

PRODUTO EDUCACIONAL

Mestrado Profissional em Ensino de Matemática PPGMAT/UTFPR

INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA ORIENTAÇÕES PARA O PROFESSOR

Jéssica Concentino
Dra. Elaine Cristina Ferruzzi

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA
- PPGMAT -**

JÉSSICA CONCENTINO

PRODUTO EDUCACIONAL

**INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA
ORIENTAÇÕES PARA O PROFESSOR**

Produto Educacional apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática. Linha de Pesquisa: **Recursos Educacionais e Tecnologias no Ensino de Matemática.**

Orientadora: Prof.^a Dr.^a Elaine Cristina Ferruzzi

LONDRINA
2019

TERMO DE LICENCIAMENTO

Esta Dissertação e o seu respectivo Produto Educacional estão licenciados sob uma Licença Creative Commons *atribuição uso não-comercial/compartilhamento sob a mesma licença 4.0 Brasil*. Para ver uma cópia desta licença, visite o endereço <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/> ou envie uma carta para Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, Califórnia 94105, USA.



Caro Professor,

Este material foi elaborado com o propósito de auxiliá-lo no trabalho com atividades de Investigação Matemática com sugestões de alguns roteiros para iniciar o trabalho em sala de aula, visto que trata de uma prática pedagógica diferente do ensino tradicional.

O material é composto de instruções e orientações para o professor sobre Investigação Matemática e foi produzido a partir da pesquisa de mestrado, fruto da nossa Dissertação do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática (PPGMAT/UTFPR) intitulada “Caminhos a percorrer: desafios do processo de Investigação Matemática”.

Nosso objetivo é oferecer a você, Professor de Matemática, um material contendo alguns esclarecimentos essenciais de forma sucinta sobre a prática pedagógica de Investigação Matemática, a partir das perspectivas de alguns autores, como Ponte, Brocardo e Oliveira (2009).

A leitura do material de orientações ao professor, antes de iniciar o trabalho em sala de aula com atividades de Investigação Matemática, tem suas contribuições como forma de entender do que se trata a prática pedagógica, acompanhado de encaminhamentos, ações e questionamentos que o professor pode desempenhar no desenvolvimento da Investigação Matemática. Para trabalhos iniciais em sala de aula com essa prática pedagógica, apresentamos alguns roteiros que orientam o desenvolvimento.

Assim, desejamos que este material contribua para o processo de ensino e de aprendizagem de Matemática, promovendo ainda a compreensão e a reflexão sobre essa proposta e que as experiências tragam motivação para aprofundar nos estudos sobre o assunto e até desencadeie novas pesquisas frente à prática pedagógica de Investigação Matemática.

Esperamos que possam realizar um ótimo trabalho com os alunos!

Um grande abraço!

Atenciosamente,
Jéssica Concentino
Elaine Cristina Ferruzzi

Sumário

Aspectos e encaminhamentos da Investigação Matemática	6
Investigação Matemática	6
Atividades de Investigação Matemática	8
Diferentes funções na proposta da investigação	10
Desenvolvimento da aula e ações docentes para promover a Investigação Matemática	12
REFERÊNCIAS	17
ROTEIROS	19

Aspectos e encaminhamentos da Investigação Matemática

Este material apresenta uma proposta que pode auxiliar e orientar o professor no desenvolvimento de atividades por meio da Investigação Matemática. Contempla o objetivo de propiciar a implementação inicial de atividades investigativas, com roteiros que auxiliam e orientam o professor, a fim de promover a familiarização no desenvolvimento do processo de Investigação Matemática em sala de aula.

Apresentamos assim alguns questionamentos sobre essa prática pedagógica:

- O que é Investigação Matemática?
- Quais encaminhamentos desenvolver para proporcionar atividades de Investigação Matemática?
- Quais ações o docente deve promover para que a aula tenha a caracterização de uma Investigação Matemática?

Essas questões direcionam o conteúdo apresentado no material de orientações ao professor seguir.

Investigação Matemática

A Investigação Matemática é uma prática pedagógica que utiliza um conjunto de processos peculiares da atividade matemática, levantando “questões que nos interessam, para as quais não temos essa resposta pronta, e procuramos essa resposta de modo tanto quanto possível fundamentado e rigoroso” (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2009, p. 9).

Atividades de Investigação Matemática em sala de aula iniciam-se com uma situação desafiadora para o aluno e geralmente são desenvolvidas em **pequenos grupos**, possibilitando a busca de meios para solucionar o problema, a utilização de argumentações, a produção de significados para a Matemática, a comunicação, a elaboração de relatórios e a apresentação dos resultados (CORRADI, 2011). Neste sentido, Ponte et al. (1997, p.10) consideram que este tipo de atividade possibilita “o desenvolvimento de atitudes e valores como o gosto pela Matemática, a autonomia e a cooperação”.

Tendo em vista que, via de regra, nossos estudantes estão habituados com tarefas rotineiras, compostas por aplicação e reprodução de técnicas, o fato das atividades investigativas se apresentarem “essencialmente abertas e pouco estruturadas” (SILVA; VERTUAN, 2018, p. 504) parece ser um desafio tanto para os alunos quanto para o professor. E é a elucidação deste desafio que nos propomos a investigar.

Uma atividade por si só não possui autonomia ou característica suficiente para ser uma atividade de cunho investigativo. Vários aspectos precisam estar presentes, entre eles, a vontade do aluno e a ação do professor.

Nesse sentido, Ferruzzi, Borsoi e Silva (2018, p.3) apontam que as ações do professor são a base para que os alunos “aceitem pesquisar com afinco, estejam dispostos a testar conjecturas, procurar com atenção, indagar e buscar provas para suas descobertas”, ou seja, “aceitem o convite” posto por Skovsmose (2000).

Do mesmo modo, Ponte, Brocardo e Oliveira (2009) argumentam que atividades de investigação requerem envolvimento ativo do aluno, e quando ele desenvolve essa responsabilidade tende a favorecer o processo de aprendizagem, visto que, nessa abordagem os alunos são convidados a formular as questões a serem investigadas, a elaborar conjecturas num processo de provas e refutamento e apresentar esse processo de descoberta para os colegas e professor, discutindo e argumentando sobre os resultados obtidos. Ponte (2003, p. 38) ressalta ainda

[...] que a realização continuada de investigações, num quadro de discussão e reflexão sobre o significado dos resultados obtidos e dos processos empregues, é susceptível de influenciar de modo muito significativo as concepções dos alunos. Estes podem alterar a sua visão do trabalho investigativo, das características da Matemática, do modo de aprender Matemática e dos papéis do professor e do aluno, desenvolvendo o gosto pela disciplina e a sua confiança neste tipo de trabalho.

Portanto, essa prática pedagógica gera desafios, tanto para o professor como para os alunos, mas é fundamental proporcionar diversas vezes essa experiência, de modo paulatino, para que as dificuldades desse processo sejam superados e almejar as habilidades e competências a ser desenvolvidas nesse contexto de ensino e aprendizagem.

Os caminhos a percorrer no processo da Investigação Matemática podem desenvolver habilidades dos envolvidos na prática investigativa, pelo fato de contemplar e valorizar “a adivinhação sagaz, a hipótese fértil, o salto arrojado para uma conclusão

tentativa - essa é a moeda mais valiosa do pensador em ação, qualquer que seja o seu campo” (BRUNER, 1978, p. 12).

Atividades de Investigação Matemática

As atividades investigativas devem ser propostas e implementadas de forma gradativa, para estimular os alunos a se envolverem e interagirem, de modo que se sintam capazes e confiantes no processo, promovendo ainda a responsabilidade da aprendizagem.

[...] relevância de atividades investigativas se deve ao desenvolvimento do trabalho que é realizado em equipe, onde a utilização da argumentação, da comunicação matemática e da elaboração de relatórios, oportuniza aos alunos a produção de significados para a Matemática. Por meio de situações problema desafiadoras possibilita ao aluno o desenvolvimento de autonomia na busca de meios para investigação (CORRADI, 2011, p. 165).

Corradi (2011, p. 163), aborda que as atividades investigativas podem alcançar o objetivo de desenvolver nos alunos atitudes que “contribuem para mobilizar e consolidar seus conhecimentos matemáticos”, assim como, Ponte (2014, p. 14) caracteriza “o termo “atividade” [...] relacionada com a ideia que o aluno deve desempenhar um “papel ativo” no processo de aprendizagem”.

Desse modo, a Investigação Matemática requer o envolvimento ativo do aluno, no que refere a

[...] explorar, a adivinhar e, até mesmo, a cometer erros, de modo que, através dessas atividades, ganhassem confiança em sua capacidade de resolver problemas simples ou complexos; que lessem, escrevessem, e discutissem matemática; que conjecturassem, tentassem e construíssem argumentos sobre a validade de uma conjectura (CUNHA, 2009, p. 10).

A importância das atividades de Investigação Matemática reside em aguçar uma força que desafia alunos e professores, que com objetivo comum de fazer matemática, rompem com a zona de conforto gerado pelo ensino tradicional.

Para o trabalho inicial em sala de aula com atividades investigativas, o professor pode utilizar roteiros, que o oriente em algumas ações a serem desenvolvidas, e tomar consciência que o papel fundamental é ser orientador, para que no desenvolvimento da atividade apresente questionamentos que desperte habilidades de investigar, de pensar, de elaborar indagações.

Apresentamos assim, algumas situações que podem auxiliar no desenvolvimento de algumas habilidades nesse processo:

Quadro 1 – Questionamentos do professor no ambiente de Investigação Matemática

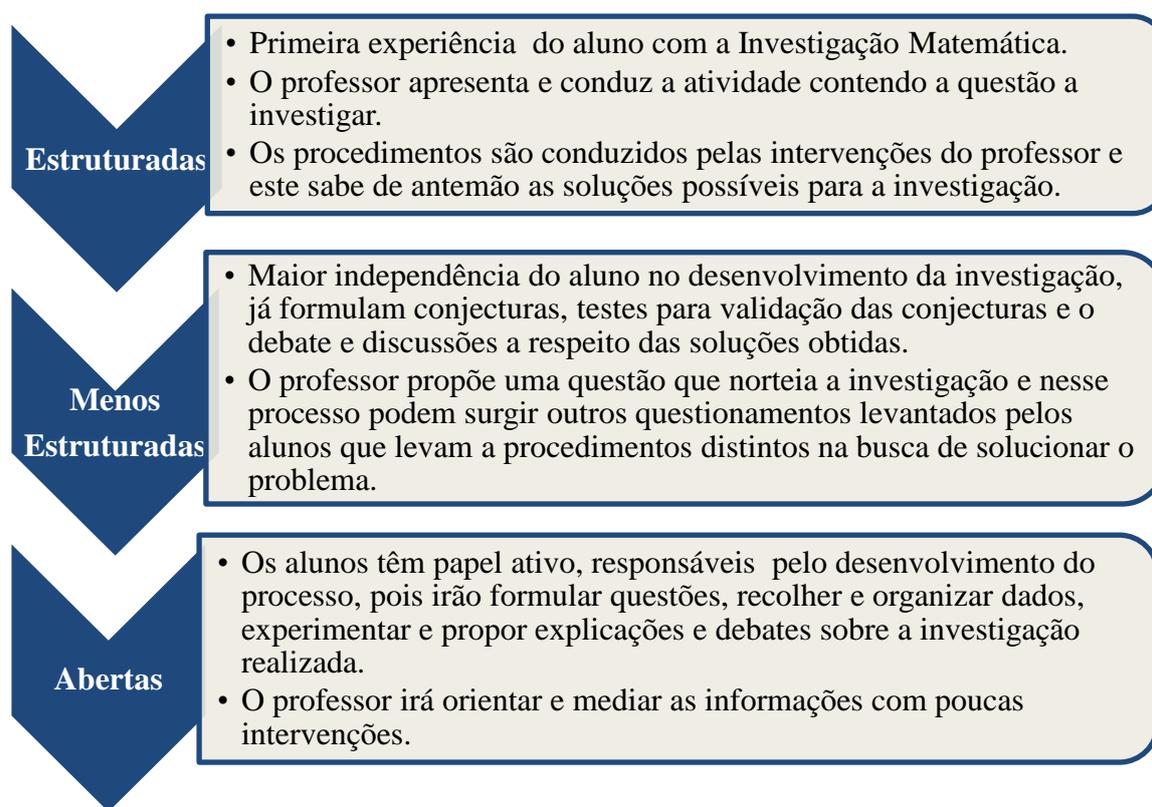
Questionamentos que o professor orientador pode promover:	
Provocando o raciocínio	Por quê? Como? Me explique....
Instigando	Tem certeza disso?
Incentivando	Muito bem, mas e se....
Validando	Continuem assim, estão no caminho certo...
Auxiliando na administração de conflitos	Vocês levaram em consideração o que o colega falou? Por quê?
Estimulando o confronto de pontos de vistas	Discutam as duas opiniões, por que não concorda com o que ele disse?
Promovendo a reflexão e argumentação	Explique como você chegou a esta conclusão.

Fonte: Adaptado de Ferruzzi, Borssoi e Silva (2018).

Cunha (2009, p. 23) argumenta que o professor deve saber “dosar as suas intervenções, permitindo que os alunos criem seus caminhos e tirem suas próprias conclusões”, considerando ainda todo o processo que os alunos percorrem, mesmo com seus erros, a aprendizagem pode ser oportunizada pelo decorrer do processo e das intervenções necessárias.

Para que essa prática pedagógica enriqueça o ambiente de aprendizagem, o professor que nunca trabalhou com este tipo de atividade deve iniciar com atividades estruturadas, que possuam questões norteadoras, que conduzam o aluno, porém sempre instigando-os, e com o tempo, aumentar o grau de dificuldade, “inserindo atividades menos estruturadas [...] quando os alunos estiverem mais acostumados (e o professor mais seguro)” (FERRUZZI; BORSSOI; SILVA, 2018, p. 6).

Figura 1 – Grau de complexidade da Atividade Investigativa



Fonte: A autora.

Essas experiências de atividade com Investigação Matemática são momentos de experiências ricas, que o professor deve ter conhecimento para tornar favorável a aprendizagem em cada nível e atingir os objetivos tanto dos procedimentos desenvolvidos como das habilidades que a investigação pode promover.

Diferentes funções na proposta da investigação

O pesquisador Goldenberg (1999) discute sobre diferentes formas de conceber uma investigação, e expõe quatro funções que a investigação desempenha na aula de matemática. Apresentamos no Quadro 2 estas funções:

Quadro 2 – Funções dos quatro processos de investigação

Explorar	<ul style="list-style-type: none">- Consiste em uma primeira experiência dos alunos sobre o que é Investigação Matemática.- O objetivo é explorar um problema com tema matemático, criando possibilidade para trabalhos posteriores, a partir de indagações que
----------	--

	<p>surgirem pelos alunos, ou até mesmo propostas pelo professor.</p> <ul style="list-style-type: none"> - “Ajudar os alunos a estabelecer intuições”, sem almejar a elaboração de alguma conjectura.
Descobrir	<ul style="list-style-type: none"> - Considera-se ainda caráter de primeira experiência, consiste em uma investigação limitada. - Propor perguntas que façam refletir sobre uma mesma constatação, só que de modo diferente, dando oportunidade de explorar e observar as mesmas percepções, o que conduz a descobertas. - Ao concluir as ideias, elaborar uma regra.
Pôr em questão	<ul style="list-style-type: none"> - Consiste em promover situações que leve os alunos a discussões de ideias. - Debater sobre “ideias matemáticas que tenham já trabalhado parcialmente, para rever, apurar ou aprofundar essas ideias ou para relacioná-las com outras” (p. 7). - Permite aos alunos compreender o porquê de certos conceitos e formar suas concepções.
Investigar	<p>O objetivo vai além dos conceitos matemáticos. Nessa função os alunos:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Desenvolvem a autonomia, responsabilidade e a independência no processo da investigação. - Reconhecem uma problemática e começam a elaborar questionamentos, formular conjecturas, realizam testes para validá-las e justificá-las, não esperando respostas prontas do professor, reconhecendo ainda que o professor tem o papel de orientador. - Aprendem a valorizar não apenas as resposta, mas todo o processo da investigação, desenvolvendo a organização das ideias, comunicando-as e discutindo com os colegas, e em cooperação elaboram conclusões. - Desenvolvem a confiança no processo de construção do próprio conhecimento.

Fonte: Adaptado de Goldenberg (1999).

Cada função desperta diferentes competências no processo da investigação e quando ofertadas de modo que os alunos se sintam motivados, curiosos e confiantes no processo a ser desenvolvido, constroem os “hábitos matemáticos de pensamento” (GOLDENBERG, 1999, p. 3) e compreendem a essência da criação de “factos e

métodos”, assim como, aprendem a “ser um investigador perspicaz, e para isso tem que fazer investigação” (Ibidem, p. 3). As pequenas investigações começam em trabalhos exploratórios, fazendo observações e encontrando relações (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2009).

Desenvolvimento da aula e ações docentes para promover a Investigação Matemática

A primeira fase da estrutura da aula é a reflexão do professor sobre a elaboração de atividades investigativas, o que não é algo trivial, principalmente para professores que atuam há anos com o sistema tradicional. Como afirmam Oliveira et al. (1999, p. 100), “é um trabalho criativo (para o qual não há receitas)”, um processo em que pode ocorrer erros, mas também, quando há persistência nesse processo, podem resultar acertos que enriquecem a proposta do ensino.

O professor deve delinear objetivos claros, elaborar pesquisas e mais que isso, “recorrer à sua criatividade para dar forma à tarefa, adaptando as situações, reconstruindo as questões da maneira que melhor servir os seus objetivos” (CORRADI, 2011, p. 170). Isso é parte de um processo cuidadoso que exige habilidades que demanda tempo para adquirir (CORRADI, 2011), sendo “necessário que o professor invista bastante na preparação dessas aulas” (FONSECA; BRUNHEIRA; PONTE, 1999, p. 3), com situações que estimulem o pensamento matemático e também o diálogo, para expor suas ideias e explorá-las entre os alunos e o professor.

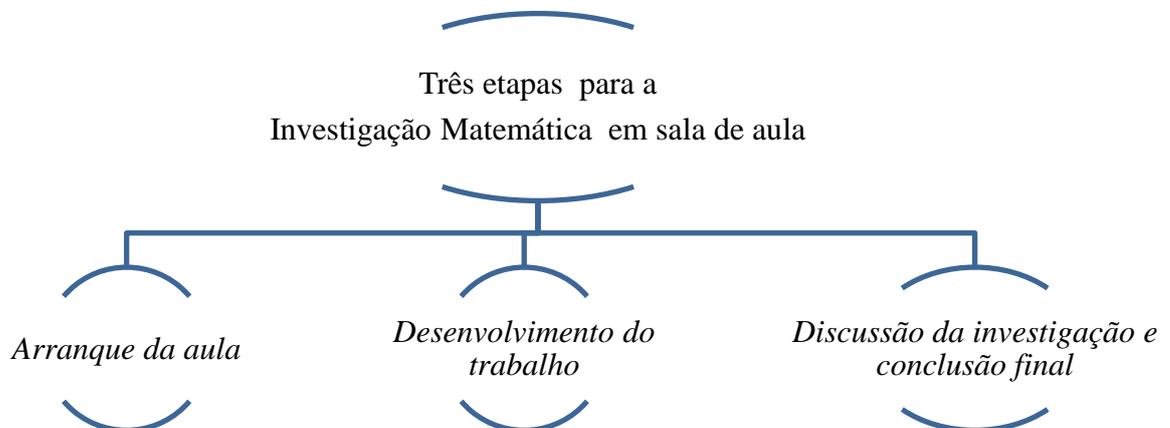
Figura 2 – Dando forma à atividade investigativa



Fonte: A autora.

Tendo sido preparada a atividade, chega a hora de desenvolvê-la. Ponte, Brocardo e Oliveira (2009), propõem três etapas que podem contribuir para o desenvolvimento da Investigação Matemática. Estas etapas podem ser visualizadas na Figura 3 que foi construída baseada nos autores.

Figura 3 – Etapas da Investigação Matemática em sala de aula



Fonte: Baseado em Ponte, Brocardo e Oliveira (2009).

Nessas etapas, a caracterização e as potencialidades da atividade de Investigação Matemática são condicionadas pelas ações do professor (PONTE, 2014). Sendo assim, apresentamos no Quadro 3 algumas ações que visam auxiliar o professor em cada etapa do processo.

Quadro 3 – Ações do docente no desenvolvimento da Investigação Matemática

Etapas da Investigação Matemática	Ações do Professor
Arranque da aula	<ul style="list-style-type: none"> • Apresentar as atividades aos alunos que, dependendo do grau de familiaridade, pode proporcionar mais ou menos informações. • As informações podem ser apresentadas de forma escrita, oral ou mista.
Desenvolvimento do trabalho	<ul style="list-style-type: none"> • Organizar a turma em pequenos grupos. • Convidar e estimular o aluno a envolver-se. • Despertar a curiosidade, usando as ideias dos alunos como propulsoras do conhecimento. • Provocar o raciocínio dos alunos, encorajando-os a elaborar explicações e relacionar as ideias com experiências anteriores, nunca desestimulando diante de uma explicação equivocada. • Auxiliar com questões orientadoras para estruturar o pensamento, dosando o apoio e as intervenções. • Incentivar os alunos perante as dificuldades para adquirir confiança no trabalho que estão elaborando. • Compartilhar as ideias entre professor e aluno num ambiente em que ambos são aprendizes. • Colocar os alunos em ação e responsáveis em desempenhar um “papel ativo” no processo da aprendizagem. • Desafiar os alunos, conduzindo-os a buscar em sua estrutura cognitiva relações e conceitos, exercitando seu poder de observação e generalização. • Gerenciar o tempo com flexibilidade, oportunizando aos alunos o tempo de maturação, para observar, conjecturar (levantar hipóteses), abstrair, formular questões, testar conjecturas, etc. • Dar oportunidade para compreenderem que a resposta não é algo pronto, há um processo a ser desenvolvido para obterem suas conclusões, desenvolvendo a compreensão e autonomia dos envolvidos. • Desenvolver a atitude de construtores do próprio conhecimento, observando que a matemática não é um simples conjunto de técnicas.

**Discussão da
investigação e
conclusão final**

Criar um ambiente com o “grupo maior” propício a:

- Verbalizar: expor e explicar o pensamento e raciocínio elaborados, assim como suas conclusões.
- Troca de ideias.
- Confrontar opiniões e argumentos, onde o receio de “arriscar” conjecturas é relativamente reduzido.
- Validar o raciocínio obtido por meio da discussão.
- Elaborar relatórios finais. Esse momento faz com que os alunos reflitam sobre o trabalho realizado estruturando as ideias e ao professor recolhe o registro de informações sobre o nível de desenvolvimento da atividade.

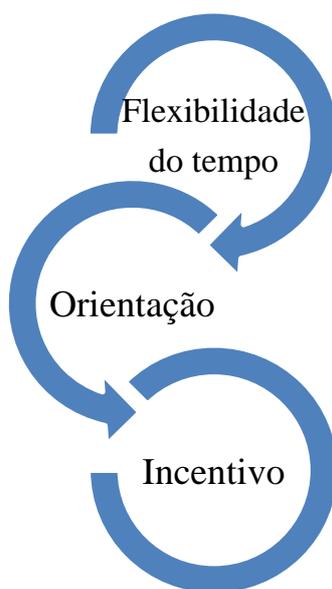
Esse ambiente conta com orientações e auxílio do professor em busca do fechamento da atividade.

Fonte: Adaptado de Corradi (2011) e Baptista (2010).

Tanto a elaboração da atividade investigativa, a organização da turma em pequenos grupos, as intervenções realizadas pelo professor no desenvolvimento do trabalho e a discussão da conclusão final são caracterizadas como etapas essenciais na Investigação Matemática para a construção do conhecimento do aluno. Em face a esse processo, pesquisadores argumentam ainda que é

[...] através da comunicação oral e escrita que os alunos dão sentido ao conhecimento matemático que vai sendo construído. [...] É na interação dos indivíduos uns com os outros que se desenvolvem as capacidades cognitivas e se promovem as atitudes e valores indicados pelas orientações curriculares (PONTE; et. al, 1997, p. 2).

Professor lembre-se da importância de dosar com cuidado as ações:



Fonte: A autora.

Essas ações são relevantes para que os alunos não percam o entusiasmo da investigação.

Aprender Matemática sem forte intervenção da sua faceta investigativa é como tentar aprender a andar de bicicleta vendo os outros andar e recebendo informação sobre como o conseguem. Isso não chega. Para verdadeiramente aprender é preciso montar a bicicleta e andar, fazendo erros e aprendendo com eles (BRAUMANN, 2001, p. 5).



Bom trabalho!

REFERÊNCIAS

- BRAUMANN, C. **Divagações sobre investigação matemática e o seu papel na aprendizagem da matemática.** In J. P. Ponte, C. Costa, A. I. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo, & A. F. Dionísio (Eds.), *Actividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores.* p. 5-24. Lisboa: SEM-SPCE, 2002.
- BRUNER, J. S. **O processo da Educação.** São Paulo, Nacional, 1978.
- CORRADI, D. K. S. **Investigações Matemáticas.** Revista da Educação Matemática da UFOP, Vol I, 2011 - XI Semana da Matemática e III Semana da Estatística, 2011. ISSN 2237-809X. p. 162-175.
- CUNHA, D. S. I. **Investigações geométricas: desde a formação do professor até a sala de aula de matemática.** Dissertação (mestrado) 98f. – UFRJ/IM. Rio de Janeiro, 2009.
- FERRUZZI, E. C.; BORSSOI, A. H.; SILVA, K. P. **Investigação Matemática em foco: evidenciando possibilidades para a sala de aula.** VI SINECT – Simpósio Nacional de Ensino de Ciência e Tecnologia – UTFPR, Ponta Grossa, 2018. Disponível em: <<http://www.sinct.com.br/2018/down.php?id=4089&q=1>>
- FONSECA, H., BRUNHEIRA, L., PONTE, J. P. **As actividades de investigação, o professor e a aula de Matemática.** Actas do ProfMat. Lisboa: APM, 1999.
- GOLDENBERG, E. P. **Quatro funções da investigação na aula de Matemática.** In: ABRANTES, P., PONTE, J. P., FONSECA, H., BRUNHEIRA, L. *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 35-49). Lisboa, 1999.
- PONTE, J. P. **Investigar, ensinar e aprender.** In: Actas do ProfMat, (CD-ROM, pp. 25-39). Lisboa: APM, 2003. Disponível em: <[http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/03-Ponte\(Profmat\).pdf](http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/03-Ponte(Profmat).pdf)> Acesso em: 20 jan. 2017.
- PONTE, J. P. **Tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática** 1ª edição - Práticas Profissionais dos Professores de Matemática. Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. 2014. Disponível em: www.ie.ulisboa.pt
- PONTE, J. P., BOAVIDA, A., GRAÇA, M., ABRANTES, P. **4 - A DINÂMICA DA AULA DE MATEMÁTICA.** Didáctica da Matemática. Lisboa: Departamento do Ensino Secundário, Ministério da Educação - 1997.
- PONTE, J. P.; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. **Investigação Matemáticas na Sala de Aula.** 2ª ed. 160 p. Belo Horizonte: Autêntica, 2009.
- OLIVEIRA, H.; PONTE, J. P.; SANTOS, L.; BRUNHEIRA, L. **Os professores e as actividades de investigação.** In: In Abrantes, P.; Ponte, J. P.; Fonseca, H.; Brunheira, L. (Orgs.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo.* (pp. 97-110), Lisboa: APM, 1999.

SILVA, K. A. P.; VERTUAN, R. E. **Um estudo sobre as intervenções docentes em contextos de atividades investigativas no âmbito de aulas de Matemática do Ensino Superior.** Ciênc. Educ., Bauru, v. 24, n. 2, p. 501-516, 2018.

SKOVSMOSE, O. **Cenários para investigação.** Bolema, nº 14, pp. 66 a 91, 2000.

Disponível em: <

[http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/textos/skovsmose\(Cenarios\)00.pdf](http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/textos/skovsmose(Cenarios)00.pdf)>. Acesso em: 20 mai. 2017.

ROTEIROS
ATIVIDADES INVESTIGATIVAS

Investigando relações nas dobraduras

Tempo estimado: 100 min.

Caro professor,

O roteiro a seguir é destinado à implementação inicial de uma atividade investigativa. Para isso elaboramos alguns passos e questionamentos para que o professor conduza a atividade de modo com que os alunos reflitam e investiguem, desenvolvendo a “capacidade de argumentar e provar” suas ideias e conclusões (CORRADI, 2011).

Objetivo da atividade: Proporcionar a exploração da soma de frações com denominadores iguais e denominadores diferentes.

A proposta pode ser desenvolvida em turmas de **6º Anos**, no momento de iniciar o trabalho com frações.

Inicie conversando com os alunos sobre como será a atividade: que eles farão o trabalho dos matemáticos e investigarão com dobraduras conceitos de fracionar (dividir/fração).

Divida os alunos em grupos de no máximo 3 alunos. Esta quantidade é a ideal para que todos entrem em atividade.

Iniciando a atividade:

Parte 1:

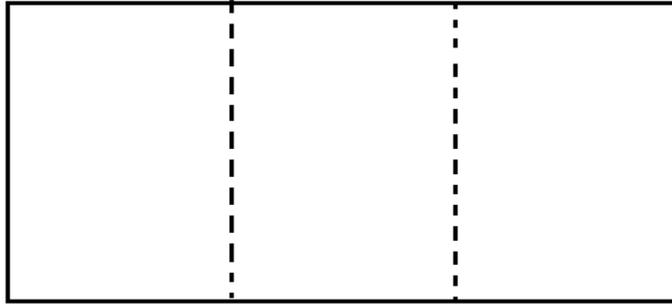
- 1- Forneça ou solicite aos alunos um papel (formato retangular).
- 2- Solicite aos alunos que dobrem o papel na **vertical** dividindo-o em **3 partes iguais**.
- 3- Permita que os alunos discutam como proceder.

Inicialmente irão achar fácil, porém, com um pouco de tempo começarão a fazer as dobras e provavelmente as primeiras dobras será ao meio. Entretanto quando abrem o papel verificam que não formou as três partes iguais.

Dê tempo. Ande pelos grupos, incentivando, solicitando explicações do que estão fazendo ou pensando em fazer.

Após um tempo que você considerar suficiente e observar que os grupos conseguiram uma estratégia para a dobra e perceber que outros não estão conseguindo, de atenção e oriente-os, instigue-os, dê dicas, mas não resolva para eles.

Após os grupos realizar as dobras corretamente, retome a atenção para você e explore representação que compõe cada parte da divisão, orientando-os sobre a escrita que representa cada parte dividida, o $\frac{1}{3}$.



- 4- Solicite que pintem 2 partes das 3.
- 5- Explore na a **soma** das partes pintadas, instigue-os.

O que vocês observaram quando pintamos 2 partes das 3?

Qual o resultado da soma dessa fração?

- 6- Deixe-os pensar mais um pouco. Solicite sugestões:

Como podemos fazer?

Permita que os alunos discutam e explorem sobre estas questões.

Provavelmente alguns chegarão à conclusão de $\frac{2}{6}$ e outros $\frac{2}{3}$.

- 7- Incentive-os para validar as conjecturas.

Qual é a representação da soma das duas partes pintadas, dois de três ou dois de seis?

- 8- Incentive se estiverem no caminho certo. Instigue-os para a conclusão

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Faça você também uma retomada final valorizando os raciocínios elaborados pelos grupos e explore um pouco mais sobre o conceito de frações.

Reserve a folhinha pintada.

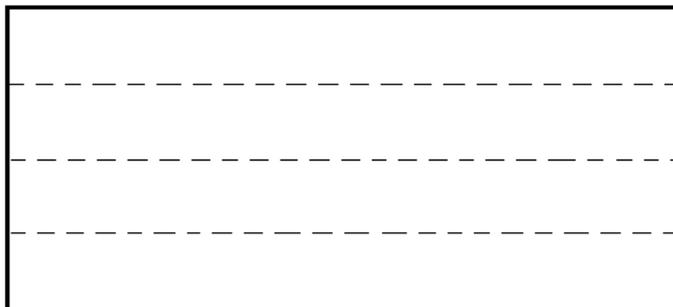
Parte 2: Iniciando com soma de frações com denominadores diferentes.

- 1- Forneça ou solicite aos alunos outro papel (formato retangular) do mesmo tamanho do anterior.
- 2- Solicite aos alunos que agora dobrem o papel na **horizontal** dividindo-o em **4 partes iguais**.
- 3- Permita que os alunos discutam como proceder.

Provavelmente esse processo será um pouco mais fácil de compreender do que a dobra anterior. Aproveite a oportunidade de explorar o conceito de metade.

Como no anterior, explore a fração que cada parte representa da divisão, orientando-os a escrever $\frac{1}{4}$ nas partes.

- 4- Solicite que pintem 1 parte das 4 (cor diferente do papel anterior).



Para dar destaque as partes divididas sugira que façam um risco com caneta (de preferência preta) onde ficou a marca da dobra de modo que fique bem marcado.

Agora, explore, montando no quadro com os alunos, as frações que representam as **partes pintadas**, nas duas folhas que foram dobradas.

$$\frac{2}{3} \quad \text{e} \quad \frac{1}{4}$$

Solicite aos alunos que analisem uma forma de **somar** as duas frações divididas em partes diferentes.

Deixe-os discutir.

Caso observe que eles não consigam desenvolver uma solução, lembre-os **da soma de frações com mesmo denominador**: a figura foi dividida em partes iguais para que assim pudesse somar as partes pintadas.

O que fazer para que tenham mesmo número de partes dividida (as duas folhas)?

Deixe-os investigar e discutir.

Se não encontrarem nenhuma relação, explore a parte 3.

Parte 3:

- 5- Solicite aos alunos que sobreponha os dois papéis retangulares divididos e pintados, incentivando.

Agora o que vocês podem observar?

Explique as conclusões que obteve com essa observação?

- 6- Permita que discutam.

Ande pelos grupos solicitando explicações do que estão pensando.

Se não encontrarem nenhuma relação, sugira que coloque sobre a luz, note que a sombra divide em vários retângulos menores.

O que representa esses retângulos menores que agora formamos na junção das duas folhas?

Eles irão questionar sobre as partes pintadas, deixe que investiguem. Orientando-os com alguns questionamentos e solicite a explicação de como chegou à conclusão.

Professor, o objetivo neste momento é que os alunos concluam que quando eles fizerem a sobreposição irá obter uma nova divisão, entre as duas folhas, resultando em 12 partes no total (junção), que é o **denominador comum** para as duas frações.

E as partes pintadas:

- Do primeiro retângulo que foi dividido em 3 partes, vamos obter 8 partes pintada das 12 total.
- E do segundo retângulo dividido em 4 partes, vamos obter 3 partes pintada das 12 total.

Ajude-os com questionamentos a fim de provocar o raciocínio (Porque? Como? Me explique...), instigando-os (Tem certeza disso?) e incentivando (Muito bem, mas e se....)

Após várias discussões, instigue-os para que consigam concluir:

Observem os **denominadores iguais**, agora podemos fazer a **soma dos numeradores**?

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{8}{12} + \frac{3}{12}$$

Explore as folhinhas sobrepostas, dando oportunidade para observarem que foram obtidas 11 partes pintadas das 12 partes divididas no total: $\frac{11}{12}$

Observação: Caso não consigam entender as 11 parte pintadas das 12, oriente-os a fazer o mesmo procedimento da divisão na horizontal e vertical em uma mesma folha e peça que observem a anterior sobreposta para contar quantos retângulos menores foram pintados e assim pintar a nova folha dividida, lembrando-os que agora os denominadores são iguais (comum).

- Agora, sugira mais alguns exemplos para que façam novamente a exploração de modo que você professor, vai auxiliando.

Oriente para que uma das folhas seja dobrada na **vertical** e a outra na **horizontal**.

Sugestões:

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{2}$$
$$\frac{2}{5} + \frac{3}{4}$$

Depois que os alunos terminarem, organize para a **conclusão final**.

Explicando que quando sobrepõem-se as folhas obtemos os retângulos totais, que representam o **mínimo múltiplo comum** entre os **denominadores**.

Instigue-os a dizer uma forma mais fácil, sem que precise dobrar as folhas todas as vezes.

Peça que observem as resoluções anteriores (que estão expostas no quadro) e façam suas análises, expõem suas conjecturas.

E o professor irá validando a partir das interações que irão acontecendo no decorrer da discussão.

Sugerimos ainda outra atividade, como continuação do conceito de frações, agora com multiplicação de frações.

Bom trabalho.

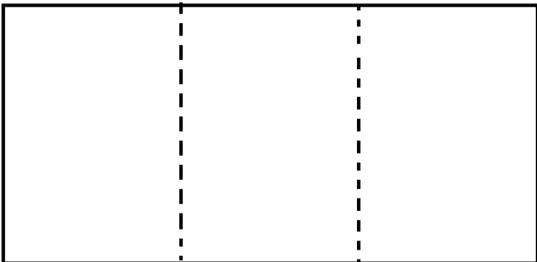
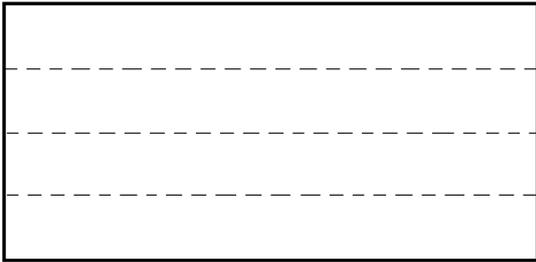
Investigando relações nas dobraduras

Tempo estimado: 100 min.

Objetivo da atividade: Proporcionar a exploração da **multiplicação** de frações.

Parte 1: Mesmo procedimento adotado na atividade anterior.

Corte dois papéis (formato retangular) de mesmo tamanho, como na atividade anterior (pode ainda, ser explorado no material da primeira atividade, porém fica a critério do professor, refletir sobre possíveis confusões que pode gerar).

<ol style="list-style-type: none">1- Dobre um papel na vertical em 3 partes iguais.2- Explore a fração que representa cada parte da divisão, orientando-os a escrever $\frac{1}{3}$ nas partes.3- Peça que pinte 2 partes das 3. 	<ol style="list-style-type: none">4- Dobre o outro na horizontal em 4 partes iguais.5- Explore a fração que representa cada parte da divisão, orientando-os a escrever $\frac{1}{4}$ nas partes.6- Peça que pinte 1 parte das 4 (cor diferente do papel anterior). 
---	--

Peça que façam um risco com caneta (de preferência preta) onde ficou a marca da dobra de modo que fique bem marcado.

Explore, montando no quadro com os alunos, as frações que representam as **partes pintadas**.

$$\frac{2}{3} \quad \text{e} \quad \frac{1}{4}$$

Parte 2:

- 1- Sobreponha os dois papéis retangulares divididos e pintados.
- 2- Coloque sobre a luz, note que a sombra divide em vários retângulos menores, conte-os.

R: 12 partes no total (junção)

Agora, conte apenas os retângulos que ficaram pintados com as duas cores (ao sobrepor), observe que ficaram 2 retângulos com as duas cores.

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{12}$$

Propor mais exemplos para que explorem e elaborem suas conclusões.

ROTEIRO 2 – Álgebra na sequência

Sequência

Tempo estimado: 100 min.

Caro professor,

O objetivo desta atividade investigativa é desenvolver o conceito dos quadrados perfeitos e também uma generalização algébrica para a sequência.

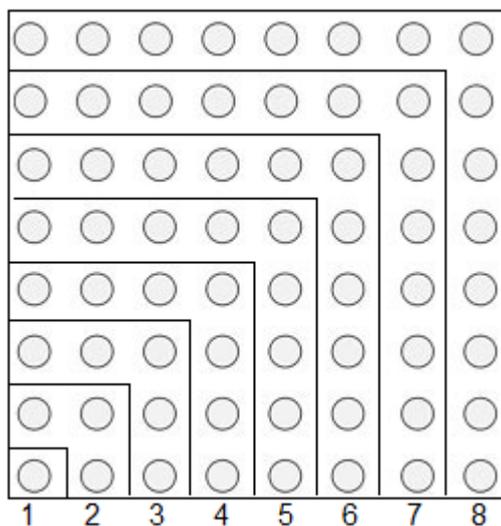
A proposta pode ser desenvolvida em uma turma de **7º Ano**, no momento de iniciar as expressões algébricas.

Inicie conversando com os alunos que farão uma atividade de investigação, trabalho que os matemáticos faziam quando descobriam teorias e fórmulas.

Iniciando a atividade:

- 9- Divida os alunos em grupos de no máximo 3 alunos. Esta quantidade é a ideal para que todos entrem em atividade.
- 10- Forneça aos alunos a atividade do quadro abaixo, apenas isso no início.
- 11- Permita que os alunos discutam como proceder.

Observe a sequência de bolinhas.



Investiguem se existem relações nas distribuições das bolinhas nas faixas numeradas.

Provavelmente eles ficarão inseguros e sem ideia do que fazer, porém, com um pouco de tempo começarão a conjecturar. Dê tempo.

Ande pelos grupos, incentivando, solicitando explicações do que estão fazendo ou pensando em fazer. Muitos irão começar a contagem das bolinhas.

Após um tempo que você considerar suficiente, quando você observar que não conseguiram nenhuma relação, é hora de você voltar a agir.

12- Retome a atenção para você e proponha as seguintes questões uma de cada vez, para que os alunos elaborem alguma hipótese e um processo de investigação.

- *Quais relações são possíveis estabelecer observando a figura?*
- *O que podemos observar nas faixas de bolinhas?*
- *Pense sobre o número de bolinhas?*
- *E se observar o número de bolinhas total de cada faixa?*

13- Deixe-os trabalharem um pouco mais sozinhos.

14- Passe pelos grupos, incentive, tire dúvidas, avalie e solicite explicações sobre o que estão fazendo. Não direcione nada. Não diga como fazer, instigue-os.

- Se os alunos não conseguirem obter nenhuma hipótese e estratégias para conclusões, o professor pode:
 - Solicitar que observem o total de bolinhas em cada faixa e escreva uma sequência.
 - Solicitar que observem as sequências formada pelas 8 faixas de bolinhas e o que podem concluir.

Ouçã as ideias dos alunos, questione:

- *Como você está pensando em fazer?*

15- Caso alguém ou algum grupo sugira alguma relação, solicite que testem sua hipótese para mais faixas.

Caso não ocorra de surgir estas hipóteses por parte dos alunos, incentive outra possível observação. Faça o seguinte questionamento:

- *Há a formação de alguma figura geométrica plana?*

Mais uma vez, deixe-os discutir. Este é um momento importante onde elaborarão hipóteses, testarão e tentarão validar.

16- Instigue.

17- Incentive se estiverem no caminho certo.

18- Dê dicas, mas não resolva para eles.

- Se os alunos conseguirem observar quadrados, incentive para que tentem

estabelecer uma relação:

- Solicite que somem a 1^a faixa com a 2^a faixa.
- Solicite que somem as 3 primeiras faixas.
- Solicite que somem as 4 primeiras faixas.
- Solicite que somem as 8 faixas.

➤ ***O que podemos concluir observando esses resultados?***

Quando os grupos conseguirem chegar a uma generalização, ou até mesmo a uma expressão algébrica que generaliza a regra de formação para números quadrados perfeitos, solicite que expliquem para os colegas como fizeram para chegar ao resultado.

Após esta explanação dos grupos, valorize a discussão final em que todos os grupos tenham oportunidade de verbalizar, expor e explicar os pensamentos e raciocínios elaborados.

Essa discussão final é última etapa da Investigação Matemática e tem sua importância, visto que trocam ideias e tem a oportunidade de compreenderem que a resposta não é algo pronto, há vários processos a ser desenvolvido para obterem suas conclusões e os processos podem se diferenciar.

Faça você também uma retomada final valorizando os trabalhos elaborados e considerações que achar pertinente.

Esperamos que você aprecie a atividade realizada pelos alunos. Temos ciência de que este tipo de atividade demanda mais tempo do que o ensino tradicional, porém, o ganho em conhecimento é gratificante.

Bom trabalho.

ROTEIRO 3 - Geometria Plana

Número de diagonais de um polígono regular.

Tempo estimado: 100 min.

Caro professor,

O objetivo desta atividade investigativa consiste em explorar polígonos e seus elementos (lados, vértices e diagonais), como também desenvolver uma estratégia ou dedução de fórmula para o cálculo do número de diagonais de um polígono.

A proposta pode ser desenvolvida em turmas de **8º** ou **9º Anos**, desde que não tenha sido apresentada a turma a fórmula do cálculo de diagonais de polígono.

Inicie conversando com os alunos sobre como será a atividade: que eles farão o trabalho dos matemáticos e investigarão o número de diagonais de qualquer polígono.

Iniciando a atividade:

- 1- Divida os alunos em grupos de no máximo 3 alunos. Esta quantidade é a ideal para que todos entrem em atividade.
- 2- Solicite que os alunos: **Investiguem quantas diagonais possui um polígono de 20 lados**. Esta deve ser sua frase. Apenas esta de início.
- 3- Permita que os alunos discutam como proceder.

Provavelmente eles ficarão inseguros e sem ideia do que fazer, porém, com um pouco de tempo começarão a conjecturar.

Dê tempo. Durante o desenvolvimento, caso seja necessário, revise o conceito de polígono e seus elementos lados, vértices e diagonais.

Ande pelos grupos, incentivando, solicitando explicações do que estão fazendo ou pensando em fazer.

Muitos tentarão desenhar um polígono de 20 lados (e pode até ser que consigam), outros já notarão que é complicado desenhar o mesmo.

Após um tempo que você considerar suficiente, quando você observar que não conseguiram desenhar, ou que não conseguiram contar as diagonais ou que simplesmente desistiram, é hora de você voltar a agir.

- 4- Retome a atenção para você e sugira que desenhem polígonos de 4, 5 e 6 lados e contem suas diagonais, anotando sempre o que fazem.
- 5- Deixe-os trabalharem um pouco mais sozinhos.
- 6- Passe pelos grupos, incentive, tire dúvidas, avalie e solicite explicações sobre o que estão fazendo. Não direcione nada. Não diga como fazer, instigue-os.

- 7- Depois que todos conseguirem elencar o número de diagonais destes polígonos, instigue-os:

Será que existe uma maneira de saber o número de diagonais sem desenhar o polígono?

- 8- Deixe-os pensar mais um pouco. Solicite sugestões:

Como podemos fazer?

Pode ocorrer de alguém falar em fazer uma tabela, ou em relacionar o número de lados com o número de diagonais, ou o número de vértices com as diagonais, etc...

Ouçã todas as ideias dos alunos, questione:

Porque você acha que seria assim?

Como você está pensando em fazer?

- 9- Caso ocorra de alguém ou algum grupo sugerir uma relação entre o número de diagonais e o número de lados ou de vértices, solicitem que testem sua hipótese para demais polígonos.

Caso não ocorra de surgir esta hipótese por parte dos alunos, faça a seguinte questão:

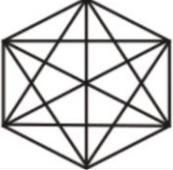
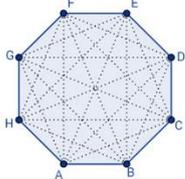
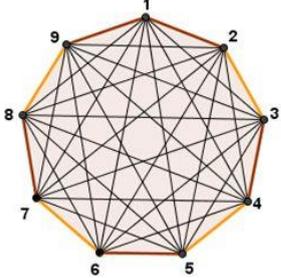
Será que existe alguma relação entre o número de diagonais e o número de lados ou o número de vértices?

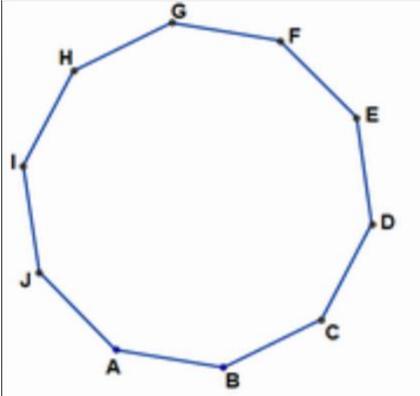
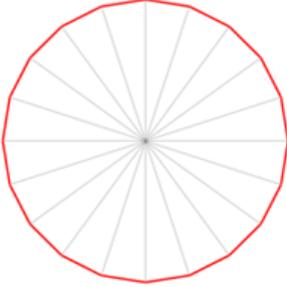
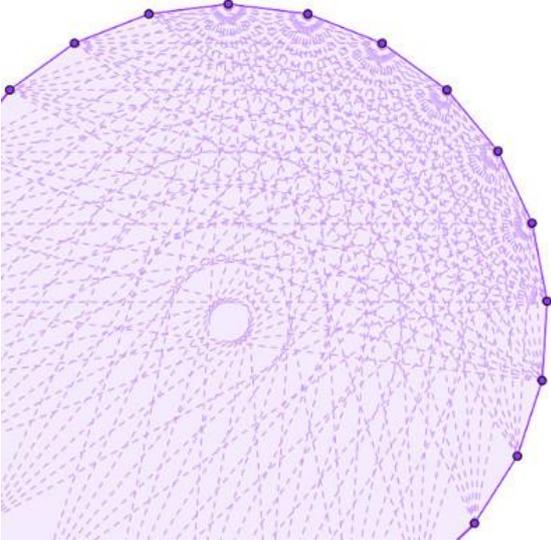
Mais uma vez, deixe-os discutir um pouco e depois sugira que façam uma tabela com o número de lados, vértices e diagonais, ou, entregue a seguinte folha solicitando que completem os dados que faltam e tentem estabelecer uma relação entre o número de lados e as diagonais.

Nome:

Atividade

Número de diagonais de um polígono regular. Complete a tabela e encontre uma relação entre o número de diagonais e o número de lados ou com o número de vértices.

Tipo de polígono	Formato	Número de lados	Número de vértices	Número de diagonais	
Quadrado		4	4	2	
Pentágono		5	5	5	
Hexágono		6	6		
Heptágono		7	7		
Octógono		8	8	20	
Eneágono		9	9	27	

<p>Decágono</p>		<p>10</p>	<p>10</p>	<p>35</p>	
<p>Icoságono</p>		<p>20</p>	<p>20</p>		
<p>Pentacoságono</p>		<p>25</p>	<p>25</p>	<p>275</p>	

10- Deixe os alunos trabalharem por um bom tempo. Este é um momento de extrema importância onde elaborarão hipóteses, testarão e tentarão validar.

11- Ande pelos grupos, questione: Porque estão fazendo assim? O que vocês estão pensando? Como estão pensando em fazer?

12- Instigue.

13- Incentive se estiverem no caminho certo.

14- Dê dicas, mas não resolva para eles.

15- Quando os grupos conseguirem chegar a uma generalização, solicite que expliquem para os colegas como fizeram para chegar ao resultado.

A discussão final é última etapa da Investigação Matemática e tem sua importância, visto que trocam ideias e tem a oportunidade de compreenderem que a resposta não é algo pronto, mas que pode haver vários processos a ser desenvolvido para obterem suas conclusões e os processos podem se diferenciar.

16- Após esta explanação dos grupos, faça você uma retomada final valorizando os trabalhos elaborados e considerações que achar pertinente.

Esperamos que você aprecie a atividade realizada pelos alunos. Temos ciência de que este tipo de atividade demanda muito mais tempo do que o ensino tradicional, porém, o ganho em conhecimento é gratificante.

Bom trabalho.