UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO

PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

DAYANE MOARA COUTINHO

DIVISÃO E MULTIPLICAÇÃO DE POLINÔMIOS COM O AUXÍLIO DE MATERIAIS MANIPULÁVEIS E TECNOLOGIAS SOB O OLHAR DA REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

LONDRINA

2019

DAYANE MOARA COUTINHO

DIVISÃO E MULTIPLICAÇÃO DE POLINÔMIOS COM O AUXÍLIO DE MATERIAIS MANIPULÁVEIS E TECNOLOGIAS SOB O OLHAR DA REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para a obtenção do título de mestre.

Linha de pesquisa: Recursos Educacionais e Tecnologias no Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Claudete Cargnin

LONDRINA

2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Biblioteca UTFPR - Câmpus Londrina

C871d Coutinho, Dayane Moara
Divisão e multiplicação de polinômios com o auxílio de materiais manipuláveis e tecnologias sob o olhar da representação semiótica / Dayane Moara Coutinho. - Londrina : [s.n.], 2019.
92 f. : il. ; 30 cm.

Orientadora: Profª Drª Claudete Cargnin
Dissertação (Mestrado) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, 2019.
Bibliografia: f. 75-78.

1. Álgebra. 2. Ensino fundamental. 3. Ensino híbrido. 4. Material didático. 5. Semiótica. I. Cargnin, Claudete, orient. II. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. III. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática. IV. Título.

CDD: 510.7

Ficha catalográfica elaborada por Cristina Benedeti Guilhem - CRB: 9/911

Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Londrina/Cornélio Procópio

Pró Reitoria de Pesquisa e Graduação
Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

TERMO DE APROVAÇÃO

DAYANE MOARA COUTINHO

Esta Dissertação foi apresentada em *07 de março* de 2019, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática. A candidata foi arguida pela Banca Examinadora composta pelos professores abaixo assinados. Após deliberação, a Banca Examinadora considerou o trabalho aprovado.

____

Prof. Dra. Claudete Cargnin
Orientadora

____

Prof. Dra. Mariana Moran Barroso
Membro titular

____

Prof. Dra. Zenaide de Fátima Dante Correia Rocha
Membro titular

* O Termo de Aprovação assinado encontra-se na Coordenação do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

Dedico este trabalho à minha filha **Lorenna;** aos meus pais: **Sueli** e **Coutinho** (*In memorian*); à minha irmã **Letícia** e aos meus sobrinhos **Ana Julia e Victor.**

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus pelo dom da vida e por me agraciar com mais essa conquista.

À minha orientadora, Prof. Dra. Claudete Cargnin, pela amizade, confiança, dedicação, contribuições e por ter acreditado em minha capacidade para elaboração deste trabalho.

Aos professores membros da banca de avaliação, Mariana Moran Barroso, Zenaide de Fátima Dante Correia Rocha e Silvia Terezinha Frizzarini, que aceitaram gentilmente compor a banca examinadora e pelas valiosas contribuições.

Aos amigos, em especial, à minha turma de mestrado, que compartilhou conhecimentos, momentos de angústias e felicidades.

À Adriele e ao Rodrigo, pelas viagens com muita risada, estresse e amor. Por aguentarem meus chiliques, minhas *playlists* e meus roncos.

Ao DAMAT-CM, que organizou meu horário de acordo com minhas aulas do PPGMAT.

A todos os professores da vida acadêmica e ao corpo docente do PPGMAT, que partilharam suas experiências e conhecimentos, bem como, me estimularam para o crescimento profissional.

À minha família que, além de toda paciência, se fez presente em todos os momentos de minha vida, me apoiando, incentivando, e que, frente a mais esse desafio, acreditou que eu sou capaz.

Em especial, à minha filha Lorenna, que, mesmo diante da minha ausência, apoiou-me. E à minha mãe Sueli.

À Escola Educare, à professora Thalita Muraro e aos alunos que permitiram que essa pesquisa acontecesse.

Enfim, a todos que contribuíram para que fosse possível realizar esta pesquisa.

RESUMO

COUTINHO, Dayane Moara. **Divisão e multiplicação de polinômios com o auxílio de materiais manipuláveis e tecnologias sob o olhar da representação semiótica.** 2019. 115 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Londrina, 2019.

Esta pesquisa teve por objetivo avaliar uma sequência didática apoiada em materiais manipuláveis e atividades *on-line* para trabalhar as operações de multiplicação e divisão de polinômios, a fim de favorecer a aprendizagem destes conceitos. Para tanto, procurou-se responder a seguinte questão de pesquisa: *"Trabalhar com estações envolvendo Material Manipulável (MM) e atividades on-line favorece a aprendizagem dos conceitos de multiplicação e divisão de polinômios?"*. As atividades foram aplicadas em uma turma do 8º ano do Ensino Fundamental com 8 alunos, de uma escola da rede particular de ensino, do município de Campo Mourão, Paraná, durante o mês de junho de 2018. As tarefas foram pensadas para um ambiente de Ensino Híbrido e analisadas com base na Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) de Raymond Duval. Foram utilizadas resoluções, avaliações, questionários, bem como diálogos registrados num diário de campo, como instrumentos de coleta de dados. A análise dos dados indicou que as atividades contribuíram para que os alunos chegassem a propriedades e algoritmos, algumas inesperadas, como a dedução do método das chaves para divisão de polinômios. As respostas dos alunos mostraram ânimo para realizar as atividades e argumentaram que com o MM conseguiram aprender de forma mais dinâmica e com mais facilidade. Além disso, percebeu-se dificuldade com a representação algébrica e língua natural, tendo, em algumas questões, melhores resultados com a representação figural. Após a aplicação e análise de dados, as atividades foram reformuladas, e compõem o produto educacional relativo a essa dissertação, intitulado "Atividades para Multiplicação e Divisão de Polinômios a partir da área de retângulos" (Apêndice C desta dissertação), destinado a professores interessados em trabalhar esse assunto de modo mais dinâmico.

Palavras-chaves: Álgebra. Operações com polinômios. Ensino Fundamental. Ensino Híbrido. Material Manipulável. Teoria de Registros de Representação Semiótica.

ABSTRACT

COUTINHO, Dayane Moara. **Divisão e multiplicação de polinômios com o auxílio de materiais manipuláveis e tecnologias sob o olhar da representação semiótica.** 2019. 115 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Londrina, 2019.

This research goal is the evaluation of a didactic sequence supported in manipulable materials and online activities to work with polynomials multiplication and division operation, in order to facilitate these concepts learning. Therefore, it aimed answer the following research question: "Work with stations envolving Manipulative Material (MM) and online activities facilitate the learning of polynomials multiplication and division concept?". The activities were implemented in an 8th grade group at an Elementary School, which contained 8 students, at a school of private system, in the municipality of Campo Mourão, in Paraná State, during the month of June, in the year of 2018. The tasks were prepared to a Hybrid Teaching environment and analyzed based in the Registers of Semiotic Representation Theory (TRSR) by Raymond Duval. In it was used resolutions, tests, questionnaires, as well dialogs registered in a diary writing, as data collection tools. The data analysis indicated the activities contributed to students' achievement about properties and algorithms, some of them were unexpected, as the method deduction about the polynomials division sign. The students' answers revealed encouragement to perform the activities and they argued about the MM, with it, they reached learning in a dynamic and more easily way. Furthermore, we realized difficulties with the algebraic representation and natural language, having, in some questions, better results with the figural representation. After the implementation and data analysis, the activities were redone, and they compose an educational product associated to this essay, entitled "Activities for polynomials multiplication and division starting with rectangles area" (Appendix C in this essay), designed to teachers who are interested in working with this content in a most dynamic way.

Key-words: Algebra. Polynomials Operations. Elementary School. Hydrid Teaching. Manipulative Material. Registers of Semiotic Representation Theory.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE SIGLAS

ENEM - Exame Nacional do Ensino Médio

MM- Materiais Didáticos Manipuláveis

OBMEP- Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas

PCN - Parâmetros Curriculares Nacionais

PNLD - Plano Nacional do Livro Didático

RA - Representação algébrica

RF - Representação figural

RLN - Representação língua natural

SAEB- Sistema de Avaliação da Educação Básica

TCLE - Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

TEA- Transtorno do Espectro Autista

TIC's -Tecnologias da Informação e Comunicação

TRRS - Teoria dos Registros de Representação Semiótica

TCC -Trabalho de Conclusão de Curso

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

Na Educação Básica, o meu desempenho sempre foi excelente; o método de ensino era o tradicional, para todas as disciplinas. Em matemática, particularmente, ocorria a dinâmica: exposição de conteúdo, exemplos e listas de exercícios. Ainda cursando o Ensino Médio, queria prestar vestibular e fazer o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Assim como muitos estudantes, eu tinha dúvidas entre alguns cursos (Física, Química, Farmácia e Matemática); o escolhido dentre todos foi o curso de Licenciatura em Matemática.

Minha vida acadêmica na graduação teve início em 2010, na Universidade Estadual do Paraná – Campus de Campo Mourão. As aulas, em sua maioria, eram mais dinâmicas e incentivavam o pensamento crítico do aluno, bem como a autonomia. Mas, diferentemente da Educação Básica, o curso superior tinha um nível de dificuldade maior e exigiu maior dedicação.

Minha carreira profissional iniciou-se em 2013, quando ainda estava no quarto ano da faculdade, atuando desde então na Educação Infantil, Ensino Fundamental, Ensino Médio e Ensino Superior, tanto na rede pública, quanto na rede privada.

A busca por conhecimento não terminou com o diploma de conclusão de curso: realizei outro curso superior (Pedagogia), com pós-graduação na área de matemática, participei de eventos e cursos promovidos até mesmo pela Secretaria de Educação. Tudo isso na esperança de dar o melhor de mim, bem como, estar preparada para situações inesperadas que podem ocorrer na sala de aula.

Após o ingresso como colaboradora na Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Campus de Campo Mourão, no Departamento de Matemática, houve o convite para participar de um grupo de estudo, composto por professores da Instituição e da Educação Básica.

Esse grupo de estudo recebeu, por parte de uma professora, a demanda de trabalhar de forma mais contundente a divisão de polinômios, para evitar que erros do tipo $\frac{x}{x} = 0$ ocorressem de forma tão frequente. E, assim, surgiu o nosso tema de pesquisa do projeto para ingresso no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática – PPGMAT no ano de 2016.

Realizar uma pesquisa na área da álgebra foi muito satisfatório, pois quando lecionei no Ensino Fundamental e Ensino Médio, os conteúdos que geravam muitas notas abaixo da média eram de geometria e álgebra.

O tema de geometria foi objeto de pesquisa do meu Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) no ano de 2013 e agora, estudar um pouco mais sobre álgebra para contribuir com professores da rede, e para a aprendizagem dos alunos, me faz extremamente feliz.

1 INTRODUÇÃO

Há algum tempo as dificuldades em álgebra vem sendo objeto de estudo para pesquisadores (ANGHILERI, 1993; BOOTH, 1995; SOCAS *et al*, 1996; TINOCO *et al,* 2008; ENFEDAQUE, 1990; RODRIGUES, PONTE, MENEZES, 2016; GIL, 2008). A título de uma melhor compreensão de tais complexidades no contexto escolar, realizamos uma pesquisa bibliográfica, na qual foi possível perceber que não é somente na atualidade que o ensino de álgebra está mostrando resultados desfavoráveis.

Por exemplo, segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL,1998), as questões que envolvem álgebra raramente atingem 40% de acertos em muitas regiões do Brasil na Avaliação da Educação Básica (SAEB), o que, do nosso ponto de vista, e dos PCN, é uma porcentagem pequena. Os resultados do SAEB do ano de 2017, divulgados em agosto de 2018, apresentam para a disciplina de Matemática, nível 4 para o 5º ano do Ensino Fundamental e nível 3 para o 9º ano do Ensino Fundamental, em uma escala de proficiência que é dada entre os níveis 0 e 10. De acordo com o MEC, o nível 3 é considerado insuficiente, enquanto o nível 4 é o primeiro do conjunto de padrões considerados básicos.

Paralelamente à revisão de literatura, analisamos cinco livros didáticos, que pertenciam ao Plano Nacional do Livro Didático (PNLD) e foram encaminhados às escolas estaduais em 2016 para efetuar a escolha para o triênio 2017 – 2019. Durante a análise, percebemos que muitos exercícios que constavam nos livros didáticos valorizavam a repetição mecânica, contrariando as ideias descritas nos PCN.

Compreendida a forma que alguns livros abordavam os conceitos de divisão de monômios e polinômios, e percebida a falta de sugestões para o uso de tecnologias e de aulas mais dinâmicas, realizamos a escolha da fundamentação teórica: Materiais Manipuláveis (MM) e Tecnologias (TIC), e a mesclagem de ensino *on-line* e presencial nos fez escolher a utilização do Ensino Híbrido como embasamento teórico para a metodologia.

A escolha do MM e das TIC's se deu pela dinamicidade que proporcionam e pela facilitação da passagem do concreto à abstração. Com o Ensino Híbrido, tive contato na disciplina de *Recursos Digitais e Objetos de Aprendizagem para o ensino de Matemática* durante o mestrado, e resolvemos utilizar o modelo de rotação para que os alunos tivessem a oportunidade de estudar com dois recursos didáticos diferentes, propiciando variadas possibilidades de ensino, com o foco nas necessidades do aluno. Além disso, "aprendemos melhor por meio de práticas, atividades, jogos, problemas, projetos relevantes do que da forma convencional, combinando colaboração (aprender juntos) e personalização (incentivar e gerenciar os percursos individuais)" (BACICH, TANZI NETO, TREVISANI, 2017, p. 42), e por fim, conheci a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) no TCC e também na disciplina *"Introdução à Didática da Matemática"*. Tal teoria possibilita observarmos em quais representações os alunos teriam maior facilidade, além de que as tarefas propostas já proporcionam um misto de representações (algébrico, aritmético, geométrico e língua natural), o que, segundo a TRRS, favorece a aquisição do conhecimento pretendido.

Com tal fundamentação teórica, elencamos como **objetivo** avaliar uma sequência didática para trabalhar as operações de multiplicação e divisão de polinômios, direcionada ao oitavo ano do Ensino Fundamental, elaborada para um ambiente de ensino híbrido, com estações envolvendo materiais manipuláveis e atividades *on-line*. Para tanto, buscamos responder à seguinte questão de pesquisa: "*Trabalhar com estações envolvendo Materiais Manipuláveis e atividades on-line favorecem a aprendizagem de multiplicação e divisão de polinômios?"*

Esta dissertação está estruturada em cinco seções, sendo que a primeira é a introdução, que expõe a escolha do tema e a problemática. A segunda seção é referente à fundamentação teórica, que descreve os Materiais Didáticos Manipuláveis, o uso das Tecnologias e o Ensino Híbrido como Metodologia de Ensino. A seção três é destinada aos procedimentos metodológicos, descrição da coleta de dados, bem como dos sujeitos da pesquisa. A seção quatro é destinada à análise dos dados. E por fim, na seção cinco são apresentadas considerações finais, seguidas das referências. O Produto Educacional referente a esta dissertação encontra-se no apêndice C.

2 UM AMBIENTE DE ENSINO HÍBRIDO

Esta seção traz um levantamento bibliográfico a respeito do uso dos Materiais Didáticos Manipuláveis (MM) e do uso das Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC's), enquanto recursos didáticos que podem ser explorados na sala de aula. Para melhor fundamentar o leitor acerca do ambiente de ensino utilizado nessa pesquisa, na última subseção trazemos o Ensino Híbrido adotado enquanto metodologia de ensino, no qual os MM e as TIC's compõem o Modelo Rotação por Estação.

2. 1 MATERIAL MANIPULÁVEL

Materiais didáticos (MD) são considerados todos os materiais que o professor recorre durante o processo de ensino (NACARATO, 2005; LORENZATO, 2012; COUTINHO, MORAN, 2014), como, por exemplo, giz, calculadora, filme, jogo, transparência, livro, quebra cabeça, entre outros (LORENZATO, 2012).

Possibilitar aulas mais atrativas, de acordo com Oshima e Pavanello (2013, p. 5), é um dos desafios dos professores. A utilização de MD, além de auxiliar como facilitador de aprendizagem "por proporcionar aos alunos a participação em atividades manipulativas e visuais, pode ser de grande importância no processo de ensino e promover a compreensão de conceitos e propriedades matemáticas", mantém as aulas interessantes.

Sendo mais especifico, Passos (2012, p. 78) define MD como "objetos ou coisas que o aluno é capaz de sentir, tocar, manipular e movimentar. Podem ser objetos reais que têm aplicação no dia-a-dia ou podem ser objetos que são usados para representar uma ideia".

Conforme Lorenzato (2012), a utilização de MD vem sendo defendido por vários estudiosos há algum tempo: Comenius, Pestalozzi, Rousseau, Froebel, Dewey, Montessori, Freinet, Piaget, Vygotsky, visto que "pode ser um excelente catalisador para o aluno construir o seu saber matemático" (LORENZATO, 2012, p.21). Passos (2012) enfatiza que, além dos MD requererem o envolvimento físico dos alunos,

> os recursos didáticos nas aulas de matemática envolvem uma diversidade de elementos utilizados principalmente como suporte experimental na organização do processo de ensino-aprendizagem. Entretanto, considero que esses materiais devem servir como mediadores para facilitar a relação professor/aluno/conhecimento no momento em que um saber está sendo construído (PASSOS, 2012, p. 78).

Fazendo referência à definição supracitada, para Passos e Takahashi (2018, p.175) "entende-se que os recursos didáticos podem ser variados e vão desde uma simples embalagem, um livro, até jogos, vídeos, calculadoras, computadores, entre outros", o que exige que o professor seja mais criterioso quanto à escolha, para que os objetivos de ensino sejam alcançados. Entretanto, na concepção de Lorenzato (2012, p. 18), "por melhor que seja, o MD nunca ultrapassa a categoria de meio auxiliar de ensino, de alternativa metodológica à disposição do professor e do aluno, e, como tal, o MD não é garantia de um bom ensino, nem de uma aprendizagem significativa e não substitui o professor", ou seja, mesmo utilizando o material didático, a mediação docente é fundamental, inclusive para estabelecer os objetivos didáticos desse uso.

Ainda, "cabe ao professor conduzir seus alunos a descobrirem, por eles próprios, regularidades, simetrias, proporcionalidades, ordenações, generalizações, dentre outras peculiaridades da matemática" (LORENZATO, 2010, p. 82), os quais podem ser fomentados com a utilização dos MD.

O material manipulável (MM) é considerado um material didático, no qual os objetos e/ou materiais podem ser manipulados pelos estudantes. De acordo com Lorenzato (2012), os materiais didáticos manipuláveis ainda podem ser classificados entre dinâmicos e estáticos. Os estáticos, como o próprio nome sugere, permitem apenas a observação, sem proporcionar a interação do sujeito com o objeto. É o que acontece quando o professor leva o material para sala para expor aos alunos, mas a manipulação é docente. Já os materiais didáticos manipuláveis implicam no envolvimento ativo dos alunos durante a aprendizagem, permitindo, assim, a realização de descobertas com mais facilidade.

Oshima e Pavanello (2013) acrescentam que os MM possuem potencialidades para que os discentes organizem seus pensamentos, podendo, no processo de resolução de problemas e/ou manipulação, construir conjecturas de forma dedutiva, investigar a veracidade e posteriormente validá-las. Proporcionar uma participação ativa dos alunos, mediados com intervenções docentes por meio um ambiente de experimentação, desenvolverá a habilidade do raciocínio lógico, que os ajudará a solucionarem questões não somente da escola, mas também de fora dela.

Piaget (1976) defende que os MM auxiliam na construção do conhecimento científico, principalmente na fase operatório-concreto, que antecede o pensamento abstrato, em que os discentes são altamente dependentes do concreto, sendo um ponto de partida para a passagem do palpável para o abstrato.

Além disso, "na escola, a experimentação é um processo que permite ao aluno se envolver com o assunto em estudo, participar das descobertas e socializar-se com os colegas"

(LORENZATO, 2010, p. 72), e usufruir-se dessa experimentação no ensino corrobora para uma aprendizagem com significado.

Com o intuito de contribuir com professores e alunos, o pesquisador Lorenzato (2012) ainda defende que toda escola deveria conter um Laboratório de Ensino de Matemática (LEM), que seria constituído por objetos, como livros, filmes, jogos, revistas, materiais didáticos, entre outros itens. O LEM forneceria ao professor um local especifico para desenvolver suas atividades, podendo criar ou utilizar os materiais já existentes, “enfim, o LEM, nessa concepção, é uma sala-ambiente para estruturar, organizar, planejar e fazer acontecer o pensar matemático” (LORENZATO, 2012, p. 7). Entretanto, nem sempre é possível ter um LEM na escola e, nem por isso, deve-se desistir de inserir os MM na sala de aula.

Conforme Lorenzato (2010) e Passos (2012), a utilização de objetos pode ser considerada como facilitadora da aprendizagem, além de possibilitar que o aluno aprenda fazendo, pois “a importância da experimentação reside no poder que ela tem de conseguir provocar raciocínio, reflexão, construção de conhecimento” (LORENZATO, 2010, p.72).

Enfim, em concordância com os autores já citados, são várias as potencialidades do MM, tais como: manipulação, reflexão, discussão, ajuda na passagem do concreto para o abstrato, investigação, simulação, criatividade, independência e autonomia, trabalho coletivo entre outros.

2. 2 USO DE RECURSOS TECNOLÓGICOS

Os recursos tecnológicos[1], bem como a sua utilização na sala de aula, é uma das estratégias de ensino de nossa pesquisa para trabalhar com as operações de multiplicação e divisão.

Hoje em dia as tecnologias estão por todos os lugares, como *tablets*, celulares, *notebooks*, computadores de mesa, etc. No âmbito da educação também não é diferente. As escolas geralmente contam com laboratórios de informática, algumas com lousas digitais, livro de registros de classe *on-line*, projetores multimídias, entre outros. Recursos estes que tornam possível ter acesso a qualquer tipo de informação em poucos instantes.

[1]Também chamados de Tecnologias da Informação e Comunicação, tecnologias digitais de Informação e Comunicação, Information and Communications Technology. Entendemos por recursos tecnológicos as tecnologias relacionadas a computadores, sendo eles vídeos, objetos de aprendizagem, softwares ou sites.

Essas tecnologias fornecem informações a todos, inclusive a nossos alunos, e podem ser utilizadas em prol da construção do conhecimento dos estudantes, por meio de interações e experiências, em que o caráter investigativo possa ser explorado, fomentando sua produção de conhecimento.

Entretanto, ao pesquisar no Google acadêmico as palavras chaves do tipo "uso de recursos tecnológicos no Ensino Fundamental", "TIC's no Ensino Fundamental", são poucos os trabalhos com aplicações nesse nível de ensino. Porém, com frequência, encontramos artigos que falam sobre a capacitação de professores para tal utilização.

Os benefícios das tecnologias podem mudar a forma tradicional que o ensino geralmente é concebido. A maneira costumeira é dada em três etapas: ensinar, interagir com a informação e o fazer. Na primeira etapa, o professor fala e o aluno ouve; na segunda, o discente deveria ler, refletir e formar sua opinião. Por fim, na terceira etapa, o estudante deveria utilizar o que aprendeu, na realidade. Entretanto, o uso das tecnologias pode alterar a "estrutura vertical e linear", a qual se refere à forma como o aluno interage com a informação e como o conhecimento é construído. Isto porque os recursos tecnológicos fornecem outros tempos e espaços para a interação entre professor, aluno e informação (KENSKI, 2008).

A Base Nacional Comum Curricular para o Ensino Fundamental (BNCC), em vigência há pouco tempo, estabelece quais competências, conceitos e habilidades essenciais as escolas de rede privada ou pública devem contemplar em seus currículos sendo que para o Ensino Fundamental uma das competências gerais, que está no documento, é

> compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva (BRASIL, 2018, p. 9).

A interação entre o aluno e a informação pode dar-se de algumas formas, tais como: aulas expositivas, livros, revistas, sites, redes sociais, ambientes virtuais, entre outras. Porém, nem sempre há comunicação entre as partes, servindo na maioria das vezes para: disponibilizar a ementa do curso na internet (em ambientes virtuais como o Moodle, por exemplo), bem como os materiais da aula presencial. Neste sentido, tais materiais, embora estejam na internet, além de não serem caracterizados como uma forma de comunicação, não possibilitam um envolvimento ativo, por parte dos alunos (KENSKI, 2008).

A utilização de tecnologias para realizar atividades e tarefas requer envolvimento dos alunos, de modo que os motive e os desafie para que consigam fazer suas próprias descobertas, sempre mediados pelo professor. No "ensino interativo, mediado pelas tecnologias digitais, a participação intensa de todos é indispensável. Cabe ao professor orientar o processo, estimular o grupo para participar e apresentar opiniões [...]" (KENSKI, 2008, p. 14).

Como podemos ver, uma das principais contribuições do uso dos recursos tecnológicos é a mudança no papel do aluno, que passa a ser ativo no processo de aprender, tornando-se construtor do seu próprio conhecimento. Além dos motivos supracitados, a nossa proposta de utilizar tais recursos em uma das estações se deu porque

> Abre oportunidades que permitem enriquecer o ambiente de aprendizagem e apresenta-se como um meio de pensar e ver o mundo, utilizando-se de uma nova sensibilidade, através da imagem eletrônica, que envolve um pensar dinâmico, onde tempo, velocidade e movimento passam a ser os novos aliados no processo de aprendizagem, permitindo a educadores e educandos desenvolver seu pensamento, de forma lógica e critica, sua criatividade por intermédio do despertar da curiosidade, sua capacidade de observação, seu relacionamento com grupos de trabalho na elaboração de projetos, seu senso de responsabilidade e co-participação. (KENSKI, 2007, p. 45)

A tecnologia nos fornece uma dinâmica muitas vezes não encontrada em aulas tradicionais, possibilitando-nos, enquanto professores, e aos alunos, desenvolver habilidades, como autonomia, pensamento crítico, criatividade, bem como a associação de conceitos com a realidade fora da sala de aula. Entretanto, ainda podemos encontrar um grande equívoco por parte de alguns professores, que considera

> [...] suficiente colocar os computadores com algum *software* ligados à Internet nas salas de aula que os alunos vão aprender e as práticas se vão alterar. Sabemos que não é assim. Que consideram que os Media Educativos por si só nunca influenciarão o desempenho dos estudantes. Os efeitos positivos só se verificam quando os professores acreditam e se empenham de 'corpo e alma' na sua aprendizagem e domínio e desenvolvem atividades desafiadoras e criativas, que explorem ao máximo as possibilidades oferecidas pelas tecnologias (MIRANDA, 2007, p. 44).

Realmente, apenas o contato com as tecnologias não resolve todas e nem parte das dificuldades dos alunos, nem mesmo a inserção do laboratório de informática nas escolas seria capaz de suprir os obstáculos da aprendizagem sem propiciar capacitação aos professores e sem a manutenção devidamente necessária. Defendemos que, para além da infraestrutura e da predisposição dos professores, necessitamos de formações constantes para lidarmos com as "novas tecnologias", até porque as mídias eletrônicas são desenvolvidas com muita rapidez; então, o que é novo hoje pode não ser mais amanhã.

Kenski (2008, p. 9) ressalta que, embora as tecnologias estejam auxiliando no processo de ensino e aprendizagem, não são exatamente elas que irão revolucionar a educação e o ensino, mas sim, a forma como estas serão utilizadas pelos professores e alunos. Segundo a autora, “os processos de interação e comunicação no ensino sempre dependeram muito mais das pessoas envolvidas no processo, do que das tecnologias utilizadas, sejam o livro, o giz ou o computador e as redes”.

Esperamos que, com o papel de mediador e não detentor de todo o saber, o professor saiba aproveitar a oportunidade de utilizar as tecnologias para construção do conhecimento do aluno. Nesse sentido, o modelo rotação por estação do ensino híbrido é propicio para o ensino, tendo uma das estações composta pelo uso das tecnologias, no qual exploraremos conceitos de álgebra a partir do *software* GeoGebra[2].

2.3 ENSINO HÍBRIDO

O nome “Ensino Híbrido” origina-se do termo original *blended learning* e refere-se, segundo Horn e Staker (2015), a um programa de educação formal em que o ensino se dá em três etapas, de forma on-line, local supervisionado e de forma integrada.

No Brasil, a oportunidade de utilizar o ensino híbrido surgiu com a regulamentação da Portaria nº 4.059/2004, que permite às instituições educacionais introduzirem a modalidade semipresencial [3], desde que as disciplinas ofertadas não ultrapassem 20% (vinte por cento) da carga horária total em questão.

A palavra *híbrido*, em dicionários *on-line*[4], significa algo composto por elementos diferentes. Segundo Moran (2017, p. 27), a palavra “híbrida” refere-se a diversos espaços, tempos, atividades, metodologias, no qual, pode-se mesclar, combinar, misturar tais itens de maneira a tornar o ensino mais produtivo.

A expressão ensino híbrido, de acordo com Bacich, Tanzi Neto e Trevisani (2017), está relacionada diretamente com a educação híbrida, cuja principal característica é a aprendizagem *on-line*, pois, obrigatoriamente, uma das atividades deve ser ministrada de forma *on-line*, em que se considera o processo de aprendizagem como um ato contínuo, que pode ocorrer em diferentes espaços e diferentes maneiras.

[2]Pelo site https://www.geogebra.org/ é possível encontrar materiais didáticos e baixar o software.
[3] Caracteriza-se a modalidade semipresencial como quaisquer atividades didáticas, módulos ou unidades de ensino-aprendizagem, centrados na autoaprendizagem e com a mediação de recursos didáticos organizados em diferentes suportes de informação, que utilizem tecnologias de comunicação remota.
[4]Dicionários *on-line* Michaelis e Aurélio.

Para Bacich e Moran (2015, p. 1),

> Híbrido significa misturado, mesclado, blended. A educação sempre foi misturada, híbrida, sempre combinou vários espaços, tempos, atividades, metodologias, públicos. Agora esse processo, com a mobilidade e a conectividade, é muito mais perceptível, amplo e profundo.

De acordo com Bacich, Tanzi Neto e Trevisani (2017, p.51) as definições do termo original *blended learning* diferem da forma que o ensino híbrido se propagou na América Latina, Estados Unidos e na Europa. Inicialmente o termo era utilizado para o Ensino Superior, em que se misturava o estudo tradicional, presencial, com o estudo à distância.

Segundo Moran (2017), o ensino híbrido:

> Não se reduz a metodologias ativas, ao mix de presencial, e on-line, de sala de aula e outros espaços, mas que mostra que, por um lado, ensinar e aprender nunca foi tão fascinante, pelas inúmeras oportunidades oferecidas, e, por outro, tão frustrante, pelas dificuldades em conseguir que todos desenvolvam seu potencial e se mobilizem de verdade para evoluir sempre mais (MORAN, 2017, p.29).

Bacich, Tanzi Neto e Trevisani (2017, p.52) acreditam que "a sala de aula tradicional e o espaço virtual tornam-se gradativamente complementares" e essa configuração da sala de aula contribui com a participação ativa, colaborando, interagindo e envolvendo-se com as tecnologias virtuais.

Ainda, segundo Moran (2017), com o uso do modelo híbrido no ensino, tem-se

> o currículo é mais flexível, com tempos e espaços integrados, combinados, presenciais e virtuais, nos quais nos reunimos de várias formas, em grupos e em momentos diferentes, de acordo com as necessidades, com muita flexibilidade, [...] sem os horários rígidos e o planejamento engessado (MORAN, 2017, p.42).

Além disto, sobre os alunos, a personalização nos permite "delinear seu processo de aprendizagem, selecionando recursos que mais se aproximam de sua melhor maneira de aprender. Aspectos como o ritmo, o tempo, o lugar e o modo como aprendem são relevantes quando se reflete sobre a personalização do ensino" (BACICH, TANZI NETO, TREVISANI, 2015, p.51).

E essa é uma das vantagens que pode corroborar para a aprendizagem do aluno, pois como Lima e Moura (2015, p.98) afirmam, utilizar um único caminho para o ensino, exclui várias possibilidades de aprendizados diferentes, mesmo porque se um aluno aprende por meio de vídeo, o outro pode ter uma aprendizagem melhor com uma leitura, e assim, sucessivamente.

Encontrar alunos que não possuem conhecimentos que são pré-requisitos para aprender novos conceitos tem se tornado mais frequente em sala de aula. Por esta razão, a personalização se torna uma importante ferramenta no ensino híbrido (CAVERSAN, 2016). Assim, a utilização de diversos recursos na sala de aula, do ponto de vista de Bacich, Tanzi Neto e Trevisani (2017, p.55), é de grande valia, já que cada estudante tem suas especificidades ao aprender.

Afinal, do que se trata a personalização?

> o termo se refere a uma série de estratégias pedagógicas voltadas a promover o desenvolvimento dos estudantes de maneira individualizada, respeitando as limitações e os talentos de cada um. Ela leva em consideração que os alunos aprendem de formas diferentes e em ritmos diferentes, já que também são diversos seus conhecimentos prévios, competências e interesses (PORVIR, 2018, p. 39).

portanto, ao preparar as aulas, não nos pautaríamos no modelo padrão de ensino, mas sim numa gama de atividades que podemos encaminhar para os alunos, a partir da tecnologia. Em sua dissertação, Caversan (2016) sugere encaminhar arquivos por meio do Google Classrooom[5], links de videoaulas no YouTube[6], ou Formulário Google[7]com listas de exercícios, em que o professor receberá as respostas por e-mail.

Lima e Moura (2015) comentam que a personalização requer a utilização de todas as ferramentas disponíveis, tais como vídeos, leituras, resoluções de problemas, entre outros. De preferência que seja utilizada de forma integrada para que haja uma maior assimilação dos conceitos.

Horn e Staker (2015) defendem a ideia que o ensino personalizado refere-se a aprendizagem adaptada às necessidades particulares de cada estudante. “Uma abordagem personalizada também implica que os estudantes possam ter uma experiência de aprendizagem individual quando necessitam, mas possam participar de projetos e atividades de grupo quando isso for melhor para sua aprendizagem” (HORN, STAKER, 2015, p.9).

Horn e Staker (2015, p.34) acrescentam que a definição de ensino híbrido se dá em três partes: por meio do ensino *on-line*, de local físico supervisionado e de aprendizagem integrada, em que os componentes *on-line* e presencial atuam juntos. Dissertam que o ensino híbrido é caracterizado por ser um programa educacional formal, em que o estudante aprende em parte com o ensino *on-line*, e em parte em um local físico supervisionado, sendo, desta forma, uma aprendizagem integrada, em que o aluno obrigatoriamente tenha algum elemento de controle sobre o tempo, o lugar, o caminho e/ou o ritmo.

---

[5] Salas de aulas virtuais.
[6] Site de compartilhamentos de vídeos.
[7] Plataforma *on-line* que permite criar formulários e receber os dados por e-mail.

Então, nos fica o questionamento: se percebemos que as formas de aprendizagem são diferentes, por que, na maioria das vezes, os professores impõem um único caminho para construir o conhecimento?

No ensino híbrido, o professor possui uma infinidade de combinações. Ele pode, por exemplo, organizar a sua forma de ensinar por meio de estações ou aula invertida, e assim é possível apresentar o mesmo conteúdo de diferentes formas para diferentes tipos de alunos (BACICH, TANZI NETO, TREVISANI, 2017).

Segundo Santos (2017, p.111), "não há apenas uma regra para iniciar a transformação do espaço da sala de aula rumo ao ensino híbrido". Porém, têm-se alguns passos que são fundamentais para isso: avaliação diagnóstica, planejamento das atividades e dos grupos, planejamento do espaço de aprendizagem, integração da equipe escolar e a implementação do mesmo.

Passo 1: avaliação diagnóstica

Antes de realizar qualquer atividade é necessário saber quais os conhecimentos e aptidões prévios dos alunos. Isso, para ser possível iniciar novos conhecimentos.

O ideal, para o ensino híbrido ou não, é que o docente inicie uma nova aprendizagem com uma avaliação diagnóstica, seja por meio de trabalho, observações, avaliações (sejam elas orais ou escritas) que permitam ter noção da bagagem que o aluno traz consigo, bem como as defasagens, caso existam.

Hadji (1994), quando fala sobre avaliação formativa, afirma que a avaliação diagnóstica nos permite explorar características dos alunos que serão relevantes para estipular estratégias que serão tomadas a partir desses resultados. Acrescenta que,

> [...] diagnóstico é a ocasião, por um lado de situar o nível actual das aptidões, das necessidades ou dos interesses de um indivíduo, de verificar a presença de pré-requisitos; mas, por outro lado, é, sobretudo, a ocasião de situar e de compreender as dificuldades sentidas pelo aprendente, tendo em vista a concepção das estratégias de remediação possíveis (HADJI, 1994, p. 62).

Passo 2: planejamento das atividades e dos grupos

Com o resultado da avaliação diagnóstica em mãos, o professor poderá preparar sua aula de acordo com a proficiência dos alunos e propor estratégias para o nível de cognição de cada um e, dependendo desse nível e da quantidade de estudantes no mesmo nível de proficiência, se fará necessário preparar dois ou três tipos de atividades que permitam, caso necessário, suprir a sua defasagem e desenvolver-se no nível adequado para a faixa etária e avançar.

No caso da nossa pesquisa, a avaliação diagnóstica ocorreu por meio de observação dos estudantes e de entrevista com a professora regente, a qual relatou as principais dificuldades e sucessos da turma como um todo, e comentou das especificidades de alguns estudantes. A partir disto, planejamos atividades com MM e *on-line* separadas por níveis de dificuldades. Quanto ao ambiente, seguiu-se a indicação docente de fazer as aulas com MM em um dia e a com atividades *on-line* em outro, pela facilidade de internet (ver detalhes no capítulo 4).

Passo 3: planejamento do espaço de aprendizagem

Com sua aula planejada, o docente já saberá quais equipamentos serão necessários para deixar o ambiente da forma que precisa. A disposição da "sala de aula deve ser pensada para que existam espaços onde cada atividade planejada possa ser realizada" (SANTOS, 2017, p. 112)

O laboratório de informática em que as atividades serão realizadas de forma *on-line* requer a verificação com antecedência, a fim de saber se o mesmo estará disponível e se os computadores/notebooks estão em perfeito estado de funcionamento. Além disso, caso não seja possível utilizar o laboratório, verificar a possibilidade de se poder levar algum computador ou notebook para a sala de aula.

Quanto à disposição da sala de aula, o ideal é que se organizem as carteiras e as estações de forma adequada para a aula que planejou. Ou seja, se foi pensado o momento em grupo para assistir um vídeo, colocar cadeiras ou preparar um tapete para que os alunos consigam assistir; caso tenha sido preparado um momento *on-line*, em dupla, organizar duas cadeiras para o notebook/computador, e assim por diante.

Passo 4: integração da equipe escolar

Ao saber quais espaços necessitará, o professor deve conversar com a equipe escolar para que haja uma parceria entre eles. Principalmente quando, por exemplo, uma das estações será realizada no laboratório de informática - para fazer alguma atividade *on-line* - e outra é na sala de aula. Neste caso, é necessário ter um profissional no laboratório para acompanhar o que os alunos estão fazendo, de acordo com as instruções da estação.

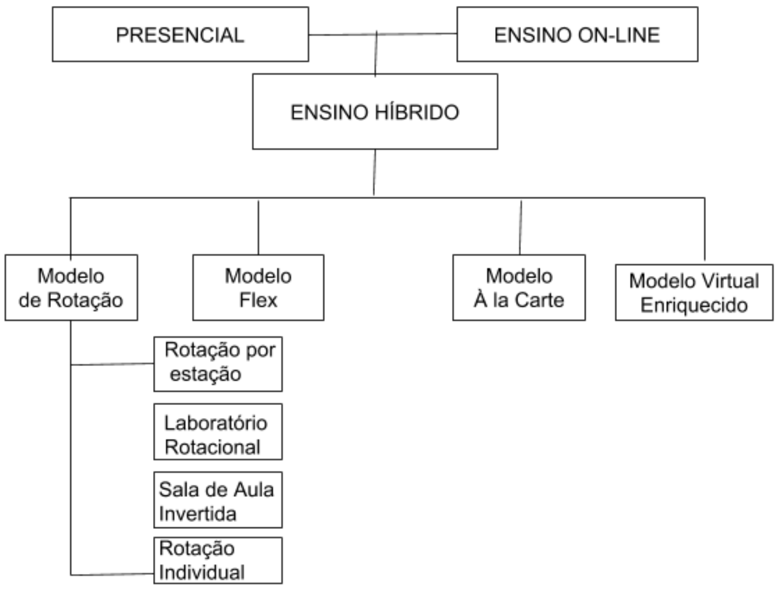
Como na escola que realizamos a pesquisa não havia laboratório disponível, decidimos levar os nossos notebooks para a sala de aula. Porém, como as atividades seriam realizadas de forma *on-line*, nós precisaríamos da rede *wi-fi* e esta não é liberada para os alunos. Logo, tivemos que solicitar autorização da equipe pedagógica e a liberação da senha para conseguirmos utilizá-la.

Passo 5: implementação

Após a conclusão dos passos anteriores, o educador estará pronto para realizar a aplicação de suas atividades, as quais podem ter duração de uma aula ou até mesmo ser uma sequência de atividades durando até mais de uma semana, nos casos de um projeto maior.

Os modelos do ensino híbrido "organizam uma metodologia que engloba diferentes vertentes e que tem como objetivo principal encontrar maneiras de fazer o aluno aprender mais e melhor" (BACICH, TANZI NETO, TREVISANI, 2017, p. 60). O esquema (Figura 1) apresenta algumas dessas propostas para o ensino híbrido:

Figura 1- Modelos de Ensino Híbrido



Fonte: Horn e Staker (2015, p. 38)

No Ensino Híbrido é possível formular diversas propostas, por meio dos modelos existentes, como pode ser visto na Figura 1. Para este trabalho, nós falaremos apenas sobre o modelo de Rotação, por ter sido escolhido para a nossa pesquisa. Entretanto, os outros podem ser encontrados detalhadamente no livro de Bacich, Tanzi Neto e Trevisani (2017): "Ensino Híbrido: personalização e tecnologia na educação".

2.3.1 Modelo de Rotação

Nessa categoria, os estudantes se alternam em uma sequência fixa, ou a critério do professor, entre modalidades de aprendizagem, com um tempo predeterminado. Tais modalidades podem ser compostas por leituras, escritas e indispensavelmente por uma atividade *on-line* (BACICH, TANZI NETO, TREVISANI, 2017; HORN, STAKER, 2015). Geralmente, as atividades colocadas nas estações são visuais, sensoriais e auditivas.

Sua maior característica é que os estudantes aprendem principalmente na escola física, alternando dentro de uma sala de aula ou entre salas, variando a disposição e a organização do espaço.

Iremos falar sobre dois tipos do modelo de rotação: Rotação por Estações e Sala de Aula Invertida, isto porque um deles é a nossa escolha para o trabalho, e o outro, por ser uma opção para trabalhar de forma conjunta ao primeiro modelo.

2.3.1.1 Rotação por Estações

Cada uma das estações é formada por atividades (podendo ser um vídeo, um *software*, MM, entre outras), em que uma delas obrigatoriamente tem que ser uma estação de aprendizagem *on-line*, e há a possibilidade de o aluno ter um acompanhamento mais individualizado, já que eles estarão divididos em pequenos grupos (BACICH, TANZI NETO, TREVISANI, 2015).

De acordo com Bacich, Tanzi Neto e Trevisani (2015, p. 55),

> Os estudantes são organizados em grupos, cada um dos quais realiza uma tarefa, de acordo com os objetivos do professor para a aula em questão. Podem ser realizadas atividades escritas, leituras, entre outras. Um dos grupos estará envolvido com propostas *on-line* que, de certa forma, independem do acompanhamento do professor.

Os estudantes deverão passar por todas as estações realizando as atividades propostas, valorizando os momentos colaborativos e individuais, que devem possibilitar a aprendizagem de formas diferenciadas, já que as estações têm seu objetivo em específico, os quais, juntos, compõem o objetivo geral da aula.

As estações não são sequenciais. Portanto, como independentes entre si que são, os grupos se revezam entre as estações por um período de tempo estabelecido pelo professor.

Na Figura 2 é possível observar uma forma de condução do modelo Rotação por Estação:

Figura 2 – Exemplificação Modelo Rotação por Estação

Fonte: A autora

2.3.1.2 Sala de Aula Invertida

Segundo Horn e Staker (2015, p. 42) esse Modelo de Rotação é o que teve maior destaque pela mídia, isso se deve à inversão das funções normais da sala de aula. A teoria, neste modelo, é estudada em casa, com atividades *on-line*. Neste caso, o que antes era estudado em casa (aplicação e atividades referente aos conteúdos) agora é estudado na sala de aula, e o que era estudado na sala de aula (explicação do conteúdo) agora é estudado em casa.

A tarefa para casa pode ser uma leitura, um vídeo, ou outra atividade que proporcione um momento para refletir sobre o conteúdo, tornando os alunos mais críticos, reflexivos e pensantes, e após estudos, podem chegar com suas dúvidas sobre o conteúdo na sala de aula e esclarecerem.

Além disso, os vídeos podem ser elaborados pelo professor ou podem ser retirados de sites como o YouTube. Um canal que Caversan (2016) cita é o YouTube Edu, que é uma fusão entre a Fundação Lemann e o Google, o qual, na concepção da Fundação, reúne os melhores conteúdos educacionais em altíssima qualidade, de forma organizada. Nesse canal é possível encontrar diversos vídeos, de cunho educativo, subdivididos por matérias.

De acordo com Horn e Staker (2015, p.43):

> Em uma sala de aula invertida, os estudantes têm lições ou palestras on-line de forma independente, seja em casa, seja durante um período de realização de tarefas. O tempo na sala de aula, anteriormente reservado para instrução do professor, é, em vez disso, gasto no que costumamos chamar de 'lição de casa', com os professores fornecendo assistência quando necessário.

De acordo com Horn e Staker (2015), nessa metodologia ainda se aprendem por meio de aulas expositivas, com a diferença que a exposição é feita de forma *on-line*, o que, de certa forma, auxilia na personalização do ensino, visto que é possível disponibilizar materiais diferenciados para os alunos de acordo com o seu ritmo, diferentemente da dinâmica "tradicional" da sala de aula que, muitas vezes, o ritmo da aula não condiz com o ritmo de todos os alunos que ali estudam.

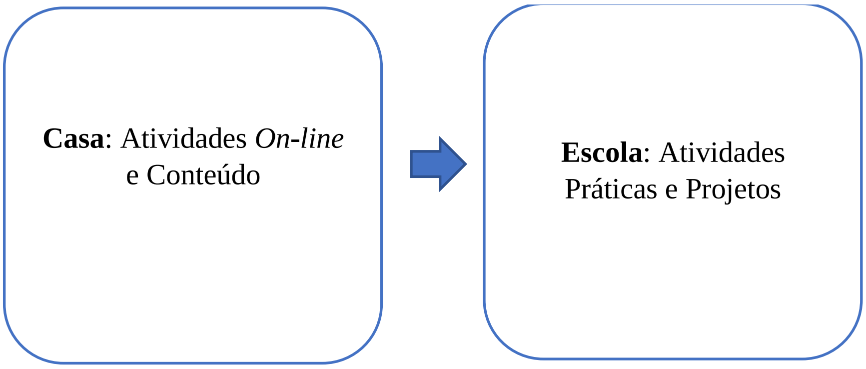
Para o estudo em casa, acreditamos ser necessário verificar quais recursos os estudantes possuem. No caso de ser algum vídeo ou texto *on-line*, verificar se todos dispõem de notebooks, computadores ou celulares com conexão de internet, ou mesmo um laboratório de internet na instituição de ensino, disponível para pesquisa. Isto porque ainda temos realidades de escolas mais precárias, em que nem todos os estudantes possuem internet na sua casa e/ou computadores.

Ainda observamos que, para aqueles alunos que não possuem esse tipo de acesso à internet ou a recursos tecnológicos, o professor e a equipe pedagógica poderiam agendar um horário no próprio laboratório de informática da escola para realizar a dinâmica com todos.

Logo, para esse modelo, pensamos que talvez possa ter uma aplicabilidade melhor no Ensino Superior, já que a grande maioria das instituições possui laboratório de informática disponível, biblioteca com fácil acesso para empréstimos, além das habilidades de autonomia que os alunos já possuem. Ou seja, devido às melhores condições, seria mais propício para este nível de ensino.

A Figura 3 exemplifica o Modelo Sala de Aula Invertida:

Figura 3- Exemplo de Sala de Aula Invertida



Fonte: A autora

Enfim, existe uma gama de possibilidades para o Ensino Híbrido e, apesar dos modelos terem características diferentes, segundo Horn e Staker (2015) e Bacich, Tanzi Neto e Trevisani (2017), há casos de professores que trabalham com essas metodologias integradas, uma a outra. Um exemplo citado por esses autores é que propuseram uma atividade de sala de aula invertida e na aula seguinte foi utilizado o modelo de rotação por estações.

Quanto à organização das atividades referentes a esta pesquisa, optamos por fazer as atividades, com o tempo limitado e com as duas estações no mesmo ambiente: sala de aula (vide capítulo 3), pensando na efetividade dos professores aplicarem em suas aulas, isso porque sabemos que possuem limitações quanto a tempo de aplicação e espaço físico.

Ao pesquisar no Google acadêmico sobre trabalhos que envolvam ensino híbrido no Ensino Fundamental, percebeu-se a escassez de trabalhos que foram aplicados em tal faixa etária. Por vezes, encontramos alguns que falavam da teoria, porém não foi aplicado em sala de aula. Um exemplo disso foi a dissertação de Elíria Heck Hoffmann, com título “Ensino híbrido no ensino fundamental: possibilidades e desafios”, que continha a teoria e apenas um plano de aula como possibilidade de aplicação. Com isso, acreditamos que a presente pesquisa possa contribuir com professores que desejam a inserção do Ensino Híbrido na sala de aula.

Nesse sentido, buscamos propor atividades com o material manipulável e com o *software* GeoGebra on-line, de modo que pudéssemos, além de ensinar, atrair atenção dos alunos, já que, de acordo com o relato da professora regente, uma das características da turma era ser resistente a alguns tipos de recursos, preferindo, muitas vezes, aprender apenas o algoritmo.

Realizadas as considerações teóricas, apresentamos os procedimentos metodológicos da pesquisa e a coleta dos dados.

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Na presente seção, serão descritos os procedimentos metodológicos da pesquisa, o desenvolvimento, a coleta dos dados, os participantes, bem como a aplicação das atividades, o processo de elaboração e a metodologia utilizada.

3. 1 METODOLOGIA DA PESQUISA

A presente pesquisa insere-se na perspectiva qualitativa, em que favorece a compreensão com mais riqueza de detalhes da realidade e seus significados, no qual o ambiente natural é a fonte direta de dados (MINAYO, 2012). Conforme Minayo (2012, p. 626), a pesquisa de cunho qualitativo, "concretiza a possibilidade de construção de conhecimento e possui todos os requisitos e instrumentos para ser considerada e valorizada como um construto científico". Além disto, a nossa função se encaixa na descrição de Bogdan e Biklen (1994, p. 67) em que afirma que "[...] o objetivo principal do investigador qualitativo é o de construir conhecimento". Sendo assim, estamos preocupados no processo da aplicação, com as descobertas e concepções construídas a partir das atividades, e não somente nos resultados finais.

D'Ambrósio (2012, p. 21) acrescenta que a pesquisa qualitativa "[...] é o caminho para escapar da mesmice. Lida e dá atenção às pessoas e às suas ideias, procura fazer sentido de discursos e narrativas que estariam silenciosas".

3.2 O PERCURSO DA PESQUISA

Em um grupo de estudo, realizado na Universidade Tecnológica Federal do Paraná, campus de Campo Mourão, surgiu o questionamento de uma professora da rede particular de ensino sobre como ensinar a divisão de monômios e polinômios, de forma que os alunos tivessem menos dificuldades de aprendizagem.

A partir desse problema, fez-se uma pesquisa bibliográfica na tentativa de vislumbrar alternativas de ensino que pusessem o estudante no papel central desse processo de aprendizagem. Chegamos à utilização de MM e uso de tecnologias, que foram aliados em um ambiente de Ensino Híbrido.

As atividades foram elaboradas (apêndice A) para o nível de ensino pretendido – Ensino Fundamental II, especificamente ao 8º ano. Concluída a parte de elaboração, conversamos com a professora regente, pedindo sua autorização para aplicação, e a solicitação foi acolhida, prontamente.

3. 3 A COLETA DOS DADOS

A dinâmica que havíamos pensado inicialmente não foi possível, pois necessitaríamos de um tempo considerável para a sua realização, e os alunos tinham 6 aulas semanais, das quais apenas nas terças-feiras tinham aulas geminadas. Logo, por indicação da professora regente, fixamos a aplicação nas datas 12, 19 e 26 de junho de 2018, totalizando 6 h, o que possibilitou a coleta dos dados. Por sugestão da professora regente, devido a uma melhor organização da escola para disponibilizar o acesso à internet, no primeiro dia foram trabalhadas atividades com MM; no segundo, as atividades *on-line* e no terceiro, as avaliações[8] (com e sem material), juntamente com um questionário que visava investigar a opinião dos alunos referente aos recursos utilizados na aplicação.

Como aplicaríamos as aulas em três dias, decidimos utilizar conhecimentos anteriores a fim de otimizar o tempo de sala de aula nessa pesquisa. Nos dias da semana que não havia aplicação das atividades referentes a esta pesquisa, a professora regente realizou a correção das questões da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), revisão de adição e subtração de polinômios e avaliação referente a essas duas operações.

Os dados foram coletados por meio da aplicação de atividades, de acordo com os registros nas folhas de suas resoluções. Foram coletados dados, também, por intermédio de um questionário e duas avaliações (uma com o material manipulável e outra, sem).

Para ser possível a coleta dos dados, utilizamos o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TALE), com explicações referentes à pesquisa e ética, assim como, o direito de deixar de participar a qualquer momento. As cópias foram entregues aos alunos juntamente com bilhetes direcionados aos responsáveis em que solicitamos autorizações, e as recolhemos devidamente assinadas.

3.3.1 Os sujeitos colaboradores da pesquisa

Contamos com a participação de uma turma de 8º ano do Ensino Fundamental da rede particular, composta por 8 alunos do sexo masculino, descrita pela própria professora regente

---

[8] Devido à dificuldade de acesso à internet nas salas de aula, não foi possível fazer a avaliação com e sem o uso de tecnologia.

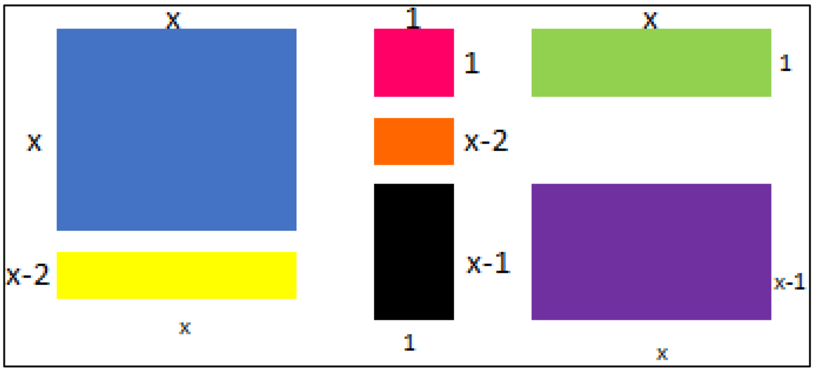
como uma turma totalmente mista, com um aluno medalhista da OBMEP, um estudante com TEA – Transtorno do Espectro Autista (A3), um aluno repetente (A4), aluno medalhista da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (A5), entre outros.

3.3.2A sequência didática

A sequência foi estruturada por níveis de dificuldades, tanto para o MM, quanto para a tecnologia.

O MM é constituído por retângulos de cores diferentes: azul, amarelo, rosa, laranja, preto e verde, com as respectivas áreas: x^2 , $x^2 - 2x, 1, x - 2, x - 1, x, x^2 - x$, como mostram as Figuras 4 e 5. As atividades foram separadas pelos níveis *Easy*, *Medium* e *Hard*, com os dois primeiros níveis contendo duas questões no total e o último, com três questões. Cada nível foi impresso em uma folha, sendo que o aluno recebeu o nível posterior somente após terminar o anterior. Para as atividades *on-line*, os níveis foram: C1, C2 e C3, com o grau de dificuldade sendo aumentado a cada nível.

Figura 4 - Projeto do Material Manipulável



Fonte: A autora

Figura 5– Material Manipulável

Fonte: Protocolo de pesquisa

Dividir as atividades por níveis, nos fez acreditar que os alunos se manteriam mais tempo motivados, visto que ao ver uma quantidade maior de atividades poderia desanimá-los e desmotivá-los.

A sequência didática aplicada pode ser visualizada no Apêndice A.

3.3.3 A aplicação da sequência didática

3.3.3.1 O planejado

O planejamento inicial era de elaborarmos uma sequência didática a ser aplicada em um período de 4 horas. A aplicação seria pautada na rotação por estações do Ensino Híbrido, e dividiríamos os alunos em dois grupos, um que estaria resolvendo atividades com o material manipulável e o segundo fazendo as atividades em computadores.

Pretendíamos aplicar em uma turma de 8º ano do Ensino Fundamental, que imaginávamos ter em torno de 30 alunos (como em uma rede pública de ensino), separando-os em 8 grupos em média, no qual quatro grupos estariam trabalhando com o MM em 4 estações repetidas e os outros quatro grupos estariam trabalhando com atividades *on-line* também em 4 estações repetidas e, depois, faríamos o rodízio dos grupos.

3.3. 3.2 O executado

Com as atividades prontas, nós entramos em contato com uma professora, a mesma que relatou dificuldades no processo de ensino e aprendizagem, para saber se poderia nos ceder alguma turma de 8º ano para aplicarmos tal estudo. Coincidentemente, ela havia começado o conteúdo de adição e subtração de polinômios na mesma semana que entramos em contato e, assim, pudemos dar continuidade com a multiplicação e divisão de polinômios com o material que havíamos preparado.

Em contato com a professora regente da turma e seguindo os horários das aulas de matemática e geometria, a professora sugeriu usar as terças feiras, já que era o único dia com duas aulas geminadas (totalizando 360 minutos), durante o próprio horário regular de aulas.

Por sugestão da professora, a aplicação se deu em dois momentos: um dia (12/06/18) com a resolução das tarefas com material manipulável, e outro momento (19/06/18) com a resolução por meio de atividades computacionais on-line. Esse modo de empreender as estações não é exatamente o que propõe o Ensino Híbrido, que prevê estações simultâneas, entretanto, consideramos que mudar o planejamento inicial não comprometeria a pesquisa em si, por isso, concordamos com a proposta da professora regente. No dia 26 de junho de 2018, nós aplicamos o questionário e duas avaliações (sugestão da professora regente). Uma avaliação em que os alunos pudessem utilizar o material manipulável e outra sem apoio de materiais didáticos. Optamos por não utilizar as tecnologias pela necessidade de estrutura diferente (trazer notebooks e ter que solicitar conexão de internet).

No dia 12 de junho, ocorreu o primeiro momento da aplicação, os oito alunos (A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7 e A8) da turma separaram-se em quatro duplas, por afinidade, as quais foram nomeadas por D1 (A1 e A2), D2 (A3 e A4), D3 (A5 e A6) e D4 (A7 e A8). Antes de entregar a folha de questões, foi explicado no quadro negro como o MM funcionava. Em seguida, o nível *Easy* do MM foi entregue às duplas e, à medida em que elas finalizavam, recebiam o próximo nível.

3. 4 PRODUTO EDUCACIONAL

Sendo um Mestrado Profissional, além da pesquisa, é preciso montar um produto educacional que contribua com o trabalho docente em sala de aula. Para isso, foi elaborado um material didático voltado para professores, que consta no apêndice C. O produto educacional é resultado da reformulação das tarefas que foram aplicadas em sala de aula, e analisadas na dissertação. Todas as questões foram elaboradas pela autora desta pesquisa e direcionadas pela orientadora, inclusive o MM, somente o material no *software* GeoGebra que não é de nossa autoria.

Com ele, o professor pode escolher a turma de aplicação conforme a distribuição de conteúdo nos níveis de ensino, bem como, realizar as alterações que julgar necessário e, assim, ter um material de apoio com potencial de promover a aprendizagem de multiplicação e divisão de polinômios.

4 ANÁLISE DOS DADOS

Iniciamos esta seção apresentando brevemente a fundamentação teórica utilizada nas análises dos dados obtidos, para situar o leitor em relação a alguns termos utilizados. Em seguida, optamos por apresentar as análises em etapas: MM, Tecnologias, Avaliações e Questionário, por se tratar da ordem que a aplicação ocorreu.

4. 1 A TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

A Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) foi desenvolvida por Raymond Duval (2003), resultante de estudos da Psicologia Cognitiva, em que o interesse se dava em conhecer como o aluno adquiria o conhecimento. Segundo o pesquisador

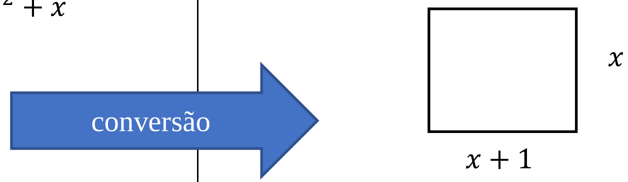
> as representações semióticas são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações que tem inconvenientes próprios de significação e de funcionamento. Uma figura geométrica, um enunciado em língua natural, uma fórmula algébrica, um gráfico são representações semióticas que exibem sistemas semióticos diferentes (DUVAL, 2012b, p. 269).

Um sistema semiótico pode ser considerado registro de representação se permitir as três atividades cognitivas fundamentais: formação de uma representação identificável, o tratamento e a conversão. É somente por meio das representações semióticas, como por exemplo: Língua Natural, Algébrica e Figural, que os objetos matemáticos são acessados.

De acordo com Duval (2003), a utilização de diversas representações facilita a aprendizagem, ou seja, o acesso ao abstrato objeto matemático. A diversidade de registros, na concepção de Duval (2012b, p. 270), aparenta ser "uma condição necessária para que os objetos matemáticos não sejam confundidos com suas representações e possam também ser reconhecidos em cada uma de suas representações".

A teoria de Duval (2012b) fala ainda sobre dois tipos de transformações de representações semióticas: *conversões* e *tratamento.* A *conversão* é considerada uma transformação de representação, na qual se muda o sistema de registro de representação e conserva-se o objeto denotado, enquanto os tratamentos são modificações nas representações, que se mantêm dentro do mesmo registro de representação. Um exemplo de conversão pode ser observado no Quadro 1, em que utilizamos a mesma função, porém representamos de duas formas: algébrica e gráfica. Enquanto um exemplo de tratamento pode ser visto no Quadro 2.

Quadro 1 - Conversão entre registros

Um retângulo de área $x^2 + x$	

Fonte: A autora

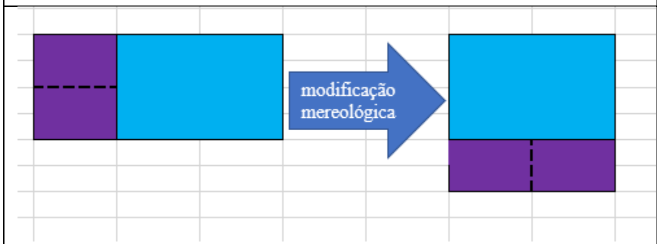
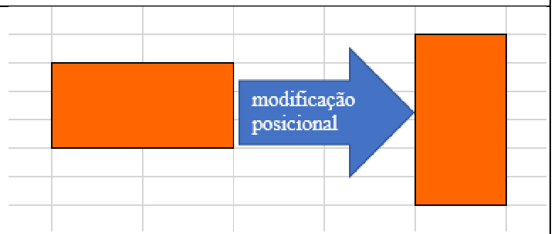
Quadro 2 - Exemplo de Tratamento de RA

$$(x + 1) \, . \, (x + 5)$$
$$x^2 + 6x + 5$$

Fonte: A autora

Para a representação figural, existem possíveis modificações que podem ser feitas com a figura, são as chamadas modificações posicionais e modificações mereológicas. As modificações posicionais são aquelas nas quais podem ser realizadas as operações de translação ou rotação, enquanto as modificações mereológicas são aquelas em que a figura pode ser dividida em partes, como várias subfiguras formando novas figuras (DUVAL, 2012a).

Tabela 1 - Exemplos de Modificações

Modificação mereológica	Modificação posicional
	

Fonte: A autora

4. 2 APLICAÇÃO COM MATERIAL MANIPULÁVEL

Como os alunos já estavam estudando adição e subtração de polinômios, nós decidimos utilizar esses conhecimentos e partir para o conteúdo que eles ainda não haviam estudado, que é o foco da nossa pesquisa: multiplicação e divisão de polinômios. Inicialmente, com divisões exatas. Primeiramente, foi explicado o funcionamento do material manipulável. Foi solicitado que cada dupla registrasse suas respostas na folha entregue da tarefa, inclusive o desenho, antes de passar para a próxima etapa.

Compreendido como o material era composto, explicamos que com as peças que representaria o dividendo, formaríamos sempre o maior retângulo possível, desde que um dos lados desse retângulo representasse o divisor. Solicitamos que para todos os exercícios os estudantes mantivessem os desenhos do retângulo construído; cálculos, raciocínios e rascunhos na folha de resolução, para fins de análise.

Após o momento de apresentação e explicações, entregamos a primeira folha de resolução, chamada de Nível M – *Easy*, composta por duas questões. A primeira questão encontra-se no Quadro 3 e a relação completa das atividades encontram-se no Apêndice A.

Quadro 3 – Enunciado questão 1

1) Com o auxílio do Material manipulável, construa um retângulo com dimensões $x + 2$ e $x + 3$ e determine sua área.

i. Qual a área total obtida?

ii. Explique como você obteve a área total. Escreva o cálculo efetuado (desenhe a figura montada com o material manipulável, indicando as peças utilizadas)

iii. Considerando o cálculo realizado, preencha corretamente os espaços em branco:

$$\frac{\boxed{}}{x+3} = \boxed{}$$

Coloque aqui a expressão que você encontrou para a área

iv. Com base na figura construída com o material manipulável, discuta com seu colega e diga como se deve efetuar a multiplicação $(x + 2) \cdot (x + 3)$. Escreva os passos utilizados para realizar essa operação.

v. Da mesma forma, discuta com seu colega um modo de efetuar a divisão $\frac{x^2+5x+6}{x+3}$.

Fonte: A autora

Na resolução dessa questão, percebemos que todos estavam empenhados em realizar os comandos solicitados. Porém, algumas duplas apresentaram mais facilidades que outras, sendo que a maior dificuldade foi não terem percebido que poderiam rotacionar as peças para obter o retângulo desejado. Tal fator pode ser influenciado pela maneira que os livros didáticos ilustram os retângulos ou até mesmo pelas representações figurais que os professores regentes costumam desenhar.

Duval (2012b) chama a atenção para duas atitudes contrárias que se manifestam em relação à geometria: 1) a apreensão perceptiva, que é imediata e automática e 2) a apreensão discursiva, no sentido de interpretação discursiva dos elementos figurais. A primeira delas é evocada naturalmente a partir do conhecimento do estudante – por exemplo, um aluno que sempre estudou um retângulo com o lado maior na horizontal, terá mais facilidade para reconhecer essa figura nesta posição. Já a segunda requer uma análise mais aprofundada das hipóteses do enunciado; exige uma postura mais crítica em relação aos elementos que compõem a figura. É a partir dessa segunda atitude que os retângulos podem ser reconhecidos, independentemente da posição que eles ocupam. Trabalhar nesta perspectiva deve ser uma postura docente, tendo em vista o aprendizado de conceitos de geometria. Esta deveria ser a abordagem no ensino.

Para Duval (2012b), toda figura pode sofrer alguma transformação, como ser dividida em subfiguras, sofrendo uma modificação mereológica, ou ser transladada e rotacionada, o que caracteriza uma modificação posicional. Foi exatamente na modificação posicional, que alguns alunos tiveram dificuldade de perceber.

Segundo Moran e Franco (2014, p. 125): “Essas possíveis modificações de uma figura inicial e as reorganizações dessas modificações compõem a apreensão operatória, e remetem ao papel heurístico das figuras”.

Outro questionamento que ocorreu durante as primeiras tarefas, foi quanto à soma de monômios, isso porque alguns queriam somar x^2 com x, ou somar $x + x$ e resultar em x^2. Isto nos alerta para o fato que a compreensão dos conceitos de área e comprimento podem não estar devidamente ancorados[9], ou ainda há falta de entendimento do significado para a letra x, nesse contexto. Segundo Pereira e Braga (2012, p. 321), esta dificuldade pode estar atrelada a “professores que privilegiam mais os processos sintáticos (relativos a regras), que semânticos (relativos à interpretação de significados)”. Uma sugestão para o professor é trabalhar com MM já no início do estudo de álgebra. O artigo de Possamai e Baier (2013) traz uma revisão sobre os usos diversos, associados às letras na álgebra, e quais as confusões advindas desse uso (aos interessados, sugerimos a leitura).

Ainda na tarefa apresentada no Quadro 3, todas as duplas conseguiram obter o retângulo desejado (Figura 6). Entretanto, metade dos alunos não conseguiu assimilar que a soma da área

[9] Na concepção de Ausubel, âncoras são os conhecimentos prévios que agregam significado aos novos conhecimentos, armazenando-os de forma adequada em sua estrutura cognitiva.

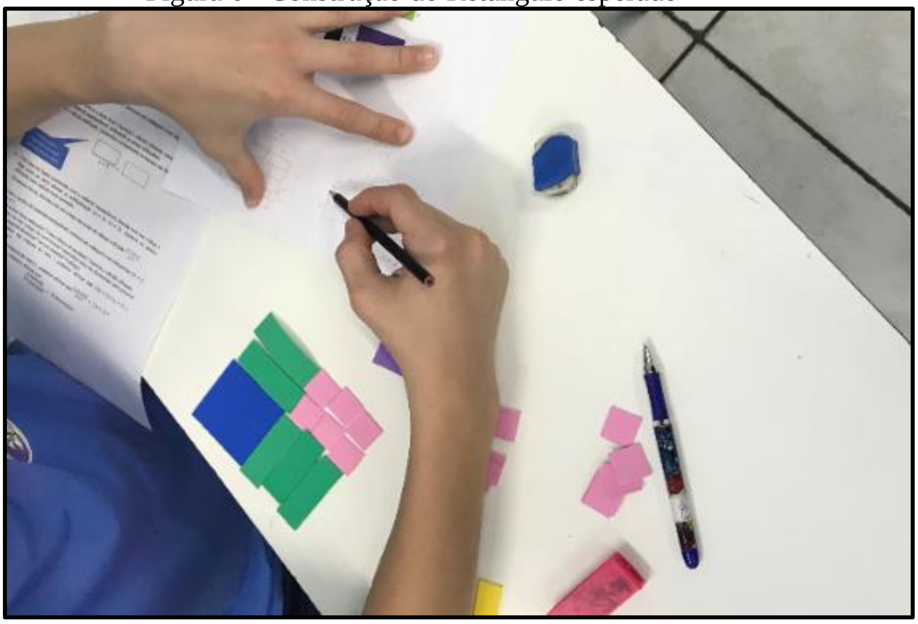
de cada peça resultava na área total do retângulo, precisando da intervenção da pesquisadora, questionando-os:

> PESQUISADORA: *Se você possui cinco retângulos de área x, qual a área de todos os retângulos verdes?*
> Nesse momento esperou os alunos concluírem o resultado.
> PESQUISADORA: *Reserve esse resultado. Agora você tem seis retângulos de área 1, qual a área de todos os retângulos rosa?*
> Os alunos, com as peças em mãos, calculavam a área dos retângulos rosa.
> PESQUISADORA: *Reserve esse resultado também. Por último você tem apenas um retângulo azul de área x^2. O retângulo maior não é a junção de todos os retângulos menores (azul, rosa e verde)?*
> Espera-se os alunos concluírem o resultado
> PESQUISADORA*E você já não possui a área de todos os retângulos menores?*
> ALUNOS: *Sim*
> PESQUISADORA: *Então, o que temos de fazer?*

Feito esses questionamentos, foi perceptível a assimilação de que para obter a área do retângulo construído bastava somar a área de todos os retângulos menores.

Nesse momento, foi também retomada a propriedade distributiva, para que os estudantes pudessem efetuar $(x + 2) . (x + 3)$ e confrontar o resultado com as áreas obtidas na figura.

Figura 6 - Construção do Retângulo esperado



Fonte: Protocolo de Pesquisa

Com o passar das atividades, o aluno com TEA acabou se desmotivando, membro da dupla D2, talvez pelo fato de ter tentado estabelecer algumas relações sugerindo valores para x, o que o companheiro desconsiderou, pois não condizia com o que se pedia no enunciado. Leal (2011) comenta que "muitas crianças autistas apresentam habilidades superiores nas funções do hemisfério direito. Uma possível disfunção no lado esquerdo do cérebro deveria ser compensada pelo lado direito, aparentemente isto não acontece, sugerindo uma disfunção bilateral no autismo”, e o responsável pelo pensamento lógico e cálculos é, de fato, o lado comprometido, o que poderia fazê-lo ter mais dificuldades.

Em todos os níveis da aplicação, intercalamos questões que envolviam a multiplicação e a divisão, com o objetivo de os alunos assimilarem que, por serem operações inversas, se o dividendo dividido por uma dimensão resultava na segunda dimensão, então a multiplicação das duas dimensões resultaria na área total (dividendo).

Um fator que causou estranhamento por parte dos alunos foi o item i. da questão 1, do Nível M- *Hard* (Quadro 4). Isso porque o enunciado falava sobre a construção do maior retângulo e, durante a resolução, eles obtiveram um quadrado, o que, na concepção deles, não se caracterizava como retângulo. Esse tipo de confusão não é comum apenas na Educação Básica, mas também na graduação. É importante atentar-se para essa dificuldade, inclusive para repensar a formação inicial dos professores. A pesquisa de Pirola (2000), que investigou a solução de problemas geométricos, envolvendo figuras planas, áreas e perímetros, com alunos de licenciatura em matemática e do magistério, concluiu um “desempenho sofrível” (p.145), já que numa escala de 0 a 10, as médias de acertos foram, respectivamente, 2,0 e 0,68, o que pode evidenciar as muitas dificuldades por parte de profissionais que entrarão no mercado de trabalho.

Quadro 4 - Enunciado questão 1 (Nível M - *Hard*)

Nível M-Hard

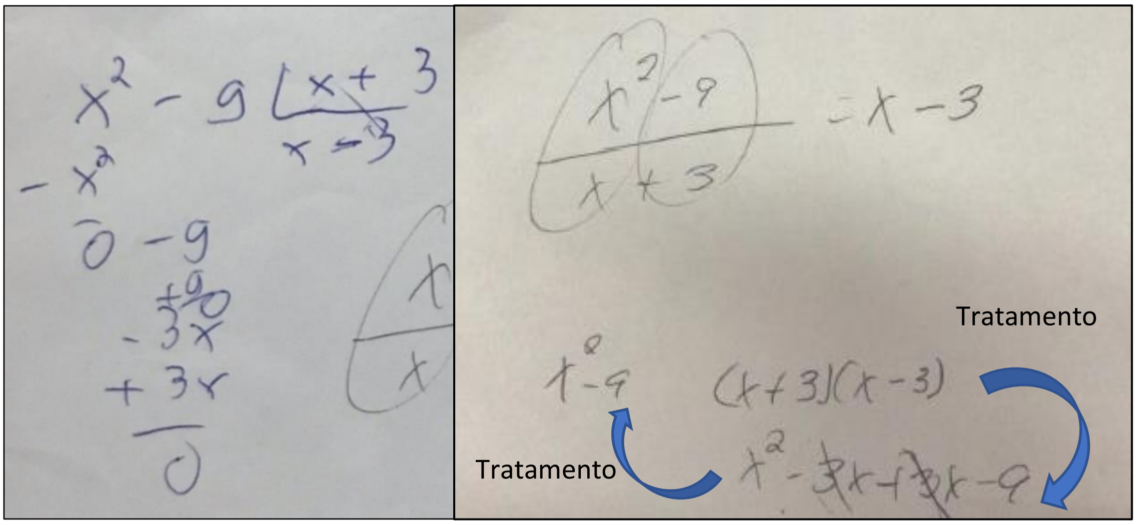
1) Com o Material Manipulável, forme o maior retângulo com as peças que represente o polinômio dividendo, em que uma das dimensões é o polinômio divisor e a segunda dimensão será o valor do quociente. Em seguida, determine os valores das seguintes divisões:

i. $\frac{4x^2+4x+1}{2x+1} =$

Fonte: A autora

Com o decorrer das resoluções, percebemos que, por diversas vezes, os alunos, tanto na resolução em dupla, quanto no momento individual, utilizaram a “prova real” para verificar a veracidade de suas respostas. Na Figura 7, podemos observar o desenvolvimento do A8, que utilizou a prova real, também chamada operação inversa, como recurso para realizar a sua própria correção das atividades, auxiliando-o para ter certeza de que sua resolução estava correta. Quanto às transformações que Duval (2003) cita, podemos observar na Figura 7, que A8 utiliza de tratamentos para efetuar a multiplicação e divisão.

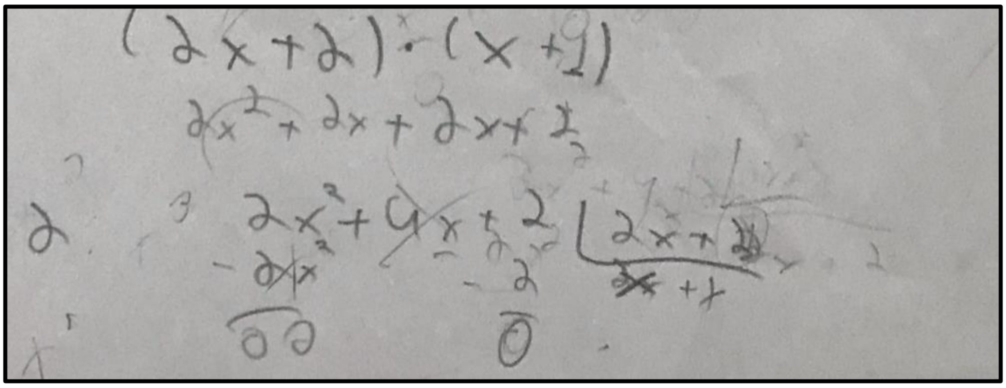
Figura 7 - Prova Real realizada por A8



Fonte: Protocolo de Pesquisa

Após resolverem alguns exercícios do Nível M – *Easy* e Nível M – *Medium*, uma das duplas (D4) conseguiu deduzir a fórmula (algoritmo) da divisão de polinômios, sempre trabalhando tanto com a ida quanto com a volta (operações inversas), recorrendo a uma das três atividades cognitivas fundamentais (tratamento), como pode ser visto na Figura 8. Defendemos que, embora não seja a faixa etária em que se inicia tal conteúdo, o MM pode colaborar para uma abstração de forma mais rápida e eficiente. Neste caso, por meio da experimentação e resolução, os alunos conseguiram resolver de uma forma que só é explorada no Ensino Médio.

Figura 8 - Dedução do Algoritmo pela D4



Fonte: Protocolo de Pesquisa

A dedução do algoritmo é uma das potencialidades que o MM possui. Na concepção de Lorenzato (2012, p. 22) “para se chegar no abstrato, é preciso partir do concreto”, colocando os estudantes frente a uma problemática, motivando-os a resolverem por necessidade, a fim de formar conceitos.

Após algumas curiosidades e observações relatadas, focamos na análise das questões, que, além de classificar os erros e acertos, observamos o tipo de registro que o aluno utilizou, seja uma representação figural, algébrica ou língua natural, bem como seus tratamentos e conversões.

Ao analisarmos os resultados levamos em conta erros e acertos conceituais, e também dos registros das representações que os alunos realizaram. Para realizarmos as análises, separamos as categorias pelas representações utilizadas: Realizou corretamente, representação figural (RF), representação algébrica (RA), representação língua natural (RLN) e não realizou.

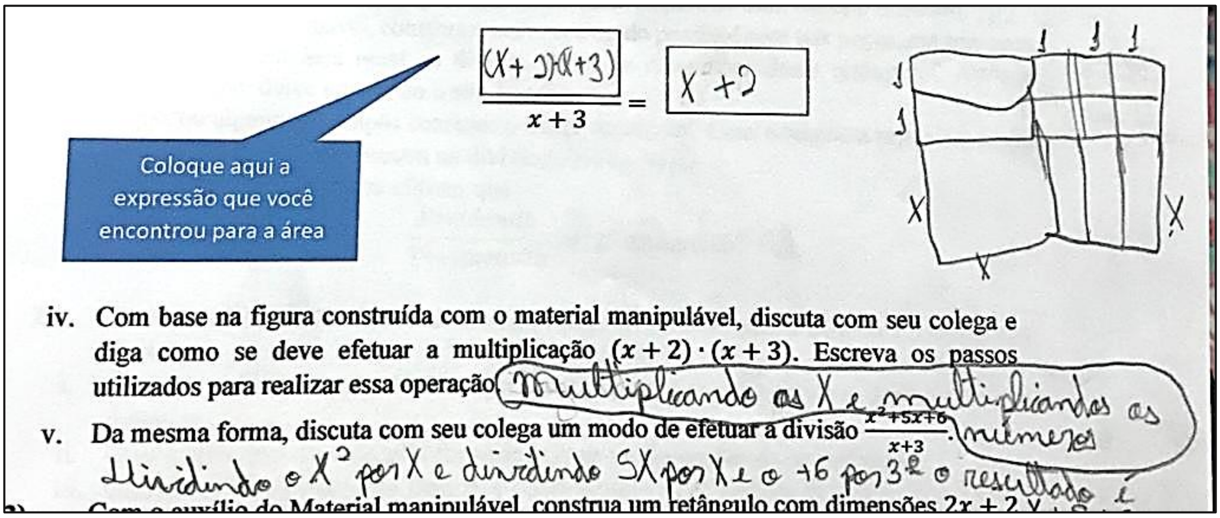
E para além da categorização, procuramos observar a maneira que o aluno construiu e/ou lidou com uma representação semiótica, pois, conforme Vertuan (2007, p. 20), “revela de alguma forma como ele representou essa informação internamente. Saber interpretar a representação produzida pelo aluno pode ajudar o professor a realizar intervenções mais adequadas no seu processo de construção do conhecimento”.

De um modo geral, as resoluções das duplas estão apresentadas nas descrições a seguir.

- **Representação Figural – RF:** Para esta categoria tivemos um total de 18 acertos em 23 resoluções. Entretanto, duas duplas não realizaram a representação figural: D1 em três questões e D2 em duas, o que nos faz reforçar mais uma vez a necessidade de se ensinar fazendo o uso da RF, visto que utilizar a representação em modo de registro figural, pode melhorar o desempenho na resolução de problemas geométricos, pois “as operações que podem ser realizadas nas figuras oferecem o caminho para que o indivíduo encontre soluções e possa expressá-la em termos matemáticos comprovadamente" (MORAN, FRANCO, 2014, p. 126).

A D3 realizou de forma correta o registro da representação figural na questão E_1, acertando a parte figural e algébrica, porém errando a língua natural ao explicar como efetuaram os cálculos para obter a área total: *"Multiplicando os x e multiplicando os números"*, convertendo para a representação algébrica, as palavras da dupla, teríamos que $(x+2).(x+3) = x^2 + 6$, o que difere do seu próprio resultado apresentado com a representação figural que foi $x^2 + 5x + 6$, ou seja, ao realizar uma conversão o aluno indica dificuldades, como pode ser visto na Figura 9.

Figura 9 - RF correta e RLN errada de D3



Fonte: Protocolo de Pesquisa

Percebendo tal dificuldade em conseguir expressar corretamente todas as representações solicitadas e também as conversões que eram necessárias, se vê ainda mais a necessidade de proporcionar situações e enunciados em que seja possível/necessário "dançar" entre as representações, isto porque

> As representações diferentes de um mesmo objeto, não têm evidentemente o mesmo conteúdo. Cada conteúdo é comandado por um sistema pelo qual a representação foi produzida. Daí a consequência de que cada representação não apresenta as mesmas propriedades ou as mesmas características do objeto. Nenhum sistema de representação pode produzir uma representação cujo conteúdo seja completo e adequado ao objeto representado. (DUVAL, 1993, p. 18)

dessa forma, alternar entre os diferentes tipos de registros de representações, realizando conversões pode auxiliar no entendimento do objeto matemático, já que de acordo com Duval (2003) a conversão é uma das atividades cognitivas fundamentais para a compreensão.

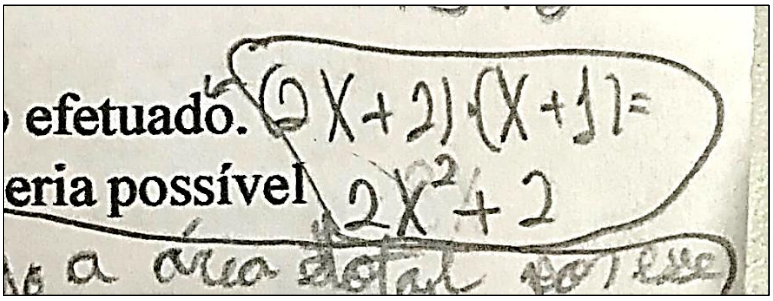
Outro erro cometido pela D3 foi escrever que para efetuar a divisão $\frac{x^2+5x+6}{x+3}$, bastava dividir o "x^2 por x e dividindo $5x$ por x e o 6 por 3". Para que não ocorram erros desse tipo, salientamos o papel do professor que, a todo tempo, deve estar observando as conclusões que os alunos estão realizando.

Ao reformularmos as atividades, levamos em conta exercícios que os alunos confrontem conclusões, que podem ter sido realizadas de forma errada ou não adequadas, como por exemplo: dividir os coeficientes de x^2 e de x do numerador pelo coeficiente de x do denominador e o termo independente do numerador pelo termo independente do denominador.

- **Representação algébrica - RA:** Tivemos 17 questões (de um total de 25) realizadas de forma correta, mostrando um nível de abstração considerável.

A D3 além de errar a RA, mostra dificuldades em conhecimentos básicos, como a propriedade distributiva, pois efetuou a multiplicação $(2x+2).(x+1)$ sendo $2x^2+2$ (como consta na Figura 10), multiplicando $2x$ por x e 2 por 1. Tal resolução mostra que o aluno tem dificuldades em realizar tratamentos.

Figura 10 - Erro de multiplicação da dupla D3

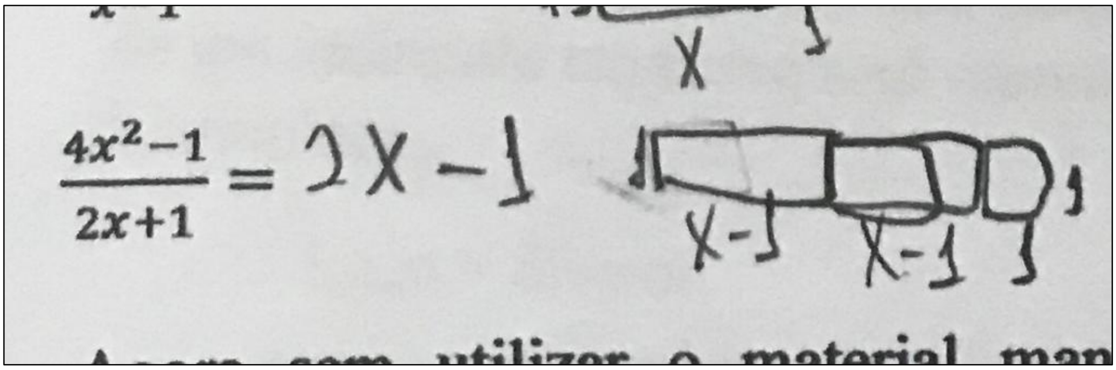


Fonte: Protocolo de Pesquisa

Na concepção de Socas (1997), os tipos de erros advêm de três categorias: de origem em obstáculos cognitivos, da ausência de significado e em atitudes afetivas e emocionais com a Matemática. A segunda categoria ainda pode ser subdividida em outras três categorias: erros de álgebra que tem origem na aritmética, erros de procedimento e erros da álgebra devido às características da linguagem algébrica. Pautando-nos nas classificações de Socas (1997), acreditamos que o erro da dupla D3, advém de uso inapropriado que os discentes fazem das fórmulas ou de regras, que compõe uma das tipologias de erros, visto que usou incorretamente a propriedade distributiva.

A importância das representações também está na necessidade e facilidade que o aluno possui. As duplas D3 e D4, apesar de terem realizado de forma correta a RA, o que poderia ser considerado mais difícil pelo nível de abstração que necessita, mostraram dificuldades em realizar a modificação mereológica, substituindo as peças de lado x que até então era o que estavam utilizando para as peças de lado $x - 1$ na questão H_2 (segunda questão do nível *Hard*), conforme mostra a Figura 11.

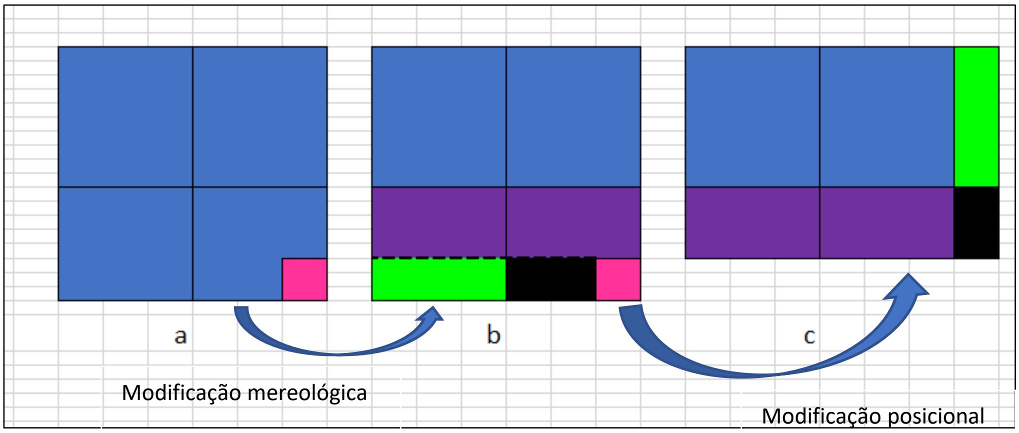
Figura 11 - Acerto de RA e erro de RF



Fonte: Protocolo de Pesquisa

Para conseguir realizar a representação figural, seria necessário o aluno modificar a figura inicial (Figura 12-a) que representava o dividendo ($4x^2 - 1$), dividindo-a em subfiguras. Esse tipo de modificação é o que Duval (2012b) caracteriza como modificação mereológica (Figura 12 – b) e, posteriormente, alterando a disposição das subfiguras (Figura 12 – c). A translação e a rotação que foram realizadas na Figura 12 – c chama-se modificação posicional. De acordo com Duval (2012b), uma das operações que constituem a produtividade heurística da modificação mereológica é a reconfiguração intermediária (também chamada de modificação heurística), que “é um tratamento que consiste na divisão de uma figura em sub-figuras, em sua comparação e em seu reagrupamento eventual em uma figura de um contorno diferente” (DUVAL, 1999, p. 156).

Figura 12 Reconfiguração do retângulo

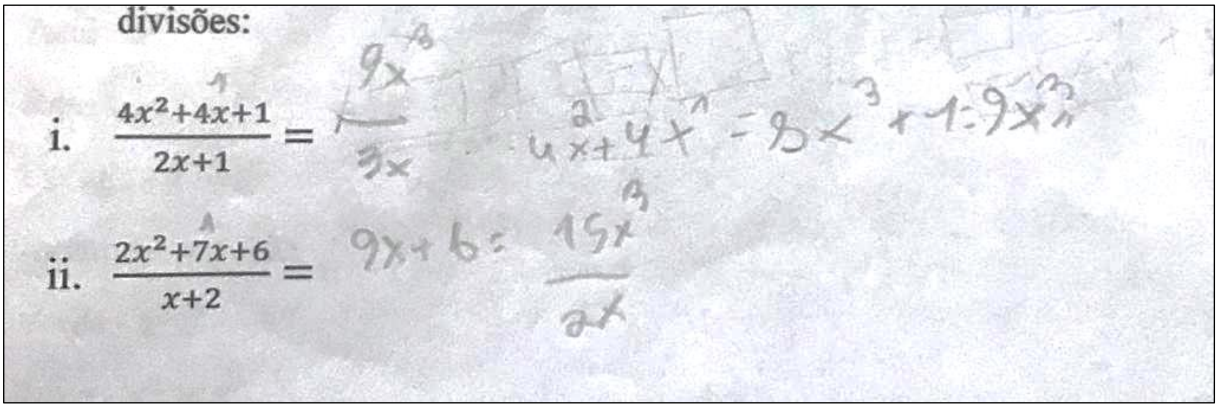


Fonte: A autora

Tivemos três questões em que as duplas não recorreram a RA: a D1 na questão M_1, e a D2 nas questões H_1 e H_2. Brum e Cury (2013, p.47) relatam sobre esses tipos de dificuldades em álgebra, e cita que, de fato, “os procedimentos que fazem parte do cenário algébrico são complexos para muitos estudantes. [...] os alunos precisam utilizar conhecimentos e técnicas, bem como realizar manipulações algébricas às vezes sofisticadas”, como pode ter ocorrido no caso dessas duplas, que não as realizaram.

Além desse motivo, por ser um “momento de ruptura com conceitos e procedimentos já internalizados pelos alunos” (CURY, KONZEN, 2006, p.3), a transição do raciocínio aritmético para o algébrico requer mais atenção, como no caso de D1, que pode ser observado na Figura 13, em que mostra dificuldades ao somar polinômios, resolvendo:$(4x^2 + 4x = 8x^3 + 1 = 9x^3)$, ou seja, para essa dupla bastava-se somar todos coeficientes e o termo independente$(4 + 4 + 1 = 9)$ e multiplicar x^2 por x que é igual a x^3 e multiplicar os dois resultados: 9 por x^3 (vide Figura 13).

Figura 13 - Resolução de D1



Fonte: Protocolo de pesquisa

- **Representação Língua Natural - RLN:** com exceção dos alunos que realizaram de forma correta os exercícios, não houve dupla que errou outro tipo de representação e que tenha acertado a língua natural. Em um total de 24 questões resolvidas com o auxílio da RLN, 13 foram resolvidas corretamente. As duplas D1, D2 e D4 em nenhuma das questões utilizaram RLN.

A dificuldade de responder uma questão com a LN pode ser justificada pelo fato de que, em geral, as tarefas matemáticas são resolvidas por meios algébricos ou numéricos e apenas um resultado, algébrico ou numérico é apresentado, ou seja, os alunos não têm o hábito de utilizar esse tipo de representação na resolução de tarefas matemáticas. Barbosa (2018) relata as dificuldades dos alunos em justificar-se pela RLN, sendo necessário muito incentivo para que o medo de errar não prevalecesse e eles pudessem criar o hábito de escrever também na disciplina de matemática.

A resenha do livro “Matemática e língua materna: análise de uma impregnação mútua”, de Nilson José Machado, realizada pelo professor da Unisul Gregório Antônio Constantino fala sobre a abdicação do uso da língua materna na Matemática:

> No ensino da Matemática, a inexistência de uma oralidade própria não possibilita alternativa senão as seguintes: circunscrever aos limites da aprendizagem de uma expressão escrita, abdicando-se da expressão oral, o que parece tão natural quanto abdicar do uso das pernas para caminhar; ou, então, fazer comungar decisivamente com a Língua Materna, compartindo sua oralidade e, em decorrência, impregnando-se dela de uma forma essencial (CONSTANTINO, 2001, p. 1).

A dificuldade dos alunos em expressar-se pela Língua Natural pode ser fruto da forma que a Matemática vem sendo ensinada. Machado (1993) afirma que a linguagem matemática está sendo utilizada demasiadamente na disciplina de matemática, esquecendo que a língua materna e a matemática deveriam ter uma relação intrínseca para evitar dificuldades de aprendizagem.

- **Não realizou:** para esse caso, consideramos as questões que estavam totalmente em branco, sem nenhum tipo de resolução.

A única dupla que se enquadrou foi a D2, nas questões H_2 e H_3, e, como dito anteriormente, um dos componentes já estava desmotivado (o aluno com TEA), pela falta de interesse e/ou dificuldade em se concentrar nas atividades. Talvez isso se deva ao fato de que as questões do nível *Hard*, com subtração, eram mais difíceis de visualizar.

Além disso, alunos com TEA possuem mais dificuldades com abstrações, sendo necessária a utilização de recursos didáticos, como o MM, com frequência na sala de aula. Tal fato acarreta sobre o professor uma maior responsabilidade no que diz respeito às variadas metodologias a serem utilizadas em uma sala de aula mista.

Duval (2003, p. 21) reforça que os fracassos ou bloqueios “aumentam consideravelmente cada vez que uma mudança de registro é necessária ou que a mobilização simultânea de dois registros é requerida”, o que pode ter sido o caso da D2, já que as questões solicitavam o registro das representações figural e algébrica.

Em síntese, as duplas que apresentaram maior facilidade na RA foram D3 e D4, enquanto que a dupla que apresentou maior dificuldade foi D2. Quanto à RF, a D1 manifestou mais dificuldades, e a dupla D3, maior facilidade, comparando-se às outras duplas. E, por fim, na RLN, D4 demonstrou mais facilidade; em contrapartida, D1 e D2 obtiveram maiores dificuldades. No geral, percebemos que as duplas recorreram mais vezes à RA, seguido da RLN e RF, enquanto o desempenho foi melhor na RF, seguida por RA e RLN.

Com base nas análises dos erros e acertos, percebemos que as atividades propostas possuem potencialidades para contribuir na construção do conhecimento referente não somente a divisão, mas a outras operações, se trabalhado com uma quantidade razoável de questões e com variedade de representações. Tais atividades podem direcionar os alunos a encontrar padrões e chegar a fórmulas por meio de experimentações.

4. 3 APLICAÇÃO DO GEOGEBRA

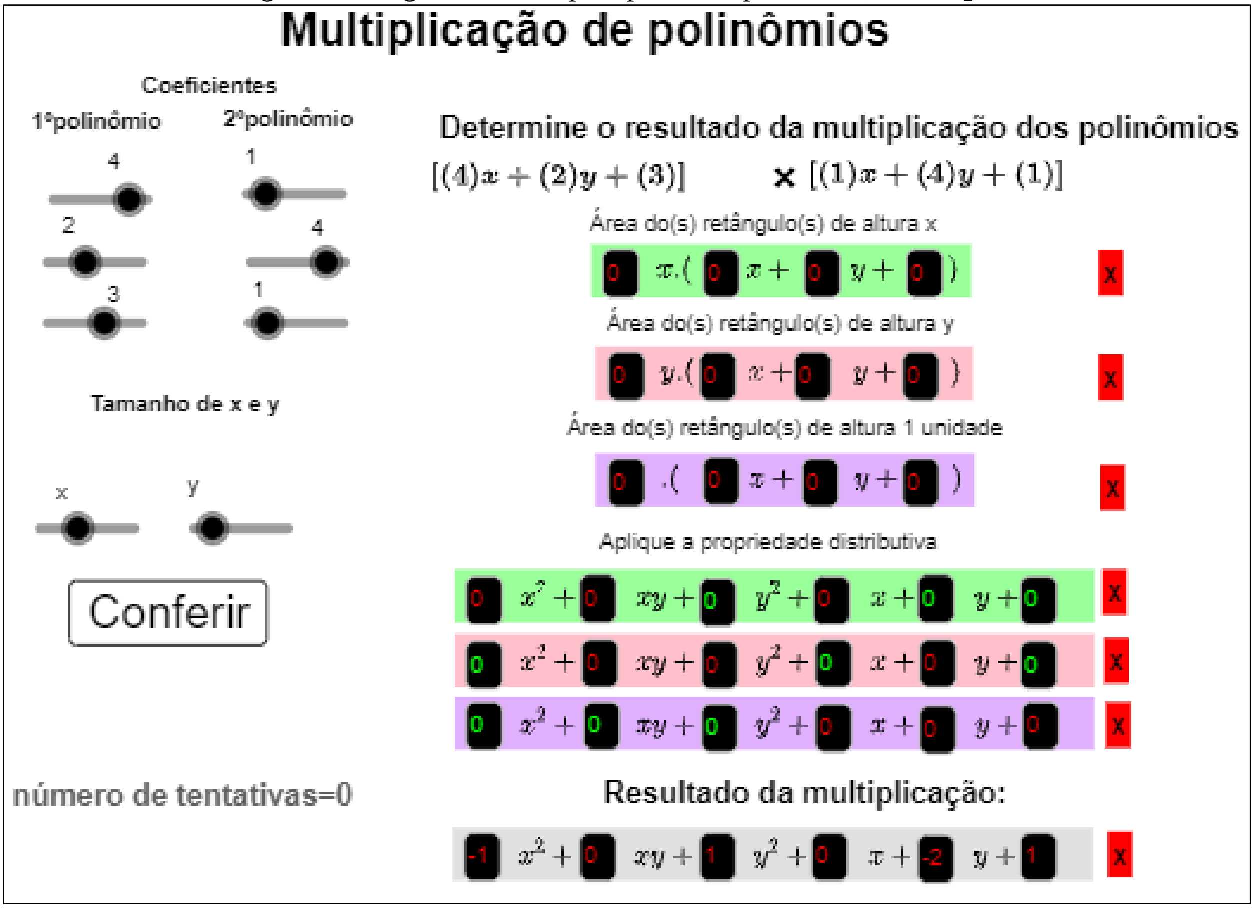
Para aplicação da atividade *on-line*, inicialmente apresentamos as instruções sobre os comandos básicos que estavam contidos na página, necessários para o desenvolvimento das atividades e construção dos retângulos.

Para a parte *on-line* utilizamos dois níveis, de acordo com dois arquivos: um específico para divisão, e outro, para a multiplicação, os quais foram desenvolvidos por Dirceu Scaldelai (2018) e estão disponibilizados em https://www.geogebra.org/u/dscaldelai, juntamente com outros materiais, inclusive sobre monômios, adição de polinômios e outros arquivos para o Ensino Superior.

Para o Nível C1, no arquivo específico para a multiplicação (https://www.geogebra.org/m/u5jvA2eM) há uma explicação com algumas instruções e, assim como o Material Manipulável, o *software* trabalha a multiplicação com base na área de um retângulo.

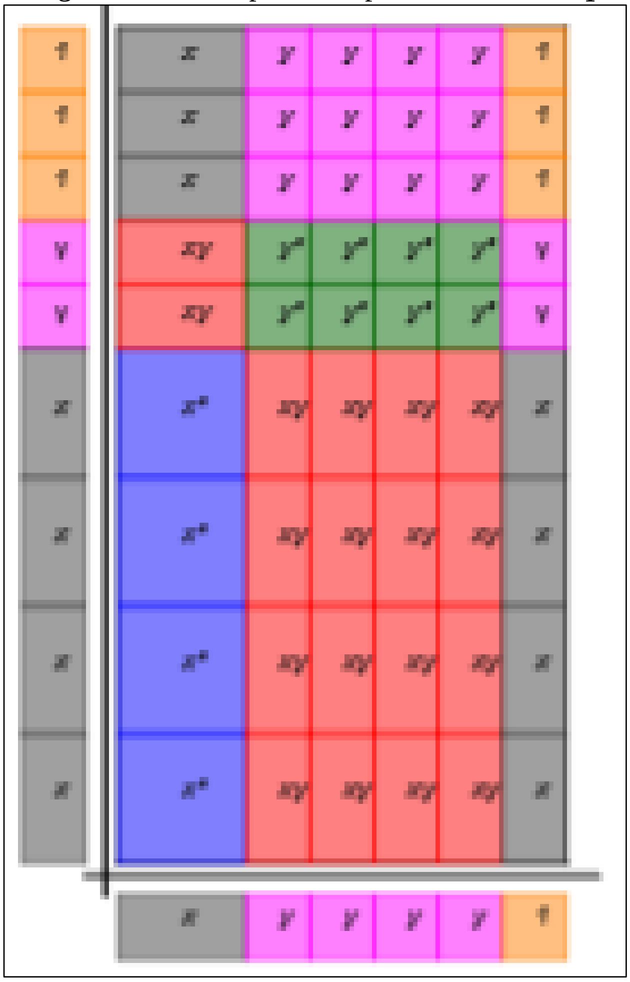
Os comandos que estão disponíveis e que podem ser alterados pelos alunos são os coeficientes do 1º e 2º polinômio (na forma $ax + by + c$) que, no nosso caso, o coeficiente b foi sempre 0. Conforme alteramos os coeficientes, a representação do retângulo se altera e o resultado da multiplicação é dado pela área do retângulo que é formado com os coeficientes (Figura 14 e 15).

Figura 14 - Página utilizada para parte computacional, nível C_1



Fonte: https://www.geogebra.org/m/u5jvA2eM

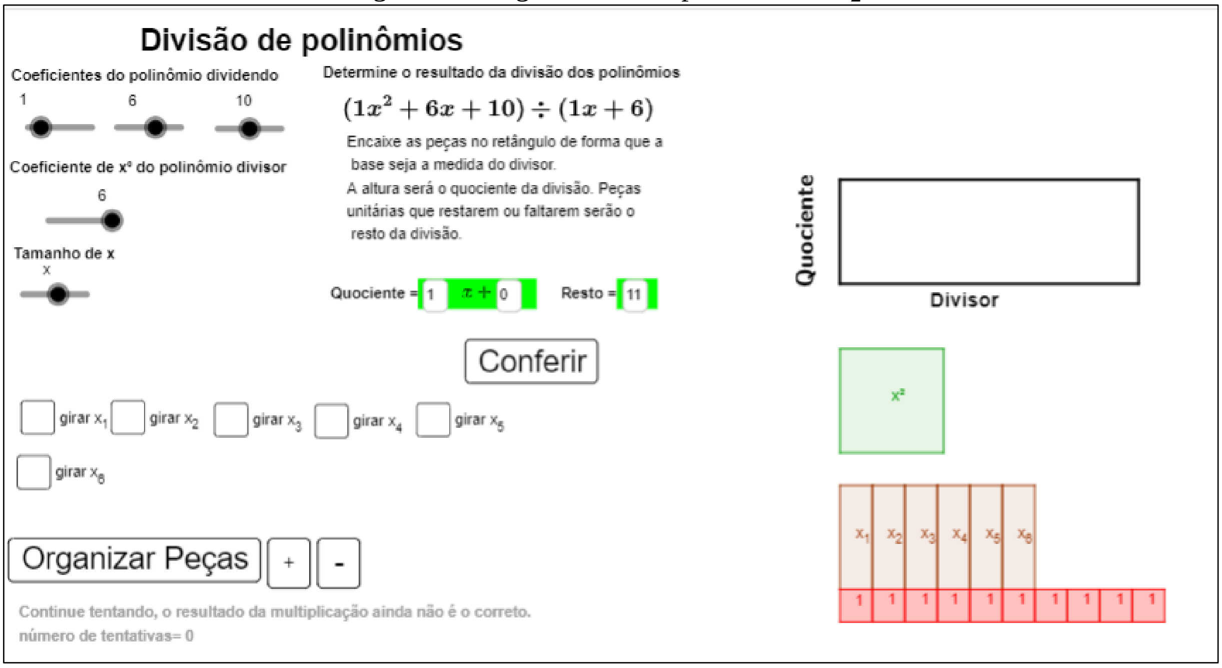
Figura 15 - RF da parte computacional, nível C_1



Fonte –https://www.geogebra.org/m/u5jvA2eM

Para o Nível - C2 solicitou-se o acesso à página https://www.geogebra.org/m/fcb2eZuC (Figura 16).

Figura 16 - Página utilizada para o Nível C_2



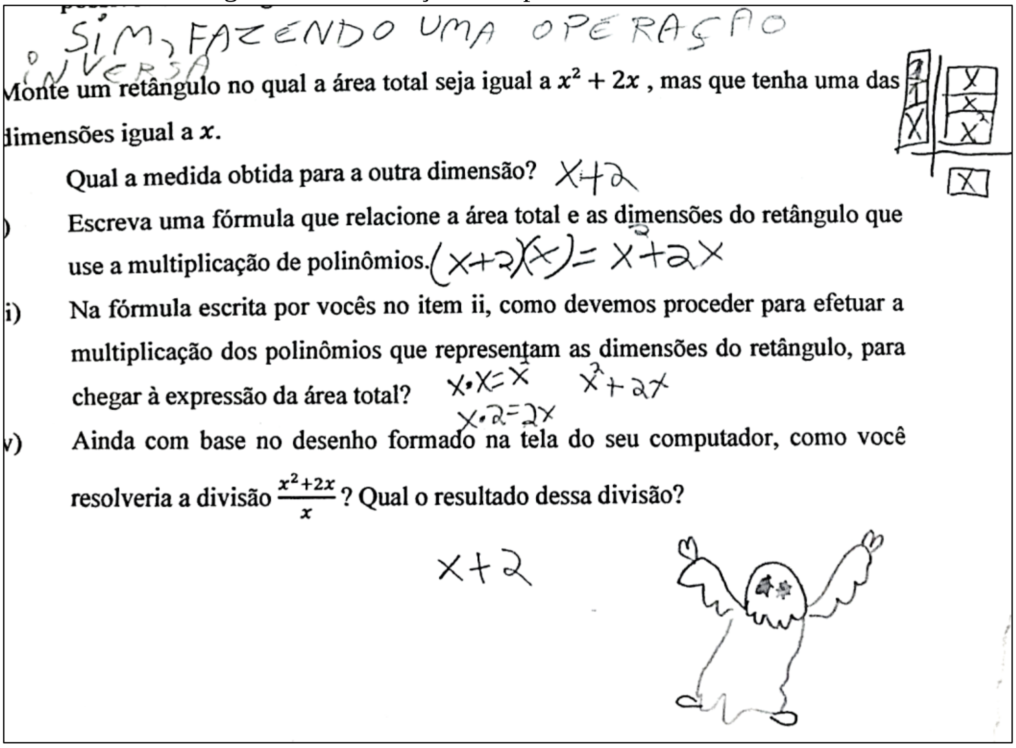
Fonte: https://www.geogebra.org/m/fcb2eZuC

As respostas das tarefas (vide apêndice A) foram categorizadas de acordo com as representações utilizadas.

- **Representação Algébrica – RA:** com exceção da D1 que não realizou as questões 2, 3 e 4 do nível C_2, todas as duplas realizaram a RA.

Observando a aplicação das atividades computacionais, foi possível perceber uma motivação maior, por parte da D2, deixando de responder corretamente apenas uma questão, obtendo êxito em todas as resoluções, como pode ser visto na Figura 17. A mudança de ânimo para realização pode ter se dado pelo fato de ser aplicado em outro dia e, até mesmo, pelo fato de ser um material computacional, já que, entre os jovens, os celulares e computadores são aliados do dia a dia. Ou seja, o interesse pelo recurso pode ter acarretado melhores resultados. O uso anterior do MM pode ter influenciado na facilidade em resolver essa atividade proposta agora em outro ambiente, realizando até conversões do RA para RF e tratamentos dentro do registro algébrico e conversão do RA para RF.

Figura 17 - Resolução Computacional de D2


SIM, FAZENDO UMA OPERAÇÃO INVERSA

Monte um retângulo no qual a área total seja igual a $x^2 + 2x$, mas que tenha uma das dimensões igual a x.

Qual a medida obtida para a outra dimensão? X+2

Escreva uma fórmula que relacione a área total e as dimensões do retângulo que use a multiplicação de polinômios. (X+2)(X)= X²+2X

Na fórmula escrita por vocês no item ii, como devemos proceder para efetuar a multiplicação dos polinômios que representam as dimensões do retângulo, para chegar à expressão da área total? X·X=X² X·2=2X X²+2X

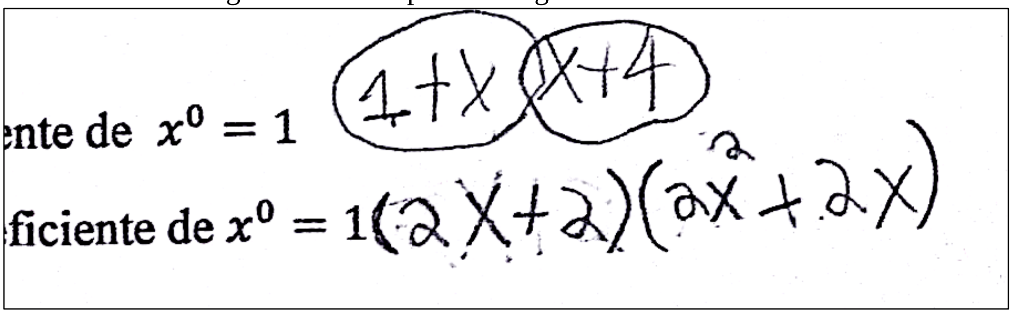
Ainda com base no desenho formado na tela do seu computador, como você resolveria a divisão $\frac{x^2+2x}{x}$? Qual o resultado dessa divisão?

X+2

Fonte: Protocolo de pesquisa

Na questão, era dado o polinômio dividendo, sendo $x^2 + 5x + 6$, a dupla D2 considerou as dimensões do retângulo sendo $x + 1$ e $x + 4$. Provavelmente não ficou esclarecida uma parte dos conceitos, visto que o polinômio $x^2 + 5x + 6$, para a dupla, é equivalente a $(x + 1)(x + 4)$, como pode ser observado na Figura 18. Provavelmente ela somou 1 e 4 para obter o $5x$ e desconsiderou o 6. No caso dessa dupla, se o *software* disponibilizasse os campos para preenchimento, como no material de multiplicação, talvez fosse possível que os alunos percebessem que a decomposição que realizaram foi inadequada. Outro quesito que possivelmente evitaria o erro da D2 seria se a mesma tivesse realizado o tratamento do registro algébrico:$(x + 1)(x + 4) = x^2 + x + 4x + 4 = x^2 + 5x + 4$.

Figura 18 - Exemplo da categoria não realizou RLN


nte de $x^0 = 1$ 1+X X+4

ficiente de $x^0 = 1$ (2X+2)(2X²+2X)

Fonte: Protocolo de pesquisa

- **Representação Figural - RF:** no total, foram vinte e quatro questões corrigidas, com 6 sem a representação figural (D1 com as questões 2,3 e 4 do nível C_2, D2 com a questão 3 do nível C_2, e a D3 com as questões 2 e 3 do nível C_2), com15 acertos(D2 nas questões 1 e 2 do C_1 e 1,2 e 4 do nível C_2; D3 nas questões 1 e 2 do C_1 e 1e 4 do nível C_2; e por fim a D4 em todos os exercícios) e 3 erros (D1 nas questões 1 e 2 do C_1 e 1 nível C_2).

Sobre utilizar representações figurais em tecnologias, Duval (2011) relata que

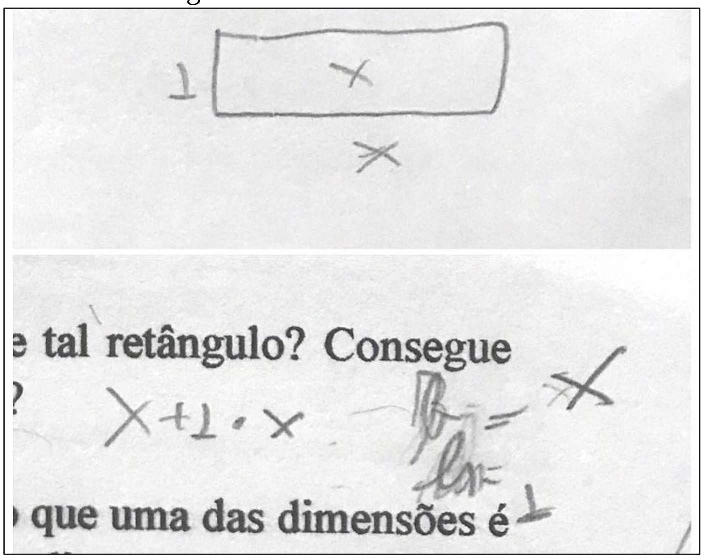
> [...] as representações que eles exibem são as mesmas que aquelas produzidas graficamente no papel para uma apreensão visual. Ver uma figura geométrica no monitor ou vê-la no papel exige que nosso olhar faça a mesma desconstrução dimensional [...] No entanto eles constituem um modo fenomenológico de produção radicalmente novo, fundamentado na aceleração de tratamentos [...] (DUVAL, 2011, p. 137)

Ainda na concepção de Duval (2005), os *softwares* permitem acelerar tratamentos da figura,

> As figuras se exibem no monitor tão rapidamente quanto à produção mental, mas com uma potência de tratamentos ilimitados em comparação com as possibilidades da modalidade gráfico-visual. Obtemos, imediatamente, muito mais que tudo o que poderíamos obter à mão livre após, talvez, vários dias de escritas e cálculos ou construção de figuras (DUVAL, 2011, p. 37).

Um exemplo de RF correta foi a resolução da D4 que, embora tenha acertado a representação do retângulo e as dimensões corretas, equivocou-se ao representar algebricamente a multiplicação para determinar a área (vide Figura 19), contudo, mesmo com o erro, o aluno conseguiu realizar a conversão para RF.

Figura 19- Acerto de RF



Fonte: Protocolo de Pesquisa

- **Representação Língua Natural - RLN:** na subseção de MM, foi comentado sobre a dificuldade em obter resposta na linguagem natural dos alunos. Já na aplicação com tecnologia, a D1 teve maior facilidade de responder nessa representação, comparado a RF e RA. Portanto, acreditamos que se os professores sempre solicitarem aos alunos o desenvolvimento também pela RLN, poderiam se obter melhores resultados, proporcionando a possibilidade do aluno se expressar sem, necessariamente, ser por meio de cálculos.
- **Não realizou:** para esse caso, consideramos as questões que estavam totalmente em branco, sem nenhum tipo de resolução.

Nesse agrupamento a dupla existente é a D1 com três questões: 2, 3 e 4 do nível C_2 .

Durante a aplicação, ao ligar o notebook, um dos alunos da dupla D1 tinha esquecido a senha e não conseguia "*logar*" o sistema. Então, foi cedido outro notebook para a realização das atividades. Porém, no decorrer das resoluções, um dos integrantes da dupla estava mais preocupado em conseguir acertar a senha do que em realizar as atividades, o que pode ter favorecido o mau desempenho da dupla, nessa fase.

No Quadro 5, é possível observar um comparativo entre a quantidade de vezes que os alunos recorreram às representações algébrica, figural e a língua natural; qual dupla apresentou maior dificuldade no registro, bem como a quantidade de acertos dessas resoluções.

Quadro 5 – Comparativo dos MM e das TIC's

APLICAÇÃO MM				
	Quantidade total de questões	Quantidade de vezes que recorreram à representação	Quantidade de Acertos	Dupla com maior dificuldade em utilizar essa representação
RA	28	25	17	D2
RF	28	23	18	D1
RLN	28	24	13	D1 e D2
APLICAÇÃO TIC's				
	Quantidade total de questões	Quantidade de vezes que recorreram à representação	Quantidade de Acertos	Dupla com maior dificuldade em utilizar essa representação
RA	24	21	15	D1
RF	24	18	15	D1
RLN	24	19	18	D1

Fonte: A autora

Após os dois dias de aplicação e a análise dos dados, percebemos que as duplas recorreram mais vezes à representação algébrica durante as aplicações do MM e das TIC's. Foi possível observar, também, que os alunos recorreram menos vezes às representações figurais e língua natural na estação das tecnologias, comparado ao MM.

Sobre as resoluções que os alunos realizaram, houve um melhor rendimento nas atividades das TIC's, tendo um crescimento considerável na representação algébrica, uma queda no registro figural e um crescimento elevado no rendimento da língua natural que, embora tenham recorrido menos vezes, obtiveram melhores resultados que no MM.

Não encontrar erros referentes à multiplicação foi uma melhora que pudemos observar nos resultados do *software*. Isso pode ter ocorrido por já estarem com o raciocínio mais apurado, já que tiveram contato anterior com o MM sobre o mesmo assunto. Além disso, Romero (2006) acrescenta que,

> A tecnologia, especificamente os *softwares* educacionais disponibiliza oportunidade de motivação e apropriação do conteúdo estudado em sala de aula, uma vez que em muitas escolas de rede pública e particular, professores utilizam recursos didáticos como lousa e giz para ministrarem suas aulas, este é um dos diversos problemas que causam o crescimento da qualidade não satisfatória de ensino [...]. (ROMERO, 2006, p.1)

4. 4 AVALIAÇÕES

Antes do início da aplicação, a professora regente relatou que teria que avaliar os alunos ao concluir o conteúdo, de maneira a compor a nota trimestral. Assim, a mesma sugeriu realizar a avaliação em dois momentos, um com acesso ao material e no segundo sem nenhum acesso. Entretanto, o recurso do primeiro momento da avaliação restringia-se apenas ao MM, devido a burocracia de se conectar à internet e a necessidade de trazer notebook - o que reduziria o tempo. Decidido como iríamos proceder nos dois momentos, estabelecemos que, ao invés de realizarmos tal atividade em dupla, como feito durante as atividades, aplicaríamos uma avaliação de forma individual (vide Apêndice B).

4. 4. 1 Resultados obtidos na avaliação com material manipulável

Para análise, utilizamos as mesmas categorias que o MM e também o *software*:

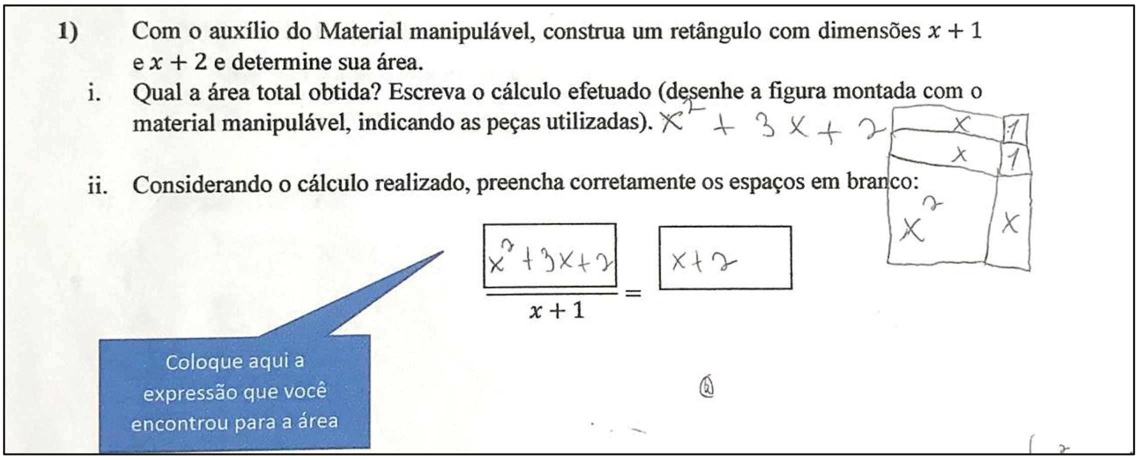
- **Representação Algébrica – RA:** das 24 questões corrigidas, a parte algébrica de 16 estavam corretas.

Os alunos A1, A2, A7 e A8 acertaram todas as questões da avaliação; os alunos A3 e A4 acertaram apenas a questão 1; os alunos A5 e A6 acertaram a questão 3.

Na 1ª questão (Figura 20), seis dos oito alunos acertaram a área do retângulo que construíram (seguido do desenho da disposição das peças que utilizaram e completando os espaços em branco do item ii).

Na Figura 20, podemos observar a resolução de A1. Os demais alunos resolveram de forma semelhante a esta.

Figura 20 - Resolução de A1


1) Com o auxílio do Material manipulável, construa um retângulo com dimensões $x + 1$ e $x + 2$ e determine sua área.

i. Qual a área total obtida? Escreva o cálculo efetuado (desenhe a figura montada com o material manipulável, indicando as peças utilizadas). $x^2 + 3x + 2$

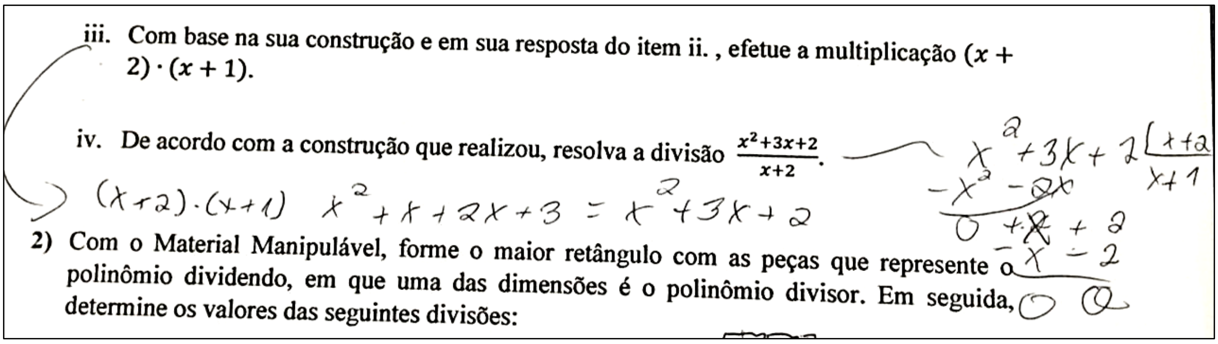
ii. Considerando o cálculo realizado, preencha corretamente os espaços em branco:

$$\frac{\boxed{x^2+3x+2}}{x+1} = \boxed{x+2}$$

Fonte: Protocolo de Pesquisa

Ainda na questão 1, no item iv), os demais alunos (A2, A3, A4, A7 e A8) resolveram pelo algoritmo do método de chaves, recorrendo a tratamentos dentro do RA, como pode ser observado na Figura 21, o que evidencia a potencialidade do MM, pois conforme Camacho (2012, p. 2) a utilização desse tipo de recurso "facilita a compreensão e a estruturação dos conceitos e das ideias matemáticas, pelo facto de envolver o aluno ativamente na aprendizagem". Cabe ressaltar que, em nenhum momento, foi solicitado esse método. No entanto, esses alunos o utilizaram. Acreditamos que essa forma de resolução foi resultado da experimentação e manipulação do MM.

Figura 21 - Resolução de A8 da divisão pelo Método de Chaves


iii. Com base na sua construção e em sua resposta do item ii. , efetue a multiplicação $(x + 2)\cdot(x+1)$.

iv. De acordo com a construção que realizou, resolva a divisão $\frac{x^2+3x+2}{x+2}$.

$(x+2)\cdot(x+1)$ $x^2+x+2x+3 = x^2+3x+2$

$x^2+3x+2 \,|\, x+2$

$-x^2-2x \qquad x+1$

$0 + x + 2$

$-x - 2$

$0 \quad 0$

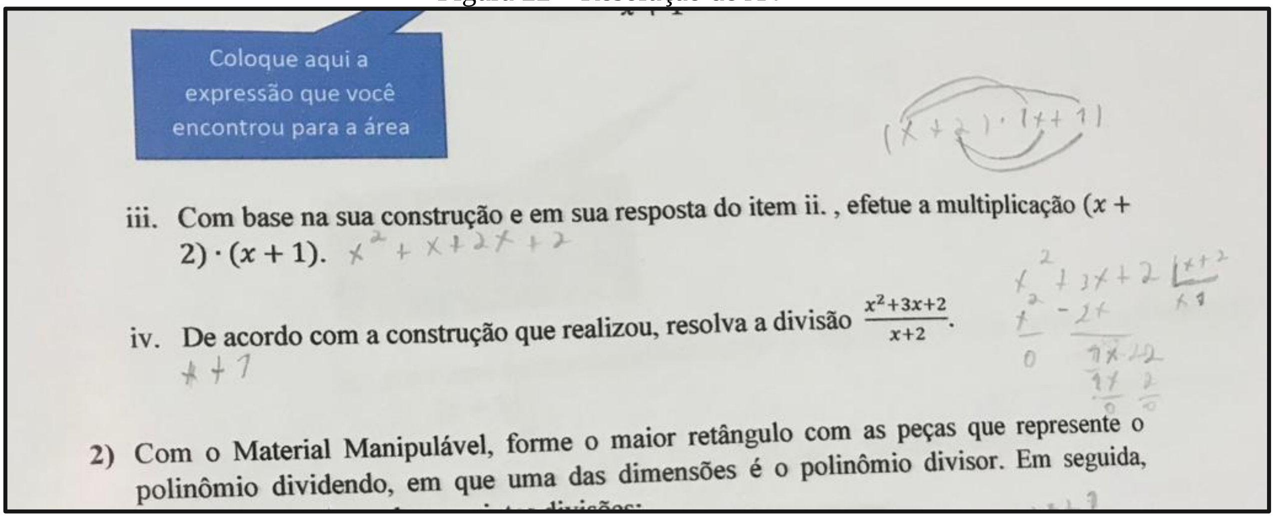
2) Com o Material Manipulável, forme o maior retângulo com as peças que represente o polinômio dividendo, em que uma das dimensões é o polinômio divisor. Em seguida, determine os valores das seguintes divisões:

Fonte: Protocolo de Pesquisa

O A4 (embora tenha apagado o que tinha escrito no segundo retângulo do item ii da questão 1), deixou indícios de que havia escrito a resposta correta. Além disso, conseguiu responder de forma correta o item iv, utilizando o método das chaves, sem que este fosse solicitado (Figura 22). Utilizar uma representação que não foi requisitada, pode ser justificada pela maior facilidade na representação algébrica comparada à representação figural.

Ao analisar essa questão, o A4, a quem estamos nos referindo e que está cursando o 8º ano pela segunda vez, pode ter sido influenciado por conhecimentos anteriores. No entanto, em conversa com a professora regente, essa resolução não vem de anos anteriores, isso porque a mesma relata que não trabalha o "Método Chaves" no 8º ano do Ensino Fundamental.

Figura 22 – Resolução de A4


Coloque aqui a expressão que você encontrou para a área

$(x+2)\cdot(x+1)$

iii. Com base na sua construção e em sua resposta do item ii. , efetue a multiplicação $(x + 2)\cdot(x+1)$. $x^2+x+2x+2$

iv. De acordo com a construção que realizou, resolva a divisão $\frac{x^2+3x+2}{x+2}$.

$x+1$

$x^2+3x+2 \,|\, x+2$

2) Com o Material Manipulável, forme o maior retângulo com as peças que represente o polinômio dividendo, em que uma das dimensões é o polinômio divisor. Em seguida,

Fonte: Protocolo de Pesquisa

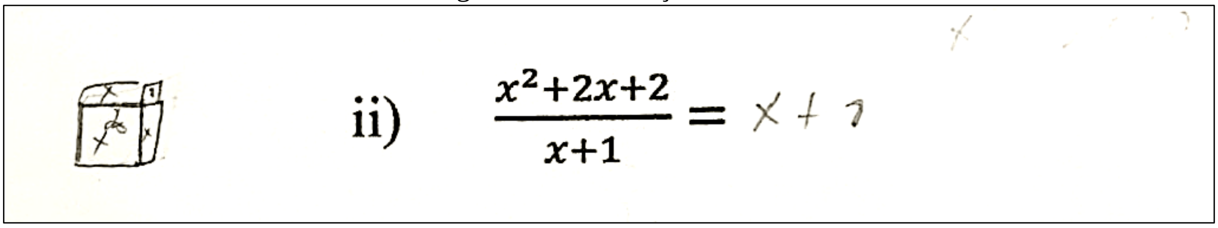
Outro erro dos alunos A3 e A4 na questão 3, foi colocar as dimensões $x^2 + 3$ e $x + 2$ e o resultado da multiplicação sendo $x^2 + 6$. Tal fato indica que, além de ter colocado as dimensões de forma errada, apenas multiplicaram os números inteiros.

- **Representação Figural - RF:** uma das dificuldades encontradas em questões que solicitavam a RF ocorreu quando não era possível construir um retângulo com todas as peças do dividendo. O item ii da questão 2, por exemplo, tinha a seguinte divisão: $\frac{x^2+2x+2}{x+1}$ e o objetivo era que o aluno soubesse manipular e resolver de forma adequada uma divisão de polinômios, em que o resultado não era exato.

O A3 conseguiu desenhar o retângulo que era possível, realizando de forma adequada a conversão para o RF, de acordo com as instruções do enunciado da questão. Porém, não concluiu nada a respeito da divisão (com uma expressão que a representasse) e também não considerou a peça que sobrou. De acordo com Duval (2012b), é comum, diante de um problema, os alunos lerem o enunciado, construir a figura e esquecer-se de retornar ao enunciado, não realizando o que de fato foi solicitado, como no caso de A3.

O A4, de forma semelhante ao A3, construiu o retângulo que era possível com dimensões $(x+1)$, mas desconsiderou a peça que sobraria de área igual a 1. Ainda assim, ele escreveu a expressão algébrica que ele considerou como correta (Figura 23).

Figura 23 - Resolução do A4

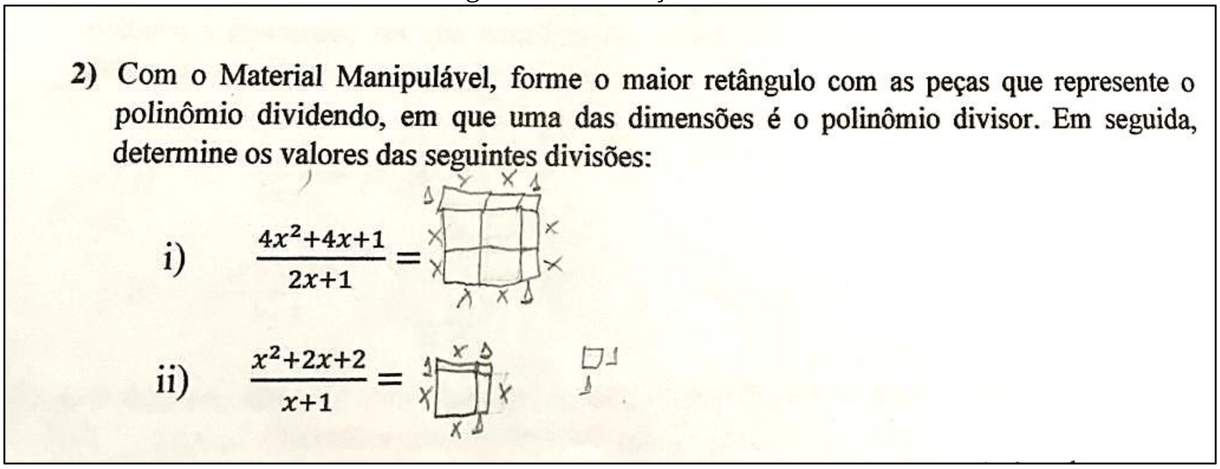


Fonte: Protocolo de Pesquisa

Essa era uma questão que consideramos de nível de dificuldade bem alta, isso porque as tarefas não abordavam questões desse tipo. O objetivo de colocar essa questão foi para que os alunos não concluíssem que sempre será possível construir um retângulo com as peças que representam o dividendo e que assim como na aritmética, na álgebra também é possível encontrar divisões não exatas.

Nessa categoria, o aluno A5 desenhou o retângulo que poderia ser construído com o polinômio dividendo, no qual um dos lados era dado pelo polinômio divisor, porém não concluiu que $\frac{x^2+2x+2}{x+1} = x+1+\frac{1}{x+1}$ e nem colocou expressão algébrica que representasse a divisão (vide figura 24). Entretanto, o fato de ter deixado à parte a figura de área 1, pode indicar o reconhecimento que essa divisão não é exata.

Figura 24- Resolução de A5



2) Com o Material Manipulável, forme o maior retângulo com as peças que represente o polinômio dividendo, em que uma das dimensões é o polinômio divisor. Em seguida, determine os valores das seguintes divisões:

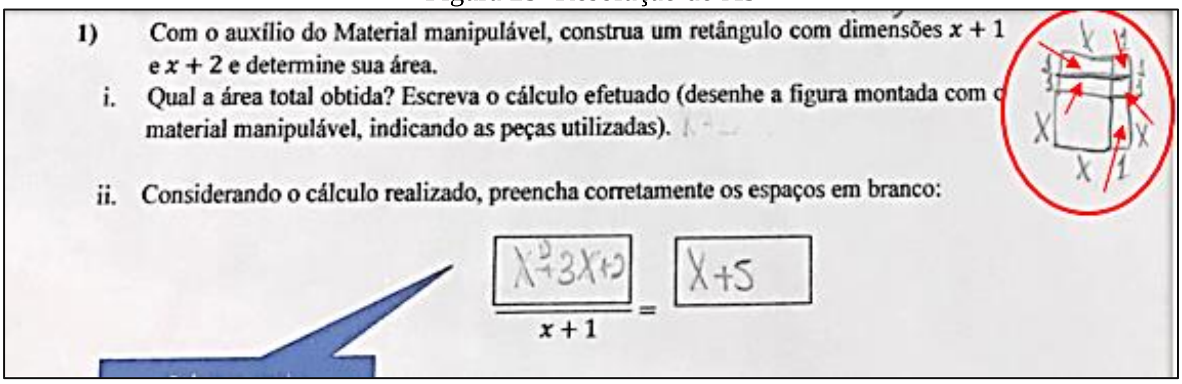
i) $\frac{4x^2+4x+1}{2x+1} =$

ii) $\frac{x^2+2x+2}{x+1} =$

Fonte: Protocolo de Pesquisa

Os alunos A5 e A6 não construíram a RF e, embora tenham acertado a área total do retângulo, não conseguiram preencher as lacunas da folha da questão de forma correta, pois colocaram o resultado da divisão sendo $x + 5$. Porém, no item iii, aplicaram a propriedade distributiva de maneira certa e, desse modo, acreditamos que esses alunos não perceberam a propriedade de operações inversas, pois se $(x + 1).(x + 2) = x^2 + 3x + 2$, $\frac{x^2+3x+2}{x+1}$implicaria no resultado de $x + 2$. Ou ainda, outro raciocínio para os alunos A5 e A6 é que o cinco que eles colocaram na resposta se deve à representação figural, podendo ter considerado apenas os retângulos de lado 1 (como na Figura 25). De qualquer forma, isso nos reforçou a importância do trabalho com diversas representações semióticas, em qualquer nível de ensino.

Figura 25- Resolução do A5



1) Com o auxílio do Material manipulável, construa um retângulo com dimensões $x + 1$ e $x + 2$ e determine sua área.

i. Qual a área total obtida? Escreva o cálculo efetuado (desenhe a figura montada com o material manipulável, indicando as peças utilizadas).

ii. Considerando o cálculo realizado, preencha corretamente os espaços em branco:

$\frac{\boxed{X^2+3X+2}}{x+1} = \boxed{X+5}$

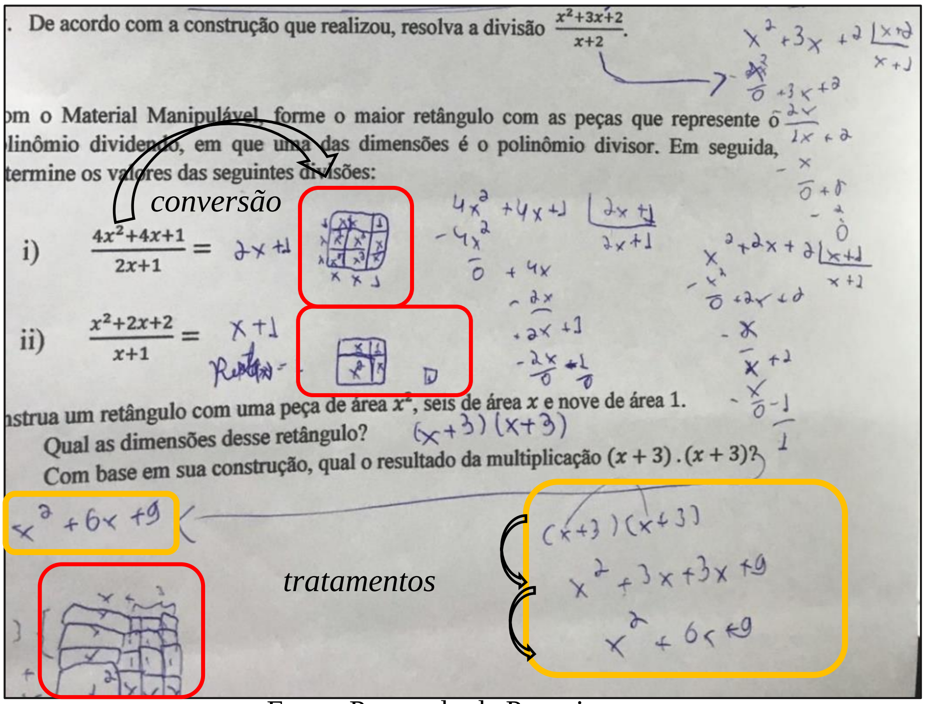
Fonte: Protocolo de Pesquisa

- **Representação Língua Natural - RLN:** nenhum dos alunos resolveu pela RLN. Talvez pelo fato de ser uma avaliação, os alunos se prenderam à necessidade de indicar uma "resposta final" no modo usual, algébrico ou numérico.

- **Não realizou:** nessa categoria, nenhum dos alunos se enquadrou.

Ao analisar as questões observamos que, por algumas vezes, os alunos utilizaram diversas representações, como pode ser observado na Figura 26 o que indica ainda mais a necessidade da utilização de diferentes tipos de representação para um mesmo objeto matemático. O aluno A7 utilizou representação figural, destacadas em vermelho, e também representação algébrica, no qual algumas delas estão evidenciadas em amarelo.

Figura 26 - Diversas representações por A7



Fonte: Protocolo de Pesquisa

Na Figura 26 é possível observar alguns tratamentos e conversões realizados por A7. O enunciado da questão fornecia o dividendo e o aluno transformou a expressão algébrica em um retângulo de área $4x^2 + 4x + 1$ e, em outro momento, realizou um tratamento:$(x + 3).(x + 3) = x^2 + 3x + 3x + 9 = x^2 + 6x + 9$ (vide Figura 26).

4. 4.2 Resultados obtidos na avaliação sem material

A segunda parte também foi realizada de forma individual e os critérios de agrupamento são os mesmos definidos anteriormente.

- **Representação Algébrica - RA:** Os alunos A1 e A2 acertaram nas questões 1 e 2; A3 obteve acerto na questão 1; A4 e A8, nas questões 1 e 3; A5 e A7 com todas as questões e, por fim, A6 nas questões1 e 2.

Na questão 1 (Figura 27), os alunos A3, A4 e A7 colocaram a resposta correta e deixaram os cálculos do método de chaves.

Figura 27 – Questão 1 da Parte I da Avaliação

PARTE I

1) Com o auxílio do Material manipulável, construa um retângulo com dimensões $x + 1$ e $x + 2$ e determine sua área.

i. Qual a área total obtida? Escreva o cálculo efetuado (desenhe a figura montada com o material manipulável, indicando as peças utilizadas).

ii. Considerando o cálculo realizado, preencha corretamente os espaços em branco:

$$\frac{\boxed{\quad}}{x+1} = \boxed{\quad}$$

Coloque aqui a expressão que você encontrou para a área

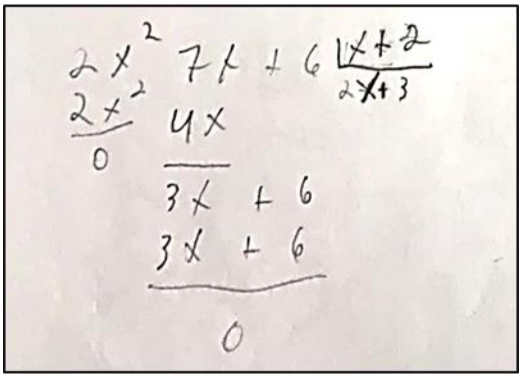
iii. Com base na sua construção e em sua resposta do item ii., efetue a multiplicação $(x + 2) \cdot (x + 1)$.

iv. De acordo com a construção que realizou, resolva a divisão $\frac{x^2+3x+2}{x+2}$.

Fonte: A autora

Na resolução de A3 (Figura 28), ao realizar a divisão, o aluno não escreveu o sinal de menos. Mas, ao analisarmos a questão, percebe-se que, embora não esteja escrito, supostamente a subtração foi realizada mentalmente, o que faz com que o aluno tenha realizado de maneira correta o tratamento dentro do RA.

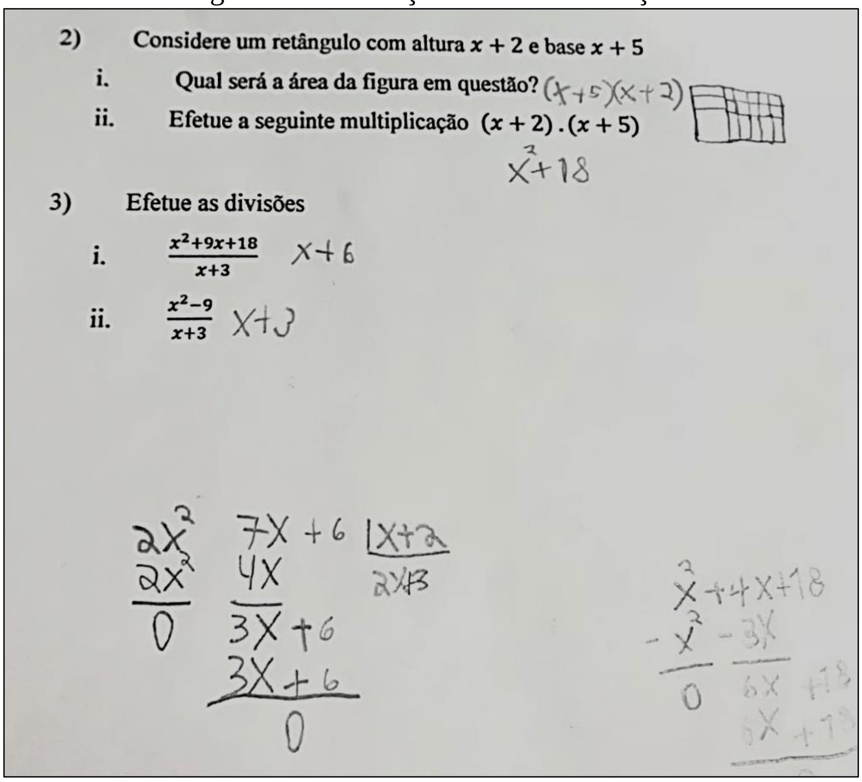
Figura 28 – Resolução pelo Método Chaves de A3



Fonte: Protocolo de Pesquisa

Na questão 2, os alunos A3, A5 e A8, além da RF, utilizaram RA para resolver a multiplicação. Porém, na parte algébrica, A3 não obteve êxito (Figura 29) já que, além de não ter aplicado a propriedade distributiva de forma correta, obteve o número 18, que pode ter sido obtido somando todas as peças menores que formaram o retângulo de área $x^2 + 7x + 10$ ou ainda por ter confundido com o enunciado da questão posterior. Da mesma resolução, percebemos que tanto na questão 2 realizou conversões da RA para RF, quanto na questão 3, realizou tratamentos dentro do registro algébrico.

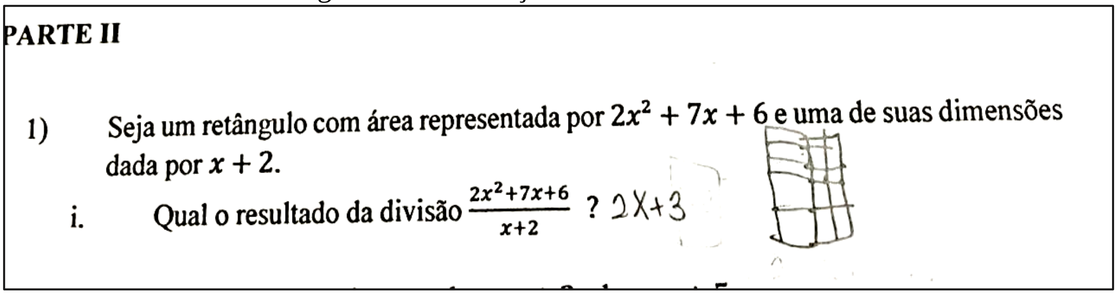
Figura 29 - Resolução de A3 da avaliação



Fonte: Protocolo de Pesquisa

Na questão 1 - Parte II, os alunos A1 e A2, utilizaram desenhos para “substituir” o MM e conseguiram responder com êxito a questão (Figura 30). Passos (2012, p. 78), afirmava a respeito da potencialização do MM, explicando que “os recursos didáticos nas aulas de matemática envolvem uma diversidade de elementos utilizados principalmente como suporte experimental na organização do processo de ensino e aprendizagem”, ou seja, o aluno, mesmo sem o material, conseguiu utilizá-lo como recurso educacional.

Figura 30 – Utilização de MM como Recurso


PARTE II

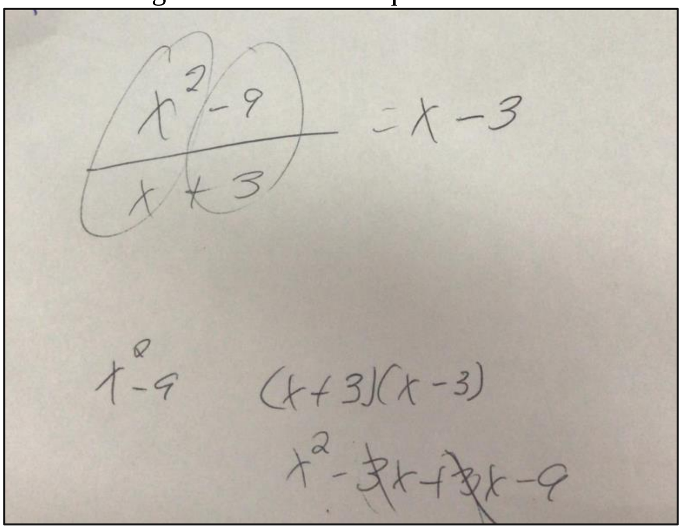
1) Seja um retângulo com área representada por $2x^2 + 7x + 6$ e uma de suas dimensões dada por $x + 2$.

i. Qual o resultado da divisão $\frac{2x^2+7x+6}{x+2}$? 2X+3

Fonte: Protocolo de Pesquisa

Na questão 3, queremos chamar atenção para dois alunos: A7 e A8, que realizaram de forma correta. Inclusive, resolveram pelo método de chaves nas duas avaliações. Notamos que na divisão $\frac{x^2-9}{x+3}$, havia dois círculos, um englobando a divisão x^2 por x e -9 por 3 (vide Figura 31).Para esse caso, solicitamos o cuidado do professor para que o aluno não generalize, visto que para alguns casos, esta regra não se aplica, como, por exemplo: $\frac{x^2+2x+2}{x+1} = x + 1 + \frac{1}{x+1}$, que difere de $\frac{x^2+2x+2}{x+1} = x + 2$.

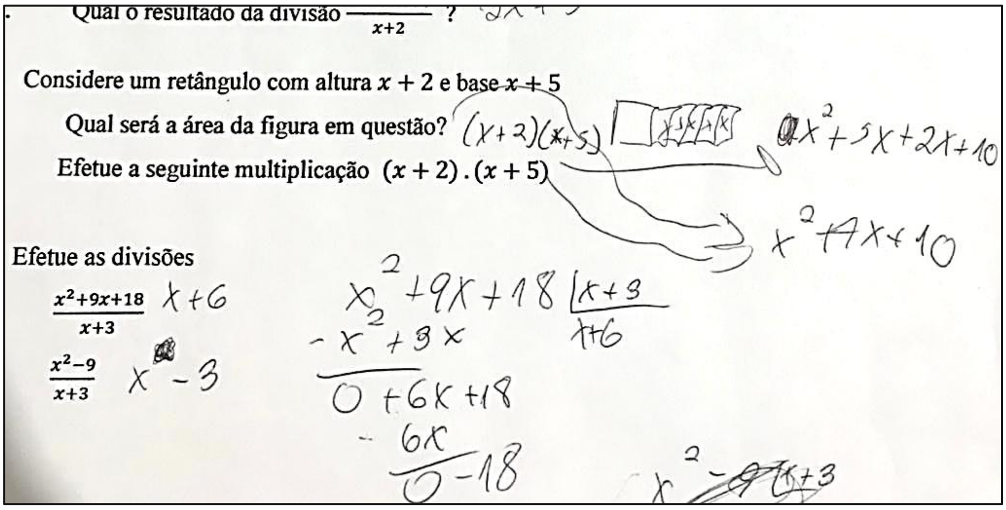
Figura 31 - Possível equívoco de A8



Fonte: Protocolo de Pesquisa

Um dos alunos que acertou a representação algébrica da questão 2 foi o A8. Porém, ao tentar desenhar o possível retângulo, considerou apenas a dimensão de $x + 5$ (não tendo êxito na conversão do RA para RF), como pode ser observado na Figura 32. Entretanto, o aluno conseguiu realizar tratamentos dentro do registro algébrico, quando colocou que a área era dada por $(x + 2).(x + 5)$,que resultava em $x^2 + 7x + 10$.

Figura 32 - Resolução de A8

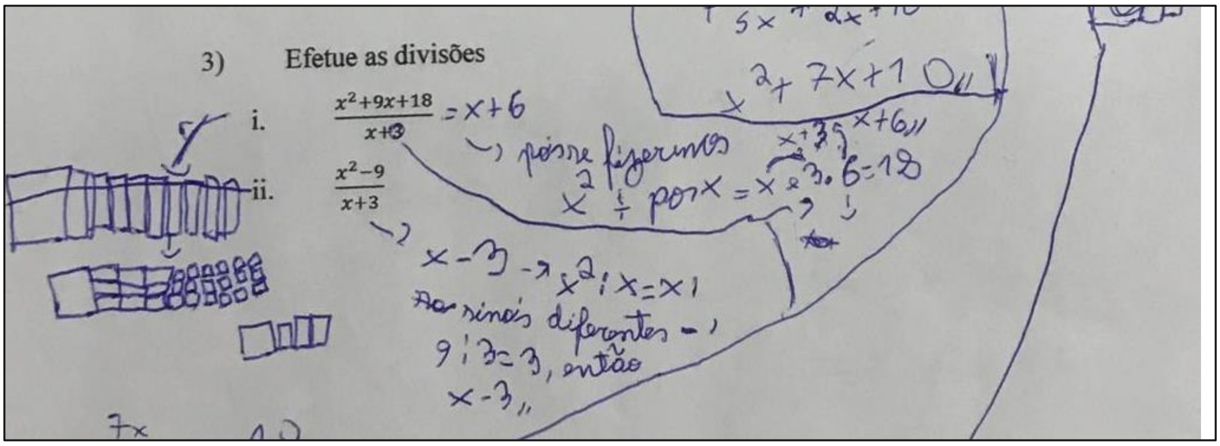


Fonte: Protocolo de Pesquisa

- **Representação Figural - RF:** um aluno que realizou de forma correta a RF, também acertou a algébrica. Contudo, ao explicar-se por meio da linguagem natural, se equivocou.

A RF apareceu com menor frequência (comparado às outras representações) na questão 3 da Parte II da avaliação; os únicos alunos que a utilizaram foram A1 e A2 que, além de desenhar, justificaram que a resposta $x + 6$ foi obtida pelo fato de que x^2 dividido por x resulta em x e porque 3 multiplicado por 6 é igual a 18. Observe a resolução de A2 na Figura 33, em que o aluno faz diversas conversões, sendo do RA para RF, além dos tratamentos que foram realizados dentro do registro algébrico.

Figura 33 - Resolução de A2



Fonte: Protocolo de Pesquisa

Para o item ii, tínhamos que a divisão envolvia subtração e, para essa questão, os alunos A1 e A2 justificaram que: como x^2 dividido por x é igual a x; que 9 dividido por 3 resulta em 3; e como são sinais diferentes, a resposta final é igual a $x-3$.

O A6 acertou a RF, porém não realizou de forma satisfatória a RA. Utilizou o desenho, como no MM, com um lado sendo o divisor e o todo sendo a área total e conseguiu chegar no resultado possível; mas, ao realizar o cálculo algébrico, chegou em um outro resultado $(2x+10)$. Um possível raciocínio para o cálculo seria ter calculado $\frac{2x^2}{x} = 2x$, depois $\frac{7x}{x} = 7$ e $\frac{6}{2} = 3$; depois, supomos que ele somou os resultados $2x+7+3 = 2x+10$, obtendo a resposta errada.

- **Representação Língua Natural - RLN:** nenhum dos alunos resolveu pela RLN, assim como na avaliação em que era permitida a utilização do MM.

- **Não realizou:** para esse caso, consideramos os alunos que não escreveram nada nas resoluções. No caso, o aluno A4, na questão 2.

Ao analisarmos as questões, foi perceptível que em exercícios semelhantes às atividades aplicadas, os alunos recorriam à RF, o que pode ter sido influenciado pelo fato de sempre solicitarmos a representação do retângulo que haviam construído com as peças do MM. Outro fator que pode ter influenciado, foi a forma que os enunciados se apresentaram, pois quando falava-se em altura, base e área, remetia à geometria. Ou seja, utilizar a RF auxiliaria na resolução. De forma contrária, quando o enunciado solicitava para efetuar a divisão, a RF foi utilizada menos vezes.

Comparando as avaliações, observamos que a quantidade de vezes que os alunos recorreram à representação figural foi igual na avaliação com e sem MM. Quanto à representação algébrica, houve pouca diferença na quantidade de vezes que utilizaram entre as avaliações (sem material, apenas 1 vez a mais). Entretanto, na quantidade de acertos, houve um crescimento maior na avaliação sem MM, uma possibilidade para isso ter ocorrido é que nas atividades aplicadas em que podia utilizar MM os alunos estavam mais habituados a utilizar a RF, ao contrário de quando não podiam que eles recorriam mais vezes a RA. Na representação figural se manteve a quantidade de utilizações e acertos. Em ambas as avaliações a RLN não foi utilizada.

No Quadro 6, é possível observar uma síntese das representações que os alunos utilizaram durante a resolução das avaliações.

Quadro 6 – Comparativo da avaliação com e sem MM

AVALIAÇÃO COM MM				
	Quantidade total de questões	Quantidade de vezes que recorreram à representação	Quantidade de Acertos	Aluno com maior dificuldade em utilizar essa representação
RA	24	22	16	A3, A4, A5 e A6
RF	24	22	19	A5 e A6
RLN	24	0	0	-
AVALIAÇÃO SEM MM				
	Quantidade de questões corrigidas	Quantidade de vezes que recorreram à representação	Quantidade de Acertos	Aluno com maior dificuldade em utilizar essa representação
RA	24	23	21	A3, A4, A6 e A8
RF	24	22	19	A1, A2, A3, A4, A6 e A8
RLN	24	0	0	-

Fonte: A autora

Aparentemente a utilização do MM não houve resultados mais favoráveis que as TIC's, entretanto muitas vezes na avaliação sem material os alunos utilizavam a representação figural, assim como faziam na avaliação com material. Um exemplo dessa situação é dado na Figura 29, página 64.

4. 5 QUESTIONÁRIOS

Ao terminar a aplicação e as avaliações, foi pedido para que os estudantes respondessem a um questionário cujo objetivo era investigar, na concepção dos alunos, o quão válida foi a utilização dos MM e dos recursos tecnológicos. Tal questionário era composto por 4 questões, entretanto os alunos escreveram uma resposta única para todas.

Apenas um aluno (A3) respondeu de forma negativa quanto aos diferentes materiais utilizados, relatando que: *"De certa forma* (referindo-se a contribuição do MM e do *software* na sua aprendizagem), *porém também nos impede de aprender certos métodos".* Isso ocorre, provavelmente, porque eles estão acostumados com as técnicas, e pelo comentário do aluno com TEA, presumimos que, para ele, propor atividades com o uso de materiais pode privar os alunos de aprender o algoritmo, o que contradiz nossa proposta, já que as atividades serviram como suporte. Aqui, ressaltamos que, por maior que seja a potencialidade do MM ele, por si só, não é eficaz. Portanto, o professor, em todo momento, deve guiar os alunos para que sigam na direção do objetivo da aplicação, sendo necessária a intervenção durante toda a aplicação e, posteriormente, a formalização dos conceitos estudados.

O aluno A8 expôs certa dificuldade em entender, mas, mesmo assim, ainda acredita que favoreceu a aprendizagem: "*Sim, pode contribuir, no começo eu não entendia muito, mas quando começamos usar eu fiquei até que bom*". Esse mesmo aluno, em um diálogo com a pesquisadora, confessou que, por meio da observação, conseguiu obter resultados melhores, já que estava um pouco confuso no início.

Outros três alunos, A1, A2 e A4, expuseram que as atividades da sequência didática proporcionaram maior aprendizado *"Sim ajuda muito, aprendi muito mais*" (A2), *"Sim, ajuda muito mais do que sem. [...]Sim, muito mais, com as peças e os softwares nós nos interessamos mais pelo conteúdo* " (A1), *"Sim, uma forma melhor de aprender"* (A4), o que vem ao encontro do que a fundamentação teórica defende, que, a partir do uso dos MM e das TIC's, é possível haver uma maior compreensão e assimilação do conteúdo.

Os alunos A5 e A6 relataram sobre a contribuição para o estudo de divisão e multiplicação, enquanto o A7 relatou que ajudou aplicar o conteúdo em diferentes situações. Um ponto em comum, em todos os três alunos e A8, foi que disseram que, inicialmente, não compreendiam muito bem o que se pretendia com a atividade. Porém, com o decorrer das resoluções, conseguiram entender e resolver de forma clara.

Após as análises dos dados e questionário percebemos que as atividades, utilizando diferentes recursos (MM e TIC's) e representações, tem potencial para ensinar divisão e multiplicação de polinômios, pois houve melhor rendimento após a utilização destes materiais; auxiliando, inclusive, no processo de descobrimento de algoritmo para divisão de polinômio.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esse trabalho teve como objetivo avaliar uma sequência didática, apoiada em materiais manipuláveis e atividades *on-line*, para trabalhar as operações de multiplicação e divisão de polinômio. Utilizar variedades em representações vem sendo sugerido há algum tempo, pelos PCN, por exemplo, que considera ser um recurso que pode ajudar a aprendizagem em Álgebra.

Buscou-se responder a pergunta "*Trabalhar com estações envolvendo MM e atividades on-line favorecem a aprendizagem de multiplicação e divisão de polinômios?"*

De acordo com Coutinho e Cargnin (2017), a diversidade de representações no ensino de conceitos referentes a monômios e polinômios é escassa. Em contrapartida, nossas atividades, subdivididas em estações, nas quais uma das estações é composta por MM e outra pelo *software* GeoGebra, proporcionaram/solicitaram o uso de diversas representações para o mesmo objeto matemático, o que, na concepção de Duval (2003) pode auxiliar para que o aluno tenha conhecimentos sobre ele.

A utilização de **Materiais Manipuláveis** e ***Software***, separados em estações, foi propícia para o 8º ano do Ensino Fundamental, uma vez que a faixa etária desse nível de ensino ainda necessita do concreto, auxiliando na passagem para o abstrato. Os MM possibilitam a manipulação, sendo postos frente a novos conceitos que, por intermédio das experimentações, conjecturas e por tentativa e erro, podem ser adquiridos, diferenciando do ensino tradicional onde, geralmente, é trabalhado o algoritmo com as técnicas para o cálculo.

Outro diferencial das estações é a possibilidade de utilizar diferentes materiais didáticos. Rousseau, no século XVIII, já defendia que para ensinar é de fundamental importância o uso de recursos diferenciados, inclusive concretos (sensoriais), visto que, para ele, é assim que o conhecimento pode ser adquirido de uma melhor forma.

Há alguns pontos, sobre a aplicação, que precisam ser destacados, como por exemplo:

- **Dificuldade em manipular o material:** a dificuldade em manipular as peças, na maioria das vezes, era referente à rotação. Por isso, o docente tem que se ater às representações que utiliza, variando-as, já que o aluno não pode confundir o objeto matemático com sua representação, como Duval (2003) já alertava.
- **Dificuldades no conceito de quadrado:** os alunos mostraram dificuldades em reconhecer que o quadrado é um retângulo, acreditando que sua construção havia sido feita de forma equivocada.

- **Dificuldades em Conhecimentos Prévios:** ao analisarmos os resultados, percebemos que a propriedade distributiva da operação de multiplicação ainda levava os alunos às dúvidas.

- **Dificuldade na RLN:** Por algumas vezes, os alunos sabiam resolver algebricamente, porém, não conseguiam expressar-se adequadamente sobre sua resolução.

- **Questões de divisão do tipo** $\frac{\boldsymbol{ax^2-b^2}}{\boldsymbol{x\pm b}}$:podem levar à generalização que o resultado se obtém dividindo ax^2 por x e $-b^2$ por b, mesmo nos casos em que a divisão não é exata.

Na análise dos dados, notamos erro conceitual de multiplicação e, por algumas vezes, dificuldades em realizar conversões em que o registro de chegada se tratava da RLN, pois, embora resolvessem corretamente os registros de saída (RA ou RF), não conseguiram expressar-se de maneira adequada na RLN.

Pelo Quadro 5, apresentado na seção 4, constatamos que houve uma melhora no rendimento dos alunos com o decorrer das atividades e com a mudança da estação, pois os resultados das TIC's (segunda estação) foram superiores aos do MM (primeira estação). Esse é um dos itens que nos fez perceber a importância do uso de tecnologias e materiais manipuláveis no ensino, pois com as atividades que compõem o produto educacional foi possível obter um melhor desempenho nas operações de multiplicação e divisão de polinômios.

Salientamos aqui, também, que o produto educacional apresenta potencialidades para auxiliar os alunos em sua aprendizagem. Como por exemplo, o caso da D4, que deduziu o algoritmo da divisão de polinômios (vide Figura 8 da seção 4). O algoritmo que a D4 inferiu, geralmente, é ensinado apenas no ensino médio, o que evidencia que, ao ser deparado com as atividades propostas, tendo o momento de construir conjecturas e validá-las, com certo nível de amadurecimento, é possível obter êxito nas resoluções e extrapolar o objetivo da aplicação.

Em relação às atividades aplicadas, notamos a falta de exercícios introdutórios para a construção dos retângulos, sem falar em divisão e multiplicação de polinômios, apenas para a manipulação do MM. Notamos também que precisamos tomar um cuidado maior para as divisões do tipo $\frac{ax^2-b^2}{x\pm b}$, o que nos mostrou a necessidade de uma reformulação nas atividades, já apresentado no produto educacional (apêndice C) com estes ajustes.

Destacamos a importância do ensino híbrido que nos permitiu delinear como proceder frente à pesquisa, ajudando no preparo e na estrutura das atividades, como por exemplo, separá-las em níveis. Além disso, após os resultados obtidos, o professor pode dar continuidade nas aulas, personalizando atividades de acordo com o nível intelectual de cada estudante. Salientamos que, apesar do ensino híbrido ser considerado uma renovação no ensino desde a Portaria 4059/2004 ter sido aprovada, ainda há alguns papéis que temos que repensar, tais como: o do professor, o do aluno e de toda a equipe pedagógica, visto que é necessária a integração entre todos os membros da escola.

Ademais, muitas vezes, parece que alguns professores confundem e pensam que o uso de tecnologia já caracteriza o modelo híbrido. Mas, o que realmente o define é a abordagem metodológica e não o uso de recursos tecnológicos. Outro fator que queremos destacar é o papel do professor durante a aplicação das atividades (serve também para os professores que irão utilizar o produto educacional, resultado dessa pesquisa), de fundamental importância, tanto para guiar, quanto para fazer o aluno fugir de conclusões precipitadas e errôneas.

Destacamos, ainda, a importância da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, que nos auxiliou na análise dos dados e também na reformulação das atividades, notando a necessidade da utilização de várias representações, dado que, com as conversões, modificações e tratamentos utilizados na sequência didática, foi perceptível a evolução do conhecimento que eles tinham anteriormente, como nos casos em que os alunos que inicialmente achavam não ser possível rotacionar as peças.

Retomando a questão de pesquisa, consideramos que a utilização de rotações por estação pode contribuir positivamente na aprendizagem de multiplicação e divisão. Consideramos haver indícios que as estações, pela dinamicidade e organização (duplas), motivaram os alunos a responderem as questões, em alguns casos com uma porcentagem maior de acertos e em outros com menores. Entretanto, mesmo nos menores índices, os alunos geralmente acertavam no mínimo uma das representações utilizadas.

Por fim, espera-se que os resultados alcançados nesta pesquisa contribuam com professores e alunos da Educação Básica. No caso dos docentes, para que percebam a importância de solicitar e utilizar diversos registros no ensino de álgebra, além da possibilidade de utilizar o ensino híbrido, adaptando-o à sua realidade. Conforme nosso estudo sugere, as estações e as diferentes representações trazem contribuições para a visualização, abstração e conclusões referentes aos conceitos almejados.

O raciocínio utilizado por estudantes na divisão de polinômios, apresentada na Figura 31[10] na página 65, nos deixou intrigadas. Apesar disso, optamos por não investigá-la, a fim de

---

[10] Se referia ao procedimento de divisão de um polinômio de grau 2 por um polinômio de grau 1 fazendo as divisões entre o primeiro termo do numerador pelo primeiro termo do denominador e do último termo do numerador pelo último termo do denominador.

nos centrar no objetivo proposto para essa dissertação. Entretanto, deixamos como sugestão de trabalho futuro uma investigação sobre esse raciocínio, inclusive para possibilitar desconstruir possíveis obstáculos didáticos advindos da generalização desse raciocínio.

REFERÊNCIAS

ANGHILERI, J. The language of multiplication and division. In: K. Durkine B. Shire (orgs.), **Language in Mathematical education** (p. 95-104). Buckingham, Philadelphia: OpenUniversityPress. 1993.

BACICH, L.; MORAN, J. Aprender e ensinar com foco na educação híbrida**. Revista Pátio**, n. 25, jun. 2015, p. 45-47. Disponível em: <http://www.grupoa.com.br/revista-patio/artigo/11551/aprender-e-ensinar-com-foco-na-educacao-hibrida.aspx>. Acesso em: 24 agosto 2018.

BACICH, L.; TANZI NETO, A.; TREVISANI, F. de M. (Org.). **Ensino Híbrido:**personalização e tecnologia na educação. Porto Alegre: Penso, 2017.

BARBOSA, M. J. F. **Uma Sequência Didática para o Teorema deTales**. 2018. 129 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) -Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação:** introdução à teoria e aos métodos. Portugal: Porto, 1994.

BOOTH, L. R. Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra. In: COXFORD, A. F; SHULTE, A.P (Org). **As idéias da álgebra**. Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1995. p. 25 – 37.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais:** Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular:** educação é a base. Ministério da Educação, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wpcontent/uploads/2018/12/BNCC_19dez2018_site.pdf. Acesso em: 20 nov. 2018.

BRUM, L. D.; CURY, H. N. Análise de erros em soluções de questões de Álgebra: uma pesquisa com alunos do Ensino Fundamental. **RENCIMA**, v.4, n. 1, p. 45-62, 2013.

CAVERSAN, R. H. de M. **Explorando o ensino híbrido em Física:** uma proposta para o ensino de fenômenos ondulatórios utilizando ferramentas multimidiáticas. 2016. 169 f. Dissertação (Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física) – Universidade Estadual “Júlio de Mesquita Filho”. Presidente Prudente.

CONSTANTINO, G. A.Matemática e Língua Materna. **Linguagem em (dis)curso**, Santa Catarina, v. 1, n. 1, p.1-1, jan. 2001. Semestral. Resenha de “Matemática E Língua Materna: Análise De Uma Impregnação Mútua”. Disponível em: http://linguagem.unisul.br/paginas/ensino/pos/linguagem/linguagem-em-discurso/0101/010111.htm. Acesso em: 8 dez. 2018.

COUTINHO, D. M.; CARGNIN, C. **Um primeiro olhar sobre Monômios e Polinômios.** In: Encontro Paranaense Da Educação Matemática, 14, 2017, Cascavel. Anais. Cascavel, 2017

COUTINHO, D. M.; MORAN, M. **Ensinando polígonos por meio de várias representações:** uma experiência com alunos do 6° ano. In: Encontro Paranaense Da Educação Matemática,12, 2014, Campo Mourão. Anais. Campo Mourão, 2014.

DUVAL, R. Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência. Tradução: Méricles Thadeu Moretti. **Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática**. Florianópolis, v.07, n.1, p.118-138, 2012a.

________. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Tradução: Méricles Thadeu Moretti. **Revista Eletrônica de Educação Matemática – Revemat:** Florianópolis, v.07, n.2, p. 266-297, 2012b.

_________. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. D.A. (Org.). **Aprendizagem em matemática:** registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2003, p.11-33.

__________. **Ver e ensinar a matemática de outra forma:** entrar no modo matemático de pensar: os registros de representação semióticas. Org.: Tânia M. M. Campos. Tradução: Marlene Alves Dias. São Paulo: PROEM, 2011.

D’AMBROSIO, U. Prefacio. In: BORBA, M. C; ARAÚJO, J. L. (Org.). **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2012.

ENFEDAQUE, J. De los números a las letras. **SUMA**, 5, pp. 23-34, 1990

GIL, K. H. **Reflexões sobre as dificuldades dos alunos na aprendizagem de Álgebra**. Dissertação. Pontifícia Universidade Católica Do Rio Grande do Sul, Faculdade de Física. Porto Alegre, 2008.

HADJI, C. **A avaliação, regras do jogo**: das intenções aos instrumentos. Porto: Porto 1994.

HORN, M. B.; STAKER, H. **Blended:** usando a inovação disruptiva para aprimorar a educação. Porto Alegre: Penso, 2015.

KENSKI, V. M. **Educação e tecnologias:** O novo ritmo da informação. Campinas: Papirus, 2007.

KENSKI, V. M. **Novos processos de interação e comunicação no ensino mediado pelas tecnologias.** São Paulo: Scientia Vincês, 2008.

LEAL, S. M. **Autismo e Lateralidade:** estudo da preferência manual através do Card-reaching Test. 2011. Dissertação (Mestrado) - Faculdade de Desporto da Universidade do Porto.

LIMA, L. H. F. de.; MOURA, F. R. de. **O professor no Ensino Híbrido**. In: TANZI NETO, A.; TREVISANI, F. de M. (Org.).Ensino híbrido: Personalização e tecnologia na educação. Porto Alegre: Penso, 2015, p. 89-102.

LORENZATO, S. **Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis.** In: __________(Org.). O Laboratório de ensino de matemática na formação de professores. 3ª ed. Campinas, SP: Autores Associados, 2012, p. 3-38.

__________, S. **Para aprender matemática**. 3ª ed. Campinas: São Paulo: Autores Associados, 2010.

MACHADO, N. J. **Matemática e língua materna:** análise de uma impregnação mútua. 3. ed. São Paulo: Cortez, 1993.

MINAYO, M. C. de S. Análise qualitativa**:** teoria, passos e fidedignidade**. Ciência e saúde coletiva**. Rio de Janeiro, v.17, n 3, p.621-626, Mar. 2012. Disponível em:

http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1413-81232012000300007. Acesso em: 15 jul. 2018.

MIRANDA, G. L. Limites e Possibilidades das TIC na Educação**. Sísifo / Revista de Ciências da Educação**, v. 3, p. 41-50, 2007.

MORAN, J. **Educação híbrida: um conceito-chave para a educação, hoje**. In: TREVISANI, F. M.; TANZI NETO, A.; BACICH, L. (Orgs.). Ensino híbrido: personalização e tecnologia na educação. Porto Alegre: Penso, 2015, p.27-45.

MORAN, M; FRANCO, V. S. Registros Figurais em Geometria: influências na apreensão operatória e na pesquisa heurística de figuras. **Perspectivas da Educação Matemática**, Mato Grosso do Sul, v. 7, n. 13, p. 123-137, 2014.

NACARATO, A. M. Eu trabalho primeiro no Concreto. **Revista de Educação Matemática**, São Paulo, v.9, n.9-10, p. 1-6,2005.

OSHIMA, I. S.; PAVANELLO, R. M.**O Laboratório de Ensino de Matemática e a Aprendizagem da Geometria.** Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/232-4.pdf>. Acesso em 23 nov. 2018.

PASSOS, C. L. B. **Materiais manipuláveis como recursos didáticos na formação de professores de matemática**. In: LORENZATO, S. (Org.). O laboratório de ensino de matemática na formação de professores. Campinas: Autores Associados, 2012. p.77-92

PASSOS, E. O.; TAKAHASHI, E. K. Recursos didáticos nas aulas de matemática nos anos iniciais: critérios que orientam a escolha e o uso por parte de professores. **Revista brasileira Estudos Pedagógicos**, Brasília, v. 99, n. 251, p. 172-188, jan./abr. 2018.

PEREIRA, G. N.; BRAGA, M. N. S. Investigação matemática e a construção do pensamento algébrico: uma metodologia de ensino a compreensão de incógnita. **Revista Eventos Pedagógicos.** Mato Grosso, v. 3, n. 3, p. 320-340, dez. 2012.

PIAGET, J.**A formação de símbolo na Criança:** Imitação, jogo, imagem e representação. Tradução de Álvaro Cabral e Cristiane Oiticia. Rio deJaneiro: Zahar, 1976.

PIROLA, N. A. **Solução de problemas geométricos:** dificuldades e perspectivas. 2000. 218 p. Tese (Doutorado) – Universidade Estadual de CAMPINAS, Faculdade de Educação, Campinas, São Paulo

PORVIR. **Educação Sob Medida.** Disponível em: <http://porvir.org/especiais/personalizacao/>. Acesso em 22 de set. de 2018

POSSAMAI, J. P.; BAIER, T. Primeiros passos na álgebra: conceitos elementares e atividades pedagógicas. **Revista Dynamis.** Blumenau, v.19, n. 2, p. 72-86, edição especial. 2013.

RODRIGUES, C.; PONTE, J.P.; MENEZES, L. **Preparação das discussões matemáticas no ensino da Álgebra: o caso da professora Ana**. In: SEMINÁRIO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 27, 2016. Atas do XXVII Seminário de Investigação em Educação Matemática. Porto: Associação de Professores de Matemática. 2016, p.387-404.

ROMERO, C. S. **Recursos tecnológicos nas instituições de ensino**: planejar aulas de matemática utilizando *softwares* educacionais. UNIMESP – Centro Universitário

Metropolitano de São Paulo. nov. 2006 . Disponível em: http://repositorio.ipv.pt/handle/10400.19/3409 . Acesso em:19 jan. 2018

SOCAS, M. M.; CAMACHO M.; PALAREA M.; HERNÁNDEZ J. **Iniciación al algebra**. Madrid: Ed Sínteses, 1996.

TINOCO ET AL. **Caminho da álgebra na escola básica**. IV – SPEMRJ: Seminário de Pesquisa em Educação Matemática do Estado do Rio de Janeiro, 2008.

APÊNDICE A – ATIVIDADES APLICADAS

Instruções

i. Para realizar as atividades é necessário relembrar os elementos da operação de divisão, que são:

Dividendo | divisor

quociente

Resto

ii. Com o material manipulável, nós formaremos figuras retangulares. O dividendo representará a soma das áreas de todas as peças, o divisor e o quociente representarão as expressões das medidas dos lados do retângulo, que pode ser formado com as peças do dividendo.

iii. É importante lembrar que as peças do Material Manipulável de cada item devem formar o maior retângulo possível. E que só pode colocar peças lado a lado que tenham a mesma medida: x com x, 1 com 1 e assim por diante.

iv. Para os casos de divisão exata, o divisor e o quociente serão considerados as dimensões de um retângulo cuja área será representada pelo dividendo.

Exemplo:

Lado = divisor

$$\boxed{Área = \ Dividendo}$$

altura = quociente

v. Para os casos de divisão com restos, o divisor e o quociente serão considerados dimensões do maior retângulo que pode ser construído, o resto será as peças que não se encaixarem ou que sobrarem.

Exemplo:

Lado = divisor

$$\boxed{Área = \ Dividendo}$$

altura = quociente

$$\boxed{Resto}$$

vi. Todos os cálculos e rascunhos, obrigatoriamente, devem constar nas folhas em anexo.

vii. Todos os retângulos que forem formados em cada exercício devem constar o seu desenho na folha de resolução.

viii. Para cada item dos exercícios é necessário explicitar como você resolveria por um método mais longo, caso não estivesse com o material manipulável.

Material Manipulável (MM)

As peças do MM são formadas por retângulos de cores azul, rosa, laranja, amarelo, verde, roxo e preto, como mostram as figuras abaixo.

As respectivas áreas das peças são:

Azul - x^2

Rosa - 1

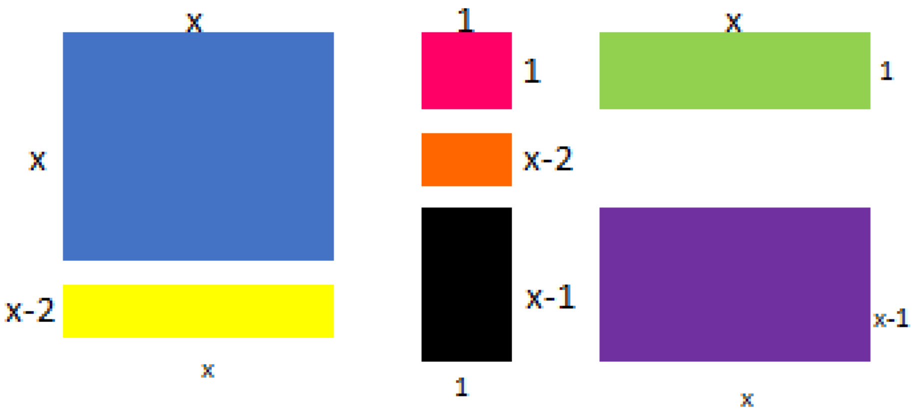
Laranja - $x - 2$

Amarelo - $x^2 - 2x$

Verde - x

Roxo - $x^2 - x$

Preto - $x - 1$



Nível M-*Easy*

1) Com o auxílio do Material manipulável, construa um retângulo com dimensões $x + 2$ e $x + 3$ e determine sua área.

i. Qual a área total obtida?

ii. Explique como você obteve a área total. Escreva o cálculo efetuado (desenhe a figura montada com o material manipulável, indicando as peças utilizadas)

iii. Considerando o cálculo realizado, preencha corretamente os espaços em branco:

$$\frac{\boxed{\qquad\qquad}}{x+3} = \boxed{\qquad\qquad}$$

Coloque aqui a expressão que você encontrou para a área

iv. Com base na figura construída com o material manipulável, discuta com seu colega e diga como se deve efetuar a multiplicação $(x + 2) \cdot (x + 3)$. Escreva os passos utilizados para realizar essa operação.

v. Da mesma forma, discuta com seu colega um modo de efetuar a divisão $\frac{x^2+5x+6}{x+3}$.

2) Com o auxílio do Material manipulável, construa um retângulo com dimensões $2x + 2$ e $x + 1$.

i. Qual a área desse retângulo? Como obteve tal resultado? Escreva o cálculo efetuado.

ii. Discuta com seu colega: Se você tivesse a área total e uma das dimensões, seria possível obter a segunda dimensão? De que maneira? Explique.

iii. Considerando sua resposta ao item i. podemos afirmar que $(2x + 2).(x + 1) = Área\ total$?

iv. Com base na resposta do item ii, podemos afirmar que $\frac{Área\ total}{2x+2} = (x + 1)$?

v. Para esse caso, podemos afirmar que

$$\frac{Dividendo}{1^{\text{a}}\ dimensão} = 2^{\text{a}}\ dimensão?$$

Nível M-*Medium*

1) Quando calculamos divisão de um número real por outro, podemos fazer a seguinte equivalência: $\frac{7}{5} = \frac{5}{5} + \frac{2}{5} = 1 + \frac{2}{5}$, queremos fazer o mesmo com divisão de polinômios. Considere a seguinte divisão $\frac{2x^2+4x+3}{x+1}$, para isso pegue peças do Material Manipulável que representem o dividendo.

i. É possível formar um retângulo com todas essas peças? Se sim, deixe o desenho.

ii. Caso não seja possível, construa o maior retângulo possível com tais peças, em que uma das dimensões seja igual ao divisor. Quais as dimensões desse retângulo? Após a construção, deixe registrado o seu desenho.

iii. Sobrou alguma peça após construir o maior retângulo? Caso a resposta seja sim, o que essa (s) peça (s) representa (m) na divisão?

iv. Para esse caso, podemos afirmar que

$$\frac{Dividendo}{1^{\underline{a}}\ dimensão} = 2^{\underline{a}}\ dimensão?$$

2) Com o auxílio do Material utilize uma peça de x^2 de área, quatro de área x e três peças de área 1.

i. É possível formar um retângulo com essas peças? Deixe registrado o desenho de sua tentativa.

ii. Qual a área total do retângulo formado? Quais as dimensões desse retângulo?

iii. Usando as informações do item ii, e considerando as atividades já realizadas no nível M-*Easy*, escreva:

a. Uma fórmula matemática que use a multiplicação de polinômios

b. Uma fórmula matemática que use a divisão de polinômios.

iv. Caso uma das dimensões seja $x + 1$, qual expressão representa a outra dimensão? Como conseguiu chegar a essa resposta?

Nível M-*Hard*

1) Com o Material Manipulável, forme o maior retângulo com as peças que represente o polinômio dividendo, em que uma das dimensões é o polinômio divisor e a segunda dimensão será o valor do quociente. Em seguida, determine os valores das seguintes divisões:

i. $\frac{4x^2+4x+1}{2x+1} =$

ii. $\frac{2x^2+7x+6}{x+2} =$

2) Calcule as seguintes divisões e desenhe o retângulo que construiu.

i. $\frac{2x^2-2}{x-1} =$

ii. $\frac{4x^2-1}{2x+1} =$

3) Agora sem utilizar o material manipulável, como você calcularia os seguintes exercícios? Deixe todo o processo que usou para realizá-los.

i. $\frac{x^2-9}{x+3} =$

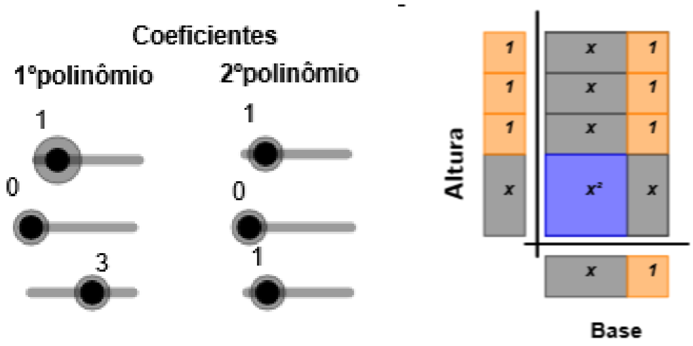
ii. $\frac{x^2+3x+2}{x+1} =$

Nível - C1

Para esse conjunto de tarefas, acesse o site https://www.geogebra.org/m/u5jvA2eM.

Esse site explora a multiplicação de dois polinômios, que representam as dimensões de um retângulo, altura e base (o retângulo pode ser visualizado na parte direita da página). Nele é possível alterar os coeficientes no canto superior esquerdo e, conforme os alteramos, a representação do retângulo também altera. Além disso, o site ainda mostra os dois polinômios que representam a base e a altura e tem o campo para completar com o polinômio que representa a área, resultado da multiplicação entre a base e a altura.

OBS: Para nossas atividades o coeficiente do meio sempre estará em 0 porque iremos trabalhar apenas com uma incógnita.



1) Monte um retângulo onde as dimensões medem $x + 1$ e $x + 3$.

i) Qual a área do retângulo montado?

ii) Escreva uma expressão algébrica que represente o cálculo dessa área.

iii) Caso tivesse a área total e uma das dimensões ao invés das duas dimensões, seria possível obter a segunda dimensão? Como? Explique.

2) Monte um retângulo no qual a área totalseja igual a $x^2 + 2x$, mas que tenha uma das dimensões igual a x.

i) Qual a medida obtida para a outra dimensão?

ii) Escreva uma fórmula que relacione a área total e as dimensões do retângulo que use a multiplicação de polinômios.

iii) Na fórmula escrita por vocês no item ii, como devemos proceder para efetuar a multiplicação dos polinômios que representam as dimensões do retângulo, para chegar à expressão da área total?

iv) Ainda com base no desenho formado na tela do seu computador, como você resolveria a divisão $\frac{x^2+2x}{x}$? Qual o resultado dessa divisão?

Nível - C2

Para as questões a seguir utilize o site https://www.geogebra.org/m/fcb2eZuC, no qual é possível explorar a divisão de polinômios por meio da área de um retângulo. O objetivo é encaixar as peças que representam o dividendo, no retângulo no qual a base é a medida do divisor e a altura o quociente da divisão. Para encaixarem pode ser necessário girar as peças.

Vamos relembrar os elementos da divisão: dividendo, divisor, quociente e resto.

$$\begin{array}{l|l} \text{Dividendo} & \text{divisor} \\ \cline{2-2} & \text{quociente} \\ \text{Resto} & \end{array}$$

1) No site https://www.geogebra.org/m/fcb2eZuC, vá no canto superior esquerdo e altere os coeficientes do polinômio dividendo para 1, 4 e 4, respectivamente, para formar o dividendo $x^2 + 4x + 4$. Altere o coeficiente de x^0 do polinômio divisor para 2, formando $x + 2$.

a. Quais as dimensões do retângulo formado?
b. Escreva uma multiplicação de polinômios que represente a área total desse retângulo e efetue-a.
c. Utilize uma divisão de polinômios para representar a medida de um dos lados. Explique como pode ser efetuada essa divisão sem usar o aplicativo.

2) No mesmo site, monte um retângulo de área igual a $2x^2 + 6x + 4$, e altere o coeficiente de x^0 para 1.

a. Quais as dimensões desse retângulo?
b. Escreva uma multiplicação de polinômios que represente a área total desse retângulo e efetue-a.
c. Utilize uma divisão de polinômios para representar a medida de um dos lados. Explique como pode ser efetuada essa divisão sem usar o aplicativo.

3) Siga as instruções para cada letra desse exercício:

i. Construa um retângulo da área solicitada;
ii. Altere o coeficiente de x^0para o valor solicitado;
iii. Determine as dimensões do retângulo formado;
iv. Escreva uma multiplicação de polinômios que represente a área total desse retângulo e efetue-a.

v. Utilize uma divisão de polinômios para representar a medida de um dos lados. Explique como pode ser efetuada essa divisão sem usar o aplicativo

a) $x + 5x + 6$; coeficiente de $x^0 = 1$

b) $2x^2 + 4x + 16$; coeficiente de $x^0 = 1$

4) No canto superior esquerdo altere os polinômios e construa um retângulo de área igual a x.

a. Observe a representação figural, quais as dimensões de tal retângulo? Consegue estabelecer um padrão entre os valores da base, altura e área?

b. Considere que não há como visualizar tal retângulo, sabendo que uma das dimensões é igual a x, como conseguiria determinar a outra dimensão? Explique

Questionário

1) Ensinar multiplicação e divisão de polinômios por materiais diferentes, mas com o mesmo objetivo pôde contribuir na sua aprendizagem? Disserte sobre sua experiência.

2) Mesmo sem saber o algoritmo da divisão, é possível concluir a resposta a partir do conceito de área de um retângulo? Por quê?

3) O Material Manipulável e o *software* utilizados podem auxiliar para descobrir o algoritmo da divisão e multiplicação de monômios e polinômios?

4) As diferentes representações envolvidas na sequência facilitaram o entendimento do conteúdo a ser estudado? Fale sobre sua experiência.

APÊNDICE B – AVALIAÇÃO APLICADA

ALUNO (A):____ **N.º**_____ **NOTA:**______

TURMA: 8º **DATA:** 26/06/2018 **VALOR:**

PROFESSOR: **CONTATO:**

Conteúdo: Multiplicação e Divisão de Monômios e Polinômios

PARTE I

1) Com o auxílio do Material manipulável, construa um retângulo com dimensões $x + 1$ e $x + 2$ e determine sua área.

i. Qual a área total obtida? Escreva o cálculo efetuado (desenhe a figura montada com o material manipulável, indicando as peças utilizadas).

ii. Considerando o cálculo realizado, preencha corretamente os espaços em branco:

Coloque aqui a expressão que você encontrou para a área

$$\frac{\boxed{}}{x+1} = \boxed{}$$

iii. Com base na sua construção e em sua resposta do item ii., efetue a multiplicação $(x + 2) \cdot (x + 1)$.

iv. De acordo com a construção que realizou, resolva a divisão $\frac{x^2+3x+2}{x+2}$.

2) Com o Material Manipulável, forme o maior retângulo com as peças que represente o polinômio dividendo, em que uma das dimensões é o polinômio divisor. Em seguida, determine os valores das seguintes divisões:

i) $\frac{4x^2+4x+1}{2x+1} =$

ii) $\frac{x^2+2x+2}{x+1} =$

3) Construa um retângulo com uma peça de área x^2, seis de área x e nove de área 1.

i. Qual as dimensões desse retângulo?

ii. Com base em sua construção, qual o resultado da multiplicação $(x + 3) . (x + 3)$?

PARTE II

1) Seja um retângulo com área representada por $2x^2 + 7x + 6$ e uma de suas dimensões dada por $x + 2$.
   i. Qual o resultado da divisão $\frac{2x^2+7x+6}{x+2}$?

2) Considere um retângulo com altura $x + 2$ e base $x + 5$
   i. Qual será a área da figura em questão?
   ii. Efetue a seguinte multiplicação $(x + 2) . (x + 5)$

3) Efetue as divisões
   i. $\frac{x^2+9x+18}{x+3}$
   ii. $\frac{x^2-9}{x+3}$

APÊNDICE C – PRODUTO EDUCACIONAL

DAYANE MOARA COUTINHO

CLAUDETE CARGNIN

ATIVIDADES PARA ENSINAR MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO DE POLINÔMIOS

Produto Educacional apresentado como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Orientadora: Prof[a]. Dr[a]. Claudete Cargnin

LONDRINA

2019

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

PROGRAMA DEPÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA– PPGMAT

MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

DAYANE MOARA COUTINHO

CLAUDETE CARGNIN

ATIVIDADES PARA ENSINAR MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO DE POLINÔMIOS

PRODUTO EDUCACIONAL

LONDRINA

2019

TERMO DE LICENCIAMENTO

Apresentação

Prezados Professores

Este material foi produzido com o intuito de colaborar no ensino de divisão e multiplicação de polinômios e monômios com atividades que utilizam Material Manipulável e também GeoGebra. Uma das motivações para o desenvolvimento das atividades elaboradas foi tentar minimizar dificuldades referentes a tal conteúdo, como por exemplo: passagem do concreto para o abstrato, dificuldades em saber o significado das letras, interpretação, concepções errôneas de divisão (por exemplo: $\frac{x}{x} = 0$), entre outras.

As atividades que constam neste material, chamado de produto educacional, são resultados de uma pesquisa realizada no Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, da UTFPR- Campus Londrina e Cornélio Procópio (PPGMAT). A versão inicial das atividades consta no Apêndice A da dissertação intitulada “Divisão e Multiplicação de Polinômios com o auxílio de Materiais Manipuláveis e Tecnologias”, no qual, o conjunto de tarefas foi testado em uma turma de 8ºano, de uma escola da rede privada de ensino, do município de Campo Mourão – Paraná, em junho de 2018. Após o teste inicial, foram realizadas alterações, e a nova versão consta neste conjunto de atividades, que foi avaliado por uma banca composta pelas professoras Dra. Claudete Cargnin (UTFPR), Dra. Mariana Moran Barroso (UEM), Dra. Zenaide de Fátima Dante Correia Rocha (UTFPR) e Dra. Silvia Terezinha Frizzarini (UDESC).

Com a pesquisa efetuada para o mestrado foi possível desenvolver atividades voltadas para o ensino de multiplicação e divisão de polinômios a partir da área de um retângulo, utilizando recursos como Material Manipulável (MM) e *software* GeoGebra, materiais estes que consideramos despertar o interesse dos alunos em estudar as operações de multiplicação e divisão de polinômios.

Na elaboração das tarefas nos baseamos na Teoria de Registro de Representação Semiótica, cujo pressuposto é que os objetos matemáticos são acessíveis apenas por meio de suas representações semióticas, cuja diversidade favorece a aprendizagem matemática.

A pesquisa realizada no mestrado, que gerou este material, indicou que as questões propostas auxiliaram para que os alunos adquirissem conhecimento sobre o objeto matemático em estudo, isto porque, inicialmente, os alunos possuíam dúvidas, tanto de conhecimento de anos anteriores, quanto de álgebra e, a partir do uso das diversas representações, foi possível observar que ao término das atividades já não havia mais esse tipo de dúvida, em sua grande maioria. O rendimento deles também melhorou após passarem pelas duas estações e foi possível os alunos descobrirem o algoritmo do “Método das Chaves” por meio das atividades.

Para facilitar a utilização docente, neste material, após uma breve introdução, apresentamos as atividades juntamente com orientações, que podem auxiliar você, professor, interessado em utilizá-las, a obter melhores resultados em sala de aula. Ressaltamos que essa é uma proposta, e que cada professor tem a liberdade de acatá-la, modificá-la ou adaptá-la, conforme sua necessidade.

Salientamos aqui que o papel do professor como mediador é importantíssimo para se obter melhores resultados, por isso, antes da aplicação, sugere-se que o professor estude o material, faça as atividades propostas, para conhecer tanto o conteúdo que abarca como o que utiliza como pré-requisitos, e, assim, sinta-se mais seguro para usá-lo em sua sala de aula.

Ao leitor, havendo qualquer dúvida e sugestão, pode entrar em contato por e-mail[11]. Esperamos que a proposta seja útil.

As autoras.

[11] E-mail: dayamoaracoutinho@gmail.com

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Pensando em produzir um material para favorecer a aprendizagem do aluno e dinamizar as aulas de matemática, foi elaborado um conjunto de atividades para trabalhar multiplicação e divisão de polinômios. Utilizar Material Manipulável (MM) e Computadores como recursos didáticos podem motivar os alunos a descobrirem por si só algumas propriedades, ao invés de receber algo pronto e acabado.

As atividades propostas fundamentam-se no Modelo Rotação por Estação do Ensino Híbrido, que pretende propor um ambiente diferenciado para o aprendizado. O Ensino híbrido é um tipo de ensino misto, no qual uma das atividades deve ser obrigatoriamente *on-line*. Quanto ao modelo Rotação por Estação, os alunos são divididos em grupos, e realizam um tipo de rodízio, em que enquanto um grupo está numa estação, os grupos restantes estão em estações diferentes.

No caso desse conjunto de atividades, direcionado a alunos de 8º ano do ensino fundamental, para a aplicação são necessárias duas estações, as quais podem ser replicadas conforme a quantidade de alunos da turma, de modo que tenha estações suficientes de Material Manipulável (MM), bem como o ambiente on-line (GeoGebra). Após um tempo preestabelecido pelo professor, os grupos trocam de estação, logo quem estava no computador irá para o MM e vice-versa. Quanto ao tempo predeterminado pelo docente, sugerimos que apliquem com mínimo de 4 horas de duração, em média 2 horas para cada estação.

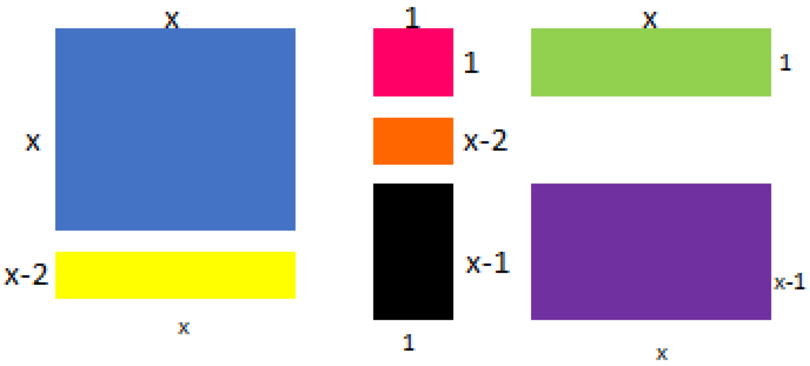
Ao formular as atividades tomou-se o cuidado para que solicitasse aos alunos a utilização de diversas representações, com embasamento teórico na Teoria de Registro de Representação Semiótica, de Raymond Duval. De acordo com esse autor, a compreensão matemática está relacionada à utilização de, no mínimo, dois Registros de Representações Semióticas diferentes para o mesmo objeto de estudo.

As atividades necessitam do MM (que pode ser construído em E.V.A) e de computadores conectados à internet (para acessar o GeoGebra *on-line*).

As tarefas foram estruturadas por níveis de dificuldades, tanto para o MM quanto para o *software*. Sugere-se que o professor entregue apenas a folha referente ao nível da vez e o aluno receba o nível seguinte apenas após ter concluído o anterior. Uma alternativa para melhor rendimento quanto à estrutura das estações, seria alterná-las entre o término de cada nível. Por exemplo: os grupos estão na estação do MM -Nível *Easy*, após o término dessa etapa, eles irão para a estação das TIC – Nível C_1; após o tempo preestabelecido pelo professor, os grupos voltam para a estação do MM – Nível *Medium*, e assim, sucessivamente.

O MM é constituído por retângulos de cores diferentes: azul, amarelo, rosa, laranja, preto e verde, com as respectivas áreas x^2 , $x^2 - 2x, 1, x - 2, x - 1, x, x^2 - x,$ como mostra a Figura 1. As atividades são separadas pelos níveis *Easy*, *Medium* e *Hard*, com os dois primeiros níveis contendo duas questões, no total, e o último, com três questões, sendo que cada nível foi impresso em uma folha. Logo, o aluno recebe o nível posterior somente após terminar o anterior. Para as atividades *on-line*, os níveis foram: C1 e C2.

Figura 1- Projeto do Material Manipulável



Fonte: As autoras

Sugerimos que as tarefas sejam aplicadas de forma intercalada. Porém, caso haja dificuldades quanto à organização de acesso a internet, o professor pode adequar para que as atividades do MM sejam aplicadas em um dia, e as da TIC em outro. Recomendamos, também, que após a aplicação o professor exponha os resultados obtidos, a fim de fomentar discussões sobre as resoluções de forma coletivamente.

Quanto à organização da sala, indicamos que a turma seja dividida em grupos de três alunos, para que as discussões sejam mais produtivas e que todos os membros possam argumentar e serem ouvidos pelos demais.

2 ATIVIDADES

Instruções

i. Para realizar as atividades é necessário relembrar os elementos da operação de divisão, que são:

Dividendo | divisor

quociente

Resto

ii. Com o material manipulável, nós formaremos figuras retangulares. O dividendo representará a soma das áreas de todas as peças, o divisor e o quociente representarão as expressões das medidas dos lados do retângulo, que pode ser formado com as peças do dividendo.

iii. É importante lembrar que as peças do Material Manipulável de cada item devem formar o maior retângulo possível. E que só pode colocar peças lado a lado que tenham a mesma medida: x com x, 1 com 1, e assim por diante.

iv. Para os casos de divisão exata, o divisor e o quociente serão considerados as dimensões de um retângulo cuja área será representada pelo dividendo.

Exemplo:

Lado = divisor

$\boxed{Área = \ Dividendo}$ altura = quociente

v. Para os casos de divisão com restos, o divisor e o quociente serão considerados dimensões do maior retângulo que pode ser construído, o resto será as peças que não se encaixarem ou que sobrarem.

Exemplo:

Lado = divisor

$\boxed{Área = \ Dividendo}$ altura = quociente $\boxed{Resto}$

vi. Todos os cálculos e rascunhos, obrigatoriamente, devem constar nas folhas em anexo.

vii. Todos os retângulos que forem formados em cada exercício devem constar o seu desenho na folha de resolução.

viii. Para cada item dos exercícios é necessário explicitar como você resolveria por um método mais longo, caso não estivesse com o material manipulável.

Após a apresentação das instruções será exposto o Material Manipulável.

Material Manipulável (MM)

As peças do MM são formadas por retângulos, de cores: azul, rosa, laranja, amarelo, verde, roxo e preto, como mostram as figuras abaixo.
As respectivas áreas das peças são:

Azul: x^2

Rosa: 1

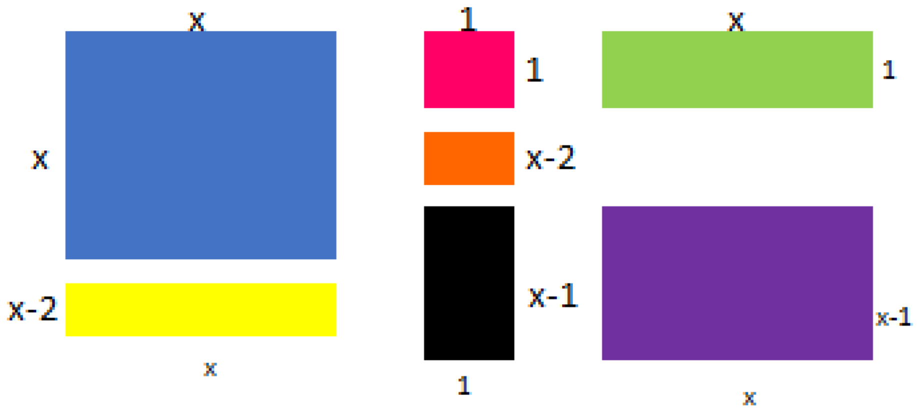
Laranja: $x - 2$

Amarelo: $x^2 - 2x$

Verde: x

Roxo: $x^2 - x$

Preto: $x - 1$



MOLDE PARA CONFECÇÃO DO CONJUNTO DE RETÂNGULOS

A seguir deixamos o molde para impressão, no qual as medidas das peças são:

Azul: $5{,}5\ cm\ x\ 5{,}5\ cm$

Verde: $5{,}5\ cm\ x\ 2\ cm$

Rosa: $2\ cm\ x\ 2\ cm$

Roxo: $5{,}5\ x\ 3{,}5\ cm$

Preto: $3{,}5\ cm\ x\ 2\ cm$

Laranja: $1{,}5\ cm\ x\ 2\ cm$

Amarelo:$1{,}5\ cm\ x\ 5{,}5\ cm$

Para as atividades que constam no produto educacional, serão necessárias 4 peças azuis, 2 peças roxas, 8 peças verdes, 2 peças amarelas, 2 peças laranjas, 2 peças pretas e 9 peças rosas para cada grupo.

OBS: Caso o professor queira utilizar outras medidas, o cuidado para não escolher medidas múltiplas deve ser tomado, para que as dimensões das peças não causem confusão nos alunos.

Aquecendo o uso do Material Manipulável

1) Com o auxílio do material, faça o que se pede:

a) Se você possui três peças de área igual a x, qual a área da região formada por três peças juntas?

b) Qual a área da região formada por4 peças azuis, três verdes e 8 rosas?

c) Pegue uma peça azul de área igual a x^2 e duas de área x. Qual a área das peças juntas? É possível construir um retângulo com essas três peças? Como? Se você conseguiu, deixe registrado o desenho do retângulo que você formou.

d) É possível representar um retângulo com uma peça azul, oito verdes e quinze rosas? Qual a área total da região limitada pelo retângulo formado nessa questão?

ATIVIDADES PARA A ESTAÇÃO DE MATERIAL MANIPULÁVEL

Nível M-*Easy*

1) Com o auxílio do Material manipulável, construa um retângulo com dimensões $x + 2$ e $x + 3$ e determine sua área.

i. Qual a área total obtida?

ii. Explique como você obteve a área total. Escreva o cálculo efetuado (desenhe a figura montada com o material manipulável, indicando as peças utilizadas).

iii. Considerando o cálculo realizado, preencha corretamente os espaços em branco:

$$\frac{\boxed{}}{x+3} = \boxed{}$$

Coloque aqui a expressão que você encontrou para a área

Coloque aqui a expressão que você encontrou para o resultado da divisão

iv. Com base na figura construída com o material manipulável, discuta com seu colega e diga como se deve efetuar a multiplicação $(x + 2) \cdot (x + 3)$. Escreva os passos utilizados para realizar essa operação.

v. Da mesma forma, discuta com seu colega um modo de efetuar a divisão $\frac{x^2+5x+6}{x+3}$ sem a necessidade de utilizar MM.

2) Com o auxílio do Material manipulável, construa um retângulo com dimensões $2x + 2$ e $x + 1$.

i. Qual a área desse retângulo? Como obteve tal resultado? Escreva o cálculo efetuado.

ii. Discuta com seu colega: Se você tivesse a área total e uma das dimensões, seria possível obter a segunda dimensão? De que maneira? Explique.

iii. Considerando sua resposta ao item i. Podemos afirmar que $(2x + 2).(\ x + 1) = \acute{A}rea\ total$?

iv. Com base na resposta do item ii., podemos afirmar que $\frac{\acute{A}rea\ total}{2x+2} = (\ x + 1)$?

v. Para esse caso, podemos afirmar que

$$\frac{Dividendo}{1^{\underline{a}}\ dimensão} = 2^{\underline{a}}\ dimensão?$$

3) Represente algebricamente a seguinte fala: “multiplicar x por 2x e soma com o resultado da multiplicação de 1 por 3.

i. Qual a expressão que representa o enunciado?

ii. Efetue (x+1). (2x+3). O resultado desse item é o mesmo do item anterior?

iii. Explique, por meio da Língua Natural, a multiplicação do item ii.

Nível M-*Medium*

1) Quando calculamos divisão de um número real por outro, por exemplo, podemos fazer a seguinte equivalência: $\frac{7}{5} = \frac{5}{5} + \frac{2}{5} = 1 + \frac{2}{5}$, queremos fazer o mesmo com divisão de polinômios. Considere a seguinte divisão $\frac{2x^2+4x+3}{x+1}$, para isso pegue peças do Material Manipulável que representem o dividendo.

i. É possível formar um retângulo com todas essas peças? Deixe o registro da tentativa.

ii. Caso não seja possível montar um retângulo com todas as peças, qual o número máximo de peças (e quais) necessário para conseguir montar um retângulo (que possua uma das dimensões igual ao divisor)? Após a construção, deixe registrado o seu desenho.

iii. Quantas peças sobraram quando montou o retângulo do item ii? O que essa (s) peça (s) representa (m) na divisão?

iv. Para esse caso, podemos afirmar que

$$\frac{Dividendo}{1ª\ dimensão} = 2ª\ dimensão?$$

2) Com o auxílio do Material utilize uma peça de x^2 de área, quatro de área x e três peças de área 1.

i. É possível formar um retângulo com essas peças? Deixe registrado o desenho de sua tentativa.

ii. Qual a área total do retângulo formado? Quais as dimensões desse retângulo?

iii. Usando as informações do item ii, e considerando as atividades já realizadas no nível M-*Easy*, escreva:

a. Uma fórmula matemática que use a multiplicação de polinômios.

b. Uma fórmula matemática que use a divisão de polinômios.

iv. Caso uma das dimensões do retângulo seja $x + 1$, qual expressão representa a outra dimensão? Como conseguiu chegar a essa resposta? Explique.

Nível M-*Hard*

1) Com o Material Manipulável, forme o maior retângulo com as peças que represente o polinômio dividendo, em que uma das dimensões é o polinômio divisor e a segunda dimensão será o valor do quociente. Em seguida, determine os valores das seguintes divisões:

i) $\frac{4x^2+4x+1}{2x+1} =$

ii) $\frac{2x^2+7x+6}{x+2} =$

2) Calcule as seguintes divisões e construa o retângulo que representa o construiu. Como é possível construir a um retângulo, em que uma das dimensões é dada por dividendo do tipo $ax^2 - c$?

i. $\frac{2x^2-2}{x-1} =$

ii. $\frac{4x^2-1}{2x+1} =$

3) Agora sem utilizar o material manipulável, como você calcularia os seguintes exercícios? Deixe todo o processo que usou para realizá-los e discuta com o colega uma forma de verificar se o resultado obtido está correto.

i. $\frac{x^2-9}{x+3} =$

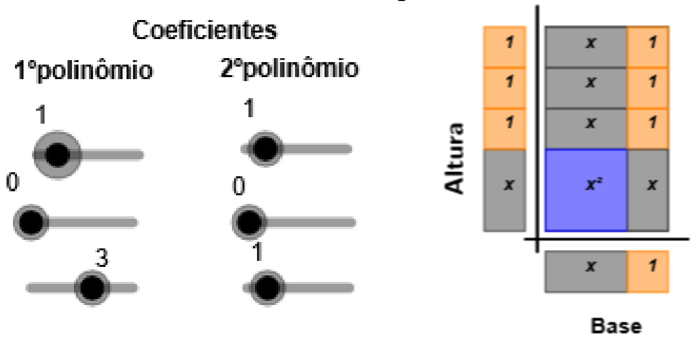
ii. $\frac{x^2+3x+2}{x+1} =$

ATIVIDADES PARA A ESTAÇÃO *ON-LINE*

Nível - C1

Para esse conjunto de tarefas, acesse o site https://www.geogebra.org/m/u5jvA2eM.
Esse site explora a multiplicação de dois polinômios, que representam as dimensões de um retângulo, altura e base (o retângulo pode ser visualizado na parte direita da página). Nele é possível alterar os coeficientes no canto superior esquerdo e, conforme os alteramos, a representação do retângulo também altera. Além disso, o site ainda mostra os dois polinômios que representam a base e a altura e tem o campo para completar com o polinômio que representa a área, resultado da multiplicação entre a base e a altura.

OBS: Para nossas atividades o coeficiente do meio sempre estará em 0 porque iremos trabalhar apenas com uma incógnita.



1) Monte um retângulo onde as dimensões medem $x + 1$ e $x + 3$.

i) Qual a área do retângulo montado?

ii) Escreva uma expressão algébrica que represente o cálculo dessa área.

iii) Caso tivesse a área total e uma das dimensões ao invés das duas dimensões, seria possível obter a segunda dimensão? Como? Explique.

2) Monte um retângulo no qual a área total seja igual a $x^2 + 2x$, mas que tenha uma das dimensões igual a x.

i) Qual a medida obtida para a outra dimensão?

ii) Escreva uma fórmula que relacione a área total e as dimensões do retângulo que use a multiplicação de polinômios.

iii) Na fórmula escrita por vocês no item ii, como devemos proceder para efetuar a multiplicação dos polinômios que representam as dimensões do retângulo, para chegar à expressão da área total?

iv) Ainda com base no desenho formado na tela do seu computador, como você resolveria a divisão $\frac{x^2+2x}{x}$? Qual o resultado dessa divisão?

NÍVEL - C2

Para as questões a seguir utilize o site https://www.geogebra.org/m/fcb2eZuC, no qual é possível explorar a divisão de polinômios por meio da área de um retângulo. O objetivo é encaixar as peças que representam o dividendo, no retângulo no qual a base é a medida do divisor e a altura o quociente da divisão. Para encaixarem pode ser necessário girar as peças.
Vamos relembrar os elementos da divisão: dividendo, divisor, quociente e resto.

Dividendo | divisor

quociente

Resto

1) No site https://www.geogebra.org/m/fcb2eZuC, vá no canto superior esquerdo e altere os coeficientes do polinômio dividendo para 1, 4 e 4, respectivamente, para formar o dividendo $x^2 + 4x + 4$. Altere o coeficiente de x^0 do polinômio divisor para 2, formando $x + 2$.

a. Quais as dimensões do retângulo formado?
b. Escreva uma multiplicação de polinômios que represente a área total desse retângulo e efetue-a.
c. Utilize uma divisão de polinômios para representar a medida de um dos lados. Explique como pode ser efetuada essa divisão sem usar o aplicativo.

2) No mesmo site, monte um retângulo de área igual a $2x^2 + 6x + 4$, e altere o coeficiente de x^0 para 1.

a. Quais as dimensões desse retângulo?
b. Escreva uma multiplicação de polinômios que represente a área total desse retângulo e efetue-a.
c. Utilize uma divisão de polinômios para representar a medida de um dos lados. Explique como pode ser efetuada essa divisão sem usar o aplicativo.

3) Siga as instruções para cada letra desse exercício:

i. Construa um retângulo da área solicitada;
ii. Altere o coeficiente de x^0para o valor solicitado;
iii. Determine as dimensões do retângulo formado;
iv. Escreva uma multiplicação de polinômios que represente a área total desse retângulo e efetue-a.
v. Utilize uma divisão de polinômios para representar a medida de um dos lados. Explique como pode ser efetuada essa divisão sem usar o aplicativo

a) $x + 5x + 6$; coeficiente de $x^0 = 1$
b) $2x^2 + 4x + 16$; coeficiente de $x^0 = 1$

4) No canto superior esquerdo altere os polinômios e construa um retângulo de área igual a x.

a) Observe a representação figural, quais as dimensões de tal retângulo? Consegue estabelecer um padrão entre os valores da base, altura e área?

b) Considere que não há como visualizar tal retângulo, sabendo que uma das dimensões é igual a x, como conseguiria determinar a outra dimensão? Explique

3 DESCRIÇÃO DAS ATIVIDADES

Para melhor aplicação, deixamos cada nível em folhas separadas, para facilitar ao professor que desejar utilizá-las em sala de aula. Sugerimos que a turma se divida em grupos de, no máximo, 3 alunos, para possibilitar a discussão durante as resoluções. Após a separação dos alunos, será o momento de distribuir a folha de instruções.

Tentando minimizar as dificuldades de manipulação dos materiais, sugerimos atividades para aquecimento, cujo objetivo é propiciar condições para os alunos conseguirem realizar rotações e translações de peças, bem como construir outras figuras a partir da inicial, que são as chamadas modificações mereológicas e posicionais (DUVAL, 2012a).

Nesse momento, pedimos aos professores atenção, pois se faz necessário observar como está sendo realizada a construção dos retângulos, para que as peças que estão lado a lado sejam de mesma medida.

Após a resolução dos exercícios de aquecimento (que pode ser dispensada, caso o professor considere desnecessário), o próximo passo é dar a folha de tarefa do nível inicial para cada grupo, de acordo com a estação.

O objetivo do nível MM-*Easy* é que os alunos consigam perceber que a área total do retângulo construído é a soma das áreas das subfiguras que o formam. Além disso, objetiva-se que os alunos concluam que, para divisões exatas, o dividendo forma a área do retângulo construído, no qual o divisor e o resultado da divisão são a base e a altura desse retângulo.

A solicitação do registro da linguagem natural foi pensada para que os alunos pudessem verificar se a forma que eles descrevem os cálculos realizados realmente resulta na expressão algébrica da multiplicação, por exemplo.

Sendo assim, o professor que aplicar essa sequência didática deve estimular a discussão entre os alunos sobre os conceitos de multiplicação, divisão e se a maneira como expõem oralmente as operações condiz com os cálculos realizados.

O nível *Easy* do MM deve fazer o aluno perceber que (para os casos em que fosse possível construir o retângulo em que todas as peças que representam o dividendo) o dividendo dividido por uma das dimensões sempre resulta na outra.

O nível *Medium* MM deve mostrar ao aluno que quando não é possível formar um retângulo com todas as peças que representam o dividendo, significa que a divisão não será exata e, embora os alunos possam não conseguir representar algebricamente o resto, eles não podem concluir que todas as divisões serão exatas, como até então eram. Nesse nível, solicitamos a cautela para que os alunos não concluam que o resultado da divisão com resto é dado somente pela expressão do quociente.

O nível *Hard* pretende que os alunos consigam resolver divisões do tipo $\frac{ax^2-b^2}{x\pm b}$, nas quais precisam retirar uma área de outra, sendo necessário realizar modificações mereológicas e posicionais. Outro fato que o docente deve tomar cuidado é que os retângulos obtidos (que em alguns casos são quadrados) podem confundir e levar os alunos a conclusões errôneas, se os mesmos não tiverem os conceitos de quadrado e retângulo bem esclarecidos.

Para este nível, em específico, alertamos para observarem as conclusões e raciocínios que os alunos estão realizando, visto que podem ser tiradas generalizações inadequadas do tipo que $\frac{x^2-9}{x+3} = x - 3$, justificando que x^2 dividido por x é x e -9 dividido por 3 é -3. Lembramos que, embora essa forma de resolver funcione para esse caso, ela não pode ser generalizada.

Em todos os níveis, há a solicitação para utilizar as representações Figural (RF), Língua Natural (RLN) e algébrica (RA) e, por isso, aconselhamos que o professor, durante a resolução pelos alunos, verifique se as mesmas estão sendo utilizadas e registradas, dado que a conversão e o tratamento de representações são operações cognitivas que auxiliam na compreensão do objeto matemático. Segundo Duval (2012b), *conversão* é uma transformação de representação que ocorre de um tipo de registro para outro, por exemplo, da representação algébrica para a representação figural, e conserva-se o objeto, enquanto os *tratamentos* são modificações nas representações que se mantêm dentro do mesmo registro, como ocorre ao desenvolver uma multiplicação de polinômios, por exemplo.

Salientamos que a observação acurada e dedicação do professor são ferramentas imprescindíveis para prever as possíveis dúvidas e caminhos que poderão ser trilhados pelos estudantes em busca da sua aprendizagem.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Essas atividades apresentam recursos para o entendimento do conceito de divisão e multiplicação de monômios e polinômios. Este Produto Educacional é uma reformulação das atividades elaboradas para a pesquisa de Coutinho (2019).

O envolvimento do aluno com o MM e o *software*, bem como a intervenção do professor durante a execução das atividades, ajudam o processo de ensino e aprendizagem, tendo potencialidades para possíveis deduções de métodos e propriedades, por meio da investigação.

A Teoria de Registro de Representação Semiótica disponibilizou embasamentos para que as atividades fossem elaboradas, solicitando a utilização de diversos registros, tratamentos e conversões, sendo possível o aluno aprender de forma mais eficiente.

Destacamos, ainda, que essa proposta é uma sugestão para professores, que têm autonomia para adequá-las de acordo com a sua necessidade. Esperamos que as atividades possam contribuir com o trabalho docente e na construção dos conceitos de multiplicação e divisão de monômios e polinômios.

REFERÊNCIAS

COUTINHO, D. M. **Divisão e Multiplicação de Polinômios com o auxílio de Materiais Manipuláveis e Tecnologias**. 2019. 118 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) -Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina.

DUVAL, R. Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência. Tradução: Méricles Thadeu Moretti. **Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática**. Florianópolis, v.07, n.1, p.118-138, 2012a.

________. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Tradução: Méricles Thadeu Moretti. **Revista Eletrônica de Educação Matemática – Revemat:** Florianópolis, v.07, n.2, p. 266-297, 2012b.