

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA
- PPGMAT -

JÉSSICA CONCENTINO

CAMINHOS A PERCORRER: DESAFIOS NO PROCESSO DE
INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA

LONDRINA
2019

JÉSSICA CONCENTINO

**CAMINHOS A PERCORRER: DESAFIOS NO PROCESSO DE
INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática. Linha de Pesquisa: **Recursos Educacionais e Tecnologias no Ensino de Matemática.**

Orientadora: Prof.^a Dr.^a Elaine Cristina Ferruzzi

**LONDRINA
2019**

TERMO DE LICENCIAMENTO

Esta Dissertação e o seu respectivo Produto Educacional estão licenciados sob uma Licença Creative Commons *atribuição uso não-comercial/compartilhamento sob a mesma licença 4.0 Brasil*. Para ver uma cópia desta licença, visite o endereço <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/> ou envie uma carta para Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, Califórnia 94105, USA.



Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Biblioteca UTFPR - Câmpus Londrina

C744c Concentino, Jéssica

Caminhos a percorrer: desafios no processo de investigação matemática /
Jéssica Concentino. - Londrina : [s.n.], 2019.
119 f. : il. ; 30 cm.

Orientadora: Prof^ª Dr^ª Elaine Cristina Ferruzzi
Dissertação (Mestrado) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná.
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, 2019.
Bibliografia: f. 89-92.

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Matemática - Pesquisa. 3. Prática de ensino. 4. Ensino - Metodologia. I. Ferruzzi, Elaine Cristina, orient.
II. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. III. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática. IV. Título.

CDD: 510.7

Ficha catalográfica elaborada por Cristina Benedeti Guilhem - CRB: 9/911



TERMO DE AVALIAÇÃO

CAMINHOS A PERCORRER: DESAFIOS NO PROCESSO DE INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA

por

JÉSSICA CONCENTINO

Esta dissertação foi apresentada a título de Defesa em 22 de março de 2019 como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática. A candidata foi arguida pela Banca Examinadora composta pelos professores abaixo assinados. Após deliberação, a Banca Examinadora considerou o trabalho aprovado.

Profa. Dra. Elaine Cristina Ferruzzi
Orientadora – Universidade Tecnológica federal do Paraná

Profa. Dra. Karina Alessandra Pessoa da Silva
Universidade Tecnológica federal do Paraná

Profa. Dra. Magna Natalia Marin Pires
Universidade Estadual de Londrina

Londrina, 22 de março, 2019.

- O Termo de Aprovação assinado encontra-se na Coordenação do Programa Mestrado Profissional em Ensino de Matemática -

Dedicatória

A minha família pelo amor, apoio e incentivo na conclusão de mais esta etapa de minha formação acadêmica.

AGRADECIMENTOS

Cheguei ao final de mais uma etapa da minha vida! Até aqui foi uma grande caminhada em busca dessa conquista e, como ninguém caminha sozinho, gostaria agradecer a todos que contribuíram para que esse projeto se concretizasse.

Agradeço, primeiramente a Deus pelo dom da vida, pelas infinitas bênçãos derramadas e pela força para realizar este sonho.

Aos meus pais, Nair e João Carlos, principalmente a minha mãe que sempre foi amiga e companheira, meu maior exemplo de dedicação, empenho e superação. Agradeço por todo o apoio, todos os conselhos, lições de vida e esforço em proporcionar-me educação, sempre mostrando que grandes conquistas são possíveis com determinação, trabalho e amor naquilo que se faz. Obrigada mãe pelos momentos de carinho e de escuta. Obrigada por sempre incentivar meus estudos.

Agradeço à minha irmã, Juliana, pela amizade, pelo apoio, por torcer e vibrar comigo nas minhas conquistas. Obrigada, pelas vezes que cobrava o número de páginas escritas no dia a dia.

Aos meus avós, Francisco (vô Chico) e Maria Lúcia (vó Lúcia), por me apoiarem, darem incentivo e torcerem! Vó Lúcia, pelos cuidados não só comigo, mas com toda a família e, mesmo nos momentos mais difíceis da vida, você se mostra sempre forte. Essa força foi a minha inspiração para concluir esta dissertação!

Ao meu noivo, Bruno, por me ajudar a superar os momentos de angústia e nervosismo. Obrigada por celebrar, junto comigo, as minhas vitórias. Obrigada por me acompanhar em minhas provas do mestrado e principalmente na de inglês, batalha que venci com seu apoio; também em alguns congressos, seja Cornélio Procópio, onde participou comigo, mesmo sem entender nada. A distância não teve importância, você esteve sempre comigo para me apoiar.

A minha orientadora, Prof.^a Dr.^a Elaine, pela confiança em mim depositada e pelas orientações dadas, que me fizeram crescer muito tanto como pessoa quanto pesquisadora. Deixo registrada a minha profunda gratidão e admiração por você, como pessoa e como profissional. Agradeço por compartilhar seus conhecimentos acadêmicos, sua forma de escrita; tenho grande admiração pelo seu trabalho. Agradeço pelo incentivo, por acreditar e por fazer sentir-me capaz. Obrigada por não dar respostas prontas, mas por mostrar como procurá-las.

A todos os professores que participaram e contribuíram para que a pesquisa fosse realizada, disponibilizando preciosos momentos de reflexão.

À Banca, Prof.^a Dr.^a Karina, Prof.^a Dr.^a Magna e Prof.^a Dr.^a Adriana pelas valiosas contribuições no Exame de Qualificação e no Exame de Defesa.

Aos colegas do grupo GEPMIT, pelas contribuições valiosas, pelas leituras realizadas, pelas críticas e sugestões na elaboração do meu texto!

Aos professores do PPGMAT da UTFPR e, em especial, àqueles que tive o prazer de ser aluna. Sou grata aos ensinamentos e às provocações que colaboraram para a realização dessa pesquisa.

Aos amigos com os quais tive o prazer de compartilhar parte desta caminhada: Adriele, Anna Flávia, Cintia, Cleiton, Dayane, Fernando, Iara, Joice, Lucas, Maristela, Priscilla, Rafael Machado, Rafael Pinheiro, Rafael Palma, Raphael Peres, Rodrigo, Thaís, Tiago, Victor e Willian. Sou grata pela amizade que construí desde o exame de seleção, principalmente na fase da entrevista, pois ali já trocamos números de telefones e já se constituiu o grupo de *WhatsApp*. Uma turma que proporcionou muitos momentos bons, que suavizou a caminhada desses dois anos e pouco na busca pelo aprimoramento e crescimento profissional.

Enfim, agradeço aos meus familiares, amigos e todas as pessoas que, direta ou indiretamente, contribuíram com esta pesquisa, que souberam entender minhas ausências, meus momentos de incertezas e, principalmente, minhas constantes mudanças de humor.

Foi um desafio! Aos poucos consegui vencer! Agora esse sonho já é realidade! Os obstáculos e barreiras tornaram-se menores nessa caminhada, pois sempre estive rodeada de pessoas que me contagiaram de alegria e enriqueceram minhas experiências, enquanto pessoa e profissional.

É exatamente disso que a vida é feita, de momentos.
Momentos que temos que passar, sendo bons ou ruins,
para o nosso próprio aprendizado.
Nunca esquecendo do mais importante:
Nada nessa vida é por acaso.
Absolutamente nada.
Por isso, temos que nos preocupar em fazer a nossa parte,
da melhor forma possível.
A vida nem sempre segue a nossa vontade,
mas ela é perfeita naquilo que tem que ser.

Chico Xavier

CONCENTINO, J. **Caminhos a percorrer: desafios no processo de Investigação Matemática**. 2019. 119 f. Dissertação - Mestrado Profissional em Ensino de Matemática - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2019.

RESUMO

O presente estudo, de natureza qualitativa, centra-se no desenvolvimento de atividades investigativas, para o ensino de conteúdos de Matemática, à luz da prática pedagógica da Investigação Matemática - IM - recomendada nos documentos oficiais. O referencial teórico assenta-se nas contribuições de Ponte, Brocardo e Oliveira (2009), entre outros. O objetivo inicial foi de investigar se professores de Matemática utilizam essa prática pedagógica em suas aulas e, se não a utilizam, quais os impedimentos. Para a coleta inicial dos dados foram realizadas entrevistas com 16 professores da Rede Pública do município de Bandeirantes - PR que revelaram pouco conhecimento dos docentes a respeito dessa prática. Desse modo, com o intuito de contribuir para a inserção da Investigação Matemática em sala de aula, foram elaborados materiais com atividades investigativas estruturadas e com orientações para desenvolvimento inicial em sala de aula. Após as entrevistas e, segundo critérios previamente estabelecidos, duas professoras dispuseram-se a aplicar os referidos materiais a fim de validar a sua eficiência no trabalho inicial com a Investigação Matemática. Os resultados apontaram para um efetivo envolvimento dos alunos ao serem desafiados a investigar possíveis soluções para uma mesma questão, envolvimento este não esperado pelos professores mediadores da atividade investigativa, bem como revelaram a fragilidade do professor no papel de orientador. A partir das análises feitas optou-se pela feitura de produto educacional, composto por orientações ao docente sobre a Investigação Matemática e roteiros estruturados que poderão servir de apoio ao professor na inserção de atividades investigativas em suas aulas de Matemática.

Palavras-chaves: Ensino de Matemática. Investigação Matemática. Prática pedagógica. Professores.

CONCENTINO, J. **Paths to go: challenges in the process of Mathematical Investigation.** 2019. 119 f. Dissertation - Master's Degree in Mathematics Teaching - Federal echnological University of Paraná. Londrina, 2019.

ABSTRACT

The present study, qualitative in nature, focuses on the development of investigative activities, the teaching of math content, in the light of the pedagogical practice of Mathematical Investigation - IM - recommended in the official documents. The theoretical framework is based on the contributions of Ponte, Brocardo and Oliveira (2009), among others. The initial goal was to investigate if math teachers use this pedagogical practice in their classes and, if not, what are the impediments. For the initial collection of data was carried out interviews with 16 public school teachers in the municipality of Bandeirantes - PR that revealed little knowledge of teachers about this practice. Thus, in order to contribute to the insertion of Mathematical Investigation in the classroom, materials were prepared with investigative activities structured and with guidelines for initial development in the classroom. After the interviews and, according to previously established criteria, two teachers willing to apply these materials in order to validate your work efficiency by Mathematical Investigation. The results pointed to an effective involvement of students to be challenged to investigate possible solutions to the same question, this involvement is not expected by the investigative activity mediators, as well as revealed the fragility of the teacher in role of advisor. From the analyses we opted for making educational product, composed of guidance to the teacher about the Mathematical Investigation and structured scripts, to provide support to the teacher in the insertion of investigative activities in your classes of Mathematics.

Keywords: Mathematics Education. Mathematical Investigation. Pedagogical practice. Teachers.

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Níveis de complexidade da atividade de investigação.	29
Quadro 2 – Funções dos quatro processos de investigação.....	29
Quadro 3 – Classificando a atividade de Investigação Matemática.	31
Quadro 4 – Questionamentos do professor no ambiente de Investigação Matemática. .	38
Quadro 5 – Ações do docente no desenvolvimento da Investigação Matemática.....	39
Quadro 6 – Organização da etapa de coleta de dados	45
Quadro 7 – Conhecimento dos professores sobre a Investigação Matemática.....	49
Quadro 8 – Análise das ações docente no arranque da aula.....	77
Quadro 9 – Ações e questionamentos do docente no desenvolvimento do trabalho.....	78
Quadro 10 – Análise das ações e questionamentos docente na conclusão da investigação	82

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Atividades de investigação.....	28
Figura 2 – Dando forma a atividade investigativa.....	34
Figura 3 – Etapas da Investigação Matemática em sala de aula.....	34
Figura 4 – Aluno no desenvolvimento da atividade investigativa.....	60
Figura 5 – Organização da turma em grupos.....	64
Figura 6 – Anotações de um dos alunos do G1.....	66
Figura 7 – Anotações de um dos alunos do G1.....	67
Figura 8 – Anotações de uma das alunas do G3.....	68
Figura 9 – Anotações de um dos alunos do G6.....	70

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 – Formação inicial dos docentes.	48
---	----

SUMÁRIO

1	O INÍCIO DA JORNADA	15
1.1	O fio condutor.....	15
1.2	Mas, por que isso nos interessou?.....	15
1.3	A importância da Investigação Matemática	18
1.4	A constituição do problema de pesquisa.....	18
1.5	Estrutura do texto	19
2	QUADRO TEÓRICO.....	20
2.1	O ensino.....	20
2.2	Práticas pedagógicas	21
2.3	Investigação Matemática.....	23
2.3.1	Investigação Matemática – O que é?.....	24
2.3.2	Por que utilizar a Investigação Matemática em sala de aula?	25
2.3.3	Classificando as atividades de Investigação Matemática	27
2.3.4	O desenvolvimento da prática de Investigação Matemática em sala de aula	31
3	ASPECTOS METODOLÓGICOS DA PESQUISA	41
3.1	Natureza da pesquisa	41
3.2	Sujeitos da pesquisa.....	43
3.3	Contexto da coleta de dados	44
3.4	Análise dos dados.....	46
4	DESCREVENDO A PESQUISA.....	47
4.1	Parte 1 – O prelúdio.....	47
4.1.1	Parte 1a – Sobre o conhecimento a respeito da Investigação Matemática e sua utilização em sala de aula	48
4.1.2	Parte 1b – Desafios, dificuldades e anseios dos professores.....	53
4.2	Parte 2 – A busca por um instrumento com potencial para subsidiar o desenvolvimento de atividades investigativas	54
4.2.1	Parte 2a – O conceito matemático escolhido para o primeiro roteiro	55
4.2.2	Parte 2b – O roteiro.....	56

4.2.3	Parte 2c – O desenvolvimento de uma atividade de Investigação Matemática tendo como suporte o roteiro desenvolvido	56
4.3	Parte 3 – Orientações e instruções para o desenvolvimento de atividades investigativas.....	62
4.4	Aula de matemática com Investigação Matemática: aplicação do material orientador	63
5	ANÁLISE DOS DADOS	74
5.1	Conhecimentos dos docentes sobre a Investigação Matemática e se utilizam em suas aulas.....	74
5.2	Ações e questionamentos do professor que podem contribuir para o envolvimento ativo do aluno nas atividades de Investigação Matemática	76
5.3	Instrumentos que podem auxiliar e estimular o professor na inserção da Investigação Matemática em sala de aula	84
6	PALAVRAS FINAIS	86
7	REFERÊNCIAS.....	89
	ANEXOS	93
	Anexo I – Termo de Consentimento Livre e Esclarecido - TCLE.....	93
	Anexo II – Autorização de Cessão de Imagem dos alunos.....	95
	APÊNDICES	96
	Apêndice I – Questionário semiestruturado para a entrevista com os docentes	96
	Apêndice II – Roteiro de atividade investigativa de frações	97
	Apêndice III – Roteiro atividade investigativa de geometria plana.....	99
	Apêndice IV – Material de orientações para o professor sobre a Investigação Matemática.	104

1. O INÍCIO DA JORNADA

“Você utiliza ou já utilizou a Investigação Matemática como prática pedagógica em sala de aula?” Esta pergunta, realizada a um grupo de professores, configura-se como o fio condutor da presente pesquisa. A partir dela, outras questões foram nos inquietando e desenhando em nossa mente um panorama repleto de perguntas carentes de respostas.

Assim, ansiosas em contribuir com as pesquisas na área de Educação Matemática, iniciamos nossa jornada científica.

1.1 O fio condutor

A pesquisa tomou direcionamento em um episódio, em um dos encontros do GEPMIT - Grupo de Estudos e Pesquisa em Modelagem, Investigação e Tecnologia -, momento em que a orientadora fez uma simples indagação aos participantes: *“Você já utilizou a Investigação Matemática em sua prática pedagógica?”*.

Esta questão foi direcionada a um grupo de professores inseridos em um programa de mestrado que integram um grupo de pesquisa e, para surpresa, todos responderam negativamente. Quando questionados, na sequência, sobre os motivos da não utilização, as respostas foram as mais diversas: “não conheço muito bem”; “nunca tive contato”; “ocupa muito tempo”; “é difícil”; entre outros.

Ficamos surpresas com estas respostas tendo em vista que se tratava de um grupo de “jovens” professores, formados a pouco tempo, em um cenário que, teoricamente, incentiva a inserção de práticas pedagógicas diferentes da aula expositiva.

Diante disto questionamos: *Se “jovens” professores não utilizam a Investigação Matemática em suas aulas, será que professores com mais tempo de docência utilizam-na? Se não, por quê? O que podemos fazer para auxiliar a inserção e consolidação da Investigação Matemática em sala de aula?*

1.2 Mas, por que isso nos interessou?

A evolução científica e tecnológica tem ocasionado mudanças na sociedade, que refletem diretamente no ensino (PIRES, 2002), ou seja, mudanças na sociedade repercutem em alterações no perfil desejado para o mercado de trabalho. A sociedade

passa a exigir profissionais com “autonomia, criatividade, profissionalidade, descentralização, participação e cooperação” (PIRES, 2002, p. 43). O mercado de trabalho por sua vez exige que a formação acadêmica seja de tal forma que resulte em cidadãos mais críticos, criativos, resolvedores de problemas e conflitos, mais ativos, com capacidade de trabalhar em equipe e lidar com perspectivas diferenciadas.

Esta exigência acarretou, pelo menos teoricamente, na reestruturação do ensino, tendo em vista que a prática educacional, geralmente adotada pela maioria dos professores, o ensino expositivo, já não parecia ser suficiente. Por décadas o ensino tradicional, baseado na exposição e repetição, parecia funcionar perfeitamente, aliás, ainda hoje está muito presente no sistema educacional, mas com sua essência original modificada, diferente do antigo rigor que “instruiu nossos pais e avós” (LEÃO, 1999, p. 194).

Com o passar do tempo, o ensino transmissivo, com sua estrutura enraizada em métodos reprodutivos, sendo o professor o detentor do conhecimento, “deixou de ser socialmente útil” (ROLDÃO, 2007 p. 95), pois “quase nada mais impede ao homem o pleno acesso à informação” (LEÃO, 1999, p. 188). De fato, as fontes tecnológicas que nos rodeiam propagam de forma acelerada as informações, tornando-as acessíveis instantaneamente, e deste modo, compreende-se que o ensino tradicional necessita de algumas modificações.

Estas modificações devem ser de tal forma que o ensino seja concebido na perspectiva de mediar e orientar, desenvolvendo o comprometimento do aluno com seu papel ativo diante da aprendizagem e sua função social. Neste sentido, documentos oficiais que norteiam o ensino de Matemática, e ainda tem seu papel orientador, apontam sobre

[...] a necessidade de reverter um ensino centrado em procedimentos mecânicos, desprovidos de significados para o aluno. Há urgência em reformular objetivos, rever conteúdos e buscar metodologias compatíveis com a formação que hoje a sociedade reclama (BRASIL, 1998, p. 15).

Observamos que, já em 1998, os PCN - Parâmetros Curriculares Nacionais - apontavam para a importância do professor atuar como mediador e orientador no processo de ensino, “não sendo mais aquele que expõe todo o conteúdo” (BRASIL, 1998, p. 15), mas sim aquele que oferece condições e considera o “aluno como protagonista da construção de sua aprendizagem” (Ibidem, p. 15). Além disso, já discorria sobre a importância de estimular a cooperação e interação entre os alunos e o

próprio professor, promovendo o confronto de ideias e reflexão sobre o modo de pensar do colega, desenvolvendo a “formulação de argumentos (dizendo, descrevendo, expressando) e de validá-los (questionando, verificando, convencendo)” (BRASIL, 1998, p. 38).

Além do mais, os documentos oficiais referentes ao ensino de Matemática, recomendam práticas pedagógicas para o auxílio do professor que busca promover aulas diferenciadas, articulando situações do cotidiano dos alunos aos conceitos matemáticos, explorando um ambiente enriquecedor ao compartilhar conhecimentos da realidade, experiências anteriores, a fim de aprimorar as concepções matemáticas, alcançando os objetivos fundamentais das ações docentes.

Dentre as práticas pedagógicas recomendadas pelas Diretrizes Curriculares de Matemática do Estado do Paraná - DCE - com vistas a atenuar o ensino teórico e expositivo, está a Investigação Matemática.

Compreendemos a Investigação Matemática nesta pesquisa, como uma prática pedagógica em que os alunos são convidados a explorar uma situação, formulando questões e conjecturas. Estas conjecturas devem ser testadas e reformuladas até serem aceitas como solução para a situação.

Entretanto, para além das recomendações e exigências preconizadas, é imprescindível que o professor se comprometa em tomar iniciativas e adotar atitudes que promovam mudanças em sua prática pedagógica (BRASIL, 1998), assumindo os riscos e as adversidades que as práticas pedagógicas podem oferecer durante seu desenvolvimento. Tudo isso tendo ciência de que as concepções e ações do professor são partes fundamentais para desenvolvimento de habilidades, pois elas podem ser propícias para que os

[...] alunos desenvolvam capacidades de natureza prática para lidar com a atividade Matemática, o que lhes permite reconhecer problemas, buscar e selecionar informações, tomar decisões. Quando essa capacidade é potencializada pela escola, a aprendizagem apresenta melhor resultado (BRASIL, 1998, p. 37).

Por ser uma prática pedagógica recomendada em documentos oficiais e na literatura da área, procuramos investigar sua importância para a formação do indivíduo.

1.3 A importância da Investigação Matemática

A Investigação Matemática - IM¹ constitui uma das práticas recomendadas nos documentos oficiais tendo em vista que, em seu desenvolvimento, requer o envolvimento ativo do aluno, contribuindo assim com a formação matemática e global do aluno. Para Ponte (2003, p. 38)

[...] a realização continuada de investigações, num quadro de discussão e reflexão sobre o significado dos resultados obtidos e dos processos empregues, é susceptível de influenciar de modo muito significativo as concepções dos alunos. Estes podem alterar a sua visão do trabalho investigativo, das características da Matemática, do modo de aprender Matemática e dos papéis do professor e do aluno, desenvolvendo o gosto pela disciplina e a sua confiança neste tipo de trabalho.

Além disto, esta prática pedagógica contribui com a formação de um indivíduo crítico, criativo e ativo, indo ao encontro do que a sociedade atual espera de um cidadão e profissional.

1.4 A constituição do problema de pesquisa

Se a sociedade exige um cidadão com as características citadas anteriormente, os documentos oficiais recomendam práticas pedagógicas de cunho investigativo. Se Ponte, Brocardo e Oliveira (2009), assim como outros pesquisadores, que alicerçam o nosso aporte teórico, os quais incentivam sua inserção, apresentando contribuições para o indivíduo e sua formação, por que os professores não a utilizam? Esta inquietação acabou por definir nosso problema de pesquisa: ***Como podemos contribuir para a inserção da Investigação Matemática em sala de aula?***

Para responder nosso problema de pesquisa definimos os objetivos a seguir:

- i. Investigar se os professores de matemática que atuam na rede pública estadual (município de Bandeirantes – PR) conhecem e/ou utilizam a Investigação Matemática em suas aulas; e, para aqueles que não a utilizam, investigar quais os motivos que os impedem.
- ii. Identificar, na literatura, possíveis ações do professor que contribuam para o envolvimento ativo do aluno nas atividades de Investigação Matemática.

¹ Algumas vezes neste texto usaremos a abreviatura IM para Investigação Matemática.

- iii. Elencar, com base na literatura, questionamentos que o professor pode fazer no ambiente de Investigação Matemática que possuam potencial para auxiliar, o docente e o aluno, no desenvolvimento da atividade.
- iv. Propor instrumentos ao professor, ancorados na literatura, que possam auxiliá-lo e estimulá-lo na inserção da Investigação Matemática em sala de aula.

Assim, vamos explorar as facetas da Investigação Matemática analisando as potencialidades e desafios de ensinar por meio dessa prática pedagógica apresentada no documento das DCE.

1.5 Estrutura do texto

O Capítulo 1 contempla a introdução, na qual apresentamos o problema de pesquisa e definimos os objetivos.

No Capítulo 2 discorremos sobre o ensino, as práticas pedagógicas e a Investigação Matemática. Procuramos apresentar ações e questionamentos docente para promover o ambiente investigativo, algumas características das atividades de Investigação Matemática com etapas para implementação.

No Capítulo 3, retomamos o problema e os objetivos que orientam esta pesquisa, apresentando em seguida os aspectos metodológicos.

No Capítulo 4 dissertamos e descrevemos sobre nossa pesquisa empírica.

No Capítulo 5 apresentamos as análises dos dados e resultados encontrados na pesquisa a partir do produto educacional que elaboramos.

O Capítulo 6 sintetiza nossas considerações finais sobre o trabalho.

2. QUADRO TEÓRICO

“Despertar a curiosidade, inata ao homem e vivacíssima no menino, eis o primeiro empenho do professor num método racional. Da curiosidade, nasce a atenção; da atenção, a percepção e a memória inteligente.”
Rui Barbosa

Neste capítulo apresentamos uma breve discussão contextualizando o ensino e a importância de práticas pedagógicas diferentes das práticas com aulas expositivas. Posteriormente, tratamos dos aspectos teóricos sobre Investigação Matemática e suas contribuições para o ensino de Matemática.

2.1 O ensino

As perspectivas de ensino vêm se reorganizando e reestruturando à medida em que ocorrem mudanças na sociedade, principalmente sociais e tecnológicas. O ensino tradicional, com suas características expositivas, confronta-se com os desafios da sociedade contemporânea, pois são saberes adquiridos sem manter o movimento entre “o mundo da educação/formação, o mundo do trabalho e das organizações e a sociedade em geral” (PIRES, 2002, p. 328).

A evolução permanente da sociedade requer conexões mais dinâmicas desses elos, de modo a proporcionar aprendizagem “a partir da experiência de vida (em sentido lato, englobando a esfera pessoal, profissional, social)” (PIRES, 2002, p. 328).

Neste sentido, no ensino, existem diversos modelos de encaminhamento de uma aula de Matemática, cada qual com suas características próprias, definidas por objetivos a serem atingidos. A abordagem tradicional é um exemplo, em que a aula é conduzida de modo que os alunos recebem informações prontas; e, em um outro decurso dinamizador, os alunos possuem uma “participação activa”, proporcionando experiência de trabalho matemático em atividades que desenvolvem reflexões sobre o que faz no processo de aprendizagem (PONTE; BOAVIDA; GRAÇA; ABRANTES, 1997).

A riqueza do processo de ensino e de aprendizagem está ligada à prática pedagógica e às ações desempenhadas pelo professor, que busca despertar as habilidades de investigar, de pensar, de elaborar indagações, e com isso

[...] evidenciar suas inúmeras aplicações no cotidiano, sem, contudo, deixar de ressaltar a riqueza do pensamento matemático e a necessidade de

desenvolvê-lo não só para uso na Matemática, como, também, para auxiliar na compreensão das outras ciências, inclusive as humanas (CUNHA, 2009, p. 1).

Nesse contexto, alunos e professor, mobilizam e enriquecem a capacidade de argumentar, “influenciando indiretamente o raciocínio em todas as outras áreas do conhecimento” (CUNHA, 2009, p. 2).

Orientações curriculares ressaltam os objetivos no processo do ensino de Matemática, sendo esses “o desenvolvimento de capacidades como a resolução de problemas, o raciocínio, a comunicação e o pensamento crítico” (PONTE; BOAVIDA; GRAÇA; ABRANTES, 1997, p. 1). Os pesquisadores destacam ainda sobre a importância de oportunizar “experiências diversificadas” que podem enriquecer e estimular um ambiente de aprendizagem, promovendo “o desenvolvimento de atitudes e valores como o gosto pela Matemática, a autonomia e a cooperação” (PONTE; BOAVIDA; GRAÇA; ABRANTES, 1997, p. 1), o que vem ao encontro dos objetivos delineados para o ensino de Matemática, bem como as expectativas da sociedade atual.

Nesse sentido, Vasconcelos (1996, p. 43) ressalta que, “a modernização do ensino da Matemática terá de ser feita não só quanto aos programas, mas também quanto aos métodos de ensino”, sendo necessárias iniciativas inovadoras do professor na busca de propostas que dinamizem o ensino de Matemática.

2.2 Práticas pedagógicas

No processo de ensino da Matemática é importante a abordagem de atividades que instiguem e proponham ao aluno a prática de reflexões criativas, diferenciando das aulas expositivas que não oportunizam esse momento. Ao aluno, é necessário oferecer situações com oportunidades de desenvolver a criatividade e o raciocínio, criando momentos de participação ativa e não apenas o papel passivo e desinteressante (D'AMBRÓSIO, 1989).

Apesar das inúmeras iniciativas, temos ciência de que o ensino de Matemática possui suas carências/deficiências, e um dos fatores que parece influenciar este panorama é a formação básica dos docentes, a qual “não contempla todas as habilidades necessárias para um ensino de qualidade” (CUNHA, 2009, p. 1).

Uma das formas para reverter esse quadro pressupõe mudanças na formação básica dos docentes, pois como salienta D'Ambrósio (1993, p. 39), a formação inicial

deveria

[...] visar à investigação, à resolução de problemas, às aplicações, assim como uma análise histórica, sociológica e política do desenvolvimento da disciplina. [...] para que o futuro professor tenha legítimas experiências matemáticas simulando as atividades de uma comunidade de pesquisa matemática.

Entretanto, na formação dos docentes, tanto a inicial como a continuada, predomina ainda, a falta de participação em experiências com dinâmicas em abordagens diferenciadas e com isso, o ensino fica restrito ao modo que os formadores aprenderam, ou seja, “em geral o professor ensina da maneira como lhe foi ensinado” (D’AMBRÓSIO, 1993, p. 36). Neste sentido, exercem a “dinâmica de ensino em que os alunos devem acumular conhecimento” (Ibidem, p. 36), abordando teorias, conceitos e respostas prontas.

Em virtude disso, mesmo quando não é ofertada a experiência que favorece a prática educacional com abordagens diferenciadas, é fundamental que os professores disponham-se a agir de modo diferente diante da realidade imposta. A atitude profissional do professor não pode ser reduzida à “praticidade”, que retém “prisoneira de rotinas não questionadas e incapazes de responder a realidade” (ROLDÃO, 2007, p. 97), mas, potencializar o desenvolvimento crítico do indivíduo proporcionando situações que instigue e aguace a investigação, a fim de

[...] fornecer experiências que encorajem e permitam aos alunos dar valor à Matemática, ganhar confiança nas suas capacidades matemáticas, tornar-se [...] solucionadores de problemas matemáticos, comunicar matematicamente (VASCONCELOS, 1996, p. 42).

Com base nessa reflexão, pesquisas e estudos por parte do professor, podem apoiar no desenvolvimento de atividades que contribuam não só com a aplicação de conceitos, mas práticas pedagógicas que promovam “um ambiente positivo que encoraja os alunos a propor soluções, explorar possibilidades, levantar hipóteses, justificar seu raciocínio e validar suas próprias conclusões” (D’AMBRÓSIO, 1993, p. 37).

Com vistas a suprir esta necessidade de que o ensino seja promovido por meio de práticas pedagógicas que auxiliem na formação do indivíduo, a BNCC - Base Nacional Comum Curricular - recomenda atitudes para adequar e “fortalecer a competência pedagógica das equipes escolares para adotar estratégias mais dinâmicas, interativas e colaborativas em relação à gestão do ensino e da aprendizagem” (BRASIL, 2018, p. 14). Este texto ainda argumenta sobre a importância de “criar e disponibilizar

materiais de orientação para os professores, bem como manter processos permanentes de formação docente que possibilitem contínuo aperfeiçoamento dos processos de ensino e de aprendizagem” (Ibidem, p. 15).

Com o propósito de que o ensino de Matemática aconteça de modo mais dinâmico, priorizando o envolvimento do aluno na construção da própria aprendizagem, apresentaremos a Investigação Matemática como uma prática pedagógica que pode apoiar as ações do professor no processo de ensino.

Neste sentido, Skovsmose (2000) argumenta que o professor pode apresentar e direcionar suas atividades de forma investigativa a fim de estimular os alunos a formularem questões, bem como a explorarem soluções, para que assim possam construir um ambiente favorável à aprendizagem onde, ao realizarem as ações investigativas, entendam o significado dos conceitos envolvidos.

Esta visão tem sido discutida por diversos pesquisadores brasileiros e portugueses, que vêm tratando em seus estudos, acerca das potencialidades e contribuições da prática investigativa em sala de aula, como por exemplo, Corradi (2011), Cunha (2009), Castro (2004), Goldenberg (1999), Ponte (2003), Oliveira (1998), Varandas (2000), Fonseca (2000), Brocardo (2001). Tais autores versam sobre a importância das ações do professor, ao desempenhar uma prática pedagógica reflexiva, mediando e orientando no processo educacional, com o objetivo de desenvolver nos alunos atitude responsável no processo de aprendizagem.

2.3 Investigação Matemática

O termo “investigar” é tratado em alguns estudos como “uma poderosa forma de construir conhecimento” (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2009, p. 10) e isso, por si só, já seria um incentivo à sua implantação em sala de aula. Entretanto, Ponte (2003, p. 18) aponta que “um dos maiores obstáculos à afirmação de uma cultura de investigação nos professores é a velha oposição entre teoria e prática” e neste sentido, Goldenberg (1999) evidencia a necessidade do professor em adaptar suas ações pedagógicas de modo a despertar o espírito de investigação entre os alunos.

Além da oposição entre teoria e prática, a dificuldade dos docentes em abordar e conduzir a Investigação Matemática deve-se ao fato de que poucas pesquisas e estudos sobre o tema tenham sido realizados recentemente no Brasil. Segundo Wichnoski e Klüber (2015, p. 2) trata de “um campo pouco explorado no país”. Esses

autores também afirmam que:

Embora sejam crescentes as discussões acerca dessa perspectiva, pode-se considerar recente a sua integração como campo de pesquisa no contexto da Educação Matemática, cerca de trinta anos, tendo a sua origem em Portugal no início dos anos oitenta, segundo Ponte (1993). No nosso país é mais recente ainda (WICHNOSKI; KLÜBER, 2015, p. 3).

Diante do exposto, cumpre-nos responder as seguintes questões para assim, solidificarmos as bases do presente estudo:

- O que é Investigação Matemática?
- Por que utilizar a Investigação Matemática?
- Como desenvolver esta prática pedagógica em sala de aula?
- Quais ações o docente deve promover para que sua aula seja

caracterizada como uma Investigação Matemática?

2.3.1 Investigação Matemática – O que é?

Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2009, p. 13) investigar “envolve uma procura de informações”, ou seja

[...] “investigar” não é mais do que procurar conhecer, procurar compreender, procurar encontrar soluções para os problemas com o qual (SIC) nos deparamos. Trata-se de uma capacidade de primeira importância para todos os cidadãos e que deveria permear todo o trabalho da escola, tanto dos professores como dos alunos (PONTE, 2003, p. 2).

A prática pedagógica que tem por referência que investigar “é procurar conhecer o que não se sabe” (PONTE, BROCARD; OLIVEIRA, 2009, p. 13), utiliza um conjunto de processos peculiares da atividade matemática, levantando “questões que nos interessam, para as quais não temos essa resposta pronta, e procuramos essa resposta de modo tanto quanto possível fundamentado e rigoroso” (Ibidem, p. 9).

Ancorados em Ponte, Brocardo e Oliveira (2009), compreendemos que a Investigação Matemática caracteriza-se por apresentar quatro momentos em sua realização. O primeiro engloba o reconhecimento da situação e a elaboração de questões sobre a problemática. O segundo momento, refere-se ao processo de organização dos dados e formulação de conjecturas (hipóteses ou ideias com fundamento não verificado). No terceiro momento acontece o tratamento dos dados, a realização dos testes e o eventual refinamento das conjecturas. E, por fim, o último diz respeito à

elaboração do relatório, avaliando o raciocínio e apresentando resultados (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2009).

Ressaltamos ainda que a formulação de hipóteses, o teste e a confirmação ou validação são características fundamentais da Investigação Matemática. Assim, compreendemos a Investigação Matemática como uma prática pedagógica em que os alunos são convidados a explorar uma situação, formulando questões e conjecturas. Estas conjecturas devem ser testadas e reformuladas até serem aceitas como solução para a situação.

Vale salientar que uma mesma situação pode ter mais de um desenvolvimento e, conseqüentemente, resultados diferentes; porém, todos satisfazendo a situação.

Um exemplo desta poderia ser a seguinte:

Investigue a relação existente entre os algarismos a seguir:			
	1	4	7
	2	5	8
	3	6	9

Dentre as soluções teríamos:

- 1 – A segunda coluna é a primeira mais três.
- 2 – A segunda linha é a primeira mais um.
- 3 – A terceira coluna é a primeira mais seis.
- 4 – As diagonais são formadas por números ímpares... entre outras.

2.3.2 Por que utilizar a Investigação Matemática em sala de aula?

Cunha (2009) e Ponte (2003) destacam a importância da Investigação Matemática para desenvolver a habilidade investigativa a partir de situações que despertam interesse. Estas situações, no início, demonstram serem confusas, mas ao organizar as ideias e pesquisar, surgem as descobertas, os levantamentos de hipóteses e os testes para validações, construindo assim a “argumentação e legitimação de suas respostas” (CUNHA, 2009, p. 1). Esse processo possibilita aos alunos perceberem que não há apenas um método para solucionar um problema, mas várias são as estratégias para que se possa obter a solução.

Desse modo, a atividade de Investigação Matemática tem por objetivo, levar

o aluno a construir seu próprio conhecimento ao realizar as ações que a atividade exige e promove. Esta ação configura-se como uma importante ferramenta, pois quando trabalhada adequadamente, conduz o aluno à construção do conhecimento (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2009).

Além disso, a Investigação Matemática tem suas potencialidades condicionadas pelas ações do professor (PONTE, 2014), características essas que podem proporcionar um ambiente de aprendizagem, que conduz os alunos a “produzirem significados para conceitos e actividades matemáticas” (SKOVSMOSE, 2000, p. 7).

Do mesmo modo, Ponte (2003) evidencia a significativa contribuição para a construção do conhecimento, por proporcionar os momentos de conjecturar, experimentar, avaliar e comunicar seus resultados de forma oral e escrita.

A familiarização dos envolvidos nesses momentos propicia a oportunidade de construir novas concepções a partir de mobilização dos conhecimentos prévios e interesse do aluno.

Nesse sentido, vale a ousadia do docente em desafiar-se no “movimento de uma zona de conforto para uma zona de risco” (SKOVSMOSE, 2000, p. 17), mesmo sabendo que as dificuldades podem surgir, tanto para os alunos como para o próprio professor, pois sair do paradigma do exercício e propor o ambiente investigativo gera reformulação de seu planejamento e estranheza nos alunos, caminhando em uma “zona de risco”.

As atividades investigativas em sala de aula são tratadas por Baptista (2010) no desenvolvimento da aula de Física e Química, sendo essa abordada com os mesmos objetivos e características no desenvolvimento da atividade no processo de Investigação Matemática, pois concordamos com o argumento de que essa desencadeia negociações no desenvolvimento, compreendendo como se constrói o conhecimento científico. Uma vez que o desenvolvimento da Investigação Matemática também “envolve a argumentação, comunicação dos resultados, a partilha de ideias, a troca de exemplos e a aceitação por parte dos pares de que aquele conhecimento é válido” (BAPTISTA, 2010, p. 88), compreendemos a Investigação Matemática como um tipo de atividade investigativa que envolve conceitos matemáticos. Sendo assim, consideramos que os argumentos de diversos pesquisadores da área de ciências são válidos para a Investigação Matemática e por isso utilizamos em nosso referencial teórico.

Corradi (2011, p. 163) afirma também que as atividades investigativas podem alcançar o objetivo de desenvolver nos alunos atitudes que “contribuem para mobilizar e consolidar seus conhecimentos matemáticos”, assim como Ponte (2014, p. 14) caracteriza “o termo “atividade” [...] relacionada com a ideia que o aluno deve desempenhar um “papel ativo” no processo de aprendizagem”.

Nesta mesma direção, Silva e Vertuan (2018, p. 504) apontam que em atividades investigativas os alunos

[...] criam suas próprias questões, elaboram hipóteses, planejam e executam ações, validam (ou não) tanto essas ações quanto as respostas encontradas para as questões, bem como comunicam e justificam os resultados da investigação para os demais alunos da turma, quiçá para outros interessados externos à comunidade universitária.

Ponte, Brocardo e Oliveira (2009) argumentam ainda que atividades de investigação requerem envolvimento ativo do aluno, e quando ele desenvolve essa responsabilidade tende a favorecer o processo de aprendizagem, visto que, nessa abordagem o aluno é convidado a formular as questões a serem investigadas, a elaborar conjecturas num processo de provas e refutamento e apresentar esse processo de descoberta para os colegas e professor, discutindo e argumentando sobre os resultados obtidos.

2.3.3 Classificando as atividades de Investigação Matemática

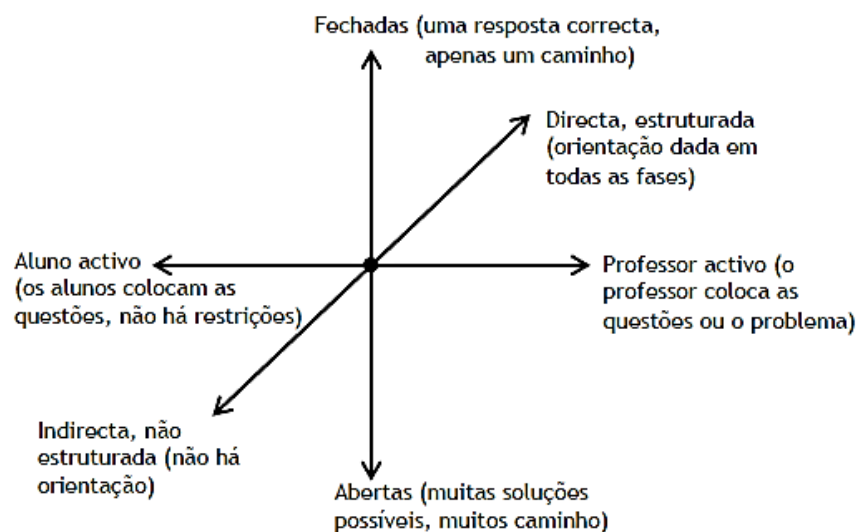
As atividades de Investigação Matemática podem diferir quanto ao seu grau de complexidade e objetivos de desenvolvimento.

De acordo com Ponte (2014) podemos classificar as atividades trabalhadas nas aulas de matemática em quatro diferentes tipos:

- Um **exercício** é uma tarefa fechada e de desafio reduzido;
- um **problema** é uma tarefa também fechada, mas com desafio elevado;
- uma **investigação** é uma tarefa aberta com desafio elevado;
- uma **exploração** é uma tarefa aberta e acessível à maioria dos alunos (PONTE, 2014, p. 21).

Ou seja, as atividades investigativas são essencialmente abertas e pouco estruturadas, elevando o grau de desafio em relação às outras atividades.

Baptista (2010), também apresenta uma classificação das atividades investigativas em relação ao grau de abertura e de orientação diante do avanço cognitivo do aluno no desenvolvimento dessas atividades conforme apresentado na Figura 1.

Figura 1 – Atividades de investigação

Fonte: Baptista (2010, p. 93).

Segundo Baptista (2010, p. 93), os eixos “não são independentes”. No eixo horizontal, temos a ligação de dois extremos, que passa do “professor ativo para o aluno ativo”, indicando que em uma extremidade “os alunos colocam as questões que orientam sua investigação” e na outra, o professor conduz com questões ou o problema que irá direcionar a investigação. No segundo eixo, temos a ligação dos encaminhamentos de atividades fechadas para abertas. A atividade fechada configura-se na existência de apenas uma solução com procedimentos já esperados de antemão; já na atividade aberta há a possibilidade de percorrer caminhos diferentes levando a variadas soluções para as questões levantadas. Por fim, o terceiro eixo, apresenta as atividades diretas e estruturadas, nas quais existem orientações no desenvolvimento, e as atividades indiretas e não estruturadas, que podem ser desenvolvidas quando os alunos e o professor estiverem mais acostumados com esse ambiente de atividade de investigação mais aberta e não estruturada.

No Quadro 1, Baptista (2010) apresenta as classificações em relação aos níveis de complexidade da atividade de investigação.

Quadro 1 – Níveis de complexidade da atividade de investigação

Nível	Questão?	Método?	Solução?
1 Confirmação	✓	✓	✓
2 Estruturada	✓	✓	
3 Guiada	✓		
4 Aberta			

Fonte: Baptista (2010, p. 96).

O primeiro tipo de atividade, caracterizado como a *confirmação*, baseia-se em atividades com conteúdos apresentados anteriormente, no qual é apresentada a questão aos alunos para executar os procedimentos e obter o resultado. No segundo tipo, atividade de investigação *estruturada*, o professor apresenta a questão como no nível anterior, e propõe o procedimento a utilizar, caracterizando ainda uma atividade em que o professor sabe aonde irá chegar. No terceiro tipo, os alunos já possuem responsabilidades no processo de investigar um caminho a percorrer para obter uma solução ao problema proposto pelo professor. E por último, esse nível tem seu grau de complexidade elevado, pois não há um único modelo ou método a executar, pelo fato de que os alunos serão responsáveis na condução do processo da investigação, das questões que irão elaborar baseado no interesse (geralmente do grupo), isso, sem saber de início o caminho a percorrer e as soluções resultantes.

Ferruzzi, Borssoi e Silva (2018) ao tratarem do último nível, investigação *aberta*, afirmam que os alunos desenvolvem um trabalho mais autônomo, e isso oferece insegurança ao professor, pois podem surgir situações em que o professor não está preparado para orientar. Por outro lado, o pesquisador Goldenberg (1999) versa sobre diferentes formas de conceber uma investigação, e expõe quatro funções que a investigação desempenha na aula de matemática. Apresentamos no Quadro 2 estas funções:

Quadro 2 – Funções dos quatro processos de investigação

Explorar	<ul style="list-style-type: none"> - Consiste em uma primeira experiência dos alunos acerca da Investigação Matemática. - O objetivo é explorar um problema com tema matemático, criando possibilidade para trabalhos posteriores, a partir de indagações que surgirem pelos alunos, ou até mesmo propostas pelo professor.
----------	---

	- “Ajudar os alunos a estabelecer intuições”, sem almejar a elaboração de alguma conjectura.
Descobrir	- Ainda com caráter de primeira experiência, uma investigação limitada, orientando os alunos nas próprias descobertas a partir de tentativas. - Propor perguntas que façam refletir sobre uma mesma constatação, só que de modo diferente, dando oportunidade de explorar e observar as mesmas percepções, o que conduz a descobertas. - Ao concluir as ideias, elaborar uma regra.
Pôr em questão	- Consiste em promover situações que leve os alunos a discussões de ideias. - Debater sobre “ideias matemáticas que tenham já trabalhado parcialmente, para rever, apurar ou aprofundar essas ideias ou para relacioná-las com outras” (p. 7). - Permite aos alunos compreender o porquê de certos conceitos e formar suas concepções.
Investigar	O objetivo vai além dos conceitos matemáticos. Nessa função os alunos: - Desenvolvem a autonomia, responsabilidade e a independência no processo da investigação. - Reconhecem uma problemática e começam a elaborar questionamentos, formular conjecturas, realizam testes para validá-las e justificá-las, não esperando respostas prontas do professor, reconhecendo ainda que o professor tem o papel de orientador. - Aprendem a valorizar não apenas as resposta, mas todo o processo da investigação, desenvolvendo a organização das ideias, comunicando-as e discutindo com os colegas, e em cooperação elaboram conclusões. - Desenvolvem a confiança no processo de construção do próprio conhecimento.

Fonte: Adaptado de Goldenberg (1999)

Cada função desperta diferentes competências no processo da investigação quando ofertadas, de modo que os alunos sintam-se motivados, curiosos e confiantes no processo a ser desenvolvido, constroem os “hábitos matemáticos de pensamento” (GOLDENBERG, 1999, p. 3); e compreendem a essência da criação de “factos e métodos”, assim como, aprendem a ser um investigador talentoso. As pequenas investigações começam em trabalhos exploratórios, fazendo observações e encontrando relações (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2009).

Com base nestas leituras classificamos a Investigação Matemática em três tipos, considerando os graus de complexidade, conforme demonstrado no Quadro 3.

Quadro 3 – Classificando a atividade de Investigação Matemática

Grau de complexidade da atividade investigativa	Problema	Procedimentos	Solução
1 Estruturadas	Professor	Professor/aluno	Professor/aluno
2 Menos estruturadas	Professor/aluno	Alunos	Alunos
3 Abertas	Alunos	Alunos	Alunos

Fonte: Baseado em Ferruzzi, Borssoi e Silva (2018) e Baptista (2010).

No grau 1, as atividades **estruturadas** podem ser compostas por roteiros de procedimentos para auxiliar o professor na apresentação e condução da atividade aos alunos, contendo a questão a investigar, tratada no roteiro ou definida previamente pelo professor. Os procedimentos são conduzidos pelas intervenções do docente, e esse sabe de antemão, as soluções possíveis para a investigação.

No grau 2 as atividades são **menos estruturadas** e o professor propõe uma situação contendo uma questão que norteia a investigação; nesse processo podem surgir outros questionamentos levantados pelos alunos que levam a procedimentos distintos na busca de solucionar o problema. Nesse nível, os alunos já trabalham com a formulação de conjecturas, com os testes para validação da conjectura e o debate e discussões a respeito das soluções obtidas.

No grau 3, é o momento em que os alunos são responsáveis por todo o processo. Nesse contexto, os alunos já assumem a responsabilidade pelo papel ativo no desenvolvimento da investigação, pois a configuração **aberta** remete à formulação das questões, à recolha e à organização dados, à experimentação e também às explicações e debates sobre a investigação realizada.

Esses tipos de desenvolvimentos constituem-se de finalidades distintas, desde o processo em que o aluno aplica um conceito adquirido e chegue ao resultado; processo no qual estão habituados (ensino tradicional e reprodução de conceitos), como também podem ser introduzidos momentos em que eles desenvolvem suas estratégias e métodos para alcançar soluções.

2.3.4 O desenvolvimento da prática de Investigação Matemática em sala de aula

Neste item abordaremos duas vertentes de “como utilizar” a Investigação Matemática. A primeira delas diz respeito à forma de implementação em sala de aula e a

segunda ao desenvolvimento propriamente dito.

2.3.4.1 Formas de utilização

Ao adotar novas concepções de ensino e propor um ambiente de Investigação Matemática depara-se com possibilidades diversificadas para iniciar a prática pedagógica. Ensejando despertar o interesse do aluno para o ambiente de aprendizagem, deve-se propor ações que intensifiquem a familiarização com elas, fazendo com que os alunos sintam-se motivados e confiantes.

Para que as características dessa prática pedagógica enriqueçam o ambiente investigativo, é importante que sejam trabalhadas atividades, no início mais estruturadas e, depois aumentar o grau de complexidade, inserindo “atividades menos estruturadas [...] quando os alunos estiverem mais acostumados (e o professor mais seguro)” (FERRUZZI; BORSSOI; SILVA, 2018, p. 6).

Desse modo, Ferruzzi, Borssoi e Silva (2018) insistem na importância de inserir atividades **mais estruturadas** e paulatinamente, propor situações **menos estruturadas**, até o momento que ambos estiverem seguros, para assim propor e deixá-los desenvolver uma **atividade investigativa aberta**.

Contudo, a introdução de atividades investigativas gera alguns desconfortos e dificuldades para os alunos, e nesse contexto é “essencial que o professor esteja atento e os ajude a ultrapassá-las”, pois é um processo que incide na “quebra da rotina a que os alunos estão habituados”, rompendo a segurança e a comodidade centrada no ensino do professor (BAPTISTA, 2010, p. 105). Isso reside ainda em propor atividades acessíveis ao nível cognitivo dos alunos, para não causar o efeito contrário dos objetivos da investigação.

O desenvolvimento de atividades investigativas demanda que o professor saiba flexibilizar o tempo para pensar na questão, pois cada aluno tem seu próprio ritmo de cognição, observando sempre para que não haja um prolongamento em excesso em que possibilita a perda da motivação e resultando na dispersão (BAPTISTA, 2010).

A prática educativa é peça fundamental no ensino de Matemática, o professor compõe o papel de protagonista ao desenvolver práticas diferenciadas que visam estimular a construção do conhecimento, despertando a percepção do que é Matemática e o que ela tem a refletir sobre seu papel na sociedade.

2.3.4.2 Processo de elaboração de uma atividade investigativa

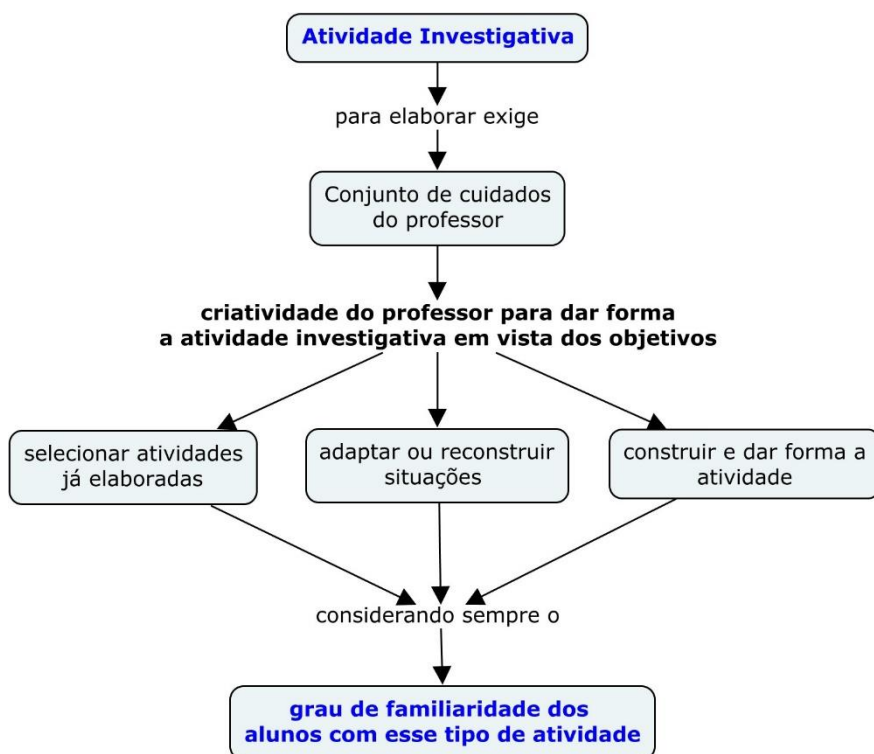
Nesta seção, vamos explicar sobre o processo de elaboração de uma atividade investigativa. Para isso, nos baseamos em Corradi (2011) e Fonseca, Brunheira e Ponte (1999) apresentando alguns cuidados e ações docentes, ao propor esse ambiente, na perspectiva dos referidos autores.

A estrutura de uma aula com a abordagem investigativa exige do professor “uma preparação cuidadosa que vai para além da tarefa que propõe aos alunos” (FONSECA; BRUNHEIRA; PONTE, 1999, p. 3); é um processo que explora diferentes caminhos e desafios.

Esta primeira fase constitui-se da reflexão do professor sobre a elaboração de atividades investigativas, a serem propostas, o que não é algo trivial, principalmente para professores que atuam há anos com o sistema tradicional. Como afirmam Oliveira et al. (1999, p. 100), “é um trabalho criativo para o qual não há receitas”; um processo em que podem ocorrer erros, mas também, quando há persistência, podem resultar acertos que enriquecem a proposta do ensino.

O professor deve delinear objetivos claros, elaborar pesquisas e mais que isso, “recorrer a sua criatividade para dar forma à tarefa, adaptando às situações, reconstruindo as questões da maneira que melhor servir aos seus objetivos” (CORRADI, 2011, p. 170). Isso é parte de um processo cuidadoso que exige habilidades que demandam tempo para adquirir (CORRADI, 2011), sendo “necessário que o professor invista bastante na preparação dessas aulas” (FONSECA; BRUNHEIRA; PONTE, 1999, p. 3), com situações que estimulem o pensamento matemático e também o diálogo, para expor suas ideias e explorá-las entre os alunos e o professor.

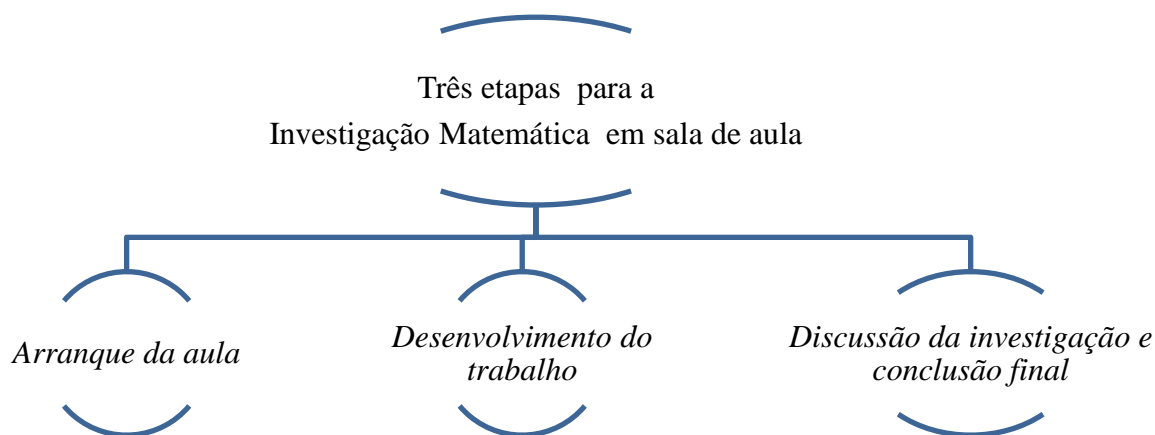
A Figura 2 ilustra este processo de elaboração. Nela observamos que o professor pode optar por desenvolver atividades já elaboradas, adaptar ou construir algo novo, sempre considerando as características de sua turma, o objetivo e o grau de familiaridade da mesma.

Figura 2 – Dando forma à atividade investigativa

Fonte: A autora.

2.3.4.3 Etapas do desenvolvimento

Tendo sido preparada a atividade, chega a hora de desenvolvê-la. Ponte, Brocardo e Oliveira (2009), propõem três etapas que podem contribuir para o desenvolvimento da Investigação Matemática. Estas etapas podem ser visualizadas na Figura 3, construída baseada nos autores citados.

Figura 3 – Etapas da Investigação Matemática em sala de aula

Fonte: Baseado em Ponte, Brocardo e Oliveira (2009).

O arranque da aula é o momento mais importante do processo, em que será apresentada a atividade a ser desenvolvida, com os cuidados devidos, levando em consideração “os alunos que têm pouca, ou nenhuma, experiência com as investigações” (PONTE; BROCARDI; OLIVEIRA, 2009, p. 26), podendo ser proposta aos alunos por escrito ou não, mas sempre com uma breve introdução oral do professor sobre os registros que deverão elaborar.

Gradativamente, os alunos se sentirão familiarizados com atitudes investigativas, por ser “algo muito natural do seu dia a dia, mas [...] pouco presente nas aulas de Matemática” (PONTE; BROCARDI; OLIVEIRA, 2009, p. 27). Os alunos serão estimulados a formularem questões, sendo responsáveis por fazerem suas próprias descobertas; perceberão também que “podem contar com o apoio do professor, mas que a atividade depende, essencialmente, da sua própria iniciativa” (Ibidem, p. 28).

Após o entendimento sobre os procedimentos da atividade investigativa, inicia-se seu *desenvolvimento* propriamente dito. É a fase em que os alunos, divididos em grupos, formulam questões e conjecturam, realizam testes e, se necessário, reformulam e avaliam os resultados encontrados. Ponte, Brocardo e Oliveira (2009) argumentam que o professor tem o papel de apoiar na evolução dos alunos na investigação.

Recomenda-se a divisão em pequenos grupos, pois como ressalta Fonseca, Brunheira e Ponte (1999) o desenvolvimento inicial das atividades com os alunos, é momento em que a falta de habilidade com atividade desse tipo pode gerar as dificuldades e comprometer o desenvolvimento investigativo. Diante desse fato o professor deverá apoiá-los (CORRADI, 2011), conduzindo-os com diálogos e questionamentos que promovam o ambiente de interação entre o grupo e gerem reflexões, estimulando a criatividade dos envolvidos.

Fonseca (2000) argumenta ainda que demanda certo tempo para que os alunos envolvam-se mais a fundo e desenvolvam a autonomia, valorizando não apenas as respostas, mas o processo todo nas atividades de investigação.

No desfecho da aula, o professor deve conduzir as discussões nos grupos, e posteriormente, promover a *discussão da investigação e conclusão final*, em que todos os grupos exponham os caminhos percorridos na investigação, tendo encontrado, ou não, um resultado final. Nesse momento, os caminhos podem divergir e haver o confronto de ideias, e assim cada grupo deve ser direcionado a elaborar as justificativas e validade para os questionamentos (CORRADI, 2011).

Desse modo, para melhor envolvimento dos alunos e organização nas discussões:

Essa fase exige do professor boas competências de gestão de discussões bem como boas capacidades de raciocínio matemático a fim de evitar que os alunos falem todos ao mesmo tempo e mostrem pouco interesse em ouvir os outros. A condução da discussão final requer do professor boa preparação matemática e capacidade de gestão da dinâmica coletiva. Durante a fase de discussão o professor, tem a função de moderador e orientador, cabe-lhe estimular a comunicação entre os alunos explicando as suas ideias e conclusões (CORRADI, 2011, p. 171).

O professor na discussão da investigação tem o importante papel de orientador, pois é o momento que os alunos vão explorar e compartilhar suas estratégias, desenvolvendo a habilidade da comunicação matemática, participando das intervenções e confrontando suas conjecturas e justificações. Esse momento de discussão final é considerado o mais enriquecedor da Investigação Matemática. Neste sentido, Ponte, Brocardo e Oliveira (2009, p. 41) afirmam que “sem a discussão final, se corre o risco de perder o sentido da investigação” e Tudella et al (1999, p. 95) endossam esta importância, considerando que “realizar uma atividade de investigação e não reflectir sobre ela é perder uma das suas potencialidades”.

Como vimos, o professor possui um papel muito importante no desenvolvimento de atividades investigativas e por isso dissertaremos a seguir sobre este aspecto.

2.3.4.4 O papel do professor

Considerando todos os processos que os alunos percorrem, mesmo com seus erros, a aprendizagem pode ser oportunizada nas/pelas intervenções do professor atento. Neste sentido, Cunha (2009, p. 23) alerta que o “professor saiba dosar as suas intervenções, permitindo que os alunos criem seus caminhos e tirem suas próprias conclusões”.

Entretanto, há o desafio de o professor gerenciar os grupos nos momentos iniciais, pois os alunos ainda não estarão habituados ao trabalho em grupo e no desenvolvimento de investigações. Esse fato poderá gerar alguns desconfortos tanto para o professor quanto para os alunos, mas gradativamente nos momentos investigativos ambos aprendem com os contratempos.

A prática do diálogo, em se tratando da intencionalidade do ensino e aprendizagem, não é algo simples de estabelecer, isso requer explorar o ouvir e o perguntar (MILANI, 2017), habilidade essa que se desenvolve entre os erros e acertos no processo do ensino e da aprendizagem. O professor precisa saber ouvir o que o aluno tem a dizer, considerar as concepções e o ponto de vista do estudante, para assim elaborar questionamentos de forma a direcioná-lo em suas próprias descobertas. Diante disso, concordamos com Sasseron (2013) quando expõe que:

Boas perguntas dependem tanto do conhecimento sobre o tema abordado quanto da atenção ao que os alunos dizem: muitas das informações trazidas por eles precisam ser exploradas, seja colocando-as em evidência, seja confrontando a ideia exposta, ou mesmo solicitando aprofundamento do que já foi dito (SASSERON, 2013, p. 3).

“Pensar no diálogo como meio de aprendizagem” (MILANI, 2017, p. 37), exige do professor uma “interação mais aberta”, ambiente esse a que não estão habituados a explorar, visto que estão mergulhados no ensino tradicional em que sua fala é predominante, sem espaço para os alunos expressarem suas próprias ideias (MILANI, 2017).

O processo do diálogo demanda em não fazer perguntas factuais, de modo que as respostas já são conhecidas de antemão (preocupação em adivinhar); isso gera a imprevisibilidade mas, certamente, possibilita novas oportunidades de aprendizagem.

A interação entre os alunos no envolvimento da atividade investigativa contribui para o desenvolvimento pessoal e de também habilidades para superar desafios, não só na aula de Matemática, mas principalmente no cotidiano, momento em que aplicará seu conhecimento adquirido no âmbito escolar. Barbosa (2007) argumenta que a aula é um momento em que são produzidos discursos na interação social entre alunos e, alunos e professor.

De fato, a prática das ações discursivas, não ocorre somente no ambiente escolar, mas em todos os espaços de interações; “vozes anteriores construídas na escola ou mesmo em outros ambientes, por certo estarão circulando nos espaços de interação” (BARBOSA, 2007, p. 164).

Barbosa (2007, p. 164) aponta que “discurso é um tipo de ação” que ocorre sem saber previamente “sobre sua ocorrência e sua ordem”. O professor promovendo a Investigação Matemática pode conduzir com eficácia o discurso proveniente do

ambiente social e obter os objetivos didáticos, que vêm ao encontro da aprendizagem construída pelos alunos de forma autônoma.

As atividades investigativas podem possibilitar discussões favoráveis à aprendizagem dos alunos, e as ações docentes viabilizam a promoção dos discursos que promovem a aprendizagem na perspectiva de Investigação Matemática, para que os alunos envolvam-se compartilhando e enriquecendo as informações prévias, sendo essas do senso comum; ou ainda, conhecimento estabelecido formalmente no ambiente escolar.

Neste sentido, sendo o professor um ator fundamental no processo, Ferruzzi, Borssoi e Silva (2018), apresentam algumas ações/questões, sintetizadas no Quadro 4, que podem auxiliar o docente no desenvolvimento da Investigação Matemática.

Quadro 4 – Questionamentos do professor no ambiente de Investigação Matemática

Questionamentos que o professor orientador pode promover:	
Provocando o raciocínio	Por quê? Como? Me expliquem....
Instigando	Têm certeza disso?
Incentivando	Muito bem! Mas e se....
Validando	Continuem assim! Estão no caminho certo...
Auxiliando na administração de conflitos	Vocês levaram em consideração o que o colega falou? Por quê?
Estimulando o confronto de pontos de vistas	Discutam as duas opiniões, por que não concorda com o que ele disse?
Promovendo a reflexão e argumentação	Explique como você chegou a esta conclusão?

Fonte: Adaptado de Ferruzzi, Borssoi e Silva (2018).

Além dos cuidados na intervenção, ressaltamos a importância do professor ao dar retorno aos alunos, tendo em vista que essa ação do professor potencializará a reflexão dos envolvidos diante do trabalho realizado. Para Corradi (2011, p.171) a

[...] reflexão permite a valorização do processo de resolução que cada aluno desenvolve para chegar a um resultado mesmo não sendo o correto, permite ainda estabelecer conexões com outras ideias matemáticas e pode constituir um ponto de partida para outras investigações.

Apresentamos no Quadro 5 algumas ações que visam auxiliar o professor em cada etapa do processo.

Quadro 5 – Ações do docente no desenvolvimento da Investigação Matemática

Etapas da Investigação Matemática	Ações do Professor
Arranque da aula	<ul style="list-style-type: none"> • Apresentar as atividades aos alunos que, dependendo do grau de familiaridade, pode proporcionar mais ou menos informações. • As informações podem ser apresentadas de forma escrita, oral ou mista.
Desenvolvimento do trabalho	<ul style="list-style-type: none"> • Organizar a turma em pequenos grupos. • Convidar e estimular o aluno a envolver-se. • Despertar a curiosidade, usando as ideias dos alunos como propulsoras do conhecimento. • Provocar o raciocínio dos alunos, encorajando-os a elaborar explicações e relacionar as ideias com experiências anteriores, nunca desestimulando diante de uma explicação equivocada. • Auxiliar com questões orientadoras para estruturar o pensamento, dosando o apoio e as intervenções. • Incentivar os alunos perante as dificuldades para adquirir confiança no trabalho que estão elaborando. • Compartilhar as ideias entre professor e aluno num ambiente em que ambos são aprendizes. • Colocar os alunos em ação e responsáveis em desempenhar um “papel ativo” no processo da aprendizagem. • Desafiar os alunos, conduzindo-os a buscar em sua estrutura cognitiva relações e conceitos, exercitando seu poder de observação e generalização. • Gerenciar o tempo com flexibilidade, oportunizando aos alunos o tempo de maturação, para observar, conjecturar (levantar hipóteses), abstrair, formular questões, testar conjecturas, etc. • Dar oportunidade para compreenderem que a resposta não é algo pronto, há um processo a ser desenvolvido para obterem suas conclusões, desenvolvendo a compreensão e autonomia dos envolvidos. • Desenvolver a atitude de construtores do próprio conhecimento, observando que a matemática não é um simples conjunto de técnicas.
Discussão da investigação e conclusão final	<p>Criar um ambiente com o “grupo maior” propício a:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Verbalizar: expor e explicar o pensamento e raciocínio elaborados, assim como suas conclusões. • Troca de ideias. • Confrontar opiniões e argumentos, onde o receio de “arriscar” conjecturas é relativamente reduzido. • Validar o raciocínio obtido por meio da discussão.

	<ul style="list-style-type: none"> • Elaborar relatórios finais. Esse momento faz com que os alunos reflitam sobre o trabalho realizado estruturando as ideias e ao professor recolhe o registro de informações sobre o nível de desenvolvimento da atividade. <p>Esse ambiente conta com orientações e auxílio do professor em busca do fechamento da atividade.</p>
--	--

Fonte: Adaptado de Corradi (2011) e Baptista (2010).

Tanto na elaboração da atividade investigativa, como na organização da turma em grupo, as intervenções realizadas pelo professor no desenvolvimento do trabalho e a discussão da conclusão final são caracterizadas como etapas essenciais na Investigação Matemática para a construção do conhecimento do aluno.

O trabalho desenvolvido com a prática pedagógica Investigação Matemática concebe experiências “tanto para a aprendizagem matemática dos alunos quanto para o desenvolvimento profissional do professor” (ASSIS; FRADE; GODINHO, 2013, p. 734). Mesmo que o professor não se sinta apto a assumir uma “postura questionadora”, diante do que os alunos têm a dizer, ou acerca das ideias que expressam - sendo elas ‘certas ou erradas’ - são necessárias experiências provenientes de três vertentes, ou seja, aquelas que o professor adquire nas práticas sociais: “acadêmica, profissional, e senso comum²” (PONTE; OLIVEIRA; BRUNHEIRA; VARANDA, 1998, p. 3).

Todos esses argumentos apresentados ao professor para promover a prática pedagógica de Investigação Matemática, só serão concretizados quando ultrapassarem os desafios que esse processo apresenta, exigindo firmeza nas decisões que rompem com a rotina do ensino tradicional, permitindo-se correr riscos, enfrentar e vencer as dificuldades.

² Conhecimento Profissional do Professor: **Senso Comum** (Experiências acumuladas na vida cotidiana, conhecimento comum não comprovado cientificamente); **Conhecimento Acadêmico** (Conhecimento teórico e científico); **Conhecimento Profissional** (Conhecimento que resulta na prática quando articula o conhecimento acadêmico ao senso comum, tomando decisões eficazes, sendo a experiência e reflexão sobre a ela, o fator determinante na capacidade de articular pensamento e ações improvisados nas relações sociais) (PONTE; OLIVEIRA; BRUNHEIRA; VARANDA, 1998).

3. ASPECTOS METODOLÓGICOS DA PESQUISA

Os procedimentos metodológicos dizem respeito ao caminho percorrido: ao contexto dos sujeitos da nossa pesquisa, aos instrumentos da coleta de dados, à escolha do conteúdo para elaborar o roteiro de atividade investigativa e à aplicação da atividade. Trata ainda sobre a análise dos dados considerando o problema norteador e os objetivos que embasaram nossos estudos.

A metodologia adotada é o instrumento que “alicerça-se no diálogo e na colaboração, funda-se no desejo de inovar, de criar, de ir além e exercita-se na arte de pesquisar” (FAZENDA, 1994, p. 69).

3.1 Natureza da pesquisa

Considerando o problema de pesquisa que nos propusemos estudar - *Como podemos contribuir para a inserção da Investigação Matemática em sala de aula?* - os seguintes objetivos foram traçados, quais sejam:

- i. Investigar se os professores de matemática que atuam na rede pública estadual (município de Bandeirantes – PR) conhecem e/ou utilizam a Investigação Matemática em suas aulas; e, para aqueles que não a utilizam, investigar quais os motivos que os impedem;
- ii. Identificar, na literatura, possíveis ações do professor que contribuam para o envolvimento ativo do aluno nas atividades de Investigação Matemática;
- iii. Elencar, com base na literatura, questionamentos que o professor pode fazer no ambiente de Investigação Matemática que possuem potencial para auxiliar, o docente e o aluno no desenvolvimento da atividade;
- iv. Propor instrumentos ao professor, ancorados na literatura, que possam auxiliá-lo e estimulá-lo na inserção da Investigação Matemática em sala de aula.

Assumimos o caráter de pesquisa de natureza qualitativa, uma vez que tentamos compreender e interpretar fenômenos educativos no ambiente em que as ações ocorrem.

Nesse sentido, Bogdan e Biklen (1994) mencionam sobre a importância dos aspectos da pesquisa qualitativa no contexto educacional e apresentam cinco características desse estudo que recorrem às observações do ambiente escolar e os sujeitos envolvidos:

1. Na investigação qualitativa, a fonte direta dos dados é o ambiente natural, constituindo o pesquisador o instrumento principal [...];
2. A investigação qualitativa é descritiva³ [...];
3. Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos [...];
4. Os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva [...];
5. O significado é de importância vital na abordagem qualitativa (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p. 47-51).

A pesquisa qualitativa “tem como preocupação fundamental o estudo e a análise do mundo empírico em seu ambiente natural” (GODOY, 1995, p. 63). Os autores Bogdan e Biklen (1994, p. 23) tratam ainda que:

Os levantamentos sociais têm uma importância particular para a compreensão da história da investigação qualitativa em educação, dada a sua relação imediata com os problemas sociais e a sua posição particular a meio caminho entre a narrativa e o estudo científico.

A pesquisa qualitativa vem ao encontro da intenção precípua de analisar o contexto escolar, que necessita de um olhar cauteloso, quando trata do ensino e da aprendizagem, pois esse ambiente precisa ter sua ligação com o contexto das experiências humanas.

Por meio de investigação e observação cuidadosa, o pesquisador busca obter e compreender significados a partir de situações da realidade, que muitas vezes não podem ser tratados em números. Informações essas, que não são tratadas por procedimentos quantitativos ou estatísticos. Richardson (1999, p. 79) explica que:

O aspecto qualitativo de uma investigação pode estar presente até mesmo nas informações colhidas por estudos essencialmente quantitativos, não obstante perderem seu caráter qualitativo quando são transformados em dados quantificáveis.

Assim, nesse estudo entendemos que “o pesquisador deve aprender a usar sua própria pessoa como o instrumento mais confiável de observação, seleção, análise e

³ De acordo com Godoy (1995, p. 62), no estudo de caráter descritivo “os dados coletados aparecem sob a forma de transcrições de entrevistas, anotações de campo, fotografias, videoteipes, desenhos e vários tipos de documentos”.

interpretação dos dados coletados”, além do pesquisador ir a campo em busca de compreender e “verificar como determinado fenômeno manifesta-se nas atividades, procedimentos e interações diárias” (GODOY, 1995, p. 63).

3.2 Sujeitos da pesquisa

Os dados empíricos foram constituídos inicialmente com entrevistas realizadas com os professores de Matemática efetivos da Rede Pública do município de Bandeirantes/PR, local em que a pesquisadora reside, com o objetivo de observar o conhecimento dos mesmos a respeito da Investigação Matemática, suas potencialidades enquanto prática pedagógica e utilização em sala de aula.

Com este objetivo em foco procuramos o Núcleo Regional de Educação para obter o número de professores de Matemática, efetivos, lotados no Município de Bandeirantes. Com base nas informações obtidas, constatou-se que o município conta com um quadro de 25 professores da disciplina em questão, dos quais, 16 (64%) concederam a entrevista.

De posse do número de professores que atuam no ensino de Matemática da cidade em questão, e do número de escolas e colégios com sede no município, fizemos contato com as secretarias e/ou direção, para levantamento acerca dos horários de disponibilidade dos professores. Isso aconteceu em uma escola e seis colégios; só não tivemos acesso a uma escola do campo e a um colégio do distrito.

Após marcada a entrevista com cada professor, fomos em busca de coletar os dados sobre o conhecimento dos professores a respeito da prática pedagógica em Investigação Matemática, ou seja, nosso primeiro objetivo.

As entrevistas foram gravadas em áudio e transcritas na íntegra com o intuito de descrever e “analisar os dados em toda a sua riqueza, respeitando, tanto quanto o possível, a forma em que estes foram registados ou transcritos” (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p. 48). As transcrições foram codificadas na ordem que foram sendo realizadas, totalizando 16 gravações, sendo P1 (Professor da primeira entrevista) até P16 (Professor da última entrevista).

Os professores participantes concordaram e permitiram a gravação em áudio, assinando um termo de ciência (Anexo I) para o uso dos dados coletados, os quais receberam uma cópia com a explicação, objetivos, natureza, riscos e benefícios para o ensino de Matemática. Os áudios ficaram em posse da pesquisadora, porém, os

quatro professores que tiveram interesse e solicitaram, receberam uma cópia.

3.3 Contexto da coleta de dados

Tendo em vista os objetivos desta pesquisa, os instrumentos de coleta de dados foram constituídos por:

1. Entrevista com os professores da disciplina de Matemática efetivos da rede pública de ensino - nossa primeira fonte de coleta de dados - visto que

[...] a entrevista é utilizada para recolher dados descritivos na linguagem do próprio sujeito, permitindo ao investigador desenvolver intuitivamente uma ideia sobre a maneira como os sujeitos interpretam aspectos do mundo (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p. 134).

Marcamos os encontros com os professores individualmente, geralmente em sua hora atividade.

A conversa inicial com os professores teve sua importância no quesito de conhecer o que entendem sobre a prática pedagógica em estudo, a Investigação Matemática, e em quais aspectos poderíamos contribuir para a inserção em sala de aula.

2. Após o resultado das entrevistas e, com a constatação do pouco conhecimento com a prática pedagógica de Investigação Matemática pelos professores, elaboramos e propusemos um roteiro com atividade investigativa (apêndice II) para auxiliar o professor no desenvolvimento da Investigação Matemática. Tal roteiro buscava observar como acontece o desenvolvimento em sala de aula e, ao mesmo tempo, com a sua aplicação esperava-se perceber se o uso de tal instrumento bastava para favorecer a atividade investigativa, considerando de forma minuciosa os indícios em meio as atitudes do professor, diante das necessidades e dificuldades dos alunos no desenvolver da atividade.

Assim, seguindo alguns critérios, convidamos um professor para aplicar o roteiro de atividade investigativa. Um dos critérios para a escolha foi o de que o professor tivesse uma turma de 6^o ano, tendo em vista que o roteiro foi elaborado com conteúdo e objetivo para ser desenvolvido nesse nível de escolaridade. Outros critérios foram: a disponibilidade, interesse pela pesquisa, compatibilidade de horários de aula com os horários da pesquisadora, para que a mesma estivesse presente no desenvolvimento do roteiro.

Visto que apenas o roteiro não foi suficiente para o professor conhecer os procedimentos da Investigação Matemática, a partir da observação da aplicação, analisamos a importância de fornecer ao professor um material que tratasse, ainda que de forma sucinta, sobre aspectos teóricos da prática pedagógica de Investigação Matemática.

3. Assim, nossa próxima coleta de dados contemplou a elaboração de um material que complementasse o roteiro e, ainda orientações e ações para auxiliar o professor no desenvolvimento da atividade, de modo que, acontecesse, de fato, o ambiente investigativo.

A escolha do professor (P9) para a utilização do material elaborado, seguiu dois critérios: deveria ser um professor diferente do que já havia aplicado o primeiro roteiro, e com os horários compatíveis aos da pesquisadora, para que pudesse estar presente na aplicação.

Assim, após a escolha e aceite do professor para fazer aplicação do material, fomos conversar sobre as turmas que estava lecionando e quais conteúdos trabalharia nas próximas aulas. Deste modo, em comum acordo, escolhemos uma turma de 8º ano, que estava trabalhando polígonos, e que posteriormente, iria trabalhar diagonais dos polígonos.

Após escolhida a turma e o conteúdo, diferente da primeira aplicação que a pesquisadora sugeriu o roteiro sem uma conversa prévia dos conteúdos com o professor (questionando apenas quando iniciaria o conteúdo de frações), passamos a elaborar o segundo roteiro de atividade investigativa, o qual foi entregue juntamente com o material de orientações da prática de Investigação Matemática.

Apresentamos no Quadro 6 a organização das etapas da nossa pesquisa.

Quadro 6 – Organização da etapa de coleta de dados

Organização	Etapas da pesquisa	Período da coleta de dados
Sujeitos da pesquisa	Entrevista com 16 professores de Matemática efetivos da Rede Pública do município de Bandeirantes/PR.	Março a abril de 2018
Elaboração do roteiro I (apêndice II)	Conteúdo do roteiro escolhido pela pesquisadora: frações.	Mai de 2018
Aplicação do roteiro I	Aplicada pelo professor P16	04/06/18

	Atividade investigativa com frações.	Turma: 6º Ano
Elaboração do roteiro II (apêndice III) e um material de orientações e ações para auxiliar o professor (apêndice IV)	Conteúdo do roteiro foi escolhido após conversar com professora (P9) qual conteúdo iria abordar na sequência: polígonos e suas diagonais.	Outubro de 2018
Aplicação do roteiro II juntamente o com material de orientações ao professor sobre a IM.	Aplicada pelo professor P9 Atividade investigativa com polígonos e suas diagonais.	23/10/18 Turma: 8º Ano

Fonte: A autora.

Os professores convidados para aplicar os roteiros de atividade investigativa, relataram em sua entrevista que já tinham ouvido falar sobre Investigação Matemática, mas que não sabiam ao certo do que se tratava.

3.4 Análise dos dados

As análises dos dados foram realizadas frente aos nossos objetivos apresentados em 3.1 e o referencial teórico apresentado no Capítulo 2.

A análise apresenta reflexões sobre o problema da pesquisa bem como as ações e questionamentos do professor no desenvolvimento dos dois roteiros de atividades investigativas.

Os dados que subsidiam a análise foram extraídos das entrevistas com os professores, da aplicação do primeiro roteiro pelo P16, e do segundo roteiro juntamente com o material de orientações sobre Investigação Matemática, pelo P9. Para a análise da aplicação dos roteiros, apresentamos o desenvolvimento dos alunos, a partir dos questionamentos e ações do professor na condução dessa prática pedagógica.

4. DESCRREVENDO A PESQUISA

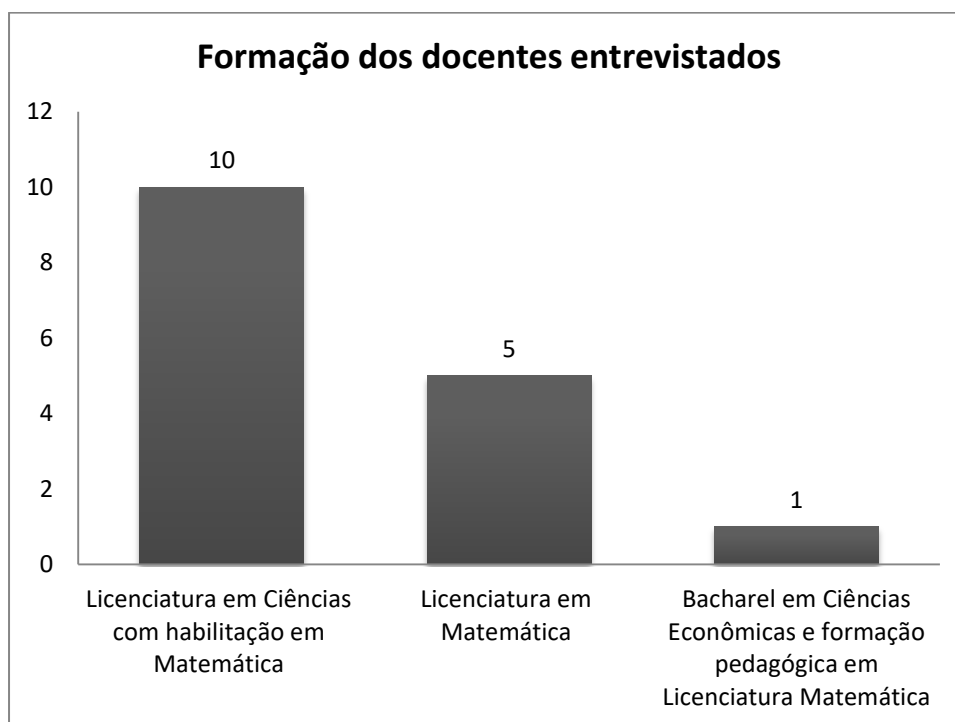
Este capítulo tem por finalidade descrever como foi desenvolvida nossa pesquisa empírica. Dissertamos sobre a coleta de dados referente às entrevistas com os sujeitos da pesquisa, discorremos sobre a elaboração dos roteiros e material de orientação ao professor, culminando com as aplicações dos roteiros em sala de aula.

4.1 Parte 1 – O prelúdio

Com o intuito de responder à pergunta que orientou nossa pesquisa - *Como podemos contribuir para a inserção da Investigação Matemática em sala de aula?* - subsidiados com aporte teórico sobre a Investigação Matemática, bem como o que ela pode proporcionar e contribuir para o ensino e aprendizagem de Matemática, decidimos realizar um levantamento investigativo com docentes que atuam na Rede Estadual do município de Bandeirantes, no norte do Paraná.

Esta foi a etapa inicial dos dados empíricos de nossa pesquisa, qual seja, a entrevista com professores para conhecer qual a percepção dos mesmos em relação à Investigação Matemática, se utilizam-na em suas aulas e, em caso negativo, quais os motivos de não utilizarem.

A primeira parte da entrevista consistiu em conhecer a formação dos sujeitos e tempo de atuação docente. Com isso, constatamos, conforme se observa no Gráfico 1, que a maior parte dos professores entrevistados, são formados em Licenciatura Curta em Ciências, com Habilitação em Matemática, pela antiga instituição de Cornélio Procópio, FAFICOP (Faculdade Estadual de Filosofia, Ciências e Letras de Cornélio Procópio), hoje UENP (Universidades Estadual do Norte do Paraná).

Gráfico 1 – Formação inicial dos docentes

Fonte: A autora.

Além da graduação, que para a maioria foi a formação inicial dos professores em análise, sete relataram ter formação no Magistério⁴ (atuaram nos Anos iniciais ou ainda atuam em um de seus padrões); três relataram que possuem Pedagogia, todos têm Especialização, sendo que oito deles em Educação Matemática e quatro comentaram que fizeram o PDE⁵ - Programa de Desenvolvimento Educacional - do Estado do Paraná.

No item que segue apresentaremos uma síntese da conversa com os professores sujeitos desta pesquisa.

4.1.1 Parte 1a – Sobre o conhecimento a respeito da Investigação Matemática e sua utilização em sala de aula

Verificamos que 13 dos 16 professores entrevistados já ouviu falar, mas não conhecem ao certo do que se trata a Investigação Matemática.

⁴ Hoje com a nomenclatura de Curso de Formação de Docentes.

⁵ Este programa tem como objetivo “proporcionar aos professores da rede pública estadual subsídios teórico-metodológicos para o desenvolvimento de ações educacionais sistematizadas, e que resultem em redimensionamento de sua prática”. Disponível em:

< <http://www.gestaoescolar.diaadia.pr.gov.br/modules/conteudo/conteudo.php?conteudo=20>>

Assim, o Quadro 7 apresenta o resultado da entrevista em relação ao conhecimento dos professores.

Quadro 7 – Conhecimento dos professores sobre a Investigação Matemática

Investigação Matemática	Professores
Não conhecem ou nunca ouviram falar.	P1, P2 e P15
Já ouviram falar, mas não tiveram nenhuma formação para compreensão adequada (não conhecem).	P4, P5, P6, P9, P11, P12, P13 e P16
Conhecem um pouco, sem formação específica.	P3, P8, P14
Conhecem teoricamente e tiveram formação.	P7 e P10
Total de professores entrevistados	16

Fonte: A autora.

P1, primeiro docente a ser entrevistado, disse não conhecer a Investigação Matemática, sendo sua linha de pesquisa a tecnologia, na qual realizou sua pesquisa do PDE. Seu tema de pesquisa foi voltado para as Mídias Tecnológicas, especificamente com objetos de aprendizagem. Comentou que gosta de trabalhar com a tecnologia, pois os alunos demonstram grande interesse, em razão de estar presente no dia a dia.

O segundo entrevistado, P2, também afirma que nunca ouviu falar sobre Investigação Matemática e enfatiza sua preferência pelo método tradicional de ensino, como podemos observar em sua fala:

[...] Minhas aulas continuam sendo tradicional, às vezes tento investir em alguma coisa diferente, mas infelizmente a gente esbarra em alguma burocracia e falta de equipamento fornecido pelo órgão que é o Estado. E muita das vezes que você tenta fazer uma coisa diferente, nem sempre você consegue ter a homogeneidade da turma aí você se atrapalha. Volto a dizer, prefiro o método tradicional: giz, livro, repetição[...] nem sempre é o mais correto, mas se tentar inventar e fizer algumas coisas, a mídia tá aí pra te ajudar, mas nem sempre é a melhor opção escolhida (recorte da entrevista de P2)⁶.

Apesar desta afirmação, quando a pesquisadora comentou sobre realizar um curso ou apresentar roteiros de atividades investigativas para os professores conhecerem essa prática pedagógica, P2 acrescentou que *sempre o que é novo para poder ensinar matemática [...] de uma forma mais saudável e talvez até lúdica, que traga o*

⁶ As transcrições foram redigidas na íntegra e sendo assim apresentam erros de concordância e expressões do tipo tá, há, etc.

aprendizado para os alunos, não tem problema nenhum em ser aplicado.

Assim como P2, a prática pedagógica de P3 é mediada pelo ensino tradicional, o que ele chama de *ensino padrão, quadro, giz, etc.* Este professor possui conhecimento sobre a metodologia da História da Matemática e Modelagem Matemática, e quanto à Investigação Matemática, relata que conheceu em uma disciplina do mestrado em que foi lido um artigo que discutia sobre, porém antes disso nunca tinha ouvido falar, nem na graduação e nem na especialização, acrescentando que na época se falava muito em Modelagem.

P3 argumenta sobre a dificuldade em se trabalhar com as salas numerosas e o desinteresse dos alunos, não obtendo sucesso em trabalhar com questões abertas. Afirma que nunca desenvolveu atividades de Investigação Matemática, justificando que eles não sabem interagir e não dialogam:

[...] às vezes faltou um pouco de iniciativa minha em tentar mais, mas também acho que falta um pouco de conhecimento de minha parte, por esse aspecto e ter mais segurança em aplicar esse método [...] e medo de atrasar o conteúdo (recorte da entrevista de P3).

Assim como os anteriores, P4 também relata utilizar os recursos tradicionais, quadro e giz, com aula bastante expositiva, considerando ainda dificuldade de propor algo diferente em uma sala numerosa. Já ouviu falar sobre a Investigação Matemática, mas não teve uma formação específica, fez um curso de Modelagem apenas.

Por sua vez, P5 gosta de trabalhar mais com recursos visuais e jogos. Fez Especialização em Modelagem Matemática e tenta trabalhar atividades que auxiliem os alunos a aprenderem na prática, levando-os para a cozinha da escola onde fazem suco de laranja, trabalhando medidas e proporções. Tenta trabalhar também a História da Matemática, mostrando como surgiram alguns conceitos. Sobre o conhecimento referente à Investigação Matemática, afirma que já ouviu falar, mas não se aprofundou, ficando mais na Modelagem, e ainda considera que a falta de vivenciar essa prática o impede de aplicá-la.

Em seu turno, P6 relata que no quesito de recursos é um pouco tradicional, *uso mais a lousa e o giz* e sobre a Investigação Matemática, afirma que já ouviu falar, mas não tem conhecimento do que é ao certo e nunca teve nenhuma formação sobre essa metodologia.

Do mesmo modo, P7 expõe que usa os recursos básicos: *giz, quadro, oratória e quando há oportunidade [...] trabalha com as Mídias*. Sobre as metodologias, relata que tem conhecimento de algumas, mas não desenvolve o passo a passo linearmente. No que diz respeito à Investigação Matemática, afirma ter tido formação e tenta aplicar *como método não de forma exata, passo a passo segundo todos os procedimentos da Investigação Matemática, mas a gente acaba trabalhando, por conhecer e por ter visto, de uma forma mais vaga*. Acredita que um curso ou roteiros com atividades de Investigação Matemática serão de grande valia.

P8, durante nossa conversa, comentou que o recurso *é o quadro de giz, algumas atividades impressas e a sala de informática (utilizo pouco também)*. Trata ainda da dificuldade dos alunos em conceitos básicos e a dificuldade de interpretação. Com isso a metodologia que procura utilizar é a Resolução de Problemas. Já a Investigação Matemática, conhece pouco e não teve nenhum curso específico. Argumenta sobre essa prática que *os alunos acham complicado e assim não há muito rendimento, [...] já tentei aplicar, mas não funcionou como esperava*.

Em conversa com P9, o mesmo afirmou não conhecer sobre a Investigação Matemática, mas já ouviu falar. Conhece mais a Modelagem Matemática e *imagina que se aproximada da investigação da pesquisa*. Fez o PDE e sua linha de pesquisa, assim como P1, concentra-se na área de tecnologia e, desse modo, utiliza *sempre que possível o laboratório de informática*.

P10 relatou que utiliza *vários recursos, passo vídeo, material concreto em sala de aula, mas na maioria das vezes ainda é quadro e giz*. Argumenta sobre a dificuldade, considerando que *hoje em dia é complicado, por causa da falta de interesse dos alunos, da defasagem no estudo, na aprendizagem, eles vêm sem saber*. Em relação à Investigação Matemática, *conheço teoricamente, já aprendi sobre ela, mas usar em sala de aula é difícil*, visto que os alunos não demonstram interesse.

Já P11 relata que *ensinar matemática é uma situação difícil, porque as crianças já vêm com o preconceito formado*, porém, busca entender o contexto e a realidade de vida dessas crianças para tentar motivá-las. Tenta trabalhar com a multimídia, mas encontra dificuldade, por ter salas numerosas, poucos computadores e assim, encontra dificuldade em auxiliar todos os alunos. Conhece a Modelagem Matemática e sobre a Investigação Matemática, *já ouviu falar, mas particularmente não sei muito sobre o que se trata*, e desse modo não se arrisca a *trabalhar com alguma coisa que não conhece [...] o desconhecido é complicado [...] a gente fica com medo*,

mas às vezes é fácil e gostoso.

Em sua entrevista, P12 expõe que *além do expositivo, conforme a turma, trabalho com material concreto (material dourado), mídias tecnológicas, textos e atividades na tv pendrive (vídeos)*. Argumenta ainda que a metodologia tradicional, *não pode fugir*, mas sempre tenta mesclar a Modelagem Matemática, Etnomatemática, que conhece. Mas a Investigação Matemática, não conhece profundamente, só ouviu falar.

P13 relata trabalhar com os recursos tradicionais, giz, quadro e livro didático. Sobre a Investigação Matemática, não teve nenhuma formação, porém considera que usa e *sem saber faz isso*. Observa que por não ter conhecimento, pode ter visão equivocada sobre essa prática pedagógica, pois acha que faz sem saber e sem preparar um encaminhamento de cunho investigativo, sem as características necessárias.

Estando atualmente em cargo de direção, P14 não está atuando em sala de aula há um tempo e relata que conhece um pouco sobre a Investigação Matemática, mas que não lembra ao certo se aplicava.

P15 relata que depende do conteúdo para pensar no recurso que utiliza, *como início do conteúdo, para ter uma motivação inicial [...] estímulo*, não trabalha com metodologias específicas, pois a diversidade em sala de aula é grande e a realidade que eles vivem, um contexto cultural que não desperta interesse pelo ambiente escolar, dificulta a utilização de práticas diferenciadas. Em relação à Investigação Matemática, P15 relata não ter conhecimento.

Por fim, P16 argumenta que hoje os livros são bem completos, mas tenta sempre diversificar sua prática, propondo jogos, quebra-cabeça e ainda tenta trabalhar mais com situações-problemas e tecnologias. Sobre a Investigação Matemática, *já ouvi falar, já li alguma coisa, mas assim, não com tantos detalhes*, conhece mais sobre a investigação na área de ciências, nas experimentações.

Perante os aspectos teóricos e o modo como procedem na prática, é possível notar a falta de conhecimento a respeito do que realmente propõe a Investigação Matemática. Essa constatação vem ao encontro do que é relatado nos PCN (BRASIL, 1998, p. 21):

Entre os obstáculos que o Brasil tem enfrentado em relação ao ensino de Matemática, aponta-se a falta de uma formação profissional qualificada, as restrições ligadas às condições de trabalho, a ausência de políticas educacionais efetivas e as interpretações equivocadas de concepções pedagógicas.

Assim, apresentamos a seguir alguns fatores que os professores relataram que dificultam os trabalhos diferenciados em sala de aula.

4.1.2 Parte 1b – Desafios, dificuldades e anseios dos professores

Os argumentos dos professores entrevistados expõem as possíveis barreiras da prática de ensino com abordagens diferentes do ensino tradicional (quadro e giz): o número expressivo de alunos em sala de aula, a falta de envolvimento dos alunos, o desinteresse em querer explorar e discutir em busca de ampliar o conhecimento, a dificuldade em conduzir um diálogo entre os alunos, dificuldades dos alunos em conceitos básicos de matemática e falta de conhecimento sobre práticas investigativas.

Professores relataram as dificuldades e desafios com os quais deparam-se quando tentam propor atividades que requeiram uma participação ativa do aluno. Não obstante, os professores não têm formação suficiente que suprir as dúvidas e manter a segurança diante de situações inesperadas.

Em seus relatos, os professores entrevistados comentam sobre a pouca, ou nenhuma formação, no tocante às tendências metodológicas propostas nas DCE, e quando há uma formação, geralmente não conseguem aliar a teoria e a prática, por ser algo que não se enquadra na realidade dos alunos.

Assim, diante da conversa sobre a Investigação Matemática com estes professores, a pesquisa vem corroborar com perceptíveis

[...] implicações estruturais às licenciaturas sugerindo que os professores que nela atuam, tenham, no mínimo, familiaridade, incluindo em seu repertório docente, o domínio da tendência e utilizando-a de modo frequente em suas aulas. No entanto, não é isso que tem ocorrido. Parece-nos que pouco tem se avançado em termos práticos, deixando a questão da formação de professores em Investigação Matemática somente na esfera dos discursos, salvaguardadas valorosas exceções (WICHNOSKI; KLÜBER, 2018, p. 71).

De fato, é raro e ousado o professor que busca superar as dificuldades, como trata Goldenberg (1999), considerando ser necessário adaptar as ações pedagógicas e vestir-se de atitude que motive também os alunos no sentido de querer conhecer, pesquisar, investigar o que é desconhecido, enquanto aprimora conhecimentos matemáticos prévios. Porém, Wichnoski e Klüber (2018, p. 70-71) argumentam em relação

[...] ao trabalho prático, tanto a formação inicial quanto a continuada carecem de proximidade com a Investigação Matemática e experiências isoladas em algumas disciplinas que compõem a licenciatura como, por exemplo, tendências em Educação Matemática, são insuficientes para que os futuros professores venham a pôr em prática este tipo de trabalho.

Esta afirmação foi evidenciada em nossa entrevista visto que os poucos professores que tentaram desenvolver uma atividade investigativa subsidiados apenas por leituras ou propostas que esclarecem apenas o cunho teórico, sentiram-se inseguros e aversivos a um segundo desenvolvimento.

Neste sentido, Wichnoski e Klüber (2018) consideram que um curso de formação de professores de Matemática, que discuta sobre Investigação Matemática deve contemplar o aporte teórico e experiências vivenciadas, a fim de inspirá-los e dar subsídios para práticas futuras. Consideram ainda que a troca de experiências da sua prática de sala de aula, possibilita reconfigurar o modo como já se trabalha certos conteúdos, enriquecendo a experiência vivida e compartilhada.

Como se pode observar, os relatos nas entrevistas evidenciou que a maioria dos professores entrevistados não utiliza a Investigação Matemática por falta de conhecimento sobre como conduzir esta prática em sala de aula. Diante disto, focamos nosso olhar, pensamento e leituras em identificar formas de auxiliar estes professores que se encontram em serviço. Esta inquietação, subsidiada por leituras e relatos de experiências, conduziu-nos à elaboração de um roteiro para o desenvolvimento de uma atividade de Investigação Matemática, o qual contasse com possibilidades para suprir esta falta de conhecimento da prática. Assim surgiu a segunda parte da pesquisa.

4.2 Parte 2 – A busca por um instrumento com potencial para subsidiar o desenvolvimento de atividades investigativas

A inspiração para elaboração de um roteiro surgiu em uma das disciplinas cursadas no mestrado - PPGMAT/UTFPR -, em que o professor tratou do ensino de frações abordando atividades investigativas e sugerindo alguns encaminhamentos para a construção do conhecimento pelos alunos.

Nesse contexto, o professor da disciplina sugeriu a leitura do artigo de Lopes (2008) intitulado: “O que nossos alunos podem estar deixando de aprender sobre frações, quando tentamos lhes ensinar frações”, em que relata e critica o modo como é abordado o conteúdo em livros didáticos, no currículo, nas práticas e nos objetivos para

o ensino desse conteúdo.

Em nossa pesquisa inicial, observamos que, apesar da clara e conhecida necessidade de mudança em nosso sistema de ensino, a tentativa de diversificar a prática pedagógica foi inibida pela falta de formação adequada em experiências investigativas. Assim, diante deste cenário e com a intenção de auxiliar os professores em exercício, pensamos em propor um minicurso a fim de que pudéssemos compartilhar os anseios e desafios sobre a forma que concebemos o ensino, e ainda promover um momento de experiência com atividades investigativas, apresentando as vantagens e dificuldades que o ensino por Investigação Matemática pode proporcionar na construção do conhecimento.

Porém, diante da impossibilidade⁷ momentânea de um minicurso para disseminação dessa prática pedagógica, optamos por elaborar um roteiro com o intuito de auxiliar a prática pedagógica investigativa, prática esta que os professores sujeitos da nossa pesquisa demonstraram não ter conhecimento suficiente para propor em sala de aula.

Deste modo, nossa proposta foi a de elaborar um roteiro que auxiliasse em uma atividade investigativa.

4.2.1 Parte 2a – O conceito matemático escolhido para o primeiro roteiro

A leitura realizada na disciplina de mestrado constituiu-se em um fator decisório na opção do conteúdo a ser tratado neste primeiro roteiro. Ao relatar e criticar, acerca da sua complexidade e como o mesmo é trabalhado nas aulas de matemática, escolhemos como primeiro conceito o estudo de frações.

Tendo definido o conceito a ser explorado nos preocupamos em elaborar um roteiro que auxiliasse o professor no processo da atividade investigativa em um momento inicial de implementação e proporcionasse uma experiência diferente do ensino tradicional, tanto para o professor, quanto para o aluno.

Almejamos assim que o ensino de frações não fosse concebido apenas com definições reproduzidas e memorizadas como um conceito “pronto”, mas que conduzisse os alunos a elaborar estratégias, percorrendo um caminho investigativo debatendo com os colegas, em busca de obterem suas conclusões, proporcionando aos

⁷ Referimo-nos aos fatores como tempo destinado à pesquisa e a indisponibilidade dos professores.

alunos “um intenso movimento de provas e refutações num ambiente de investigação” (LOPES, 2008, p. 19) descobrindo as regularidades que envolvem o conteúdo.

Deste modo, nosso roteiro inicial contemplou o conceito de adição e multiplicação de frações, a partir de uma atividade investigativa que poderia despertar a curiosidade para um processo inicial de Investigação Matemática.

4.2.2 Parte 2b – O roteiro

Por tratar-se de uma primeira experiência com Investigação Matemática a ser desenvolvida pelos professores sujeitos desta pesquisa, optamos por elaborar um roteiro (apêndice II) de caráter estruturado. Este tipo de roteiro propõe ao professor que conduza a atividade com orientações, intervenções, e principalmente, com questionamentos, levando o aluno à análise de situações para fazer suas colocações (CACIOLLATO; FERRUZZI, 2018). Salientamos que, de acordo com nossas entrevistas, geralmente, os alunos não são incentivados e nem acostumados a dar seu posicionamento, analisar uma situação e inferir um resultado.

Com o roteiro estruturado convidamos um sujeito da nossa pesquisa para desenvolver uma atividade pautada na Investigação Matemática, tendo apenas o roteiro como suporte. Informamos ao professor-aplicador que esta aula seria acompanhada pela pesquisadora para observar e refletir sobre as possíveis adaptações que deveriam ser realizadas. A versão revista está contemplada no Produto Educacional, fruto desta pesquisa.

Assim, na sequência apresentamos o desenvolvimento realizado pela professora, e ponderações da pesquisadora com o intuito de analisar se o roteiro seria suficiente para uma prática pedagógica de primeira experiência para o professor.

4.2.3 Parte 2c – O desenvolvimento de uma atividade de Investigação Matemática tendo como suporte o roteiro desenvolvido

A professora aplicadora tinha uma turma de 6^o ano no período vespertino e comentou ser uma turma composta por bons alunos, mas com alguns repetentes, que apresentavam dificuldades no processo de aprendizagem.

A professora participante dessa segunda fase da pesquisa atua nas disciplinas de Matemática em um padrão e Ciências em outro padrão. Observamos que

sua experiência com investigação é no ensino de ciências, pois em sua entrevista relatou que leu

“[...] mais sobre investigação não dentro da Matemática, mas dentro das experiências nas aulas de ciências” (P16)

Assim, após o aceite da professora, entregamos o roteiro sem muitas orientações, e marcamos a data da aplicação para que assim a pesquisadora pudesse fazer suas observações de como aconteceria a experiência. Entregar o roteiro sem orientação foi proposital, pois nosso intuito era que o mesmo fosse autoexplicativo e suficiente para qualquer pessoa que fosse utilizá-lo.

Deste modo, a aplicação do roteiro ocorreu em uma turma de 6º ano, composta por 23 alunos, do período vespertino, em um Colégio Estadual de Bandeirantes/PR.

A professora desenvolveu a atividade investigativa seguindo o roteiro sugerido, porém, logo no início observamos a falta de informações no mesmo. Notamos que não constava no roteiro a importância de a turma estar organizada em grupos e, observando este fato, orientamos a professora antes de iniciar a atividade sobre esta questão. Enfatizamos que a disposição dos alunos em pequenos grupos poderia oportunizar o debate e a discussão de ideias. Porém, mesmo diante da nossa intervenção a professora foi resistente ao organizar os alunos em grupos, alegando que *“conversariam demais e não ocorreria produção”*.

Assim, a professora iniciou a aula distribuindo os retângulos de papel aos alunos orientando-os:

“Primeiro [...], nem que vocês errem, depois peguem outro pedaço, [...] eu quero que vocês pensem, pensem como vocês dividiriam esse pedaço de papel em três pedaços iguais, na horizontal [...] sem régua só na dobradura. (P16).

A partir disso os alunos, mesmo estando em suas carteiras individuais, começaram a conversar e um deles falou: *“ah... é fácil”*, outro comenta *“eu já sei[...]”*, porém, depois de algum tempo, após explorarem as dobras, começam a chamar a professora (mostrando que conseguiram). Assim, quando uma aluna abre a dobradura, fica surpresa: *“ah não, ficou maior”*, e a professora argumenta: *“ixxi... ficou quatro”*. A aluna continua a conversa com os colegas e fala *“ah... não sei”*, desistindo em seguida. A divisão em quatro partes aconteceu com outros alunos e alguns deles solicitaram outro pedaço de papel para a professora, com o intuito de tentar novamente.

Porém, como seriam duas folhas retangulares para toda a atividade, uma que seria dobrada em três e outra que seria dobrada em quatro partes iguais, a professora sugeriu que aqueles que tinham dividido a primeira folhinha em quatro partes deixassem aquela folha separada para usar posteriormente.

Este episódio levou-nos a considerar a possibilidade de alterar a ordem das divisões das partes da folhinha apresentada no roteiro (propor primeiro a divisão em quatro partes, que foi mais fácil para os alunos, e depois desafiá-los a dobrar em três partes iguais). Isso para facilitar a primeira exploração, a fim de que eles sintam confiança em sua exploração e não desanimem em um primeiro momento.

Alguns alunos viram que uma das alunas conseguiu e então começaram a questionar, *“como ela conseguiu?”*, solicitando ajuda, ou seja, uma resposta pronta do professor. Durante este desenvolvimento os alunos caminhavam bastante pela sala e conversavam, o que incomodou um pouco a professora, fazendo com que ela pedisse para sentarem. Para finalizar a primeira parte a professora questionou aos alunos:

*“você conseguiu sozinho?
você deu uma olhadinha na do colega?
ou você não conseguiu dividir em três partes?”*

Para auxiliar o restante da turma que não conseguiu realizar a dobradura, a professora solicitou a um aluno que fosse na frente da sala para mostrar como fez e mesmo assim alguns ficavam impacientes e pediram ajuda da professora e da pesquisadora. Observamos nesse momento evidências da atitude passiva, na espera por alguém que faça por eles.

Deste modo a professora foi orientando a turma que, dividindo ao meio, dividiria em duas partes iguais e se dividisse a parte dobrada (ao meio) ao meio novamente, irão resultar em quatro partes iguais.

“Então não é no meinho, dividir em três é no meinho o risco?[...] Se ficou no meio já está errado, tá” (P16)

Depois de muitas explicações todos conseguiram e então a professora fez o desenho de um retângulo no quadro, representando a folhinha, e tracejou onde tinha a marca da dobradura. Ela pintou a primeira parte e questionou os alunos: *“que parte é essa? é a primeira parte de quantas partes?”*. A professora foi explorando e questionando os alunos, o que fez com que eles pensassem a respeito e, depois de um

tempinho um deles respondeu: *“uma parte de três partes”* e a professora questionou ainda: *“como ela é chamada?”*. Os alunos não souberam dizer e a professora então respondeu, que seria um terço (fazendo a representação da fração dentro de cada retângulo e explicando que cada parte correspondia a um terço), concluindo que cada parte é uma de três. Posteriormente, solicitou que pintassem mais uma parte, destacando com um lápis escuro ou caneta a marca da dobra.

A partir disso foi realizando alguns encaminhamentos com questionamentos, aproveitando ainda o momento para explorar, comparando e mostrando aos alunos a parte maior que outra, discutindo e exemplificando com um copo de refrigerante.

Em seguida, voltou à exploração inicial da pintura das partes sugeridas no roteiro, solicitando que os alunos pintassem mais uma parte das três: *“eu poderia ter pedido a vocês que pintassem duas partes de... [...] Pintem dois terços, o que é dois terços?”*. Neste momento ocorreu grande participação/discussão e considerações dos alunos até conseguirem chegar a um consenso considerado verdadeiro.

Posteriormente a professora questionou qual seria o nome da fração que estava no quadro (um terço) e após a resposta, apresentando no quadro a adição: $\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$ falou: *“pensem[...]”* questionando qual seria o resultado. Um dos alunos sussurrou 2 de 6 e a professora solicitou que olhassem na folhinha pintada ou no desenho do quadro e perguntou: *“o que vocês acham que está certo? Dois de três ou dois de seis?”*. Os alunos mostraram-se confusos e diante disso, a professora questionou se tinha seis pedaços na figura, fazendo com que logo vários alunos a concluíssem e entendessem porque não seria dois sextos.

Mesmo com a compreensão dos alunos, a professora continuou a questionar sobre o que corresponde à parte de cima da fração, explorando se corresponde ao número de partes divididas ou ao número de partes pintadas, levando os alunos a analisarem e elaborarem explicações. Também questionou sobre o denominador da fração e vários alunos já conseguiam responder sobre o que entenderam e que seria a representação de número de partes divididas da figura. Com vários questionamentos e discussões, a professora conduziu os alunos a generalizarem que o número de baixo é o número de partes divididas. Assim, se somar frações com os denominadores iguais, no resultado o denominador permanecerá igual, pois só irá acrescentar ou fazer a soma das partes pintadas.

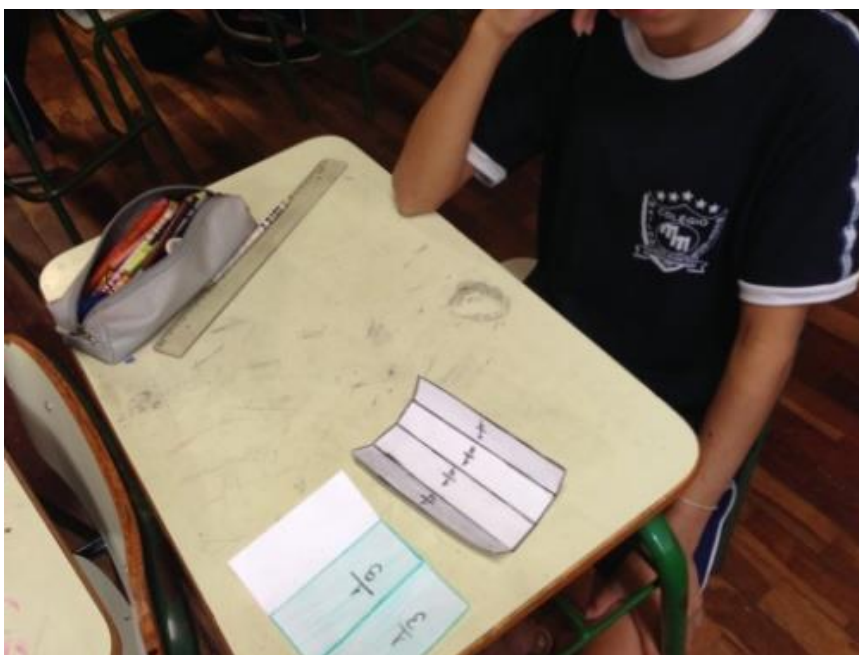
Ainda perguntou aos alunos sobre o nome que recebe a parte de cima da fração. Respondiam tentando adivinhar, então a professora foi lembrando-os, NU... ME... (numerador) e o debaixo o denominador, que indica em quantas partes foram divididas nosso inteiro.

Posteriormente a professora entregou mais uma folhinha para que fizessem a divisão das quatro partes, orientando agora que a dobra teria que ser na vertical e não na horizontal como na primeira. Alguns conseguiram obter as quatro partes iguais com as duas dobras no meio, outros dobraram três vezes, obtendo oito partes.

Foi um momento muito interessante em que eles queriam explicar como fizeram as dobras, porém depois de um tempo começam a tumultuar e a professora solicitou silêncio para continuar.

Após a divisão das quatro partes iguais, a professora solicitou aos alunos que pintassem uma das quatro partes e que escrevessem a fração que representava cada parte (um quarto), como exposto na Figura 4.

Figura 4 – Aluno no desenvolvimento da atividade investigativa



Fonte: A autora.

Porém, alguns alunos pintaram duas partes e a professora pediu para que fizessem novamente para que todos conseguissem chegar a um mesmo resultado. Vale aqui uma observação. Por tratar-se de uma proposta investigativa, seria interessante que encontrassem respostas diferentes, mas a professora preferiu trabalhar de modo que

todos chegassem à mesma resposta.

Tendo findado o tempo previsto para a aula, a professora optou por trabalhar a segunda parte do roteiro em outro dia, entretanto, para nosso objetivo, o desenvolvimento da primeira parte foi suficiente. Tínhamos o objetivo de verificar se o roteiro construído era autoexplicativo, e suficiente para que um professor sem qualquer informação adicional, fosse capaz de conduzir uma atividade investigativa com sucesso.

Já no início da aula observamos que o roteiro necessitava de melhorias, como por exemplo, algumas orientações quanto à divisão das turmas em grupos. Na continuidade constatamos que o roteiro não era suficiente, tendo em vista que a professora não desempenhou algumas ações, impedidas pela falta de conhecimento teórico a respeito da prática pedagógica de Investigação Matemática, como não permitir que os alunos tomassem caminhos diferentes do que ela tinha planejado; ela não provocou os alunos no sentido de que eles encontrassem respostas às suas dúvidas.

Assim, com base na experiência relatada, notamos que apenas o roteiro não era suficiente para desenvolver uma prática investigativa, era necessário além de algumas alterações no roteiro, um subsidio teórico sobre a Investigação Matemática. Este fato vai ao encontro da afirmação de Ponte, Brocardo e Oliveira (2009, p. 10) quando sustentam que dependendo do modo como o professor conduz o processo “há sempre o risco de a proposta de trabalho investigativo resultar na simples aplicação de procedimentos rotineiros”.

Tendo constatado que o sucesso da atividade está condicionado, em parte, às ações dos professores, vislumbramos a necessidade de ofertar aos professores sujeitos de nossa pesquisa, um minicurso sobre procedimentos, ações e atitudes para o desenvolvimento de atividades investigativas. Acreditamos que um minicurso que apresentasse os objetivos da Investigação Matemática, sua importância para o ensino e aprendizagem, o modo de condução e ainda a realização de algumas atividades, poderia suprir a falta de conhecimento neste tipo de prática pedagógica.

Porém, diante da impossibilidade de propor o minicurso, como já anunciado, a fim de proporcionar esclarecimentos para o professor sobre a Investigação Matemática, resolvemos elaborar, além do roteiro, um material que contemplasse orientações a respeito da ação docente em consonância com os objetivos desta prática.

4.3 Parte 3 – Orientações e instruções para o desenvolvimento de atividades investigativas

Esta etapa da nossa pesquisa contempla a aplicação do material elaborado privilegiando aspectos da Investigação Matemática, para fornecer conhecimento inicial ao professor acerca dessa prática pedagógica.

O material elaborado é composto de instruções para orientar o desenvolvimento de uma aula com caráter investigativo. O intuito desse é apresentar ao professor, de maneira simples e concisa, uma breve explicação sobre a Investigação Matemática como prática pedagógica, sobre os encaminhamentos para que a atividade seja de cunho investigativo, etapas e ações docentes no desenvolvimento da aula para a caracterização da prática pedagógica investigativa.

Após a elaboração do material, conversamos com outra professora de Matemática - P9 - e a convidamos para que contribuísse com a nossa pesquisa nesse segundo momento, a fim de conhecer e explorar nosso material sobre a Investigação Matemática e, o mais importante, levar essa prática de ensino para sala de aula, uma vez que essa relatou não ter conhecimento e nunca ter utilizado em suas aulas.

Com o aceite da professora, conversamos sobre as turmas que ela leciona e qual ela gostaria de aplicar uma atividade investigativa, para que naquele momento pudessemos fazer algumas observações da aplicação da atividade investigativa, juntamente com o material de orientações sobre a Investigação Matemática.

Em conjunto, optamos pelo 8º ano, do período matutino, no qual a professora estava iniciando na turma o conceito de polígonos e, a partir disso foi questionado se já havia trabalhado na turma sobre o conceito de número de diagonais do polígono; e ela relatou não ter trabalhado ainda.

A partir dessas informações, e com a escolha do conteúdo a ser trabalhado, definido pela pesquisadora juntamente com a professora regente, posteriormente o roteiro de atividade investigativa foi elaborado pela pesquisadora, contemplando assim o conteúdo de número de diagonais de um polígono (Apêndice III).

Assim, entregamos o material de orientações sobre a Investigação Matemática (Apêndice IV) juntamente com o roteiro de uma atividade estruturada à professora, para que ela fizesse um estudo e obtivesse um conhecimento inicial a respeito da prática pedagógica, Investigação Matemática. E na semana seguinte a

pesquisadora estaria presente para observar a aplicação, para assim perceber as possíveis contribuições do material em sua aula.

4.4 Aula de matemática com Investigação Matemática: aplicação do material orientador

Na manhã do dia 23 de outubro de 2018, a professora em sua aula de Matemática desenvolveu a atividade investigativa com o roteiro proposto no material de orientações sobre a Investigação Matemática. A aula foi gravada em áudio, imagens e trechos de explicações dos alunos em vídeos.

As ações e o modo como a professora regente conduziu a atividade, evidenciou as orientações tratadas no material apresentado. Primeiramente ela conversou com os alunos, expondo que o modo da aula seria um pouco diferente e que eles iriam investigar o que a atividade estava propondo em grupos para que discutissem e pensassem juntos.

Posteriormente, a professora começou a organizá-los em grupos. A turma, com um total de 23 alunos no dia da atividade, ficou então dividida em seis grupos, nos quais cinco grupos com quatro alunos e um grupo com três alunos - mesmo que no roteiro sugerisse três alunos por grupo. A professora explicou à pesquisadora (em particular) que menos grupos facilitariam no momento das orientações nos grupos e auxílio das dúvidas e, por falta de experiência dos alunos nesse ambiente de trabalhar em grupo, e algo diferente da rotina, ela optou por organizá-los desse modo. Para identificação dos grupos a pesquisadora nomeou de G1, G2, G3, G4, G5 e G6.

A Figura 5 mostra como ficou a disposição dos grupos na sala organizados pela professora da turma. Logo após, iniciou a apresentação da atividade para a investigação.

Figura 5 – Organização da turma em grupos



Fonte: A autora.

Ao iniciar, a professora retomou oralmente com os alunos, alguns conceitos básicos de polígonos - vértices, arestas e diagonais - conteúdo estudado nas aulas anteriores. E então apresentou a questão que eles iriam pensar e investigar. Escreveu no quadro e solicitou que, pelo menos um do grupo, anotasse a seguinte questão: “*Investigar quantas diagonais possuem um polígono de 20 lados*” e assim deu tempo para que os grupos pensassem e discutissem.

Esse momento caracterizou a primeira etapa do desenvolvimento da Investigação Matemática em sala de aula, apresentada por Ponte, Brocardo, Oliveira (2009) como o *arranque da aula*, pois a professora apresentou a atividade aos alunos, proporcionando algumas informações, de forma oral e escrita, dando subsídios para que pensassem no que já aprenderam, e o que eles poderiam descobrir com aquela questão.

Na etapa do *desenvolvimento do trabalho*, foi possível observar que a turma se envolveu na proposta da professora. Nesse momento, alguns grupos começaram a desenhar polígonos de 20 lados para tentar traçar as diagonais, caracterizando as *conjecturas* e posteriormente notaram a impossibilidade do esboço.

Depois de um tempo, que a professora deixou para os alunos conversarem sobre o problema, para então intervir com algumas orientações nos questionamentos dos alunos, ela viu a necessidade de apresentar alguns polígonos (como sugerido no roteiro item 4).

Assim, a professora retomou a atenção para ela, sugerindo que eles desenhassem no caderno, ou em uma folha, os polígonos de 4, 5 e 6 lados e contassem

as diagonais fazendo todas as anotações para que observassem se havia alguma relação como o número de lados dos polígonos e o número de diagonais ou seus vértices.

Visto que eles insistiam em ir direto para o desenho do polígono de 20 lados, sem a análise de uma relação, ela esboçou no quadro alguns polígonos e questionou: *“o único polígono que não tem diagonal, lembram qual é?”* e logo um aluno respondeu *“o triângulo”*. A professora elogiou e então esboçou um triângulo, no qual não haviam diagonais, esboçou também alguns quadriláteros (quadrado, retângulo, trapézio, paralelogramo e losango) evidenciando que o polígono de quatro lados sempre terá 2 diagonais, e esboçou um pentágono com suas diagonais e questionando: *“Então lembraram o que é diagonal? ... que é quando eu ligo um vértice a outro vértice [...] então vamos lá gente, voltem a pensar aí”*.

A professora orientava para que eles fizessem sempre todas as anotações do que eles iam pensando e quando ouvia algumas explicações e questionamentos dos alunos incentivava-os *“isso mesmo”, “continuem pensando”, “vocês estão no caminho certo”*. Assim, deixou mais um tempo para que eles fossem conversando e ela foi passando pelos grupos observando e questionando em algumas situações.

Os alunos chamavam bastante a professora, mas como ela demorava um tempo, por estar atendendo outros grupos, eles ansiosos chamavam também a pesquisadora que, em alguns momentos, orientou alguns grupos com questionamentos. Eles demonstravam bastante dependência nas explicações da professora.

Neste momento de discussões iniciais notamos que alguns grupos não conseguiam interagir como o esperado em um ambiente de atividade investigativa. Assim, alguns alunos iniciaram o desenvolvimento da atividade individualmente, mas no decorrer da aula a professora tentava sempre auxiliá-los para que discutissem as ideias no grupo para facilitar o desenvolvimento da atividade, e que cada um contribuísse um pouco com as descobertas. Vale ressaltar que a interação melhorou em alguns grupos, mas ainda recorrendo à professora, o que demonstrava a dependência deles.

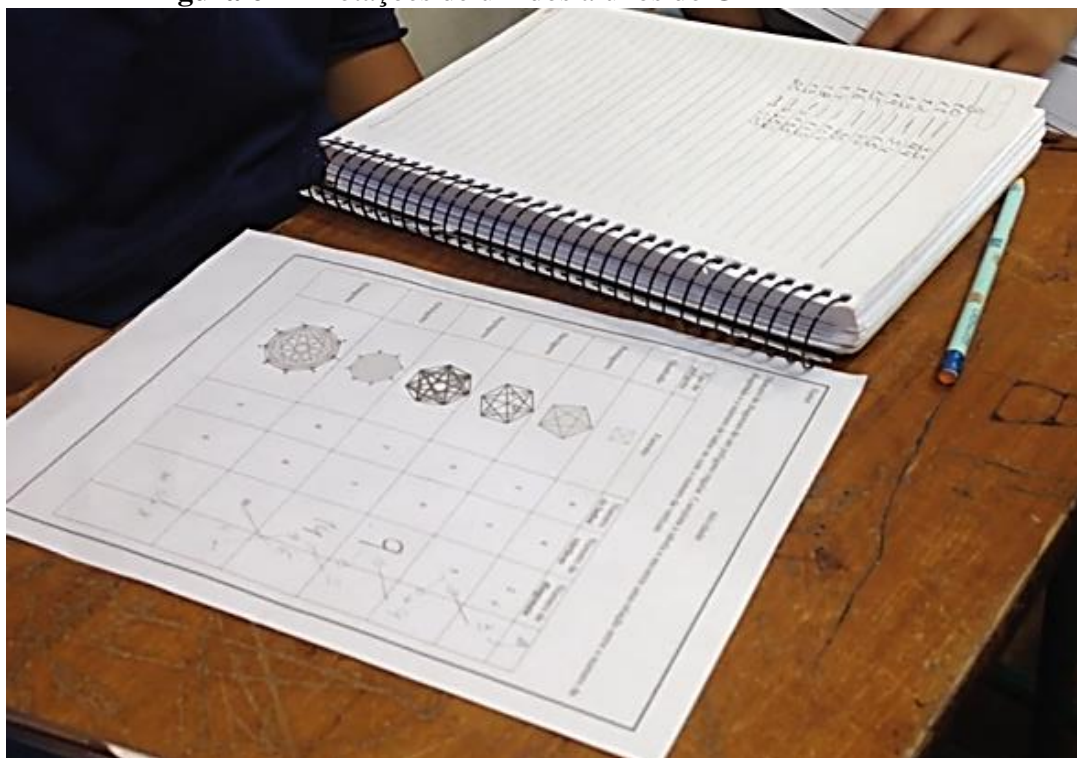
Depois de um bom tempo destinado aos alunos para pensar, discutir e questionar - visto que os alunos já haviam elaborado várias hipóteses, mas não tinham encontrado um direcionamento para a investigação - a professora viu que era momento de entregar a folha que constava no roteiro, parte mais estruturada da atividade, com o objetivo de auxiliar os alunos no desenvolvimento da investigação, para que eles não desanimassem diante das dificuldades na busca de uma solução para o desafio.

Novamente, pediu a atenção dos alunos, isso já na metade da aula, pois iria entregar uma folhinha para ajudá-los no que já haviam pensado a respeito da atividade. Disse ainda que a folhinha trazia vários polígonos, inclusive o de 20 lados, mas teriam que pensar mais um pouco em alguma relação, pois seria muito complicado traçar e contar as diagonais do polígono em estudo, dizendo “*vai comparando [...] para ver qual o padrão...tá*”.

Assim deram continuidade. No decorrer das discussões dos grupos ou individualmente, o G1 (grupo um) solicitou a presença da professora e, um dos integrantes tentou fazer a explicação do que havia pensado. Após sua tentativa de explicação, a professora tentou acompanhar com mais calma e fazendo algumas anotações na sua folha o que ele havia explicado, para tentar compreender a relação que o mesmo não conseguiu deixar claro em sua explicação à professora. Depois de um tempo, ela conseguiu entender o raciocínio, verificando que dava certo, surpreendendo a professora com o resultado da investigação.

Desse modo, apresentamos na Figura 6 as anotações do desenvolvimento da atividade.

Figura 6 – Anotações de um dos alunos do G1



Fonte: Os alunos

O aluno explicou para a professora as hipóteses que o grupo levantou na investigação, fazendo questionamentos para que ela validasse as conjecturas e conclusões pensadas pelo grupo.

A professora após compreender o raciocínio e verificar a sua validade, solicitou a atenção da pesquisadora para que ele pudesse explicar para ela também, mas não quis explicar para a pesquisadora que iria gravar sua fala sobre a investigação, “[...] *Eu explicar? Não vou explica não*”.

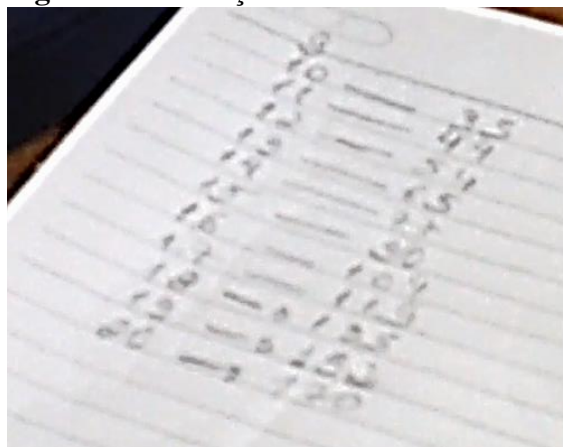
Como a professora já os conhecia, e sabia que já era uma superação apresentar a solução do problema proposto, ela preferiu verbalizar a explicação dele.

“Oh ele fez assim.. oh.. ele pegou o número de lado, né. Então tinha 4 lados, deu 2 diagonais, aí ele somou essas 2 diagonais com o número de lados do polígono anterior, então $2 + 3$ deu 5, aí esse era o pentágono, aí ele somou o número de diagonais com o número de lados do polígono anterior, $5 + 4 = 9$, e assim ele foi até chegar no... no polígono de 20 lados com 170 diagonais”.

Anotação do caderno do aluno, apresentada na Figura 7, reescrita para melhor visualização, representa respectivamente, **número de lados** do polígono e o **número de diagonais** desse polígono:

10 – 35
 11 – 44
 12 – 54
 13 – 65
 14 – 77
 15 – 90
 16 – 104
 17 – 119
 18 – 135
 19 – 152
 20 – 170

Figura 7 – Anotações de um dos alunos do G1

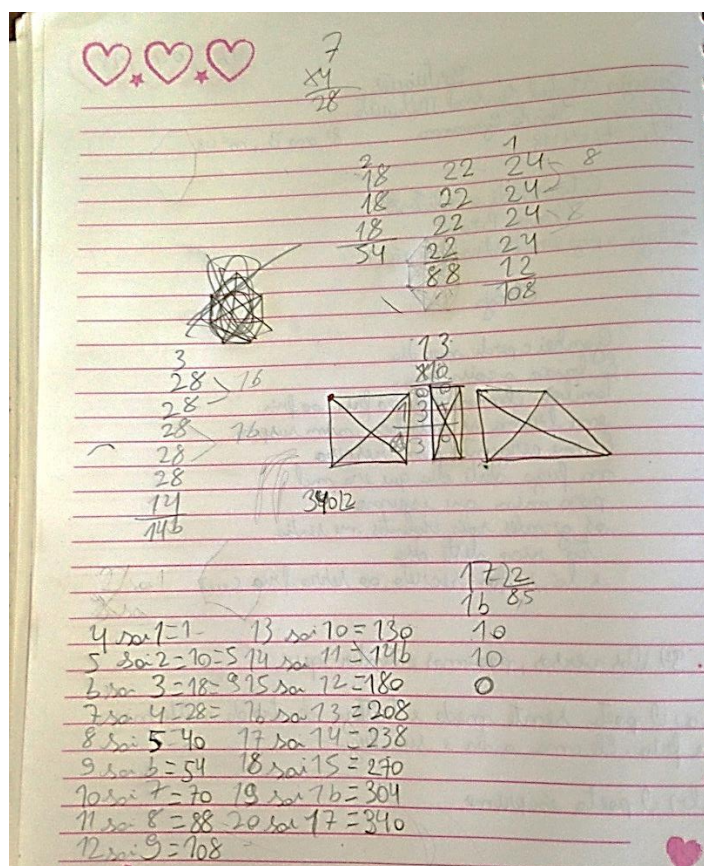


Fonte: os alunos.

A solução apresentada pelo G1 deixou a professora surpreendida, pois não considerava aquela possibilidade de solução. Empolgada, disse à pesquisadora que irá tentar trabalhar, propor mais vezes esse tipo de atividade, porque estava convencida de que os alunos são capazes de encarar o desafio e envolver-se no desenvolvimento de atividade investigativa.

Logo após o grupo - G3 - solicitou a professora e no decorrer do diálogo, a professora entendeu a explicação da aluna e notou que sua conclusão era válida para a investigação do problema proposto. A Figura 8, apresenta o rascunho onde uma aluna esboçou o raciocínio que o grupo utilizou para resolver a atividade investigativa. Foi a partir desse rascunho que uma das alunas explicou à professora como haviam pensado para resolver a atividade.

Figura 8 – Anotações de uma das alunas do G3



Fonte: Os alunos.

A professora após compreender o raciocínio e verificar a validade da explicação da aluna, solicitou novamente a atenção da pesquisadora para que ela gravasse a explicação sobre a investigação realizada pelo grupo. Muito embora um gravador tenha ficado ligado durante toda a aula, o mesmo não captou alguns momentos

importantes, a exemplo das conversas entre a professora e os grupos que estavam mais distantes do instrumento de coleta.

Assim sendo, professora solicitou à aluna que explicasse para a pesquisadora assim como havia explicado à professora, para gravar um pequeno vídeo da explicação. Pedido esse prontamente atendido pela aluna.

A aluna do G3 iniciou sua explicação, enquanto a pesquisadora fazia a gravação

“Eu vi que o número de diagonais era o dobro, aí tinha que multiplicar... não, dividir por dois. Eu vi que era por sequência os números, chegou em 17 que era o que eu queria, por 20” (Aluna do G3).

A pesquisadora então questionou: *“e como você descobriu que é 17? Por que o de 20 lados você sabia que era 17 de cada vértice?”*. A aluna então explicou:

[...] de quatro (lados) saiam um (diagonal de cada vértice), de cinco saia dois, aí fui vendo que era sequência” (Aluna do G3 – parênteses acrescentado pela autora).

A referida aluna, no entanto, não havia compreendido que a sequência que ela observou, era o número de lados do polígono menos três; a aluna visualizou a sequência observando os desenhos dos polígonos e fazendo a contagem de diagonais que saíam de cada vértice e, assim ela ainda conseguiu observar que a multiplicação desses obteria o número de diagonais do polígono, quando dividido por dois, como ela explica no trecho a seguir, ao ser questionada pela pesquisadora *“por que você dividiu por 2?”*

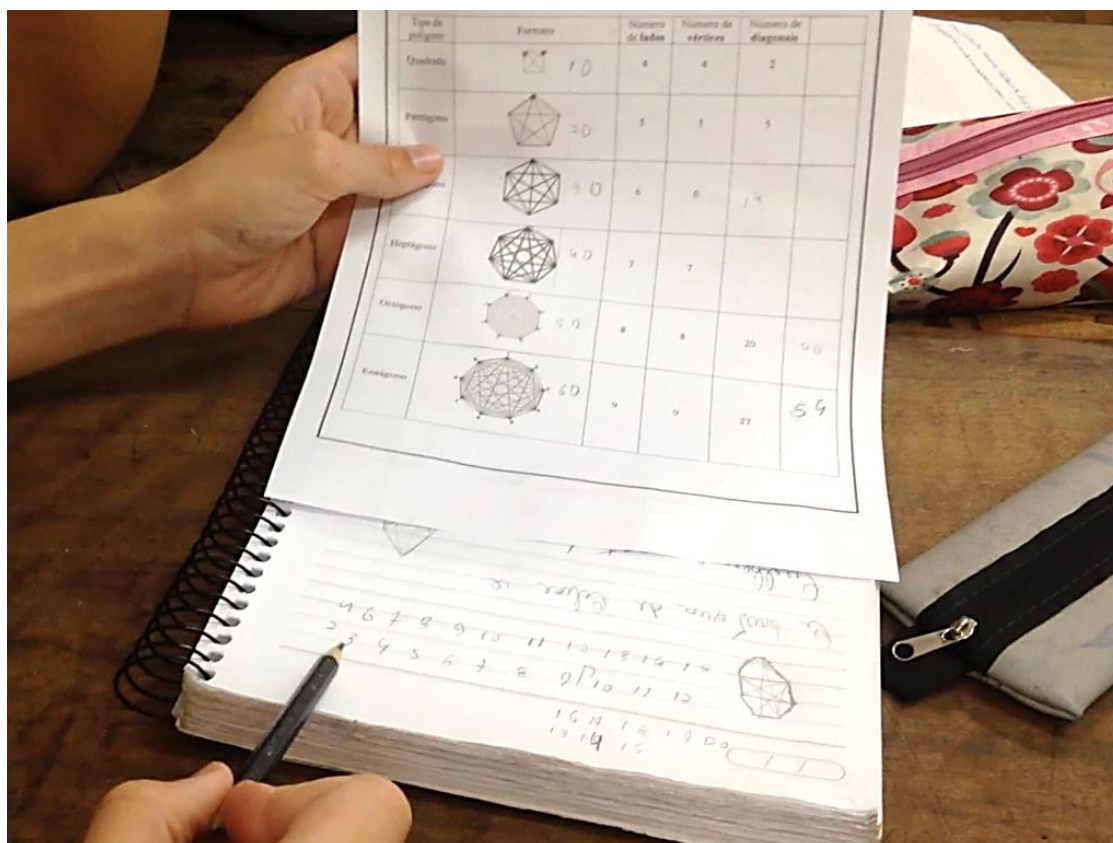
“Porque conta as diagonais o dobro que elas têm que ser, então deve ser, esse número 340, é 20 multiplicado por 17 que dá 340, teria que ser dividido por dois. [...] porque cada aresta sai 17, então ele ia contar, do mesmo jeito que uma aresta sai daqui pra cá o daqui pra cá também conta, então seria só um e não duas” (Aluna do G3).

A aluna ficou um pouco insegura e confusa em sua explicação, devido à gravação e ao afastamento da professora. Os demais integrantes do grupo não se manifestaram para ajudá-la, demonstrando que não haviam colaborado muito com o desenvolvimento do raciocínio e, também, que não haviam entendido muito bem sobre a investigação, visto que na maioria das vezes apenas a aluna solicitava e questionava a professora.

No momento em que a aluna do G3 estava fazendo sua explicação à pesquisadora, a professora que atendia o G6, já solicitou que a pesquisadora fosse observar o desenvolvimento do G6, que também havia conseguido encontrar uma solução para a investigação.

Apresentamos na Figura 9, o desenvolvimento do terceiro grupo - G6 - que encontrou uma conclusão para a atividade investigativa.

Figura 9 – Anotações de um dos alunos do G6.



Fonte: Os alunos.

Nesse grupo, quando a pesquisadora foi gravar a explicação, um dos integrantes que sempre solicitava a professora para auxiliá-los no desenvolvimento do raciocínio e nas dúvidas, fez a explicação pelo grupo. O mesmo demonstrava facilidade em compreender a situação desafiadora e sempre questionava a professora; e posteriormente, tentava explicar aos demais do grupo e tentava evoluir no que havia pensado, após orientações da professora.

Assim, o aluno apresentou o que o grupo desenvolveu para a atividade. Mostrando as anotações foi relatando:

O de 4 aqui, eu peguei... tipo assim, ele tem 4 lados, então ele tem 2 diagonais, aí fui fazendo de 4, fui fazendo o de 5, [...] o de 6 lados tem 14, aí sai 3 de cada [...] o de 7 sai quatro diagonais de cada, aí fui fazendo e cheguei no 20 e no 20 deu 17. [...] (Aluno do G6).

Pesquisadora questionou: *“E por que deu 17?”*. Ao que o aluno acrescentou: *“Porque cada um teve a diferença de 3” [...] Aí o 17 eu fiz vezes 20, que deu 320 e dividi por 2*. (O aluno se equivocou na resposta do 320, pois se confundiu, depois verificou e apresentou o resultado certo, que o grupo havia encontrado, mas não havia escrito).

Logo após a explicação do aluno, a pesquisadora questionou: *“E por que você dividiu por 2?”* O aluno demonstrou-se confuso nessa explicação *“[...] aí eu dividi no meio”*, mas não soube de imediato o porquê de ter dividido ao meio. A professora notou sua dificuldade e então auxiliou: *“[...] a mesma reta que sai de mim pra você, sai de você pra mim, aí foi por isso que você chegou a essa conclusão né”*. Mesmo com a explicação foi possível observar que não compreendeu. Assim, deixamos que o grupo pensasse mais um pouco e chegasse à sua conclusão.

Então eles voltaram a discutir mais um pouco e fizeram os cálculos que resultou em 340 e dividiram por 2, obtendo as 170 diagonais, demonstrando confiança por ter encontrado a solução para o problema.

No decorrer do desenvolvimento do G6, foi possível notar que houve mais entrosamento entre os integrantes, mesmo com certa timidez, e pouca fala de alguns integrantes.

O G4 tinha um integrante que estava conseguindo desenvolver um raciocínio lógico para solução da atividade também, mas como os demais do grupo não demonstraram envolvimento na atividade, ele não conseguiu concluir antes de finalizar a aula. O mesmo aconteceu com o G5, que não conseguiu apresentar uma conclusão. Esses grupos precisariam de mais tempo, e outras oportunidades de atividades como essa, que exigem o envolvimento do grupo para discutir e compartilhar as compreensões. Alguns alunos não conseguiram se envolver e, algumas vezes, alguns disseram *“não entendi nada”*, talvez por não terem dado o *“aceite”* para esse novo ambiente proposto.

Em um relato posterior da professora, isso também pode ter acontecido, pelo fato de não ser oportunizado momentos de trabalho em grupo, pois ela argumentou que suas aulas são mais voltadas para as aulas expositivas.

Dentre os seis grupos, três conseguiram determinar uma relação para o cálculo do número de diagonais do polígono de 20 lados.

A primeira experiência com Investigação Matemática, da professora e da turma, não contemplou a *discussão final*, momento em que expõem para toda turma a conclusão que cada grupo obteve. A falta de tempo foi um fator relevante para o fechamento com as discussões, exposição e confronto entre as ideias. Apenas os grupos que conseguiram finalizar a atividade, começaram a chamar a professora para mostrar suas soluções, já no final da aula, sem tempo para organizar uma apresentação e debate sobre essas soluções.

Esse fato evidencia que na primeira experiência com atividade investigativa pode surgir dificuldades que podem comprometer a execução de todas as etapas da Investigação Matemática. Entretanto, é importante que o professor reflita sobre as ações e as dificuldades, para assim aprimorar a sua prática em outros momentos.

Dessa forma, quando os alunos e o professor já estiverem acostumados com a investigação, haverá mais habilidade em desenvolver a atividade investigativa no tempo planejado pelo professor, isso quando tratamos de atividades investigativas estruturadas. Quando a familiaridade de ambos envolvidos for se consolidando, torna-se possível a proposta de atividades menos estruturadas, para gradativamente chegar a uma investigação aberta.

Não pensamos na possibilidade de fazer esse fechamento em um outro dia, para não desestimular os alunos que finalizaram. Seria interessante outras atividades como essa, com os quais se conseguisse desenvolver todas as etapas no mesmo dia, e assim, quando habituados com esse ambiente, talvez fosse relevante voltar em um outro momento para nova checagem.

Assim, foi possível concluir que houve Investigação Matemática, pois a maior parte da turma se mostrou disposto a desenvolver o que foi proposto pela professora. Os alunos se envolveram no trabalho, faziam questionamentos e nesse processo, em nenhum momento, a professora regente, ou a pesquisadora, forneceu respostas prontas aos alunos, mas sempre questionavam de modo que os mesmos refletissem sobre o que já tinham pensado, provocando o raciocínio e despertando a curiosidade, enquanto que propulsora da construção do conhecimento.

Nesse processo, os alunos percorreram caminhos diferentes, mas que resultaram na solução esperada pela professora diante da investigação estruturada (em que o professor conhece o resultado que devem obter).

Mesmo com algumas dificuldades no processo de desenvolvimento, tanto da professora quanto dos alunos, no trabalho em grupo e discussão de ideias, na descoberta de relações, na dificuldade da professora em auxiliar todas as solicitações dos grupos, foi possível notar no relato da professora que o material de orientações e sua primeira experiência com a Investigação Matemática foram enriquecedores. Em um relato ela argumenta:

“eu achei ele bem completo (material de orientações sobre Investigação Matemática), com entendimento fácil, tá bem explicado [...]. Na atividade sobre a Investigação Matemática que foi aplicada em sala de aula, para mim foi... foi bem prazeroso trabalhar, porque os alunos interagiram.. éé... buscaram resultado.. e .. foi muito bom, foi de grande valia, porque foi criado uma situação diferente das que acontece, do que normalmente acontece em sala de aula. Eles estão acostumados com o modelo pronto né... e nesse caso eles foram buscar como fazer, foram buscar um resultado. Então foi bem gratificante trabalhar a Investigação Matemática (P9 - parênteses acrescentado pela autora).

A professora demonstrou-se realizada com o desenvolvimento da atividade, mesmo que alguns não tenham se empenhado tanto; mas, pode-se observar o quão capazes são os alunos quando desafiados, argumentando que pretende trabalhar mais vezes e também em outras turmas.

Diante disso, podemos notar a importância do material elaborado e que esse deve ser divulgado para que esses professores tenham acesso, e até um incentivo, de um relato como esse apresentado pela professora que fez a aplicação, obtendo um resultado além do que ela esperava.

5. ANÁLISE DOS DADOS

Frente ao nosso interesse em responder o problema de pesquisa - *Como podemos contribuir para a inserção da Investigação Matemática em sala de aula?* - apresentamos algumas reflexões levando em consideração os objetivos traçados em nossa pesquisa, a aplicação do primeiro roteiro e também, o segundo, com o material de orientações sobre Investigação Matemática.

Assim, nossas reflexões são orientadas pelo interesse de:

- i. investigar se os professores de Matemática que atuam na rede pública estadual (município de Bandeirantes – PR) conhecem e/ou utilizam a Investigação Matemática em suas aulas e, para aqueles que não a utilizam, investigar quais os motivos que os impedem;
- ii. identificar, na literatura, possíveis ações do professor que contribuam para o envolvimento ativo do aluno nas atividades de Investigação Matemática;
- iii. elencar, com base na literatura, questionamentos que o professor pode fazer no ambiente de Investigação Matemática que possuem potencial para auxiliar o docente, e o aluno, no desenvolvimento da atividade;
- iv. propor instrumentos ao professor, ancorados na literatura, que possam auxiliá-lo e estimulá-lo na inserção da Investigação Matemática em sala de aula.

As seções a seguir foram estabelecidas com a finalidade de analisar os objetivos delineados nesta pesquisa. Apresentamos nossas argumentações e reflexões em relação aos tópicos. No primeiro apresentamos uma breve discussão, o segundo e o terceiro agrupamos em uma mesma análise, e no quarto, separadamente.

5.1 Conhecimentos dos docentes sobre a Investigação Matemática e se utilizam em suas aulas

Conforme vimos no item 4.1.1 e 4.1.2, descrição e uma breve discussão sobre as entrevistas realizadas com os professores de Matemática, esta foi uma etapa em que a coleta dos dados nos subsidiava sobre o que os professores de Matemática da rede pública conheciam a respeito da prática pedagógica de Investigação Matemática.

O resultado nos surpreendeu, quando deparamos com o pouco conhecimento a respeito dessa prática pedagógica. Mesmo que proposta nas DCE, os professores entrevistados não têm conhecimento e nem formação suficiente para abordar a Investigação Matemática em sala de aula. O pouco conhecimento que possuem não oferece segurança para proporem situações abertas e ainda, não conseguem aliar a teoria à prática, por ser algo que não tiveram oportunidade de vivenciar.

Assim, ao tentar introduzir uma primeira abordagem em sala de aula e fracassar, podem perder o estímulo e não persistir frente às primeiras dificuldades. Neste sentido, destacamos e concordamos com Wichnoski e Klüber (2018) sobre a importância de compartilhar as experiências, as dificuldades e anseios, pois a primeira tentativa de inovar a prática, geralmente pode gerar expectativas que resultam em fracasso, mas a persistência na mudança para novas concepções aos poucos serão aprimoradas e os resultados podem ser motivadores, quando os alunos começam a se envolver nas descobertas e observam que são capazes de construir o próprio conhecimento.

É importante ainda evidenciar aos docentes que a mudança na abordagem de práticas pedagógicas gera dificuldades e desafios no início, mas gradativamente, os alunos, e até mesmo o professor, se sentirão familiarizados com atitudes investigativas, por ser “algo muito natural do seu dia a dia” (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2009, p. 27). Com o tempo e a vivência nesse ambiente “os alunos que têm pouca ou nenhuma experiência com as investigações” (Ibidem, p. 26), se sentirão estimulados a formularem questões, responsáveis ao fazerem suas próprias descobertas e, perceberão também, que “podem contar com o apoio do professor, mas que a atividade depende, essencialmente, da sua própria iniciativa” (Ibidem, p. 28).

Diante do exposto, compreendemos a necessidade dessa prática pedagógica ser abordada em sala de aula. Estimular os professores com experiências e materiais que oferecem subsídios para desenvolver a Investigação Matemática e vivenciar as potencialidades enriquecedoras que essa prática pedagógica pode oferecer para o ensino de Matemática, para a formação do cidadão crítico e ativo na sociedade.

Assim, ao observar que os professores não utilizam a Investigação Matemática por falta de conhecimento, buscamos produzir materiais que auxiliassem os professores em seus primeiros trabalhos com a abordagem dessa prática pedagógica, apresentando atividades mais estruturadas para iniciar trabalhos com Investigação

Matemática.

5.2 Ações e questionamentos do professor que podem contribuir para o envolvimento ativo do aluno nas atividades de Investigação Matemática

Conforme apresentado no Capítulo 2 (Quadro 5), baseados em pesquisadores como Corradi (2011), Ponte, Brocardo e Oliveira (2009) e Goldenberg (1999), apresentamos ações e questionamentos que podem auxiliar o professor no desenvolvimento de atividades de Investigação Matemática.

Com isso, nossos ii e iii objetivos, os quais visam identificar, na literatura, possíveis ações do professor que contribuam para o envolvimento ativo do aluno nas atividades de Investigação Matemática; e elencar, com base na literatura, questionamentos que o professor pode fazer no ambiente de Investigação Matemática que possuem potencial para auxiliar, o docente e o aluno, no desenvolvimento da atividade, foram alcançados.

No desenvolvimento dos roteiros de atividade de Investigação Matemática observamos que as ações e questionamentos dos professores têm fundamental importância para caracterizar o ambiente de Investigação Matemática.

Assim, diante dos objetivos delineados nos itens ii e iii, analisamos as aplicações globalmente, direcionando as evidências de ações e questionamento durante as aplicações dos roteiros de atividade investigativa pelas professoras P16, que fez a aplicação do primeiro roteiro proposto na pesquisa e P9 que fez a aplicação de um segundo roteiro de atividade investigativa composto do material de orientações.

Diante dos objetivos, analisamos as etapas apresentadas na Figura 3: Arranque da aula, desenvolvimento do trabalho e discussão da investigação com conclusão final, ancorados nas ações e questionamentos apresentados no Quadro 5.

Desse modo, na primeira etapa, apresentamos no Quadro 8, a análise das ações do docente no processo inicial do desenvolvimento da Investigação Matemática em sala de aula, no arranque da aula.

Quadro 8 – Análise das ações docentes no arranque da aula

	Ações esperadas
Arranque da aula	<ul style="list-style-type: none"> • Apresentar as atividades aos alunos que, dependendo do grau de familiaridade, pode proporcionar mais ou menos informações. • As informações podem ser apresentadas de forma escrita, oral ou mista.
Aplicação do primeiro roteiro P16	
<p>P16 apresentou a atividade entregando os retângulos de papéis para a atividade investigativa de fração (roteiro apêndice II), e oralmente solicitou aos alunos <i>“eu quero que vocês pensem, pensem como vocês dividiriam esse pedaço de papel em três pedações iguais, na horizontal [...] sem régua só na dobradura”</i>. (P16).</p> <p>Consideramos que no arranque da aula a professora assumiu a caracterização de Ponte, Brocardo e Oliveira (2009), ou seja, o reconhecimento da situação e a elaboração de questões sobre a problemática e apresentação das informações de forma oral.</p>	
Aplicação do segundo roteiro após orientações do material P9	
<p>P9 iniciou a aula conversando com os alunos de modo a informar que a atividade aconteceria um pouco diferente, orientando sobre o que iriam fazer, pois não estavam familiarizados com atividades de investigação.</p> <p>Também informou aos alunos que iria organizar a turma em pequenos grupos para que pudessem trabalhar juntos. Após organizados em grupo, a professora retomou oralmente alguns conceitos básicos sobre polígonos e então apresentou a questão que eles iriam pensar e investigar. Escreveu no quadro e solicitou que pelo menos um do grupo anotasse a seguinte questão: <i>“Investigar quantas diagonais possuem um polígono de 20 lados”</i> e assim deu tempo para que os grupos pensassem e discutissem.</p> <p>Essa apresentação evidencia a etapa do <i>arranque da aula</i> caracterizada por Ponte, Brocardo, Oliveira (2009), pois a professora apresentou a atividade aos alunos, proporcionando algumas informações, de forma oral e escrita e forneceu subsídio para que pensassem no que já aprenderam e o que eles poderiam descobrir com aquela questão. Diante disso, consideramos esse momento como uma oportunidade de construir</p>	

novas concepções a partir de mobilização dos conhecimentos prévios, pois essa etapa é o momento que a apresentação do professor pode desencadear interesse dos alunos em “mobilizar e consolidar seus conhecimentos matemáticos” (CORRADI, 2011, p. 163).

Ações observadas nas aplicações

Consideramos que no arranque da aula, P9 e P16 desenvolveram as ações esperadas para esta etapa da Investigação Matemática e proporcionaram tempo para que os alunos pensassem na situação que estava sendo proposta e iniciassem o desenvolvimento do trabalho, que é caracterizado na próxima etapa.

Entretanto o professor P9, que teve o material de orientações sobre Investigação Matemática para ampará-lo nas ações a serem desenvolvidas em cada etapa, evidenciou maior segurança ao fornecer informações para familiarizar os alunos, quando retomou conceitos já estudados e estimulou a ampliação do conhecimento prévio desafiando-os a pensar e discutir sobre a questão.

Fonte: A autora

Dando continuidade às etapas da Investigação Matemática, apresentamos e analisamos as ações e questionamentos do professor no desenvolvimento do trabalho com atividade investigativa. A análise desta etapa é apresentada no Quadro 9.

Quadro 9 – Ações e questionamentos do docente no desenvolvimento do trabalho

	Ações esperadas
Desenvolvimento do trabalho	<ul style="list-style-type: none"> • Organizar a turma em pequenos grupos. • Convidar e estimular o aluno a envolver-se. • Despertar a curiosidade, usando as ideias dos alunos como propulsoras do conhecimento. • Provocar o raciocínio dos alunos, encorajando-os a elaborar explicações e relacionar as ideias com experiências anteriores, nunca desestimulando diante de uma explicação equivocada. • Auxiliar com questões orientadoras para estruturar o pensamento, dosando o apoio e as intervenções. • Incentivar os alunos perante as dificuldades para adquirir confiança no trabalho que estão elaborando. • Compartilhar as ideias entre professor e aluno num ambiente em que ambos são aprendizes. • Colocar os alunos em ação como responsáveis em

	<p>desempenhar um “papel ativo” no processo da aprendizagem.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Desafiar os alunos, conduzindo-os a buscar em sua estrutura cognitiva relações e conceitos, exercitando seu poder de observação e generalização. • Gerenciar o tempo com flexibilidade, oportunizando aos alunos o tempo de maturação, para observar, conjecturar (levantar hipóteses), abstrair, formular questões, testar conjecturas, etc. • Dar oportunidade para compreenderem que a resposta não é algo pronto, há um processo a ser desenvolvido para obterem suas conclusões, desenvolvendo a compreensão e autonomia dos envolvidos. • Desenvolver a atitude de construtor do próprio conhecimento, observando que a matemática não é um simples conjunto de técnicas.
Desenvolvimento do primeiro roteiro P16	
<p>P16 optou por deixar os alunos trabalharem individualmente, entretanto Fonseca, Brunheira e Ponte (1999) ressalta que o desenvolvimento inicial das atividades com os alunos, é momento em que a falta de habilidade com atividade desse tipo pode gerar as dificuldades e comprometer o desenvolvimento investigativo. Assim Corradi (2011) argumenta que a interação entre o grupo pode gerar reflexões que estimulam a criatividade, e juntos formulam questões e conjecturam, realizam testes e, quando necessário, reformulam e avaliam os resultados encontrados entre o grupo, com auxílio e orientações do professor.</p> <p>Como foi um trabalho inicial também para o professor, as ações dos professores se mostraram positivas e, outras vezes, negativas.</p> <p>Houve dificuldades em auxiliar os alunos individualmente para despertar a curiosidade, usando as ideias dos alunos e confrontos entre o grupo. Por essa razão, os alunos recorriam ao professor para validar suas conjecturas e alguns tentavam debater com os colegas, mas a professora logo pedia que fizessem silêncio. O fato de não organizá-los em grupos pode ter sido um fator que gerou um pouco de impaciência dos alunos, visto que queriam mostrar suas conjecturas à professora, e vários deles solicitavam sua atenção ao mesmo tempo.</p> <p>Observamos a ação de P16, ao provocar o raciocínio encorajando-os a elaborar explicações, no momento em que voltou à exploração inicial da pintura das partes sugeridas no roteiro, solicitando que os alunos pintassem mais uma parte das três</p>	

(ficando duas partes pintadas). Assim, P16 questiona sobre qual seria o resultado da adição (colocando no quadro a adição de um terço mais um terço) solicita que olhassem na folhinha (que tinham feito as divisões das três partes e pintado duas), levando os alunos a analisarem e elaborarem explicações: *“o que vocês acham que está certo? Dois de três ou dois de seis?”*.

Esse momento foi importante para que os alunos pudessem observar e generalizar que o número de baixo é o número de partes divididas. Sendo assim, conseguiram concluir que somar frações com denominadores iguais, no resultado permanecerá igual, pois só irá acrescentar ou fazer a soma das partes pintadas.

Em outro momento, a professora entregou mais uma folhinha para que fizessem a divisão das quatro partes e solicitou que pintassem uma das quatro partes, como sugerido no roteiro. Porém, alguns alunos pintaram duas partes e a professora pediu que fizessem novamente para que todos conseguissem chegar a um mesmo resultado.

Dado que se tratava de uma proposta investigativa, seria interessante que os alunos encontrassem respostas diferentes e o professor proporcionasse a oportunidade dos alunos adquirir confiança e autonomia, incentivando para que elaborassem suas próprias conclusões.

Compreendemos que a professora não desempenhou algumas ações (como as ações esperadas no sexto, décimo primeiro e décimo segundo itens), por falta de conhecimento das ações a ser desempenhadas no desenvolvimento da prática pedagógica de Investigação Matemática, bem como tratava de uma primeira experiência, entendemos também a insegurança do professor no momento de orientar os alunos, quando não permitiu que tomassem caminhos diferentes do que tinha sido planejado, inibindo ações enriquecedoras que oportunizariam aos alunos momento de encontrar respostas as suas dúvidas e explicações para suas conclusões.

Neste sentido, a partir das constatações apresentadas, é importante ter consciência que a primeira experiência gera muitos desafios, mas quanto mais o professor desenvolver atividades de Investigação Matemática em suas aulas, mais experiência adquire no desenvolvimento dessa prática. Com isso, os alunos também ganham confiança nesse processo, e ao superarem os desafios, podem melhorar a participação, a discussão de conjecturas entre alunos, e também com o professor, em um ambiente onde ambos são aprendizes.

Ao observar o desenvolvimento da atividade notamos que apenas o roteiro não foi suficiente para o professor no desempenho de ações que podem contribuir para a prática pedagógica de Investigação Matemática, impedidas pela falta de conhecimento teórico, conduzindo o desenvolvimento com o “risco de a proposta de trabalho investigativo resultar na simples aplicação de procedimentos rotineiros” (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2009, p. 10).

Desenvolvimento do segundo roteiro com o material de orientações P9

Após apresentada a atividade e os grupos já formados, P9 deixou um tempo para que eles pensassem e discutissem. P9 foi andando pelos grupos e, como já esperado, iniciaram com esboços do polígono de 20 lados. Sem desmotivá-los P9 dizia: *“muito bem, mas e se vocês comessem a analisar os polígonos de menos lados?”*.

Consideramos que P9 tentou provocar o raciocínio dos alunos, encorajando-os a elaborar explicações, e relacionar as ideias com outros polígonos para facilitar a compreensão do que estavam conjecturando, sem desestimulá-los diante do que os alunos estavam pensando.

No decorrer do desenvolvimento, e diante da insistência dos alunos ao tentarem esboçar o polígono de 20 lados e traçar suas diagonais, antes que perdessem o entusiasmo em descobrir, ela retomou a atenção da turma, sugeriu que desenhassem polígonos de 4, 5 e 6 lados e contassem as diagonais. Esse episódio revela indícios da ação de provocar o raciocínio, para que percebessem alguma regularidade.

Os alunos solicitavam bastante a professora, na expectativa de que os ajudassem, entretanto ela indagava-os pedindo explicação, estimulando que conversassem entre eles. Contudo, eles tinham certa dificuldade em interagir, muitas vezes tentavam fazer sozinhos, mesmo estando em grupo, e com orientações da professora para que discutissem juntos.

Esse fato é esperado por ser o primeiro momento, pois não estavam familiarizados com a investigação e nem em desenvolver ativamente seu papel de construtor do próprio conhecimento.

Mesmo diante das dificuldades encontradas pelos alunos e, até mesmo pelo professor no momento de auxiliá-los, foi possível notar que o material de orientações sobre Investigação Matemática e o roteiro trouxeram informações importantes que auxiliaram nas ações no desenvolvimento desta etapa.

Os grupos conseguiram elaborar conjecturas diferentes para solucionar a

questão proposta, o que surpreendeu a professora, que pode observar o quão são capazes de apresentar soluções. Essa experiência oportunizou à professora conhecer as potencialidades que os alunos podem desenvolver nesse ambiente de Investigação Matemática e, mesmo com algumas dificuldades no desenvolvimento do trabalho, a professora ficou estimulada em trabalhar mais atividades investigativas.

Ações observadas nas aplicações

Em suma, na aplicação de P16, observamos que houve indícios das ações elencadas no quarto, quinto, oitavo e nono itens das ações esperadas.

Já P9, com base nas orientações do material, só não tiveram grandes evidências as ações elencadas nos itens sétimos e décimo.

Fonte: A autora

E por fim, no Quadro 10, analisamos as ações e questionamentos do professor - P16 - que foram evidenciadas nas aplicações, caracterizando a última etapa da Investigação Matemática, apresentada por Ponte, Bocado e Oliveira (2009) como a discussão final.

Quadro 10 – Análise das ações e questionamentos docente na conclusão da investigação

	Ações esperadas
<p>Discussão da investigação e conclusão final</p>	<p>Criar um ambiente com o “grupo maior” propício a:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Verbalizar: expor e explicar o pensamento e raciocínio elaborados, assim como suas conclusões. • Troca de ideias. • Confrontar opiniões e argumentos, onde o receio de “arriscar” conjecturas é relativamente reduzido. • Validar o raciocínio obtido por meio da discussão. • Elaborar relatórios finais. Esse momento faz com que os alunos reflitam sobre o trabalho realizado estruturando as ideias; e, ao professor, recolher o registro de informações sobre o nível de desenvolvimento da atividade. <p>Esse ambiente conta com orientações e auxílio do professor em busca do fechamento da atividade.</p>

Discussão da investigação e conclusão final do primeiro roteiro P16

Indícios da configuração desse momento ocorreram quando a professora convidou um dos alunos que conseguiu realizar a dobradura para ir à frente da sala e explicar aos demais como fez. Esse momento foi uma tentativa de socializar, expor e explicar o pensamento e raciocínio elaborados, assim como suas conclusões.

Corradi (2011, p. 171) expõe que “durante a fase de discussão o professor tem a função de moderador e orientador, cabe-lhe estimular a comunicação entre os alunos explicando as suas ideias e conclusões”, no sentido de compartilharem suas estratégias, desenvolver a habilidade da comunicação matemática, participando das intervenções e confrontando suas conjecturas, refletindo sobre suas justificativas e validando-as.

Porém, não foi oportunizada a troca de ideias, onde outros pudessem expor outro raciocínio, para confronto e discussão sobre outras possibilidades de solução, configurando como resposta única, “definições prontas, nomenclatura obsoleta” (LOPES, 2008, p.7).

O pouco entendimento sobre a prática pedagógica de Investigação Matemática revelou a necessidade de oportunizar mais materiais que pudessem subsidiar a proposta para professora em sala de aula, como um curso para socialização entre mais professores, participação de experiências com atividades da Investigação Matemática, para conhecer os objetivos, e assim, o roteiro poderia ser conduzido com mais caracterização das ações no desenvolvimento da Investigação Matemática.

Discussão da investigação e conclusão final do segundo roteiro com o material de orientações P9

Não houve o momento para a discussão final entre toda a turma, no qual é oportunizado o confronto de opiniões e argumentos, para validar e observar que há possibilidades diferentes para resolver um problema. A falta de tempo foi um fator relevante para realizar o fechamento com as discussões, exposição e confronto entre as ideias.

Apenas três, dos seis grupos, conseguiram finalizar o objetivo da atividade, encontrando uma maneira de calcular o número de diagonais do polígono de 20 lados e chamavam a professora para mostrar suas soluções, já no final da aula, sem tempo para organizar uma apresentação e debate sobre as diferentes soluções encontradas por cada grupo.

Assim, as reflexões sobre como cada grupo chegou à conclusão da atividade ficou restrito ao grupo e às explicações que fizeram à professora, perdendo a oportunidade de valorizar as discussões, as trocas de ideias e argumentações sobre os raciocínios utilizados no processo da descoberta.

Ações observadas nas aplicações

As ações de P9 nessa etapa foram comprometidas pela dificuldade em gerenciar o tempo com flexibilidade, no momento da etapa anterior, no qual constatamos que a décima ação não foi evidenciada.

Já P16, revelou indícios do primeiro item das ações esperadas para esta etapa, entretanto P16 não teve acesso às orientações tratadas no material de orientações sobre as importantes ações a serem desenvolvidas na conclusão final.

Fonte: A autora

Por fim, na próxima seção discorreremos a respeito do nosso último objetivo.

5.3 Instrumentos que podem auxiliar e estimular o professor na inserção da Investigação Matemática em sala de aula

Nosso quarto objetivo consistiu no desenvolvimento de instrumentos que orientassem e auxiliassem o professor na inserção da Investigação Matemática em sala de aula. Esse material foi pensado para uma proposta inicial ao ambiente investigativo, enquadrado em um grau de complexidades reduzido, no qual o professor possui em mãos a estrutura da aula, contendo orientações que guiam alguns procedimentos a serem desenvolvidos em sua prática no desenvolvimento da atividade investigativa.

Neste sentido, o material elaborado no decorrer desta pesquisa, consistiu em apresentar ao professor os primeiros encaminhamentos da Investigação Matemática em sala de aula e, dentre as diversas maneiras de inserir essa prática pedagógica no ensino de Matemática, apresentamos o material de orientações ao docente juntamente com roteiros de atividades investigativas estruturadas, caracterizamos na seção 2.3.4, que consiste em familiarizar o professor e o aluno no ambiente investigativo. Tais encaminhamentos compõem nosso produto educacional.

O material composto pelos roteiros de atividades investigativas estruturadas, são orientações iniciais, que abordam procedimentos para auxiliar o professor na

apresentação e condução da atividade aos alunos, contendo a questão a investigar e ações docentes que podem despertar nos alunos habilidades de conjecturar, questionar, justificar, validar suas hipóteses para obter soluções da investigação, para a qual não se tem uma resposta pronta.

Essas sugestões são pensadas para que o professor tenha contato com a proposta, visando estimular as potencialidades que esse ambiente pode proporcionar para formação do aluno, diante das ações que o professor pode desenvolver para despertar as habilidades de investigar, de pensar, de elaborar indagações a fim de mobilizar e enriquecer a capacidade de argumentar, “influenciando indiretamente o raciocínio em todas as outras áreas do conhecimento” (CUNHA, 2009, p. 2).

Após a aplicação e análise do material elaborado e os roteiros, observamos a necessidade de reconstruí-lo e reorganizá-lo, para favorecer novas aplicações. Assim sendo, acreditamos no potencial do material ao ser recriado, fornecendo subsídios para novas propostas à luz da Investigação Matemática.

Diante disso, acreditamos que as atividades investigativas estruturadas e o material de orientações sobre Investigação Matemática, apresentados nessa pesquisa configuram-se como o fio condutor para que posteriormente o professor crie e amplie suas próprias atividades de Investigação Matemática, aumentando o grau de complexidade da atividade gradativamente, até que os alunos aprendam a conduzir uma investigação aberta, visto que a prática pedagógica da Investigação Matemática oportuniza “experiências diversificadas” que podem enriquecer e estimular um ambiente de aprendizagem, promovendo “o desenvolvimento de atitudes e valores como o gosto pela Matemática, a autonomia e a cooperação” (PONTE; BOAVIDA; GRAÇA; ABRANTES, 1997, p. 1), habilidades importantes para formação do cidadão críticos e para um ofício profissional a exercer.

6. PALAVRAS FINAIS

O estudo realizado teve como finalidade conhecer as ações docentes que contribuem para o desenvolvimento de atividades investigativas em sala de aula, na concepção do ensino de Matemática, por esse fato amparamos nosso referencial teórico em Ponte, Brocardo e Oliveira (2009) que trata sobre a Investigação Matemática. Assim, descrevemos potencialidades e desafios do ensino de Matemática mediado pela prática pedagógica de Investigação Matemática.

Foram coletados dados que permitissem esclarecer questões relativas ao problema de pesquisa - *Como podemos contribuir para a inserção da Investigação Matemática em sala de aula?* - e, a partir das reflexões apontadas e compreensões construídas ao longo desse estudo, observamos o potencial do material elaborado, com intuito de introduzir a prática pedagógica de Investigação Matemática em sala de aula, pois apesar das dificuldades reveladas na primeira experiência, os resultados indicaram que as professoras que aplicaram, reconheceram a necessidade de trabalhar mais atividades investigativas para familiarizar os alunos e, assim aprimorassem suas ações e questionamentos nesse ambiente.

O processo de inserção de atividades investigativas deve acontecer de modo paulatino e, à medida que os alunos se ambientarem com a proposta, o grau de complexidade das investigações pode ir aumentando. Isso pode estimular os alunos e afetar positivamente no processo de aprendizagem, e o professor a superar os desafios do “movimento de uma zona de conforto para uma zona de risco” (SKOVSMOSE, 2000, p. 17), desenvolvendo uma prática pedagógica reflexiva, e adquirindo uma nova atitude sobre seu papel de mediador e orientador, que conduz o aluno à construção do conhecimento.

Ponte, Brocardo e Oliveira (2009) argumentam que atividades de investigativas requerem envolvimento ativo do aluno, e quando ele desenvolve essa responsabilidade tende a favorecer o processo de aprendizagem, visto que, nessa abordagem os alunos são convidados a formular as questões a serem investigadas, a elaborar conjecturas num processo de provas e refutamento e apresentar esse processo de descoberta para os colegas e professor, discutindo e argumentando sobre os resultados obtidos. Mesmo que alguns não tenham se empenhado tanto no primeiro momento, no tempo oportuno com incentivo do professor, podem também perceber o

quão são capazes de elaborar conjecturar, questionar, justificar, validar suas hipóteses para obter soluções na investigação para a qual não se tem uma resposta pronta.

Os resultados obtidos em nossas observações e análises colocam em evidência que as mudanças nas concepções de ensino do professor não acontecem só em querer desenvolver algo diferente do tradicional, faz-se necessário conhecer teorias e vivenciar experiências. Desse modo, quando o professor tem a oportunidade de vivenciar esse ambiente, pode deparar-se com resultados motivadores e surpreendentes, como o envolvimento dos alunos na atividade e capacidade que eles demonstram quando desafiados, momento que não é evidenciado em aulas expositivas.

Assim, disseminar e oportunizar o conhecimento de práticas pedagógicas diferenciadas pode gerar reflexões que estimulam o professor a valorizar seu papel de orientador na aprendizagem dos alunos. Em vista disso, quando percebem que os alunos se envolvem, mesmo que muitos timidamente no início, a superação das dificuldades e desafios podem despertar habilidades que se desenvolvem num processo de conjecturas e descobertas.

Por outro lado, a falta de material pode ser um dos fatores que impedem a aplicação de atividades de Investigação Matemática, pois como argumenta Wichnoski e Klüber (2015) é um tema de estudo recente no Brasil e há poucas pesquisas que propõem orientações e materiais para professores se aprofundarem.

Assim, evidenciamos a importância de pesquisas nesta área e produção de materiais com atividades investigativas, a fim de orientar e incentivar professores de Matemática sobre as potencialidades que podem ser desenvolvidas no ambiente de Investigação Matemática.

A busca por mudanças de concepções vem ao encontro das propostas preconizadas nos documentos oficiais de orientações curriculares, como a BNCC argumenta sobre a importância de “considerar o papel heurístico das experimentações na aprendizagem da Matemática” (BRASIL, 2018, p. 261).

Diante disso, reconhecemos ainda que há muitos fatores que influenciam um ensino e aprendizagem de qualidade e, Ponte (2003, p. 22) argumenta ainda, que a Investigação Matemática não é a solução que irá “resolver de uma vez por todas todos os problemas da educação” (Ibidem, p. 23), visto que “com alguma margem de certeza é que tal solução não existe” (Ibidem, p. 23). Entretanto, evidencia o fato de que a “investigação tem as suas potencialidades, mas também tem os seus limites” (Ibidem, p. 23) e isso não invalida a “poderosa forma de construção do conhecimento tanto para o

aluno como para o professor” (Ibidem, p. 23), que com o tempo desenvolverá mudanças, tanto na prática de ensino quanto na dinâmica da aula, quebrando a rotina tradicional, superando os desafios de propor práticas pedagógicas diferentes da tradicional.

Em razão disso, este estudo, o qual não teve por intenção esgotar a temática, permite ainda apresentar sugestões para possíveis caminhos de estudos futuros. Com efeito, começam-se por destacar novas pesquisas referentes às mudanças de concepções dos alunos diante da influência das ações e questionamentos de um professor mediador e orientador no processo de aprendizagem.

Sugere-se também continuar estudos com os professores que ainda não tiveram a oportunidade de conhecer mais sobre as potencialidades da Investigação Matemática e se suas concepções. Além do mais, seria desejável que as professoras que já tiveram uma primeira experiência, trocassem ideias com os professores que ainda não conhecem essa experiência vivida e colaborassem com estes na introdução da Investigação Matemática em sua prática de ensino, para que se possa expandir para maior número de professores, e aprimorar cada dia mais essa prática enriquecedora, quando bem encaminhada e fundamentada.

Além disso, outra proposta relevante é iniciar atividades investigativas também nos Anos Iniciais, pois acreditamos que será um campo fértil e promissor elaborar pesquisas com esse foco no início da jornada escolar de nossos alunos.

7. REFERÊNCIAS

- ASSIS, A; FRADE, C.; GODINO, J. D. **Influência dos padrões de interação didática no desenvolvimento da aprendizagem Matemática: análise de uma atividade exploratório-investigativa sobre sequências.** Bolema [online]. 2013, vol.27, n.47, pp.733-758. ISSN 0103-636X. <http://dx.doi.org/10.1590/S0103-636X2013000400003>.
- BAPTISTA, M. L. M. **Concepção e implementação de actividades de investigação: um estudo com professores de física e química do ensino básico.** 2010. 561 f. Tese (doutorado em Educação) – Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Lisboa. 2010. Disponível em: <<http://repositorio.ul.pt/handle/10451/1854>> Acesso em: 20 jun. 2018.
- BARBOSA, J. C. **A Prática dos alunos no ambiente de Modelagem Matemática: O esboço de um *framework*.** 256 p., Cap. 10, 2007.
- BOGDAN, R. C.; BIKLEN S. K. **Investigação qualitativa em educação.** Tradução: ALVAREZ, M. J., SANTOS, S. B., BAPTISTA, T. M. Portugal: Porto Editora, 1994. Disponível em: <<https://docente.ifrn.edu.br/albinonunes/disciplinas/pesquisa-em-ensino/investigacao-qualitativa>> Acesso em: 31 jun. 2018.
- BRASIL. Secretária de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais - Ensino de quinta a oitava séries: Matemática.** 148 p. Brasília: MEC/ SEF, 1998.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular – BNCC - 2ª versão.** Brasília, DF, 2018.
- BRAUMANN, C. **Divagações sobre investigação matemática e o seu papel na aprendizagem da matemática.** In J. P. Ponte, C. Costa, A. I. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo, & A. F. Dionísio (Eds.), *Actividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores.* p. 5-24. Lisboa: SEM-SPCE, 2002.
- BROCARD, J. **Investigações na aula de matemática: A história da Rita.** In I. C. Lopes, J. Silva, P. Figueiredo (Eds.), *Actas ProfMat.* p. 155-161. Lisboa: APM, 2001.
- CACIOLLATO, L; FERRUZZI, E. C. **Investigação Matemática, tangram e área de figuras planas.** VI SINECT – Simpósio Nacional de Ensino de Ciência e Tecnologia – UTFPR, Ponta Grossa, 2018. Disponível em: <<http://www.sinect.com.br/2018/selecionados.php>>
- CASTRO, J. F. **Um estudo sobre a prática em um contexto de aulas investigativas de matemática.** Campinas, SP, 2004. 197 f. Dissertação (Mestrado em Educação: educação matemática) – Setor de Ciências Humanas, FE, UNICAMP, 2004.
- CORRADI, D. K. S. **Investigações Matemáticas.** Revista da Educação Matemática da UFOP, Vol I, 2011 - XI Semana da Matemática e III Semana da Estatística, 2011. ISSN 2237-809X. p. 162-175.

CUNHA, D. S. I. **Investigações geométricas: desde a formação do professor até a sala de aula de matemática.** Dissertação (mestrado) 98f. – UFRJ/IM. Rio de Janeiro, 2009.

D'AMBRÓSIO, B. S. **Formação de professores de matemática para o século XXI: o grande desafio.** Pró-Posições, Campinas, v. 4, n 1 [10], p. 35-41, 1993.

D'AMBROSIO, B. S. **Como ensinar matemática hoje?** Temas e Debates. SBEM. Ano II. N2. Brasília. p. 15-19. 1989. Disponível em: <https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/1953133/mod_resource/content/1/%5B1989%5D%20DAMBROSIO%2C%20B%20-%20Como%20Ensinar%20Matem%2C%20A1tica%20Hoje.pdf> Acesso em: 02 fev. 2018.

FAZENDA, I. C. A. **Interdisciplinaridade: História, teoria e pesquisa.** 15. ed. (Coleção Magistério: Formação e Trabalho Pedagógico). Campinas, SP: Papyrus, 1994.

FERRUZZI, E. C.; BORSSOI, A. H.; SILVA, K. P. **Investigação Matemática em foco: evidenciando possibilidades para a sala de aula.** VI SINECT – Simpósio Nacional de Ensino de Ciência e Tecnologia – UTFPR, Ponta Grossa, 2018. Disponível em: <<http://www.sinect.com.br/2018/down.php?id=4089&q=1>>

FONSECA, H. **Os processos matemáticos e o discurso em actividades de investigação na sala de aula.** Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa. Lisboa: APM. 2000.

FONSECA, H., BRUNHEIRA, L., PONTE, J. P. **As actividades de investigação, o professor e a aula de Matemática.** Actas do ProfMat. Lisboa: APM, 1999.

GODOY, A. S. **Introdução à pesquisa qualitativa e suas possibilidades.** Revista de Administração de Empresas, v. 35, n. 2, p. 57-63, 1995.

GOLDENBERG, E. P. **Quatro funções da investigação na aula de Matemática.** In: ABRANTES, P., PONTE, J. P., FONSECA, H., BRUNHEIRA, L. Investigações matemáticas na aula e no currículo (pp. 35-49). Lisboa, 1999.

LEÃO, D. M. M. **Paradigmas contemporâneos de educação: Escola tradicional e escola construtivista.** Cadernos de Pesquisa, n° 107, p. 187-206, julho/1999. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/cp/n107/n107a08.pdf>. Acesso em: 13 ago. 2018.

LOPES, A. J. **O que Nossos Alunos Podem Estar Deixando de Aprender sobre Frações, quando Tentamos lhes Ensinar Frações.** Bolema, Rio Claro (SP), Ano 21, n° 31, p. 1 a 22, 2008.

MILANI, R. **“Sim, Eu Ouvi o que Eles Disseram”: o Diálogo como Movimento de Ir até Onde o Outro Está.** Bolema [online]. 2017, vol.31, n.57, pp.35-52. ISSN 0103-636X. <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a02>.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. **Diretrizes Curriculares da Educação**

Básica. Curitiba: SEED, 2008.

OLIVEIRA, H. M. **Atividades de Investigação na Aula de Matemática:** aspectos da prática do professor. Lisboa, 1998.

OLIVEIRA, H.; PONTE, J. P.; SANTOS, L.; BRUNHEIRA, L. **Os professores e as atividades de investigação.** In: In Abrantes, P.; Ponte, J. P.; Fonseca, H.; Brunheira, L. (Orgs.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo.* (pp. 97-110), Lisboa: APM, 1999.

PIRES, A. L. O. **Educação e formação ao longo da vida: Análise crítica dos sistemas e dispositivos de reconhecimento e validação de aprendizagens e de competências.** Dissertação apresentada para obtenção do Grau de Doutor em Ciências da Educação, pela Universidade Nova de Lisboa, Faculdade de Ciências e Tecnologia. Lisboa, 2002. Disponível em: https://ec.europa.eu/epale/sites/epale/files/pires_2002.pdf. Acesso em: 12 ago. 2018.

PONTE, J. P. **Investigar, ensinar e aprender.** In: Actas do ProfMat, (CD-ROM, pp. 25-39). Lisboa: APM, 2003. Disponível em: [http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/03-Ponte\(Profmat\).pdf](http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/03-Ponte(Profmat).pdf) Acesso em: 20 jan. 2017.

PONTE, J. P. **Tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática** 1ª edição - Práticas Profissionais dos Professores de Matemática. Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. 2014. Disponível em: www.ie.ulisboa.pt

PONTE, J. P., BOAVIDA, A., GRAÇA, M., ABRANTES, P. **4 - A DINÂMICA DA AULA DE MATEMÁTICA.** Didáctica da Matemática. Lisboa: Departamento do Ensino Secundário, Ministério da Educação - 1997.

PONTE, J. P.; BROCADO, J; OLIVEIRA, H. **Investigação Matemáticas na Sala de Aula.** 2ª ed. 160 p. Belo Horizonte: Autêntica, 2009.

PONTE, J. P.; OLIVEIRA, H.; BRUNHEIRA, L.; VARANDA, J. M. **O trabalho do professor numa aula de investigação matemática.** *Quadrante*, 7(2), 41-70, 1998. Disponível em: http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/3042/1/98-Ponte%20etc%20Quadrante-MPT_.pdf Acesso em: 02 fev. 2018.

RICHARDSON, R. J. **Pesquisa social: métodos e técnicas.** São Paulo: Atlas, 1999.

ROLDÃO, M. C. **Função docente: natureza e construção do conhecimento profissional.** *Revista Brasileira de Educação* v. 12 n. 34 jan./abr. 2007.

SASSERON, L. H. **Interações discursivas e investigação em sala de aula: o papel do professor.** In: CARVALHO, A. M. P. (Org.). *Ensino de Ciências por investigação: condições para implementação em sala de aula.* 1ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013, p. 41-62. Disponível em: https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/81246/mod_resource/content/1/Texto%206%20-%20Intera%C3%A7%C3%B5es%20discursivas.pdf. Acesso em: 21 fev. 2018.

SILVA, K. A. P.; VERTUAN, R. E. **Um estudo sobre as intervenções docentes em contextos de atividades investigativas no âmbito de aulas de Matemática do Ensino Superior.** Ciênc. Educ., Bauru, v. 24, n. 2, p. 501-516, 2018.

SKOVSMOSE, O. **Cenários para investigação.** Bolema, n° 14, pp. 66 a 91, 2000.

Disponível em: <

[http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/textos/skovsmose\(Cenarios\)00.pdf](http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/textos/skovsmose(Cenarios)00.pdf)>. Acesso em: 20 mai. 2017.

TUDELLA, A.; FERREIRA, C.; BERNARDO, C.; PIRES, F.; FONSECA, H.; SEGURADO, I.; VARANDAS, J. **Dinâmica de uma aula com investigações.** In (org.) Investigações Matemáticas na aula e no currículo, p. 87-96, 1999.

VARANDAS, J. M. **Avaliação de investigações matemáticas. Uma experiência.** (tese de Mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM, 2000.

VASCONCELOS, C. C. **Aprender a Investigar- Investigar para Aprender: As atividades de Investigação no Processo de Ensino-Aprendizagem.** In : do Instituto Superior Politécnico de Viseu- Junho de 1996 - n° 3. 2ª ed. pp. 41- 58.

WICHNOSKI, P.; KLÜBER, T. E. **Uma revisão crítica da tendência1 investigação matemática no Brasil.** XIV CIAEM-IACME, Chiapas, México, 2015.

WICHNOSKI, P.; KLÜBER, T. E. **Investigações Matemáticas na Educação Matemática: Uma experiência na formação inicial de professores.** *Revista de Educação Matemática*, São Paulo, v. 15, n. 18, p. 69-83, jan. /abr. 2018. Uma publicação da Regional São Paulo da Sociedade Brasileira de Educação Matemática.

ANEXOS

Anexo I – Termo de Consentimento Livre e Esclarecido - TCLE -

Título da pesquisa: Investigação Matemática: Ações docentes para a promoção de interações dialógicas.

Pesquisador(es) responsável pela pesquisa: Prof^a. Jéssica Concentino

Orientadora responsável: Prof^a. Dr. Elaine Cristina Ferruzzi

Local de realização da pesquisa: Departamento de Matemática, Universidade Federal Tecnológica do Paraná (UTFPR).

Endereço e telefone do local: Av. dos Pioneiros, 3131, Londrina/PR. Tel.: (43) 3315 6100.

A) INFORMAÇÕES AO PARTICIPANTE

1. Apresentação da pesquisa.

A entrevista é referente à coleta de dados para a pesquisa de Mestrado da proponente, desenvolvido sob supervisão da Prof^a. Dr. Elaine Cristina Ferruzzi, da Universidade Federal Tecnológica do Paraná – UTFPR/ Londrina.

Essa pesquisa tem a intenção de propor a Investigação Matemática como uma possibilidade de ação pedagógica para professores que atuam na Educação Básica, de modo que reflitam sobre sua prática, sobre a perspectiva investigativa e interações dialógicas.

2. Objetivos da pesquisa.

Discutir sobre a importância da interação dialógica que a Investigação Matemática pode promover num ambiente investigativo e produzir roteiros de atividade investigativa para auxiliar professores na aplicação e na prática.

3. Participação na pesquisa.

Os participantes da entrevista são professores de Matemática da Rede Estadual.

4. Confidencialidade.

Os nomes dos participantes serão omitidos com vista às garantias de sigilo e privacidade.

5. Riscos e Benefícios.

5a) Riscos: Considera-se um risco mínimo de constrangimento durante a coleta de dados, podendo o participante negar a fornecer os dados solicitados.

5b) Benefícios: Tendo como um dos eixos centrais ações pedagógicas para o ensino de Matemática, essa pesquisa trará contribuições para a pesquisadora com resultados que ofereçam subsídio nos aspectos teórico-metodológico no âmbito da Investigação Matemática e para elaboração de materiais que auxiliem a prática pedagógica de professores.

6. Critérios de inclusão e exclusão.

Serão incluídos na entrevista todos os professores de Matemática da rede Estadual do Município de Bandeirantes.

7. Direito de sair da pesquisa e a esclarecimentos durante o processo.

O participante tem o direito a deixar o estudo a qualquer momento e de receber esclarecimentos em qualquer etapa da pesquisa, bem como a liberdade de recusar ou retirar o consentimento sem penalização.

8. Ressarcimento ou indenização.

A pesquisa não tem custo para os participantes e, portanto, não inclui ressarcimento, mas esta situação deve estar clara. Contudo, o direito a indenização é obrigatória, se

eventualmente a pesquisa ocasionar algum tipo de dano ao participante, comprovando por meio de provas e meios legais.

B) CONSENTIMENTO

Eu declaro ter conhecimento das informações contidas neste documento e ter recebido respostas claras às minhas questões a propósito da minha participação direta (ou indireta) na pesquisa e, adicionalmente, declaro ter compreendido o objetivo, a natureza, os riscos e benefícios deste estudo.

Após reflexão e um tempo razoável, eu decidi, livre e voluntariamente, participar deste estudo, permitindo que os pesquisadores relacionados neste documento obtenham fotografia, filmagem ou gravação de voz de minha pessoa para fins de pesquisa científica/educacional. As fotografias, vídeos e gravações ficarão sob a propriedade do grupo de pesquisadores pertinente ao estudo e sob sua guarda.

Concordo que o material e as informações obtidas relacionadas à minha pessoa possam ser publicadas em aulas, congressos, eventos científicos, palestras ou periódicos científicos. Porém, não devo ser identificado por nome ou qualquer outra forma. Estou consciente que posso deixar o projeto a qualquer momento, sem nenhum prejuízo. Após reflexões e um tempo razoável, eu decidi, livre e voluntariamente, participar deste estudo.

Nome completo: _____

RG: _____ Data de Nascimento: ___/___/_____ Telefone: _____

Endereço: _____

CEP: _____ Cidade: _____ Estado: _____

Assinatura: _____

Data: ___/___/_____

Eu declaro ter apresentado o estudo, explicado seus objetivos, natureza, riscos e benefícios e ter respondido da melhor forma possível às questões formuladas.

Nome completo: Jéssica Concentino

Assinatura pesquisador:

Data: 14/03/2018 a 11/04/2018

Para todas as questões relativas ao estudo ou para se retirar do mesmo, poderão se comunicar com Jéssica Concentino, via e-mail: jessica.uenp@hotmail.com ou telefone: (43) 99974 8074.

Endereço do Comitê de Ética em Pesquisa para recurso ou reclamações do sujeito pesquisado: Comitê de Ética em Pesquisa da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (CEP/UTFPR)

Endereço: Av. Sete de Setembro, 3165, Rebouças, CEP 80230-901, Curitiba-PR, telefone: 3310-4943, e-mail: coop@utfpr.edu.br

OBS: este documento deve conter duas vias iguais, sendo uma pertencente ao pesquisador e outra ao sujeito de pesquisa.

Anexo II – Autorização de Cessão de Imagem dos alunos

Autorização de Cessão de Imagem

Autorizo por meio deste instrumento particular a **Secretaria de Estado da Educação do Paraná/Colégio Estadual Prof. Mailon Medeiros – Ensino Fundamental, Médio e Profissional**, a veicular, utilizar e reutilizar na íntegra ou em partes, dispor para fins exclusivamente educativos e culturais, sem que isto implique em quaisquer ônus para a mesma, a utilizar a qualquer tempo, a imagem física de _____

_____ a serem veiculados no Portal Educacional Dia-a-dia Educação ou em qualquer suporte didático do mesmo.

Dados Pessoais do aluno (a)

Nome: _____

Nascimento: _____

Dados Pessoais do responsável

Nome: _____

RG: _____

CPF: _____

Endereço

Rua/Av: _____ nº: _____

Bairro: _____ CEP: _____

Cidade: _____ UF: _____ País: _____

Telefone: _____

Registro ainda minha disponibilidade quanto à veracidade das informações pessoais acima especificadas, nos termos da lei nº 9.610/98 (Lei dos Direitos Autorais).

Bandeirantes, ____ de _____ de _____.

Assinatura do responsável

Enviar para: Centro de Excelência em Tecnologia Educacional do Paraná – Cetepar
Rua Salvador de Ferrante, 1651 – Boqueirão
CEP 81670-390
Telefone (41) 376-3323 ramal 224 sala 16 – A/C de Renato Manoel – Portal Dia-a-dia Educação.
Curitiba – Pr – Brasil

APÊNDICES

Apêndice I – Questionário semiestruturado para a entrevista com os docentes

Fale um pouco sobre você:

- Qual sua formação para atuar como professor?
- Em que ano começou a lecionar?

Fale um pouco de sua prática em sala de aula:

- Como você ensina Matemática em suas aulas?
- Quais recursos utiliza para desenvolver e auxiliar a sua prática de ensino?
- Utiliza alguma abordagem metodológica ou prática pedagógica proposta na DCE?
- Conhece a abordagem metodológica Investigação Matemática?

Se a última resposta for afirmativa, continuar:

- Teve alguma formação sobre os procedimentos da Investigação Matemática?
- Já aplicou alguma atividade? Se não, por quê?
- Como eram as atividades?
- Como era o comportamento dos alunos na sala de aula?

Apêndice II – Roteiro de atividade investigativa de frações

Investigando nas dobraduras: frações

O roteiro abaixo é destinado a exploração inicial com alunos que não são habituados com atividades investigativas e o professor procure sempre conduzir, com questionamentos que façam refletir.

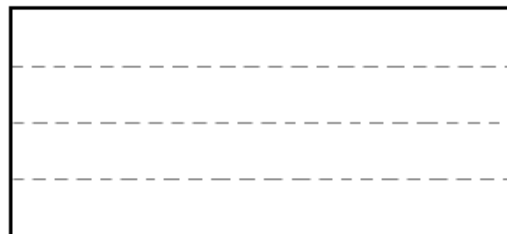
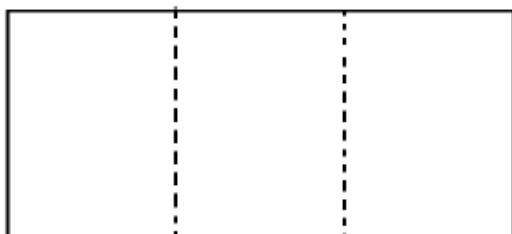
Objetivo da atividade: Proporcionar a exploração da soma de frações com denominadores iguais e denominadores diferentes.

Atividade Investigativa

Solicite aos alunos que cortem dois papéis (formato retangular) de mesmo tamanho.

Parte 1:

- Solicite aos alunos que dobrem um papel na vertical dividindo-o em 3 partes iguais.
- Explore representação que compõe cada parte da divisão, orientando-os sobre a escrita que representa cada parte dividida, o $\frac{1}{3}$.
- Solicite que pintem 2 partes das 3.
- Explore na a soma das partes pintadas:
Questione: O que vocês observaram quando pintamos 2 partes das 3?
- Permita que os alunos discutam sobre esta questão. Instigue-os para a conclusão $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.
- Solicite aos alunos que dobrem o outro na horizontal dividindo-o em 4 partes iguais.
- Explore a fração que cada parte representa da divisão, orientando-os a escrever $\frac{1}{4}$ nas partes.
- Solicite que pintem 1 parte das 4 (cor diferente do papel anterior).



- Para dar destaque as partes divididas sugira que façam um risco com caneta (de preferência preta) onde ficou a marca da dobra de modo que fique bem marcado.
- Agora, explore, montando no quadro com os alunos, as frações que representam as partes pintadas.

$$\frac{2}{3} \quad \text{e} \quad \frac{1}{4}$$

- I. Solicite aos alunos que analisem uma forma de somar as duas frações divididas em partes diferentes.
- II. Deixe-os discutir.

III. Caso observe que eles não consigam desenvolver uma solução, lembre-os da soma de frações com mesmo denominador: a figura foi dividida em partes iguais para que assim pudesse somar as partes pintadas.

Questione: O que fazer para que tenham mesmo número de partes dividida (as duas folhas)?

IV. Deixe-os investigar e discutir.

V. Se não encontrarem nenhuma relação, explore a parte 2.

Parte 2:

- Solicite aos alunos que sobreponha os dois papéis retangulares divididos e pintados.

Questione: Agora o que vocês podem observar?

Questione: Explique as conclusões que obteve com essa observação?

Discutam e depois expliquem o que concluíram.

- Se não encontrarem nenhuma relação, sugira que coloque sobre a luz, note que a sombra divide em vários retângulos menores.

Questione: O que representa esses retângulos menores que agora formamos na junção das duas folhas?

- Eles irão questionar sobre as partes pintadas, deixe que investiguem. Orientando-os com alguns questionamentos e solicite a explicação de como chegou à conclusão.

- Após várias discussões instigue-os para que consigam concluir:

Questione: Observem os denominadores iguais, agora podemos fazer a soma dos numeradores?

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{8}{12} + \frac{3}{12}, \text{ assim obtemos as 11 partes pintadas das 12 partes retangulares totais: } \frac{11}{12}$$

Observação: Caso não consigam entender as 11 parte pintadas das 12, oriente-os a fazer o mesmo procedimento da divisão na horizontal e vertical em uma mesma folha e peça que observem a anterior sobreposta para contar quantos retângulos menores foram pintados e assim pintar a nova folha dividida, lembrando-os que agora os denominadores são iguais (comum).

Agora, sugira mais alguns exemplos para que façam novamente a exploração de modo que você professor, vai auxiliando.

Oriente para que uma das folhas seja dobrada na vertical e a outra na horizontal.

Sugestões:

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{5} + \frac{3}{4}$$

Depois que os alunos terminarem, organize para a conclusão final.

Explicando que quando sobrepõem-se as folhas obtemos os retângulos totais, que representam o mínimo múltiplo comum entre os denominadores.

Instigue-os a dizer uma forma mais fácil, sem que precise dobrar as folhas todas as vezes.

Peça que observem as resoluções anteriores (que estão expostas no quadro) e façam suas análises, expõem suas conjecturas.

E o professor irá validando a partir das interações que irão acontecendo no decorrer da discussão.

ROTEIRO 2 – Geometria Plana

Número de diagonais de um polígono regular.

Tempo estimado: 100 min.

Caro professor,

Para o sucesso desta atividade é necessário que os alunos tenham conhecimento sobre polígonos (definição exemplos e elementos).

Desta forma, antes de iniciar a atividade que visa a dedução da fórmula para o cálculo do número de diagonais de um polígono, é necessário que defina polígono e, apresente os elementos: lados, vértices e diagonais.

Após esta familiarização, converse com os alunos sobre como será a atividade: que eles farão o trabalho dos matemáticos e investigarão o número de diagonais de qualquer polígono.

Iniciando a atividade:

- 1- Divida os alunos em grupos de no máximo 3 alunos. Esta quantidade é a ideal para que todos entrem em atividade.
- 2- Solicite que os alunos: ***Investiguem quantas diagonais possui um polígono de 20 lados.*** Esta deve ser sua frase. Apenas esta de início.
- 3- Permita que os alunos discutam como proceder.

Provavelmente eles ficarão inseguros e sem ideia do que fazer, porém, com um pouco de tempo começarão a conjecturar.

Dê tempo. Se necessário revise o conceito de polígono e diagonal.

Ande pelos grupos, incentivando, solicitando explicações do que estão fazendo ou pensando em fazer.

Muitos tentarão desenhar um polígono de 20 lados (e pode até ser que consigam), outros já notarão que é complicado desenhar o mesmo.

Após um tempo que você considerar suficiente, quando você observar que não conseguiram desenhar, ou que não conseguiram contar as diagonais ou que simplesmente desistiram, é hora de você voltar a agir.

- 4- Retome a atenção para você e sugira que desenhem polígonos de 4, 5 e 6 lados e contem suas diagonais, anotando sempre o que fazem.

- 5- Deixe-os trabalharem um pouco mais sozinhos.
- 6- Passe pelos grupos, incentive, tire dúvidas, avalie e solicite explicações sobre o que estão fazendo. Não direcione nada. Não diga como fazer, instigue-os.
- 7- Depois que todos conseguirem elencar o número de diagonais destes polígonos, instigue-os:

Será que existe uma maneira de saber o número de diagonais sem desenhar o polígono?

- 8- Deixe-os pensar mais um pouco. Solicite sugestões:

Como podemos fazer?

Pode ocorrer de alguém falar em fazer uma tabela, ou em relacionar o número de lados com o número de diagonais, ou o número de vértices com as diagonais, etc...

Ouçá todas as ideias dos alunos, questione:

Por que você acha que seria assim?

Como você está pensando em fazer?

- 9- Caso ocorra de alguém ou algum grupo sugerir uma relação entre o número de diagonais e o número de lados ou de vértices, solicitem que testem sua hipótese para demais polígonos.

Caso não ocorra de surgir esta hipótese por parte dos alunos, faça a seguinte questão:




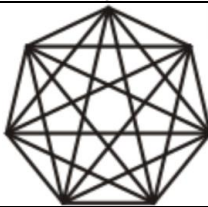
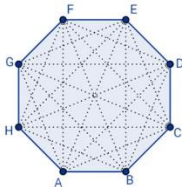
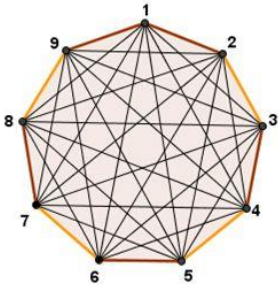
Será que existe alguma relação entre o número de diagonais e o número de lados ou o número de vértices?

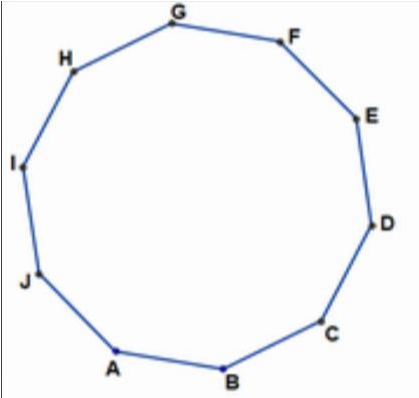
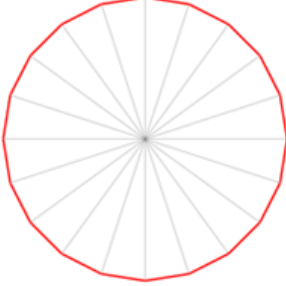
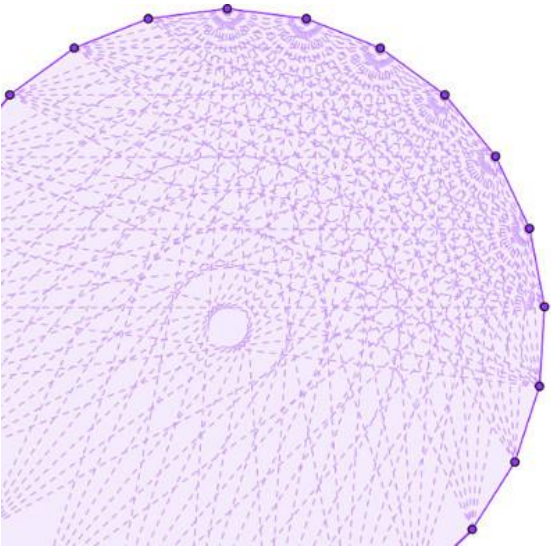
Mais uma vez, deixe-os discutir um pouco e depois sugira que façam uma tabela com o número de lados, vértices e diagonais, ou, entregue a seguinte folha solicitando que completem os dados que faltam e tentem estabelecer uma relação entre o número de lados e as diagonais.

Nome:

Atividade

Número de diagonais de um polígono regular. Complete a tabela e encontre uma relação entre o número de diagonais e o número de lados ou com o número de vértices.

Tipo de polígono	Formato	Número de lados	Número de vértices	Número de diagonais	
Quadrado		4	4	2	
Pentágono		5	5	5	
Hexágono		6	6		
Heptágono		7	7		
Octógono		8	8	20	
Eneágono		9	9	27	

Decágono		10	10	35	
Icoságono		20	20		
Pentacoságono		25	25	275	

- 10- Deixe os alunos trabalharem por um bom tempo. Este é um momento de extrema importância onde elaborarão hipóteses, testarão e tentarão validar.
- 11- Ande pelos grupos, questione: Por que estão fazendo assim? O que vocês estão pensando? Como estão pensando em fazer?
- 12- Instigue.
- 13- Incentive se estiverem no caminho certo.
- 14- Dê dicas, mas não resolva para eles.
- 15- Quando os grupos conseguirem chegar a uma generalização, solicite que expliquem para os colegas como fizeram para chegar ao resultado.
- 16- Após esta explanação dos grupos, faça você uma retomada final.

Esperamos que você aprecie a atividade realizada pelos alunos. Temos ciência de que este tipo de atividade demanda muito mais tempo do que o ensino tradicional, porém, o ganho em conhecimento é gratificante.

Bom trabalho.

Apêndice IV – Material de orientações para o professor sobre Investigação Matemática

PRODUTO EDUCACIONAL
Mestrado Profissional em Ensino de Matemática PPGMAT/UTFPR

ORIENTAÇÕES PARA O PROFESSOR
INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA

Jéssica Concentino
Orientadora: Dra. Elaine Cristina Ferruzzi

LONDRINA
2018

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA
- PPGMAT -**

JÉSSICA CONCENTINO

INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA

PRODUTO EDUCACIONAL

LONDRINA - PR
2018

Aspectos e encaminhamentos da Investigação Matemática

Este material apresenta uma proposta que pode auxiliar e orientar o professor no desenvolvimento de atividades por meio da Investigação Matemática. Contempla o objetivo de propiciar a implementação inicial de atividades investigativas, com roteiros que auxiliam e orientam o professor, a fim de promover a familiarização no desenvolvimento do processo de Investigação Matemática em sala de aula.

Apresentamos assim alguns questionamentos sobre essa prática pedagógica:

- O que é Investigação Matemática?
- Quais encaminhamentos desenvolver para proporcionar atividades de Investigação Matemática?
- Quais ações o docente deve promover para que a aula tenha a caracterização de uma Investigação Matemática?

Essas questões direcionam o conteúdo apresentado no material de orientações ao professor seguir.

Investigação Matemática

A Investigação Matemática é uma prática pedagógica que utiliza um conjunto de processos peculiares da atividade matemática, levantando “questões que nos interessam, para as quais não temos essa resposta pronta, e procuramos essa resposta de modo tanto quanto possível fundamentado e rigoroso” (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2009, p. 9).

Atividades de Investigação Matemática em sala de aula iniciam-se com uma situação desafiadora para o aluno e geralmente são desenvolvidas em **pequenos grupos**, possibilitando a busca de meios para solucionar o problema, a utilização de argumentações, a produção de significados para a Matemática, a comunicação, a elaboração de relatórios e a apresentação dos resultados (CORRADI, 2011). Neste sentido, Ponte et al. (1997, p.10) consideram que este tipo de atividade possibilita “o desenvolvimento de atitudes e valores como o gosto pela Matemática, a autonomia e a cooperação”.

Tendo em vista que, via de regra, nossos estudantes estão habituados com tarefas rotineiras, compostas por aplicação e reprodução de técnicas, o fato das atividades investigativas se apresentarem “essencialmente abertas e pouco estruturadas” (SILVA;

VERTUAN, 2018, p. 504) parece ser um desafio tanto para os alunos quanto para o professor. E é a elucidação deste desafio que nos propomos a investigar.

Uma atividade, por si só, não possui autonomia ou característica suficiente para ser uma atividade de cunho investigativo. Vários aspectos precisam estar presentes, entre eles, a vontade do aluno e a ação do professor.

Nesse sentido, Ferruzzi, Borsoi e Silva (2018, p. 3) apontam que as ações do professor são a base para que os alunos “aceitem pesquisar com afinco, estejam dispostos a testar conjecturas, procurar com atenção, indagar e buscar provas para suas descobertas”, ou seja, “aceitem o convite” posto por Skovsmose (2000).

Do mesmo modo, Ponte, Brocardo e Oliveira (2009) argumentam que atividades de investigação requerem envolvimento ativo do aluno, e quando ele desenvolve essa responsabilidade tende a favorecer o processo de aprendizagem, visto que, nessa abordagem os alunos são convidados a formular as questões a serem investigadas, a elaborar conjecturas num processo de provas e refutamento e apresentar esse processo de descoberta para os colegas e professor, discutindo e argumentando sobre os resultados obtidos. Ponte (2003, p. 38) ressalta ainda

[...] que a realização continuada de investigações, num quadro de discussão e reflexão sobre o significado dos resultados obtidos e dos processos empregues, é susceptível de influenciar de modo muito significativo as concepções dos alunos. Estes podem alterar a sua visão do trabalho investigativo, das características da Matemática, do modo de aprender Matemática e dos papéis do professor e do aluno, desenvolvendo o gosto pela disciplina e a sua confiança neste tipo de trabalho.

Portanto, essa prática pedagógica gera desafios, tanto para o professor como para os alunos, mas é fundamental proporcionar diversas vezes essa experiência, de modo paulatino, para que as dificuldades desse processo sejam superados e almejar as habilidades e competências a ser desenvolvidas nesse contexto de ensino e aprendizagem.

Os caminhos a percorrer no processo da Investigação Matemática podem desenvolver habilidades dos envolvidos na prática investigativa, pelo fato de contemplar e valorizar “a adivinhação sagaz, a hipótese fértil, o salto arrojado para uma conclusão tentativa - essa é a moeda mais valiosa do pensador em ação, qualquer que seja o seu campo” (BRUNER, 1978, p. 12).

Atividades de Investigação Matemática

As atividades investigativas devem ser propostas e implementadas de forma gradativa, para estimular os alunos a se envolverem e interagirem, de modo que se sintam capazes e confiantes no processo, promovendo ainda a responsabilidade da aprendizagem.

[...] relevância de atividades investigativas se deve ao desenvolvimento do trabalho que é realizado em equipe, onde a utilização da argumentação, da comunicação matemática e da elaboração de relatórios, oportuniza aos alunos a produção de significados para a Matemática. Por meio de situações problema desafiadoras possibilita ao aluno o desenvolvimento de autonomia na busca de meios para investigação (CORRADI, 2011, p. 165).

Corradi (2011, p. 163), aborda que as atividades investigativas podem alcançar o objetivo de desenvolver nos alunos atitudes que “contribuem para mobilizar e consolidar seus conhecimentos matemáticos”, assim como, Ponte (2014, p. 14) caracteriza “o termo “atividade” [...] relacionada com a ideia que o aluno deve desempenhar um “papel ativo” no processo de aprendizagem”.

Desse modo, a Investigação Matemática requer o envolvimento ativo do aluno, no que refere a

[...] explorar, a adivinhar e, até mesmo, a cometer erros, de modo que, através dessas atividades, ganhassem confiança em sua capacidade de resolver problemas simples ou complexos; que lessem, escrevessem, e discutissem matemática; que conjecturassem, tentassem e construíssem argumentos sobre a validade de uma conjectura (CUNHA, 2009, p. 10).

A importância das atividades de Investigação Matemática reside em aguçar uma força que desafia alunos e professores, que com objetivo comum de fazer matemática, rompem com a zona de conforto gerado pelo ensino tradicional.

Para o trabalho inicial em sala de aula com atividades investigativas, o professor pode utilizar roteiros, que o oriente em algumas ações a serem desenvolvidas, e tomar consciência que o papel fundamental é ser orientador, para que no desenvolvimento da atividade apresente questionamentos que desperte habilidades de investigar, de pensar, de elaborar indagações.

Apresentamos assim, algumas situações que podem auxiliar no desenvolvimento de algumas habilidades nesse processo:

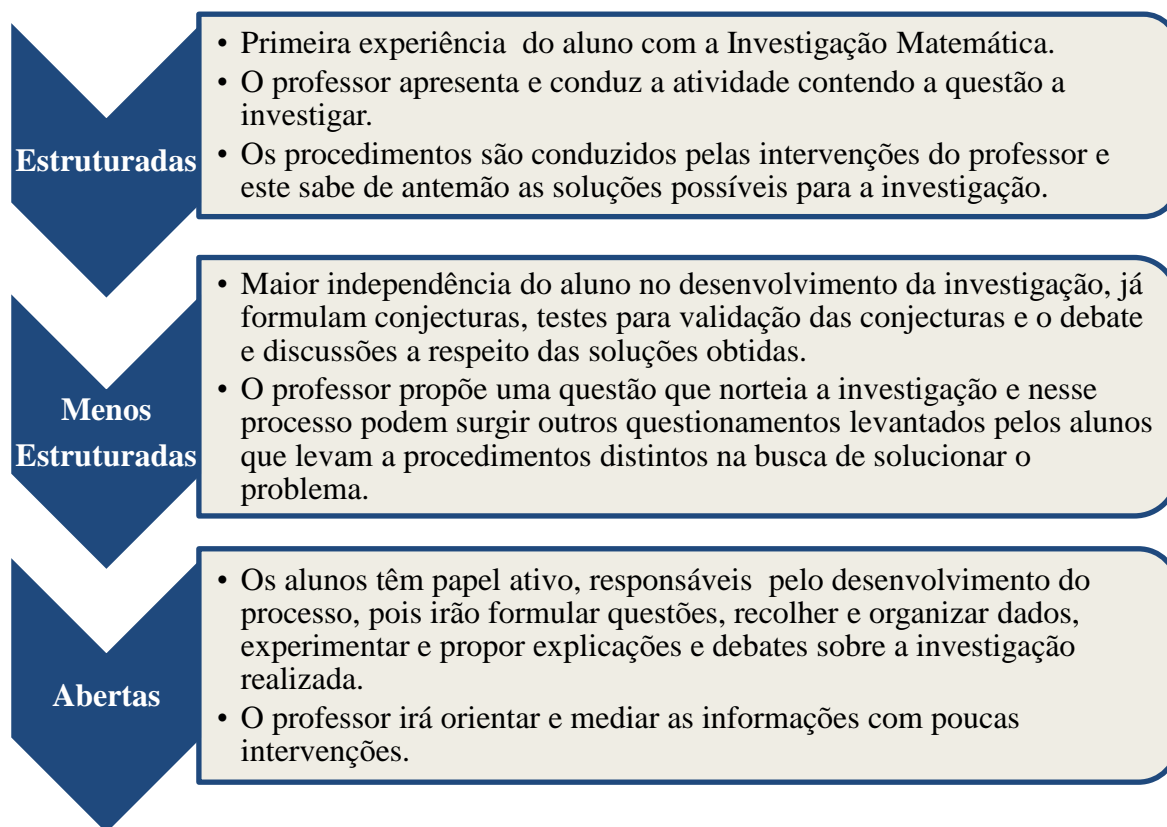
Quadro 1 – Questionamentos do professor no ambiente de Investigação Matemática

Questionamentos que o professor orientador pode promover:	
Provocando o raciocínio	Por quê? Como? Me explique....
Instigando	Tem certeza disso?
Incentivando	Muito bem, mas e se....
Validando	Continuem assim, estão no caminho certo...
Auxiliando na administração de conflitos	Vocês levaram em consideração o que o colega falou? Por quê?
Estimulando o confronto de pontos de vistas	Discutam as duas opiniões, por que não concorda com o que ele disse?
Promovendo a reflexão e argumentação	Explique como você chegou a esta conclusão.

Fonte: Adaptado de Ferruzzi, Borssoi e Silva (2018).

Cunha (2009, p. 23) argumenta que o professor deve saber “dosar as suas intervenções, permitindo que os alunos criem seus caminhos e tirem suas próprias conclusões”, considerando ainda todo o processo que os alunos percorrem, mesmo com seus erros, a aprendizagem pode ser oportunizada pelo decorrer do processo e das intervenções necessárias.

Para que essa prática pedagógica enriqueça o ambiente de aprendizagem, o professor que nunca trabalhou com este tipo de atividade deve iniciar com atividades estruturadas, que possuam questões norteadoras, que conduzam o aluno, porém sempre instigando-os, e com o tempo, aumentar o grau de dificuldade, “inserindo atividades menos estruturadas [...] quando os alunos estiverem mais acostumados (e o professor mais seguro)” (FERRUZZI; BORSSOI; SILVA, 2018, p. 6).

Figura 1 – Grau de complexidade da Atividade Investigativa

Fonte: A autora.

Essas experiências de atividade com Investigação Matemática são momentos de experiências ricas, que o professor deve ter conhecimento para tornar favorável a aprendizagem em cada nível e atingir os objetivos tanto dos procedimentos desenvolvidos como das habilidades que a investigação pode promover.

Diferentes funções na proposta da investigação

O pesquisador Goldenberg (1999) discute sobre diferentes formas de conceber uma investigação, e expõe quatro funções que a investigação desempenha na aula de matemática. Apresentamos no Quadro 2 estas funções:

Quadro 2 – Funções dos quatro processos de investigação

Explorar	<ul style="list-style-type: none"> - Consiste em uma primeira experiência dos alunos sobre o que é Investigação Matemática. - O objetivo é explorar um problema com tema matemático, criando possibilidade para trabalhos posteriores, a partir de indagações que surgirem pelos alunos, ou até mesmo propostas pelo professor.
----------	---

	- “Ajudar os alunos a estabelecer intuições”, sem almejar a elaboração de alguma conjectura.
Descobrir	- Considera-se ainda caráter de primeira experiência, consiste em uma investigação limitada. - Propor perguntas que façam refletir sobre uma mesma constatação, só que de modo diferente, dando oportunidade de explorar e observar as mesmas percepções, o que conduz a descobertas. - Ao concluir as ideias, elaborar uma regra.
Pôr em questão	- Consiste em promover situações que leve os alunos a discussões de ideias. - Debater sobre “ideias matemáticas que tenham já trabalhado parcialmente, para rever, apurar ou aprofundar essas ideias ou para relacioná-las com outras” (p. 7). - Permite aos alunos compreender o porquê de certos conceitos e formar suas concepções.
Investigar	O objetivo vai além dos conceitos matemáticos. Nessa função os alunos: - Desenvolvem a autonomia, responsabilidade e a independência no processo da investigação. - Reconhecem uma problemática e começam a elaborar questionamentos, formular conjecturas, realizam testes para validá-las e justificá-las, não esperando respostas prontas do professor, reconhecendo ainda que o professor tem o papel de orientador. - Aprendem a valorizar não apenas as resposta, mas todo o processo da investigação, desenvolvendo a organização das ideias, comunicando-as e discutindo com os colegas, e em cooperação elaboram conclusões. - Desenvolvem a confiança no processo de construção do próprio conhecimento.

Fonte: Adaptado de Goldenberg (1999).

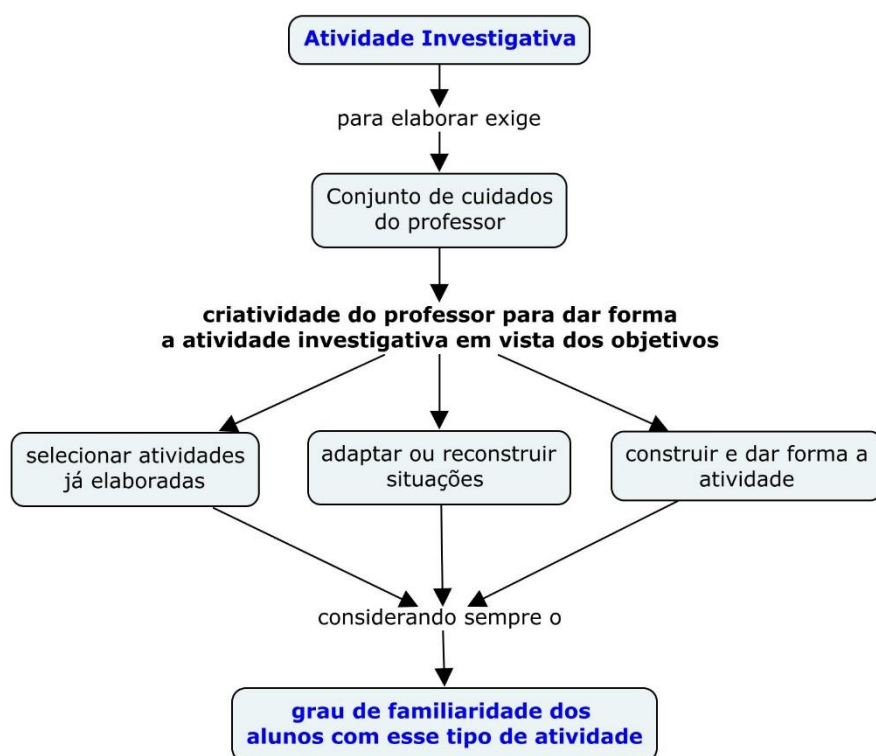
Cada função desperta diferentes competências no processo da investigação e quando ofertadas de modo que os alunos se sintam motivados, curiosos e confiantes no processo a ser desenvolvido, constroem os “hábitos matemáticos de pensamento”

(GOLDENBERG, 1999, p. 3) e compreendem a essência da criação de “factos e métodos”, assim como, aprendem a “ser um investigador perspicaz, e para isso tem que fazer investigação” (Ibidem, p. 3). As pequenas investigações começam em trabalhos exploratórios, fazendo observações e encontrando relações (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2009).

Desenvolvimento da aula e ações docentes para promover a Investigação Matemática

A primeira fase da estrutura da aula é a reflexão do professor sobre a elaboração de atividades investigativas, o que não é algo trivial, principalmente para professores que atuam há anos com o sistema tradicional. Como afirmam Oliveira et al. (1999, p. 100), “é um trabalho criativo (para o qual não há receitas)”, um processo em que pode ocorrer erros, mas também, quando há persistência nesse processo, podem resultar acertos que enriquecem a proposta do ensino.

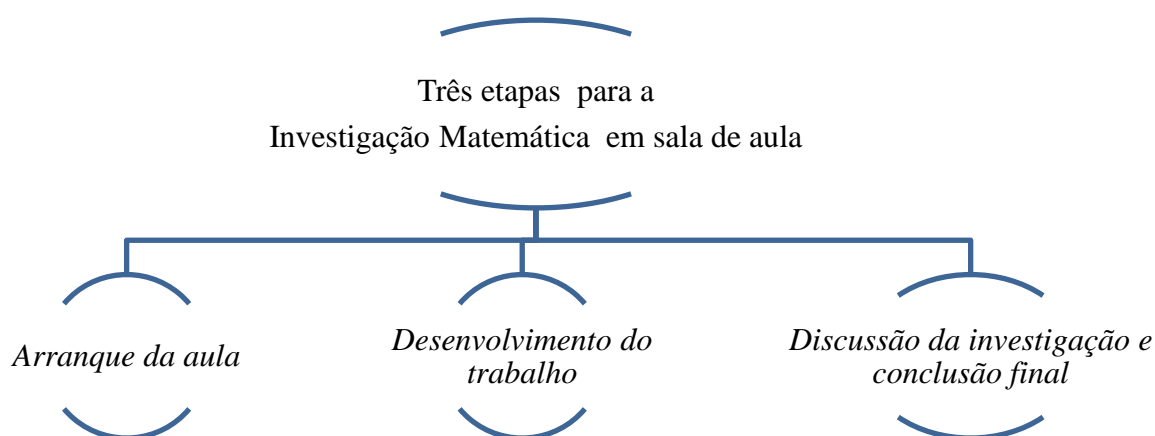
O professor deve delinear objetivos claros, elaborar pesquisas e mais que isso, “recorrer à sua criatividade para dar forma à tarefa, adaptando as situações, reconstruindo as questões da maneira que melhor servir os seus objetivos” (CORRADI, 2011, p. 170). Isso é parte de um processo cuidadoso que exige habilidades que demanda tempo para adquirir (CORRADI, 2011), sendo “necessário que o professor invista bastante na preparação dessas aulas” (FONSECA; BRUNHEIRA; PONTE, 1999, p. 3), com situações que estimulem o pensamento matemático e também o diálogo, para expor suas ideias e explorá-las entre os alunos e o professor.

Figura 2 – Dando forma à atividade investigativa

Fonte: A autora.

Após o importante momento da preparação da atividade investigativa, elenca-se algumas etapas para o desenvolvimento da proposta em sala de aula.

Desse modo, Ponte, Brocardo e Oliveira (2009) propõem três etapas para dinamizar e orientar a experiência com atividade investigativa em sala de aula, as quais são:

Figura 3 – Etapas da Investigação Matemática em sala de aula

Fonte: Baseado em Ponte, Brocardo e Oliveira (2009).

Nessas etapas, a caracterização e as potencialidades da atividade de Investigação Matemática são condicionadas pelas ações do professor (PONTE, 2014), apresentadas no Quadro 3.

Quadro 3 – Ações do docente no desenvolvimento da Investigação Matemática

Etapas da Investigação Matemática	Ações do Professor
Arranque da aula	<ul style="list-style-type: none"> • Apresentar as atividades aos alunos que, dependendo do grau de familiaridade, pode proporcionar mais ou menos informações; • As informações podem ser apresentadas de forma escrita, oral ou mista.
Desenvolvimento do trabalho	<ul style="list-style-type: none"> • Organizar a turma em pequenos grupos; • Convidar e estimular o aluno a envolver-se; • Despertar a curiosidade, usando as ideias dos alunos como propulsoras do conhecimento; • Provocar o raciocínio dos alunos, encorajando-os a elaborar explicações e relacionar as ideias com experiências anteriores, nunca desestimulando diante de uma explicação equivocada; • Auxiliar com questões orientadoras para estruturar o pensamento, dosando o apoio e as intervenções; • Incentivar os alunos perante as dificuldades para adquirir confiança no trabalho que estão elaborando; • Compartilhar as ideias entre professor e aluno num ambiente em que ambos são aprendizes; • Colocar os alunos em ação e responsáveis em desempenhar um “papel ativo” no processo da aprendizagem; • Desafiar os alunos, conduzindo-os a buscar em sua estrutura cognitiva relações e conceitos, exercitando seu poder de observação e generalização; • Gerenciar o tempo com flexibilidade, oportunizando aos alunos o tempo de maturação, para observar, conjecturar (levantar hipóteses), abstrair, formular questões, testar conjecturas, etc; • Dar oportunidade para compreenderem que a resposta não

	<p>é algo pronto, há um processo a ser desenvolvido para obterem suas conclusões, desenvolvendo a compreensão e autonomia dos envolvidos;</p> <ul style="list-style-type: none"> • Desenvolver a atitude de construtor do próprio conhecimento, observando que a matemática não é um simples conjuntos de técnicas.
<p>Discussão da investigação e conclusão final</p>	<p>Criar um ambiente com o “grupo maior” propício a:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Verbalizar: expor e explicar o pensamento e raciocínio elaborados, assim como suas conclusões; • Troca de ideias; • Confrontar opiniões e argumentos, onde o receio de “arriscar” conjecturas é relativamente reduzido; • Validar o raciocínio obtido por meio da discussão; • Elaborar relatórios finais. Esse momento ajuda com que os alunos reflitam sobre o trabalho realizado estruturando as ideias e ao professor recolhe o registro de informações sobre o nível de desenvolvimento da atividade. <p>Esse ambiente conta com orientações e auxílio do professor em busca do fechamento da atividade.</p>

Fonte: Adaptado de Corradi (2011) e Baptista (2010).

Desde a elaboração da atividade investigativa, a organização da turma em pequenos grupos, as intervenções realizadas pelo professor no desenvolvimento do trabalho e a discussão da conclusão final são caracterizadas como etapas essenciais na Investigação Matemática para a construção do conhecimento do aluno. Em face a esse processo, pesquisadores argumentam ainda que é

[...] através da comunicação oral e escrita que os alunos dão sentido ao conhecimento matemático que vai sendo construído. [...] É na interação dos indivíduos uns com os outros que se desenvolvem as capacidades cognitivas e se promovem as atitudes e valores indicados pelas orientações curriculares (PONTE; et. al, 1997, p. 2).

Aprender Matemática sem forte intervenção da sua faceta investigativa é como tentar aprender a andar de bicicleta vendo os outros andar e recebendo informação sobre como o conseguem. Isso não chega. Para verdadeiramente aprender é preciso montar a bicicleta e andar, fazendo erros e aprendendo com eles (BRAUMANN, 2001, p. 5).



Bom trabalho!

REFERÊNCIAS

- BRAUMANN, C. **Divagações sobre investigação matemática e o seu papel na aprendizagem da matemática**. In J. P. Ponte, C. Costa, A. I. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo, & A. F. Dionísio (Eds.), *Actividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores*. p. 5-24. Lisboa: SEM-SPCE, 2002.
- BRUNER, J. S. **O processo da Educação**. São Paulo, Nacional, 1978.
- CORRADI, D. K. S. **Investigações Matemáticas**. Revista da Educação Matemática da UFOP, Vol I, 2011 - XI Semana da Matemática e III Semana da Estatística, 2011. ISSN 2237-809X. p. 162-175.
- CUNHA, D. S. I. **Investigações geométricas: desde a formação do professor até a sala de aula de matemática**. Dissertação (mestrado) 98f. – UFRJ/IM. Rio de Janeiro, 2009.
- FERRUZZI, E. C.; BORSSOI, A. H.; SILVA, K. P. **Investigação Matemática em foco: evidenciando possibilidades para a sala de aula**. No prelo, 2018.
- FONSECA, H., BRUNHEIRA, L., PONTE, J. P. **As actividades de investigação, o professor e a aula de Matemática**. Actas do ProfMat. Lisboa: APM, 1999.
- GOLDENBERG, E. P. **Quatro funções da investigação na aula de Matemática**. In: ABRANTES, P., PONTE, J. P., FONSECA, H., BRUNHEIRA, L. *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 35-49). Lisboa, 1999.
- PONTE, J. P. **Investigar, ensinar e aprender**. In: Actas do ProfMat, (CD-ROM, pp. 25-39). Lisboa: APM, 2003. Disponível em: <[http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/03-Ponte\(Profmat\).pdf](http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/03-Ponte(Profmat).pdf)> Acesso em: 20 jan. 2017.
- PONTE, J. P. **Tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática** 1ª edição - Práticas Profissionais dos Professores de Matemática. Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. 2014. Disponível em: www.ie.ulisboa.pt
- PONTE, J. P., BOAVIDA, A., GRAÇA, M., ABRANTES, P. **4 - A DINÂMICA DA AULA DE MATEMÁTICA**. Didáctica da Matemática. Lisboa: Departamento do Ensino Secundário, Ministério da Educação - 1997.
- PONTE, J. P.; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. **Investigação Matemáticas na Sala de Aula**. 2ª ed. 160 p. Belo Horizonte: Autêntica, 2009.
- OLIVEIRA, H.; PONTE, J. P.; SANTOS, L.; BRUNHEIRA, L. **Os professores e as actividades de investigação**. In: In Abrantes, P.; Ponte, J. P.; Fonseca, H.; Brunheira, L. (Orgs.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo*. (pp. 97-110), Lisboa: APM, 1999.

SILVA, K. A. P.; VERTUAN, R. E. **Um estudo sobre as intervenções docentes em contextos de atividades investigativas no âmbito de aulas de Matemática do Ensino Superior.** Ciênc. Educ., Bauru, v. 24, n. 2, p. 501-516, 2018.

SKOVSMOSE, O. **Cenários para investigação.** Bolema, n° 14, pp. 66 a 91, 2000.

Disponível em: <

[http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/textos/skovsmose\(Cenarios\)00.pdf](http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/textos/skovsmose(Cenarios)00.pdf)>. Acesso em: 20 mai. 2017.