UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA – PPGMAT
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

PRISCILLA FRIDA SALLES TOJEIRO

NOÇÕES DE TOPOLOGIA NOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL: uma possibilidade investigativa por meio do software Scratch

DISSERTAÇÃO

LONDRINA
2019

PRISCILLA FRIDA SALLES TOJEIRO

NOÇÕES DE TOPOLOGIA NOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL:
uma possibilidade investigativa por meio do software Scratch

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial à obtenção do título Mestre em Ensino de Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Eliane Maria de Oliveira Araman

LONDRINA

2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Biblioteca UTFPR - Câmpus Londrina

T646n Tojeiro, Priscilla Frida Salles
Noções de topologia nos anos iniciais do ensino fundamental: uma possibilidade investigativa por meio do software Scratch / Priscilla Frida Salles Tojeiro. - Londrina : [s.n.], 2019.
134 f. : il. ; 30 cm.

Orientadora: Profª Drª Eliane Maria de Oliveira Araman
Dissertação (Mestrado) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, 2019.
Bibliografia: f. 116-119.

1. Matemática - Pesquisa. 2. Geometria. 3. Topologia. 4. Teoria dos grafos. 5. Scratch (Linguagem de programação de computador). 6. Ensino Fundamental I. Araman, Eliane Maria de Oliveira, orient. II. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. III. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática. IV. Título.

CDD: 510.7

Ficha catalográfica elaborada por Cristina Benedeti Guilhem - CRB: 9/911

TERMO DE LICENCIAMENTO

Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação
Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática
Campus Londrina/Cornélio Procópio

TERMO DE AVALIAÇÃO

NOÇÕES DE TOPOLOGIA NOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL: uma possibilidade investigativa por meio do software Scratch

por

PRISCILLA FRIDA SALLES TOJEIRO

Esta dissertação foi apresentada em 1º de março de 2019 como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática. A candidata foi arguida pela Banca Examinadora composta pelos professores abaixo assinalados. Após deliberação, a Banca Examinadora considerou o trabalho aprovado.

____
Profa. Dra. Eliane Maria de Oliveira Araman
Orientadora – UTFPR - Londrina

____
Prof. Dr. Jader Otávio Dalto
Membro Suplente – UTFPR – Londrina

____
Profa. Dra. Magna Natália Marin Pires
Membro Titular – UEL - Londrina

____
Prof. Dr. Emerson Tortola
Membro Titular – UTFPR – Toledo

A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática.

Ao Carlos, meu esposo, pelo apoio durante o período
de realização desta pesquisa.
Às minhas filhas Banny e Jade por compreenderem
minha ausência em alguns momentos.
Aos meus pais que me fizeram acreditar na
importância do estudo e da educação.
E ao meu neto Arthur, que chegou há pouco e
inundou nossas vidas de amor.

AGRADECIMENTOS

Aprender é algo maravilhoso, a motivação necessária para a efetivação do ato é algo particular, contudo é um fazer que não se isola, mas inspira, complementa, se compartilha. Então, quero aqui expressar minha gratidão, por aqueles que me inspiraram, me auxiliaram, me compreenderam, contribuindo para a realização deste trabalho, em especial:

Aos meus familiares.

À minha orientadora, Profa. Dra. Eliane Maria de Oliveira Araman, pela delicadeza e atenção em todos os momentos e que tanto contribuiu para a minha formação com seus ensinamentos e conhecimentos.

À Profa. Dra. Magna Natália Marin Pires e ao Prof. Dr. Emerson Tortola, pelas significativas contribuições prestadas durante o exame de qualificação e pela disposição em participar da banca avaliadora.

Ao Prof. Dr. Jader Otávio Dalto, por aceitar me acompanhar durante esta etapa final do trabalho.

A todos os professores doutores do PPGMAT, os quais tive a oportunidade de frequentar as disciplinas, que de uma forma ou de outra, deixaram um pouco de si.

Ao professor Dr. João Carlos Vieira Sampaio, professor associado da Universidade Federal de São Carlos, por suas palavras de incentivo e por disponibilizar seus livros e materiais sobre Topologia.

A todos da EMEF Profa. Dorothildes Bononi Gonçalves, em especial ao professor Josenil e a todas as crianças que participaram da pesquisa.

Aos colegas, descritos por ordem alfabética, Adriele Waideman, Cleiton Marino, Dayane Moara, Eliane Sborgi, Jéssica Consentino, Milena Molitor, Rafhael Peres, Rodrigo Tavares e Tamires Augusto que me ajudaram e fizeram a diferença.

Muito Obrigada!

TOJEIRO, Priscilla Frida Salles. **Noções de Topologia nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental:** uma possibilidade investigativa por meio do *software* Scratch. 2019. 137 f. Dissertação - Mestrado em Ensino de Matemática – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2019.

RESUMO

A construção espacial das crianças se inicia a partir das noções topológicas, que são as mais elementares. Este conhecimento se constrói a partir de experiências manipulativas no próprio objeto que se pretende conhecer. O presente estudo, desenvolvido no âmbito do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, tem como objetivo apresentar uma sequência de atividades que aborda noções introdutórias de Topologia, mais especificamente da Teoria dos Grafos e foi inspirado no problema “As sete pontes de Königsberg”. As atividades são abordadas sob a perspectiva da Investigação Matemática e compreendem nove tarefas que foram desenvolvidas com o *software* Scratch. A pretensão é que os estudantes que frequentam os Anos Iniciais do Ensino Fundamental e que encontram-se em fase de desenvolvimento das habilidades espaciais possam, ao executarem as atividades, se aproximar de algumas características que subsidiam Teoremas desenvolvidos por Leonhard Euler. A escolha por este problema em específico, se deu por se tratar de um problema interessante, pouco explorado no Ensino Fundamental e que, ao ser adaptado ao contexto infantil permite que os estudantes vejam a utilização prática de conhecimentos aprendidos em sala de aula como: o estudo de vértices e arestas e números pares e ímpares, que são conhecimentos previstos como conteúdos a serem ensinados para os Anos Iniciais do Ensino Fundamental. A metodologia adotada foi de natureza qualitativa. Para a coleta de dados, foram realizadas observações e uso de alguns instrumentos como: os documentos produzidos pelos estudantes, filmagens e fotografias. Por meio da Investigação Matemática e utilizando o *software* Scratch, os estudantes traçaram itinerários, exploraram as noções espaciais, investigaram, testaram suas hipóteses diversas vezes na busca de regularidades e se aproximaram de características dos Teoremas.

Palavras-chave: Geometrias não-euclidianas, Topologia, Investigação Matemática, Scratch, Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

TOJEIRO, Priscilla Frida Salles. Notions of Topology in the Elementary School: an investigative possibility through Scratch software. 2019. 137 f. Dissertation - Masters in Mathematics Teaching - Federal Technological University of Paraná, Londrina, 2019.

ABSTRACT

The spatial construction of children starts from the topological notions, which are the most elementary. This knowledge is built from manipulative experiences in the object itself. The present study, was developed within the scope of the Professional Master in Mathematics Teaching, aims to present a sequence of activities what addresses introductory notions of Topology, more specifically the Theory of Graphs and was inspired by the problem "The Seven Bridges of Königsberg". The activities are approached from the perspective of Mathematical Research and comprise eight tasks that were developed with Scratch software. The pretension is that students who attend the Elementary School and who are in the development phase of the space skills can approach some characteristics that subsidize Theorems developed by Leonhard Euler through the activities. The choice for this specific problem occurred because it is an interesting problem, not too much explored in Elementary School and, when adapted to the children's context, allows students to see the pratical use of knowledge learned in the classroom as the study of vertices and edges, even and odd numbers that are predicted knowledge as contents to be taught for the Elementary School. The methodology adopted was qualitative in nature. For the data gathering, observations and use of some instruments were made such as: the documents produced by the students, filming and photographs. Through mathematical research and using Scratch software, students mapped aut itineraries, explored spatial notions, investigated, test their hypotheses several times in the quest for regularities and approached features of Theorems.

Keywords: Non-Euclidean Geometries, Topology, Mathematical Research, Scratch, Resources, Elementary School.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Representação gráfica da metade.. 18

Figura 2 - Exemplo 1 da noção topológica separação 29

Figura 3 - Exemplo 2 da noção topológica separação 30

Figura 4 - Exemplo da noção topológica ordem linear.. 30

Figura 5 - Exemplo da noção topológica ordem cíclica 31

Figura 6 - Exemplo da noção topológica envolvimento....................................... 31

Figura 7 - Exemplo da noção topológica continuidade.. 32

Figura 8 - Exemplo da noção topológica fronteira... 32

Figura 9 – Tela do Scratch com parte da programação do Vídeo de Apresentação.. 58

Figura 10 – Grafo da Atividade 1... 72

Figura 11 – Grafo da Atividade 2... 73

Figura 12 – Grafo da Atividade 3... 75

Figura 13 – Grafo da Atividade 4... 76

Figura 14 – Grafo da Atividade 5... 77

Figura 15 – Grafo da Atividade 6... 78

Figura 16 – Grafo da Atividade 7... 79

Figura 17 – Grafo da Atividade 8... 80

Figura 18 – Perguntas 1 e 2 das fichas de trabalho.. 81

Figura 19 – Respostas corretas da pergunta 2... 84

Figura 20 – Respostas erradas da pergunta 2.. 85

Figura 21 – Respostas da pergunta 3.. 87

Figura 22 - Respostas da pergunta 4.. 88

Figura 23 – Resposta da pergunta 6 da Atividade 3... 90
Figura 24 – Resposta da pergunta 8.. 92
Figura 25 – Resposta da pergunta 9.. 93
Figura 26 – Resposta da pergunta 10.. 94
Figura 27 – Resposta da pergunta 11.. 95
Figura 28 – Resposta do Grupo 1 da Turma 1.. 98
Figura 29 – Apresentação do Grupo 1 da Turma 1... 99
Figura 30 – Resposta do Grupo 1 da Turma 2.. 100
Figura 31 – Apresentação do Grupo 1 da Turma 2... 100
Figura 32 – Resposta do Grupo 2 da Turma 1.. 102
Figura 33 – Resposta do Grupo 2 da Turma 1 – Após intervenção.................... 102
Figura 34 – Apresentação do Grupo 2 da Turma 1... 103
Figura 35 – Resposta do Grupo 2 da Turma 2... 104
Figura 36 – Apresentação do Grupo 2 da Turma 2... 104
Figura 37 – Resposta do Grupo 3 da Turma 1.. 105
Figura 38 – Resposta do Grupo 3 da Turma 2.. 106
Figura 39 – Resposta do Grupo 4 da Turma 1.. 108
Figura 40 – Apresentação do Grupo 4 da Turma 1... 109
Figura 41 – Respostas do Grupo 4 da Turma 2.. 110

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Conteúdos em Geometria – Eixo Espaço e Forma - PCN – Anos Iniciais do Ensino Fundamental... 35

Quadro 2 – Expectativas de aprendizagem dos eixos Espaço e Forma e Grandezas e Medidas - Orientações Curriculares do Estado de São Paulo – Anos Iniciais do Ensino Fundamental... 38

Quadro 3 – Objeto de Conhecimento e Habilidades em Geometria – BNCC – 1º ano do Ensino Fundamental Anos Iniciais... 42

Quadro 4 – Objeto de Conhecimento e Habilidades em Geometria – BNCC - 2º ano do Ensino Fundamental Anos Iniciais... 44

Quadro 5 – Objeto de Conhecimento e Habilidades em Geometria – BNCC - 3º ano do Ensino Fundamental Anos Iniciais... 43

Quadro 6 – Objeto de Conhecimento e Habilidades em Geometria – BNCC - 4º ano do Ensino Fundamental Anos Iniciais... 44

Quadro 7 – Objeto de Conhecimento e Habilidades em Geometria – BNCC - 5º ano do Ensino Fundamental Anos Iniciais... 44

Quadro 8 - Expectativas de aprendizagem da Unidade Temática Geometrias – Referencial Curricular do Paraná: Princípios, Direitos e Orientações (versão Preliminar) – Anos Iniciais do Ensino Fundamental............................. 47

Quadro 9 – O ensino de Geometrias não-euclidianas – Caderno de Expectativas de Aprendizagens - Paraná - Anos Finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio.. 52

Quadro 10 – Levantamentos referentes à pergunta 1..................................... 82

Quadro 11 – Levantamentos referentes à pergunta 2..................................... 83

Quadro 12 – Levantamentos referentes à pergunta 3..................................... 86

Quadro 13 – Levantamentos referentes à pergunta 4..................................... 87

Quadro 14 – Levantamentos referentes à pergunta 5..................................... 89

Quadro 15 – Levantamentos referentes à pergunta 6..................................... 89

Quadro 16 – Levantamentos referentes à pergunta 7..................................... 91

Quadro 17 – Levantamentos referentes à pergunta 8..................................... 91

Quadro 18 – Levantamentos referentes à pergunta 9..................................... 92

Quadro 19 – Levantamentos referentes à pergunta 10.................................... 93

Quadro 20 – Levantamentos referentes à pergunta 11.................................... 94

Quadro 21 – Grafos e questionamentos do Grupo 1... 98

Quadro 22 – Grafos e questionamentos do Grupo 2... 101

Quadro 23 – Grafos e questionamentos do Grupo 3... 105

Quadro 24 – Grafos e questionamentos do Grupo 4... 106

SUMÁRIO

CAPÍTULO I

PROBLEMA E CONTEXTO DE ESTUDO 16

1.1 – Problema e Pertinência do Estudo 16

1.2 – Objetivo da Pesquisa 19

1.3 – Organização Geral 20

CAPÍTULO II

A MATEMÁTICA NOS ANOS INICIAIS 22

2.1 – O Ensino de Matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental 22

2.2 – O Ensino de Geometria nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental 24

2.3 – O Ensino de Topologia nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental 27

CAPÍTULO III

OS CURRÍCULOS 34

3.1 – Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN 34

3.2 – Orientações Curriculares do Estado de São Paulo: Língua Portuguesa e Matemática – Ciclo I 37

3.3 – Ensino Fundamental de Nove Anos – Orientações Pedagógicas para os Anos Iniciais – Estado do Paraná 40

3.4 – Base Nacional Comum Curricular - BNCC 41

3.5 – BNCC – Paraná – Referencial Curricular do Paraná: Princípios, Direitos e Orientações (Versão Preliminar) 46

3.6 – Diretrizes Curriculares da Educação Básica - Matemática – Estado do Paraná 51

CAPÍTULO IV

AS TECNOLOGIAS E A MATEMÁTICA 53

4.1 – Uso das Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação – TDIC no Ensino de Matemática 53

4.2 – O uso das TDIC nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental 55

4.3 – O *Software* Scratch 57

CAPÍTULO V

METODOLOGIA 60

5.1 – Opções Metodológicas 60

5.2 – Abordagem Investigativa 62

5.3 – Participantes da Pesquisa 64

5.4 – Procedimentos e Problema das Sete Pontes de Königsberg 65

5.5 – Instrumentos para a recolha de dados 68

CAPÍTULO VI

APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS 69

6.1 – Apresentação e Descrição do Desenvolvimento das Atividades 69

6.2 – Análise das perguntas e respostas das fichas de trabalho utilizadas nas atividades de 1 a 8 80

6.3 – Descrição e Análise do Quinto Encontro 96

CAPÍTULO VII

CONSIDERAÇÕES FINAIS 112

REFERÊNCIAS 119

APÊNDICES 123

Apêndice 1 – Pedido de autorização para Secretário de Educação 124

Apêndice 2 – Pedido de autorização para Diretora da Unidade Escolar 126

Apêndice 3 – Termo de Consentimento Livre e Esclarecido 128

Apêndice 4 – Ficha de trabalho das atividades 1 e 2 130

Apêndice 5 – Ficha de trabalho das atividades 3 e 4 131

Apêndice 6 – Ficha de trabalho das atividades 5 e 6 132

Apêndice 7 – Ficha de trabalho das atividades 7 e 8 133

Apêndice 8 – Ficha de trabalho dos Grupos 1, 2, 3 e 4 134

CAPÍTULO I

PROBLEMA E CONTEXTO DE ESTUDO

Neste capítulo, contextualiza-se o estudo, fazendo-se referência ao problema e pertinência do mesmo, seguindo-se aos objetivos e organização geral deste trabalho.

1.1 - Problema e Pertinência do Estudo

A Matemática encontra-se presente tanto no meio acadêmico quanto no meio social como ciência que subsidia e complementa outras ciências. Permite fazer medições, criar *designs* com linhas, curvas e formas e também que sejam realizadas análises quantitativas, entre tantas outras. Esta diversidade de aplicações matemáticas que perpassa o mundo dos adultos pode ser observada também na realidade infantil. As crianças quando iniciam seus estudos trazem consigo diversas experiências matemáticas adquiridas em suas vivências ao trocar figurinhas, manusear pequenas quantias de dinheiro, ao perceber os números, as quantidades, as formas, as dimensões e operações em diversas situações. Contudo, o uso da Matemática como prática social não garante a aprendizagem dos conceitos necessários para que a criança avance em sua aprendizagem, fazem-se necessários estudos formais. Moretti cita Vigotski para diferenciar os conceitos cotidianos dos científicos.

> (...) uma das principais distinções entre ambos se refere à tomada de consciência pelo sujeito, uma vez que, no processo de apropriação de conceitos cotidianos, a consciência está focada no contexto de utilização; por sua vez, no caso da apropriação de conceitos científicos, é necessária a consciência voltada intencionalmente para o conceito. Nas palavras de Vigotski (2009, p. 243), temos que “no campo dos conceitos científicos ocorrem níveis mais elevados de tomada de consciência do que nos conceitos espontâneos” (MORETTI, 2015, p.23).

Neste sentido, a escola enquanto estrutura legitimadora do ensino formal pode, na medida do possível, transpor os conhecimentos cotidianos em conhecimentos formais, tomando como ponto de partida para o ensino os conhecimentos cotidianos que os estudantes trazem destas vivências, conduzindo-os à tomada de consciência, demonstrando seu uso social, levando-os à percepção de que o fazer matemático nasce de uma necessidade real e se constrói por meio do esforço e contribuição de muitos.

> De forma geral, podemos dizer que educar pressupõe uma mediação entre a cultura e os educandos, de tal modo que, nesse processo, o sujeito interioriza, transforma e garante a continuidade desta cultura. Nos ambientes escolares, elementos da cultura tornam-se objeto de ensino ao serem intencionalmente selecionados e socialmente validados como conteúdos escolares (MOURA, 1996 *apud* MORETTI, 2015, p. 25).

Desta forma, o conhecimento formal desenvolvido ao longo do tempo por muitos sofre adaptações para que seja integrado aos conteúdos escolares, tornando-se passíveis de serem ensinados aos estudantes.

Os estudantes que frequentam os Anos Iniciais do Ensino Fundamental[1], foco desta pesquisa, estão iniciando o processo de desenvolvimento de habilidades para realizarem operações lógicas, fazerem relações e generalizações, pensarem e representarem um objeto utilizando apenas suas memorias; estas são algumas características do pensamento matemático.

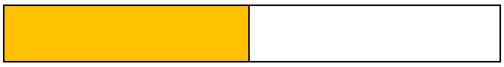
Objetos matemáticos, segundo Duval (2012, p.269), "não são diretamente acessíveis à percepção ou à experiência intuitiva imediata, como são os objetos comumente ditos 'reais' ou 'físicos'. É preciso, portanto, dar representantes". Entende-se por objetos matemáticos, os números, as expressões, os gráficos bem como outros recursos utilizados. Eles podem ser representados, por exemplo, por meio da verbalização de um número, ao dizer a palavra "dois" eu acesso oralmente este objeto matemático. Outro exemplo, […] utilizar um sistema de numeração contendo o símbolo "0", para designar não apenas os números, mas para realizar operações aritméticas. (FREITAS, REZENDE, 2013, p.16)

Conhecer os objetos matemáticos, segundo Duval (2012), é ação realizável apenas por meio das representações semióticas que estes objetos possuem, uma vez que não são passíveis de acesso direto. Desta forma, afirma que objetos matemáticos são facilmente confundidos com suas representações.

[1] Em alguns momentos será utilizado apenas o termo "Anos Iniciais" para se referir à "Anos Iniciais do Ensino Fundamental".

Um objeto matemático possui diversas representações semióticas. Ao representar a metade de alguma coisa, posso utilizar uma das quatro representações semióticas que seguem: 0,5; ½, ¼ x 2.

Figura 1 – Representação gráfica da metade



Fonte: Autora

Segundo Freitas e Rezende (2013, p. 17) é justamente esta característica, “a possibilidade de multirrepresentação potencial de um mesmo objeto” que não permite que se confunda o objeto com sua representação.

Neste sentido, pensar matemáticamente é pensar de forma abstrata, e segundo estudos desenvolvidos por Piaget e Inhelder (1993), Lorenzato (2008), Smole (2014), entre outros, as primeiras noções espaciais das crianças mostram que elas se dão por meio das noções topológicas estudadas em Geometria, como a percepção de vizinhança, fronteira, noções de dentro/fora, interior/exterior, ordem, etc. A Topologia faz parte da Geometria não euclidiana, conhecida como “Geometria da borracha”, por estudar as características que não se alteram quando um objeto é deformado ou distorcido, sem que hajam rupturas neste.

Considerando a importância do ensino destes conhecimentos e refletindo sobre estas características das crianças dos Anos Iniciais, a pesquisadora se viu motivada em aprofundar estes estudos e investigar como os estudantes dos Anos Iniciais se aproximam das noções topológicas, em específico dos teoremas desenvolvidos por Leonhard Euler, por meio de tarefas investigativas utilizando o *software* Scratch.

Estes estudos se justificam ao perceber dificuldades demonstradas pelos estudantes, quanto à aprendizagem de alguns conceitos estudados em Geometria, bem como, por parte dos professores, quanto ao ensino dela. As pesquisas que abordam o currículo e questões do ensino, desenvolvidas em Universidades e centros de pesquisas parecem distantes da realidade de professores que atuam nas salas de aula bem como para os que estão em formação,

> nos cursos de formação inicial e continuada de professores, quando se discute o ensino de Matemática, o tema é apresentado isento de

> qualquer referencial teórico, sem tematizar a prática docente em relação ao que as pesquisas revelam. […] os textos orientadores divulgados em projetos de formação do Ministério da Educação, que circulam pelo país, a nosso ver, não trazem questões para o debate e apenas reforçam concepções e práticas bastante tradicionais, frente aos avanços da pesquisa (PIRES, 2012, p.61).

A formação dos professores polivalentes não caminha ao lado das novas propostas curriculares, há um desencontro entre a produção científica e a *práxis* docente. O uso de recursos tecnológicos, tanto no ensino de Matemática quanto na formação dos professores, tem se mostrado cada vez mais uma tendência. Pesquisas como as desenvolvidas por Kalinke (2013) apontam que vive-se um momento histórico-tecnológico, de forma que o uso da tecnologia associa-se ao desenvolvimento científico à prática cotidiana, ao ensino e entre outros. A tecnologia presente no ensino de Matemática assume posição de destaque,

> quer pelas discussões que sinalizam cada vez mais a importância de o ensino da Matemática sintonizar-se com as necessidades e demandas para a vida em sociedade; quer pelo reconhecimento das complexidades que envolvem a formação do professor que ensina Matemática na educação básica; quer pelos resultados que seu uso pode propiciar. De qualquer modo, a utilização de novas tecnologias está se tornando uma praxe em muitas atividades pedagógicas (KALINKE, 2013, p. 360).

Neste sentido, utilizou-se o *software* Scratch nas atividades propostas para proporcionar aos estudantes experiências de aprendizagem com o uso de um recurso tecnológico, permitindo-lhes a formulação e exploração de conjecturas.

1.2 – Objetivo da Pesquisa

Sabendo-se da importância dos conhecimentos em Geometria e o quanto este ensino pode contribuir com as primeiras aprendizagens espaciais das crianças, esta pesquisa tem como objetivo, abordar conceitos topológicos com estudantes que frequentam os Anos Iniciais do Ensino Fundamental utilizando o *software* Scratch e observar como eles se aproximam dos teoremas que sustentam a "Teoria dos Grafos" por meio da Investigação Matemática. As tarefas foram inspiradas no problema "As sete pontes de Königsberg", que foi explicado pelo matemático Leonhard Euler.

A escolha por este problema em específico se deu por se tratar de um problema interessante, pouco explorado no Ensino Fundamental e que ao ser adaptado ao contexto infantil, apresenta um caráter lúdico, bem como pode contribuir com a formação do conhecimento em Geometria não apenas para os Anos Iniciais mas para outros segmentos.

A abordagem investigativa utilizada seguiu na perspectiva de Ponte, Brocardo e Oliveira (2013) e Ponte *et al*. (2017) e a escolha pelo *software* Scratch ocorreu por se tratar de uma plataforma de desenvolvimento de código aberto, ou seja, *software* livre para uso. É de fácil utilização e possibilita a reutilização de código fonte.

1.3 – Organização Geral

O documento está organizado em 7 capítulos, este primeiro, aborda o problema e contexto do estudo, sua pertinência, objetivo e organização geral.

O segundo capítulo apresenta a revisão de literatura, que aborda o ensino de Matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, desdobrando para o ensino de Geometria e finalizando com o ensino de Topologia para os Anos Iniciais do Ensino Fundamental, tendo como base alguns autores da área como Pavanelo (2009), Passos e Nacarato (2014), Lorenzato (2008) e Piaget e Inhelder (1993).

O terceiro capítulo, apresenta a abordagem de alguns conteúdos de Matemática e Geometria e seu ensino, percebidos nos currículos, a saber: Parâmetros Curriculares Nacionais; Orientações Curriculares do Estado de São Paulo; Ensino Fundamental de Nove Anos – Orientações Pedagógicas para os Anos Iniciais – Estado do Paraná; Base Nacional Comum Curricular; Referencial Curricular do Paraná: Princípios, Direitos e Orientações e Diretrizes Curriculares da Educação Básica – Matemática - Estado do Paraná.

O quarto capítulo, trata-se do uso das Tecnologías Digitais da Informação e Comunicação – TDIC no Ensino de Matemática desdobrando-se para o uso das TDIC nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental e breve explanação a respeito do *software* Scratch.

O quinto capítulo descreve a metodologia utilizada, a abordagem investigativa, adotada por Ponte, Brocardo e Oliveira (2013) e Ponte *et al*. (2017).

Descreve os participantes da pesquisa, o problema das Sete Pontes de Königsberg, bem como os instrumentos utilizados para a recolha dos dados da pesquisa.

O sexto capítulo apresenta e descreve a forma com que as atividades investigativas foram desenvolvidas, apresenta e analisa as perguntas das fichas de trabalho utilizadas nos encontros e finaliza com a descrição e análise do quinto encontro, em que os estudantes apresentaram suas percepções para os colegas.

No sétimo e último capítulo, encontram-se as considerações finais elaboradas a partir das reflexões possibilitadas por este estudo.

CAPÍTULO II

A MATEMÁTICA NOS ANOS INICIAIS

Neste capítulo, referenciam-se algumas perspectivas de vários autores ao que concerne ao tema principal deste estudo.

Inicia-se com uma contextualização quanto ao ensino de Matemática, seguido por uma abordagem ao ensino de Geometria, finalizando com o ensino de Topologia, sempre em relação aos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Tomou-se como base alguns autores da área como Pavanelo (2009), Passos e Nacarato (2014), Lorenzato (2008) e Piaget e Inhelder (1993), entre outros.

2.1- O Ensino de Matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental

O ensino escolar se dá por meio do trio estudante, professor e objeto de ensino, conhecer este último, caracteriza-se em um fazer que recebe influência direta das experiências dos indivíduos envolvidos, bem como do meio em que vivem (SÃO PAULO, 2008). Para que ocorra a aprendizagem, o estudante precisa sentir-se motivado de alguma forma.

Motivar o estudante para a aprendizagem é uma tarefa complexa e em alguns casos, é preciso que ele encontre uma utilização prática do conhecimento de forma a significar sua aprendizagem. Determinados assuntos interessam mais a uns do que a outros, neste sentido, Moura (1996, p. 42) faz os seguintes questionamentos: “A atividade (educativa) para o professor é igualmente uma atividade para o aluno? Se são diferentes, como fazer com que ambas tenham significado para o professor e para o aluno?”. Estes questionamentos remetem a interesses pessoais, desejos e significados que se diferenciam de uns para outros.

Atividade é um processo que tem como alvo um objetivo, um motivo, e que, no caso do ensino, por parte do professor, chega carregado de intenções, motivações pessoais, reflexos de suas experiências, bem como influência do meio. Para Leontiev (1988*, apud* Moura, 1996), “atividade” é quando a motivação por parte do estudante, coincide com o objetivo proposto pelo professor. Diferentemente, “ação”, para o mesmo autor, caracteriza-se na motivação por parte do estudante durante as atividades, que neste caso passa a ser diferente daquela proposta pelo professor. Quando a motivação é algo íntimo do estudante, ele realiza a atividade, mas com intenções pessoais, carregada de significado, caracterizando assim em uma busca pelo conhecimento.

> “Um ato ou ação é um processo cujo motivo não coincide com o objetivo (com aquilo para o qual se dirige), mas reside na atividade da qual ela faz parte. Para que a ação surja e seja executada é necessário que o seu objetivo apareça para o sujeito, em relação com o motivo da atividade da qual faz parte” (LEONTIEV, 1988 *apud* MOURA, 1996, p.38).

A criança aprende com aquilo que lhe chama a atenção e nesta busca, constrói o seu próprio conhecimento quando apoiada em suas experiências de mundo, utilizando- se de modelos e materiais encontrados no meio em que vive, que lhe causam empatia e lhe chamam atenção. Neste sentido, o professor pode conduzir o estudante à “ação”, apresentando atividades que lhe sejam significativas, como partir do conhecimento prévio que o estudante possui, demonstrar aplicações práticas, bem como utilizar materiais que realmente representem o assunto tratado.

Ensinar Matemática para estudantes que frequentam os Anos Iniciais do Ensino Fundamental requer um olhar diferenciado por parte de quem ensina, tanto em relação à abordagem dos conteúdos, por possuir características de abstração, como com o ambiente de aprendizagem, que pode ser repleto de fatores estimulantes e rico em modelos, como livros, panfletos de mercado, formas geométricas, balanças, calculadoras, instrumentos de medições, entre outros, para que a criança tenha amplo repertório de seu interesse ao seu alcance, o que pode contribuir para aprendizagem. Estes fatores associados são capazes de auxiliar na aprendizagem, no desenvolvimento de habilidades, nas tomadas de decisões e análise de situações cotidianas para resolver problemas.

Os estudantes dos Anos Iniciais estão iniciando seus estudos, contudo já trazem consigo seus conhecimentos, suas vivências. Neste sentido, a escola responsável pelo ensino formal precisa ter este olhar diferenciado, no sentido de promover um ensino repleto de significados, de forma que o estudante seja incentivado a se expressar usando todas suas linguagens corporais, não apenas a verbal e escrita, mas a audiovisual, colagem, pintura, desenho, representações, modelagem, entre outras.

> De fato, o aluno dá significado às coisas a partir daquilo que sabe, de toda a sua experiência anterior e, não necessariamente, a partir da

> lógica interna dos conteúdos ou do sentido que o professor atribui às mesmas coisas. A aprendizagem requer o envolvimento das crianças em atividades significativas. As explicações do professor, em um momento adequado e de uma forma apropriada, são certamente elementos fundamentais. Convém ressaltar que, não adianta ensinar conteúdos novos de modo expositivo se as crianças não tiveram oportunidades de viver experiências concretas sobre as quais essas explicações podem fazer sentido (SÃO PAULO, 2014, p.9).

Os estudantes dos Anos Iniciais encontram-se em processo de descobertas e possuem um olhar repleto de deslumbramentos pelas coisas do mundo. O fazer pedagógico que busca manter um caráter rico e afetivo pode lhes proporcionar autoconfiança, vivências e trocas de experiências com seus pares e com outros. Explorar instrumentos utilizados no seu cotidiano bem como na Matemática, fazer questionamentos, encontrar um mundo de curiosidades são experiências que o professor pode proporcionar para os estudantes para que eles possam colocar em prática o que aprenderam, na busca de uma formação cidadã.

2.2 - O Ensino de Geometria nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental

A Geometria componente curricular da Matemática aborda o estudo do espaço e das formas. Conhecimentos que permitem ao estudante desenvolver conceitos e procedimentos para construir relações, compreender o espaço a sua volta, orientando-se e conhecer a natureza e a sociedade, em disciplinas como Educação Física, Arte e Geografia, por exemplo. Desta forma,

> [...] é importante estimular os alunos a progredir na capacidade de estabelecer pontos de referência em seu entorno, a situar-se no espaço, deslocar-se nele, dando e recebendo instruções, compreendendo termos como esquerda, direita, distância, deslocamento, acima, abaixo, ao lado, na frente, atrás, perto, para descrever posições, construindo itinerários. Também é importante que observem semelhanças e diferenças entre formas tridimensionais e bidimensionais, figuras planas e não planas, que construam e representem objetos de diferentes formas (BRASIL, 1998, p.45).

Esses conceitos aprendidos no início da escolarização podem servir como introdução para aprendizagens posteriores e constituem-se nas competências geométricas e trigonométricas utilizadas em diferentes contextos como a Topografia, Navegação, Física, entre outras. Como áreas que se complementam, a Geometria e a Trigonometria formam a base dos conhecimentos utilizados em Geometria Analítica, conteúdo ensinado no Ensino Médio.

Apesar da relevância deste ensino, a Geometria esteve por um longo período às margens dos currículos escolares. Segundo Pavanello (2009), este fato se deu, após a promulgação da Lei 5692/71 que concedia às escolas liberdade para elaborar seus currículos. Em muitos casos, a Geometria quando aparecia nos materiais pedagógicos, era deixada para ser ensinada apenas ao final do ano letivo, quando já não se tinha o tempo adequado para esse ensino. Este fato acabou ocasionando uma lacuna nos conhecimentos geométricos de estudantes daquele período. Muitos dos quais, caracterizam-se nos atuais professores polivalentes, que necessitam ensinar este conteúdo e não obtiveram uma formação adequada em Geometria. Desta forma, sentem-se pouco confortáveis em lecionar conhecimentos que não lhes são familiares.

> Talvez o longo período em que a geometria ficou relegada a um segundo plano tenha deixado marcas profundas em várias gerações de alunos e são sentidas até hoje pelos professores que não tiveram a formação geométrica quando alunos (PASSOS; NACARATO, 2014, p. 1148).

A partir do final do século XX, a importância de se desenvolver o pensamento geométrico na criança passa a ser foco de estudos acadêmicos e a compor temas em congressos. E, em 1997, com a publicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais, a Geometria volta gradativamente a fazer parte dos currículos e a compor uniformemente as unidades dos livros didáticos. (PASSOS; NACARATO, 2014)

Como parte do ensino de Geometria, as noções espaciais caracterizam-se nas primeiras aprendizagens das crianças, e estas se dão por meio das relações topológicas, como as noções de envolvimento, proximidade, interior/exterior, de vizinhança, continuidade, entre outros. Em seguida, começam a compreender as relações projetivas que estudam as distâncias e os pontos de vista, por último, compreendem as relações euclidianas, como o estudo dos planos, retas, pontos, etc. PIAGET; INHELDER (1993) e LORENZATO (2008).

Corroborando com os estudos de Piaget e Inhelder (1993), Lorenzato (2008) e Smole (2014) afirmam que a criança começa a compreender os conceitos geométricos por meio do reconhecimento do espaço a sua volta, como os objetos se relacionam e as características intrínsecas a eles, adquiridas por meio de manipulações e experiências de contato. As relações topológicas permitem esse tipo de conhecimento.

> A criança apropria-se das relações de espaço primeiramente através da percepção de si mesma, passando pela percepção dela no mundo ao seu redor para, então chegar a um espaço representado em forma de mapas, croquis, maquetes, figuras coordenadas, etc. Tal aproximação não é rápida nem ao menos simples e, no início, está estreitamente relacionada com a organização do esquema corporal, a orientação e a percepção espacial (SMOLE, 2014, p.25).

Após essas experiências manipulativas é que a criança se torna capaz de compreender conceitos mais abstratos, como por exemplo, perceber um objeto por meio de outros pontos de vista, imaginar-se na posição de outro e perceber seu ponto de vista em relação a um determinado objeto. Esta apreensão de conceitos de forma manipulativa conduz a criança ao desenvolvimento intelectual, por meio do qual se torna capaz de representar objetos mesmo na ausência destes.

Pesquisas como as desenvolvidas por Fonseca (2011) e Lorenzato (2008) têm mostrado que os materiais pedagógicos desenvolvidos para estudantes que frequentam os Anos Iniciais do Ensino Fundamental iniciam os estudos de Geometria por meio das relações euclidianas, como estudos de retas, planos, medidas, etc.

Seguindo nesta linha de pensamento, Debastiani Neto *et al.,* (2010) afirma que, ensinar Geometria para crianças,

> [...] seria considerar a ordem da psicogênese das estruturas geométricas. Que é diferente da encontrada na História da Matemática, na qual a Topologia, enquanto conhecimento estruturado e formalizado é posterior às geometrias euclidiana e projetiva. Assim, de acordo com este referencial teórico, o ensino de Geometria deve iniciar pelas relações topológicas, seguidas das projetivas e euclidianas, já na Educação Infantil e anos iniciais do Ensino Fundamental. Contrariando as propostas curriculares que, normalmente, apresentam esses conteúdos apenas a partir da segunda fase do Ensino Fundamental (Geometria Euclidiana) e Ensino Superior (Topologia e, em raros cursos a Geometria Projetiva) (DEBASTIANI NETO, *et al.,* 2010, p. 72).

Corroborando com estes estudos, acredita-se que o ensino de Geometria se torne mais eficaz quando o professor consegue aproximar, na medida do possível, os conteúdos que serão ensinados aos conhecimentos empíricos do estudante. O ensino de Geometria pode ser iniciado por meio de contato e experimentações nos objetos. Desta forma,

> a criança conhece o espaço sobretudo através do movimento, e noções como proximidade, separação, vizinhança, continuidade, organizam-se em uma relação de pares de oposição (parecido/diferente, parte/todo, dentro/fora, pequeno/grande) de acordo com as explorações corporais que ela faz (SMOLE, 2014, p.32).

Manipulando, comparando, fazendo composições e decomposições os estudantes são capazes de perceberem as características dos objetos a serem estudados, esta primeira aproximação nestes objetos ocorrem por meio das noções topológicas.

2.3 - O ensino de Topologia nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental

No final do século XVIII e início do século XIX, surgem as geometrias não-euclidianas em resposta a problemas que a Geometria euclidiana não era capaz de resolver.

A Topologia compreende um ramo da Geometria que estuda as características qualitativas, não se importando com medidas de distâncias, ângulos, dimensões, entre outros. Ao que refere às formas, pode ser considerada uma “Geometria da borracha” porque estuda as características que não se alteram quando uma forma sofre uma deformação, mantendo relações de equivalência com a forma original. Desta forma, quando um triângulo se transforma em um quadrado ou em um círculo, os elementos que estavam no interior do triângulo devem permanecer no interior do quadrado ou círculo, os elementos que se encontravam vizinhos uns dos outros devem permanecer desta forma nas figuras transformadas.

> Sejam duas figuras A e B; a transformação de A em B é topológica quando duas condições são preenchidas:
>
> a) a cada ponto a de A corresponde um só ponto *b* de B; a recíproca também é verdadeira, correspondência biunívoca.
>
> b) a transformação topológica é contínua nos dois sentidos; assim, dados dois pontos *a* e *a’* de A se, por um movimento de *a* sua distância ao ponto *a’* tender a zero, igualmente tende a zero a distância entre os dois pontos correspondentes *b* e *b’* de B; a recíproca é verdadeira. Assim, exemplificando, se dobrarmos um pedaço de arame sem rompê-lo, a vizinhança entre pontos do arame

> antes de ser dobrado é preservada no arame dobrado; igualmente, ao desdobrarmos o mesmo arame (esta seria a transformação inversa da primeira), pontos vizinhos no arame dobrado permanecerão vizinhos no arame distendido (BORGES, 2005, p.19).

Nesse sentido, uma transformação topológica mantém correspondência biunívoca (um para um) entre uma figura e sua deformação, bem como uma relação de equivalência (aquela que satisfaz as propriedades de reflexividade, simetria e transitividade) com ela, em que uma pode se transformar na outra, nos dois sentidos.

Esse estudo é de grande relevância, uma vez que as formas geométricas podem ser observadas nos objetos do cotidiano, na natureza, construções e obras de arte e ainda, para os conhecimentos geométricos infantis, porque, quanto menor for a criança mais apegada à ideia de que as formas geométricas fechadas são as mesmas; um círculo se transforma em triângulo, em quadrado, em retângulo por meio de uma distorção em suas arestas.

A parte da Topologia que se refere ao espaço, caracteriza-se nas primeiras noções desenvolvidas pelas crianças. Este estudo compreende as noções de vizinhança, interior e exterior, continuidade, ordem, separação e fronteira (LORENZATO, 2008).

Segundo Piaget (1975), as noções espaciais na criança surgem logo no começo, quando ela abre os olhos e percebe tudo ao seu redor, as pessoas, os objetos. Com seu crescimento, passa a se relacionar com eles sem se perceber parte deste espaço o que ocorre apenas com mais maturidade. Essa construção espacial, ocorre a partir de seu desenvolvimento intelectual, associado às suas relações com as pessoas e experiências manipulativas com os objetos de seu conhecimento, em que ela necessita agir, pegar, comparar, compor e decompor. Estas experiências proporcionam-lhe condições de representar os objetos, mesmo que estes não estejam em seu campo de visão. A partir da aquisição destes conhecimentos, as experiências manipulativas vão aos poucos ficando de lado, pois a criança vai se tornando capaz de representá-los de forma abstrata, apenas com o pensamento ao lembrar-se delas.

A partir destes conhecimentos vão se tornando cada vez mais aptos a compreenderem as geometrias quantitativas: projetivas e euclidianas (LORENZATO, 2008).

Por estas particularidades, as aprendizagens espaciais das crianças, segundo Piaget e Inhelder (1993), se iniciam por meio de características topológicas que são qualitativas como as noções de:

- *Vizinhança* a noção de vizinhança é explicada “pela proximidade dos elementos percebidos em um mesmo campo” (*op. cit,* p.21).

Exemplo da noção topológica vizinhança – Brincadeiras com comandos (LORENZATO, 2008).

> O professor constrói no chão curvas abertas ou fechadas e, em seguida, cada criança deve ocupar a posição que desejar (dentro, fora, sobre o contorno). O professor pode explorar com estas atividades as noções de contorno, fronteira, separação, curva, aberto/fechado, interior/exterior, dentro/fora e vizinhança (LORENZATO, 2008, p. 152).

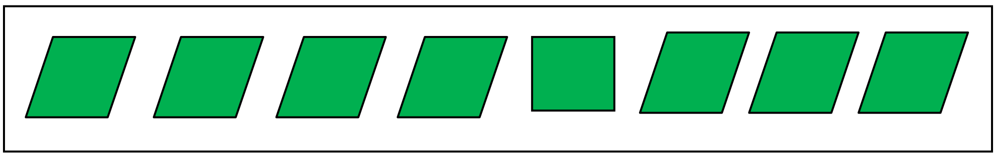
- Separação, “dois elementos vizinhos podem se interpenetrar e se confundir em parte: introduzir entre eles uma relação de separação consiste em dissociá-los” (*op. cit,* p.21). As noções de vizinhança e separação caracterizam-se, segundo estudos de Piaget e Inhelder (1993), como as primeiras noções desenvolvidas na criança. Ao

> que se refere à distinção ou destaque de um objeto que se encontra entre dois ou mais objetos, esta característica mantém forte relação com a anterior, quanto menor a criança mais a proximidade leva vantagem sobre outros fatores de organização (semelhança, simetria, etc); com o desenvolvimento, ao contrário, o fator proximidade prima menos em relação aos outros e os elementos de um todo podem ser relacionados a distâncias menos exíguas (PIAGET, INHELDER, 1993, p.21).

Com seu desenvolvimento a criança passa a perceber esta distinção entre os objetos observados.

Figura 2: Exemplo 1 da noção topológica separação

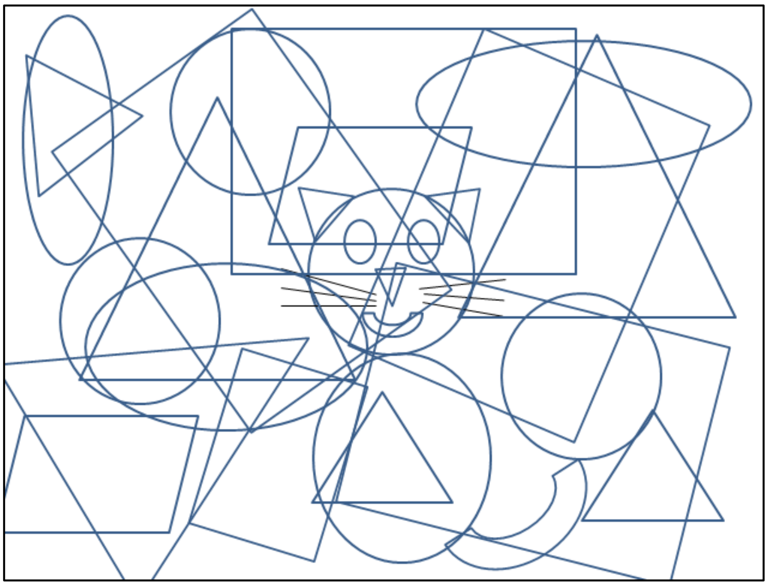
Encontrar o objeto diferente



Fonte: Autora

Figura 3: Exemplo 2 da noção topológica separação

Encontrar o animal escondido

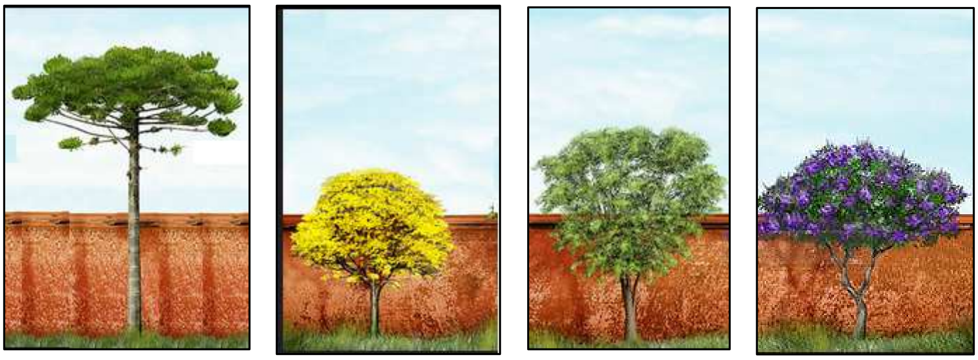


Fonte: Autora

- Ordem, compreende a ordenação de objetos no espaço, pode ser linear ou cíclica.

Figura 4 - Exemplo da noção topológica ordem linear

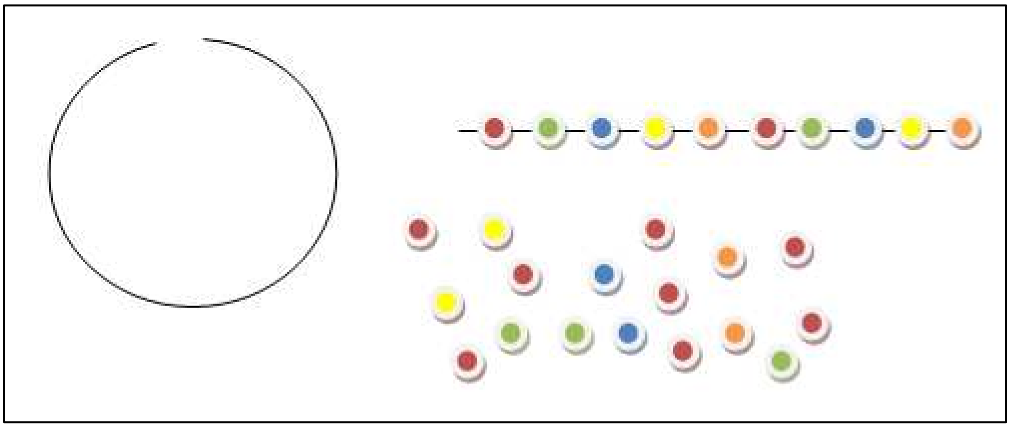
Organizar os objetos do menor para o maior



Fonte: Autora adaptado de imagens Creative Commons

Figura 5 - Exemplo da noção topológica ordem cíclica

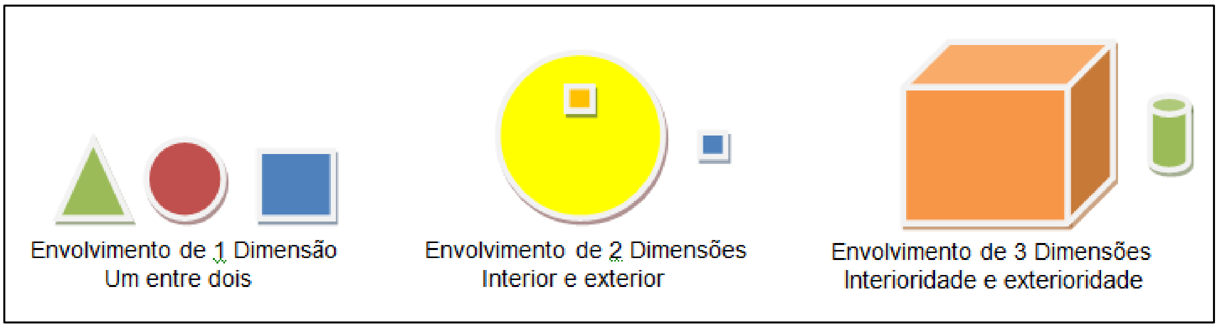
Construir um colar de pérolas seguindo a mesma sequência disposta na haste.



Fonte: Autora adaptado de Piaget e Inhelder (1993, p. 98)

- *Envolvimento*, esta característica envolve três dimensões: quando se refere a um elemento de uma dimensão, esta relação se dá na forma de um entre dois. Com elemento bidimensional, esta relação se dá por meio de conceitos como interior/exterior (elementos dentro e fora de um círculo, por exemplo), quando se refere a elementos tridimensionais, a relação se estabelece por meio de conceitos como interioridade/exterioridade (interno/externo a uma caixa).

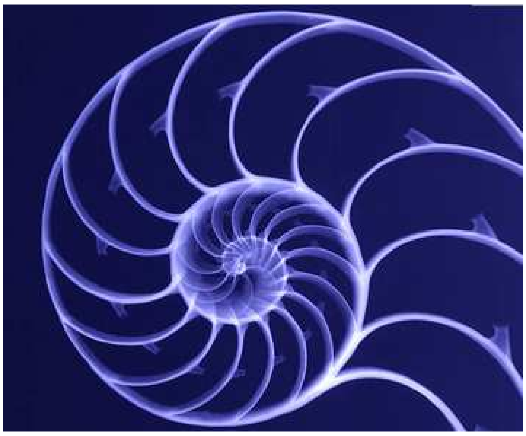
Figura 6 - Exemplos da noção topológica envolvimento



Fonte: Autora

- *Continuidade* é perceber a continuidade do objeto quando este não se encontra em seu campo de visão, por exemplo, o seccionamento de uma figura ou linha até o seu último limite, conceito de infinito.

Figura 7 - Exemplo da noção topológica continuidade



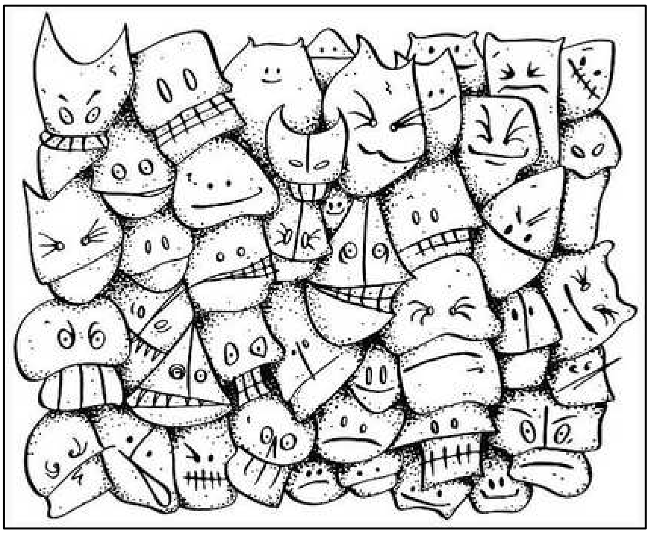
Fonte: Getty Images – Licença Creative Commons

- *Fronteira*

Segundo Sampaio (2004, p. 10), “Um mapa é um grafo plano, cujas faces têm fronteiras que são caminhos simples fechados do grafo. Em um mapa, cada aresta é compartilhada por exatamente duas faces”. Neste sentido, uma fronteira é a linha ou aresta que limita dois territórios ou duas faces.

Figura 8 - Exemplo da noção topológica fronteira

Teorema das 4 cores. Colorir uma imagem utilizando apenas 4 cores de forma que regiões vizinhas não fiquem com a mesma cor.



Fonte: Getty Images – Licença Creative Commons

Segundo Sampaio (2004, p. 2)

> Conta-se a história de que, em 1852, logo após ter concluído seus estudos no University College, em Londres, o jovem matemático Francis Guthrie, que mais tarde tornou-se professor de matemática na África do Sul, estava um dia colorindo um mapa dos condados da Inglaterra. Enquanto coloria o mapa, tomava o cuidado de não colorir com a mesma cor países vizinhos que tivessem alguma linha de fronteira em comum. Notou então que apenas quatro cores bastariam para colorir esse mapa (SAMPAIO, 2004, p.2).

O problema das quatro cores é um problema simples, contudo é de difícil demonstração. Vários matemáticos trabalharam durante muitos anos neste problema.

Neste sentido, pelas características das aprendizagens infantis que iniciam por meio das noções topológicas como: vizinhança, fronteira, continuidade, ordem, separação e fronteira, o presente estudo pretende abordar noções introdutórias de Topologia para estudantes que frequentam os Anos Iniciais do Ensino Fundamental por se tratar de conhecimento que contempla suas primeiras aprendizagens espaciais que subsidiam conhecimentos futuros.

Diante disso, pensou-se em investigar alguns documentos oficiais que norteiam os currículos escolares, tais como: Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN, Orientações Curriculares do Estado de São Paulo, Ensino Fundamental de Nove Anos – Orientações Pedagógicas para os Anos Iniciais - Estado do Paraná, Base Nacional Comum Curricular – BNCC, Referencial Curricular do Paraná: Princípios, Direitos e Orientações (Versão preliminar) e Diretrizes Curriculares da Educação Básica – Matemática - Estado do Paraná, em busca da abordagem de alguns conteúdos de Matemática e Geometria dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, bem como se ocorrem orientações de ensino de noções introdutórias de Topologia. O levantamento realizado é apresentado no próximo capítulo.

CAPÍTULO III

OS CURRÍCULOS

Os currículos caracterizam-se em orientações quanto ao ensino dos conteúdos disciplinares e as competências a serem alcançadas pelos estudantes nas etapas escolares. Subsidiam a elaboração de livros didáticos, bem como as avaliações externas.

Este capítulo apresenta a abordagem de alguns conteúdos de Matemática e Geometria percebidos em alguns currículos, tais como:

- Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN;
- Orientações Curriculares do Estado de São Paulo;
- Ensino Fundamental de Nove Anos – Orientações Pedagógicas para os Anos Iniciais - Estado do Paraná;
- Base Nacional Comum Curricular - BNCC;
- Referencial Curricular do Paraná: Princípios, Direitos e Orientações e Diretrizes Curriculares da Educação Básica – Matemática - Estado do Paraná.

O levantamento em tais documentos teve como finalidade observar a abordagem em Matemática e Geometria apresentada nestes e verificar se há orientações quanto ao ensino de noções introdutórias de Topologia para os Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

Pensou-se em estudar os documentos do Estado de São Paulo, uma vez que a escola, na qual as atividades se desenvolveram se situa no referido Estado. E quanto aos documentos do Estado do Paraná, por se tratar de pesquisa desenvolvida no âmbito da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

3.1 - Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN

Segundo o documento Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997), o ensino de Matemática no Ensino Fundamental visa à formação do cidadão que se posiciona de maneira crítica e conhece seu papel na sociedade, respeitando sua diversidade cultural e seus conhecimentos previamente adquiridos, de forma que o estudante tenha condições de se tornar ativo e transformar seu ambiente.

Propõe que o ensino de Matemática se paute na resolução de problemas, utilizando para isto alguns recursos como tecnologias, jogos, História da Matemática, materiais manipuláveis, entre outros. Divide os conteúdos matemáticos em quatro blocos e propõe que estes sejam ensinados de forma que se integrem e relacionem uns nos outros, bem como a outras áreas do conhecimento. Os blocos compreendem: Números e Operações, Espaço e Forma, Grandezas e Medidas e Tratamento da Informação.

Segundo o documento PCN (BRASIL, 1997), quanto aos conteúdos e procedimentos referentes ao bloco Espaço e Forma, espera-se que os estudantes sejam capazes de estabelecer relações, fazer comparações e identificar características nas formas dos objetos, bem como associá-las ao espaço percebido.

Quadro 1 – Conteúdos em Geometria – Eixo Espaço e Forma - PCN – Anos Iniciais do Ensino Fundamental

CONTEÚDOS DE GEOMETRIA – PCN	
Espaço e Forma	Localização de pessoas ou objetos no espaço, com base em diferentes pontos de referência e algumas indicações de posição.
	Movimentação de pessoas ou objetos no espaço, com base em diferentes pontos de referência e algumas indicações de direção e sentido.
	Descrição da localização e movimentação de pessoas ou objetos no espaço, usando sua própria terminologia.
	Dimensionamento de espaços, percebendo relações de tamanho e forma.
	Interpretação e representação de posição e de movimentação no espaço a partir da análise de maquetes, esboços, croquis e itinerários.
	Observação de formas geométricas presentes em elementos naturais e nos objetos criados pelo homem e de suas características: arredondadas ou não, simétricas ou não.
	Estabelecimento de comparações entre objetos do espaço físico e objetos geométricos - esféricos, cilíndricos, cônicos, cúbicos, piramidais - sem o uso de nomenclatura.
	Percepção de semelhanças e diferenças entre cubos e quadrados, paralelepípedos e retângulos, pirâmides e triângulos, esferas e círculos
	Construção e representação de formas geométricas.

Fonte: Autora, adaptado de Brasil (1997)

Quanto aos conteúdos do eixo Espaço e Forma, a proposta do documento orienta que as noções espaciais sejam introduzidas por meio do estudo de pontos de referência e uso de materiais representativos, como maquetes, mapas e itinerários.

O documento PCN corrobora com os estudos de Piaget (1975, p.213), Lorenzato (2008), Smole (2014), Debastiani Neto, *et al.* (2010), quanto ao estudo das formas, em que orienta que sejam trabalhados os sólidos, suas características, bem como estabelecendo comparações, sem que o foco do ensino neste nível de escolarização se atenha ao uso das nomenclaturas.

Na parte do documento intitulado Orientações Didáticas, parte do pressuposto de que as crianças iniciam sua construção espacial por meio de experiências táteis, a partir da relação do mundo com seu próprio corpo que as crianças pequenas são capazes de distinguir um mundo exterior formado por elementos, de um mundo interior ligado a ela. Ao longo dos anos, a criança vai aprimorando suas estruturas mentais, "[...] de onde decorre um egocentrismo espacial que tende a desaparecer a partir do momento em que o indivíduo se situe no espaço enquanto tal, em vez de perceber o espaço em função de si" (PIAGET, 1975, p. 213).

Apenas mais tarde, é capaz de perceber outros pontos de vista em relação aos objetos. Dessa forma, o desenvolvimento da estrutura espacial na criança é relativo à tomada de consciência, em que esta, ao passar por determinadas experiências, começa a se ver como parte deste espaço, como elemento dele.

Esse espaço percebido pela criança — espaço perceptivo, em que o conhecimento dos objetos resulta de um contato direto com eles — lhe possibilitará a construção de um espaço representativo — em que ela é, por exemplo, capaz de representar os objetos em sua ausência.

> O ponto, a reta, o quadrado não pertencem ao espaço perceptivo. Podem ser concebidos de maneira ideal, mas rigorosamente não fazem parte deste espaço sensível. Pode-se então dizer que a Geometria parte do mundo sensível e o estrutura no mundo geométrico — dos volumes, das superfícies, das linhas e dos pontos" (BRASIL, 1998, p. 81).

Neste sentido, é importante que o ensino de Geometria inicie de forma que os estudantes tenham oportunidades de manusear, comparar, representar, observar os objetos que estão estudando, ou conhecendo, para que mais tarde tenham condições de representá-los, utilizando para isso suas memórias e experiências. Conforme passam por experiências de manipulações e observações, os estudantes vão construindo suas primeiras noções espaciais, utilizando-se para isto os sentidos e os movimentos.

3.2 - Orientações Curriculares do Estado de São Paulo: Língua Portuguesa e Matemática – Ciclo I

A abordagem de ensino apresentada neste documento parte do pressuposto que o professor assume os papeis de mediador, organizador e consultor do conhecimento, delegando aos estudantes o papel de agente da construção de seu conhecimento. O professor deve ainda "conhecer os procedimentos da didática da Matemática, que transformam o conhecimento matemático formalizado em conhecimento escolar que pode ser compreendido pelo aluno" (SÃO PAULO, 2008, p. 23).

A Matemática que se ensina deve ser contextualizada e descontextualizada na busca pela superação dos obstáculos.

> A contextualização dos conhecimentos ajuda os alunos a torná-los mais significativos estabelecendo relações com suas vivências cotidianas, atribuindo-lhes sentido. Porém, é preciso também promover a sua descontextualização, garantindo que possam observar regularidades, buscar generalizar e transferir tais conhecimentos a outros contextos, pois um conhecimento só se torna pleno quando puder ser aplicado em situações diferentes daquelas que lhe deram origem (SÃO PAULO, 2008, p. 23).

Neste sentido, o ensino de Matemática tem como objetivos que os estudantes a vejam como conhecimento necessário para se compreender a realidade, responder questões elaboradas a partir de sua própria curiosidade, desenvolver procedimentos para resolver problemas do cotidiano interagindo e aprendendo.

O documento apresenta o ensino de Matemática organizado em cinco eixos temáticos: Números, Operações, Espaço e forma, Grandezas e medidas e Tratamento da informação, e o estudo da Geometria neste documento encontra-se no eixo Espaço e forma e em Grandezas e medidas.

Orienta que o ensino de Geometria se dê por meio de jogos e brincadeiras, desenhos e dobraduras, que se construam maquetes e plantas dos espaços cotidianos da criança. O Quadro 2 descreve os conteúdos e expectativas de aprendizagem que se espera que os estudantes alcancem no eixo Espaço e Forma e Grandezas e Medidas, ao final de cada série escolar. Este último eixo complementa Espaço e Forma por abranger as características métricas das formas tratadas como perímetro, ângulos e medidas de retas, semirretas, etc.

Quadro 2 – Expectativas de aprendizagem dos eixos Espaço e Forma e Grandezas e Medidas - Orientações Curriculares do Estado de São Paulo – Anos Iniciais do Ensino Fundamental

	Espaço e Forma	Grandezas e Medidas
Séries escolares	Expectativas de Aprendizagens	Expectativas de Aprendizagens
1ª série	- Localizar pessoas ou objetos no espaço, com base em diferentes pontos de referência e também em indicações de posição. - Identificar a movimentação de pessoas ou objetos no espaço com base em diferentes pontos de referência e também em indicações de direção e sentido. - Observar e reconhecer figuras geométricas tridimensionais presentes em elementos naturais e nos objetos criados pelo homem e identificar algumas de suas características.	
2ª série	- Representar a localização de um objeto no espaço pela análise de maquetes, esboços, croquis. – Representar a movimentação de um objeto ou pessoa no espaço por meio de esboços, croquis que mostram trajetos. – Diferenciar figuras tridimensionais das figuras bidimensionais. - Perceber semelhanças e diferenças entre cubos e quadrados, paralelepípedos e retângulos. - Perceber semelhanças e diferenças entre pirâmides e triângulos, esferas e círculos.	
3ª série	- Interpretar no plano a posição de uma pessoa ou objeto. - Representar no plano a movimentação de um objeto ou pessoa. - Reconhecer semelhanças e diferenças entre poliedros (prismas e pirâmides) e identificar elementos como faces, vértices e arestas. - Explorar planificações de figuras tridimensionais. - Identificar figuras poligonais e circulares nas superfícies planas das figuras tridimensionais	- Calcular perímetro e a área de figuras planas. - Reconhecer as unidades usuais de medida (metro, grama, miligrama, quilograma, litro e mililitro).

4ª série	- Interpretar e representar a posição ou a movimentação de um objeto ou pessoa no espaço e construir itinerários. - Reconhecer semelhanças e diferenças entre poliedros. - Identificar elementos como faces, vértices e arestas de poliedros. - identificar semelhanças e diferença movimentação de um objeto ou pessoa. - Reconhecer semelhanças e diferenças entre poliedros. - Identificar semelhanças e diferenças entre polígonos, usando critérios como número de lados, número de ângulos, eixos de simetria, rigidez. - Compor e decompor figuras planas. - Ampliar e reduzir figuras planas.	- Calcular perímetro de figuras. - calcular área de retângulos ou quadrados. - Utilizar medidas como cm^2, m^2 e alqueire

Fonte: Autora, adaptado de São Paulo (2008, p. 25 a 28)

Quanto ao estudo do espaço, o documento orienta que desde o primeiro ano sejam apresentadas as noções projetivas e euclidianas uma vez que se trabalha a movimentação no plano utilizando-se de diferentes pontos de referência, conceito que requer um pensamento abstrato mais desenvolvido, passível de se adquirir após experiências manipulativas no objeto do conhecimento. Entende-se por objeto do conhecimento todo e qualquer conhecimento que se pretende ensinar ou aprender.

Para o estudo das formas, o documento orienta que sejam abordadas as formas bidimensionais em paralelo com as tridimensionais identificando suas características, bem como o uso de nomenclaturas. O documento não orienta que sejam introduzidas noções de geometria topológica.

Não se questiona no presente estudo, o uso das nomenclaturas por parte do professor, visto que este faz parte do ensino de Geometria, segundo Smole (2014, p.20).

> A fala da criança revela suas percepções propriedades das formas que poderiam passar despercebidas se exigíssemos dela a fala correta. Um exemplo disso está na observação, bastante frequente entre as crianças de que o retângulo é um quadrado espichado, o que demonstra não só a percepção de semelhança entre as duas formas, como também a de que os lados do retângulo podem ser diferentes (SMOLE, 2014, p. 20).

Quando a criança se refere aos objetos geométricos, utilizando-se de uma fala informal, esta pode revelar seus conhecimentos adquiridos, bem como algum engano, passível de ser corrigido pelo olhar atento do professor. Neste sentido, acredita-se que a exigência do uso de nomenclaturas muito precocemente pode acobertar alguns equívocos por parte das crianças. O uso adequado por parte do professor conduz a criança a seu uso formal a partir de situações contextualizadas.

3.3 - Ensino Fundamental de Nove Anos – Orientações Pedagógicas para os Anos Iniciais - Estado do Paraná

A abordagem apresentada neste documento compreende as crianças como cidadãs que apresentam suas especificidades e que, partindo das diferenças sociais e culturais, elas possuem direitos historicamente adquiridos e se desenvolvem por meio de interações sociais.

> Os estudos de Vygotsky (2007) indicam que é importante analisar criticamente o contexto social, a fim de compreender com que criança se está trabalhando, quais suas necessidades e como possibilitar que todas as crianças se apropriem dos conteúdos organizados no currículo escolar. Isso significa, por exemplo, que, se vivemos numa sociedade letrada, espera-se que todas as pessoas, na idade socialmente reconhecida como adequada, tenham asseguradas as condições para se apropriar deste conhecimento (SEED, 2010. p. 11).

O estudante enquanto cidadão torna-se participante e colaborador de sua aprendizagem. O documento salienta que a transição dos estudantes que frequentam a Educação Infantil para o Ensino Fundamental se dê de forma amena, mantendo-se o caráter lúdico, característica do ensino infantil. Desta forma, o trabalho pedagógico realizado nos Anos Iniciais deve manter as características da Educação Infantil quanto à afetividade, o brincar, as diferentes linguagens, etc. O professor tem como principal função formar cidadãos críticos, bem como evidenciar a relação histórico-prática do conhecimento como marca da ação humana. (SEED, 2010).

A matemática é vista como ciência inacabada, necessária para uso cotidiano, constituída pela humanidade ao longo do tempo e que se modifica cultural e socialmente conforme a época e o contexto.

Sob o enfoque pedagógico da Resolução de Problemas, propõe atividades em que seja possível,

> Observar a apropriação que o aluno faz dos conceitos matemáticos, por exemplo, se faz uso da linguagem e simbologia matemática (primeiro/segundo – 1º/2º...; maior/menor - > / <. organização das

> informações – tabelas, gráficos), se evidencia noções de grandezas, medidas e de topologia (tamanhos, proporcionalidade, localização espacial,...); se apresenta procedimentos relacionados ao conhecimento numérico e algorítmicos (notações numéricas, contagem, diferentes tipos e classificações de números – Naturais, Racionais e outros – e classificações variadas (números primos, pares/ímpares,...), além de noções operacionais por meio de algoritmos relacionados à adição, subtração, multiplicação e divisão (SEED, 2010. p. 160).

Orienta abordagens oriundas da Etnomatemática, Investigação Matemática, Resolução de Problemas e noções de Topologia como auxiliares no ensino da Matemática, bem como o uso de jogos, materiais pedagógicos, livros literários e uso de recursos tecnológicos.

3.4 - Base Nacional Comum Curricular - BNCC

O documento Base Nacional Comum Curricular que visa nortear a constituição dos currículos das escolas contou com a contribuição de vários setores educacionais e sociedade brasileira por meio de análises, leituras e sugestões para sua formulação.

Este documento apresenta orientações para que o trabalho com a Matemática para os Anos Iniciais, mantenha certa continuidade com o ensino realizado na Educação Infantil, sem rupturas, priorizando-se as vivências e conhecimentos de mundo que os estudantes trazem, de forma que possam utilizar seus conhecimentos aprendidos em situações cotidianas. Estimula o uso de jogos, livros, vídeos e recursos tecnológicos utilizados sempre de forma significativa e contextualizada.

As unidades temáticas compreendem: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e medidas, finalizando com Probabilidade e Estatística. Dentre elas, destaca-se o ensino de Geometria nos Anos Iniciais, foco desta pesquisa.

Os Quadros de 3 a 7 representam os Objetos de Conhecimento, bem como as habilidades que se espera que os estudantes desenvolvam dentro da Unidade Temática: Geometria descritas para o 1º ao 5º ano do Ensino Fundamental.

Quadro 3 – Objeto de Conhecimento e Habilidades em Geometria – BNCC – 1º ano do Ensino Fundamental Anos Iniciais

MATEMÁTICA – 1º Ano		
Unidade Temática	Objeto de conhecimento	Habilidades
Geometria	Localização de objetos e de pessoas no espaço, utilizando diversos pontos de referência e vocabulário apropriado.	- Descrever a localização de pessoas e de objetos no espaço em relação à sua própria posição, utilizando termos como à direita, à esquerda, em frente, atrás. - Descrever a localização de pessoas e de objetos no espaço segundo um dado ponto de referência, compreendendo que, para a utilização de termos que se referem à posição, como direita, esquerda, em cima, embaixo, é necessário explicitar-se o referencial.
	Figuras geométricas espaciais reconhecimento e relações com objetos familiares do mundo físico.	- Relacionar figuras geométricas espaciais (cones, cilindros, esferas e blocos retangulares) a objetos familiares do mundo físico.
	Figuras geométricas planas, reconhecimento das faces de figuras geométricas espaciais.	Identificar e nomear figuras planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo) em desenhos apresentados em diferentes disposições ou em contornos de faces de sólidos geométricos.

Fonte: Autora, adaptado de Brasil (2017)

Quadro 4 – Objeto de Conhecimento e Habilidades em Geometria – BNCC - 2º ano do Ensino Fundamental Anos Iniciais

MATEMÁTICA – 2º Ano		
Unidade Temática	Objeto de conhecimento	Habilidades
Geometria	Localização e movimentação de pessoas e objetos no espaço segundo pontos de referência e indicação de mudanças de direção e sentido .	- Identificar e registrar, em linguagem verbal ou não verbal, a localização e os deslocamentos de pessoas e de objetos no espaço, considerando mais de um ponto de referência e indicar as mudanças de direção e sentido.
	Esboço de roteiros e de plantas simples.	Esboçar roteiros a ser seguidos ou plantas de ambientes familiares, assinalando entradas, saídas e alguns pontos de referência.
	Figuras geométricas espaciais (cubo, bloco retangular, pirâmide, cone, cilindro e esfera) reconhecimento e características.	Reconhecer, nomear e comparar figuras geométricas espaciais (cubo, bloco retangular, pirâmide, cone, cilindro e esfera) relacionando-as com objetos do mundo físico.
	Figuras geométricas planas, (círculo, quadrado, retângulo e triângulo), reconhecimento e características.	Reconhecer, comparar e nomear figuras planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo) por meio de características comuns em desenhos apresentados em diferentes disposições ou em sólidos geométricos.

Fonte: Autora, adaptado de Brasil (2017)

Quadro 5 – Objeto de Conhecimento e Habilidades em Geometria – BNCC - 3º ano do Ensino Fundamental Anos Iniciais

MATEMÁTICA – 3º Ano		
Unidade Temática	Objeto de Conhecimento	Habilidades
Geometria	Localização e movimentação, representação de objetos e pontos de referência.	Descrever e representar, por meio de esboços de trajetos ou utilizando croquis e maquetes, a movimentação de pessoas ou de objetos no espaço, incluindo mudanças de direção e sentido, com base em diferentes pontos de referência.
	Figuras geométricas espaciais (cubo, bloco retangular, pirâmide, cone, cilindro e esfera) reconhecimento, análise de características.	- Associar figuras geométricas espaciais (cubo, bloco retangular, pirâmide, cone, cilindro e esfera) a objetos do mundo físico e nomear estas figuras. - Descrever características de algumas figuras geométricas espaciais (prismas retos, pirâmides, cilindro, cones) relacionando-as com suas planificações.
	Figuras geométricas planas (triângulo, quadrado, retângulo, trapézio e paralelogramo), reconhecimento e análise de características.	Classificar e comparar figuras planas (triângulo, quadrado, retângulo, trapézio e paralelogramo), em relação a seus lados (quantidade, posições relativas e comprimento) e vértices.
	Congruência de figuras geométricas planas.	Reconhecer figuras congruentes, usando sobreposição e desenhos em malhas quadriculadas ou triangulares, incluindo o uso de tecnologias digitais.

Fonte: Autora, adaptado de Brasil (2017)

Para o primeiro ano, em relação ao espaço, o documento espera que os estudantes estejam aptos a descrever a localização de pessoas e objetos no espaço em relação a si e a um ponto de referência, para o segundo ano precisam identificar e registrar os deslocamentos com base em mais de um ponto de referência e no terceiro precisam descrever e representar com base em diferentes pontos de referência. Percebe-se que em relação às noções espaciais, as habilidades requeridas não contemplam as estruturas topológicas, em que se percebe a presença das noções projetivas, referentes a pontos de vistas e distâncias.

O mesmo é percebido com o estudo das formas uma vez que, ao que se refere ao primeiro ano, espera-se que sejam capazes de relacioná-las a objetos do mundo físico, conhecer as planificações, nomenclaturas e associá-las aos contornos dos sólidos geométricos. Para o segundo ano, espera-se que possam reconhecer, nomear e comparar formas planas e sólidos geométricos em diferentes disposições. E para o terceiro ano, espera que os estudantes sejam capazes de associar as formas planas às planificações dos sólidos, compará-los com objetos do mundo físico, classificar e comparar figuras planas em relação à quantidade de lados, vértices, bem como reconhecer a congruência de figuras planas por meio de sobreposições.

Quadro 6 – Objeto de Conhecimento e Habilidades em Geometria – BNCC - 4º ano do Ensino Fundamental Anos Iniciais

MATEMÁTICA – 4º Ano		
Unidade Temática	Objeto de Conhecimento	Habilidades
Geometria	Localização e movimentação de pontos de referência, direção e sentido, paralelismo e perpendicularismo.	Descrever deslocamentos e localização de pessoas e de objetos no espaço, por meio de malhas quadriculadas e representações como desenhos, mapas, planta baixa e croquis empregando termos como direita e esquerda, mudanças de direção e sentido, transversais, paralelas e perpendiculares.
	Figuras geométricas espaciais (prismas e pirâmides) reconhecimento, representações, planificações e características.	Associar prismas e pirâmides a suas planificações e analisar, nomear e comparar seus atributos, estabelecendo relações entre as representações planas e espaciais.
	Ângulos retos e não retos, uso de dobraduras, esquadros e softwares.	Reconhecer ângulos retos e não retos em figuras poligonais com o uso de dobraduras, esquadros ou softwares de geometria.
	Simetria de reflexão.	Reconhecer simetria de reflexão em figuras e em pares de figuras geométricas planas e utilizá-la na construção de figuras congruentes, com o uso de malhas quadriculadas e de softwares de geometria.

Fonte: Autora, adaptado de Brasil (2017)

Quadro 7 – Objeto de Conhecimento e Habilidades em Geometria – BNCC - 5º ano do Ensino Fundamental Anos Iniciais

MATEMÁTICA – 5º Ano		
Unidade Temática	Objeto de Conhecimento	Habilidades
Geometria	Plano cartesiano, coordenadas cartesianas (1º quadrante) e representação de deslocamentos no plano cartesiano.	- Utilizar e compreender diferentes representações para a localização de objetos no plano, como mapas, células em planilhas eletrônicas e coordenadas geográficas a fim de desenvolver as primeiras noções de coordenadas cartesianas. - Interpretar, descrever e representar a localização ou movimentação de objetos no plano cartesiano (1º quadrante), utilizando coordenadas cartesianas indicando mudanças de direção e sentido e giros.
	Figuras geométricas espaciais, reconhecimento, representações e ângulos.	Associar figuras espaciais e suas planificações (prismas, pirâmides, cilindros e cones) e analisar, nomear e comparar seus atributos.
	Figuras geométricas planas,	Reconhecer, nomear e comparar polígonos,

	características, representações e ângulos.	considerando lados, vértices e ângulos e desenhá-los, utilizando material de desenho ou tecnologias digitais.
	Ampliação e redução de figuras poligonais em malhas quadriculadas, reconhecimento da congruência dos ângulos e da proporcionalidade dos lados correspondentes.	Reconhecer a congruência dos ângulos e a proporcionalidade entre os lados correspondentes de figuras poligonais em situações de ampliação e de redução em malhas quadriculadas e usando tecnologias digitais.

Fonte: Autora, adaptado de Brasil (2017)

O estudo de noções espaciais no quarto ano abordam deslocamentos e localização de objetos no espaço por meio de malhas quadriculadas, empregando termos como intersecção, transversais, paralelas e perpendiculares. No quinto ano, dentre as habilidades a serem trabalhadas estão, a utilização e compreensão de diferentes representações em mapas, células de planilhas eletrônicas, coordenadas geográficas, bem como a compreensão do plano cartesiano.

Quanto ao estudo das formas, para o quarto ano, o documento sugere que sejam trabalhadas geometria plana, nomenclaturas e comparações de atributos, estudo de ângulos por meio de dobraduras e simetrias de reflexão. Para o quinto ano, o estudo dos sólidos com suas planificações e estudo dos atributos, congruência de ângulos e proporcionalidade entre os lados correspondentes, utilizando recursos tecnológicos.

Percebe-se que o trabalho de deslocamentos perpassa todas as etapas de escolarização dos Anos Iniciais, bem como o uso formal de nomenclaturas. Para o quarto e quinto anos, as habilidades propostas no documento vão se tornando mais elaboradas, na medida em que os estudantes avançam na escolaridade, pressupondo-se que os professores retomem os Objetos de Conhecimento antes apreendidos, para posteriormente ampliar para novos conceitos. O trabalho proposto por este documento orienta que desde o primeiro ano sejam introduzidos conceitos das geometrias projetiva e euclidiana, bem como práticas mais formalizadas da Matemática, não iniciando pelas noções topológicas.

3.5 - BNCC – Paraná - Referencial Curricular do Paraná: Princípios, Direitos e Orientações (Versão preliminar)[2]

Com o intuito de complementar o documento Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017) e personificar seu currículo, o Estado do Paraná vem desenvolvendo o documento *Referencial Curricular do Paraná: Princípios, Direitos e Orientações.* Ainda em fase de conclusão, o documento encontrou-se disponível para leitura, análises e contribuições por parte do público até agosto de 2018.

Apresenta como embasamento teórico e curricular, além das orientações da BNCC, outros documentos desenvolvidos e utilizados no Estado do Paraná, tais como: Currículo Básico para a Escola Pública do Paraná (SEED, 1990), as Diretrizes Curriculares Orientadoras da Educação Básica (SEED, 2008), o Caderno de Expectativas de Aprendizagem (SEED, 2012), o Ensino Fundamental de nove anos: orientações pedagógicas para os anos iniciais (SEED, 2010), bem como nas legislações nacionais vigentes, tais como a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (BRASIL, 1997), as Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica (BRASIL, 2013).

Toma por princípios orientadores (SEED, 2018):

- Educação como direito de todos os cidadãos;
- Prática fundamentada na realidade dos sujeitos da escola;
- Igualdade e Equidade;
- Compromisso com a Formação Integral;
- Valorização da Diversidade;
- Educação Inclusiva;
- Ressignificação dos Tempos e Espaços da Escola;
- Cuidado quanto à Transição entre as etapas;
- Avaliação dentro de uma perspectiva formativa.

O Quadro 8 apresenta as expectativas de aprendizagem de Geometria do documento BNCC (2017) proposto em nível nacional e em negrito as adaptações sugeridas para o documento BNCC do Estado do Paraná.

[2] http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/bncc/2018/referencial_curricular_do_parana.pdf

Quadro 8 - Expectativas de aprendizagem da Unidade Temática Geometrias – Referencial Curricular do Paraná: Princípios, Direitos e Orientações (versão Preliminar) – Anos Iniciais do Ensino Fundamental

Geometrias – 1º Ano do Ensino Fundamental	
Objeto de Conhecimento	Objetivos de Aprendizagem
Localização no espaço	- Descrever a localização de pessoas e de objetos no espaço em relação à sua própria posição, utilizando termos como à direita, à esquerda, em frente, atrás. • **Identificar o espaço em que está inserido, tendo como ponto de referência o seu corpo.** • **Localizar-se no espaço utilizando as noções de embaixo e em cima, dentro e fora, frente e atrás, direita e esquerda utilizando mapas, plantas baixas simples e iniciar o uso de recursos digitais.** • **Representar o espaço, incluindo percursos e trajetos, por meio de registros pessoais, identificando pontos de referência.** - Descrever a localização de pessoas e de objetos no espaço segundo um dado ponto de referência, compreendendo que, para a utilização de termos que se referem à posição, como direita, esquerda, em cima, embaixo, é necessário explicitar-se o referencial. • **Localizar um objeto ou pessoa no espaço descrevendo a posição que este ocupa de acordo com um ponto de referência utilizando noções de direita, esquerda, em cima e embaixo, na frente e atrás.**
Geometria espacial	- Relacionar figuras geométricas espaciais (cones, cilindros, esferas e blocos retangulares) a objetos familiares do mundo físico. • **Reconhecer as figuras geométricas espaciais: cubos, paralelepípedos, cones, cilindros e esferas relacionando-as com objetos familiares do mundo físico.** • **Identificar características das figuras geométricas espaciais observando semelhanças e diferenças (cones, cilindros, esferas e blocos retangulares) e classificá-las em dois grupos: formas arredondadas e formas não arredondadas.**
Geometria plana **Geometria espacial**	- Identificar e nomear figuras planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo) em desenhos apresentados em diferentes disposições ou em contornos de faces de sólidos geométricos. • **Identificar atributos (cor, forma e medida) em representações de formas geométricas a fim de classificá-las e nomeá-las em diferentes situações.** • **Reconhecer as figuras triangulares, retangulares, quadradas e circulares presentes em diferentes contextos, relacionando-as com objetos familiares do cotidiano.**
Geometrias – 2º Ano do Ensino Fundamental	
Objeto de Conhecimento	Objetivos de Aprendizagem
Localização no espaço (direita,	- Identificar e registrar, em linguagem verbal ou não verbal, a localização e os deslocamentos de pessoas e de objetos no espaço, considerando mais de um ponto de referência, e indicar as mudanças de direção e de sentido. • **Identificar pontos de referência para situar-se e deslocar-se no**

esquerda, em cima, embaixo, frente e atrás)	**espaço.** • **Descrever e comunicar a localização de objetos no espaço utilizando noções de direita, esquerda, entre, em cima e embaixo.** • **Ler a representação de um dado percurso e deslocar-se no espaço da sala de aula/escola a partir da sua compreensão.**
Geometria Plana	**-** Esboçar roteiros a ser seguidos ou plantas de ambientes familiares, assinalando entradas, saídas e alguns pontos de referência. • **Representar o espaço por meio de registros pessoais (desenhos e maquetes) indicando pontos de referência.** **-** Reconhecer, comparar e nomear figuras planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo), por meio de características comuns, em desenhos apresentados em diferentes disposições ou em sólidos geométricos. • **Identificar a figura geométrica plana a partir da forma da face de uma figura geométrica espacial, por meio do seu contorno.**
Geometria Espacial	**-** Reconhecer, nomear e comparar figuras geométricas espaciais (cubo, bloco retangular, pirâmide, cone, cilindro e esfera), relacionando-as com objetos do mundo físico. • **Reconhecer as formas geométricas presentes na natureza e nas construções humanas e estabelecer relações com as figuras geométricas espaciais (cubo, bloco retangular, pirâmide, cone, cilindro e esfera) identificando semelhanças e diferenças;** • **Identificar e descrever características das figuras geométricas espaciais observando semelhanças e diferenças (cones, cilindros, esferas e blocos retangulares) e classificá-las em dois grupos: formas arredondadas (corpos redondos) e formas não-arredondadas (poliedros).** • **Nomear as figuras geométricas espaciais (cubo, bloco retangular, pirâmide, cone, cilindro e esfera).**
Geometrias – 3º Ano do Ensino Fundamental	
Objeto de Conhecimento	Objetivos de Aprendizagem
Localização no espaço	**-** Descrever e representar, por meio de esboços de trajetos ou utilizando croquis e maquetes, a movimentação de pessoas ou de objetos no espaço, incluindo mudanças de direção e sentido, com base em diferentes pontos de referência.
Geometria plana **Geometria espacial**	**-** Associar figuras geométricas espaciais (cubo, bloco retangular, pirâmide, cone, cilindro e esfera) a objetos do mundo físico e nomear essas figuras. • **Identificar semelhanças e diferenças entre cubos e quadrados, paralelepípedos e retângulos, pirâmides e triângulos, esferas e círculos pela observação de seus atributos.** • **Resolver problemas de caráter investigativo, quebra-cabeças e desafios envolvendo geometria espacial.** **-** Descrever características de algumas figuras geométricas espaciais (prismas retos, pirâmides, cilindros, cones), relacionando-as com suas planificações.
Geometria plana	**-** Classificar e comparar figuras planas (triângulo, quadrado, retângulo, trapézio e paralelogramo) em relação a seus lados (quantidade, posições relativas e comprimento) e vértices. **-** Reconhecer figuras congruentes, usando sobreposição e desenhos em malhas quadriculadas ou triangulares, incluindo o uso de

	tecnologias digitais. • **Identificar semelhanças e diferenças entre figuras planas.**
Geometrias – 4º Ano do Ensino Fundamental	
Objeto de Conhecimento	Objetivos de Aprendizagem
Localização no espaço e Geometria plana	**-** Descrever deslocamentos e localização de pessoas e de objetos no espaço, por meio de malhas quadriculadas e representações como desenhos, mapas, planta baixa e croquis, empregando termos como direita e esquerda, mudanças de direção e sentido, intersecção, transversais, paralelas e perpendiculares. • **Diferenciar retas paralelas, perpendiculares e transversais.** • **Identificar representações de retas nos objetos do mundo físico, nas construções arquitetônicas, nas artes, nos mapas e outros.** • **Representar retas paralelas, perpendiculares e transversais utilizando instrumentos de desenho ou recursos digitais.**
Geometria plana e Geometria espacial	**-** Associar prismas e pirâmides a suas planificações e analisar, nomear e comparar seus atributos, estabelecendo relações entre as representações planas e espaciais. • **Identificar as características que diferenciam prismas, pirâmides e corpos redondos.** • **Classificar figuras geométricas espaciais de acordo com as seguintes categorias: prismas, pirâmides e corpos redondos.**
Geometria plana e noções de ângulos: retos e não retos	**-** Reconhecer ângulos retos e não retos em figuras poligonais com o uso de dobraduras, esquadros ou *softwares* de geometria. • **Identificar a presença e representações de ângulos nos objetos de do mundo físico.** • **Identificar "o grau" como unidade de medida de ângulo e o transferidor como instrumento utilizado para realizar a medição.** • **Estabelecer relações entre a noção de giros (giro completo, meio giro, um quarto de giro) e o conceito de ângulo.**
Geometria plana	• Reconhecer simetria de reflexão em figuras e em pares de figuras geométricas planas e utilizá-la na construção de figuras congruentes, com o uso de malhas quadriculadas e de *softwares* de geometria. • **Identificar a simetria nos objetos do mundo físico e outras representações.**
Geometrias – 5º Ano do Ensino Fundamental	
Objeto de Conhecimento	Objetivos de Aprendizagem
Plano cartesiano	**-** Utilizar e compreender diferentes representações para a localização de objetos no plano, como mapas, células em planilhas eletrônicas e coordenadas geográficas, a fim de desenvolver as primeiras noções de coordenadas cartesianas. • **Localizar objetos (pontos ou imagens) a partir da indicação das coordenadas geográficas representadas em malhas quadriculadas;** • **Resolver e elaborar problemas que envolvem o deslocamento de pessoas/objetos no espaço; • Ler mapas e croquis para localizar-se no espaço e criar representações deste (plantas baixas e maquetes).**

	- Interpretar, descrever e representar a localização ou movimentação de objetos no plano cartesiano (1.º quadrante), utilizando coordenadas cartesianas, indicando mudanças de direção e de sentido e giros. • **Resolver e elaborar problemas envolvendo a localização e a movimentação de objetos/pessoas no plano cartesiano (1.º quadrante).**
Geometria plana **Geometria espacial**	**-** Associar figuras espaciais a suas planificações (prismas, pirâmides, cilindros e cones) e analisar, nomear e comparar seus atributos. • Associar figuras espaciais a suas planificações (prismas, pirâmides, cilindros e cones) e analisar, nomear e comparar seus atributos **utilizando recursos manipuláveis e digitais para visualização e análise.** • **Observar a presença e a importância da geometria plana e espacial na organização do espaço e dos objetos ao seu redor**
Geometria plana	**-** Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e desenhá-los, utilizando material de desenho ou tecnologias digitais. • **Classificar os polígonos de acordo com seus atributos: regulares e irregulares; quadriláteros, triângulos e outros.** **-** Reconhecer a congruência dos ângulos e a proporcionalidade entre os lados correspondentes de figuras poligonais em situações de ampliação e de redução em malhas quadriculadas e usando tecnologias digitais. • **Ampliar e reduzir polígonos, proporcionalmente, utilizando malhas quadriculadas e tecnologias digitais.** • **Reconhecer que, ao ampliar ou reduzir um polígono, proporcionalmente, o ângulo se mantém congruente.** • **Reconhecer que, ao ampliar ou reduzir um polígono, a medida de todos os lados devem aumentar ou diminuir na mesma proporção.**

Fonte: Autora, adaptado de SEED (2018)

Quanto ao estudo espacial, o documento sugere para o primeiro ano que os estudantes se orientem tendo como referência seu próprio corpo, no segundo ano que identifiquem pontos de referência para se localizarem e se deslocarem, no terceiro e quarto anos que utilizem croquis, maquetes e mapas para representarem e descreverem a movimentação no espaço e no quinto ano, que sejam introduzidos estudos de coordenadas por meio das malhas quadriculadas. O uso de recursos tecnológicos é incentivado desde o primeiro ano, em que se percebe um aprofundamento sequencial dos conteúdos.

Quanto ao estudo das formas, para o primeiro e segundo anos, orienta-se que seja realizado um trabalho de reconhecimento das características e classificação dos sólidos por meio de suas diferenças e semelhanças. Quanto às figuras planas, que as reconheçam em objetos do cotidiano, associando-as aos sólidos. Para o terceiro ano, inicia-se um aprofundamento no estudo das formas planas por meio da observação de semelhanças e diferenças. No quarto ano, introduz-se o estudo de retas paralelas, perpendiculares e transversais e no quinto ano, o estudo do plano cartesiano.

Orienta que o trabalho para os três primeiros anos com as formas planas, que são mais abstratas, seja por meio da percepção destas em objetos do cotidiano e da natureza, localizando-as como parte dos sólidos, não se exigindo o uso de nomenclaturas e estudo de características como pontos, retas, medidas, etc. O estudo destes últimos inicia-se com maior aprofundamento a partir do quarto e quinto anos.

3.6 - Diretrizes Curriculares da Educação Básica – Matemática - Estado do Paraná (SEED, 2008)

O documento traz orientações para o Ensino Fundamental Anos Finais e Médio. Orienta o ensino de conceitos introdutórios das Geometrias não-euclidianas a partir do sétimo ano.

Caracterizada como Conteúdo Estruturante, o ensino de Geometria aborda os seguintes conteúdos: Geometrias plana, espacial e analítica e noções básicas de geometrias não-euclidianas. Segundo este documento, a Geometria ensinada no Ensino Fundamental assume características espaciais, de forma que o estudante deve primeiramente perceber os objetos, analisá-los e posteriormente representá-los.

A referência a este documento, que aborda os Anos Finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio, foi apresentado na pesquisa por se tratar do único dentre os pesquisados, que discrimina o ensino de Topologia como conteúdo a ser trabalhado.

O documento Caderno de Expectativas de Aprendizagens, parcialmente apresentado no Quadro 9, complementa o documento Diretrizes Curriculares da Educação Básica uma vez que traz as orientações quanto aos conteúdos a serem trabalhados nas respectivas séries.

Quadro 9 – O ensino de Geometrias não-euclidianas – Caderno de Expectativas de Aprendizagens - Paraná - Anos Finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio

ENSINO DE GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS	
Sétimo Ano	- Que os aprendizes sejam capazes de compreender as noções topológicas (interior, exterior, fronteira, vizinhança, conexidade, curvas e conjuntos abertos e fechados).
Oitavo Ano	- Que sejam capazes de identificar formas fractais e as características de autossimilaridade e complexidade infinita.
Nono Ano	- Que sejam capazes de compreender conceitos básicos de geometria projetiva.
Ensino Médio	- Que sejam capazes de identificar conceitos da Geometria Fractal na lei de formação de determinadas funções; - Reconhecer a Geometria Hiperbólica e a Elíptica como sistemas geométricos no quais o postulado euclidiano das paralelas não se verifica. - Relacionar a Geometria Hiperbólica e Elíptica com a Geometria Euclidiana, a partir da negação do postulado das paralelas. - Relacionar a Geometria Hiperbólica com a negação da unicidade de retas paralelas e Geometria Elíptica com a negação da existência de retas paralelas. - Reconhecer a existência de diversos modelos e sistemas geométricos logicamente consistentes, além do euclidiano. - Identificar a curvatura nula, positiva e negativa, como sendo da plana, esférica e hiperbólica, respectivamente. - Compreender o conceito de reta (geodésica) e de distância nas superfícies esférica e hiperbólica. - Reconhecer triângulos esféricos e hiperbólicos e a propriedade da soma de seus ângulos internos. - Reconhecer aplicações das Geometrias Não Euclidianas nos problemas do espaço real. - Resolver situações-problema envolvendo as Geometrias Não Euclidianas.

Fonte: Autora, adaptado do Caderno de Expectativas de Aprendizagem (SEED, 2012)

É possível perceber que os documentos: PCN (1997); Ensino Fundamental de nove anos - Orientações Pedagógicas para os Anos Iniciais - (SEED, 2010); a BNCC – Paraná (2018); Diretrizes Curriculares da Educação Básica – Matemática - (SEED, 2008) e o Caderno de Expectativas de Aprendizagem (SEED, 2012), trazem um entendimento de que a criança apreende os primeiros conceitos espaciais por meio das estruturas topológicas como as noções de dentro/fora, interior/exterior, continuidade, vizinhança, fronteira, etc.

Contudo, apenas este último documento Caderno de Expectativas de Aprendizagem traz orientações para que se realize um trabalho com os conteúdos das geometrias não-euclidianas, propostas a partir do sétimo ano.

CAPÍTULO IV

AS TECNOLOGIAS E A MATEMÁTICA

Com o crescente desenvolvimento tecnológico e barateamento dos custos, o acesso a estes recursos tem se tornado cada vez maior, de forma que é possível encontrá-los em escolas, ambientes corporativos e uso doméstico.

Este capítulo aborda o uso de tecnologias no ensino de Matemática, desdobrando-se para o uso das Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental e faz uma breve explanação a respeito do *software* Scratch.

4.1- Uso das Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação – TDIC no Ensino de Matemática

Os governos Estadual e Federal mobilizaram-se para proporcionar capacitações aos professores tanto na modalidade presencial como à distância, bem como disponibilizam repositórios *online* com atividades pedagógicas e Objetos de Aprendizagem, passíveis de uso por professores e estudantes como: Portal do Professor[3], Rede Interativa Virtual de Educação (RIVED)[4], Núcleo de Tecnologia Digital Aplicada à Educação (NUTED)[5], Repositório Digital da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (LUME)[6], Banco Internacional de Objetos Educacionais (BIOE)[7], Laboratório Didático Virtual (LabIVirt)[8] pela Universidade de São Paulo (USP), entre outros.

O uso de tecnologias associado à disciplina Matemática tem se mostrado cada vez mais crescente no Brasil, descritos nas pesquisas de Kalinke (2013) de forma que, no ano de 2010, realizou um levantamento na base de dados do

[3] Portal do professor: http://portaldoprofessor.mec.gov.br/recursos.html
[4] RIVED: http://rived.mec.gov.br/site_objeto_lis.php
[5] NUTED: http://www.nuted.ufrgs.br/
[6] LUME: http://www.lume.ufrgs.br/browse?type=subject
[7] BIOE: http://objetoseducacionais2.mec.gov.br/
[8] LabVirt: http://www.labvirtq.fe.usp.br/

Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico – CNPQ em busca de pesquisadores que desenvolvem estudos utilizando algum recurso tecnológico associado ao ensino de Matemática, em que,

> segundo dados da Plataforma Lattes, estes pesquisadores somados orientaram, nos últimos doze anos, 85 trabalhos de Mestrado e 25 de Doutorado, além de terem participado, neste mesmo período, de 229 bancas de Mestrado e 93 de Doutorado. (...) Houve mais de 250 defesas de Mestrados e Doutorados em 12 anos, o que representa mais de 20 defesas por ano (KALINKE, 2013, p.375).

E estes números tendem a crescer a cada ano. Afirma ainda que se faz necessário traçar um perfil destes pesquisadores para que se possa fortalecer, aumentar e aprofundar as discussões em futuros trabalhos.

O avanço tecnológico, bem como o aumento do acesso a ele legitima o uso deste pela escola, de forma que esta não permaneça às margens desta mudança.

O uso de recursos tecnológicos no ensino em geral pode se mostrar enriquecedor, uma vez que auxilia os estudantes nas representações concretas de teorias, quando lhes permite realizar experimentos e simulações em uma abordagem construcionista, termo utilizado primeiramente por Seymour Papert, criador da linguagem Logo, que agregou alguns conceitos do construtivismo.

> Minha suposição é que o computador pode concretizar (e personalizar) o formal. Sob esse prisma, o computador não é somente mais um instrumento educacional poderoso. Ele é único a nos permitir os meios para abordar o que Piaget e muitos outros identificam como obstáculo que deve ser transposto para a passagem do pensamento infantil para o pensamento adulto. Eu acredito que o computador pode nos permitir mudar os limites entre o concreto e o formal. Conhecimentos que só eram acessíveis através de processos formais podem agora ser abordados concretamente (PAPERT, 1988, p. 37).

Neste sentido, privilegia-se o conhecimento construído a partir das experiências que os estudantes trazem. Para isso, faz-se necessário o engajamento por parte dos professores que necessitam refletir sobre seu uso, caso contrário

> eles tenderão a não utilizar essas mídias, ou a utilizá-las de maneira superficial, domesticando, portanto, essa nova mídia. Para que o professor, em todos os níveis, aprenda a conviver com as incertezas trazidas por uma mídia que tem características quantitativas e qualitativas novas em relação à memória, um amplo trabalho de reflexão coletiva tem que ser desenvolvido (BORBA, 2007, p.89).

Necessitam portanto, voltar o olhar para a aprendizagem e não para o recurso tecnológico, este deve assumir a função de instrumento em que o estudante passa a representar suas ideias, por meio de manipulações. Nesse sentido, o papel do professor passa a ser o de provedor de situações favoráveis a aprendizagem.

O ensino de Matemática para os Anos Iniciais, segundo Brasil (2017), tem como foco as práticas sociais, de forma que os estudantes devem manusear e utilizar os textos que circulam na sociedade para problematizações, integrando a Matemática dessa forma com as diversas áreas do saber. Acredita-se que o uso de recursos tecnológicos pode contribuir para a aprendizagem por se tratarem de instrumentos que as crianças gostam de manusear, sentem-se motivadas e o fazem por meio da cooperação e interação, desenvolvendo-se assim com autonomia. Contudo, percebe-se que na escola ainda vivenciam-se poucas atividades pedagógicas que utilizam esses recursos tecnológicos, principalmente nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

4.2 - O uso das TDIC nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental

A tecnologia se faz presente no cotidiano das pessoas e de forma crescente, também no das crianças. Pela habilidade e familiaridade que demonstram em manusear os recursos tecnológicos, essa geração de crianças representa o que alguns autores como Mattar (2010), Prensky (2005), Alves (2007) e Moita (2006) chamaram de “Nativos Digitais”.

Muitos currículos escolares propõem a inserção de recursos tecnológicos no ensino, seja como suporte a este, de forma regular compondo uma das disciplinas obrigatórias ou optativas como projetos no contraturno escolar. Cada vez mais, é possível encontrar cursos para a formação e formação continuada de professores, além de se encontrar nas escolas recursos como lousas digitais, computadores, *tablets*, etc, disponíveis também para este fim.

Contudo, percebe-se que há poucas pesquisas que utilizam recursos tecnológicos para o ensino de Matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

Um levantamento realizado nas XI, XII e XIII edições do EPREM, Encontro Paranaense de Educação Matemática, observou-se que foram apresentados, nas categorias Comunicação Científica, Relato de Experiência e Pôster, um total de trezentos e sessenta e seis trabalhos, destes, selecionou-se quarenta e um que abordaram estudos relacionados aos Anos Iniciais o que representa pouco mais de onze porcento. Nenhum destes trabalhos contemplou o uso de Tecnologias para os Anos Iniciais do Ensino Fundamental (TOJEIRO; ARAMAN, 2017).

Sabe-se que há muitas pesquisas que abordam o uso de tecnologias para o ensino de Matemática, contudo nenhuma foi encontrada no evento em questão que as utilizasse para o ensino nos Anos Iniciais, verificadas em três edições, considerando que se trata de um dos maiores eventos que promovem discussões de conhecimento matemático do Estado do Paraná.

Tomando por pressuposto que as crianças gostam e apresentam grande facilidade em manusear estes recursos, e que cada vez mais estes poderão ser encontrados para uso didático, utilizar Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação – TDIC para o ensino de Matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental se justifica. Trata-se de recursos que abarcam todos os setores da economia, subsidiam o desenvolvimento de pesquisas, estão presentes no entretenimento, ensino e diversas atividades cotidianas.

Acredita-se que desenvolver tais habilidades nos estudantes, contribui com parte de sua formação pessoal e profissional. Tais orientações podem ser encontradas em alguns documentos como Parâmetros Curriculares Nacional, em que, espera-se

> [...] que nas aulas de Matemática se possa oferecer uma educação tecnológica, que não signifique apenas uma formação especializada, mas, antes, uma sensibilização para o conhecimento dos recursos da tecnologia, pela aprendizagem de alguns conteúdos sobre sua estrutura, funcionamento e linguagem e pelo reconhecimento das diferentes aplicações da informática, em particular nas situações de aprendizagem, e valorização da forma como ela vem sendo incorporada nas práticas sociais (BRASIL,1998, p. 46).

O uso de tais recursos em sala de aula permite que sejam testadas hipóteses, realizadas simulações, além de possibilitar que as crianças vivenciem situações cotidianas como construção de planilhas e uso de calculadoras.

Ponte, Brocardo e Oliveira (2013, p. 83) destacam o uso de softwares de geometria dinâmica como recurso ideal para investigações matemáticas.

> Esse suporte tecnológico permite o desenho, a manipulação e a construção de objetos geométricos, facilita a exploração de conjecturas e a investigação de relações que precedem o uso do

> raciocínio formal. Vários estudos empíricos destacam também que na realização de investigações, a utilização dessas ferramentas facilita a recolha de dados e o teste de conjecturas, apoiando desse modo, explorações mais organizadas e completas e permitindo que os alunos se concentrem nas decisões em termos do processo (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2013, p.83).

Neste sentido, atividades propostas utilizando alguma tecnologia permitem, por exemplo, que o professor explore uma situação inúmeras vezes, de forma que, se modificar algumas variáveis tenha condições de realizar vários ensaios semelhantes com maior rapidez em busca da percepção de padrões. As atividades “Passeios de Euler” desenvolvidas neste estudo permitem que os estudantes realizem simulações e tentativas todas as vezes que partem com o personagem de um vértice diferente do grafo, percorrendo diversos caminhos. Desta forma, podem observar, discutir com seus pares, comparar seus resultados, formular hipóteses, bem como validá-las ou não.

O uso da tecnologia neste caso seria fazer dela o que Papert (1988, p.26) chamou de “objeto-de-pensar-com”, no sentido de, “um instrumento educacional válido, cuja principal função é servir como modelo para outros objetos, ainda a serem inventados.” Desta forma, o professor cria situações para que os estudantes produzam seu próprio conhecimento através de experimentações e observações, confrontando seus conhecimentos com novos desafios, tendo em mãos um amplo leque de possibilidades em meio a tentativas e erros, levando-os a reflexões na busca de soluções.

Justifica-se ainda por se caracterizar em recursos que os estudantes estão familiarizados, mostram empatia e pela facilidade em gerar uma nova etapa a cada tentativa, interagindo com o estudante quando este desenvolve um pensamento equivocado, oportunizando neste sentido, que ele repita a atividade por quantas vezes sentir necessidade.

4.3 - O *software* Scratch

O *software* Scratch[9] é uma plataforma de desenvolvimento de jogos e animações de livre acesso na *internet.* Segundo Mattar (2010), ele foi desenvolvido

[9] Scratch < http://www.scratchbrasil.net.br >

em 2007 no Massachusetts Institute of Technology (MIT) para o ensino de programação e lógica computacional para crianças e adolescentes.

É possível desenvolver programas diretamente na plataforma *online* ou com o *software* instalado no computador. É multiplataforma, passível de instalação em sistemas operacionais como Windows, Linux e Mac.

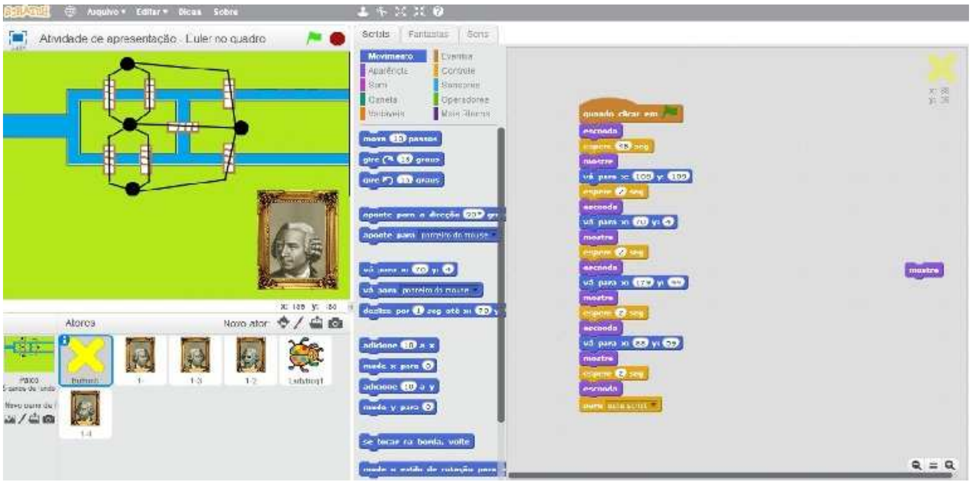
Possui uma interface de programação amigável e intuitiva em forma de blocos lógicos coloridos. Por meio desta plataforma é possível desenvolver a programação, reutilizar partes de códigos já desenvolvidos por outros, bem como compartilhar suas criações no endereço eletrônico disponível para esta finalidade.

Há um endereço eletrônico, o ScratchEd[10], em que os educadores podem conhecer as ideias pedagógicas propostas pelos desenvolvedores, interagir com outros educadores, compartilhar atividades educativas, visualizar eventos envolvendo o uso do Scratch,bem como encontrar artigos e pesquisas interessantes a respeito.

> O Scratch foi projetado com aprendizado e educação em mente. Conforme criam projetos no Scratch, as crianças (ou adultos) aprendem matemática, computação, programação, design, fluência em tecnologia digital e outras habilidades que são essenciais para o sucesso no século XXI (MATTAR, 2010, p. 117).

A Figura 9 apresenta a plataforma de desenvolvimento Scratch, de forma que é possível visualizar parte do código (direita), ao centro, os blocos lógicos utilizados para programar e a esquerda, a parte gráfica, resultado da programação.

Figura 9 – Tela do Scratch com parte da programação da animação de Apresentação



Fonte: Autora

[10] ScratchEd <http://scratched.gse.harvard.edu/>

A escolha por esta plataforma se deu justamente por estas características, portabilidade, reaproveitamento de código e por ser de fácil utilização tanto para o programador quanto para o usuário.

CAPÍTULO V

METODOLOGIA

Neste capítulo, apresentam-se as opções metodológicas do estudo, fazendo-se uma breve referência à Investigação Matemática na perspectiva adotada por Ponte, Brocardo e Oliveira (2013) e Ponte et al. (2017). Identificam-se, ainda, os participantes, as tarefas, os procedimentos adotados e os instrumentos de recolha e análise de dados.

5.1 – Opções Metodológicas

A educação insere-se no grupo das ciências humanas, e as pesquisas em educação envolvem relações sociais entre sujeitos, estas relações recebem influências do comportamento humano, bem como do ambiente em que se dá o processo investigativo.

Neste sentido, a presente pesquisa seguiu uma abordagem qualitativa, uma vez que ela reflete o conhecimento empírico do pesquisador, que em alguns casos se faz parte da mesma, bem como do contexto histórico ao qual se insere. As pesquisas qualitativas "tentam compreender os fenômenos pela ótica do sujeito. Neste sentido, têm como premissa que nem tudo é quantificável e que a relação que a pessoa estabelece com o meio é única e, portanto, demanda uma análise profunda e individualizada". (MALHEIROS, 2011, p. 31).

Para os autores Bodgan e Biklen (2013), a investigação qualitativa possui cinco características fundamentais:

1- Na investigação qualitativa a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal;

2- A investigação qualitativa é descritiva, em forma de palavras ou imagens;

3- Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos;

4- Os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva;

5- Os significados que os participantes atribuem às suas experiências são de importância vital na abordagem qualitativa.

Neste sentido, este estudo teve início por meio de algumas pesquisas qualitativas de caráter documental, com a intenção de ampliar o conhecimento sobre o assunto, perfazendo-se as seguintes etapas:

1- Realizou-se no início, estudos sobre a aprendizagem matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental;

2- A partir dos resultados obtidos com o referido levantamento, realizaram-se análises nos currículos oficiais que orientam o ensino de Matemática em busca da abordagem que estes documentos apresentam, bem como a forma com que orientam o ensino de Geometria e ainda, se abordam o ensino de noções introdutórias de Topologia para os Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

3- Realizou-se na sequência, estudos teóricos sobre o uso das Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação no ensino de Matemática verificando como ocorre seu uso para os Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

4- Por meio de uma análise nos anais do EPREM, Encontro Paranaense de Educação Matemática, buscou-se conhecer como ocorrem as pesquisas em Matemática no Estado do Paraná direcionadas ao uso de Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação – TDIC para o ensino de Matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Percebeu-se com o levantamento realizado, que ainda há poucas pesquisas neste sentido.

5- Para a elaboração das atividades iniciou-se com a escolha da tarefa a ser investigada: A escolha do problema das Sete Pontes de Königsberg se deu por se tratar de um problema clássico e instigante que contribuiu para o surgimento das geometrias não-euclidianas, da qual a Topologia faz parte. O problema aborda o surgimento da Teoria dos Grafos, muito utilizada atualmente por diversos segmentos como logística, distribuição de rede elétrica, tubulações de água, rede de *internet*, Inteligência Artificial, entre outros.

6- Escolheu-se como metodologia de ensino a Investigação Matemática, uma vez que esta permite que os estudantes desenvolvam habilidades para resolução de problemas, desenvolvam a criatividade, questionem, discutam, avaliem, testem e validem ou não suas hipóteses .

7- Estudou-se o *software* Scratch para o desenvolvimento das atividades.

5.2 – Abordagem Investigativa

Investigar caracteriza-se em buscar respostas para algum problema interessante, mobilizar e aplicar conhecimentos, elaborar hipóteses, testá-las. Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2013, p. 13), “Para os matemáticos profissionais, investigar é descobrir relações entre objetos matemáticos conhecidos ou desconhecidos, procurando identificar as respectivas propriedades”. Destacam ainda três momentos principais:

> 1- Introdução da tarefa em que o professor faz a proposta à turma, pode ser oralmente ou por escrito;
> 2- Realização da investigação, que pode ser individual, em duplas ou coletivamente;
> 3- Discussão dos resultados, em que os alunos relatam aos colegas o trabalho realizado (PONTE, BROCARDO, OLIVEIRA, 2013, p. 25).

A introdução da tarefa investigativa é importante, pois é neste momento que o professor apresenta a situação a ser investigada, atentando-se para que todos compreendam a proposta. Ao propor a atividade pode fazê-la, de forma que os estudantes sintam-se motivados para a realização.

Em seguida, acompanha as investigações dos estudantes propondo boas perguntas para mantê-los no curso, esclarece alguns pontos, faz intervenções de maneira adequada em momentos estratégicos, conduzindo-os aos seus próprios questionamentos, levando-os a acreditar que são capazes de buscar respostas.

Nesta etapa, o professor disponibiliza um tempo para que ocorram as trocas e se efetuem os debates, os estudantes poderão levantar algumas hipóteses, testá-las e discutir com seus colegas.

Conforme Ponte *et al.,* (2017, p.144), “Na realização destas tarefas, a organização e condução de discussões coletivas evidenciam-se como particularmente importantes para a aprendizagem dos alunos, constituindo uma importante faceta da prática profissional do professor”.

No terceiro momento da atividade investigativa, os estudantes apresentam suas descobertas para o grande grupo e socializam seu trabalho. Neste momento, o professor pode ajudar e “garantir que sejam comunicados os resultados e os processos mais significativos da investigação realizada e estimular os alunos a questionarem-se mutuamente (PONTE, 2013, p. 41)”. Após esta discussão, o professor sistematiza todo o conhecimento produzido pelos grupos, faz uma síntese e neste sentido, pode esclarecer alguns pontos que eventualmente tenham ficado em aberto.

Segundo Fernandes (1965, p.991), o termo sistematizar significa “reduzir a um sistema, reunir em um corpo de doutrina”. Desta forma, ao se utilizar o termo “sistematização” nas atividades, este deverá ser entendido como um fechamento das atividades, uma formalização e explicações dos teoremas.

Atividades investigativas, quando realizadas adequadamente, conduzem os estudantes a vivenciarem a matemática. O processo investigativo pode se tornar mais rico e empolgante que o próprio resultado final, ou a solução do problema proposto pelo professor. Durante o caminhar, o estudante pode desenvolver outras capacidades, como o interesse pela busca, encorajamento diante de desafios, a persistência diante de dificuldades, o compartilhamento com seus pares e professores, bem como ser capaz de realizar autoquestionamentos.

Os estudantes assumem um papel ativo durante a realização das atividades, é uma forma de trazer para a sala de aula o verdadeiro “fazer matemática”, a matemática na prática, sentido na maioria das vezes apenas pelos matemáticos. A busca pela solução se dá por meio de tentativas e erros, análise de erros, formulação de conjecturas e hipóteses, descobertas e comunicação destas.

A prática da investigação em sala de aula provoca uma mudança de paradigmas, pois permite ao estudante maior autonomia em relação a sua aprendizagem, modifica o papel do professor, quando este passa a ser um mediador e elaborador de boas perguntas e ainda altera a estrutura curricular, uma vez que investigar requer um tempo maior. Estas mudanças que podem ocorrer a partir da prática investigativa na escola, podem se acarretar alguns empecilhos que foram destacados por Veloso (1999, p. 61).

> Alguns obstáculos, que têm sido detectados ou confirmados, devem igualmente ser tomados em consideração. Diversos alunos, sobretudo dos anos mais adiantados, revelam dúvidas sobre o que estão efectivamente a aprender; habituados a outro tipo de aulas e exercícios, alguns tendem a perguntar “onde é que está a matéria?”. Do ponto de vista dos professores, surgem igualmente dúvidas, relacionadas com a pressão do *cumprimento* do programa (“não tenho tempo…”) ou com a autoconfiança necessária para conduzir aulas mais imprevisíveis.
> Uma outra dificuldade, de outro tipo, tem a ver com o facto de não se poder esperar uma evolução significativa dos alunos em pouco

> tempo. O tipo de trabalho aqui delineado requer tempo e persistência, visto que lida essencialmente com a necessidade de mudar aspectos centrais da cultura tradicional da aula de Matemática. Actividades matemáticas de tipo investigativo, quando realizadas de modo isolado ou esporádico, podem ser interessantes no momento mas não abalam, só por si, concepções e práticas muito enraizadas (VELOSO, *et al*. 1999, p.61).

É uma prática que pode conduzir o estudante ao exercício realizado por pesquisadores e investigadores. Neste sentido, faz-se necessário insistir em desenvolver atividades deste tipo, mesmo que sejam apenas em alguns momentos durante o ano letivo, em uma tentativa de despertar nos estudantes este sentimento, pois mudanças requerem tempo e persistência.

Mendes (2009, p.18) afirma que o ensino de Matemática na abordagem da Etnomatemática, Modelagem, História da Matemática aliadas à Investigação, caracteriza-se em importante ferramenta que conduz o ensino desta disciplina a uma perspectiva sociocultural e construtivista, que permite uma visão geral da Matemática e sua aplicação prática por meio da interdisciplinaridade.

> A utilização da investigação se mostrou eficiente para conduzir professores e licenciados à construção de um conhecimento matemático significativo, capaz de transformar suas práticas, assim como dos graduandos no exercício do magistério em quaisquer graus de ensino (MENDES, 2009 p.19).

O ensino de Matemática sob esta perspectiva tende a um ensino mais eficaz, uma vez que envolve o estudante, permitindo-lhe uma visão holística em relação a sua aprendizagem e à Matemática. Neste sentido, entendeu-se que esta metodologia de ensino se adequou à proposta das atividades quando permitiu aos estudantes investigarem e observarem as regularidades que envolvem os teoremas e resolverem o problema proposto, em uma participação ativa e colaborativa, ao se aproximarem dos teoremas elaborados por Euler para a Teoria dos Grafos.

5.3- Participantes da Pesquisa

Os participantes deste estudo são estudantes que frequentam os Anos Iniciais do Ensino Fundamental, vinte e um estudantes no quarto ano e vinte e um no quinto ano e compreendem a faixa etária de 09 a 11 anos, estão matriculados em uma escola municipal na cidade de Ourinhos, estado de São Paulo.

As turmas foram indicadas pela direção da escola conforme a disponibilidade de horário da pesquisadora. Dos quarenta e dois estudantes, alvos deste estudo, um necessita de atendimento educacional especializado, de forma que uma professora o acompanha durante a rotina escolar. As atividades foram aplicadas durante as aulas de Informática, que ocorrem uma vez por semana e faz parte da matriz curricular. Para a turma de quarto ano, as atividades foram aplicadas às terças-feiras, no primeiro horário e para a turma do quinto ano às quintas-feiras, no último horário.

O professor de Informática destes estudantes e a professora de atendimento educacional especializado colaboraram com a aplicação das atividades apenas como suportes tecnológico e pedagógico, respectivamente.

5.4 – Procedimentos e o Problema das Sete Pontes de Königsberg

O presente estudo decorreu durante os anos letivos de 2017 e 2018, de forma que a aplicação das atividades para os estudantes iniciou-se no dia quatro de setembro e foi finalizada no dia dois de outubro de 2018, perfazendo um total de cinco encontros, um por semana com cada uma das turmas.

Durante as atividades, os estudantes dispostos em duplas realizaram vários passeios com diferentes possibilidades por cada um dos grafos com o uso do *software* Scratch na busca por algumas regularidades e verificaram a possibilidade ou não de se realizar o passeio de Euler por cada um dos grafos. Por meio dos questionamentos propostos pela pesquisadora, preenchimento das fichas de trabalho, observações e discussões com seus pares, os estudantes tiveram a possibilidade de participarem de atividades investigativas ao levantarem hipóteses e desenvolverem conjecturas. A cada encontro, os estudantes estudaram duas atividades e responderam a duas fichas de trabalho.

Os estudantes alvos da pesquisa não têm muita experiência com atividades investigativas. Esta se caracteriza em atividade que tem sido incorporada à rotina deles recentemente, contudo são estudantes que, em geral, não apresentam dificuldades com o trabalho em duplas.

Para o último encontro, os estudantes se reorganizaram em quatro grupos para que pudessem discutir sobre as atividades realizadas nos oito encontros anteriores, utilizando as fichas de trabalho que continham os grafos e alguns questionamentos.

Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2013, p.28),

> se a introdução inicial do professor for demasiado pormenorizada relativamente ao que “é para fazer”, poderá condicionar a exploração a realizar pelos alunos. Em princípio, se a tarefa for suficientemente rica, não existe o perigo de que o professor limite a possibilidade de os alunos estabelecerem as suas próprias conjecturas, se der algumas pistas, de exploração ou pedir a eles algumas sugestões. Em particular, quando os alunos estão pouco ou nada familiarizados com as investigações, é importante que tal seja feito, o que além do mais contribui para que o trabalho progrida posteriormente mais depressa (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2013, p. 28).

Neste sentido, os questionamentos das fichas de trabalho utilizadas nas atividades tinham como finalidade auxiliar os estudantes na construção de conjecturas bem como muní-los com um instrumento no qual pudessem fazer consultas e comparações.

Ao final da sequência, socializaram as suas descobertas e juntamente com a pesquisadora discutiram os resultados observados que os conduziram à sistematização ao perceberem algumas das características dos grafos descritas nos Teoremas desenvolvidos por Leonard Euler.

Os grafos das atividades foram apresentados dois a cada encontro, de forma que o grau de dificuldade fosse crescente. Ao movimentar o personagem pelas arestas do grafo, o trajeto era traçado para que o estudante visualizasse o caminho já percorrido.

Segundo Sampaio (2010), a Teoria dos Grafos teve início com o matemático Leonhard Euler em 1736, quando resolveu um problema proposto pelos moradores aos visitantes da cidade Königsberg, na antiga Prússia.

O rio Pregel separa a cidade em quatro partes, e estas são interligadas por sete pontes. Os moradores desafiavam os visitantes a realizarem um passeio pelas quatro partes da cidade, de forma que passassem apenas uma vez por cada uma das sete pontes. Euler desvenda o mistério, comprovando que o passeio é impossível, dando origem a Teoria dos Grafos.

> Ao estudar o problema das sete pontes de Königsberg, Euler não fez uso de grafos, tal como faremos aqui. Fez porém uso de conceitos e raciocínios matemáticos que mais tarde evoluíram para a moderna teoria dos grafos. O problema das sete pontes de Königsberg é um atraente motivo para uma apreciação de elementos da teoria dos grafos, acessível a leitores de todos os níveis de escolaridade matemática (SAMPAIO, 2010, p. 9).

Euler estudou o mapa de Königsberg e percebeu que deveria analisar as conexões permitidas pelas pontes nas distintas partes da cidade e que as distâncias envolvidas eram irrelevantes. Desta forma, o transformou em linhas e pontos e percebeu que, para que o passeio fosse possível, ele deveria percorrer as linhas com um lápis sem tirá-lo do papel, passando apenas uma vez por cada linha, caracterizando-se no que mais tarde foi chamado de “Passeio de Euler”. Os grafos podem apresentar configurações espaciais ou planas, neste último caso, denomina-se “grafo planar”.

É possível fazer um passeio de Euler em um grafo conforme os Teoremas:

> **Teorema 1.** Se um grafo planar admite um passeio de Euler, começando e terminando em um mesmo vértice, então todo vértice desse grafo tem ordem par.
> **Teorema 2.** Se um grafo planar admite um passeio de Euler, começando num vértice e terminando em outro, então os vértices final e inicial do passeio são ímpares, e todos os demais vértices do grafo tem ordem par.
> **Teorema 3.** Se um grafo tem seus vértices todos pares, então ele admite um passeio de Euler. Além disso, esse passeio pode começar (e terminar) em qualquer vértice previamente escolhido. O primeiro arco do caminho pode ser qualquer arco partindo desse vértice.
> **Teorema 4.** Se um grafo tem dois vértices ímpares e os demais todos pares, então ele admite um passeio de Euler. Esse passeio deve começar em um dos vértices ímpares e terminar no outro (SAMPAIO, 2010, p. 12).

Desta forma, utilizando-se da Investigação Matemática, como metodologia de ensino, a pesquisadora implementou uma sequência de tarefas que aborda noções introdutórias de Topologia. As atividades desenvolvidas constituem-se em oito grafos desenvolvidos com o *software* Scratch em que o estudante pode percorrer os arcos destes na tentativa de realizar um “Passeio de Euler” por ele e, desta forma investigar, discutir com seus pares, formular hipóteses e se aproximar de algumas noções que subsidiam os Teoremas desenvolvidos por Leonhard Euler.

A escolha da tecnologia utilizada no desenvolvimento das atividades foi pelo *software* Scratch por ser de fácil utilização, passível de reaproveitamento de código e *open source,* livre para uso.

Foram solicitados aos encarregados de educação, Secretário Municipal de Educação (ver Apêndice 1) e Diretora de Unidade Escolar (ver Apêndice 2), bem como aos representantes legais dos estudantes (ver Apêndice 3), autorizações para que a aplicação das atividades se efetivassem, uma vez que as intervenções teriam registros em áudios e imagens.

5.5 – Instrumentos para recolha de dados

De acordo com os objetivos do estudo, foram utilizadas algumas técnicas para a recolha dos dados como, observação dos estudantes quanto à forma com que realizaram as atividades e discutiram com seus colegas, fotografias destes realizando as atividades, respondendo aos questionamentos das fichas de trabalho e discutindo com seus pares, gravações de áudios e vídeos sobre seus argumentos e realização das atividades, anotações em diário de bordo quanto às dúvidas que surgiram e como foram orientados, bem como as fichas de trabalho das atividades preenchidas pelos estudantes.

CAPÍTULO VI

APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS

Neste capítulo, apresentam-se e descrevem-se os procedimentos, as dificuldades e as estratégias utilizadas pela pesquisadora durante a implementação das atividades que foram realizadas, tomando como embasamento os referenciais teóricos no que tange à Investigação Matemática, à Topologia, ao uso do *software* Scratch e ao objetivo proposto. Verificou-se ainda como os estudantes se aproximaram dos Teoremas desenvolvidos por Euler na Teoria dos Grafos por meio da Investigação Matemática, utilizando o Scratch.

As oito primeiras atividades, foram divididas em quatro encontros. O quinto e último encontro foi reservado para que os estudantes realizassem a nona atividade e apresentassem suas descobertas em relação ao que realizaram durante as oito atividades anteriores. Para encerrar, a pesquisadora fez uma retomada oral de tudo o que foi estudado e apresentado por eles, relacionando com os quatro teoremas os quais deveriam se aproximar.

6.1 – Apresentação e descrição do desenvolvimento das atividades

As atividades foram divididas em cinco encontros: *1º encontro* apresentou-se a proposta e os estudantes realizaram as atividades 1 e 2; no *2º encontro* realizaram as atividades 3 e 4; no *3º encontro* as atividades 5 e 6; no *4º encontro* fizeram as atividades 7 e 8 e *no 5º* e último *encontro* os estudantes socializaram suas descobertas com os outros grupos e a pesquisadora conduziu-os à uma reflexão, sistematizando suas descobertas.

Durante os quatro primeiros encontros, os estudantes se organizaram em duplas que se formaram a partir de suas próprias escolhas, por afinidades. Devido à ausência de alguns estudantes, as duplas se formavam no início de cada encontro. Alguns preferiram realizar as atividades individualmente.

O último encontro foi realizado em sala de aula, sem o uso dos computadores. Nas oito atividades, os estudantes precisaram conduzir o personagem pelas arestas dos grafos no *software* Scratch na tentativa de se fazer um Passeio de Euler por eles. E a cada tentativa, partir de um vértice diferente. Durante as atividades, deveriam responder aos questionamentos das fichas de trabalho (ver Apêndices 4, 5, 6 e 7).

1º ENCONTRO

Neste encontro, foi apresentada a proposta de trabalho e como deveriam proceder. Desta forma, os trabalhos iniciaram com um questionamento; se sabiam o que era uma investigação. Alguns estudantes se manifestaram, relacionando o termo à investigação criminal. A pesquisadora explicou que investigar é buscar uma resposta para uma questão e que precisamos observar com atenção, procurar entender as pistas, discutir com alguns colegas e formular algumas hipóteses para depois, fazer vários testes e verificar se elas são verdadeiras ou não.

Em atividades de Investigação Matemática, a apresentação é parte fundamental, uma vez que segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2013, p. 26), o início da aula,

> [...] é uma fase absolutamente crítica, dela depende todo o resto. O professor tem de garantir que todos os alunos entendem o sentido da tarefa proposta e aquilo que deles se espera no decurso da atividade. O cuidado posto nestes momentos iniciais tem especial relevância quando os alunos têm pouca ou nenhuma experiência com as investigações (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2013, p. 26).

Neste momento introdutório da realização das atividades, perpassa-se pela primeira etapa da Investigação Matemática, descrita por Ponte, Brocardo e Oliveira (2013, p. 25) *"(i) introdução da tarefa, em que o professor faz a proposta à turma, oralmente ou por escrito".* No caso, a apresentação foi realizada oralmente e por meio da apresentação de duas animações feitas nos Scratch, a animação de Apresentação[11] e a animação de Orientações[12] elaboradas pela pesquisadora.

[11] Animação com a apresentação: https://scratch.mit.edu/projects/244866900/
[12] Animação com as orientações: https://scratch.mit.edu/projects/244868498/

A Matemática como ciência, possui linguagens e símbolos específicos, é conhecimento que se aplica no cotidiano, em ambientes comerciais e no contexto escolar. A investigação praticada na escola pode ocorrer em forma de “modelo matemático”. Segundo Ponte (2017, p. 254), “um modelo matemático é uma descrição simplificada de uma situação realizada através de conceitos, relações e representações matemáticas”. Neste sentido, a investigação praticada em contexto escolar pode buscar maior aproximação com os estudantes quando utiliza-se de termos que lhes são compreensíveis, de seu cotidiano.

Durante a introdução das atividades, explicou-se ainda que, “há cerca de 300 anos, um matemático chamado Leonhard Euler encontrou um problema que o deixou intrigado. Uma cidade se dividia em quatro partes porque um rio passava por ela. E esta cidade possuía sete pontes que ligava estas partes. Ele queria saber se conseguiria conhecer todas as quatro partes da cidade, atravessando todas as pontes apenas uma vez” (SAMPAIO, 2010).

Após esta rápida introdução, a animação de Apresentação foi executada. Ao final desta, a pesquisadora explicou o conceito de grafo, retomou conceitos de arestas e vértices e convidou-os às atividades, instigando-os a fazer uma investigação. “Nós vamos fazer umas atividades investigativas, como o Euler fez quando se deparou com o problema das Sete Pontes de Königsberg. Para isso, vamos fazer experimentações e observações por alguns grafos e verificar se é possível fazer um passeio de Euler por eles. Vamos tentar descobrir também, o porquê de se conseguir fazer um passeio por uns grafos e por outros não. O que os fazem diferentes uns dos outros”. Em seguida, assistiram à animação com as Orientações, que explicam a forma de utilizar os comandos que movimentam o personagem no Scratch.

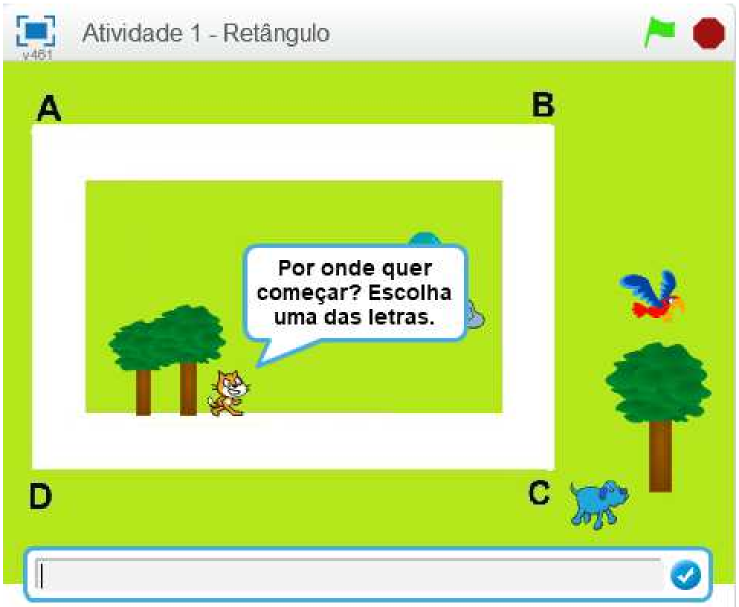
As atividades, bem como as animações de Apresentação e Orientações podem ser acessadas e utilizadas diretamente na plataforma Scratch (*links* nas notas de rodapé) ou baixados para o computador.

Atividade 1 - Retângulo

De qualquer vértice que se inicia o passeio neste grafo, todas as arestas são percorridas apenas uma vez e chega-se sempre ao local da partida. Isto ocorre, porque este grafo possui todos os vértices com ordem par, ou seja, chegam nestes vértices quantidades pares de arestas, duas em cada vértice.

Ao realizarem esta atividade, os estudantes podem se aproximar do Teorema 1: *Se um grafo planar admite um passeio de Euler, começando e terminando em um mesmo vértice, então todo vértice desse grafo tem ordem par (SAMPAIO, 2010, p.12).*

Figura 10 – Grafo da Atividade Um[13]



Fonte: Autora

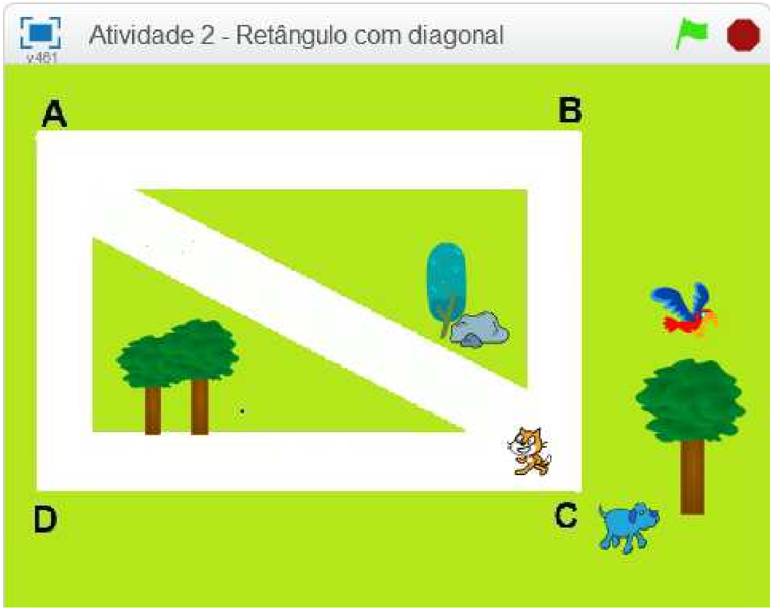
Atividade 2 - Retângulo com diagonal

Nesta atividade, os estudantes podem se aproximar do Teorema 2: *Se um grafo planar admite um passeio de Euler, começando num vértice e terminando em outro, então os vértices final e inicial do passeio são ímpares, e todos os demais vértices do grafo tem ordem par (SAMPAIO, 2010, p.12).*

[13] Atividade 1: https://scratch.mit.edu/projects/245070284/

Este grafo apresenta dois vértices de ordem par, B e D (com duas arestas) e dois de ordem ímpar A e C, (com três arestas). O passeio só é possível quando se parte de um dos vértices ímpares, e a chegada é sempre no outro vértice ímpar. Um grafo não pode ter mais do que dois vértices ímpares para que haja a possibilidade de se fazer um passeio Euler por ele.

Figura 11 – Grafo da Atividade Dois[14]



Fonte: Autora

Objetivos:

Responder aos questionamentos das fichas de trabalho (Apêndice 4).

Perceber características que conduzem aos Teoremas 1 e 2 para as atividades 1 e 2 respectivamente.

Atividades/Estratégias:

Animação de Apresentação.

Animação de Orientações sobre os comandos utilizados no *software* para movimentar o personagem.

Revisão sobre conceitos matemáticos utilizados nas atividades como vértices, arestas e números pares/ímpares.

Recursos/Materiais:

[14] Atividade 2: https://scratch.mit.edu/projects/245077498/

Computador para apresentar os vídeos e realizar as atividades.
Projetor multimídia.
Caixa de som.

2º ENCONTRO

Neste encontro, foram realizadas as atividades 3 e 4. Antes de iniciar as atividades deste encontro, a pesquisadora explicou novamente a proposta, descreveu o problema das Sete Pontes de Königsberg e ainda retomou os conceitos de vértice, aresta, números pares e ímpares para os estudantes que estiveram ausentes no primeiro encontro e também para os que ainda encontravam-se com alguma dúvida. Em seguida, com o auxílio do projetor multimídia realizou alguns passeios no grafo da atividade 2 e coletivamente, discutiram-se os questionamentos referentes a esta atividade.

Atividade 3 – Retângulo com losango

Nesta atividade, os estudantes podem perceber características dos Teoremas 2 e 4.

> Teorema 2: Se um grafo planar admite um passeio de Euler, começando num vértice e terminando em outro, então os vértices final e inicial do passeio são ímpares, e todos os demais vértices do grafo tem ordem par. Teorema 4: Se um grafo tem dois vértices ímpares e os demais todos pares, então ele admite um passeio de Euler. Esse passeio deve começar em um dos vértices ímpares e terminar no outro (SAMPAIO, 2010, p. 12).

Assim como o grafo da atividade 2, por este grafo é possível fazer um passeio de Euler, pois ele possui dois vértices ímpares e os demais pares. Por este grafo o passeio é possível apenas a partir dos vértices B e C, com três arestas cada.

Figura 12 – Grafo da Atividade Três[15]

Fonte: Autora

Nas atividades 3 e 4, por meio dos questionamentos é esperado que os estudantes percebam que o passeio apenas é possível quando o grafo tem no máximo dois vértices ímpares e que o passeio deve começar em um vértice ímpar e terminar no outro vértice ímpar.

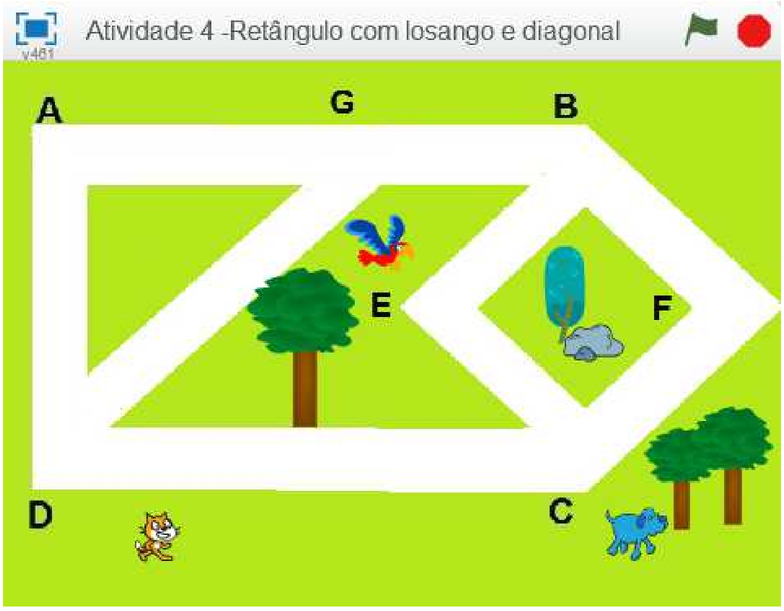
<u>Atividade 4 – Retângulo com losango e diagonal</u>

Nesta atividade, os estudantes podem perceber características do Teorema 4. *"Se um grafo tem dois vértices ímpares e os demais todos pares, então ele admite um passeio de Euler. Esse passeio deve começar em um dos vértices ímpares e terminar no outro (SAMPAIO, 2010, p. 12)".*

Este é o primeiro grafo da sequência em que não é possível fazer um passeio de Euler. Um vértice é um "Ponto em que duas ou mais retas se interceptam; ponta." (VÉRTICE, 2019), neste caso nos vértices B, C, D e G, encontram-se três semirretas cada, constituindo-se em vértices de ordem ímpar. Partindo-se de qualquer um dos vértices deste grafo, não se consegue realizar um passeio de Euler.

[15] Atividade 3: https://scratch.mit.edu/projects/245078780/

Figura 13 – Grafo da Atividade Quatro[16]



Fonte: Autora

Objetivos:

Responder aos questionamentos da terceira ficha de trabalho (ver Apêndice 5).

Perceber características que conduzem aos Teoremas 2 e 4 na atividade 3 e Teorema 4 na atividade 4.

Atividades/Estratégias:

Retomada das orientações e conceitos como grafos, arestas, vértices e números pares/ímpares e realização e discussões da atividade 2 coletivamente.

Recursos/Materiais:

Computador

Projetor multimídia.

3º ENCONTRO

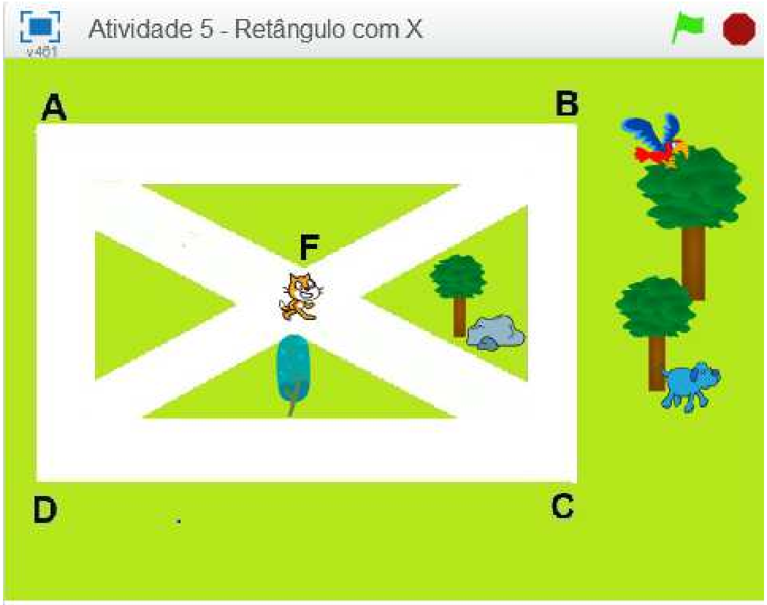
Neste encontro, foram realizadas as atividades 5 e 6.

[16] Atividade 4: https://scratch.mit.edu/projects/245079679/

Atividade 5 – Retângulo com X

Neste grafo não é possível fazer o passeio de Euler, uma vez que possui quatro vértices ímpares, (A, B, C e D). Por meio desta atividade, os estudantes podem perceber características do Teorema 4. *“Se um grafo tem dois vértices ímpares e os demais todos pares, então ele admite um passeio de Euler. Esse passeio deve começar em um dos vértices ímpares e terminar no outro (SAMPAIO, 2010, p. 12)”.*

Figura 14 – Atividade Cinco[17]



Fonte: Autora

Atividade 6 – Retângulo com X e V

Neste grafo é possível fazer o passeio de Euler apenas quando o personagem parte dos vértices A e D, com três arestas cada. Os demais vértices são pares.

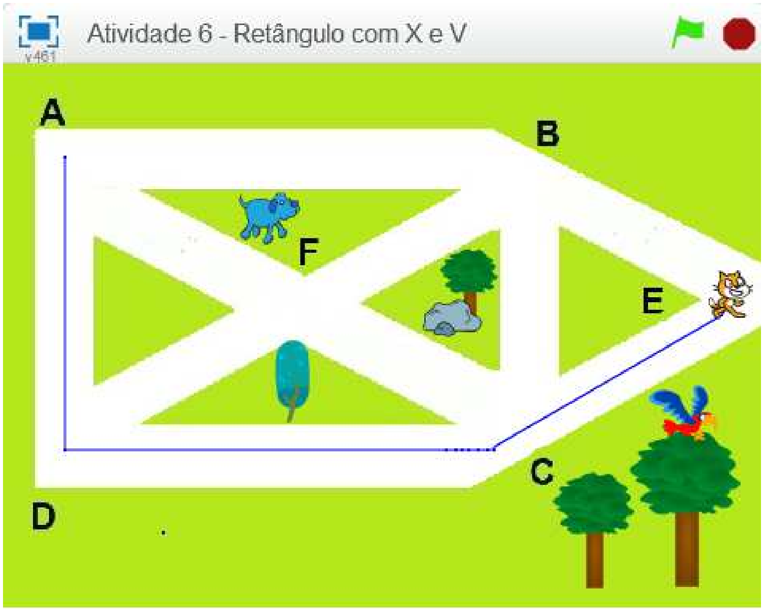
Pretende-se com esta atividade que os estudantes percebam características dos Teoremas 2 e 4.

> *Teorema 2: “Se um grafo planar admite um passeio de Euler, começando num vértice e terminando em outro, então os vértices*

[17] Atividade 5: https://scratch.mit.edu/projects/245080522/

final e inicial do passeio são ímpares, e todos os demais vértices do grafo tem ordem par".
<u>Teorema 4:</u> "Se um grafo tem dois vértices ímpares e os demais todos pares, então ele admite um passeio de Euler. Esse passeio deve começar em um dos vértices ímpares e terminar no outro (SAMPAIO, 2010, p. 12)".

Figura 15 – Grafo da Atividade Seis[18]



Fonte: Autora

<u>Objetivos:</u>

Responder aos questionamentos da quarta e quinta fichas de trabalho (ver Apêndice 6).

Perceber características que conduzem ao Teorema 4, na atividade 5 e características dos Teoremas 2 e 4 para a atividade 6.

<u>4º ENCONTRO</u>

Neste encontro foram realizadas as atividades 7 e 8.

[18] Atividade 6: https://scratch.mit.edu/projects/245084607/

Atividade 7 – Dois Retângulos

Por meio do grafo desta atividade é possível fazer um passeio de Euler. Todos os vértices são pares. Sempre o vértice de partida é o mesmo de chegada.

É possível que os estudantes se aproximem dos Teoremas 1 e 3 ao realizarem esta atividade.

> *Teorema 1.* Se um grafo planar admite um passeio de Euler, começando e terminando em um mesmo vértice, então todo vértice desse grafo tem ordem par.
> *Teorema 3.* Se um grafo tem seus vértices todos pares, então ele admite um passeio de Euler. Além disso, esse passeio pode começar (e terminar) em qualquer vértice previamente escolhido. O primeiro arco do caminho pode ser qualquer arco partindo desse vértice (SAMPAIO, 2010, p. 12).

Figura 16 – Grafo da Atividade Sete[19]

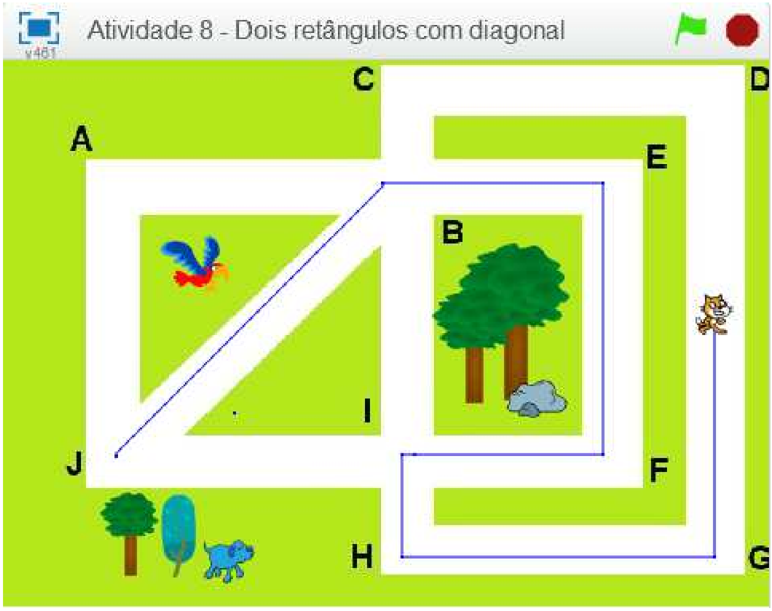
Fonte: Autora

Atividade 8 – Dois Retângulos com diagonal

Nesta atividade, é possível fazer um passeio de Euler pelo grafo que apresenta apenas dois vértices ímpares, B com cinco arestas e J com três. Quando o passeio se inicia em um destes vértices no outro se chega.

[19] Atividade 7: https://scratch.mit.edu/projects/245085831/

Figura 17 – Grafo da Atividade Oito[20]



Fonte: Autora

Ao realizarem esta atividade, os estudantes podem perceber características dos Teoremas 2 e 4.

> *Teorema 2.* Se um grafo planar admite um passeio de Euler, começando num vértice e terminando em outro, então os vértices final e inicial do passeio são ímpares, e todos os demais vértices do grafo tem ordem par.
> *Teorema 4.* Se um grafo tem dois vértices ímpares e os demais todos pares, então ele admite um passeio de Euler. Esse passeio deve começar em um dos vértices ímpares e terminar no outro (SAMPAIO, 2010, p. 12).

Objetivos:

Responder aos questionamentos da oitava ficha de trabalho (ver Apêndice 7).

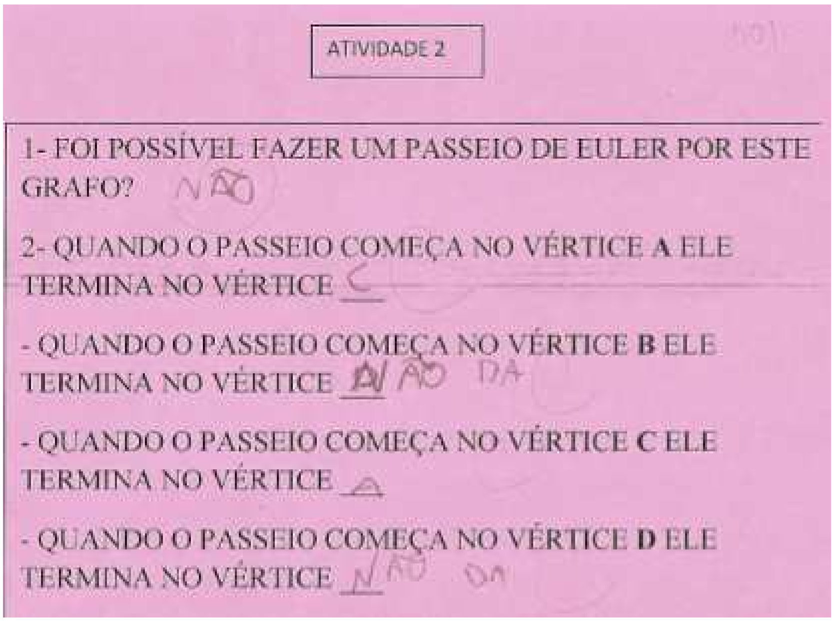
Perceber características que conduzem aos Teoremas 1 e 3, na atividade 7 e Teoremas 2 e 4, na atividade 8.

6.2 - Análise das perguntas e respostas das fichas de trabalho utilizadas nas atividades de 1 a 8

[20] Atividade 8: https://scratch.mit.edu/projects/245085989/

Ao realizarem os passeios com o *software*, os estudantes responderam às perguntas das fichas de trabalho. Cada ficha apresenta quantidade e tipos de perguntas específicas, e têm como objetivo chamar a atenção dos estudantes para certas características de cada grafo. As duas primeiras perguntas, como mostra a figura 18, se repetiram em todas as atividades.

Figura 18- Perguntas 1 e 2 das fichas de trabalho



ATIVIDADE 2

1- FOI POSSÍVEL FAZER UM PASSEIO DE EULER POR ESTE GRAFO? NÃO

2- QUANDO O PASSEIO COMEÇA NO VÉRTICE **A** ELE TERMINA NO VÉRTICE C

- QUANDO O PASSEIO COMEÇA NO VÉRTICE **B** ELE TERMINA NO VÉRTICE NÃO DA

- QUANDO O PASSEIO COMEÇA NO VÉRTICE **C** ELE TERMINA NO VÉRTICE A

- QUANDO O PASSEIO COMEÇA NO VÉRTICE **D** ELE TERMINA NO VÉRTICE NÃO DA

Apresentou-se nesta seção, um quadro com todas as respostas observadas nas fichas de trabalho que foram preenchidas pelos estudantes. Estes quadros têm como finalidade apenas apresentar o desempenho dos estudantes, não intenciona-se fazer comparações.

Os estudantes de quarto ano foram os primeiros a realizarem as atividades, uma vez que suas aulas de informática eram às terças-feiras, primeira aula. Os estudantes de quinto ano tinham suas aulas nas quintas-feiras e realizaram as atividades no último horário. São tratados no decorrer da análise como Turma 1 (T1) e Turma 2 (T2), respectivamente.

Pergunta 1: Foi possível fazer um passeio de Euler por este grafo?

Os estudantes foram orientados a responderem a esta pergunta, logo após realizarem todos os passeios sugeridos na pergunta 2. A pesquisadora explicou que, se fosse possível realizar pelo menos um passeio de Euler pelo grafo, a resposta a esta questão deveria ser “sim”, mesmo que o passeio não fosse possível a partir de outros vértices.

Esta pergunta foi colocada estrategicamente como primeira para que fosse de fácil visualização pelos estudantes. Ao observarem o desenho do grafo, na ficha de trabalho, poderiam facilmente ver se era possível ou não o passeio de Euler por ele. Contudo, alguns estudantes se esqueceram de retornar a ela para colocar a resposta.

Quadro 10 – Levantamentos referentes à pergunta 1

	Acertos		Em branco		Erros	
	T1	T2	T1	T2	T1	T2
Atividade 1	14	7	0	4	1	0
Atividade 2	8	8	1	3	3	0
Atividade 3	10	5	0	0	1	0
Atividade 4	7	7	1	2	2	1
Atividade 5	11	8	0	1	0	2
Atividade 6	10	8	0	0	1	1
Atividade 7	12	7	0	1	0	1
Atividade 8	7	6	3	1	2	2

Os estudantes poderiam perceber com esta pergunta que em alguns grafos o passeio é possível e em outros não. Nas quatro primeiras atividades, percebem-se mais erros e respostas em branco em relação às quatro últimas atividades em que os estudantes já encontravam-se mais habituados às atividades.

<u>Pergunta 2-</u>

- Quando o passeio começa no vértice A ele termina no vértice ___
- Quando o passeio começa no vértice B ele termina no vértice ___
- Quando o passeio começa no vértice C ele termina no vértice ___
- Quando o passeio começa no vértice D ele termina no vértice ___

Todas as atividades continham esta questão que deveria conduzir os estudantes a percorrerem os grafos a partir de cada um dos vértices, de forma que não se esquecessem de nenhum. A quantidade de questões nesta pergunta variava de acordo com a quantidade de vértices que o grafo apresentava.

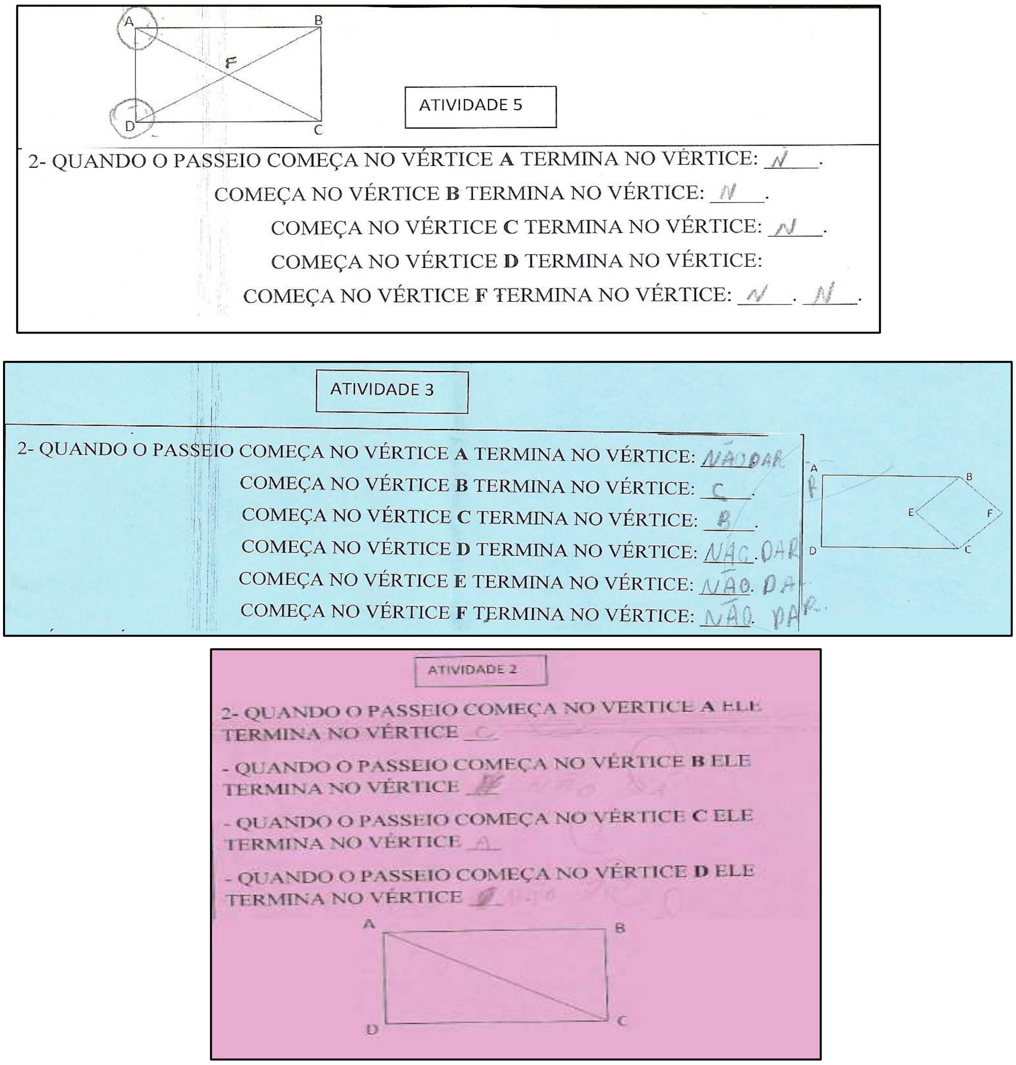
Percebeu-se que durante os primeiros momentos da atividade, alguns estudantes se esqueceram das orientações iniciais e movimentavam o personagem do Scratch duas vezes por um mesmo caminho, foi preciso interromper e explicar novamente a todos como deveriam proceder.

Quadro 11 – Levantamentos referentes à pergunta 2

	Acertos		Em branco		Erros	
	T1	T2	T1	T2	T1	T2
Atividade 1	11	11	0	0	1	0
Atividade 2	8	11	0	0	7	0
Atividade 3	11	5	0	0	0	0
Atividade 4	8	9	0	0	0	1
Atividade 5	11	9	0	0	0	2
Atividade 6	8	8	0	0	3	1
Atividade 7	10	9	0	0	2	0
Atividade 8	8	7	1	0	3	2

Esperava-se com esta pergunta, que os estudantes identificassem a partir de quais vértices de cada um dos grafos analisados o passeio era possível. Pela quantidade de acertos verificados em relação às respostas em branco e erros, percebe-se que a maior parte dos estudantes compreendeu esta questão. A Figura 19 apresenta parte de três fichas de trabalho que foram respondidas corretamente.

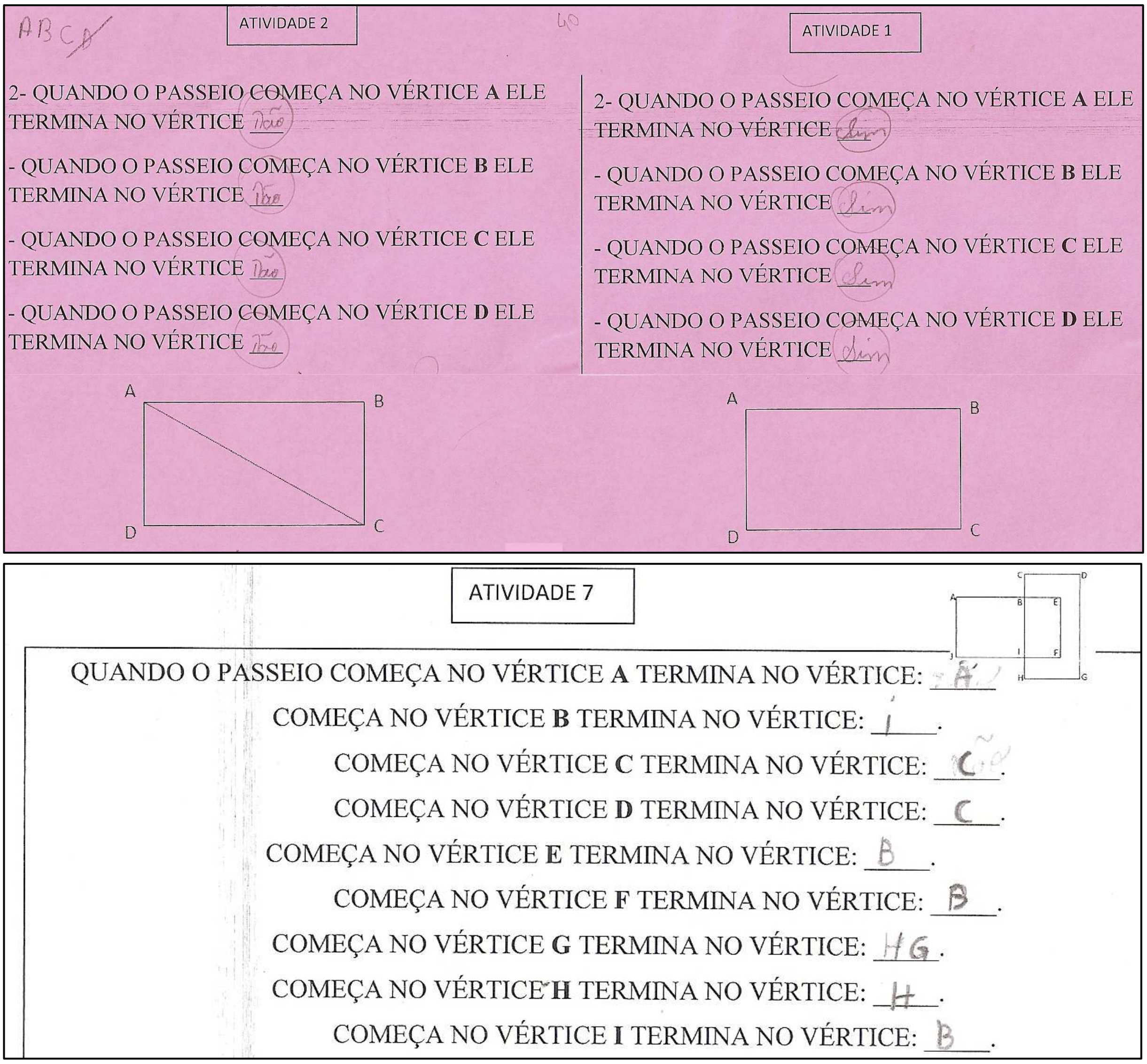
Figura 19 – Respostas corretas da pergunta 2



No grafo da atividade 5, não é possível realizar o passeio pois ele possui quatro vértices ímpares. Nos grafos das atividades 2 e 3, os grafos apresentam dois vértices ímpares, o passeio só é possível quando se parte de um dos vértices ímpares chegando sempre no outro vértice ímpar.

Nas questões elaboradas para as atividades Passeios de Euler, as expressões que poderiam trazer maiores dificuldades, como vértices e arestas, foram vistas no primeiro encontro, revistas no segundo e sempre que algum estudante apresentasse dúvidas, além de compor os conteúdos previstos trabalhados nas séries em questão. A figura 20 apresenta parte das fichas de trabalho das atividades 1, 2 e 7.

Figura 20 – Respostas erradas da pergunta 2



Na Atividade 2, a dupla respondeu “não” para todas as perguntas, o passeio apenas é possível quando parte-se dos vértices A e C, que são ímpares. Nas atividades 1 e 7, o passeio é possível quando parte-se de qualquer um dos vértices, de forma que chega-se sempre no mesmo local da partida, isto ocorre porque todos os vértices destes grafos são de ordem par.

Pergunta 3- Quantos são os vértices pares? ou Quantos vértices possuem números pares de arestas?

O objetivo destas questões, era chamar a atenção para características dos teoremas quanto à possibilidade ou não de se fazer o passeio de Euler a partir da quantidade de vértices pares. Grafos com todos os vértices pares permitem o passeio. Esta pergunta encontrava-se apenas nas atividades 1, 2, 5, 6 e 7.

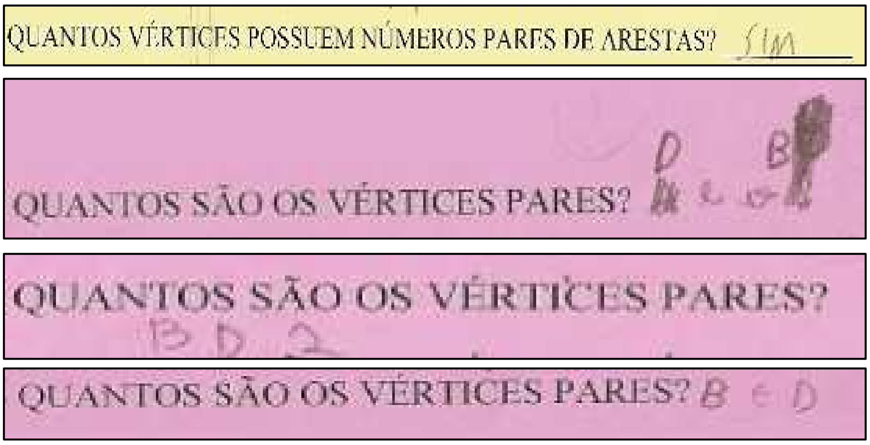
Quadro 12 – Levantamentos referentes à pergunta 3

	Acertos		Em branco		Erros	
	T1	T2	T1	T2	T1	T2
Atividade 1	9	10	1	1	2	0
Atividade 2	10	7	4	0	0	2
Atividade 5	7	9	1	1	3	1
Atividade 6	6	7	0	0	5	2
Atividade 7	8	7	0	1	2	1

Nas atividades 1 e 7, a resposta deveria ser “todos”, pois todos os vértices dos grafos são pares; na atividade 2, o grafo possui dois vértices pares; na atividade 5, o grafo possui 1 e na atividade 6, possui quatro vértices pares. A atividade 6 apresentou maior quantidade de erros nesta questão. Percebeu-se que mais estudantes da Turma 1 confundiram números pares com ímpares. Esta dúvida foi percebida durante várias atividades e sanadas pontualmente, mas percebeu-se que os estudantes pareciam esquecer as explicações.

A resposta para esta questão deveria ser uma quantidade ou a palavra “todos” para as atividades 1 e 7, contudo, algumas duplas responderam utilizando as letras que correspondiam aos vértices de ordem par ou com a palavra “sim” como mostra a Figura 19. Este pode ser um indício de que os estudantes não leram com atenção aos enunciados. A maior parte dos questionamentos foi respondida corretamente.

Figura 19 – Respostas da pergunta 3



As respostas dos estudantes foram consideradas corretas pela pesquisadora porque eles se referiram aos vértices corretos, contudo deveriam responder com uma quantidade, como solicitado.

<u>4- Quantos são os vértices ímpares? ou Quantos vértices possuem números ímpares de arestas?</u>

Estas questões chamavam atenção para características dos teoremas quanto a possibilidade ou não de se fazer o Passeio de Euler a partir da quantidade de vértices ímpares. Esta pergunta encontrava-se apenas nas atividades 1, 2, 5, 6 e 7. Esperava-se que os estudantes respondessem “nenhum” nas atividades 1 e 7, “dois” nas atividades 2 e 6 e “quatro” na atividade 5.

Grafos com mais de dois vértices ímpares não permitem o passeio.

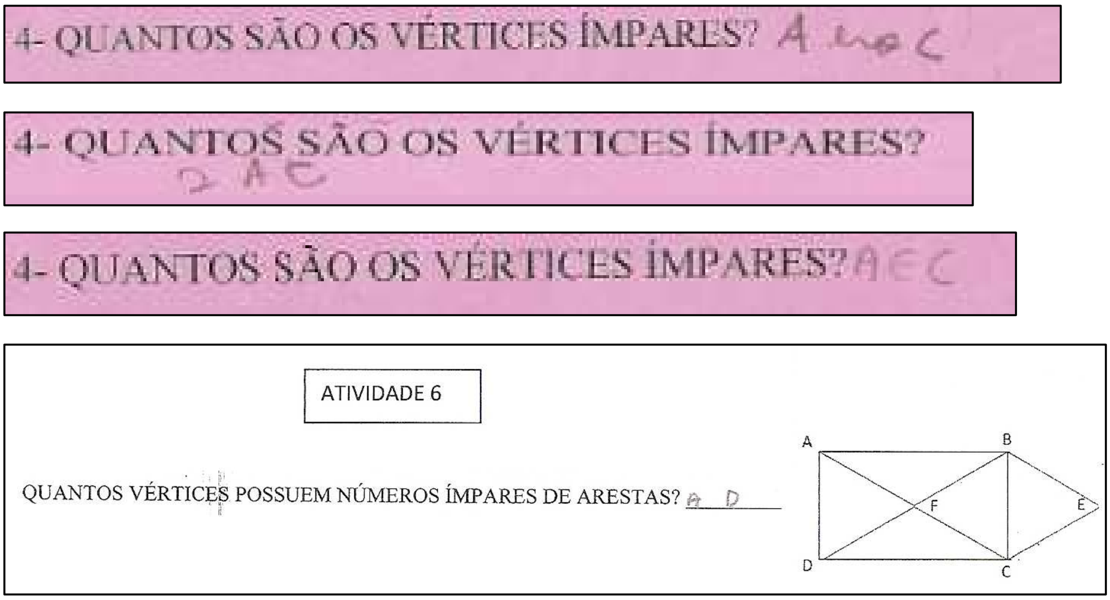
Quadro 13 – Levantamentos referentes à pergunta 4

	Acertos		Em branco		Erros	
	T1	T2	T1	T2	T1	T2
Atividade 1	8	10	2	1	2	0
Atividade 2	9	7	4	0	1	2
Atividade 5	7	9	1	1	3	1
Atividade 6	7	7	0	0	4	2
Atividade 7	8	8	0	1	2	0

O Quadro 13 mostra que somando as respostas em branco e os erros cometidos pela T1 nas atividades 1, 2, 5 e 6, corresponde a quase metade dos acertos, o que demonstra que estes estudantes ainda apresentam dificuldades em identificar números pares e ímpares. Como na pergunta 3, algumas duplas responderam utilizando as letras que encontravam-se nos vértices ímpares e não uma quantidade como foi solicitado, observados na Figura 22.

A maior parte dos questionamentos foi respondida corretamente pelas duas turmas.

Figura 22 – Respostas da pergunta 4



<u>5- O vértice de partida sempre é o mesmo de chegada?</u>

O objetivo desta pergunta era chamar a atenção para os vértices de partida e de chegada. Esta pergunta encontrava-se apenas nas atividades 1 e 2. Na atividade 1, os vértices de partida sempre eram os mesmos de chegada porque todos os vértices são pares, desta forma a resposta correta é “sim”.

Na atividade 2, o passeio é possível apenas a partir dos vértices ímpares, em que o vértice de partida é um e o de chegada o outro ímpar e a resposta correta para esta pergunta na atividade 2 é “não”. Esta pergunta conduzia às características dos Teoremas 1 e 2.

Quadro 14 – Levantamentos referentes à pergunta 5

	Acertos		Em branco		Erros	
	T1	T2	T1	T2	T1	T2
Atividade 1	10	11	2	0	0	0
Atividade 2	9	9	5	0	0	0

A maior parte dos estudantes acertou esta pergunta.

<u>6- Quando o gatinho parte de quais vértices ele consegue completar o passeio?</u>

Esta pergunta foi colocada apenas nas atividades 3, 4, 5 e 6. Por meio dela, deveriam perceber características dos Teoremas 2 e 4 que se referem a grafos com vértices ímpares. Os grafos das atividades 3 e 6 permitem o passeio porque possuem apenas dois vértices ímpares, já os grafos 4 e 5 não permitem, pois possuem quatro vértices ímpares cada.

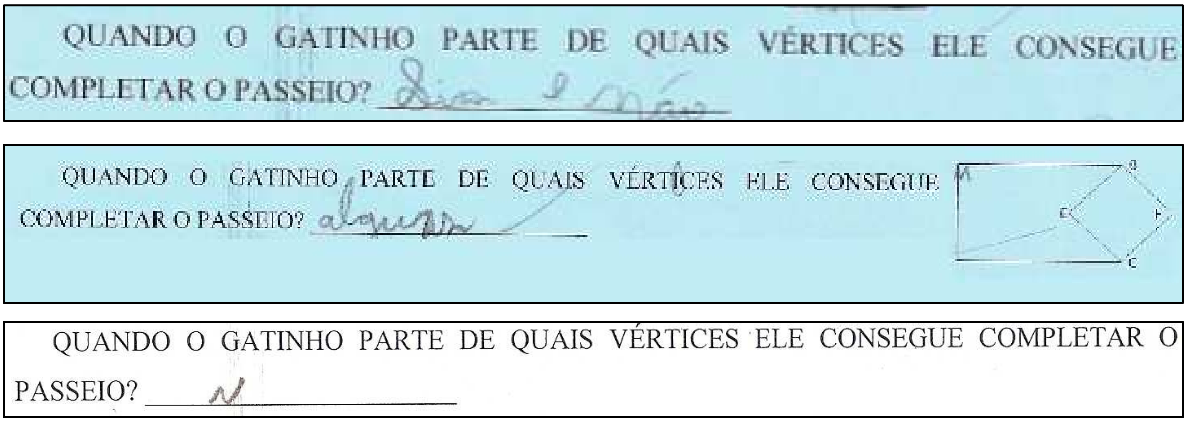
Quadro 15 – Levantamentos referentes à pergunta 6

	Acertos		Em branco		Erros	
	T1	T2	T1	T2	T1	T2
Atividade 3	7	1	0	2	4	2
Atividade 4	9	8	1	0	0	2
Atividade 5	10	9	0	0	1	2
Atividade 6	6	7	0	1	5	1

A resposta correta para as atividades 4 e 5, em que não são possíveis o passeio, é “nenhum” e para as atividades 3 e 6, em que são possíveis, a resposta correta são as letras dos dois vértices ímpares. Desta forma, nestas duas últimas atividades o passeio era possível apenas a partir dos dois vértices ímpares, mas não a partir dos vértices pares.

A Figura 23 apresenta as respostas de duas duplas para o grafo da atividade 3 (em azul) e uma resposta da atividade 5 (em branco). Percebe-se pelas respostas que os estudantes compreenderam que é possível por alguns vértices e não é possível a partir de outros, pois responderam “sim e não”, com a palavra “alguns” ou com a letra “N”. Como esperava-se que eles identificassem esses vértices ímpares, estas respostas não foram consideradas corretas pela pesquisadora.

Figura 23 – Respostas da pergunta 6 referentes à atividade 3


QUANDO O GATINHO PARTE DE QUAIS VÉRTICES ELE CONSEGUE COMPLETAR O PASSEIO? Sim e Não

QUANDO O GATINHO PARTE DE QUAIS VÉRTICES ELE CONSEGUE COMPLETAR O PASSEIO? alguns

QUANDO O GATINHO PARTE DE QUAIS VÉRTICES ELE CONSEGUE COMPLETAR O PASSEIO? N

Apenas 5 duplas da Turma 2 conseguiram responder a ficha de trabalho da atividade 3 do segundo encontro. Isto ocorreu, porque a pesquisadora retomou a atividade 2, realizada no primeiro encontro para sanar algumas dúvidas, desta forma utilizou-se parte do tempo das atividades do segundo encontro. Os estudantes da turma 2 iniciaram pela atividade 4 e apenas 5 duplas conseguiram realizar a atividade 3.

<u>7- Quais vértices possuem números pares de arestas?</u>

Esta pergunta foi colocada apenas nas atividades 3, 4 e 5. O passeio é possível na atividade 3, porque o grafo possui apenas dois vértices ímpares, mas não é nas atividades 4 e 5, que possuem quatro vértices ímpares cada. Esta questão tinha como objetivo chamar a atenção para os vértices pares, que nestas atividades não permitem o passeio quando se parte deles uma vez que possui mais de dois vértices ímpares.

Quadro 16 – Levantamentos referentes à pergunta 7

	Acertos		Em branco		Erros	
	T1	T2	T1	T2	T1	T2
Atividade 3	5	3	1	2	5	0
Atividade 4	4	5	4	1	3	4
Atividade 5	8	10	0	0	2	1

A Turma 1 obteve muitos erros nesta pergunta, observado também no Quadro 12 , cuja pergunta também requeria identificar números pares e ímpares.

8- Quais vértices possuem números ímpares de arestas?

Esta pergunta tinha como objetivo chamar a atenção para os vértices ímpares. Ela foi colocada nas atividades 3, 4, 5 e 6. Os grafos das atividades 4 e 5 não permitem um passeio de Euler. Ao identificá-los, os estudantes poderiam perceber que estes grafos apresentam mais que dois vértices ímpares. Os grafos das atividades 3 e 6, permitem um passeio de Euler, pois possuem apenas dois vértices ímpares e apenas quando se parte destes o passeio é possível.

Quadro 17 – Levantamentos referentes à pergunta 8

	Acertos		Em branco		Erros	
	T1	T2	T1	T2	T1	T2
Atividade 3	4	2	1	3	6	0
Atividade 4	5	5	5	1	1	3
Atividade 5	9	11	0	0	2	0
Atividade 6	7	7	0	0	4	2

A Figura 24 mostra a resposta de uma dupla que deveria responder com as letras “B e C”, mas colocou a palavra “não”.

Figura 24 – Resposta da pergunta 8

<u>9 - É possível fazer um passeio de Euler neste grafo quando o gatinho parte de qualquer um dos vértices?</u>

Esperava-se com esta pergunta que os estudantes observassem que se o grafo apresenta todos os vértices pares o passeio é possível a partir de qualquer vértice, em que o vértice de partida é o mesmo de chegada.

Se o grafo apresenta dois vértices ímpares, o passeio é possível apenas a partir destes dois vértices, de forma que ao se partir de um vértice ímpar deve-se chegar em outro vértice ímpar.

E se o grafo tem mais do que dois vértices ímpares, o passeio não é possível. Esta pergunta foi colocada nas atividades 3, 4, 5, 6, 7 e 8.

Nas atividades 4 e 5, o passeio não é possível, a resposta para esta pergunta deveria ser “não”. Para as atividades 3, 6 e 8, a resposta também deveria ser “não,” pois os grafos possuem dois vértices ímpares e o passeio é possível apenas a partir deles. O grafo da atividade 7 apresenta todos os vértices de ordem par, desta forma a resposta deveria ser “sim”, uma vez que é possível fazer o passeio a partir de qualquer vértice.

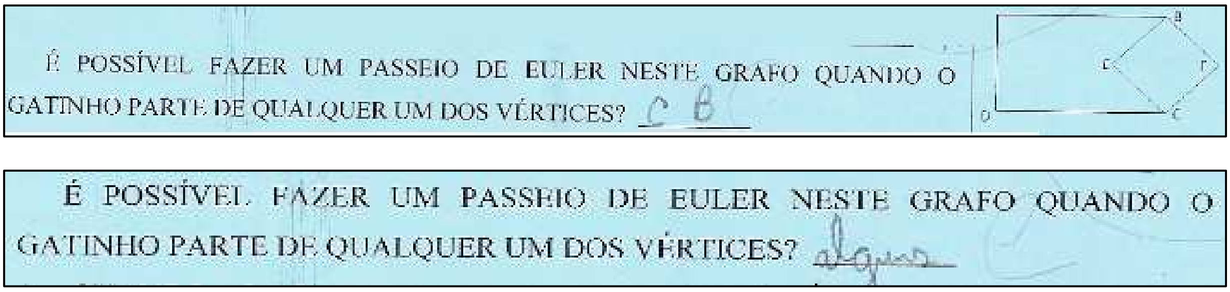
Quadro 18 – Levantamentos referentes à pergunta 9

	Acertos		Em branco		Erros	
	T1	T2	T1	T2	T1	T2
Atividade 3	10	4	0	1	1	0
Atividade 4	9	9	1	0	0	1
Atividade 5	11	10	0	0	0	1
Atividade 6	8	9	0	0	3	0
Atividade 7	11	9	0	0	1	0
Atividade 8	9	7	3	0	0	2

O Quadro 18 mostra que houve poucos erros e respostas em branco em relação aos acertos. Percebe-se que compreenderam a questão, contudo, ao lerem as perguntas de forma autônoma, os estudantes não responderam ao solicitado, quando se perguntava “quais”, eles respondiam com um número ou com a palavra “não”.

Na atividade 3, representada pela Figura 25, o passeio era possível a partir dos vértices B e C, que são ímpares. Esperava-se que respondessem com a palavra “não”. Contudo, algumas duplas responderam com as letras corretas “C e B” ou com a palavra “alguns”, mesmo com esta resposta inesperada, demonstraram que compreenderam a questão.

Figura 25 – Respostas da pergunta 9.


É POSSÍVEL FAZER UM PASSEIO DE EULER NESTE GRAFO QUANDO O GATINHO PARTE DE QUALQUER UM DOS VÉRTICES? C B

É POSSÍVEL FAZER UM PASSEIO DE EULER NESTE GRAFO QUANDO O GATINHO PARTE DE QUALQUER UM DOS VÉRTICES? alguns

Pergunta 10 – Partindo de quais vértices é possível fazer o passeio?

Nesta questão, colocada apenas na atividade 8, os estudantes deveriam identificar a partir de quais vértices o passeio é possível. Poderiam perceber que os únicos vértices em que o passeio é possível são B e J, que são ímpares. O Quadro 19 mostra que a soma das respostas em branco com as erradas superam os acertos na T1. O grafo desta atividade 8 possui dez vértices.

Quadro 19 – Levantamento referente à pergunta 10

	Acertos		Em branco		Erros	
	T1	T2	T1	T2	T1	T2
Atividade 8	5	8	3	0	4	1

Uma dupla identificou apenas um dos vértices ímpares “B”, outra dupla respondeu com a palavra “não” e duas duplas erraram esta questão respondendo exatamente o contrário, marcando os vértices em que não era possível o passeio, como mostra a Figura 26.

Figura 26 – Respostas da pergunta 10.

PARTINDO DE QUAIS VÉRTICES É POSSÍVEL FAZER O PASSEIO? B

PARTINDO DE QUAIS VÉRTICES É POSSÍVEL FAZER O PASSEIO? não

PARTINDO DE QUAIS VÉRTICES É POSSÍVEL FAZER O PASSEIO? B C D F G H I J

PARTINDO DE QUAIS VÉRTICES É POSSÍVEL FAZER O PASSEIO? A, C, D, E, F, G, H e I,

<u>Pergunta 11 – Esses vértices são pares ou ímpares</u>

A pergunta 10 “Partindo de quais vértices é possível fazer o passeio?” tem como resposta os vértices “B e J”. A pergunta 11 complementa aquela, pois os estudantes deveriam classificar estes vértices “B e J” como “ímpares” e perceberem que apenas a partir deles o passeio era possível.

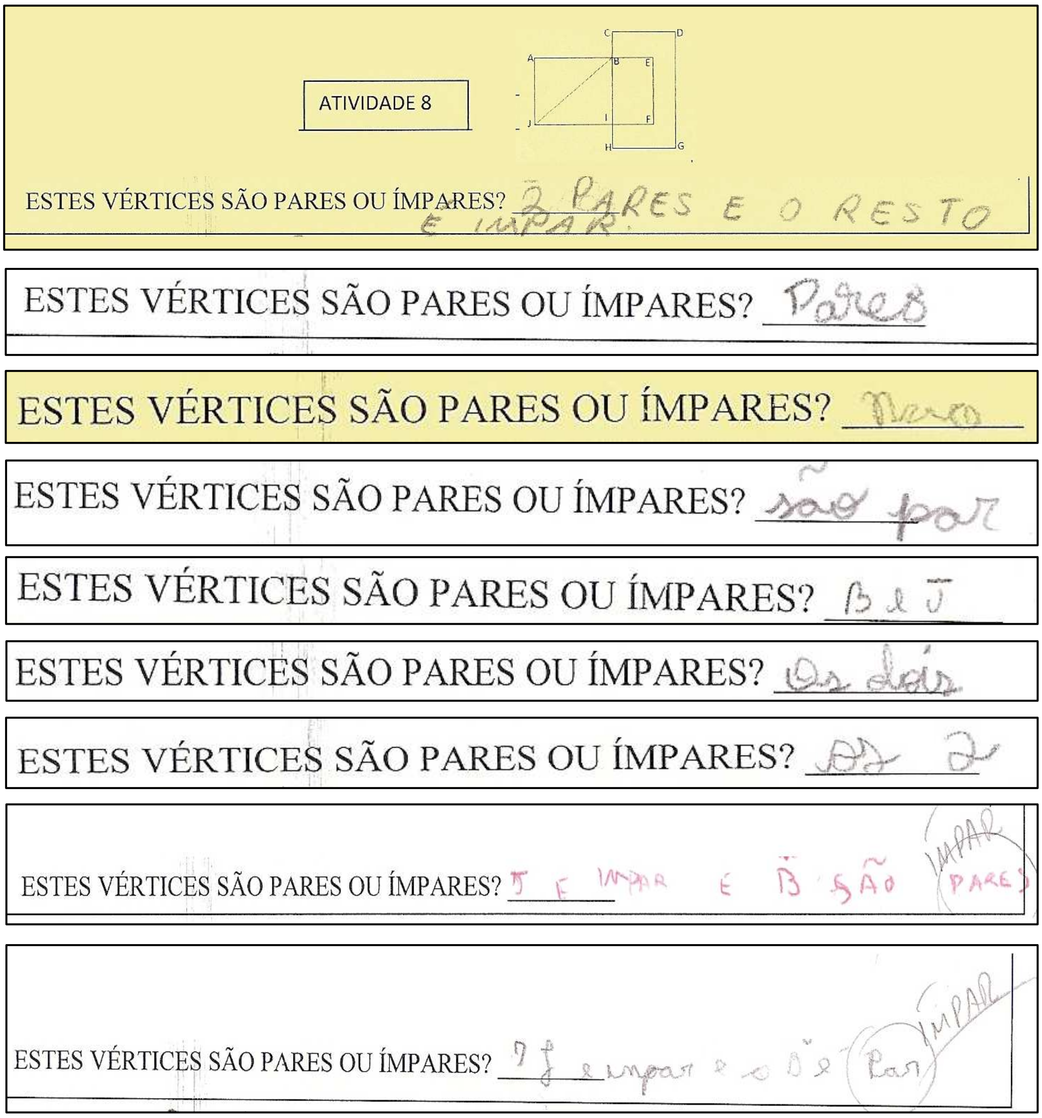
Observa-se no quadro 20, assim como no quadro 19 que a soma dos erros e das respostas em branco superaram os acertos na Turma 1.

Quadro 20 – Levantamento referente à pergunta 11

	Acertos		Em branco		Erros	
	T1	T2	T1	T2	T1	T2
Atividade 8	1	7	4	0	7	2

A Figura 27 apresenta as respostas dos estudantes para a pergunta 11. Percebeu-se pelos erros de cinco duplas que novamente confundiram vértices de ordem par com ímpar. Duas duplas escreveram “os dois”, uma dupla escreveu a palavra “não” e outra dupla escreveu as letra “B e J”.

Figura 27 – Respostas da pergunta 11



Percebeu-se que a turma 1 apresentou maiores dificuldades em diferenciar os vértices pares dos ímpares.

Diferenciar os números pares dos ímpares é conteúdo previsto a partir do segundo ano do Ensino Fundamental. Segundo São Paulo (2014, p.20), em relação ao estudo dos números, o estudante deve:

> Ser capaz de estabelecer relações entre números, com os que lhe estão próximos (por exemplo, relacionar o 5 com o 6, com o 4, ou com o 3) e estabelecer relações entre os números, que são menores ou maiores que 10, os que são pares ou impares, são aspectos essenciais de que a criança tem o sentido de número (SÃO PAULO, 2014, p.20).

Desta forma, ao apresentar as atividades em que os estudantes precisavam diferenciar os vértices pares dos ímpares, esperava-se que não encontrassem tantas dificuldades. As dúvidas pontuais a este respeito foram esclarecidas no decorrer das atividades.

6.3 – Descrição e Análise do quinto encontro.

<u>5º ENCONTRO</u>

Este encontro foi realizado na sala de aula dos estudantes que foram organizados estrategicamente da seguinte forma: formaram-se quatro grupos em cada turma, que foram chamados de grupos: 1, 2, 3 e 4. Cada grupo recebeu um ou dois estudantes que obtiveram quantidade significativa de respostas corretas, observadas nas fichas de trabalho das atividades anteriores. Entendeu-se que estes estudantes compreenderam a proposta e foram colocados estrategicamente nos grupos para que pudessem orientar os outros componentes.

Cada grupo formado recebeu as fichas de trabalho das atividades de 1 a 8 que continham as respostas corretas. Tomou-se o cuidado de entregar para estes grupos as fichas de trabalhos, de forma que todos os participantes tivessem pelo menos uma ficha sua em seu grupo para a realização dos estudos.

Além das oito fichas de trabalho, cada grupo recebeu uma nova ficha, representados nos Quadros 21, 22, 23 e 24, com outros questionamentos e a tarefa de analisar novamente alguns daqueles grafos já estudados, para que se aproximassem de apenas um teorema. Ao final da análise, cada grupo apresentou aos colegas suas descobertas. Segundo Ponte (2017, p.240).

> A apresentação de estratégias é importante para os alunos compreenderem as situações segundo diferentes perspectivas, esclarecerem significados e perceberem a importância do uso de representações eficientes. Esta apresentação cria também condições para que os alunos possam fazer uma posterior generalização (PONTE, 2017, p.240).

Os estudantes foram orientados pela pesquisadora que, ao apresentarem suas descobertas para seus colegas, prestassem atenção à forma de escrever e de falar para que os colegas conseguissem compreendê-los.

Para finalizar, a pesquisadora realizou o fechamento das atividades retomando cada teorema novamente, parabenizou-os e agradeceu a todos.

Seguem-se as apresentações das fichas de trabalho referentes a esta atividade, os teoremas que cada grupo deveria se aproximar bem como a análise das fichas de trabalho que foram respondidas por cada grupo. Os teoremas foram repetidos durante o texto que segue para facilitar o entendimento por parte do leitor.

<u>Atividade 9: Responder as fichas de trabalho, apresentar as descobertas para os grupos e encerramento das atividades</u>

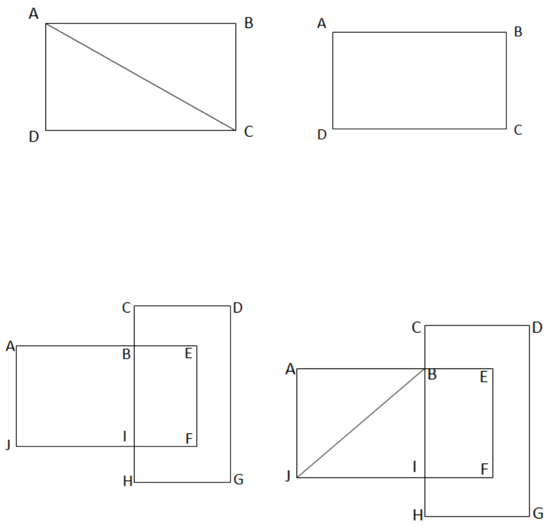
Objetivos:
Retomar as fichas de trabalho das atividades de 1 a 8.
Observar as características dos grafos a serem analisados.
Discutir com o grupo.
Responder aos questionamentos observando características dos teoremas (ver Apêndice 8).
Apresentar para todos os grupos as primeiras percepções.
Atividades/Estratégias:
Orientações sobre como proceder.
Disposição dos alunos em quatro grupos.
Recurso/Materiais:
Fichas de trabalho das atividades anteriores.
Ficha de trabalho com os questionamentos para o fechamento das atividades.
Lousa com os desenhos dos grafos para apresentações.

<u>Grupo 1</u>

A ficha de trabalho do grupo 1 apresentava quatro grafos em que o passeio era possível. Por meio desta ficha, esperava-se que se aproximassem do Teorema 1
Se um grafo planar admite um passeio de Euler, começando e terminando em um mesmo vértice, então todo vértice desse grafo tem ordem par. *(SAMPAIO, 2010, p.12).*

As fichas de trabalho dos encontros anteriores ficaram à disposição deles para consultas.

Quadro 21 –Grafos e questionamentos do Grupo 1.

Grafos	**Questionamentos**
	Foi possível fazer um Passeio de Euler por todos estes grafos. Responda: 1- Em quais destes grafos você começou o passeio e terminou no mesmo vértice? 2- O grafo possui apenas vértices com arestas pares? 3-Em quais destes grafos você começou o passeio em um vértice e terminou em outro? 4- O grafo possui apenas vértices com arestas ímpares? 5- O que podemos perceber?

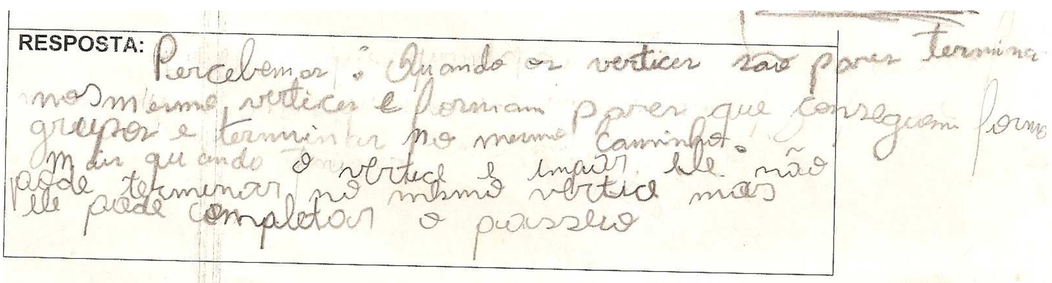
Fonte: Autora

Turma 1

Na Turma 1, o grupo que ficou com esta ficha de trabalho era composta por cinco estudantes e se autointitularam “Os batatinhas”. Neste grupo, encontravam-se o estudante especial e sua professora especialista. A pesquisadora transcreveu a resposta com correções ortográficas. “Percebemos: Quando os vértices são pares, terminam nos mesmos vértices e formam pares que conseguem formar grupos e terminar no mesmo caminho. Mas, quando o vértice é ímpar ele não pode terminar no mesmo vértice, mas ele pode completar o passeio”.

Percebe-se com esta resposta que eles conseguiram se aproximar dos Teoremas 1 e 2, representados no primeiro e segundo grifos respectivamente.

Figura 28 - Resposta do Grupo 1 da Turma 1.


RESPOSTA: Percebemos: Quando os vertices são pares termina nos mesmo vertices e formam pares que conseguem forma grupos e terminar no mesmo caminho. Mas quando o vertice é impar ele não pode terminar no mesmo vertice mas ele pode completar o passeio

Para a apresentação, a pesquisadora desenhou na lousa os grafos analisados por cada grupo, de forma que todos pudessem visualizá-los durante as apresentações. As duplas liam suas folhas de respostas e explicavam, apontando para os grafos e vértices, quando necessário. Os nomes dos estudantes foram substituídos pela palavra “estudante”.

Figura 29 - Apresentação do Grupo 1 da Turma 1

Turma 2

Na turma 2, o grupo era formado por cinco estudantes. Eles também conseguiram se aproximar dos Teoremas 1 e 2.
Na transcrição: “Quando você começa em uma aresta par, você termina em par. Quando começa em ímpar, termina em ímpar”.

Figura 30 - Resposta do Grupo 1 da Turma 2.

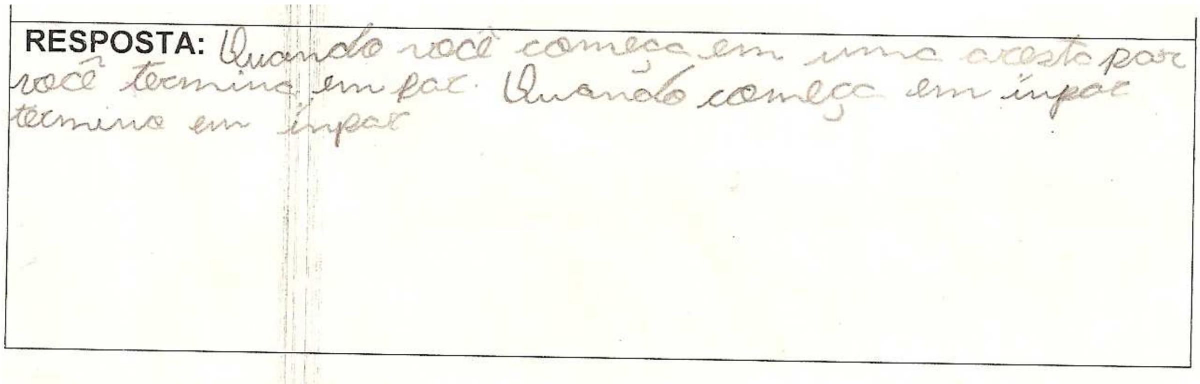

RESPOSTA: Quando você começa em uma aresta par você termina em par. Quando começa em ímpar termina em ímpar

Figura 31 – Apresentação do Grupo 1 da Turma 2

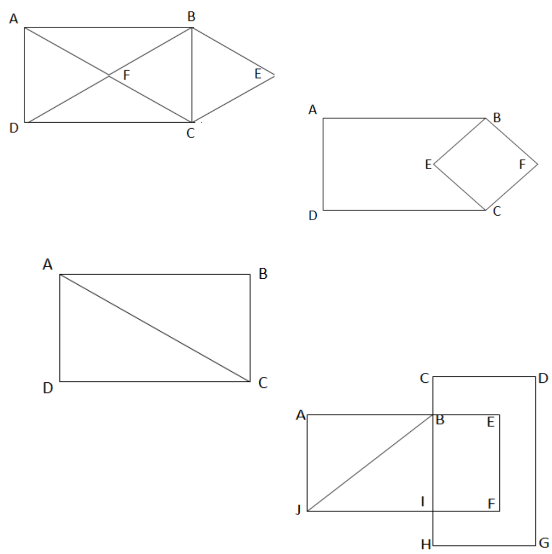
Contudo, percebe-se que a Turma 1 se aproximou melhor quando escreveu que em vértices pares o passeio *termina no mesmo vértice de partida,* e que com vértices ímpares o passeio *não termina no mesmo vértice de partida*.

Grupo 2

A ficha de trabalho do grupo 2 apresentava quatro grafos que possuíam dois vértices ímpares e os demais pares cada um, de forma que o passeio era possível.

Por meio desta ficha esperava-se que se aproximassem do Teorema 2: *Se um grafo planar admite um passeio de Euler, começando num vértice e terminando em outro, então os vértices final e inicial do passeio são ímpares, e todos os demais vértices do grafo tem ordem par. (SAMPAIO, 2010, p.12).* As fichas de trabalho dos encontros anteriores ficaram à disposição deles para consultas.

Quadro 22 –Grafos e questionamentos do Grupo 2.

Grafos	**Questionamentos**
	Por estes grafos foi possível fazer um passeio de Euler. 1- Nestes grafos você começou e terminou o passeio no mesmo vértice? 2- Estes grafos possuem apenas vértices com números pares de arestas? 3- Quantos vértices com arestas ímpares esses grafos possuem? 4- Quais são os vértices com aresta ímpares? 5- O que você percebe aqui?

Fonte: Autora

Turma 1

Na Turma 1, o grupo era composto por cinco estudantes. Este grupo apresentou dificuldades em se aproximar do teorema. Fizeram muitas anotações na ficha de trabalho, que os deixaram confusos com muitas informações, (ver Figura 32). Eles somaram os vértices pares e ímpares de todos os grafos juntos, desta forma não conseguiram se aproximar do teorema. Durante a atividade, a pesquisadora interviu e afirmou que em todos os grafos era possível fazer o passeio, e que eles deveriam perceber o motivo, analisando a quantidade de vértices ímpares nos grafos. Depois desta intervenção, eles conseguiram perceber que o passeio começa em um vértice ímpar e termina no outro.

Após a apresentação, com a intervenção da pesquisadora, percebeu-se que eles haviam compreendido a atividade, pois o estudante que apresentou conseguiu responder a todos os questionamentos. A dificuldade encontrava-se em transcrever a resposta. Este grupo entregou duas respostas escritas, uma antes e outra após a apresentação e intervenções da pesquisadora.

Entendeu-se a necessidade da transcrição do vídeo de apresentação deste grupo para ilustrar os questionamentos da pesquisadora e respostas do estudante, demonstrando que o grupo compreendeu melhor a atividade depois das intervenções. Ainda assim, a segunda resposta escrita não se aproximou adequadamente do teorema. Esta resposta foi entregue no verso da folha de atividade, representado na Figura 33.

Figura 32 – Resposta do Grupo 2 da Turma 1.

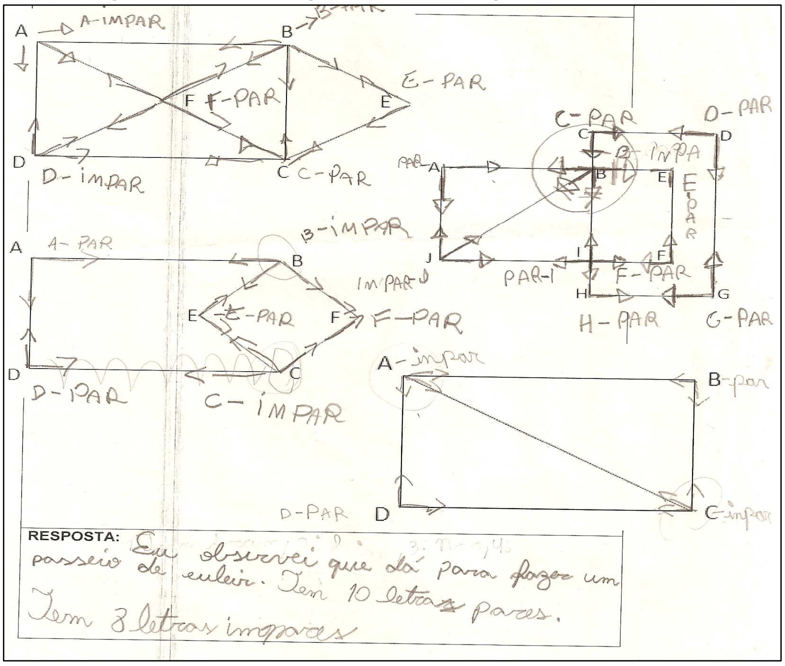


Figura 33 – Resposta do Grupo 2 da Turma 1 – Após intervenção.

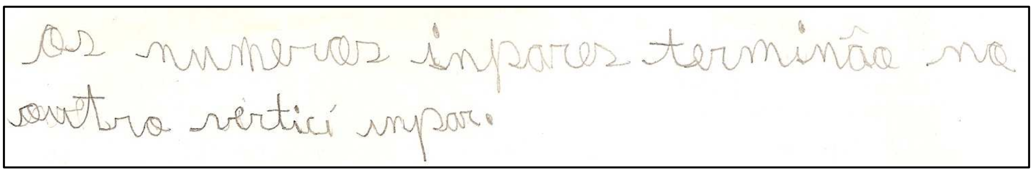
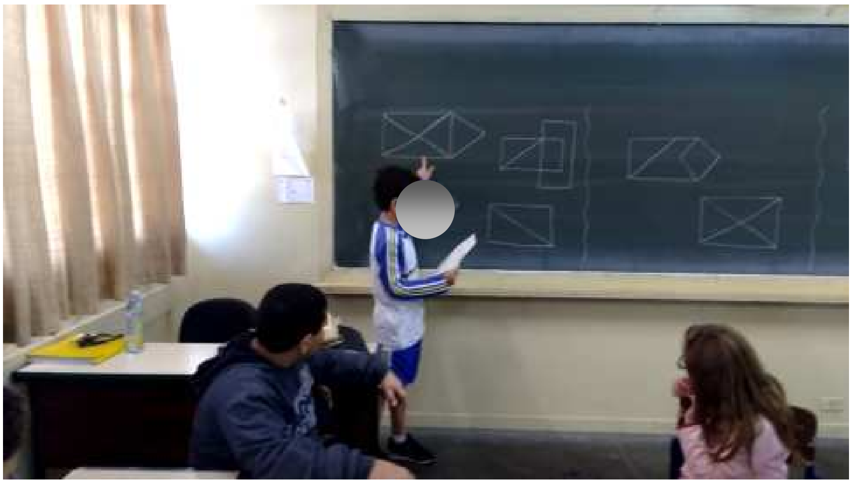

os numeros impares terminão no outro vértici impar.

Figura 34 – Apresentação do Grupo 2 da Turma 1



Estudante: Nós descobrimos que todos com vértices ímpares terminam em vértice ímpar diferente.

Pesquisadora: Então nestes grafos, quantos vértices ímpares tem no primeiro desenho lá em cima?

Estudante: Dois.

Pesquisadora: No debaixo.

Estudante: Dois (sempre olhando sua folha de respostas)

Pesquisadora: E nos outro dois lá, quantos vértices ímpares eles têm?

Estudante: Dois também.

Pesquisadora: Então, em todos aqueles grafos têm dois vértices ímpares, só dois?

Estudante: É.

Pesquisadora: E o passeio começa onde, para dar certo?

Estudante: Em um vértice ímpar.

Pesquisadora: E termina onde?

Estudante: Em outro vértice ímpar.

Pesquisadora: Isso.

Turma 2

Na Turma 2, o grupo era composto por quatro estudantes. Este grupo conseguiu perceber características do teorema e foram além. Ao manusearem as fichas de trabalho das atividades anteriores, perceberam que, se o grafo apresenta mais do que dois vértices ímpares o passeio não é possível. Na transcrição da resposta: “Se tem dois ímpares no grafo você vai começar no vértice ímpar e vai terminar no vértice ímpar e se tiver três vértices ímpares você não vai conseguir fazer o Passeio de Euler”.

Figura 35 - Resposta do Grupo 2 da Turma 2

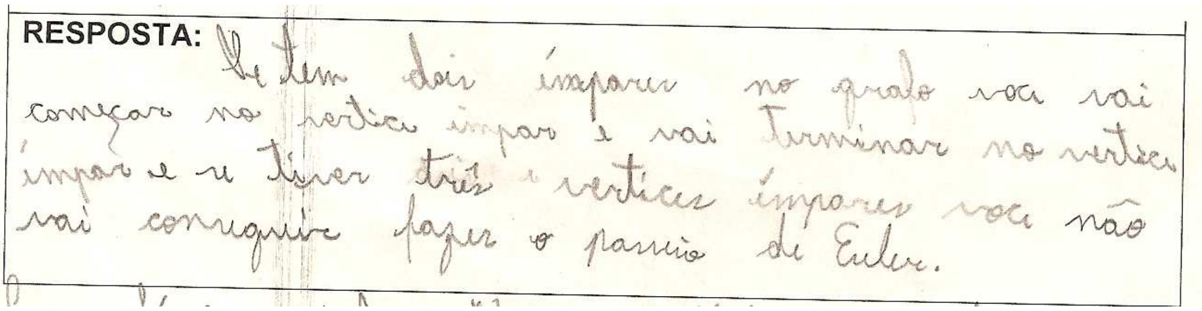

RESPOSTA: Se tem dois impares no grafo voce vai começar no vertice impar e vai Terminar no vertice impar e se tiver três vertices impares voce não vai conseguir fazer o passeio de Euler.

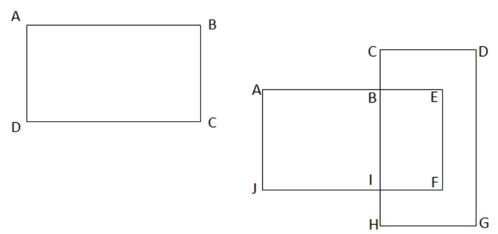
Figura 36 – Apresentação do Grupo 2 da Turma 2.

Grupo 3

A ficha de trabalho do grupo 3 apresentava dois grafos que possuíam apenas vértices pares, neles o passeio era possível. Por meio desta ficha, esperava-se que se aproximassem do Teorema 3: *Se um grafo tem seus vértices todos pares, então* *ele admite um passeio de Euler. Além disso, esse passeio pode começar (e terminar) em qualquer vértice previamente escolhido. O primeiro arco do caminho pode ser qualquer arco partindo desse vértice. (SAMPAIO, 2010, p.12).*

As fichas de trabalho dos encontros anteriores ficaram à disposição deles para consultas.

Quadro 23 – Grafos e questionamentos do Grupo 3.

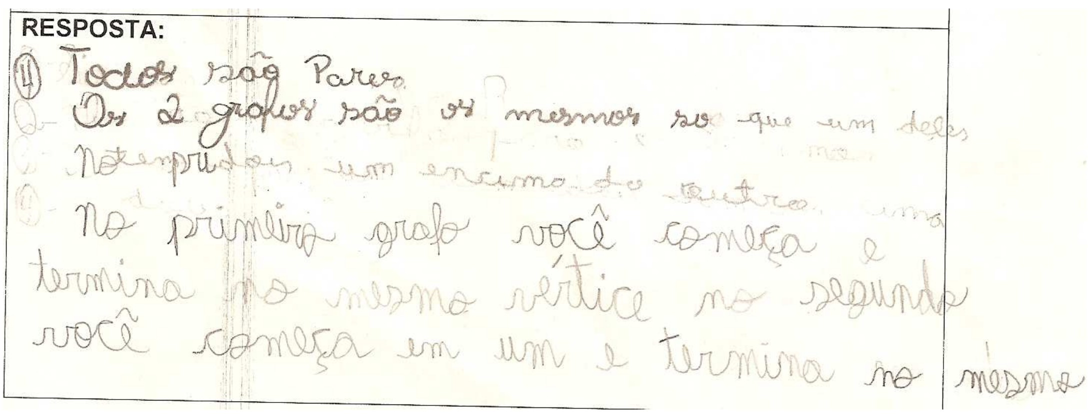
Grafos	**Questionamentos**
	1- Você pode fazer um passeio de Euler por estes grafos? 2- Se você começar o passeio no vértice B, onde você vai terminar? 3- Se você começar o passeio no vértice C, ou em qualquer outro vértice, onde vai terminar? 4- O que você percebe aqui?

Fonte: Autora

Turma 1

Na Turma 1, o grupo era composto por quatro estudantes. Este grupo conseguiu se aproximar do teorema. Na transcrição da ficha perceberam: “Todos são pares. Os dois grafos são os mesmos, só que um deles tem um em cima do outro. No primeiro você começa e termina no mesmo vértice, no segundo você começa em um e termina no mesmo”.

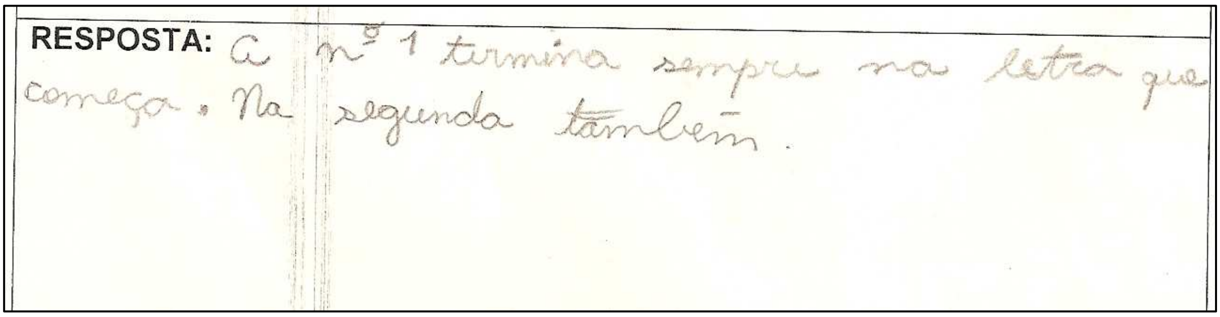
Figura 37 – Resposta do Grupo 3 da Turma 1.


RESPOSTA:
1) Todos são Pares
Os 2 grafos são os mesmos so que um deles
[illegible] um encima do outro.
No primeiro grafo você começa e
termina no mesmo vértice no segundo
você começa em um e termina no mesmo

Turma 2

O grupo 3 da Turma 2 também conseguiu se aproximar do teorema. A transcrição: “A nº 1 termina sempre na letra que começa. Na segunda também”.

Figura 38 - Resposta do Grupo 3 da Turma 2.



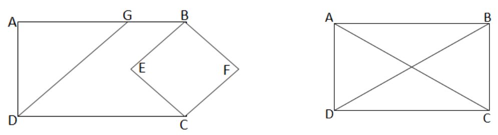
RESPOSTA: a nº 1 termina sempre na letra que começa. Na segunda também.

<u>Grupo 4</u>

A ficha de trabalho do grupo 4 apresentava dois grafos que possuíam quatro vértices ímpares, neles o passeio não era possível. Por meio desta ficha, esperava-se que se aproximassem do Teorema 4: *Se um grafo tem dois vértices ímpares e os demais todos pares, então ele admite um passeio de Euler. Esse passeio deve começar em um dos vértices ímpares e terminar no outro.*

As fichas de trabalho dos encontros anteriores ficaram à disposição deles para consultas.

Quadro 24 –Grafos e questionamentos do Grupo 4.

<table>
<tr><th>Grafos</th><th>Questionamentos</th></tr>
<tr><td>


</td><td>1- Você pode fazer um passeio de Euler por estes grafos?
2- Quantos vértices com número ímpar de arestas têm estes grafos?
3- O que você percebe aqui?</td></tr>
</table>

Fonte: Autora

Turma 1

O grupo 4 da Turma 1 conseguiu perceber que não era possível o passeio pelos grafos, mas apresentaram dificuldades para transcreverem na ficha de trabalho o que concluíram. Mediante intervenções da pesquisadora, transcreveram apresentando com alguns erros, como pode ser observado na transcrição do vídeo da discussão realizada na mesa.

Pesquisadora: Por que não dá para fazer? Fala pra mim.
Estudante 1: Porque este daqui são todos ímpares (apontando para o grafo retângulo com X), e esses aqui são pares (apontando para parte do grafo retângulo com losango e diagonal) e esses são ímpares (apontando para outra parte do mesmo grafo).
Pesquisadora: Quantos vértices ímpares têm esses grafos aí? Estes dois grafos?
Estudante 1: Quatro (apontando para o retângulo com X).
Pesquisadora: E no de cima?
Estudante 1: (Começa contando e apontando para um vértice par) Um ...
Pesquisadora: Não...
Estudante 2: Um, dois, três, quatro, cinco.
Pesquisadora: Não, são apenas quatro, mostre para ela Estudante 1.
Estudante 1: Um, dois, três, quatro (apontando corretamente).
Pesquisadora: Nos dois, cada um tem quatro, quatro vértices ímpares. Tá, vocês não conseguem completar o passeio por eles?
Estudante 1: Não.
Pesquisadora: Lembram que tinham alguns grafos que tinham vértices ímpares e vocês conseguiam fazer o passeio? Vocês lembram?
Grupo: balançam a cabeça afirmativamente.
Pesquisadora: Quantos vértices ímpares eles tinham?
Estudante 3: Um?
Pesquisadora: Não sei, você lembra o que acontecia quando o vértice era ímpar?
Estudante 3: (Com a ficha de trabalho da atividade 2 nas mãos para consulta).

Pesquisadora: Por que neste (apontando para o grafo da ficha da atividade 2) vocês conseguiram fazer o passeio e nestes (apontando para a ficha da atividade atual em que não é possível o passeio) vocês não conseguem?

Estudante 3: Porque aqui (sorri, apontando para a ficha da atividade 2) só tem dois.

Pesquisadora: Aqui só tem dois o que?

Estudante 3: Dois vértices ímpares.

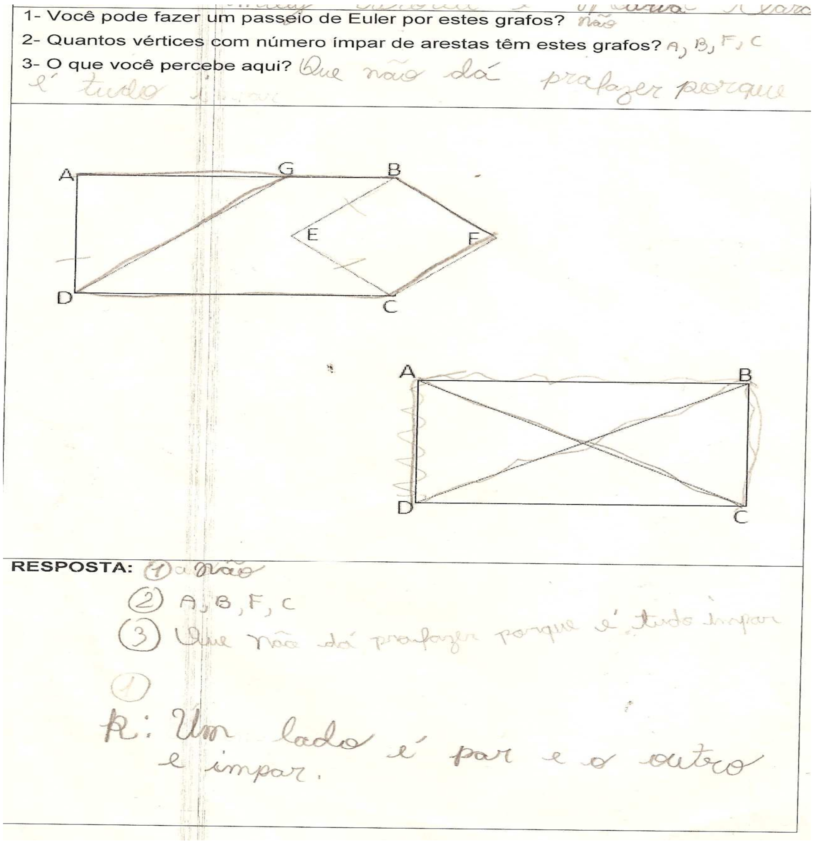
Pesquisadora: E no outro lá? (apontando para a ficha da atividade atual).

Estudante 3: Quatro.

Pesquisadora: Então o que vocês estão observando aí? Quando tem vértices ímpares, a gente consegue fazer, mas tem que ter quantos?

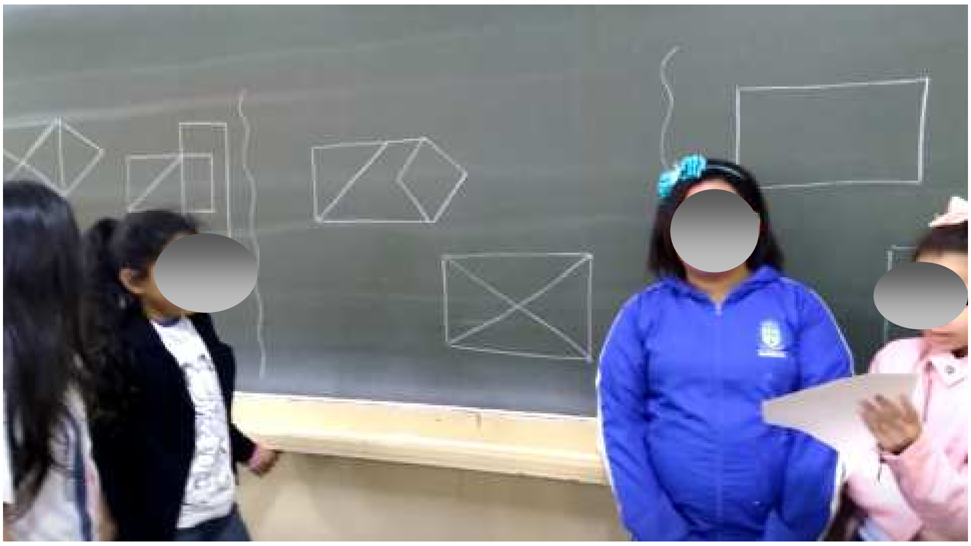
Neste momento a pesquisadora deixa o grupo, para que discutam e tentem responder.

Figura 37 – Resposta do Grupo 4 da Turma 1



Analisando a ficha de respostas deste grupo (ver Figura 39), percebe-se que elas conseguiram entender que não era possível fazer o passeio pelos grafos, como mostra a resposta escrita referente à pergunta 1. Quando se questionou quantos vértices ímpares os grafos apresentavam, elas responderam com as letras dos vértices e não com uma quantidade, como se esperava. E ainda assim, não responderam corretamente, pois os vértices B e C são ímpares e não pares como elas colocaram na questão 2. Na questão 3, percebe-se que conseguiram se aproximar do teorema, mas afirmaram que os vértices são todos ímpares.

Figura 40 – Apresentação do Grupo 4 da Turma 1



Percebeu-se que estas estudantes conseguiram compreender algumas características que conduziam ao Teorema 4, demonstrado a seguir na transcrição do vídeo em que elas apresentam suas descobertas aos colegas dos outros grupos.

Transcrição do vídeo de apresentação do Grupo 4 da Turma 1.

Pesquisadora: Os grafos de vocês, que vocês analisaram, quantos vértices ímpares tem o primeiro?

Estudante 1: Quatro.

Pesquisadora: E no debaixo?

Estudante 1: Quatro.

Pesquisadora: (Se dirigindo para a turma toda) Estes grafos delas, têm quatro no de cima e quatro no debaixo. Então, deu para fazer o passeio? (Se dirigindo para o grupo) Contem para eles.

Estudante 1: (balançando a cabeça negativamente) Não.

Pesquisadora: Por que? O que vocês observaram então?

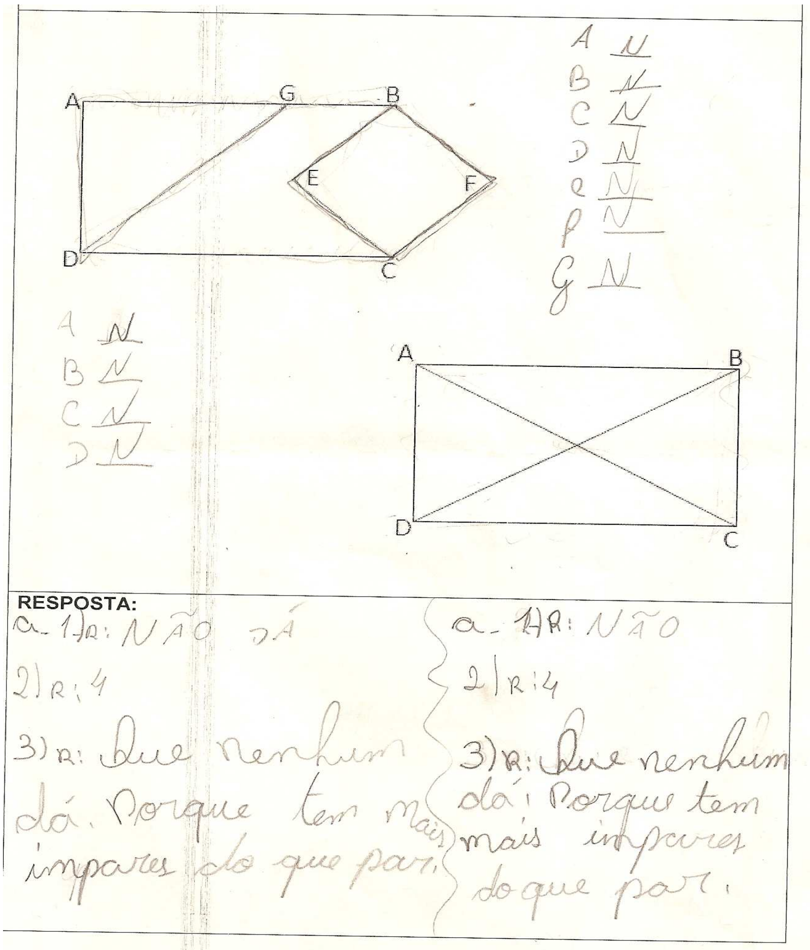
Estudante 4: Não dá porque tem quatro vértices ímpares.

Ao apresentarem oralmente, responderam aos questionamentos corretamente, mas não conseguiram transcrever para a folha de respostas, demonstrando muita timidez durante a apresentação.

Turma 2

O grupo 4 da Turma 2 também conseguiu se aproximar do teorema como pode ser observado na resposta da ficha de trabalho, Figura 41.

Figura 41 - Respostas do Grupo 4 da Turma 2



Responderam “Que nenhum dá porque tem mais ímpares do que pares.” O passeio não foi possível nestes grafos porque eles possuem mais do que dois vértices ímpares, a quantidade de vértices pares em grafos que apresentam dois vértices ímpares não é relevante.

Todas as atividades realizadas pelos estudantes nos quatro encontros com o uso do Scratch e nesta etapa do quinto encontro, em que participaram de discussões com seus colegas e realizaram análises nas fichas de trabalho permitiram que os estudantes explorassem os grafos, respondessem aos questionamentos que chamavam a atenção para algumas características dos teoremas, elaborassem suas apresentações com suas descobertas, discutissem com seus colegas e com a pesquisadora.

Estas atividades propostas caracterizam-se na segunda e terceira etapas de uma Investigação Matemática na concepção dos autores estudados, Ponte, Brocardo e Oliveira (2013, p. 25) *"(ii) realização da investigação, individualmente, aos pares, em pequenos grupos ou com toda a turma e (iii) discussão dos resultados, em que os alunos relatam aos colegas o trabalho realizado".*

Para cada grupo foi solicitado que percebessem características de um dos teoremas. Ao final da sequência, a pesquisadora retomou cada um dos teoremas estudados. Utilizando os desenhos feitos na lousa, explicou todas as quatro atividades propostas aos grupos quanto a possibilidade de se fazer um passeio de Euler por alguns grafos e não por outros.

Explicou que estes Teoremas estudados deram origem à Teoria dos Grafos, muito utilizado em diversas áreas como Matemática, Tecnologia, Logística, Inteligência Artificial, entre outros. E que poderia, inclusive ajudá-los a elaborarem um trajeto considerando o melhor percurso, se acaso precisassem passar por vários locais antes de se chegar ao destino, para que percebessem uma aplicação prática do conhecimento aprendido em sala de aula.

CAPÍTULO 7

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente pesquisa buscou compreender e analisar como estudantes dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental se aproximam das noções topológicas, em específico dos teoremas desenvolvidos por Leonhard Euler, por meio de tarefas investigativas utilizando o *software* Scratch.

Desta forma, por meio de uma sequência de atividades, os estudantes puderam vivenciar a matemática de uma maneira diferente da qual estão acostumados, por meio da Investigação Matemática e das TDCI.

Na revisão da literatura, foram analisadas algumas perspectivas de autores quanto ao ensino e desenvolvimento espacial de crianças que frequentam os Anos Iniciais do Ensino Fundamental ao que tange ao uso de tecnologias no ensino de Matemática e Geometria, ao ensino de noções introdutórias de Topologia e Investigação Matemática. Realizou-se análise em alguns currículos que subsidiam a elaboração de materiais didáticos e conteúdos a serem ensinados.

Na realização deste estudo, optou-se por uma metodologia qualitativa, e para a recolha de dados utilizaram-se os seguintes instrumentos: observações dos estudantes, fichas de trabalho produzidas por eles, registros escritos em diários de bordo, áudios e filmagens do desenvolvimento das atividades. Na análise dos dados, procurou-se descrever e interpretar os dados recolhidos, compreender o significado das respostas dos estudantes, no âmbito do objeto do estudo.

Desta forma, os estudantes estiveram empenhados e colaboraram com a pesquisadora. Demonstraram interesse na realização das tarefas e com o uso do Scratch. As tarefas investigativas propostas neste estudo requeriam que os estudantes repetissem alguns trajetos de maneiras diferentes e que percebessem algumas regularidades.

As atividades desenvolvidas para este estudo corroboram com algumas das propostas que os documentos trazem quanto ao estudo espacial. Composta por nove tarefas, a sequência de atividades apresentou oito grafos por onde os estudantes deveriam traçar percursos em busca do melhor trajeto possível. Segundo Sampaio (2010, p.10).

> Um grafo é uma figura constituída de um número finito de arcos (ou curvas), chamadas "arcos" ou "arestas" do grafo, cujas extremidades são chamadas de vértices do grafo. [...] Um caminho, num grafo, consiste numa sequência de arcos do grafo, construída de tal modo que, dois arcos consecutivos da sequência tem ao menos um vértice em comum e, nessa sequência, não aparecem arcos repetidos. Tendo-se um caminho em um grafo, cada arco desse caminho fica "orientado", passando a ter um vértice inicial e um vértice final, de modo que, se a e b são dois arcos consecutivos do caminho, o vértice final de a é o vértice inicial de b. Além disso o caminho terá um vértice inicial - o seu ponto de partida, e um vértice final - o seu ponto de chegada (SAMPAIO, 2010, p. 10).

O documento Parâmetros Curriculares Nacionais orientam que sejam trabalhados a "Interpretação e representação de posição e de movimentação no espaço a partir da análise de maquetes, esboços, croquis e itinerários". A proposta apresentada nas tarefas desta pesquisa, é que o estudante movimente o personagem do *software* pelos caminhos (ou arcos) do grafo e investigue a possibilidade ou não de se fazer um passeio de Euler, ou seja, passar por todos os arcos apenas uma vez. Durante as tarefas, observaram certas características e buscaram regularidades por meio de comparações entre atividades. Ao generalizarem, conseguiram se aproximar de características que descrevem os Teoremas elaborados por Euler.

Contempla as orientações propostas no documento Orientações Curriculares do Estado de São Paulo: Língua Portuguesa e Matemática – Ciclo I, quando contextualiza e descontextualiza o conhecimento estudado na escola, no caso as formas geométricas, conceito de vértices, arestas ou arcos, trajetos e percursos. Os estudantes têm a possibilidade de conhecer uma aplicação prática dos conhecimentos mencionados, utilizados na Teoria dos Grafos ao realizarem as tarefas. Conhecimento este aplicado em larga escala como, em logística, cabeamento elétrico ou de água, redes de Internet, Inteligência Artificial, entre outros, de forma que possam transferir tais conceitos a outros contextos quando permite observar, buscar e generalizar.

O documento Ensino Fundamental de Nove Anos – Orientações Pedagógicas para os Anos Iniciais - Estado do Paraná, orienta abordagens como Investigação Matemática, noções de Topologia e uso de recursos tecnológicos como auxiliares no ensino de Matemática. Desta forma, as atividades propostas neste estudo, “Passeios de Euler”, desenvolvidas com o uso de um recurso tecnológico, o *software* Scratch, corroboram com este documento, uma vez que utilizou-se da Topologia, que trata das noções espaciais elementares, bem como da Investigação Matemática, que permite a exploração e percepção de regularidades.

Os documentos BNCC e Referencial Curricular do Paraná: Princípios, Direitos e Orientações orientam que sejam utilizados recursos tecnológicos para o ensino de Matemática. Neste sentido, as tarefas propostas neste estudo corroboram com algumas orientações para o ensino de Matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental encontradas nos documentos oficiais supracitados

Em atividades cotidianas, é possível se deparar com uma situação em que seja necessário visitar diversas localidades e percorrer um trajeto. Em situação como esta, é possível traçar um trajeto, selecionando uma ordem de percurso em busca do caminho mais eficiente, evitando perda de tempo e dinheiro. Inúmeros problemas matemáticos podem ser solucionados quando se conhece a teoria dos grafos.
As atividades “Passeios de Euler” permitem outras abordagens topológicas, como a exploração de conceitos, como fronteira/vizinhança e interior/exterior.

As atividades “Passeios de Euler” podem contribuir no sentido de que os estudantes tracem itinerários, movimentem o personagem para a direita/esquerda, para frente/para trás. Permite ainda que façam relações com a Geometria Euclidiana quanto ao estudo das formas, vértices, arestas e faces e ainda conceitos numéricos como números pares/ímpares. Conhecimentos matemáticos previstos como conteúdos a serem ensinados para os Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

Para responder à questão proposta neste estudo, analisaram-se as respostas dos estudantes baseados na literatura utilizada.

Como os estudantes se aproximaram de características descritas pelos teoremas desenvolvidos por Leonhard Euler que deram origem à Teoria dos Grafos por meio de tarefas investigativas utilizando o *software* Scratch?

As atividades foram inspiradas no problema clássico “As sete pontes de Königsberg”, elucidado pelo matemático Leonhard Euler. Trata-se de uma Geometria que desconsidera as distâncias, as medidas e os pontos de vista. Ao realizarem as atividades, os estudantes deveriam percorrer as arestas dos grafos e observar por quais deles o passeio é possível. Como em um quebra-cabeça, deveriam perceber que partindo de determinados pontos, o passeio é possível, em outros casos o passeio não é possível.

Tomando por pressuposto estudos desenvolvidos por Piaget e Inhelder (1993), Lorenzato (2008), Smole (2014), entre outros, de que os primeiros conhecimentos espaciais das crianças envolvem as noções topológicas, e que estes, se dão por meio de experiências manipulativas no objeto do conhecimento, associadas ao seu desenvolvimento cognitivo, as atividades propostas tiveram a pretensão de contribuir com esta formação, quando propuseram um ensino em Geometria não-euclidiana, pouco explorado nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

Percebeu-se que os estudantes conseguiram se aproximar dos teoremas após a realização das atividades e depois por meio das análises das fichas de trabalho. Algumas duplas apresentaram um desempenho melhor que outras, verificado na transcrição das respostas para as fichas de trabalho e durante as intervenções da pesquisadora.

Percebeu-se que alguns grupos compreenderam as atividades e foram capazes de expressarem-se oralmente, contudo ao transcreverem suas percepções para as fichas de trabalho demonstraram dificuldades. Este momento apresenta um caráter formal, pois é preciso pensar com cuidado a forma de registro para que todos possam compreender.

Os dados indicam que alguns estudantes apresentaram dúvidas quanto ao conceito de números pares e ímpares, fato que dificultou o entendimento de algumas atividades. A pesquisadora realizou explicações pontuais sempre que esta dificuldade se verificava, orientando que refizessem as questões.

Outra questão em destaque foi a dificuldade que os estudantes apresentaram para responderem ao que se pedia nas perguntas. Quando se perguntava uma quantidade, alguns estudantes respondiam com o nome do vértice, o oposto também se verificou. Percebeu-se com este estudo que os estudantes apresentaram dificuldades em compreender alguns enunciados de questões propostas. Ler e interpretar um enunciado é algo que o professor deve ensinar, deve, neste sentido, explicitar os procedimentos ao ler, retornar várias vezes ao enunciado, anotar as respostas e verificar se atendem ao enunciado são ações que devem ser ensinadas.

A investigação Matemática mostrou-se uma metodologia de ensino muito poderosa porque retira o professor e os estudantes de uma zona de conforto. O professor precisa motivar os estudantes para a investigação, elaborar boas questões conduzindo-os a um caminho produtivo, em que errar e acertar se tornam partes da aprendizagem. Precisa ainda, se conter para não revelar as respostas antecipadamente, cedendo o tempo necessário para que os estudantes construam suas perguntas e façam testes.

Quanto aos estudantes, estes podem tomar consciência de que parte da responsabilidade do aprender é sua, em que precisam mobilizar outros conhecimentos para resolverem as questões propostas, trabalharem em equipe e persistirem na busca. Desempenham um papel mais ativo na aprendizagem.

Estas são atitudes observadas em alguns momentos durante outras atividades escolares, mas em poucas ocasiões, os estudantes têm a oportunidade de tomar consciência delas.

O uso de recursos tecnológicos no ensino de Matemática tem se mostrado uma tendência, descritas nas pesquisas desenvolvidas por Kalinke (2013). Estes recursos permitem de forma rápida e precisa que se realizem testes de conjecturas, se façam simulações e permitem que eventos sejam repetidos inúmeras vezes a partir de modificações em alguns parâmetros, muitas vezes de difícil execução quando realizados manualmente. Segundo Ponte (2017, p. 215).

> O uso crescente de instrumentos tecnológicos na sala de aula, em especial o computador, é, provavelmente o principal fator responsável pela divulgação e crescente aceitação das tarefas de exploração e investigação. Na verdade, as tecnologias permitem simular com facilidade situações complexas que, de outro modo, teríamos dificuldade de estudar. Permitem verificar o que acontece num grande número de casos, favorecendo a formulação de testes de conjecturas (PONTE, 2017, p. 215).

A aplicação das atividades utilizando o Scratch permitiu que os estudantes testassem suas hipóteses diversas vezes na busca de regularidades, apagando-as e refazendo-as, não demonstrando dificuldades quanto ao uso destes, uma vez que, estudos como os já citados apontam que desde pequenos já estão habituados a manusear estes recursos. Com o uso do Scratch, as atividades se realizaram mais rápido, de forma eficaz e ainda com certa ludicidade, quantas vezes se fizessem necessárias. Se precisassem realizar manualmente, precisariam dispor de maior tempo e material.

Por meio das atividades, tiveram a oportunidade de experimentarem e conhecerem o objeto do estudo de forma manipulativa no *software* Scratch e se aproximarem de características dos teoremas, observados em registros dos estudantes. A formalização realizada pela pesquisadora e as discussões finais, tinham como objetivo possibilitar aos estudantes a percepção de que a Matemática é necessária para resolver problemas, dos mais simples aos mais complexos e que ela se constitui a partir de uma necessidade real e por meio do esforço de muitos.

Os estudantes ainda tiveram a oportunidade de perceber uma aplicação dos conhecimentos estudados por eles em sala de aula, no caso o uso de vértices e arestas, números pares e ímpares e analisar o melhor trajeto sobre as arestas.

Este estudo permitiu a reflexão sobre o ensino de noções topológicas por meio da Investigação Matemática, utilizando um recurso tecnológico para estudantes dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Não se pretende a generalização dos resultados obtidos, uma vez que o presente estudo foi realizado apenas com duas turmas de estudantes, dentro de um contexto específico. Entretanto, os resultados aqui obtidos podem contribuir com outras pesquisas que versam sobre o ensino de Matemática nos Anos Iniciais por trazer alguns elementos novos, como o conteúdo matemático (noções de Topologia) abordado por meio da Investigação Matemática, mediado pelo uso de tecnologia (no caso, o *software* Scratch). Pode ainda, contribuir para outros estudos em outros contextos e em outros níveis de ensino, uma vez que as atividades programadas no Scratch podem ser aproveitadas por professores em níveis mais adiantados de escolarização, requerendo algumas adequações.

A maior dificuldade encontrada na realização deste estudo foi a limitação do tempo utilizado na aplicação das atividades. Entende-se que se as atividades fossem aplicadas, uma a cada encontro, os estudantes teriam um tempo maior para trabalharem e discutirem com seus pares sobre as questões propostas.

No que diz respeito à formação da pesquisadora, este estudo auxiliou na compreensão dos conceitos relacionados à Topologia e Teoria dos Grafos, bem como permitiu analisar em profundidade como tais conhecimentos matemáticos estão dispostos nos currículos oficiais. Além disso, permitiu a percepção do uso das Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação no ensino de Matemática de uma forma mais ampla, na qual este recurso pode ser usado efetivamente para a aprendizagem dos estudantes em sala de aula.

Destaca-se ainda, a necessidade de organizar uma sequência de atividades, baseada na Investigação Matemática, que requereu da pesquisadora a concatenação de diversos conhecimentos, bem como a percepção das dificuldades que os estudantes revelam, o que possibilitou uma reflexão em relação a própria prática pedagógica.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALVES, L. R. G. . Nativos Digitais: Games, Comunidades e Aprendizagens. In: MORAES, Ubirajara Carnevale de. (Org.). **Tecnologia Educacional e Aprendizagem: o uso dos recursos digitais.** Livro Pronto: São Paulo, 2007, p. 233-251. Disponível em: <https://www.institutoclaro.org.br/uploads/nativos digitais_lynnalves.pdf> Acesso em: 30 set.2017.

BODGAN, Robert C.;BIKLEN, Sari K. **Investigação qualitativa em Educação**: uma introdução à teoria dos métodos. Porto: Editora Porto, 2013.

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**. 3 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

BORGES, C. C. A topologia: considerações teóricas e Implicações para o ensino da matemática. **Caderno de Física da UEFS**, 03 (02): 15-35, 2005. Disponível em: <http://dfis.uefs.br/caderno/vol3n2/CBorges.pdf >. Acesso em 27 jun.2017.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais.** Matemática – 1ª a 4ª séries/ Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais.** Matemática – 5ª a 8ª séries. Brasília: MEC/SEF, 1998. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf> Acesso em: 15 jun. 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Terceira versão revista. Brasília: MEC, 2017. Disponível em: < http://basenacionalcomum.mec.gov.br/abase/> Acesso em: 28 out. 2018.

DEBASTIANI NETO, J; NOGUEIRA, C. M. I; FRANCO, V.S. A Construção do Espaço Geométrico por Crianças entre 03 e 10 anos. In**: UNOPAR Científica Ciências Exatas e Tecnológicas.** Londrina, v. 9, n. 1, Nov, 2010. p. 71-78. Disponível em: <http://www.pgsskroton.com.br/seer/index.php/exatas/ article/view/603> Acesso em: 12 jan.2018.

DUVAL, Raymond. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. In**: Revemat. Revista Eletrônica de Educação Matemática.** ISSN 1981-1322. Florianópolis, v. 7, n.2, p. 266-297, 2012. Disponível em: < https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p266> Acesso em: 30/10/2018.

FERNANDES, Francisco. **Dicionário Brasileiro Contemporâneo**, 2 ed. Rio de Janeiro. Globo, 1965.

FONSECA, Maria da Conceição F. R, *et al.* **O ensino de Geometria na escola fundamental:** três questões para a formação do professor dos ciclos iniciais. 3 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

FREITAS, José Luiz M. de; REZENDE, Veridiana. Entrevista: Raymond Duval e a Teoria dos Registros de Representações Semiótica. In: **Revista Paranaense de Educação Matemática**. v.2, n.3, jul-dez. 2013.

KALINKE, M. A.; MOCROSKY, L.; ESTEPHAN, V. M. Matemáticos, educadores matemáticos e tecnologias: uma articulação possível. In:.**Educação Matemática Pesquisa. Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática.** v.15, n.2, p.359-378, maio 2013. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/13363>. Acesso em: 20 abr. 2017.

LORENZATO, Sergio. **Educação infantil e percepção Matemática**. 2 ed. Campinas: Autores asociados, 2008.

MALHEIROS, Bruno T. Metodologia da Pesquisa em Educação. Rio de Janeiro: LTC, 2011.

MATTAR, João. **Games em Educação: como os nativos digitais aprendem.** São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

MENDES, Iran Abreu. **Matemática e Investigação em sala de aula:** tecendo redes cognitivas na aprendizagem. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

MOITA, Filomena M. G. S.C. **Games: contexto cultural e curricular juvenil.** 2006. 181f. Dissertação (Doutorado em Educação) – Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2006. Disponível em: < http://www.filomenamoita.pro.br /pdf/tese-games.pdf> Acesso em: 01 out.2017.

MORETTI, V. D.; SOUZA, N. M. M. Educação Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental: Princípios e práticas pedagógicas. São Paulo: Cortez, 2015.

MOURA, Manoel O. A atividade de ensino como unidade formadora. **Bolema**, Rio Claro, ano 2, n.12, p. 29-43, 1996.

PAPERT, Seymour. Tradução de José Armando Valente. *LOGO:* **Computadores e educação.** 3.ed. São Paulo: Brasiliense, 1988.

PASSOS, Cármen Lúcia Brancaglion; NACARATO, Adair Mendes. O ensino de geometria no ciclo de alfabetização: um olhar a partir da provinha Brasil. **Educação Matemática Pesquisa. Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática.** v. 16, n. 4, p. 1147-1168, dez. 2014. ISSN 1983-3156. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/22016>. Acesso em: setl. 2017.

PAVANELLO, Regina M. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências. p.7-18. **Zetetiké: Revista de Educação Matemática**, Campinas, SP, v. 1, n. 1, dez. 2009. ISSN 2176-1744. Disponível em: <http://ojs.fe.unicamp.br/ged/zetetike/article/view/2611/2353>. Acesso em: 05 set. 2017.

PIAGET, Jean. **A construção do real na criança.** 2. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 1975.

_________.; INHELDER, B. **A representação do espaço na criança.** Porto Alegre: Artes Médicas, 1993.

PIRES, C. M. C. **Reflexões que Precisam Ser Feitas sobre o Uso dos Chamados "Materiais Concretos" para a Aprendizagem de Matemática.** In: Boletim Gepem. n. 61, p. 45-62, jul/dez, 2012.

PONTE, João Pedro.; QUARESMA, Marisa; MATA-PEREIRA, Joana; BRANCO, Neusa. I**nvestigações matemáticas e investigações na prática profissional.** São Paulo: Livraria da Física, 2017.

___________; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. Investigações Matemática na sala de aula. 3 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2013.

PRENSKY, Mark. Nativos Digitais, Imigrantes Digitais. **On the Horizon.** v.9, n.5. MCB University Press. 2005. Disponível em <http://www.marcprensky.com/writing/prensky%20-%20digital%20natives,%20digital%20immigrants%20-%20part1.pdf> Acesso em: 18 set.2017.

SAMPAIO, João C. V. **Uma** I**ntrodução à topologia Geométrica:** passeios de Euler, superfícies, e o teorema das quatro cores. São Carlos: UFSCar, 2010.

__________ Quatro cores e Matemática. Universidade Federal da Bahia. In: II Bienal da SBEM, 2004. Disponível em: <bienasbm.ufba.br/M35.pdf> Acesso em: 19 dez.2017.

SÃO PAULO. Coordenadoria de Gestão da Educação Básica. Departamento de Gestão da Educação Básica. Centro de Ensino Fundamental dos Anos Iniciais. Centro de Ensino Fundamental dos Anos Finais, Ensino Médio. Orientações Curriculares do Estado de São Paulo. **Currículo de Matemática dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental.** São Paulo**.** 2014.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação. **Orientações Curriculares do Estado de São Paulo**: Língua Portuguesa e Matemática – Ciclo I. São Paulo: FDE, 2008. Disponível em: < http://www.cdcc.usp.br/cda/PARAMETROS-CURRICULARES/Sao-Paulo-Faz-Escola/Ciclo-I/proposta_ciclo_I.pdf > Acesso em: 03 nov. 2017.

SEED. Secretaria de Estado da Educação do Paraná. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica** – Matemática. Curitiba, PR. 2008. Disponível em: <http://www.matematica.seed.pr.gov.br> Acesso em: jul/2018.

SEED. Secretaria de Estado da Educação do Paraná. **Ensino Fundamental de Nove Anos: Orientações Pedagógicas para os Anos Iniciais.** Curitiba, PR. 2010.

SEED. Secretaria da Educação do Paraná. Departamento de Educação Básica. **Caderno de Expectativas de Aprendizagem**. Curitiba, PR. 2012. Disponível em: <http://www.matematica.seed.pr.gov.br> Acesso em: jul/2018.

SEED. Secretaria de Estado da Educação do Paraná. **Referencial Curricular do Paraná: Princípios, Direitos e Orientações.** Curitiba, PR. 2018. Disponível em: <http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/modules/conteudo/conteudo.php?conteudo=1383> Acesso em: jul. 2018.

SMOLE, Kátia C. S.; DINIZ, Maria I.; CÂNDIDO, Patrícia. **Figuras e Formas**. 2 ed. Porto Alegre: Penso, 2014.

TOJEIRO, Priscilla F. S.; ARAMAN, Eliane M. O. Uma análise nos Anais dos XI, XII e XIII EPREM em busca de trabalhos que abordam os Anos Iniciais associados ao uso de Tecnologias. In: **Encontro Paranaense de Educação Matemática**, Anais. Cascavel: UNIOESTE, 2017.

VELOSO, Eduardo; FONSECA, Helena; PONTE, João Pedro; ABRANTES, Paulo (Orgs.). **Ensino da Geometria no Virar do Milénio**, Lisboa: DEFCUL, 1999.

VÉRTICE. **Moderno Dicionário da Língua Portuguesa Michaelis**. Disponível em: <http://michaelis.uol.com.br/moderno/portugues/index.php>. Acesso em: 12 jan. 2019.

APÊNDICES

APÊNDICE 1

PEDIDO DE AUTORIZAÇÃO

Ilmo. Sr. Wilson de Moraes Rosa Filho
Secretário Municipal de Educação de Ourinhos

Eu, Priscilla Frida Salles Tojeiro, professora titular da Rede Municipal de Ensino de Ourinhos, matrícula 10503 e aluna regularmente matriculada na Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Campus de Londrina, venho por meio deste, solicitar autorização para aplicar as atividades referentes a pesquisa desenvolvida por mim sob orientação da professora doutora Eliane Maria de Oliveira Araman: NOÇÕES DE TOPOLOGIA NOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL: uma possibilidade por meio das TDIC com os alunos matriculados nas turmas 401 e 504 da EMEF Profa. Dorothildes Bononi Gonçalves.

O objetivo da pesquisa é apresentar noções introdutórias de Topologia para crianças que frequentam os Anos Iniciais do Ensino Fundamental, em específico a Teoria dos Grafos, de forma que possam, manusear, realizar tentativas, observar seus erros, fazer simulações e experimentações para formar suas próprias conjecturas e hipóteses. Sua aplicação ocorrerá por meio da Investigação Matemática utilizando-se para isto um recurso tecnológico.

A participação da criança ou adolescente é muito importante e ela se daria da seguinte forma: aplicação de oito atividades durante cinco aulas na disciplina de Informática, em colaboração com o professor da turma.

Esclarecemos que as informações da criança ou do adolescente serão utilizadas somente para os fins desta pesquisa e serão tratadas com o mais absoluto sigilo e confidencialidade, de modo a preservar a identidade da criança ou do adolescente. No caso, gravação das aulas.

Os benefícios esperados são ampliar seus conhecimentos em Geometria, Topologia especificamente, bem como o uso de recursos do computador, aprender métodos investigativos e participar de uma aula diferente.

Informamos que esta pesquisa atende e respeita os direitos previstos no Estatuto da Criança e do Adolescente- ECA, Lei Federal nº 8069 de 13 de julho de 1990, sendo eles: à vida, à saúde, à alimentação, à educação, ao esporte, ao lazer, à profissionalização, à cultura, à dignidade, ao respeito, à liberdade e à convivência familiar e comunitária. Garantimos também que será atendido o Artigo 18 do ECA: "É dever de todos velar pela dignidade da criança e do adolescente, pondo-os a salvo de qualquer tratamento desumano, violento, aterrorizante, vexatório ou constrangedor."

Caso o(a) senhor(a) tenha dúvidas ou necessite de maiores esclarecimentos poderá me contatar no email: priscillatojeiro@yahoo.com.br

Ourinhos, 24 de agosto de 2018.

____

Priscilla Frida Salles Tojeiro

RG:18.910.150-7

Eu Wilson de Moraes Rosa Filho, Secretário Municipal de Educação de Ourinhos, tendo sido devidamente esclarecido sobre os procedimentos da pesquisa, concordo com a participação voluntária dos alunos matriculados na EMEF. Profa Dorothildes Bononi Gonçalves, na pesquisa descrita acima.

____

Assinatura (ou impressão dactiloscópica)

Data:____________________

APÊNDICE 2

PEDIDO DE AUTORIZAÇÃO

Ilma. Sra. Roberta Cláudia Carrero
Diretora da EMEF Profa. Dorothildes Bononi Gonçalves

Eu, Priscilla Frida Salles Tojeiro, professora titular da Rede Municipal de Ensino de Ourinhos, matrícula 10503 e aluna regularmente matriculada na Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Campus de Londrina, venho por meio deste, solicitar autorização para aplicar as atividades referentes a pesquisa desenvolvida por mim sob orientação da professora doutora Eliane Maria de Oliveira Araman: NOÇÕES DE TOPOLOGIA NOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL: uma possibilidade por meio das TDIC com os alunos matriculados nas turmas 401 e 504 da EMEF Profa. Dorothildes Bononi Gonçalves.

O objetivo da pesquisa é apresentar noções introdutórias de Topologia para crianças que frequentam os Anos Iniciais do Ensino Fundamental, em específico a Teoria dos Grafos, de forma que possam, manusear, realizar tentativas, observar seus erros, fazer simulações e experimentações para formar suas próprias conjecturas e hipóteses. Sua aplicação ocorrerá por meio da Investigação Matemática utilizando-se para isto um recurso tecnológico.

A participação da criança ou adolescente é muito importante e ela se daria da seguinte forma: aplicação de oito atividades durante cinco aulas na disciplina de Informática, em colaboração com o professor da turma.

Esclarecemos que as informações da criança ou do adolescente serão utilizadas somente para os fins desta pesquisa e serão tratadas com o mais absoluto sigilo e confidencialidade, de modo a preservar a identidade da criança ou do adolescente. No caso, gravação das aulas.

Os benefícios esperados são ampliar seus conhecimentos em Geometria, Topologia especificamente, bem como o uso de recursos do computador, aprender métodos investigativos e participar de uma aula diferente.

Informamos que esta pesquisa atende e respeita os direitos previstos no Estatuto da Criança e do Adolescente- ECA, Lei Federal nº 8069 de 13 de julho de 1990, sendo eles: à vida, à saúde, à alimentação, à educação, ao esporte, ao lazer, à profissionalização, à cultura, à dignidade, ao respeito, à liberdade e à convivência familiar e comunitária. Garantimos também que será atendido o Artigo 18 do ECA: “É dever de todos velar pela dignidade da criança e do adolescente, pondo-os a salvo de qualquer tratamento desumano, violento, aterrorizante, vexatório ou constrangedor.”

Caso o(a) senhor(a) tenha dúvidas ou necessite de maiores esclarecimentos poderá me contatar no email: priscillatojeiro@yahoo.com.br

Ourinhos, 24 de agosto de 2018.

____

Priscilla Frida Salles Tojeiro

RG:18.910.150-7

Eu Roberta Cláudia Carrero, Diretora da EMEF. Profa Dorothildes Bononi Gonçalves, tendo sido devidamente esclarecida sobre os procedimentos da pesquisa, concordo com a participação voluntária dos alunos matriculados na referida Unidade Escolar, na pesquisa descrita acima.

____

Assinatura (ou impressão dactiloscópica)

Data:____________________

APÊNDICE 3

Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

"NOÇÕES DE TOPOLOGIA NOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL: uma possibilidade por meio das TDIC "

Prezado(a) Senhor(a):

Gostaria de convidar a criança sob sua responsabilidade para participar da pesquisa "NOÇÕES DE TOPOLOGIA NOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL: uma possibilidade por meio das TDIC", a ser realizada na "EMEF Prof. Dorothildes Bononi Gonçalves". O objetivo da pesquisa é apresentar noções introdutórias de Topologia para crianças que frequentam os Anos Iniciais do Ensino Fundamental, em específico a Teoria dos Grafos, de forma que possam, manusear, realizar tentativas, observar seus erros, fazer simulações e experimentações para formar suas próprias conjecturas e hipóteses. Sua aplicação ocorrerá por meio da Investigação Matemática utilizando-se para isto um recurso tecnológico.

A participação da criança ou adolescente é muito importante e ela se daria da seguinte forma: aplicação de nove atividades durante cinco encontros na disciplina de Informática, em colaboração com o professor da turma.

Esclarecemos que as informações da criança ou do adolescente sob sua responsabilidade serão utilizadas somente para os fins desta pesquisa e serão tratadas com o mais absoluto sigilo e confidencialidade, de modo a preservar a identidade da criança ou do adolescente. No caso, gravação dos encontros.

Os benefícios esperados são ampliar seus conhecimentos em Geometria, Topologia especificamente, bem como o uso de recursos do computador, aprender métodos investigativos e participar de uma aula diferente.

Informamos que esta pesquisa atende e respeita os direitos previstos no Estatuto da Criança e do Adolescente- ECA, Lei Federal nº 8069 de 13 de julho de 1990, sendo eles: à vida, à saúde, à alimentação, à educação, ao esporte, ao lazer, à profissionalização, à cultura, à dignidade, ao respeito, à liberdade e à convivência familiar e comunitária. Garantimos também que será atendido o Artigo 18 do ECA: "É dever de todos velar pela dignidade da criança e do adolescente, pondo-os a salvo de qualquer tratamento desumano, violento, aterrorizante, vexatório ou constrangedor”.

Caso o(a) senhor(a) tenha dúvidas ou necessite de maiores esclarecimentos poderá nos contatar, Professora Priscilla Frida Salles Tojeiro, email: priscillatojeiro@yahoo.com.br

Ourinhos, 24 de agosto de 2018.

Priscilla Frida Salles Tojeiro
RG:18.910.150-7

____ (NOME POR EXTENSO DO RESPONSÁVEL PELO PARTICIPANTE DA PESQUISA), tendo sido devidamente esclarecido sobre os procedimentos da pesquisa, concordo com a participação voluntária da criança ou do adolescente sob minha responsabilidade na pesquisa descrita acima.

Assinatura (ou impressão dactiloscópica):_______________________________
Data:_____________________

Caso o adolescente seja maior de 12 anos, deverá constar o espaço abaixo para assinatura do menor.

Assentimento Livre e Esclarecido do Adolescente

____ (NOME POR EXTENSO DO PARTICIPANTE DA PESQUISA), tendo sido totalmente esclarecido sobre os procedimentos da pesquisa, concordo em participar voluntariamente da pesquisa descrita acima.

Assinatura (ou impressão dactiloscópica):_______________________________
Data:_____________________

APÊNDICE 4

ATIVIDADE 1

1- FOI POSSÍVEL FAZER UM PASSEIO DE EULER NESTE GRAFO? __________

2- QUANDO O PASSEIO COMEÇA NO VÉRTICE **A** TERMINA NO VÉRTICE: _____.

QUANDO O PASSEIO COMEÇA NO VÉRTICE **B** TERMINA NO VÉRTICE: _____.

QUANDO O PASSEIO COMEÇA NO VÉRTICE **C** TERMINA NO VÉRTICE: ____.

QUANDO O PASSEIO COMEÇA NO VÉRTICE **D** TERMINA NO VÉRTICE: ____.

3- QUANTOS SÃO OS VÉRTICES PARES? _________

4- QUANTOS SÃO OS VÉRTICES ÍMPARES? _________

5- O VÉRTICE DE PARTIDA SEMPRE É O MESMO DE CHEGADA? ___________

NOME DA DUPLA: ___________________________

ATIVIDADE 2

1- FOI POSSÍVEL FAZER UM PASSEIO DE EULER NESTE GRAFO? __________

2- QUANDO O PASSEIO COMEÇA NO VÉRTICE **A** TERMINA NO VÉRTICE: _____.

QUANDO O PASSEIO COMEÇA NO VÉRTICE **B** TERMINA NO VÉRTICE: _____.

QUANDO O PASSEIO COMEÇA NO VÉRTICE **C** TERMINA NO VÉRTICE: ____.

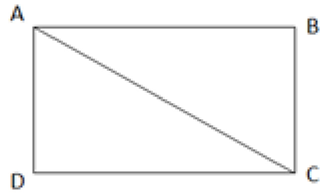
QUANDO O PASSEIO COMEÇA NO VÉRTICE **D** TERMINA NO VÉRTICE: ____.

3- QUANTOS SÃO OS VÉRTICES PARES? _________

4- QUANTOS SÃO OS VÉRTICES ÍMPARES? _________

5- O VÉRTICE DE PARTIDA SEMPRE É O MESMO DE CHEGADA? ___________

NOME DA DUPLA: ___________________________



APÊNDICE 5

ATIVIDADE 3

1- FOI POSSÍVEL FAZER UM PASSEIO DE EULER POR ESTE GRAFO?______________

2- QUANDO O PASSEIO COMEÇA NO VÉRTICE **A** TERMINA NO VÉRTICE: ____________.

QUANDO O PASSEIO COMEÇA NO VÉRTICE **B** TERMINA NO VÉRTICE: ____________.

QUANDO O PASSEIO COMEÇA NO VÉRTICE **C** TERMINA NO VÉRTICE: ___________.

QUANDO O PASSEIO COMEÇA NO VÉRTICE **D** TERMINA NO VÉRTICE: ___________.

QUANDO O PASSEIO COMEÇA NO VÉRTICE **E** TERMINA NO VÉRTICE: ___________.

QUANDO O PASSEIO COMEÇA NO VÉRTICE **F** TERMINA NO VÉRTICE: ___________.

3- QUANDO O GATINHO PARTE DE QUAIS VÉRTICES ELE CONSEGUE COMPLETAR O PASSEIO?

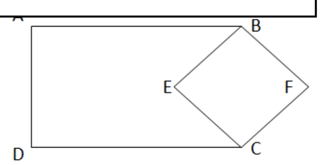
____

4- É POSSIVEL FAZER UM PASSEIO DE EULER NESTE GRAFO QUANDO O GATINHO PARTE DE QUALQUER UM DOS VÉRTICES? ___________

5- QUAIS VÉRTICES POSSUEM NÚMEROS PARES DE ARESTAS? ______________________

6- QUAIS VÉRTICES POSSUEM NÚMEROS ÍMPARES DE ARESTAS? ____________________

NOME DA DUPLA:__________________________________



ATIVIDADE 4

1- FOI POSSÍVEL FAZER UM PASSEIO DE EULER POR ESTE GRAFO? _______________

2- QUANDO O PASSEIO COMEÇA NO VÉRTICE **A** TERMINA NO VÉRTICE: _____________.

QUANDO O PASSEIO COMEÇA NO VÉRTICE **B** TERMINA NO VÉRTICE: _____________.

QUANDO O PASSEIO COMEÇA NO VÉRTICE **C** TERMINA NO VÉRTICE: ____________.

QUANDO O PASSEIO COMEÇA NO VÉRTICE **D** TERMINA NO VÉRTICE: ____________.

QUANDO O PASSEIO COMEÇA NO VÉRTICE **E** TERMINA NO VÉRTICE: ____________.

QUANDO O PASSEIO COMEÇA NO VÉRTICE **F** TERMINA NO VÉRTICE: ____________.

QUANDO O PASSEIO COMEÇA NO VÉRTICE **G** TERMINA NO VÉRTICE: ____________.

3- É POSSÍVEL FAZER UM PASSEIO DE EULER NESTE GRAFO QUANDO O GATINHO PARTE DE QUALQUER UM DOS VÉRTICES? _________

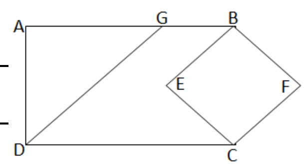
4- QUANDO O GATINHO PARTE DE QUAIS VÉRTICES ELE CONSEGUE COMPLETAR O PASSEIO?

____

5- QUAIS VÉRTICES POSSUEM NÚMEROS PARES DE ARESTAS? ___________

6- QUAIS VÉRTICES POSSUEM NÚMEROS ÍMPARES DE ARESTAS? _________

NOME DA DUPLA:____



APÊNDICE 6

ATIVIDADE 5

1- FOI POSSÍVEL FAZER UM PASSEIO DE EULER POR ESTE GRAFO? _______________

2- QUANDO O PASSEIO COMEÇA NO VÉRTICE **A** TERMINA NO VÉRTICE: _____________.

QUANDO O PASSEIO COMEÇA NO VÉRTICE **B** TERMINA NO VÉRTICE: _____________.

QUANDO O PASSEIO COMEÇA NO VÉRTICE **C** TERMINA NO VÉRTICE: ____________.

QUANDO O PASSEIO COMEÇA NO VÉRTICE **D** TERMINA NO VÉRTICE: ____________.

3- É POSSÍVEL FAZER UM PASSEIO DE EULER NESTE GRAFO QUANDO O GATINHO PARTE DE QUALQUER UM DOS VÉRTICES? _________

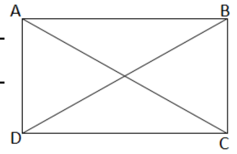
4- QUANDO O GATINHO PARTE DE QUAIS VÉRTICES ELE CONSEGUE COMPLETAR O PASSEIO? _______________________

5- QUAIS VÉRTICES POSSUEM NÚMEROS PARES DE ARESTAS? ___________

6- QUAIS VÉRTICES POSSUEM NÚMEROS ÍMPARES DE ARESTAS? _________

7- ESTE GRAFO POSSUI QUANTOS VÉRTICES PARES? _______________________

8- ESTE GRAFO POSSUI QUANTOS VÉRTICES ÍMPARES? _____________________



NOME DA DUPLA: ____________________________________

ATIVIDADE 6

1- FOI POSSÍVEL FAZER UM PASSEIO DE EULER POR ESTE GRAFO? _______________

2- QUANDO O PASSEIO COMEÇA NO VÉRTICE **A** TERMINA NO VÉRTICE: _____________.

QUANDO O PASSEIO COMEÇA NO VÉRTICE **B** TERMINA NO VÉRTICE: _____________.

QUANDO O PASSEIO COMEÇA NO VÉRTICE **C** TERMINA NO VÉRTICE: ____________.

QUANDO O PASSEIO COMEÇA NO VÉRTICE **D** TERMINA NO VÉRTICE: ____________.

QUANDO O PASSEIO COMEÇA NO VÉRTICE **E** TERMINA NO VÉRTICE: ____________.

QUANDO O PASSEIO COMEÇA NO VÉRTICE **F** TERMINA NO VÉRTICE: ____________.

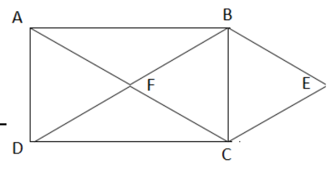
3- É POSSÍVEL FAZER UM PASSEIO DE EULER NESTE GRAFO QUANDO O GATINHO PARTE DE QUALQUER UM DOS VÉRTICES? _________

4- QUANDO O GATINHO PARTE DE QUAIS VÉRTICES ELE CONSEGUE COMPLETAR O PASSEIO? _______________________

5- QUAIS VÉRTICES POSSUEM NÚMEROS PARES DE ARESTAS? ___________

6- QUAIS VÉRTICES POSSUEM NÚMEROS ÍMPARES DE ARESTAS? _________

7- QUAIS SÃO OS VÉRTICES ÍMPARES? ______________________



NOME DA DUPLA: ____________________________________

APÊNDICE 7

ATIVIDADE 7

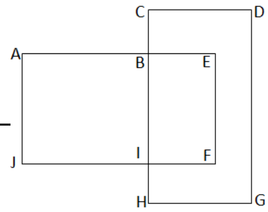
1- QUANDO O PASSEIO COMEÇA NO VÉRTICE **A** TERMINA NO VÉRTICE: _____________.
QUANDO O PASSEIO COMEÇA NO VÉRTICE **B** TERMINA NO VÉRTICE: _____________.
QUANDO O PASSEIO COMEÇA NO VÉRTICE **C** TERMINA NO VÉRTICE: ____________.
QUANDO O PASSEIO COMEÇA NO VÉRTICE **D** TERMINA NO VÉRTICE: ____________.
QUANDO O PASSEIO COMEÇA NO VÉRTICE **E** TERMINA NO VÉRTICE: ____________.
QUANDO O PASSEIO COMEÇA NO VÉRTICE **F** TERMINA NO VÉRTICE: ____________.
QUANDO O PASSEIO COMEÇA NO VÉRTICE **G** TERMINA NO VÉRTICE: ____________.
QUANDO O PASSEIO COMEÇA NO VÉRTICE **H** TERMINA NO VÉRTICE: ____________.
QUANDO O PASSEIO COMEÇA NO VÉRTICE **I** TERMINA NO VÉRTICE: ____________.
QUANDO O PASSEIO COMEÇA NO VÉRTICE **J** TERMINA NO VÉRTICE: ____________.

2- FOI POSSÍVEL FAZER UM PASSEIO DE EULER POR ESTE GRAFO? _______________

3- É POSSÍVEL FAZER UM PASSEIO DE EULER NESTE GRAFO QUANDO O GATINHO PARTE DE QUALQUER UM DOS VÉRTICES? _________

4- QUANTOS VÉRTICES POSSUEM NÚMEROS PARES DE ARESTAS? ___________

5- QUANTOS VÉRTICES POSSUEM NÚMEROS ÍMPARES DE ARESTAS? _________



NOME DA DUPLA:____

ATIVIDADE 8

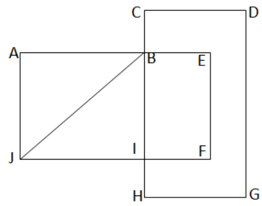
1- QUANDO O PASSEIO COMEÇA NO VÉRTICE **A** TERMINA NO VÉRTICE: _____________.
QUANDO O PASSEIO COMEÇA NO VÉRTICE **B** TERMINA NO VÉRTICE: _____________.
QUANDO O PASSEIO COMEÇA NO VÉRTICE **C** TERMINA NO VÉRTICE: ____________.
QUANDO O PASSEIO COMEÇA NO VÉRTICE **D** TERMINA NO VÉRTICE: ____________.
QUANDO O PASSEIO COMEÇA NO VÉRTICE **E** TERMINA NO VÉRTICE: ____________.
QUANDO O PASSEIO COMEÇA NO VÉRTICE **F** TERMINA NO VÉRTICE: ____________.
QUANDO O PASSEIO COMEÇA NO VÉRTICE **G** TERMINA NO VÉRTICE: ____________.
QUANDO O PASSEIO COMEÇA NO VÉRTICE **H** TERMINA NO VÉRTICE: ____________.
QUANDO O PASSEIO COMEÇA NO VÉRTICE **I** TERMINA NO VÉRTICE: ____________.
QUANDO O PASSEIO COMEÇA NO VÉRTICE **J** TERMINA NO VÉRTICE: ____________.

2- FOI POSSÍVEL FAZER UM PASSEIO DE EULER POR ESTE GRAFO? _______________

3- É POSSÍVEL FAZER UM PASSEIO DE EULER NESTE GRAFO QUANDO O GATINHO PARTE DE QUALQUER UM DOS VÉRTICES? _________

4- PARTINDO DE QUAIS VÉRTICES É POSSÍVEL FAZER O PASSEIO? ___________

5- ESTES VÉRTICES SÃO PARES OU ÍMPARES? _________



NOME DA DUPLA:____

APÊNDICE 8
Fichas de trabalho dos Grupos 1, 2, 3 e 4

NOME DO GRUPO:

Foi possível fazer um Passeio de Euler por todos estes grafos. Responda:

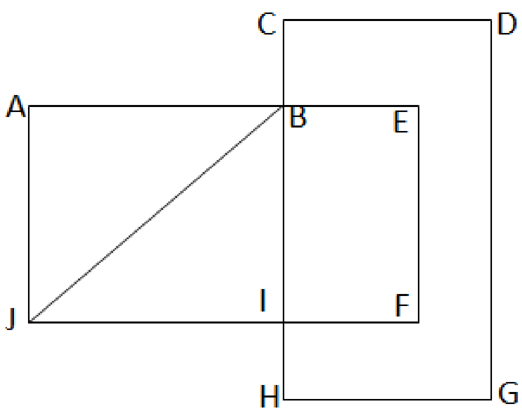
1- Em quais destes grafos você começou o passeio e terminou no mesmo vértice?

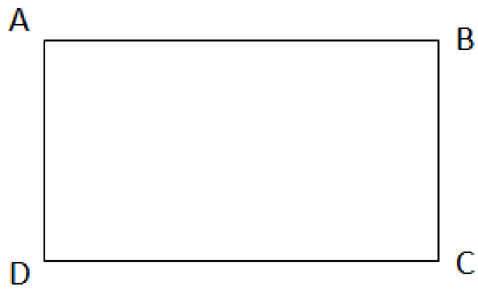
2- O grafo possui apenas vértices com arestas pares?

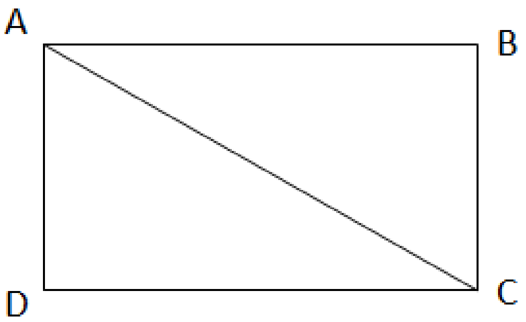
3-Em quais destes grafos você começou o passeio em um vértice e terminou em outro?

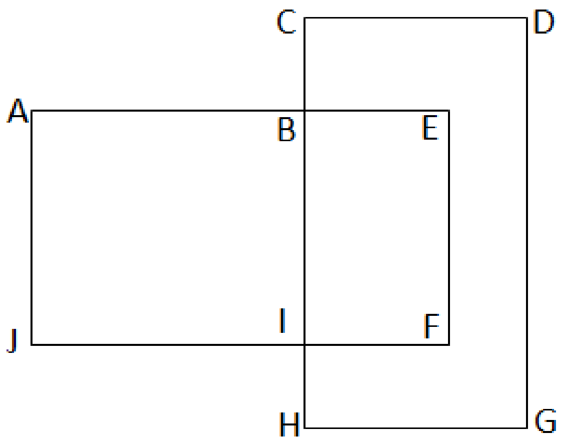
4- O grafo possui apenas vértices com arestas ímpares?

5- O que podemos perceber?









RESPOSTA:

NOME DO GRUPO:

Por estes grafos foi possível fazer um passeio de Euler.

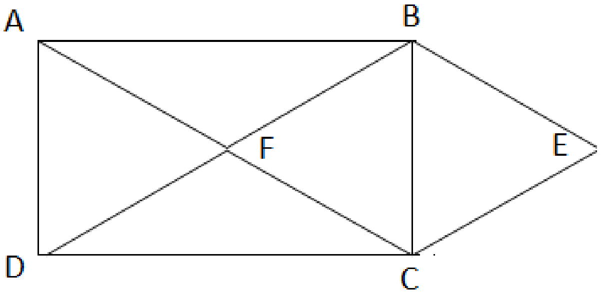
1- Nestes grafos você começou e terminou o passeio no mesmo vértice?

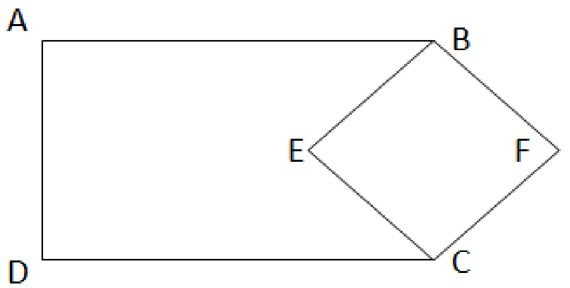
2- Estes grafos possuem apenas vértices com números pares de arestas?

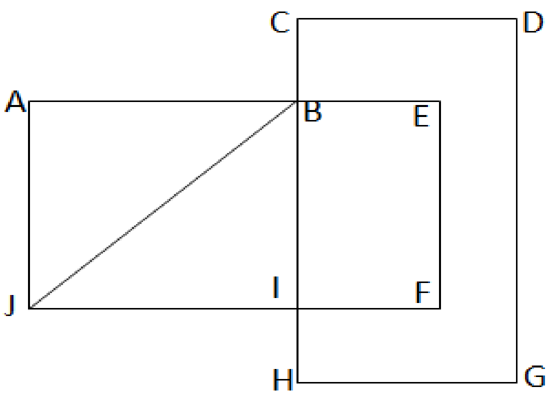
3- Quantos vértices com arestas ímpares esses grafos possuem?

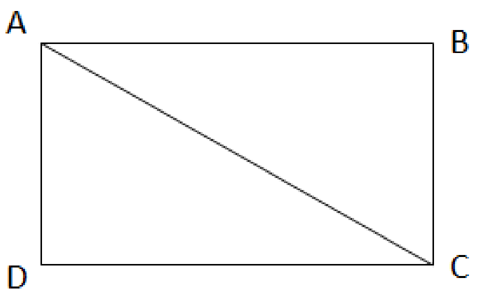
4- Quais são os vértices com aresta ímpares?

5- O que você percebe aqui?

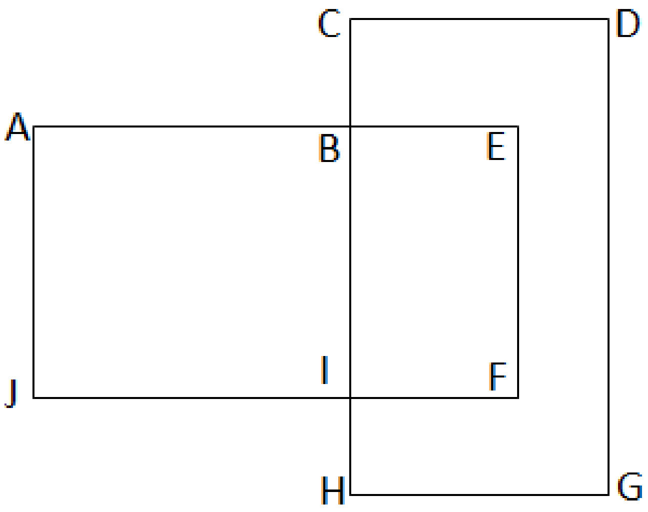








RESPOSTA:

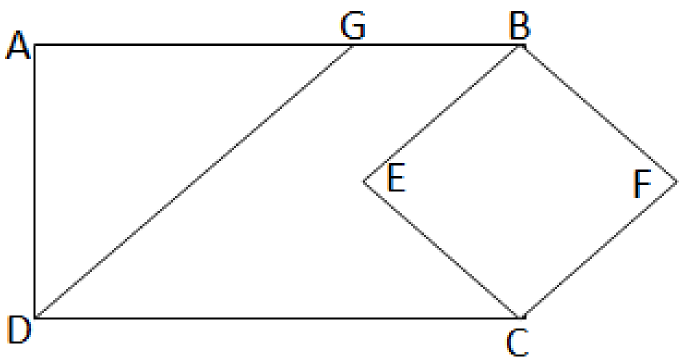
NOME DO GRUPO:
1- Você pode fazer um passeio de Euler por estes grafos? 2- Se você começar o passeio no vértice B, onde você vai terminar? 3- Se você começar o passeio no vértice C, ou em qualquer outro vértice, onde vai terminar? 4- O que você percebe aqui?
 
RESPOSTA:

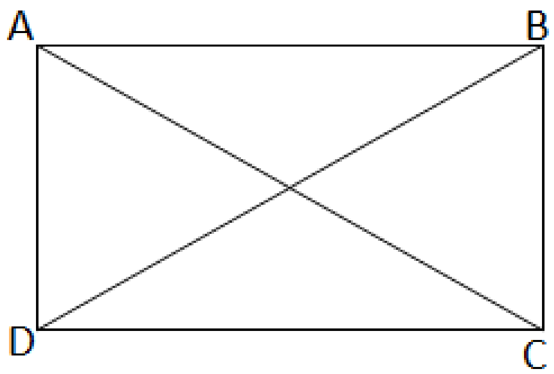
NOME DO GRUPO:

1- Você pode fazer um passeio de Euler por estes grafos?

2- Quantos vértices com número ímpar de arestas têm estes grafos?

3- O que você percebe aqui?





RESPOSTA: