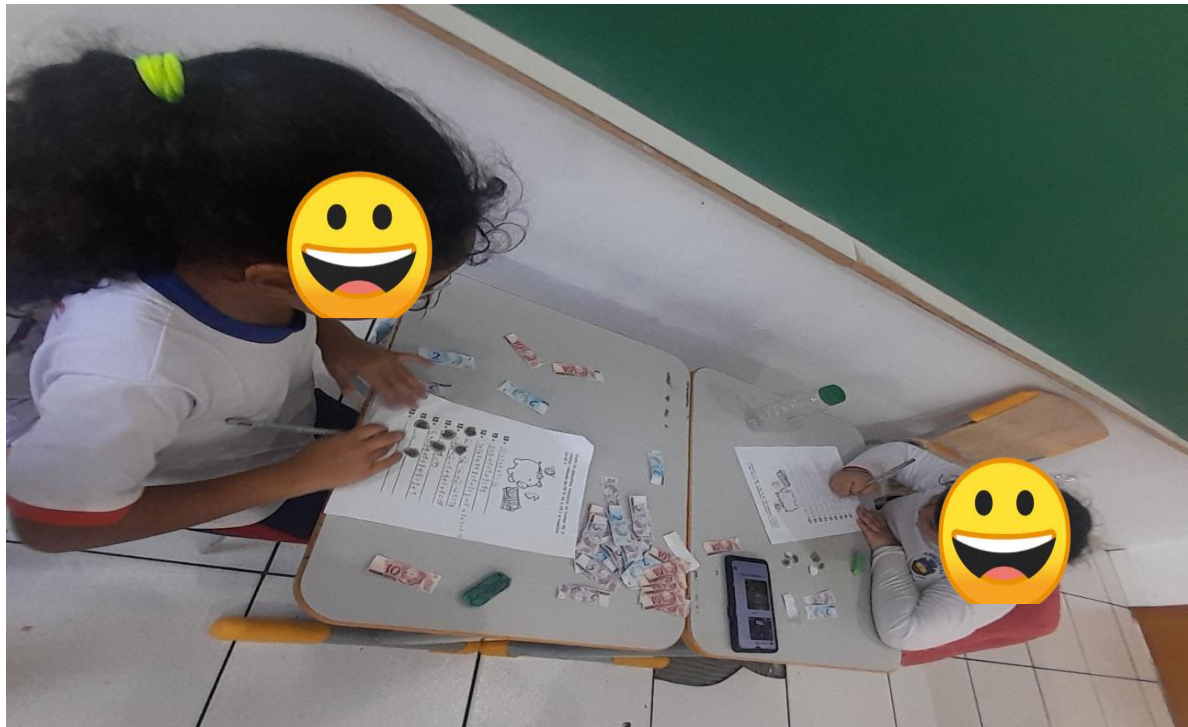
reais”. Ao longo do diálogo, surgem outras combinações, como “ $5 + 5 + 2 + 1$ ” ou a utilização exclusiva de moedas de R\$ 1,00. Tais propostas, porém, não configuram conjecturas distintas, trata-se de diferentes maneiras de testar e refinar uma mesma conjectura geral: a de que *o número 13 pode ser decomposto de múltiplas formas*. Essas diferentes representações evidenciam a propriedade de decomposição da adição, característica central do processo de conjecturar, que envolve antecipar resultados, formular hipóteses e examiná-las à luz da tarefa (Jeannotte; Kieran, 2017).

O processo de **generalização** emerge quando as alunas percebem que há diversas formas de compor 13 reais. Elas generalizam a ideia de que qualquer número pode ser formado por diferentes combinações de valores: *"Olha, eu pensei em colocar tudo com moedinhas de 1 real."* Aqui, elas testam a decomposição máxima de um número e percebem que qualquer valor pode ser formado a partir da soma de elementos menores de forma ordenada. Tal entendimento é coerente com o que afirmam Ponte, Brocardo e Oliveira (2009) ao destacarem que a flexibilidade na representação de números constitui um elemento central do raciocínio matemático. Do mesmo modo, Van de Walle (2009) ressalta que a decomposição numérica é essencial para que os alunos desenvolvam a capacidade de generalizar e identificar padrões.

O **processo de comparação** é mobilizado quando as alunas verificam se existem combinações repetidas. Sonia, ao realizar uma análise comparativa entre as diferentes soluções encontradas, propõe: *"Mas vamos olhar se não tem nenhum repetido"*. A ação de Sonia reflete uma atitude analítica e sistemática diante das possibilidades de resposta, que permite organizar e distinguir as diferentes decomposições encontradas.

Por fim, o **processo de justificação** aparece no momento em que as alunas argumentam a favor de validar ou refutar determinadas combinações. Por exemplo, Sonia refuta a sugestão de usar duas notas de R\$ 2,00 ao afirmar: *"Dois reais não, porque vai dar quatorze reais, vai ficar errado"*. Observa-se, também, que as estudantes recorrem a contagens e cálculos orais para verificar se as somas correspondem ao valor esperado. Segundo Jeannotte e Kieran (2017), justificar envolve apresentar razões que sustentem ou refutem conjecturas, mesmo que essas justificativas se baseiem em estratégias, como ocorre nesta interação.


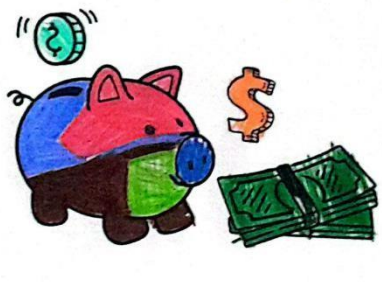
Figura 11: Realização da tarefa em duplas



Fonte: Dados da pesquisa

4.2.2 Dupla 2: (Luís e Yara)

Figura 12: Registro escrito da tarefa

<p>Quais as diferentes maneiras de formar R\$ 13 usando cédulas de R\$ 10, R\$ 5, R\$ 2 e moedas de R\$ 1?</p>	<p>Quais as diferentes maneiras de formar R\$ 13 usando cédulas de R\$ 10, R\$ 5, R\$ 2 e moedas de R\$ 1?</p>
	
<p>13 = 2-2-2-2-1-1</p>	<p>13 = 5-2-2-2-1-1</p>
<p>13 = 2-2-2-2-2-2-1</p>	<p>13 = 2-2-2-2-2-2-1</p>
<p>13 = 2-2-2-2-5</p>	<p>13 = 2-2-2-2-5</p>
<p>13 = 10-2-1</p>	<p>13 = 10-2-1</p>
<p>13 = 2-2-2-2-1-1-1-1</p>	<p>13 = 2-2-2-2-1-1-1-1</p>
<p>13 = 5-5-2-1</p>	<p>13 = 5-5-2-1</p>

Fonte: Dados da pesquisa

Transcrição do áudio: (Luís e Yara):

Luís: *É assim, se colocar 5, 2, 2, 2, 1 e mais 1, quanto que dá?*

Yara: *Olha como que vai ser: $5 + 2 + 2 + 2 + 1 + 1 = 13$.*

Luís: *E esse aqui, você tá vendo?*

Yara: *Mas eu não tenho.*

Luís: *É pra você colocar... Vamos colocar 2, 2, 1, 2, 2, 2 reais.*

Yara: *Tá. $2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1 = 13$.*

Luís: *Agora 2, mais 2. E mais 2, e mais 2. Quanto é?*

Yara: *É 8. Então, vamos ver.*

Luís: $2 + 2 + 2 + 2 = 8$.

Yara: *Não sei, vamos ver quanto falta.*

Luís: *8, 9, 10, 11, 12, 13, falta 5.*

Yara: *Então vamos colocar uma nota de 5.*

Luís: *Vai ficar assim $2 + 2 + 2 + 2 + 5 = 13$ reais. Oh, prô como é que faz esse daqui?*

Professora.: *Qual é a dúvida de vocês aqui?*

Luís: *Esse daqui.*

Professora.: *E você montou no dinheiro desse jeito aí? Você tem que contar pra ver se dá 13. Conta com o dinheiro e conversa as duas para chegar num acordo depois me chama.*

Luís: *É aqui Yara? 10 mais dois mais um, quanto dá?*

Yara: *Dez mais dois mais um... Deu 13 aqui?*

Luís: *Vamos escrever e contar para ver se dá certo $10 + 2 + 1 = 13$ reais.*

Yara: *A gente está conseguindo, tá dando tudo certo (aplausos).*

Professora: *Vocês têm que fazer do jeito que montaram com o dinheiro. Que jeito vocês montaram com o dinheiro?*

Alunos: *Assim prô (mostrando o dinheiro montado na carteira).*

Professora.: *Isso mesmo, muito bem. Continuem, faltam só mais 2 maneiras para montar.*

Yara: *E agora? Vamos colocar um pouco de 2 e um pouco de 1.*

Luís: *Quantos 2?*

Yara: *Assim ó $2 + 2 + 2 + 2$ deu 8 e agora completa com 1 real até chegar no 13.*

Luís: *Verdade, está dando certo, deu 13 reais mesmo (risos e aplausos).*

Yara: *Agora é a última linha.*

Luís: *Dá pra usar o 5, porque usamos ele só duas vezes lá em cima.*

Yara: *Quantos 5 vamos usar?*

Luís: *Vamos montar aqui no dinheiro, ó $5 + 5$ dá 10.*

Yara: *Então falta só 3 para chegar no 13.*

Luís: *Sim, só 3. Então vai ser uma nota de 2 reais e uma moeda de 1 real. Veja se dá.*

Yara: *Dá sim, porque não tem dinheiro de 3 reais aí vamos usar 2 e 1 né.*

Luís: *Vamos escrever então $5 + 5 + 2 + 1 = 13$.*

Yara: *Acabamos (aplausos), vamos chamar a prof.*

Alunos: *Prof. Nós acabamos.*

Professora.: *E aí... pronto aqui? (silêncio) Sim ou não?*

Alunos.: *Sim.*

Professora: *Conferiram se não repetiram maneiras e se todas deram 13 reais?*

Alunos.: *Sim.*

Professora: *Ótimo. Coloquem o nome, pintem e me entrega.*

- Análise do diálogo entre Luís e Yara sob a luz dos processos do raciocínio matemático conforme a definição de Jeannotte e Kieran (2017):

O **processo de conjectura** aparece de forma espontânea e reiterada ao longo da interação. Logo no início, Luís lança uma conjectura sobre uma possível decomposição: “É assim, se colocar 5, 2, 2, 2, 1 e mais 1, quanto que dá?” Em seguida, ele sugere novas combinações (“Vamos colocar 2, 2, 1, 2, 2, 2 reais”; “Agora 2, mais 2. E mais 2, e mais 2”), que são imediatamente exploradas e avaliadas por Yara. Essas formulações não são respostas

definitivas, mas pontos de partida que desencadeiam o raciocínio matemático. Essa característica está em consonância com a definição de Jeannotte e Kieran (2017), que afirmam que conjecturar consiste em formular proposições de natureza possível ou provável, frequentemente de modo informal, como parte inicial do processo de raciocínio.

Outro processo mobilizado neste diálogo é o **processo de identificação de padrões**. À medida que avançam na tarefa, os alunos começam a reconhecer regularidades nas combinações numéricas, sobretudo relacionadas à repetição das notas de 2 reais e ao papel complementar das moedas de 1 real. Quando Yara afirma: “Assim ó $2 + 2 + 2 + 2$ deu 8 e agora completa com 1 real até chegar no 13”, ela demonstra ter percebido uma estrutura aditiva recorrente, que pode ser reutilizada para gerar novas soluções sem precisar recalcular desde o início. Tal percepção indica um avanço cognitivo relevante, pois, segundo Jeannotte e Kieran (2017), a identificação de padrões permite que os alunos generalizem estratégias e apliquem-nas em diferentes contextos, de forma a reduzir a dependência de contagens pontuais.

Em vários momentos, observa-se o **processo de justificação**. Yara, por exemplo, ao somar os valores “ $2 + 2 + 2 + 2$ ”, chega ao subtotal de 8 e, em seguida, calcula o valor necessário para completar os 13 reais, demonstrando compreensão da estrutura aditiva envolvida. Além disso, ao final, quando escrevem “ $10 + 2 + 1 = 13$ reais”, a dupla verbaliza os passos intermediários e demonstra que as soluções não são apenas intuitivas, mas baseadas em verificações operatórias explícitas, o que dialoga com Ponte, Brocardo e Oliveira (2009).



Figura 13: Realização da tarefa em duplas



Fonte: Dados da pesquisa

4.2.3 Dupla 3: (Gael e Marcela)

Figura 14: Registro escrito da tarefa

<p>Quais as diferentes maneiras de formar R\$ 13 usando cédulas de R\$ 10, R\$ 5, R\$ 2 e moedas de R\$ 1?</p>  <p>13 = $10+2+1=13$</p> <p>13 = $5+5+2+1=13$</p> <p>13 = $5+2+2+2+1=13$</p> <p>13 = $1+1+1+1+1+1+1+1+5=13$</p> <p>13 = $1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1=13$</p> <p>13 = $2+2+2+2+2+1=13$</p>	<p>Quais as diferentes maneiras de formar R\$ 13 usando cédulas de R\$ 10, R\$ 5, R\$ 2 e moedas de R\$ 1?</p>  <p>13 = $10+2+1=13$</p> <p>13 = $5+5+2+1=13$</p> <p>13 = $5+2+2+2+1=13$</p> <p>13 = $1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1=13$</p> <p>13 = $1+2+2+2+2+1+1+1+1+1=13$</p> <p>13 = $2+2+2+2+2+1=13$</p>
---	--

Fonte: Dados da pesquisa

Transcrição do áudio: (Gael e Marcela)

Gael: Vamos começar com 10, com 2 e com 1, tá? Igual fiz aqui no dinheiro (mostra o dinheiro na mesa).

Marcela: É igual a...?

Gael: Oi, Marcela! Peraí... Não é assim. Você não podia começar com mais um.

Marcela: Por quê?

Gael: Porque sim, senão vai ficar errado.

Marcela: Como vai ficar errado?

Gael: Porque tem que começar com o número maior, que é o 10.

Marcela: Ah, agora entendi, vamos começar com o número maior.

Gael: Isso mesmo, coloca $10 + 2 + 1 = 13$.

Marcela: Vamos pro próximo. Qual que vai agora?

Gael: Dois mais cinco mais cinco mais um?

Marcela: Tá aqui, ó.

Gael: Tem que escrever, Marcela.

Marcela: Vamos escrever igual no dinheiro.

Gael: Põe aí Marcela $5 + 5 + 2 + 1 = 13$.

Marcela: Tô escrevendo.

Gael: Vamos fazer a outra linha então.

Marcela: Tá. Dois mais cinco. Mais cinco.

Gael: Marcela, não entendi. É para apanhar dois cinco?

Marcela: Não é 5 mais outros 2.

Gael: Quantos 2 Marcela?

Marcela: Aqui ó $5 + 2 + 2 + 2 + 2 = 13$.

Gael: Ah sim.

Professora: Oi, tudo bem aqui? Não tem nenhum repetido?

Alunos: Não, nenhum repetido.

Professora: Então continuem.

Marcela: Já tá acabando.

Gael: Vamos colocar moedinhas.

Marcela: Não pode colocar assim oito não né. Tem que colocar todas as moedinhas de 1 em 1 que colocamos para dar oito né Gael.

Gael: É assim ó $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$.

Marcela: Vou apagar esse 8 então e colocar tudo moedinhas de 1 mais o 5.

Gael: Isso mesmo 8 moedas de 1 dá $8 + 5$ vai dar...

Marcela: Vamos contar 8, 9, 10, 11, 12, 13.

Gael: Então pode ser as moedas e uma nota de 5.

Marcela: É, Gael, igual olha aqui no dinheiro que a gente fez.

Gael: Ah sim $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 5 = 13$.

Marcela: Conseguimos mais uma linha.

Gael: Me perdi Marcela (risos).

Marcela: Concentra aqui Gael, vamos lá.

Gael: Tudo de um até chegar no 13, todas as moedinhas de um que você montou aqui, você tem que colocar aqui até chegar no 13.

Marcela: Tudo 1?

Gael: É ó: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13.

Marcela: Será que pode repetir número? Pode colocar tudo igual?

Gael: Acho que o número pode Marcela para poder dar 13.

Marcela: Então vai ficar assim $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 13$.

Gael: Isso mesmo Marcela, vamos para a outra linha, põe esse aqui ó, tudo de 2 e termina com uma moeda de 1 real.

Marcela: Tudo de dois é igual quanto?

Gael: Vamos contar 2, 4, 6, 8, 10, 12 dá 12 e falta 1 real para chegar no 13.

Marcela: Então vamos escrever aqui na folha $2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1 = 13$.

Gael: Esse aqui é o último (aplausos).

Marcela: Sim, termina aí que vou chamar a professora, oh prô a gente terminou.

Professora: Tudo bem aqui? Vocês terminaram?

Alunos: Sim, terminamos tudo.

Professora: Vocês conferiram para ver se todas as linhas deram 13 reais sem repetir?

Alunos: Sim.

Professora: Então podem colocar o nome para entregar.

- Análise do diálogo entre Gael e Marcela sob a luz dos processos do raciocínio matemático conforme a definição de Jeannotte e Kieran (2017):

O **processo de conjectura** aparece de forma inicial e recorrente. Logo no começo, Gael propõe uma primeira combinação que funciona como uma hipótese de partida para organizar a resolução: “Vamos começar com 10, com 2 e com 1, tá?” Em seguida, os alunos testam novas possibilidades, como “Dois mais cinco mais cinco mais um?”, “ $5 + 2 + 2 + 2 + 2 = 13$ ” ou “tudo de um até chegar no 13”. Essas formulações não surgem como respostas finais, mas como propostas provisórias, que são verificadas e ajustadas ao longo do processo. Segundo Jeannotte e Kieran (2017), o processo de conjecturar envolve propor ideias de forma provisória, a partir das quais os alunos constroem novos caminhos de raciocínio.

Ao longo da resolução, há também um claro **processo de identificação de padrões**, particularmente quando a dupla começa a sistematizar combinações baseadas em repetições, que é evidente quando Gael propõe “tudo de um até chegar no 13” e, depois, “tudo de dois e

termina com uma moeda de 1 real". Nesses casos, os alunos reconhecem regularidades estruturais: primeiro, percebem que a repetição de 13 moedas de 1 real gera uma soma igual a 13; depois, identificam que somar múltiplos de 2 até 12 e acrescentar 1 resulta em outra combinação válida. O reconhecimento de estruturas aditivas recorrentes representa um avanço em relação a estratégias puramente enumerativas e está em consonância com o que Jeannotte e Kieran (2017) denominam "*identificação e uso de padrões como base para generalizações locais*".

Ao longo do diálogo, os alunos classificam suas soluções de acordo com a estrutura das somas: usando uma nota maior como base (exemplo: $10 + 2 + 1$); usando notas intermediárias de 5 e 2 (exemplo: $5 + 5 + 2 + 1$); usando apenas moedas de 1 real (exemplo: $1 + 1 + \dots + 1 = 13$). A **classificação** mostra que eles percebem diferentes maneiras de formar 13 reais, agrupando soluções por tipo.

A **justificação** tem papel central nesta interação. Gael frequentemente fundamenta suas orientações, como quando explica a Marcela que "*tem que começar com o número maior, que é o 10*" ou quando contabiliza o total das moedas para verificar se chegam a 13. Momentos como os mencionados não se limitam a apresentar resultados, mas evidenciam explicitações de raciocínio para legitimar procedimentos. Semelhantemente, quando Marcela pergunta "*Será que pode repetir número? Pode colocar tudo igual?*", Gael argumenta que "*o número pode [...] para poder dar 13*", apresentando uma forma de justificativa prática baseada na propriedade aditiva dos números. Conforme Jeannotte e Kieran (2017), justificar consiste em sustentar proposições ou decisões matemáticas, recorrendo a argumentos que podem ser operatórios, empíricos ou mais estruturados.

Em síntese, o diálogo de Gael e Marcela evidencia uma articulação produtiva de **conjectura, classificação, identificação de padrões e justificação** fortemente sustentada por interações verbais e pelo uso de materiais concretos. Os alunos não apenas executam cálculos, mas, também, organizam estratégias, legitimam raciocínios, reconhecem regularidades e comparam soluções, mobilizando processos centrais para o desenvolvimento do raciocínio matemático (Jeannotte; Kieran, 2017).

Outro aspecto digno de nota é a forma como os alunos regulam mutuamente a atividade. Gael assume frequentemente um papel de organizador do raciocínio, orientando Marcela quanto à ordem dos números, à forma de registro e à necessidade de verificar resultados. Marcela, por sua vez, questiona, propõe alternativas e realiza cálculos, o que mantém a dinâmica colaborativa, o que é possível graças ao ensino exploratório. Essa regulação mútua sustenta a mobilização dos processos de raciocínio e mostra que tais

processos emergem não de ações individuais, mas do diálogo entre pares, como destacam Morais, Serrazina e Ponte (2018) ao analisarem práticas de raciocínio em sala de aula.

Figura 15: Realização da tarefa em duplas



Fonte: Dados da pesquisa

4.2.4 Discussão dos resultados da tarefa 2:

A análise conjunta dos diálogos entre as duplas (Luís e Yara; Gael e Marcela; Odete e Sonia) evidencia que os alunos mobilizaram, em diferentes intensidades e momentos, diversos processos de raciocínio matemático de acordo com Jeannotte e Kieran (2017) — especialmente os de **conjectura, generalização, justificação, identificação de padrões e comparação**. Esses processos emergem de forma articulada em interações colaborativas, mediadas tanto pela linguagem quanto pelo uso de materiais concretos, e revelam que o raciocínio matemático nos anos iniciais se constrói como um fenômeno essencialmente dialógico e exploratório.

De modo geral, o **processo de conjectura** aparece como o ponto de partida em todos os diálogos. Nas três duplas, os alunos lançam hipóteses iniciais sobre como compor o valor de R\$ 13,00, explorando diferentes combinações de notas e moedas. Essas proposições não têm caráter definitivo, mas funcionam como experimentos mentais e práticos que orientam a exploração subsequente — por exemplo, quando Luís sugere “5, 2, 2, 2, 1 e mais 1”, Gael propõe “10, 2 e 1”, e Odete recomenda “o dez e três moedinhas de um real”. Essa disposição para propor e testar ideias reflete, conforme Jeannotte e Kieran (2017), uma característica

essencial do raciocínio matemático: a capacidade de formular conjecturas e explorá-las interativamente, avaliando sua pertinência à medida que novos resultados são obtidos.

O **processo de identificação de padrões** também se manifesta com destaque em duas interações, representando um avanço qualitativo em relação à simples execução de cálculos. Ao perceberem que certas combinações se repetem ou que diferentes agrupamentos resultam no mesmo total, os alunos começam a reconhecer estruturas aditivas invariantes. Yara, ao afirmar que “*2 + 2 + 2 + 2 deu 8 e agora completa com 1 real até chegar no 13*”, ou Gael, ao propor que “*tudo de dois e termina com uma moeda de 1 real*”, demonstram compreender regularidades numéricas que permitem generalizar estratégias. Esse tipo de percepção está no cerne do raciocínio matemático, pois traduz a passagem de uma resolução empírica para uma compreensão estrutural das relações entre números (Jeannotte; Kieran, 2017).

O **processo de comparação** adquire relevância nos momentos em que as duplas revisam suas combinações para evitar repetições ou distinguir soluções equivalentes. Essa ação, mediada principalmente pela intervenção da professora, mostra que os alunos começam a organizar e sistematizar o conjunto de soluções possíveis, o que implica uma forma incipiente de validação e de controle da própria produção. A comparação, nesse contexto, não se limita à verificação de erros, mas cumpre papel analítico, permitindo aos estudantes avaliar a eficiência e a originalidade de suas estratégias.

É evidenciado que os alunos passam a organizar suas soluções seguindo critérios estruturais. Ao longo das interações, eles distinguem três tipos principais de combinações: (a) aquelas que usam uma nota maior como base — por exemplo, “*10 + 2 + 1*”; (b) as que utilizam notas intermediárias de 5 e 2 reais — como “*5 + 5 + 2 + 1*”; e (c) as que recorrem apenas a moedas de R\$ 1,00 — como “*1 + 1 + ... + 1 = 13*”. Essa classificação revela uma consciência da estrutura das somas, indicando que os alunos não apenas realizam cálculos, mas agrupam e categorizam suas descobertas com base em propriedades numéricas também. Tal atitude corresponde, segundo Jeannotte e Kieran (2017), à capacidade de organizar o raciocínio matemático por critérios de semelhança e diferença, um aspecto central do pensamento analítico.

O **processo de generalização** também emerge, especialmente no diálogo entre Odete e Sonia. Quando Odete propõe “*colocar tudo com moedinhas de 1 real*”, as alunas exploram o limite da decomposição, compreendendo que qualquer número pode ser formado por diferentes combinações de parcelas menores. Essa percepção, ainda que expressa de forma concreta revela uma generalização de caráter estrutural, em que as alunas estendem o

raciocínio para além do número 13 e reconhecem a regularidade que sustenta o sistema aditivo. Jeannotte e Kieran (2017) descrevem esse processo como um dos pontos culminantes do raciocínio matemático, pois implica identificar propriedades que se mantêm válidas em diferentes situações.

Outro aspecto recorrente diz respeito ao **processo de justificação**, presente, sobretudo, nas falas em que os alunos explicitam seus raciocínios para sustentar escolhas ou refutar possibilidades. Esse processo assume formas predominantemente empíricas e operatórias, baseadas em contagens e verificações diretas. Gael, por exemplo, justifica a escolha de iniciar com o número maior (*“tem que começar com o 10”*), enquanto Sonia argumenta que *“dois reais não, porque vai dar quatorze reais”*. Tais justificativas, ainda que informais, cumprem a função de legitimar o raciocínio e demonstram o início de um pensamento matemático fundamentado, coerente com o que afirmam Jeannotte e Kieran (2017).

Nesse sentido, as três interações analisadas revelam que, mesmo em níveis iniciais de escolarização, os alunos são capazes de mobilizar processos de raciocínio matemático quando se engajam em tarefas exploratórias. A presença de conjecturas, justificações, comparações e reconhecimentos de padrões indicam não apenas domínio operacional, mas, sobretudo uma compreensão emergente sobre a estrutura do sistema numérico e das relações aditivas. Esses resultados reforçam o papel fundamental das práticas pedagógicas que promovem a discussão, a experimentação e a argumentação, criando condições para que o raciocínio matemático se manifeste. No Quadro 5, há uma síntese do que foi levado em consideração nas resoluções e diálogos dos alunos e que, por sua vez, permitiram identificar a presença das ações de conjecturar, generalizar, comparar, identificar padrões, classificar e justificar nas duplas analisadas:

Quadro 5: Resultados dos Processos do RM mobilizados pelos alunos

Processos do RM	Indicadores	Dupla
Conjecturar	Lançam hipóteses iniciais sobre como compor o valor de R\$ 13,00, explorando diferentes combinações de notas e moedas.	1, 2 e 3
Generalizar	Exploram o limite da decomposição, compreendendo que qualquer número pode ser formado por diferentes combinações de parcelas menores.	1
Justificar	Explicitam seus raciocínios para sustentar escolhas ou refutar possibilidades.	1, 2 e 3
Comparar	Revisam suas combinações para evitar repetições ou distinguir soluções equivalentes.	1
Identificar padrões	Demonstram compreender regularidades numéricas que permitem generalizar estratégias.	2 e 3

Fonte: Dados da pesquisa

4.3 TAREFA 3:

4.3.1 Dupla 1: (Antonio e José)

Figura 16: Registro escrito da tarefa

Quais as diferentes maneiras de formar R\$ 18 usando cédulas de R\$ 10, R\$ 5, R\$ 2 e moedas de R\$ 1?

COM MOEDAS DE REAL

$$18 = 10 + 5 + 2 + 1 = 18$$

$$18 = 5 + 2 + 5 + 5 + 1 = 18$$

$$18 = 10 + 1 + 1 + 5 + 1 = 18$$

$$18 = 2 + 5 + 2 + 2 + 2 + 2 = 18$$

SE NÃO TEM MOEDAS DE REAL

$$18 = 10 + 2 + 2 + 5 + 1 = 18$$

$$18 = 2 + 2 + 2 + 1 + 2 + 2 = 18$$

Quais as diferentes maneiras de formar R\$ 18 usando cédulas de R\$ 10, R\$ 5, R\$ 2 e moedas de R\$ 1?

COM MOEDAS DE REAL

$$18 = 10 + 5 + 2 + 1 = 18$$

$$18 = 5 + 2 + 5 + 5 + 1 = 18$$

$$18 = 10 + 1 + 1 + 5 + 1 = 18$$

$$18 = 5 + 5 + 2 + 2 + 2 + 2 = 18$$

SE NÃO TEM MOEDAS DE REAL

$$18 = 10 + 2 + 2 + 5 + 1 = 18$$

$$18 = 2 + 2 + 2 + 5 + 2 + 5 = 18$$

Fonte: Dados da pesquisa

Transcrição do áudio:(Antonio e José)

Antonio: Dez mais cinco. Dá quinze. Mais dois. Dezesete. Mais 1. É 18.

José: Eu peguei 10 mais 5, mais 2, mais 1. Mais 1 é 18.

(silêncio)

Antonio: Põe 5 mais 2 dá 7.

José: Não, 5 mais 5.

Antonio: 5 mais 5 dá 10. Mais 2 dá 12. Mais 5... (silêncio).

José: Vou contar no dinheiro 5+2+5+5, deu 17.

Antonio: Então tem que colocar mais 1 pra dar 18.

José: Verdade, 17 mais 1 dá 18 reais, olha aqui no dinheiro.

Antonio: Dez mais um dá onze, mais dois?

José: Dá treze.

Antonio: Mais cinco. Já sei, deu 18.

José: Mas fui eu que te ensinei.

Antonio: Só uma você ensinou.

José: Eu to na terceira, tá? Vou pra outra agora.

Antonio: Então vamos, coloca 5+5, quanto dá?

José: Dez, mas tem que chegar no 18 em todas as linhas e não pode repetir o que já fez tá.

Antonio: Eu sei por que a prô já explicou um monte de vez que sempre vai dar 18.

José: Mais 2, dá quantos?

Antonio: Dá 12, mais 2 dá 14 então podemos colocar tudo 2 para terminar.

José: Vou perguntar pra prô se pode repetir um monte de 2. Ô prô pode colocar um monte de 2 aqui?

Professora: Vocês contaram usando o dinheiro?

Alunos: Sim.

Professora: E deu 18 reais?

Alunos: Sim.

Professora: Deixa eu olhar os outros cálculos... Vocês fizeram todos contando e usando o dinheiro?

Alunos: Sim.

Professora: Então se vocês contaram certo e concordaram, continuem com a segunda parte. Lembrando que nessa parte não poderão mais usar as moedas de 1 real.

Alunos: Tá bom.

Antonio: Dez mais 2 mais 2 é 14 mais 2 é 16. Então...

José: Dezesesseis mais 2 dá 18.

Antonio: Oba, agora só falta o último (palmas).

José: Então vou por 10 mais 2 mais 2 dá 14...

Antonio: Quatorze mais 2 mais 1 mais 1 dá 18. Acabou.

Alunos: Prô acabamos (palmas).

Professora: Vamos ver. Mas aqui não pode usar 1 real, somente 10, 5 e 2.

José: Hum, então tem que apagar?

Professora: Sim, porque não pode usar 1 real.

Antonio: Apaga José, vamos fazer de novo esse aqui. Pega 2+2+2+5, quanto dá?

José: Aqui ó 2+2 dá 4+2 dá 6, mais 5 (contando nos dedos 6, 7, 8, 9, 10, 11) dá 11.

Antonio: Onze mais 2, dá 13. Quanto falta pra chegar no 18 José?

José: Tem 13 né?

Antonio: É tem 13, vou contar 14, 15, 16, 17, 18 (contando nos dedos) já sei falta 5.

José: Um, dois, três, quatro, cinco.

Antonio: Cuidado que a última é bem difícil, não pode usar um real.

José: Aqui tem 5 reais, pode pôr aqui.

Antonio: Então depois desse 2 coloca 5. Deu 18 né?

José: É, era só esse que faltava (palmas).

Antonio: Prô agora terminamos mesmo.

Professora: Tudo pronto? Conferiram os resultados?

José: Sim, tá tudo certo.

Antonio: Pode pintar prô?

Professora: Ok, pode pintar e colocar os nomes.

- Análise do diálogo entre Antonio e José sob a luz dos processos do raciocínio matemático conforme a definição de Jeannotte e Kieran (2017):

Os alunos fazem **conjecturas** sobre como obter o resultado 18 a partir da soma de diferentes valores. Desde o início, Antonio sugere somas como "dez mais cinco, mais dois, mais um" para chegar a 18. Em seguida, José explora diferentes combinações, como "5+2+5+5", demonstrando a formulação de novas possibilidades. Durante o diálogo, os alunos fazem suposições sobre quais combinações de valores resultarão em 18 reais. No início, Antonio e José exploram diferentes formas de combinação de cédulas e moedas,

testando possibilidades, como no trecho: *"Dez mais cinco. Dá quinze. Mais dois. Dezessete. Mais 1. É 18."* Aqui, eles fazem uma suposição inicial sobre como somar os valores e verificam se a soma está correta.

Antonio demonstra compreensão de que, independentemente da combinação de números usada, a soma final sempre resultará em 18, ao afirmar: *"Eu sei por que a prô já explicou um monte de vez que sempre vai dar 18."* Sua constatação indica que ele internalizou a ideia de que a soma deve sempre atingir o mesmo valor, ainda que haja mudança no caminho seguido. Os alunos reconhecem que diferentes combinações numéricas podem levar ao mesmo resultado, num processo de **generalização**.

Ao longo do diálogo, os alunos **comparam** seus cálculos por meio da contagem e do uso de dinheiro como recurso manipulativo. Quando José diz *"vou contar no dinheiro 5+2+5+5, deu 17"*, ele justifica seu raciocínio recorrendo ao material concreto. Posteriormente, Antonio complementa com *"Então tem que colocar mais 1 pra dar 18"*, justificando a necessidade de adicionar mais um para obter o resultado esperado.

A todo o momento, os alunos justificam suas escolhas matemáticas, explicando por que uma combinação de números é válida. Um exemplo ocorre quando Antonio percebe que a soma está incorreta e precisa corrigir: *"Vou contar no dinheiro 5+2+5+5, deu 17" ou "Então tem que colocar mais 1 pra dar 18"*. Eles fundamentam sua resposta conferindo com o material concreto (dinheiro), justificando suas escolhas matemáticas. A professora questiona se os alunos contaram corretamente e verificaram os resultados. Eles confirmam que chegaram a 18 em todas as tentativas. No entanto, ao perceberem que não poderiam usar moedas de 1 real, reavaliam seus cálculos e corrigem a solução, demonstrando um processo de **validação** ao revisar o trabalho e ajustá-lo às restrições da tarefa. A validação ocorre constantemente à medida que os alunos conferem seus resultados, utilizando o dinheiro como material concreto. A professora também reforça esse processo ao perguntar se todas as contas foram conferidas: *"Vocês contaram usando o dinheiro?" "E deu 18 reais?"*. Ao final, quando percebem que usaram moedas de 1 real, o erro é identificado e corrigido, o que reforça o processo de validação: *"Mas aqui não pode usar 1 real, somente 10, 5 e 2."* ou *"Hum, então tem que apagar?" ou "Sim, porque não pode usar 1 real."*

O diálogo entre Antonio e José evidencia o desenvolvimento do raciocínio matemático. Eles fazem conjecturas sobre quais combinações numéricas podem resultar em 18, justificam suas escolhas ao conferir as somas, generalizam ao perceber que diferentes combinações levam ao mesmo resultado e validam suas soluções conferindo com o dinheiro e com a professora. Esses processos contribuem para um raciocínio matemático, incentivando o

pensamento crítico e a autonomia na construção do conhecimento conforme apontam Ponte, Brocardo e Oliveira (2009) e Brodie (2010). O diálogo evidencia um processo ativo de aprendizagem, no qual os alunos utilizam diferentes estratégias para resolver a tarefa. O envolvimento dos estudantes na criação, revisão e validação dos cálculos demonstra a construção do conhecimento matemático de forma colaborativa. A intervenção da professora também se destaca ao orientar a reflexão sobre a solução sem oferecer respostas diretas, estimulando a autonomia e a argumentação dos alunos, e essa postura docente está alinhada ao que afirmam Stein *et al.* (2008).

Figura 17: Realização da tarefa em duplas



Fonte: Dados da pesquisa

4.3.2 Dupla 2: (Bento e Débora)

Figura 18: Registro escrito da tarefa

Quais as diferentes maneiras de formar R\$ 18 usando cédulas de R\$ 10, R\$ 5, R\$ 2 e moedas de R\$ 1?

Quais as diferentes maneiras de formar R\$ 18 usando cédulas de R\$ 10, R\$ 5, R\$ 2 e moedas de R\$ 1?

COM MOEDAS DE 1 REAL

18 = 10 + 5 + 2 + 1

18 = 5 + 5 + 5 + 2 + 1

18 = 10 + 5 + 1 + 1 + 1

18 = 5 + 5 + 5 + 1 + 1 + 1

SE NÃO TEM MOEDAS DE 1 REAL

18 = 10 + 2 + 2 + 2 + 2

18 = 5 + 2 + 2 + 5 + 2 + 2

COM MOEDAS DE 1 REAL

18 = 10 + 5 + 2 + 1 18

18 = 5 + 5 + 5 + 2 + 1 18

18 = 10 + 5 + 1 + 1 + 1 18

18 = 5 + 5 + 5 + 1 + 1 + 1 18

SE NÃO TEM MOEDAS DE 1 REAL

18 = 10 + 2 + 2 + 2 + 2 18

18 = 2 + 2 + 2 + 5 + 2 + 5 18

Fonte: Dados da pesquisa

Transcrição do áudio: (Bento e Débora)

Bento: Meu nome é Bento, eu tenho 6 anos.

Débora: Meu nome é Débora. Eu também tenho 6 anos.

Bento: Ó eu tenho 18 reais e preciso formar esse valor usando notas de 10, 5, 2 e 1 real.

Débora: Entendi! Então temos que montar os 18 reais de diferentes formas, certo?

Bento: Sim! Vamos tentar diferentes jeitos.

Débora: Ok, primeiro coloca uma nota de 10 reais.

Bento: Agora falta 8 reais. Podemos colocar uma de 5?

Débora: Sim! 10 + 5 dá 15, então faltam 3 reais.

Bento: Podemos colocar uma nota de 2 e uma de 1.

Débora: Pronto! 10 + 5 + 2 + 1 = 18 reais!

Bento: Agora vamos tentar outra combinação.

Débora: Podemos usar três notas de 5 reais?

Bento: Vamos ver... 5 + 5 + 5 = 15. Ainda faltam 3 reais.

Débora: Mas não tem nota de 3 reais (risos).

Bento: Claro que não, vamos ter que colocar tudo 1.

Débora: Vamos escrever no quadradinho então, já tem 15 + 1 + 1, não tá cabendo.

Bento: Vou perguntar pra professora se pode aumentar um quadradinho, Oh prof., pode aumentar um quadradinho?

Professora: Não pessoal, os quadradinhos nem podem ficar vazios e não podem ser aumentados. Vocês têm que formar os 18 reais distribuindo o dinheiro nos quadradinhos já existentes na tarefa.

Débora: E agora Bento?

Bento: Peraí, acho que já sei, se só tem dois quadradinhos e com as moedas de 1 real não dá, vamos colocar mais uma nota de 2 reais e uma moeda de 1 real. Põe aí pra ver se dá...

Débora: 15 + 2 + 1 = 18. Oba deu certo.

Bento: Que bom, vamos no debaixo então, mas aqui embaixo não pode usar as moedinhas de 1 real, tá Débora.

Débora: Coloca quatro notas de 2 reais e depois a gente vê quanto falta!

Bento: Boa ideia! 2 + 2 + 2 + 2 = 8. Ainda falta 10 reais para chegar no 18 reais!

Débora: Nessa primeira aqui, dá pra colocar uma nota de 10, mas no outro como vai fazer?

Bento: Calma Débora, deixa eu pensar 10 + 2 + 2 + 2 + 2 = 18. Logo a gente acaba.

Débora: Ainda temos que voltar aqui em cima para terminar esses quadradinhos que já tem um 10 e no outro 5... (risos).

Bento: Então vamos pensar rápido nesse aqui, veja, não pode usar a moedinha de 1 real e não pode repetir.

Débora: E a prof. também falou que não pode aumentar quadradinho...
(silêncio e risos)

Professora: Como vocês estão aqui?

Débora: Conseguimos duas formas aqui em cima e uma maneira aqui embaixo. Agora vamos ver se há outras maneiras.

Bento: Podemos tentar com uma nota de 10, duas de 2 e duas de 1?

Débora: Vamos colocar: $10 + 2 + 2 + 1 + 1 = 16$.

Bento: Não funcionou!

Débora: E quanto falta pra chegar no 18 reais?

Bento: Falta 2 reais, vamos apagar então, Débora.

Professora: Tentem montar com o dinheiro primeiro e ver se não repetiu com as maneiras que já fizeram.

Bento: Legal! Mas tá difícil prof.
(risos)

Débora: Será que dá pra colocar tudo 2 reais?

Bento: Acho que não, vamos contar os quadradinhos?

Alunos: 1, 2, 3, 4, 5, 6...

Bento: Tem 6 quadradinhos se colocar tudo 2, vai dar 12 reais, e aí não vai dar certo de novo.

Débora: E o 10 já colocamos, só sobra o 5 que ainda não foi usado, será que dá com 5?

Bento: Verdade, tinha esquecido do 5 reais, olha só colocar as 4 notas de 2 reais e nos outros quadradinhos colocamos 5 e 5. Faz ai pra ver se dá certo.

Débora: $2 + 2 + 2 + 2 + 5 + 5 = 18$ deu sim achamos o outro 18 reais.

Bento: Até que enfim, prof a gente conseguiu achar o outro.

Débora: Sim! Isso foi divertido!

Professora: Conseguiram? Terminaram todas as maneiras então?

Alunos: Ainda tudo não, vamos voltar lá em cima.

Professora: Ok tentem começar com esse que já tem uma nota registrada e continua tá.

Débora: Então vamos começar aqui, olha já tem o 10 reais vou colocar uma nota de cada $10 + 5 + 2 + 1 = 18$ reais, mas sobrou um quadradinho.

Bento: Ai vai ficar errado e desse jeito já fizemos na primeira linha.

Débora: A prof. falou que não pode repetir igual e não pode sobrar. Será que pode tirar esse 2 reais e colocar 2 moedas de 1 real?

Bento: Nossa, Débora acho que vai dar sim, porque se a gente trocar a nota de 2 reais por 2 moedas de 1 real também dá 18 reais e não repete e nem sobra quadradinhos. Vamos colocar.

Débora: Que legal eu to acertando (risos).

Bento: Olha $10 + 5 + 1 + 1 + 1 = 18$

Débora: Oba agora e o último já tem 5, vamos colocar mais outros 5 reais aqui e aqui, $5 + 5 + 5 = 15$ quanto falta?

Bento: Se tem 15 para chegar no 18 falta 3 reais, né Débora (risos).

Débora: Então se falta 3 reais qual dinheiro você quer colocar?

Bento: Vamos fazer igual aquele lá, contar os quadradinhos. Olha faltam 3 quadradinhos e precisamos de 3 reais, se a gente colocar 3 moedas de 1 real já vai dar certo e a gente termina.

Débora: Vamos chamar a prof.

Alunos: Prof. Terminamos.

Professora: Conseguiram achar todas as maneiras?

Alunos: Sim achamos todos e não repetimos.

Professora: Vamos conferir então... Muito bem. Coloquem os nomes nas folhas e entreguem.

- Análise do diálogo entre Bento e Débora sob a luz dos processos do raciocínio matemático conforme a definição de Jeannotte e Kieran (2017):

Desde o início da atividade, Bento e Débora formulam **conjecturas** sobre como combinar as notas e moedas para atingir o total de 18 reais. Por exemplo, Bento sugere iniciar com 10 reais e depois somar notas menores, o que demonstra compreensão da composição e decomposição de números. Posteriormente, Débora propõe usar três notas de 5

reais, revelando indícios de compreensão da propriedade comutativa ao reconhecer que distintas sequências de parcelas resultam o mesmo total, mas logo percebe que não há uma nota de 3 reais para completar o total. Levando-os a revisar e ajustar suas decomposições, a situação reforça a articulação entre essas propriedades e a análise da viabilidade das estratégias utilizadas. Assim, as ações dos alunos mostram que a resolução da tarefa envolveu não apenas cálculos operatórios, mas uma compreensão crescente da estrutura da adição e das relações numéricas que a sustentam.

Em vários momentos, os alunos percebem padrões na formação do número 18 e buscam diferentes maneiras de alcançá-lo sem repetir combinações. Ao reconhecerem que cada solução deveria preencher exatamente os quadradinhos disponíveis na tarefa, eles ajustam suas estratégias e reorganizam as parcelas, analisando cuidadosamente como diferentes combinações poderiam produzir o mesmo total. Esse processo evidencia a mobilização da propriedade comutativa da adição, uma vez que os estudantes compreendem que a ordem das parcelas pode ser alterada sem modificar o resultado, o que lhes permite explorar diversas possibilidades de compor o número. A identificação e o uso dessa propriedade não se restringem à aplicação mecânica; ao contrário, integra-se às ações de análise, comparação e eliminação de estratégias, indicando avanço na compreensão da estrutura aditiva. Disso, emerge o processo de **generalização** do raciocínio matemático, afinal, ao extrapolar relações válidas em casos específicos para a formulação de princípios mais amplos, os alunos demonstram capacidade de reconhecer regularidades e utilizá-las na resolução da tarefa.

Durante a construção das combinações, ambos justificam suas escolhas com base em relações matemáticas. Quando Débora propõe colocar quatro notas de 2 reais e verificar o que falta, ela está utilizando o processo de **justificação** para fundamentar sua escolha. Além disso, Bento frequentemente explica os resultados de suas somas para garantir que estejam corretos. Ademais, Bento e Débora conferem seus cálculos e consultam a professora o tempo todo. Quando percebem que $10 + 2 + 2 + 1 + 1$ resultam em 16 ao invés de 18, rapidamente corrigem o erro e buscam uma resolução viável.

Os alunos mobilizaram três processos de Jeannotte e Kieran (2017) na interação, explorando conceitos matemáticos de maneira significativa. A mediação da professora, ao incentivar a conferência dos resultados e sugerir estratégias de validação, contribui para a aprendizagem. Essa abordagem promove a autonomia dos alunos e o desenvolvimento do raciocínio matemático. Além disso, ao contar os quadradinhos disponíveis antes de distribuir os valores, eles demonstram preocupação em validar a consistência de suas respostas.

No conjunto das interações observadas, fica evidente que os processos de raciocínio matemático mobilizados pelos alunos articulam-se diretamente às propriedades fundamentais da adição. As conjecturas formuladas inicialmente permitem que Bento e Débora explorem diferentes composições possíveis do número 18, apoiando-se, sobretudo, na composição e decomposição de números, aspecto central do desenvolvimento da estrutura aditiva. A generalização emerge quando os alunos identificam padrões nas combinações e reconhecem que diferentes arranjos podem levar ao mesmo resultado. Esse cenário, por sua vez, evidencia a propriedade comutativa, ao que os alunos percebem que a ordem das parcelas não altera o total, e, em alguns momentos, uma forma rudimentar da propriedade associativa, ao agruparem valores para facilitar os cálculos. Já o processo de justificação mobiliza a validação explícita dos resultados, quando eles verificam somas, identificam erros e ajustam suas estratégias, demonstrando compreensão da adição na tarefa. Dessa forma, as propriedades da adição não aparecem de maneira isolada, mas integradas aos processos de conjecturar, generalizar e justificar, permitindo que a construção do conhecimento se dê por meio da exploração ativa, da reflexão e da validação contínua das soluções.

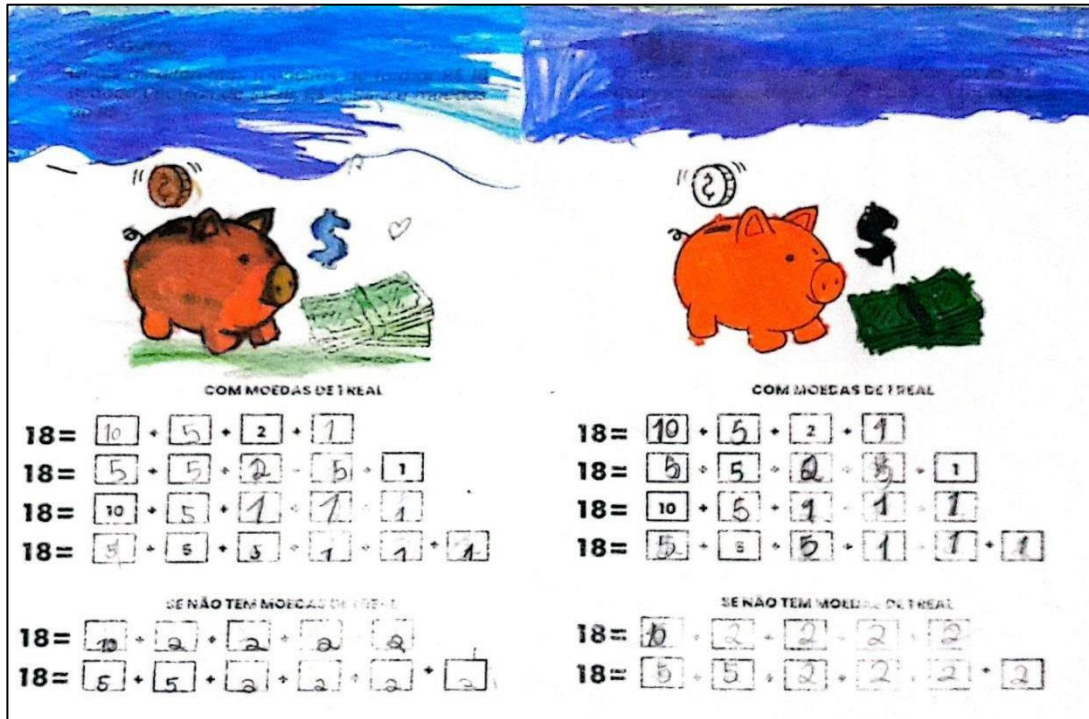
Figura 19: Realização da tarefa em duplas



Fonte: Dados da pesquisa

4.3.2 Dupla 3: (Sonia e Odete)

Figura 20: Registro escrito da tarefa



Fonte: Dados da pesquisa

Transcrição do áudio:(Sonia e Odete)

Sonia: A gente pega a de 10 mais cinco.

Odete: É, 10 mais cinco que dá 15.

Sonia: É, 10 mais cinco. Que deu 15. Aí, quando falta, você coloca até dezoito. É bem fácil.

Odete: Tenho dois no pensamento.

Sonia: Número 2?

Odete: Sim 2 + 1 que juntando com 15 dará 18 reais.

Sonia: Tá vamos ver aqui no dinheirinho. $10 + 5 + 2 + 1 = 18$ reais.

Odete: Gente, eu fiz certo, bate aqui (risos).

Sonia: Coloca outro número na outra linha. Agora pensa você.

Odete: Eu já pensei tudo nessa aqui.

Sonia: Aí agora você pensa no negócio Odete.

Odete: Tá. Agora eu vou pegar o 5 e colocar aqui. E depois mais 5 e mais 5, vê quanto dá.

Sonia: Tá. $5 + 5 + 5$ vai dar 15 reais. Agora, dois que vai dar 17 reais. Quanto falta?

Odete: Para 18 reais falta 1 real.

Sonia: Então já achamos outro, veja $5 + 5 + 5 + 2 + 1 = 18$ reais.

Odete: Gente, acertamos de novo. (palmas)

Sonia: Vamos fazer a outra linha agora.

Odete: Vamos usar mais moedas para ver se dá?

Sonia: Mais moedinhas de um real?

Odete: E assim olha: começa com $10 + 5$ e termina com tudo de 1 real.

Sonia: E a gente tem moedinhas. Já estou fazendo aqui.

Odete: Escreve aí $10 + 5 + 1 + 1 + 1 = 18$ reais.

Sonia: E aí, gente, eu acho que tá certo, né?

Odete: É, deu certinho.

Sonia: Tá, agora é a quarta linha.

Odete: E se não usar nem 10 e nem 2?

Sonia: Será que dá certo: Vou perguntar pra professora se pode fazer sem usar esses aí que você falou.

Professora: Como estão aqui meninas? Estão conseguindo?

Odete: Sim professora, mas a gente queria saber se pode usar só 5 reais e 1 real?

Professora: Pode sim, mas só nesta primeira parte, embaixo não pode usar as moedas tá.

Sonia: Aí, Odete, agora é sua vez. Como você pensou?

Odete: Assim ó: $5 + 5 + 5 + 1 + 1 + 1 = 18$ reais.

Sonia: Vou contar. 5, 10, 15, 16, 17, 18. Acertamos de novo (risos).

Odete: Agora só falta os debaixo que não pode usar as moedas.

Sonia: Então vou guardar no pacote da prof.

Odete: Esse parece mais difícil.

Professora: Como estão aí meninas?

Sonia: Terminando professora.

Odete: A gente está conversando. Pensando como montar aqui no dinheiro 18 reais sem usar as moedinhas.

Professora: Vamos lá. Quando terminarem me chamem tá.

Sonia: Não, de 5 não, gente. De 2.

Odete: De 2. Tá, tá, tá.

Sonia: Aí, gente, peraí. 2, tem 2 aqui, ó.

Odete: 2 mais 5.

Sonia: Que ela falou, né?

Odete: É. 2 mais 5.

Sonia: 7.

Odete: 7.

Sonia: Mais 10.

Odete: 17

Sonia: Precisamos de 18 reais.

Odete: E não pode usar as moedas.

Sonia: Então esse tá errado.

Odete: 2 já tá. 5 já tá também.

Sonia: E 10?

Odete: Gente, a gente fez errado. O 10 não tá certo.

Sonia: A gente precisa apagar.

Odete: E aí... Será que tudo 2 dá...

Sonia: Não sei, vamos montar com 10 e 2

Odete: Tá põe 10.

Sonia: Certo. Agora mais 2.

Odete: 10 mais 2 dá 12.

Sonia: Agora a gente soma mais 5.

Odete: 12 mais 5... 17!

Sonia: Isso! Agora, espera... A gente tem mais uma nota de 2.

Odete: 17 mais 2 dá 19.

Sonia: E agora? Passou, não dá. E agora?

Odete: Deixa eu conferir. Vamos contar tudo de novo.

Sonia: Boa ideia. Então, ó: $10 + 2 + 5 + 2 = 19$

Odete: Tá errado e ainda sobrou quadradozinho.

Sonia: Então tem que apagar de novo.

Odete: Eu apaguei e deixei só o 10.

Sonia: Agora a gente soma mais 2 reais.

Odete: Tá $10 + 2 = 12!$ E se a gente terminar os quadradozinhos tudo com 2.

Sonia: Vamos ver se dá $10 + 2 + 2 + 2 + 2 = 18$.

Odete: Oba acertamos (aplausos).

Sonia: Deu certinho! Agora sim!

Odete: Ufa! Agora a gente pode organizar tudo direitinho.

Sonia: Isso! Próximo cálculo! Tá, agora vamos pro próximo cálculo. O que a gente tem?

Odete: Deixa eu ver... A gente tem uma nota de 10, duas de 5 e três moedas de 2.

Sonia: Espera... Se a gente somar tudo isso, vai passar de 18. A gente precisa escolher os valores certos!

Odete: Verdade! Então vamos testar um jeito diferente.

Sonia: Beleza! Vamos começar com 5 dessa vez.

Odete: 5 mais 5 dá 10.

Sonia: Agora somamos mais 5.

Odete: 10 mais 5 dá 15.
Sonia: Falta 3 pra dar 18!
Odete: Então, usamos uma nota de 2...
Sonia: 15 mais 2 dá 17...
Odete: E outra nota de 2 ia passar de 18, então esse jeito não funciona.
Sonia: Espera! E se a gente começar com 5, depois usar mais 5 e terminar com notas de 2?
Odete: Vamos testar: 5 mais 5 dá 10...
Sonia: $5 + 5 + 2 + 2 + 2 + 2$ dá 18...
Odete: Boa! Vamos ver: 10 mais 2 dá 12...
Sonia: 12 mais 2 dá 14...
Odete: 14 mais 2 dá 16...
Sonia: 16 mais 2 dá 18!
Odete: Conseguimos!
Sonia: A gente tá ficando espertas nisso!
Odete: Sim! Isso mesmo (risos e aplausos).
Sonia: Tá bom, Odete, vamos organizar direitinho pra não errar.
Odete: Vamos contar de novo desde o começo. Vou chamar a professora e dizer que acabamos.
Alunas: Professora terminamos.
Professora: E aí meninas terminaram?
Alunas: Sim.
Professora: Façam a conferência, pinta e põe os nomes para entregar então.

- Análise do diálogo entre Odete e Sonia sob a luz dos processos do raciocínio matemático de conforme a definição de Jeannotte e Kieran (2017):

Desde o início da atividade, as alunas fazem **conjecturas** sobre como formar 18 reais usando diferentes combinações de notas e moedas. Por exemplo, Sonia sugere começar com 10 e 5, enquanto Odete testa a possibilidade de usar apenas notas de 5 e moedas de 1 real. Elas exploram possibilidades antes de confirmarem a resposta.

À medida que avançam na tarefa, elas começam a perceber padrões nas combinações de valores que funcionam. Um exemplo disso ocorre quando Odete sugere incluir mais moedas como teste. Além disso, ao perceberem que somas diferentes podem chegar ao mesmo resultado, elas ampliam sua compreensão sobre a composição dos números, mobilizando o processo de **identificação de padrões**.

As alunas explicam seus raciocínios ao longo da conversa, justificando cada escolha de nota ou moeda. Um exemplo claro disso ocorre quando Odete diz que " $5 + 5 + 5$ dá 15, e para chegar a 18 falta 3", demonstrando sua compreensão do cálculo mental e acionando o princípio da composição e decomposição de números. Além disso, quando percebem um erro, elas o justificam, como quando Sonia reconhece que " $17 + 2$ dá 19" e, a partir disso, concluem que precisam apagar e refazer seus cálculos. As alunas validam constantemente a exatidão de seus cálculos, contam novamente os valores e conferem se as combinações respeitam as regras estabelecidas pela professora. Elas corrigem erros quando percebem que o total ultrapassou 18 reais e reformulam a estratégia. Além disso, ao final da tarefa, revisam suas respostas e pedem a conferência da professora antes de entregar.

O diálogo mostra que as alunas passaram por etapas do raciocínio matemático de forma natural. Elas formularam conjecturas, explicaram seus raciocínios (justificação), encontraram padrões (identificação de padrões) e revisaram suas respostas para garantir que estavam corretas (validação).

Figura 21: Realização da tarefa em duplas



Fonte: Dados da pesquisa

4.3.4 Discussão dos resultados da tarefa 3:

A análise conjunta dos diálogos evidencia que os diferentes grupos de alunos — Antonio e José, Bento e Débora, Sonia e Odete — mobilizaram processos fundamentais do raciocínio matemático conforme proposto por Jeannotte e Kieran (2017), demonstrando uma evolução na compreensão das relações numéricas e das propriedades aditivas (comutativa, associativa e composição e decomposição dos números). Em todos os casos, observa-se que o raciocínio não se limita à execução mecânica de cálculos, mas emerge como um processo de investigação, no qual os alunos formulam hipóteses, testam, ajustam, comparam e validam suas ideias com base em evidências concretas e argumentações compartilhadas.

Nos três diálogos, a **conjectura** aparece como o ponto de partida das explorações: os alunos levantam hipóteses sobre combinações de valores que possam atingir o total proposto, demonstrando curiosidade e abertura para o erro como parte do processo investigativo. A **identificação de padrões** é visível quando identificam regularidades nas combinações (por exemplo, repetir notas de 2 ou de 5) e passam a utilizá-las de forma sistemática. Já a **comparação** emerge como processo de verificação, em que os alunos analisam a coerência dos resultados, distinguem soluções repetidas e confirmam suas conclusões por meio de contagens e conferências com o material.

Além disso, destaca-se o início de um movimento de **generalização**, perceptível quando os alunos compreendem que diferentes combinações numéricas podem gerar o mesmo total — um indício de pensamento algébrico inicial. A **justificação** ocorre à medida que explicam suas escolhas e conferem as somas, recorrendo aos conhecimentos matemáticos que possuem e a outros que ainda não desenvolveram completamente. Essa percepção amplia o significado da tarefa, transformando-a em uma oportunidade para refletir sobre estruturas numéricas e propriedades da adição, e não apenas para encontrar resultados para a atividade.

A mediação docente desempenha um papel essencial nesse processo, ao incentivar o diálogo, a verificação e a argumentação sem fornecer respostas prontas. Essa postura favorece a autonomia intelectual e a construção colaborativa do conhecimento, o que permite que os alunos avancem da simples manipulação de valores para uma compreensão mais estruturada da matemática.

Em síntese, os diálogos analisados revelam um ambiente de aprendizagem investigativo, no qual são mobilizados processos de raciocínio matemático como conjectura, justificação, identificação de padrões, comparação, validação e generalização. Esse conjunto de processos, conforme o modelo de Jeannotte e Kieran (2017) evidencia que o raciocínio matemático se desenvolve quando os alunos são desafiados a pensar, explicar e validar suas próprias ideias em interação com os colegas e o professor. No Quadro 6, há uma síntese do que foi levado em consideração nas resoluções e diálogos dos alunos que permitiu identificar a presença dos processos de conjecturar, generalizar, comparar, identificar padrões e justificar nas duplas analisadas:

Quadro 6: Resultados dos Processos do RM mobilizados pelos alunos

Processos do RM	Indicadores	Dupla
Conjecturar	Aparece como o ponto de partida das explorações: levantam hipóteses sobre combinações de valores;	1, 2 e 3
Generalizar	Compreendem que diferentes combinações numéricas podem gerar o mesmo total;	1 e 2
Comparar	Analisam a coerência dos resultados, distinguindo soluções repetidas e confirmando suas conclusões por meio de contagens;	1
Identificar padrões	Identificam regularidades nas combinações repetindo notas e passando a utilizá-las de forma sistemática;	3
Justificar	Explicam suas escolhas, conferem as somas e revisam suas respostas, no sentido de validá-las por meio do suporte matemático.	1, 2 e 3

Fonte: Dados da pesquisa

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O estudo sobre o raciocínio matemático representou, para esta pesquisadora, uma descoberta significativa tanto no campo teórico quanto na prática pedagógica. O contato com as fundamentações apresentadas por autores como Jeannotte e Kieran (2017), Mata-Pereira e Ponte (2018), Morais, Serrazina e Ponte (2018), Araman e Serrazina (2020), e Lannin, Ellis e Elliot (2011) proporcionou uma base sólida para a elaboração das tarefas exploratórias, para a condução das aulas e, posteriormente, para a análise dos dados. Essa imersão teórica foi essencial para compreender o raciocínio matemático como um processo dinâmico, investigativo e reflexivo, em que o aluno é convidado a pensar, justificar e construir significados matemáticos de forma autônoma e colaborativa.

No contexto da prática docente, o maior desafio consistiu em exercer o papel de mediação sem intervir de forma direta nas resoluções dos alunos, evitando corrigir ou fornecer respostas prontas. Inspirada nas orientações de Araman, Serrazina e Ponte (2019), a atuação da professora pautou-se em convidar, incentivar, desafiar e solicitar justificativas, de modo a criar um ambiente em que os alunos pudessem pensar independentemente, discutir com os pares e construir estratégias próprias de resolução. A postura assumida, embora desafiadora frente à tradição escolar centrada em exercícios com respostas únicas, mostrou-se altamente produtiva, pois fomentou autonomia intelectual, argumentação e protagonismo dos alunos.

Durante a realização das tarefas, observou-se que o trabalho em duplas estimulou a troca de ideias, a formulação de hipóteses, a comparação de estratégias e a justificação dos resultados. O material manipulável (as cédulas e moedas) desempenhou papel relevante nas tarefas 2 e 3 ao servir como um suporte concreto para a exploração e compreensão das propriedades da adição, bem como para a validação das conjecturas e das justificativas elaboradas pelos alunos. Assim, as tarefas exploratórias mostraram-se eficazes para promover o desenvolvimento de processos de raciocínio matemático, como a comparação, a conjectura e a justificação, foco principal desta pesquisa, além de contribuírem para uma aprendizagem mais significativa dos conteúdos matemáticos.

Em termos de referencial teórico, destaca-se que o raciocínio matemático é amplamente reconhecido internacionalmente. O Ministério da Educação do Brasil, por meio dos Parâmetros Curriculares Nacionais (1997), já tratava o raciocínio matemático como eixo estruturante do ensino de Matemática, defendendo que a aprendizagem deve ir além da execução de procedimentos e da memorização de regras. Os PCNs (Brasil, 1997) enfatizavam

a resolução de problemas como metodologia central, entendendo que é por meio dela que os alunos desenvolvem a capacidade de formular estratégias, estabelecer relações, argumentar, justificar resultados e validar soluções. O documento também destacava a importância da comunicação matemática, da elaboração de conjecturas e da reflexão sobre os próprios procedimentos ao indicar que o raciocínio se constrói em situações que exigem investigação, tomada de decisões e análise crítica, promovendo uma aprendizagem significativa e contextualizada. No entanto, a BNCC (Brasil, 2018) trouxe um avanço importante ao incluir, entre as competências específicas da Matemática, o desenvolvimento da capacidade de formular conjecturas, investigar e validar resultados — evidenciando uma valorização progressiva do pensamento matemático e investigativo nas escolas.

Com base na literatura, compreende-se o raciocínio matemático como a capacidade de fazer inferências justificadas, ou seja, de utilizar conhecimentos matemáticos prévios para, de maneira fundamentada, construir novas informações e relações (Araman; Serrazina, 2020; Morais; Serrazina; Ponte, 2018; Ponte; Mata-Pereira; Quaresma, 2020). Jeannotte e Kieran (2017) apontam dois aspectos complementares desse raciocínio: o estrutural, relacionado à organização lógica dos conceitos, e o processual, que envolve os processos cognitivos mobilizados durante a tarefa exploratória. Este trabalho priorizou o aspecto processual e adotou como referência, os processos de comparação, classificação, identificação de padrões, conjectura, generalização, justificação, prova e exemplificação. Os processos mais recorrentes nas produções dos alunos foram a identificação de padrões, a conjectura, a generalização, a comparação e a justificação.

Dois fatores se mostraram essenciais para a promoção do raciocínio matemático: a qualidade das tarefas e o papel mediador do professor. Conforme Brodie (2010) e Ponte (2005), apenas propor boas tarefas não garante o desenvolvimento do raciocínio; é preciso que o professor conduza o processo de forma a instigar a reflexão, a comparação e a validação das ideias dos alunos. Assim, a escolha de tarefas exploratórias foi determinante, pois elas se caracterizam pela abertura, pela multiplicidade de caminhos e pela oportunidade de o aluno investigar e descobrir, em vez de apenas aplicar procedimentos prontos.

As tarefas propostas — combinar notas e moedas para formar um valor específico — apresentam um forte potencial tanto para o desenvolvimento do raciocínio matemático quanto para a aprendizagem da adição e de suas propriedades. Do ponto de vista matemático, trata-se de tarefas que exigem a composição e decomposição de números, favorecendo a compreensão da estrutura aditiva ao requerer que os alunos analisem diferentes formas de construir um mesmo total. Esse tipo de exploração mobiliza propriedades fundamentais da adição, como a

comutatividade, quando os estudantes percebem que diferentes ordens das parcelas geram o mesmo resultado, e a associatividade, quando reorganizam agrupamentos para facilitar cálculos intermediários. A multiplicidade de soluções possíveis estimula processos como conjecturar, testar, justificar e generalizar — elementos centrais do raciocínio matemático segundo Jeannotte e Kieran (2017). Dessa forma, a tarefa supera o caráter meramente procedimental e se configura como uma situação de investigação alinhada à perspectiva do ensino exploratório defendida por Ponte (2005), Brodie (2010) e Ponte, Brocardo e Oliveira (2009). Os autores citados enfatizam que o raciocínio matemático emerge não apenas da apresentação de boas tarefas, mas, também, da articulação entre tarefas ricas e uma mediação docente que promove a comparação de estratégias, a validação de ideias e a explicitação dos processos de raciocínio. Os resultados observados mostram que os alunos evoluíram na sua capacidade de justificar e revisar suas escolhas e melhoraram seu entendimento da adição, o que os permitiu reconhecer padrões, propriedades e diferentes formas de representar um mesmo número. Assim, a tarefa se mostra potente não apenas para promover o raciocínio matemático, mas, também, para consolidar aprendizagens fundamentais da matemática como a adição.

Dessa forma, o objetivo central da pesquisa — identificar quais processos de raciocínio matemático são mobilizados por alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental ao resolverem tarefas exploratórias de Matemática — foi plenamente alcançado. Verificou-se que o processo de conjectura foi o primeiro a emergir nas interações, servindo de ponto de partida para outros processos, como a justificação e a comparação, que, por sua vez, conduziram à generalização. À medida que os alunos revisavam e discutiam suas soluções, refinavam suas conjecturas e avançavam cognitivamente, evidenciando o raciocínio matemático em evolução.

Conclui-se, portanto, que o ensino exploratório, por meio de tarefas exploratórias, aliado a uma mediação docente, promove o desenvolvimento do raciocínio matemático. Essa abordagem contribui não apenas para a aprendizagem de conteúdos específicos, mas, também, para a formação de sujeitos autônomos, críticos e capazes de argumentar matematicamente, aspectos fundamentais para a educação matemática. Os resultados apresentados corroboram outros já alcançados por outras pesquisas sobre a temática que tiveram, como participantes, alunos dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, como Júlio (2023), Morais (2022), Bellini (2022), além de trabalhos de outros alunos do PPGMAT, o que evidencia que o raciocínio matemático pode, e deve ser desenvolvido desde essa faixa de escolarização (Araman; Serrazina, 2020).

Como desdobramentos, esta pesquisa proporcionou a realização de um estudo longitudinal, acompanhando uma mesma turma ao longo de dois ou três anos escolares, com o objetivo de compreender de que modo o raciocínio matemático se desenvolve ao longo do tempo. Tal investigação possibilitará analisar quais tipos de tarefas contribuem para a construção de formas mais sofisticadas de pensamento matemático, bem como examinar as transformações na linguagem matemática utilizada pelos alunos, considerando a progressiva ampliação de sua capacidade de argumentar, justificar e estabelecer relações. Um acompanhamento dessa natureza poderá oferecer evidências mais consistentes acerca dos processos de evolução do raciocínio matemático, contribuindo para o aprofundamento teórico na área e para a qualificação das práticas pedagógicas nos anos iniciais.

REFERÊNCIAS

- ALISEDA, A. Seeking explanations: abduction in logic, philosophy of science and artificial intelligence. **Journal of Applied Logic**, Amsterdam, v. 1, n. 1–2, p. 1–28, 2003.
- ALVES, R. **A alegria de ensinar**. São Paulo: Ars Poetica, 1994.
- ARAMAN, E. M. O.; SERRAZINA, M. L.; PONTE, J. P. “Eu perguntei se o cinco não tem metade”: ações de uma professora dos primeiros anos que apóiam o raciocínio matemático. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 21, n. 2, p. 466-490, 2019.
- ARAMAN, E. M. O.; SERRAZINA, L. Processos de raciocínio matemático na resolução de tarefas exploratórias no 3º ano de escolaridade. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, Campo Mourão, v.9(18), p. 118-136, 2020.
- ARAMAN, E. M. O.; SERRAZINA, L.; PONTE, J. P. **Raciocínio Matemático nos Primeiros Anos**: ações de duas professoras ao discutir tarefas com seus alunos. *Bolema*, v. 34(67), p. 441- 461, 2020.
- BELLINI, J. M. **Processos de raciocínio matemático no Ensino Fundamental**: tarefas exploratórias sobre medidas de comprimento. (Dissertação de Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2022.
- BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação Qualitativa em Educação**. Portugal: Porto Editora, 1994.
- BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais** (1ª a 4ª séries): Matemática. Brasília: MEC, 1997.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018
- BRODIE, K. **Teaching mathematical reasoning in secondary school classrooms**. New York: Springer, 2010.
- BRUNER, J. **Toward a theory of instruction**. Cambridge, MA: Harvard University Press, 1966.
- BRUNER, J. **The process of education**. Cambridge, MA: Harvard University Press, 1998.
- BUYS, K. Addition and subtraction up to 100. *In*: GRAVEMEIJER, K. (ed.). **Children learn mathematics**: a learning-teaching trajectory with intermediate attainment targets for calculation with whole numbers in primary school. Utrecht: Freudenthal Institute, p. 49–110, 2001.
- CANAVARRO, A. P. Ensino exploratório da Matemática: práticas e desafios. *In*: PONTE, J. P. (org.). **Práticas profissionais dos professores de Matemática**. Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, p. 33–52, 2011.

CARPENTER, T.P.; MOSER, J. M. The acquisition of addition and subtraction concepts in grades one through three. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, v. 15, n. 3, p. 179–202, 1984.

CURI, E. **Matemática**: Ensinando e aprendendo nas séries iniciais. Editora Moderna, 2010.

FONSECA, H.; BRUNHEIRA, L.; PONTE, J. P. **Ensino de adição e suas propriedades no contexto dos anos iniciais**. Lisboa: APM, 1999.

FOSNOT, C. T.; DOLK, M. **Young mathematicians at work**: constructing number sense, addition, and subtraction. Portsmouth, NH: Heinemann, 2001.

JEANNOTTE, D.; KIERAN, C. A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, v. 96(1), p. 1-16, 2017.

JÚLIO, N. M. D. **Processos de raciocínio matemático mobilizados por alunos do 7º ano durante a resolução de problemas** (Dissertação de Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2023.

LANNIN, J.; ELLIS, A. B.; ELLIOTT, R. **Developing essential understanding of mathematical reasoning for teaching mathematics in prekindergarten - grade 8**. Reston: National Council of Teachers of Mathematics, 2011.

MARTINS, H. *et al.* As cinco estratégias de cálculo da adição e subtração do 1º ano e o seu impacto nas aprendizagens do 1º ciclo. **Jornal das Primeiras Matemáticas**, nº 15, p 19-53, 2020.

MATA-PEREIRA, J. **As ações do professor para promover o raciocínio matemático na sala de aula**. 2018. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade de Lisboa, Lisboa, 2018.

MATA-PEREIRA, J.; PONTE, J. P. Enhancing students' mathematical reasoning in classroom practice. **ZDM Mathematics Education**, Berlin, v. 49, n. 2, p. 169–186, 2017.

MATA-PEREIRA, J.; PONTE, J. P. Promover o Raciocínio Matemático dos Alunos: uma investigação baseada em design. **Bolema**, v. 32(62), p. 781–801, 2018.

MENINO, H. A. L. **Números e operações para a Educação Básica**. Leiria: Escola Superior de Educação e Ciências Sociais, Instituto Politécnico de Leiria, 2023.

MORAIS, C.; SERRAZINA, L.; PONTE, J. P. Mathematical Reasoning Fostered by (Fostering) Transformations of Rational Number Representations. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 20(4), p. 552-570, 2018.

MORAIS, R. S. **Processos de raciocínio matemático mobilizados por estudantes do 5º ano ao argumentar matematicamente a respeito de figuras geométricas planas**. (Dissertação de Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Cornélio Procópio, 2022.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (NCTM). **Princípios e Normas para a matemática escolar**. Lisboa: Associação de Professores de Matemática (APM), 2000, 2007, 2009, 2020.

PONTE, J. P.; SERRAZINA, L. **Didáctica da Matemática do 1.º ciclo**. Lisboa: Universidade Aberta, 2000.

PONTE, J. P.; BROCARD, L.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2003; 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2009.

PONTE, J. P. Gestão curricular em Matemática. *In*: GTI (Org.). **O professor e o desenvolvimento curricular**. Lisboa: APM, p. 11–34, 2005.

PONTE, J. P. Explorar e Investigar em Matemática: Desafio para os Alunos e Professores. **Movimento-Revista de Educação**, Lisboa, 2012.

PONTE, J. P.; MATA-PEREIRA, J.; HENRIQUES, A. O raciocínio matemático nos alunos do ensino básico e do ensino superior. **Práxis Educativa**, Ponta Grossa v.7, n. 2, p. 355-377, 2012.

PONTE, J. P. Tarefas no ensino da Matemática. *In*: PONTE, J. P. (org.). **Práticas profissionais dos professores de Matemática**. Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, p. 13–30, 2014.

PONTE, J. P. *et al.* Investigação baseada em design para compreender e melhorar as práticas educativas. **Quadrante**, v. 25(2), p. 77-98, 2016.

PONTE, J. P.; QUARESMA, M.; MATA-PEREIRA, J. Como desenvolver o raciocínio matemático na sala de aula? **Educação e Matemática**, v. 156, p. 7-11, 2020.

PONTE, J. P.; MATA-PEREIRA, J.; QUARESMA, M. Raciocínio matemático e o ensino exploratório. **Quadrante**, Lisboa, v. 29, n. 2, p. 7–28, 2020.

SANTOS, L.; TEIXEIRA, P. **Números e operações no ensino básico**. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência – Direção-Geral da Educação, 2015.

SERRAZINA, L. Aprender matemática com compreensão: raciocínio matemático e ensino exploratório. **Teia: Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, v. 12, n. 3, p. 1-19, 2021.

STEIN, M. K.; SMITH, M. S. Mathematical tasks as a framework for reflection: from research to practice. **Mathematics Teaching in the Middle School**, Reston, v. 3, n. 4, p. 268–275, 1998.

STYLIANIDES, A. J. Proof and proving in school mathematics. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, v. 39, n. 3, p. 313–344, 2008.

STYLIANIDES, A. J. Reasoning-and-proving in school mathematics textbooks. **Mathematical Thinking and Learning**, Philadelphia, v. 11, n. 4, p. 258–288, 2009.

THOMPSON, I. Mental calculation strategies for addition and subtraction: part 1. **Mathematics in School**, Leicester, v. 28, n. 5, p. 2–6, 1999.

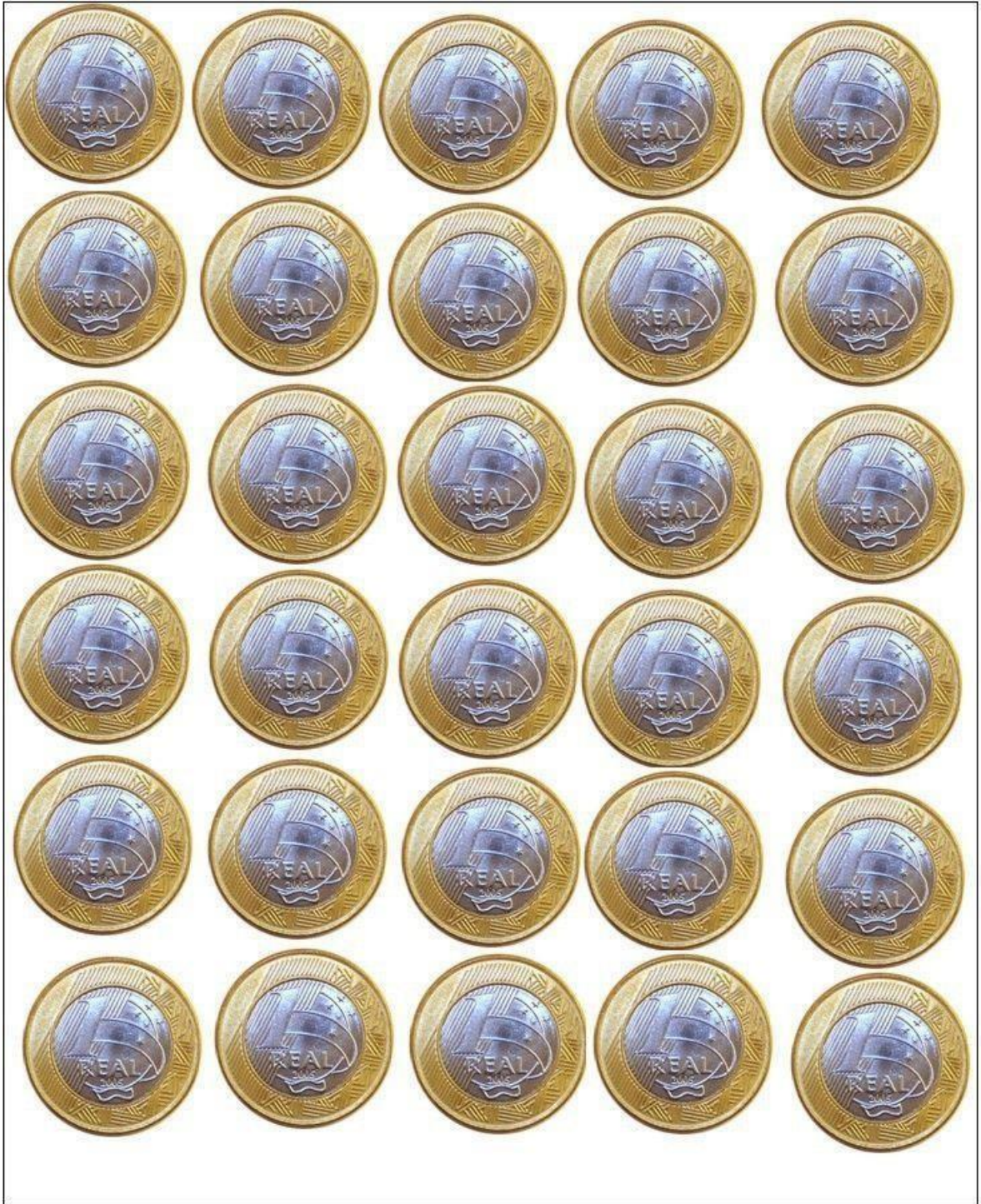
VAN DE WALLE, J.A. **Matemática no ensino fundamental**: formação de professores e aplicação em sala de aula. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

VIEIRA, E. **A aprendizagem da adição e subtração através da resolução de problemas**. 2016. Dissertação (Mestrado em Educação) – Instituto Politécnico de Setúbal, Setúbal, 2016.

APÊNDICE A—CÉDULAS



APÊNDICE B-MOEDAS



Ficha de Avaliação de Produto/Processo Educacional

Adaptado de: Rizzatti, I. M. *et al.* Os produtos e processos educacionais dos programas de pós-graduação profissionais: proposições de um grupo de colaboradores. **ACTIO**, Curitiba, v. 5, n. 2, p. 1-17, mai./ago. 2020. Disponível em: <https://periodicos.utfpr.edu.br/actio/article/view/12657>. Acesso em 14 de dezembro de 2020.

Instituição de Ensino Superior	Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Programa de Pós-Graduação	Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGMAT)
Título da Dissertação	Análise dos processos de raciocínio matemático mobilizados por alunos de 1o ano na realização de tarefas exploratórias de adição.
Título do Produto/Processo Educacional	RACIOCÍNIO MATEMÁTICO DE ALUNOS DO 1º ANO NA REALIZAÇÃO DE TAREFAS EXPLORATÓRIAS DE ADIÇÃO
Autores do Produto/Processo Educacional	Discente: Rosiane Novais da Costa
	Orientador/Orientadora: Eliane Maria de Oliveira Araman
	Outros (se houver):
Data da Defesa	30/03/2026

FICHA DE AVALIAÇÃO DE PRODUTO/PROCESSO EDUCACIONAL (PE)

Esta ficha de avaliação deve ser preenchida pelos membros da banca do exame de defesa da dissertação e do produto/processo educacional. Deve ser preenchida uma única ficha por todos os membros da banca, que decidirão conjuntamente sobre os itens nela presentes.

Aderência: avalia-se se o PE apresenta ligação com os temas relativos às linhas de pesquisas do Programa de Pós-Graduação.

*Apenas um item pode ser marcado.

Linhas de Pesquisa do PPGMAT:

LI: Formação de Professores e Construção do Conhecimento Matemático (abrange discussões e reflexões acerca da formação inicial e em serviço dos professores que ensinam Matemática, bem como o estudo de tendências em Ensino de Matemática, promovendo reflexões críticas e analíticas a respeito das

() Sem clara aderência às linhas de pesquisa do PPGMAT.

(X) Com clara aderência às linhas de pesquisa do PPGMAT.

<p>potencialidades de cada uma no processo de construção do conhecimento matemático nos diferentes níveis de escolaridade);</p> <p><i>L2: Recursos Educacionais e Tecnologias no Ensino de Matemática</i> (trata da análise e do desenvolvimento de recursos educacionais para os processos de ensino e de aprendizagem matemática, atrelados aos aportes tecnológicos existentes).</p>	
<p>Aplicação, aplicabilidade e replicabilidade: refere-se ao fato de o PE já ter sido aplicado (mesmo que em uma situação que simule o funcionamento do PE) ou ao seu potencial de utilização e de facilidade de acesso e compartilhamento para que seja acessado e utilizado de forma integral e/ou parcial em diferentes sistemas.</p> <p><u>*Apenas um item pode ser marcado.</u></p> <p>A propriedade de aplicação refere-se ao processo e/ou artefato (real ou virtual) e divide-se em três níveis:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) aplicável – quando o PE tem potencial de utilização direta, mas não foi aplicado; 2) aplicado – quando o PE foi aplicado uma vez, podendo ser na forma de um piloto/protótipo; 3) replicável – o PE está acessível e sua descrição permite a utilização por outras pessoas considerando a possibilidade de mudança de contexto de aplicação. <p>Para o curso de Mestrado Profissional, o PE deve ser aplicável e é recomendado que seja aplicado.</p>	<p>() PE tem características de aplicabilidade, mas não foi aplicado durante a pesquisa.</p> <p>() PE foi aplicado uma vez durante a pesquisa e não tem potencial de replicabilidade.</p> <p>(X) PE foi aplicado uma vez durante a pesquisa e tem potencial de replicabilidade (por estar acessível e sua descrição permitir a utilização por terceiros, considerando a possibilidade de mudança de contexto de aplicação).</p> <p>() PE foi aplicado em diferentes ambientes/momentos e tem potencial de replicabilidade (por estar acessível e sua descrição permitir a utilização por terceiros, considerando a possibilidade de mudança de contexto de aplicação).</p>
<p>Abrangência territorial: refere-se a uma definição da abrangência de aplicabilidade ou replicabilidade do PE (local, regional, nacional ou internacional). Não se refere à aplicação do PE durante a pesquisa, mas à potencialidade de aplicação ou replicação futuramente.</p> <p><u>*Apenas um item pode ser marcado e a justificativa é obrigatória.</u></p>	<p>() Local</p> <p>() Regional</p> <p>() Nacional</p> <p>(X) Internacional</p> <p>Justificativa (<i>obrigatória</i>): O Produto Educacional encontra-se disponível no repositório institucional, com livre acesso, podendo ser usado por professores e pesquisadores de diversos países, com destaque ao que são de Língua Portuguesa.</p>
<p>Impacto: considera-se a forma como o PE foi utilizado e/ou aplicado no sistema relacionado à prática profissional do discente (não precisa ser, necessariamente, em seu local de trabalho).</p> <p><u>*Apenas um item pode ser marcado.</u></p>	<p>() PE não utilizado no sistema relacionado à prática profissional do discente (esta opção inclui a situação em que o PE foi utilizado e/ou aplicado em um contexto simulado, na forma de protótipo/piloto).</p> <p>(X) PE com aplicação no sistema relacionado à prática profissional do discente.</p>

<p>Área impactada</p> <p><u>*Apenas um item pode ser marcado.</u></p>	<p>() Econômica;</p> <p>() Saúde;</p> <p>(X) Ensino;</p> <p>() Cultural;</p> <p>() Ambiental;</p> <p>() Científica;</p> <p>() Aprendizagem.</p>
<p>Complexidade: compreende-se como uma propriedade do PE relacionada às etapas de elaboração, desenvolvimento e/ou validação do PE.</p> <p><u>*Podem ser marcados nenhum, um ou vários itens.</u></p>	<p>(X) O PE foi concebido a partir de experiências, observações e/ou práticas do discente, de modo atrelado à questão de pesquisa da dissertação.</p> <p>(X) A metodologia apresenta clara e objetivamente, no texto da dissertação, a forma de elaboração, aplicação (se for o caso) e análise do PE.</p> <p>() Há, no texto da dissertação, uma reflexão sobre o PE com base nos referenciais teóricos e metodológicos empregados na dissertação.</p> <p>() Há, no texto da dissertação, apontamentos sobre os limites de utilização do PE.</p>
<p>Inovação: considera-se que o PE é inovador, se foi criado a partir de algo novo ou da reflexão e modificação de algo já existente revisitado de forma inovadora e original. A inovação não deriva apenas do PE em si, mas da sua metodologia de desenvolvimento, do emprego de técnicas e recursos para torná-lo mais acessível, do contexto social em que foi utilizado ou de outros fatores. Entende-se que a inovação (tecnológica, educacional e/ou social) no ensino está atrelada a uma mudança de mentalidade e/ou do modo de fazer de educadores.</p>	<p>() PE de alto teor inovador (desenvolvimento com base em conhecimento inédito).</p> <p>() PE com médio teor inovador (combinação e/ou compilação de conhecimentos preestabelecidos).</p> <p>(X) PE com baixo teor inovador (adaptação de conhecimentos existentes).</p>
<p>Membros da banca examinadora de defesa</p>	
<p>Nome</p>	<p>Instituição</p>
<p>Eliane Maria de Oliveira Araman</p>	<p>UTFPR</p>
<p>Adriana Quimentão Passos</p>	<p>UNOPAR</p>
<p>Jader Otavio Dalto</p>	<p>UTFPR</p>