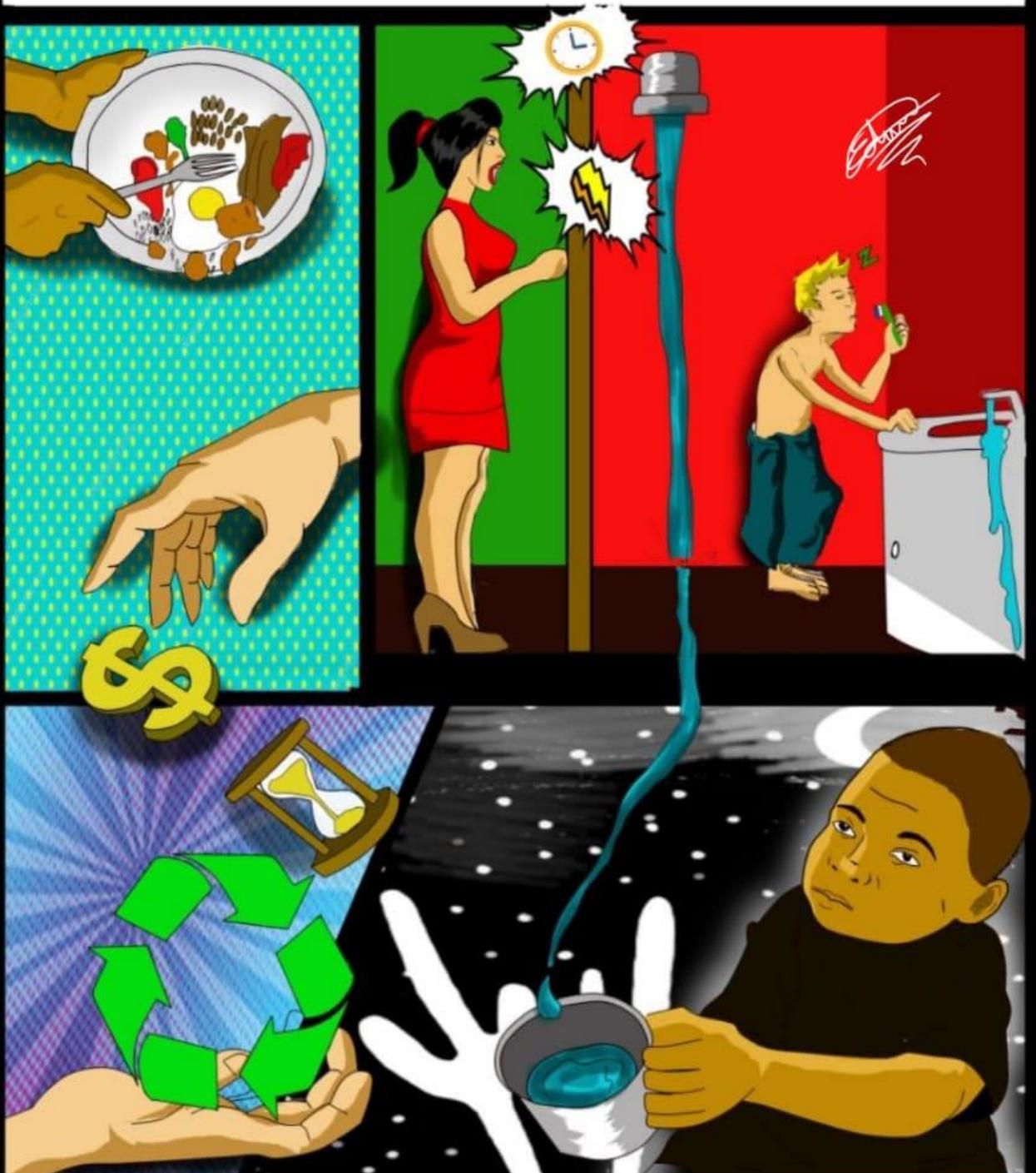


Modelagem Matemática e Educação Matemática Crítica:

Algumas Possibilidades



Autores: Rafael Machado da Silva e Karina Alessandra Pessoa da Silva

ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA CRÍTICA: ALGUMAS POSSIBILIDADES

RAFAEL MACHADO DA SILVA
KARINA ALESSANDRA PESSOA DA SILVA

ILUSTRAÇÃO DA CAPA: EDUARDO CASSIANO

LONDRINA
2019

RAFAEL MACHADO DA SILVA

**ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA E EDUCAÇÃO
MATEMÁTICA CRÍTICA: ALGUMAS POSSIBILIDADES**

Produto Educacional apresentado ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática Câmpus Lodrina/ Cornélio Procópio – PPGMAT, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre.

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Karina Alessandra Pessoa da Silva.

LONDRINA
2019

TERMO DE LICENCIAMENTO

Este Produto Educacional está licenciados sob uma Licença Creative Commons *atribuição uso não-comercial/compartilhamento sob a mesma licença 4.0 Brasil*. Para ver uma cópia desta licença, visite o endereço <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/> ou envie uma carta para Creative Commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, Califórnia 94105, USA.



Apresentação

Caro professor, este produto educacional trata-se de um material curricular e surgiu a partir da dissertação de mestrado: *Atividades de Modelagem Matemática com Estudantes em Vulnerabilidade Social: Uma Análise à Luz da Educação Matemática Crítica*.

Da experiência vivida no desenvolvimento das atividades, construímos este produto educacional, em que buscamos sintetizar atividades que possam ser utilizadas de imediato ou modificadas de acordo com nossas sugestões, ou com o olhar particular de cada professor sobre o material, que desde a capa até as atividades propostas carregam referências da apaixonante viagem entre Modelagem Matemática e Educação Matemática.

A capa faz um panorama das três atividades desenvolvidas: a mãe que bate à porta para alertar o filho sobre o consumo de *energia elétrica do chuveiro*, cuja *água* escorre de forma excessiva, assim como da pia, representando o gasto desse recurso natural que pode ser aproveitado para outras pessoas que não dispõem dos mesmos meios. Ademais, a *comida* sendo jogada fora representa, igualmente, o desperdício não apenas do alimento pronto, mas de todo o processo em que está inserido, considerando plantio, criação, transporte, produção e consumo.

A *energia elétrica*, a *água* e o *desperdícios de comida* foram o viés condutor das atividades que desenvolvemos, na interação com as atividades emergiram as ideias de reaproveitar, não ficar muito tempo utilizando recurso e que o uso inadequado gera gastos desnecessários, sendo todas retratadas na capa.

No início apresentamos um pouco sobre a Modelagem Matemática no Ensino de Matemática, depois as atividades que desenvolvemos, em que apresentamos a descrição de cada uma, seu planejamento e como se deu o desenvolvimento na sala de aula, ao fim apontamos outras possibilidades de abordagem e uma estrutura pronta para ser impressa e levada para a sala de aula.

Que as ideias aqui apresentadas contribuam de maneira satisfatória para o planejamento e desenvolvimento de sua aula, e caso tenha dúvidas, sugestões ou queira relatar sua experiência ao utilizar nosso material curricular nos envie um e-mail, será um prazer compartilhar nossas experiências rm.raffael@gmail.com.

SUMÁRIO

1.Falando sobre Modelagem Matemática.....	7
2.Possibilidades de uso da Modelagem Matemática na sala de aula.....	11
2.1. Atividade 1: Mudança Tarifária da água.....	11
2.1.1 Planejamento da Atividade	11
2.1.2. Interação que emergiu entre professor e alunos.....	13
2.1.3. Conteúdo matemático que emergiu.....	15
2.1.4 Outras possibilidades de abordagem.....	15
2.1.5 Atividade para impressão	17
2.2. Atividade 2 – Desperdício de Comida.....	18
2.2.1 Planejamento da Atividade	18
2.2.2. Interação que emergiu entre professor e alunos.....	18
2.2.3. Conteúdo matemático que emergiu.....	20
2.2.4 Outras possibilidades de abordagem.....	20
2.1.5 Atividade para impressão	22
2.3. Atividade 3 – Tarifa Branca.....	23
2.3.1 Planejamento da Atividade.....	23
2.3.2. Interação que emergiu entre professor e alunos.....	24
2.3.3. Conteúdo matemático que emergiu.....	24
2.3.4 Outras possibilidades de abordagem.....	24
2..5 Atividade para impressão	26
3.Referências.....	27

1. Falando sobre Modelagem Matemática

A Modelagem Matemática é uma tendência da Educação Matemática que possui várias concepções e perspectivas dependendo de como cada professor encaminha a atividade. Kaiser e Sriramam (2006) analisaram trabalhos presentes no ICTMA (International Conference on Teaching Mathematical Modelling and Applications) e no ICMI (International Commission on Mathematical Instruction) e caracterizaram o encaminhamento de uma atividade em seis perspectivas de Modelagem Matemática: realística, epistemológica, contextual, educacional, cognitiva e sociocrítica.

Dentre as seis perspectivas apresentadas, a sociocrítica está relacionada a uma compreensão crítica do mundo, em um contexto político-social, tratando também do papel e a natureza dos modelos matemáticos.

Ainda de acordo com Kaiser e Sriramam (2006), na perspectiva sociocrítica, proporcionar o pensamento crítico do aluno é o foco central do ensino e discussões reflexivas dos alunos são vistas como parte indispensável do processo de Modelagem, assim como essas discussões e reflexões são indispensáveis para o desenvolvimento do pensamento crítico.

Juntamente com a perspectiva sociocrítica tratamos aqui a Modelagem Matemática como uma alternativa pedagógica, caracterizada por Almeida, Silva e Vertuan (2012) como uma alternativa pedagógica na qual se faz uma abordagem por meio da Matemática, de uma situação-problema não essencialmente Matemática. Para Almeida, Silva e Vertuan (2012, p. 17), o encaminhamento da situação-problema inicial para uma situação final é permeado por “um conjunto de procedimentos mediante o qual se definem estratégias de ação do sujeito em relação a um problema”.

Uma atividade de Modelagem Matemática apresenta uma situação-problema inicial que parte da interação com uma situação real, podendo ser não essencialmente matemática. Por se tratar de situações que partem da realidade, a Modelagem Matemática, aproxima os conteúdos matemáticos aprendidos na escola do cotidiano dos alunos.

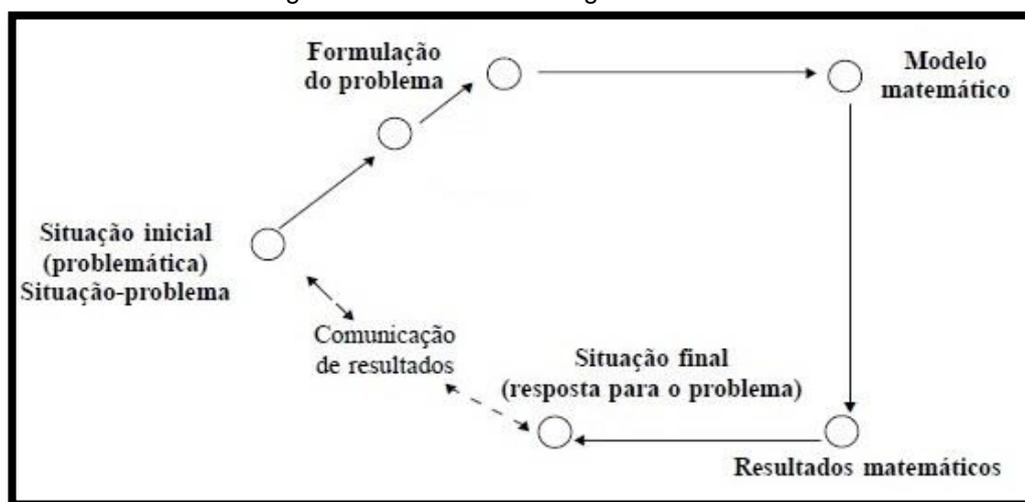
Da situação advinda da interação com a situação inicial, define-se um problema a ser investigado para, na sequência, formular-se hipóteses, definir-se

variáveis. Por meio de conceitos matemáticos, investiga-se o problema e, posteriormente, se chega a um modelo matemático. Conforme salientam Almeida, Silva e Vertuan (2012):

Um modelo é um sistema conceitual, descritivo ou explicativo, expresso por meio de uma linguagem ou uma estrutura matemática e que tem por finalidade descrever ou explicar o comportamento de outro sistema, podendo mesmo permitir a realização de previsões sobre este outro sistema (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p. 13).

A partir do modelo matemático construído, por meio de resultados e tratamentos matemáticos se obtém uma solução para o problema, uma resposta. Tal resposta é considerada a situação final da atividade de modelagem matemática que deve ser interpretada no contexto da situação inicial. A interpretação precisa ser comunicada aos pares que a validam. Se a validação não acontecer, continua-se a investigação, revisitando todas as decisões e encaminhamentos já realizados. O encaminhamento de uma atividade de modelagem pode ser descrito e representado por meio de um ciclo como apresentado na figura 1.

Figura 1 – Ciclo de Modelagem Matemática



Fonte: Almeida e Silva (2012) adaptado.

Embora seja apresentado enquanto um ciclo, o desenvolvimento de uma atividade de modelagem não ocorre de forma linear em que as ações são apresentadas em sequência. Idas e vindas entre uma ação e outra podem estar presentes com vistas a uma melhor análise ou até mesmo uma nova leitura do problema inicial. Almeida, Silva e Vertuan (2012), salientam

Ainda que as fases¹ constituam procedimentos necessários para a realização de uma atividade de modelagem matemática, elas podem não decorrer de forma linear, e constantes movimentos de “ida e vinda” entre essas fases caracterizam a dinamicidade da atividade (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p. 16).

O ciclo orienta o desenvolvimento da atividade de modelagem matemática, estruturando ações e encaminhamentos de forma idiossincrática. Na construção do modelo matemático, diferentes representações se fazem presentes. A maneira com que tal modelo é construído é decorrente de fatores como o conhecimento matemático dos alunos, ou mesmo da familiaridade em trabalhar com atividades dessa natureza.

Ao se tratar de familiaridade dos alunos com as atividades de modelagem matemática, autores como Almeida e Dias (2004) sugerem que a implementação de atividades de modelagem em sala de aula, ocorra de forma gradativa. Esse procedimento é caracterizado pelas autoras como familiarização dos alunos e é configurado em três momentos:

Em um primeiro momento, são abordadas, com todos os alunos, situações em que estão em estudo a dedução, a análise e a utilização de um modelo matemático, a partir de uma situação problema já estabelecida e apresentada pelo professor; neste momento, a formulação de hipóteses e a investigação do problema, que resulta na dedução do modelo, são realizadas em conjunto com todos os alunos e o professor; Posteriormente, uma situação problema já reconhecida, juntamente com um conjunto de informações, pode ser sugerida pelo professor à classe, e os alunos, divididos em grupos, realizam a formulação das hipóteses simplificadoras e a dedução do modelo durante a investigação e, a seguir, validam o modelo encontrado; Finalmente, os alunos, distribuídos em grupos, são incentivados a conduzirem um processo de Modelagem, a partir de um problema escolhido por eles, devidamente assessorados pelo professor (ALMEIDA; DIAS, 2004, p. 7).

Os momentos de familiarização possibilitam o desenvolvimento de certa autonomia dos alunos frente à situação-problema que pode ser investigada por meio da Matemática e colocam o professor como um mediador e orientador no desenvolvimento da atividade.

¹ Conjunto de procedimentos necessários para configuração, estruturação e resolução de uma situação problema, caracterizadas como: inteiração, matematização, resolução, interpretação de resultados e validação. (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p. 15).

As atividades de modelagem matemática têm por característica o trabalho em equipe, como pontuam Almeida e Dias (2004). Em sala de aula, atividades de modelagem podem ser vistas como essencialmente cooperativas, em que a cooperação e a interação entre os alunos e entre professor e aluno têm papel importante na construção do conhecimento e, conseqüentemente, da aprendizagem.

Da interação entre professor/alunos e alunos/alunos existe a possibilidade de emergirem diálogos que podem ser ponto de partida para o desencadeamento da construção de conhecimentos, bem como reflexões sobre o conteúdo matemático envolvido na situação, além de subsidiar questões mais amplas que emergem a partir da defesa de pontos de vista entre os alunos e entre os alunos e o professor. Conforme salientam Ferruzzi e Almeida (2015),

as ações dos alunos não são exclusivas de atividades interativas, porém, a diferença reside no fato que, em interação, estas ações são, muitas vezes explicitadas para o outro, atuando como auxiliadoras e, ao mesmo tempo atuando como reorganizadoras do pensamento, promovendo a estruturação e novas aprendizagens (FERRUZZI; ALMEIDA, 2015, p. 392).

As interações entre professor/alunos e alunos/alunos, são caracterizadas por Alrø e Skovsmose (2010), como diálogos. Para os autores o diálogo é “uma conversação que visa a aprendizagem” (ALRØ E SKOVSMOSE 2010, p. 119). Existem pesquisas que partindo dos conceitos de diálogo de Alrø e Skovsmose (2010) realizam articulação com a Modelagem Matemática, (FERRUZZI; ALMEIDA, 2015; SOARES; VIER, 2017; COSTA, 2018).

Nesse contexto, apresentamos a seguir, possibilidades de uso da Modelagem Matemática na sala de aula.

2. Possibilidades de uso da Modelagem Matemática na sala de aula

Neste tópico apresentamos a descrição e o encaminhamento de três atividades desenvolvidas com os alunos na sala de aula, destacando seu planejamento, interação entre professor e alunos, organização da sala de aula, a Matemática que emergiu no desenvolvimento das atividades e outras possibilidades que o professor pode adaptar no âmbito de sala de aula.

2.1. Atividade 1: Mudança Tarifária da água

No primeiro semestre de 2017 a Companhia de Saneamento do Paraná (SANEPAR), comunicou aos usuários que os intervalos de consumo e suas respectivas tarifas serão alterados a fim de proporcionar uma cobrança mais justa a todos.

Assim, no segundo semestre de 2017 o professor escolheu como situação-problema essa mudança na cobrança da tarifa de água tendo como fator de desencadeamento da atividade uma reportagem de jornal que anunciava a mudança feita pela SANEPAR e os valores anteriores e posteriores a mudança.

2.1.1. Planejamento da atividade

O planejamento dessa atividade se iniciou com a busca de uma situação com impacto amplo, ou seja, que não permeasse apenas o dia a dia dos alunos, mas de uma parcela maior da sociedade. E nessa busca nos deparamos com a mudança tarifária da água.

Para iniciar o desenvolvimento da atividade sugerimos que os alunos estejam divididos em grupos e que o professor entregue para os grupos as informações da figura 2, que contém a reportagem sobre a mudança na forma de cobrança e os valores antes e depois da mudança.

Figura 2 – Situação-Problema

Companhia de abastecimento de água inaugura novo método de composição tarifária para os consumidores que pagam o valor mínimo. A partir de agora todos os usuários tem que pagar um valor mínimo de 5 metros cúbicos

Tabela 1. Tarifa antes da mudança

RESIDENCIAL		TARIFA NORMAL		
		Até 10 m ³	Excedente a 10m ³	Excedente a 30m ³
ÁGUA Todas as Localidades Operadas		33,74	5,06/m ³	0,63/m ³
Capital	ESGOTO – 85%	29,498	4,30/m ³	7,34/m ³
	ÁGUA E ESGOTO	62,442	9,36/m ³	15,97/m ³
Demais Localidades	ESGOTO – 80%	26,90	4,00/m ³	6,90/m ³
	ÁGUA E ESGOTO	60,73	9,11/m ³	10,53/m ³

Tabela 2. Tarifa após a mudança

RESIDENCIAL		TARIFA RESIDENCIAL NORMAL					
		Até 5 m ³	6 a 10	11 a 15	16 a 20	21 a 30	> 30
ÁGUA Todas as Localidades Operadas		32,90	1,22 /m ³	5,67 /m ³	5,70 /m ³	5,75 /m ³	5,72 /m ³
Capital	ESGOTO	27,57	0,87 /m ³	4,82 /m ³	4,85 /m ³	4,89 /m ³	8,26 /m ³
	ÁGUA E ESGOTO	60,87	1,89 /m ³	10,49 /m ³	10,55 /m ³	10,64 /m ³	17,98 /m ³
Demais Localidades	ESGOTO	26,32	0,82 /m ³	4,54 /m ³	4,56 /m ³	4,60 /m ³	7,78 /m ³
	ÁGUA E ESGOTO	59,22	1,84 /m ³	10,21 /m ³	10,26 /m ³	10,35 /m ³	17,50 /m ³

Fonte: Os autores.

A partir das informações contidas na Figura 2, e orientados pelo professor os alunos devem elaborar um problema que possa ser investigado por meio da Matemática. Quando essa atividade foi desenvolvida os alunos envolvidos tiveram dificuldades em compreender como os dados estavam dispostos e acharam as tabelas confusas, sendo assim emergiu um problema a se investigar, como tornar a tabela mais clara.

Com a problemática de tornar as informações mais claras, cada grupo partiu para uma forma de apresentar essa informação mais clara, um grupo montou uma tabela contendo a quantidade de metros cúbicos de água consumidos seguido de seu respectivo valor a pagar, o outro escreveu expressões matemáticas para cada intervalo, em que para saber o valor a pagar bastava substituir o asteriscos (*) pelos metros cúbicos consumidos, como mostra a Figura 3.

Figura 3 – Modelos matemáticos Atividade 1

Água, dados	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	32,90	33,92	34,94	35,96	36,98	38,00	38,57	44,24	49,91	55,58	61,25
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	
	67,90	72,90	77,90	82,90	87,90	92,90	101,90	107,69	113,40	119,15	124,90
	27	28	29	30							
	130,69	136,40	142,10	147,90							

$6 \text{ a } 5 = 32,90 + 1,02 \cdot *$	$5 \text{ m}^3 = 32,90$
$13 \text{ a } 15 = 32,90 + 5,67 \cdot *$	$6 \text{ a } 10 = 32,90 + 1,02 \cdot *$
$16 \text{ a } 20 = 32,90 + 5,70 \cdot *$	$11 \text{ a } 15 = 32,90 + 5,67 \cdot *$
$21 \text{ a } 30 = 32,90 + 5,75 \cdot *$	$16 \text{ a } 20 = 32,90 + 5,70 \cdot +$
$30 + = 32,90 + 9,72 \cdot *$	

Fonte: Relatório dos Alunos.

2.1.2. Interação que emergiu entre professor e alunos

Com o objetivo de ir além de resolver um problema advindo dos dados, o professor interagiu com alunos para que se levantassem discussões sobre o impacto social da mudança, e de que essas discussões se caracterizassem como diálogos.

Para Alrø e Skovsmose (2010), diálogo é uma conversa que visa a aprendizagem. A configuração de diálogo defendida por Alrø e Skovsmose (2010), é composta por: realizar uma investigação, correr riscos e promover a igualdade. Realizar uma investigação é abandonar a comodidade da certeza e deixar se levar pela curiosidade; correr riscos significa acreditar que algo imprevisto possa acontecer; promover a igualdade coloca os alunos em uma mesma posição, pois, em um diálogo um participante não pode estar acima do outro.

Assim, Alrø e Skovsmose (2010), por meio dessa composição, atribuem as qualidades de um diálogo, que são: estabelecer contato, com a intenção de fazer junto; perceber, tomar consciência do que ainda não se sabia; reconhecer, saber que algoritmo usar; posicionar-se, ao dizer aquilo que se pensa; pensar alto, expor em voz alta o que se está pensando; reformular, fazer novamente algo que se pensava estar correto; desafiar, mudar uma perspectiva já estabelecida e avaliar.

Para que isso ocorra o professor deve estabelecer contato com os alunos, umas das maneiras é utilizar as frases na primeira pessoa do plural, pois, ao usar a frase na primeira pessoa do plural, o professor sugere aos alunos que vai ajudá-los na resolução da atividade, estabelecendo contato com os alunos. E se as respostas dos alunos também forem nessa direção de estar junto com o professor o convite ao desenvolvimento da atividade foi aceito. Para Ferruzzi e Almeida (2015, p. 381), “este estabelecimento pode ser observado por meio de: apoio, questões investigativas acompanhadas de retorno, confirmações recíprocas, preocupações com o entendimento do outro, etc”.

A partir de então as outras qualidades de diálogo devem ser buscadas no processo de investigação da situação-problema abordada, fazendo perguntas que proporcionem reflexão, sempre se mantendo como parte integrante no desenvolvimento da atividade.

Do olhar que os alunos tiveram sobre os dados apresentados, os grupos entenderam, nessa atividade, que faltava clareza na disposição dos valores e que isso dificultava a interpretação, sendo assim, se propuseram a elaborar uma maneira que fizesse com que a informação fosse mais clara, os modelos matemáticos construídos pelos alunos, estão nas figuras 4 e 5.

Na figura 4, os alunos realizam cálculos e constroem um quadro com os valores em reais para cada metro cúbico gasto, somando a cada m^3 após os 5 m^3 , o valor anterior mais o excedente, ou seja, um modelo matemático que descreve a situação investigada, e possibilita a responder ao problema que os alunos definiram como sendo falta de clareza da tabela como apresentado.

Figura 4 – Modelo matemático para o problema em estudo.

Água usada...	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	32,30	33,92	34,98	36,96	36,98	38,00	38,52	44,24	49,91	55,58	61,25
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	
	67,30	72,80	78,50	84,20	89,90	96,15	101,90	107,65	113,40	119,15	124,90
	27	28	29	30							
	130,65	136,40	142,15	147,90							

Fonte: Relatório dos alunos.

E na figura 5, mostra o modelo matemático feito por outros alunos, em que inseriram para cada intervalo da tabela uma expressão que representa o

valor a pagar e a quantidade de m³ de água é representado pelo símbolo asterisco (*)

Figura 5 – Modelo Matemático Grupo 2

The image shows a handwritten mathematical model with two columns of equations. The left column lists intervals of water consumption (6 to 30 m³) and their corresponding costs, each followed by an asterisk. The right column shows a base cost for 5 m³ and then repeats the cost equations for intervals 6 to 20 m³.

$$\begin{array}{l} 6 \text{ a } 10 = 32,90 + 1,00 \cdot * \\ 11 \text{ a } 15 = 32,90 + 5,67 \cdot * \\ 16 \text{ a } 20 = 32,90 + 5,70 \cdot * \\ 21 \text{ a } 30 = 32,90 + 5,75 \cdot * \\ 30 + = 32,90 + 9,72 \cdot * \end{array} \quad \begin{array}{l} 5 \text{ m}^3 = 32,90 \\ 6 \text{ a } 10 = 32,90 + 1,00 \cdot * \\ 11 \text{ a } 15 = 32,90 + 5,67 \cdot * \\ 16 \text{ a } 20 = 32,90 + 5,70 \cdot * \end{array}$$

Fonte: Relatório dos Alunos.

2.1.3. Conteúdo matemático que emergiu

Como se trata de uma atividade de modelagem matemática os conteúdos emergem no desenvolvimento, elencamos que alguns possíveis conteúdos: porcentagem, intervalos reais, função definida por mais de uma sentença.

O conceito de porcentagem talvez seja o que mais rápido aparecerá, pois a primeira sugestão deles foi ver a porcentagem de aumento de cada intervalo, o que já de imediato é um item que pode ser explorado, visto que uma das mudanças de uma tarifa para a outra foi a quantidade de intervalos, podendo o professor abordar se o intervalo é aberto ou fechado, a figura 5 mostra o modelo feito por um dos grupos, em que os alunos usaram diferentes expressões para facilitar o entendimento dos valores a serem pagos por cada m³ de água.

2.1.4. Outras possibilidades de abordagem

Outras possibilidades nessa atividade consistem em abordar mais sobre se as casas decimais estão presentes na composição do valor a ser pago, juntamente com os alunos caracterizar como uma função definida por mais de uma sentença, como na figura 6, uma exploração gráfica da função, trazendo conceitos de continuidade, domínio e imagem, e também que cada aluno faça um comparação utilizando o consumo de suas casas.

Figura 6 – Função do gasto de água

$$f(x) = \begin{cases} 33,74, & 0 < x \leq 10 \\ (x - 10)5,06 + 33,74, & 10 < x \leq 30 \\ (x - 30)8,63 + 134,94 & x > 30 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 32,9, & 0 < x \leq 5 \\ (x - 5)1,02 + 32,9, & 5 < x \leq 10 \\ (x - 10)5,67 + 38 & 10 < x \leq 15 \\ (x - 15)5,7 + 66,35 & 15 < x \leq 20 \\ (x - 20)5,75 + 94,85 & 20 < x \leq 30 \\ (x - 30)9,72 + 152,35 & x > 30 \end{cases}$$

Fonte: Os autores.

O professor também pode utilizar as tabelas e as perguntas abaixo para o desenvolvimento da atividade.

- 1) Quais as principais mudanças da tabela 1, para tabela 2?

- 2) Calcule o valor do consumo em cada uma das tabelas, para os valores de 4, 7 e 13 m³.

- 3) A alteração foi vantajosa para todos os usuários?

- 4) Represente cada situação por meio de uma expressão matemática.

- 5) Construa um gráfico que represente cada situação.

2.1.5. Atividade para impressão

Caro professor, aqui trazemos a atividade de modo a ser impressa e levada para a sala de aula.

Grupo: _____

Companhia de abastecimento de água inaugura novo método de composição tarifária para os consumidores que pagam o valor mínimo. A partir de agora todos os usuários tem que pagar um valor mínimo de 5 metros cúbicos.

A tabela 1, mostra os valores antes da mudança e a tabela 2, mostra os valores após a mudança.

Tabela 1			
Residencial	Até 10m ³	Excedente a 10 m ³	Excedente a 30 m ³
Água todas as localidades	33,74	5,06	8,63

Tabela 2						
Residencial	Até 5 m ³	6 a 10 m ³	11 a 15m ³	16 a 20m ³	21 a 30m ³	Excedente a 30 m ³
Água todas as localidades	32,90	1,02	5,67	5,70	5,75	9,72

A mudança foi boa ou ruim para população?

2.2. Atividade 2 – Desperdício de Comida

A atividade Desperdício de Comida foi a segunda atividade desenvolvida com os alunos, em conversa entre o professor e os alunos sobre possíveis temas para as próximas aulas, os alunos então decidiram que gostariam de investigar o Desperdício de Comida na escola no almoço.

2.2.1. Planejamento da atividade

Com a sala toda reunida, o professor decide juntamente com os alunos alguns procedimentos para iniciar a atividade, como por exemplo:

- a necessidade uma lixeira para que se jogassem apenas a comida e que um dos alunos ficaria cuidando para que ninguém jogasse errado.
- número de coleta de dados empíricos.
- controle de quantas refeições foram servidas no dia da coleta de dados.
- uma balança.

Da quantidade de comida que foi jogada no lixo os alunos precisam elaborar uma situação-problemas para investigarem por meio da matemática, duas possibilidades são:

- Quantos pratos esse desperdício encheria?
- Qual a porcentagem de comida desperdiçada?

Ao prosseguirem com essa investigação os alunos irão se deparar com um obstáculo, para responder a essas questões é necessário saber a quantidade de massa de comida em um prato, o que requer a estimativa de um valor, ou uma nova coleta de dados onde todos os pratos sejam medidos antes e após cada pessoa colocar a comida.

Com o valor da quantidade de massa de um prato definido é possível responder as questões e refletir como essas informações podem ajudar a conscientizar sobre o desperdício de comida.

2.2.2. Interação que emergiu entre professor e alunos

Em todas as atividades nos pautamos na importância dos diálogos como definido por Alrø e Skovsmose (2010), portando em todos os momentos o professor ao instigar os alunos a discutirem sobre o tema, buscou utilizar as

frases na primeira pessoa do plural, isso proporciona que se estabeleça a característica de diálogo estabelecer contato, pois, ao usar a frase na primeira pessoa do plural, o professor sugere aos alunos que vai ajudá-los na resolução da atividade.

Durante a coleta de dados, principalmente quando estão utilizando a balança, os alunos falam livremente sobre a atividade que estão desenvolvendo. Nesse momento, as qualidades de diálogo perceber, tomar consciência do que ainda não se sabia; posicionar-se, ao dizer aquilo que se pensa; pensar alto, expor em voz alto o que se está pensando, aparecem. Foi em um momento como esse que os alunos falando sobre a quantidade de desperdício da primeira coleta de dados concluíram que osso não é desperdício.

Outro momento em que a interação professor/aluno demandou muita atenção foi quando os alunos após problematizarem a situação, se deparam com o fato de que para responder as questões era necessário ter um quantidade de massa de um prato, nesse momento é importante o professor se portar como participante do processo fazendo perguntas que levem os alunos a descobrirem por si só a necessidade de uma nova coleta de dados ou supor um valor. Para exemplificar mostramos a seguir um recorte do diálogo entre o professor e os alunos durante essa etapa da atividade.

Laura: A gente tem aqui a quantidade de comida que foi jogada fora nos 3 dias, agora é somar e ver quantos pratos que dá.

Marcos: Mas qual o tamanho do prato?

Rosane: Professor, qual peso do prato?

Prof: Ninguém anotou quanto era pra gente por a tara na balança?

Rosane: Não professor, pra gente saber quantos pratos encheria tem que saber quanto foi posto no prato.

Prof: Assim, é isso nós não fizemos, e agora?

Marcos: Pode supor um valor, tipo 200g.

Prof: Poder pode, e o que mais podemos fazer?

Marcos: Pesar um prato cheio.

Prof: Um só?

Laura: De quem almoçar.

Prof: Sim, vamos ter que pesar de todos em um outro almoço. Mas pensem como seria como o Marcos falou.

Segundo Ferruzzi e Almeida (2015, p. 383), “a busca do professor na tentativa de reconhecer o princípio ou procedimento que o aluno pretende utilizar conduz o estudante a justificar seu raciocínio ou procedimento, guiando-o em

seu reconhecimento”. Quando o professor diz, “*Poder pode, e o que mais podemos fazer?*”, ele continua **estabelecendo contato** com os alunos, uma outra característica de diálogo, que sugere que o professor está junto com os alunos na resolução do problema e vai ajuda-los quando necessário, mostrando que está ali para resolver o problema junto com eles.

No recorte de diálogo também podemos observar a característica de diálogo **promover a igualdade**, pois, aceita tanto as sugestões de supor um valor quanto de fazer uma nova coleta de dados, o que desencadeia as outras duas características de diálogo, **promover uma investigação**, pois os alunos terão que analisar duas possibilidades, e **correr riscos** deparando-se com algo que ainda não conhecem.

2.2.3. Conteúdo matemático que emergiu

Em uma atividade de modelagem matemática os conteúdos emergem no desenvolvimento, os possíveis conteúdos que podem emergir e serem trabalhados na atividade são: operações com números reais, proporcionalidade, porcentagem, unidades de medida, medidas de tendência central.

Como as situações-problema elaboradas pelos alunos buscam estabelecer relações entre a quantidade de comida desperdiçada e um prato, e em relação ao todo, proporcionalidade e porcentagem são conceitos matemáticos que podem emergir primeiro, seguidos das unidades de medida de massa, uma vez que no dia-a-dia é comum a confusão entre peso e massa, e reconhecer o grama (g) como a unidade de medida de massa, e quanto os alunos se deparam com a necessidade de um valor de massa no prato para responder às problemáticas, caso optem por uma nova coleta de dados irão necessitar utilizar uma medida de tendência central para escolher um valor que represente a distribuição.

2.2.4. Outras possibilidades de abordagem

Uma possibilidade é utilizar a atividade com os problemas prontos a fim de que as discussões desencadeiem na sequência, uma abordagem aprofundada sobre medidas de dispersão e medidas de tendência central, e sugerindo aos alunos que respondam a situação-problema apresentada como a seguir.

Figura 7 – Situação-problema desperdício de comida

Uma turma de alunos estava estudando sobre desperdício e resolveram investigar o desperdício de comida na hora do almoço. Assim, após algumas discussões, se chegaram a duas perguntas a serem respondidas.

- Qual o percentual de comida desperdiçada?
- Qual a quantidade de comida o que foi desperdiçado encheria?

Abaixo os dados coletados:

1º dia: 20 pessoas almoçaram. 674 g desperdício 474 g sem osso Cardápio: Arroz, feijão, salada e carne de frango	2º dia: 29 pessoas almoçaram. 1.424 g desperdício 1.002 g sem osso Cardápio: Arroz, feijoada, salada e linguiça	3º dia: 58 pessoas almoçaram. 948 g desperdício Cardápio: Arroz, feijão, salada e linguiça
---	--	--

Fonte: Os autores

Os alunos provavelmente sentirão a necessidade de ter um valor para a massa de comida de um prato e nesse momento o professor entrega uma tabela com os valores de vários pratos, como segue:

Figura 8 – Massa de comida nos pratos

Massa de comida nos pratos 4º coleta de dados				
558	556	294	384	518
818	270	252	264	212
280	458	432	304	600
346	284	388	382	256
428	476	300	314	323
406	394	220	326	432
524	510	512	342	326

Fonte: Os autores

Também é possível utilizar as informações das tabelas e sugerir as perguntas a seguir:

- 1) Qual a média de massa de cada prato?
- 2) Qual o percentual de comida desperdiçada?

- 3) Quantos pratos de comida, o que foi desperdiçado poderia encher?
- 4) Que outra(s) medida(s) de tendência central poderia ser utilizada para responder as perguntas 2 e 3? Justifique.

2.2.5. Atividade para impressão

Nesse tópico apresentamos a atividade como sugestão para ser impressa e levada para sala de aula.

Grupo: _____

Uma turma de alunos estava estudando sobre desperdício e resolveram investigar sobre o desperdício de comida na escola onde almoçavam, coletando os dados abaixo:

1º dia: 20 pessoas almoçaram. 674 g desperdício 474 g sem osso Cardápio: Arroz, feijão, salada e carne de frango	2º dia: 29 pessoas almoçaram. 1.424 g desperdício 1.002 g sem osso Cardápio: Arroz, feijoada, salada e linguiça	3º dia: 58 pessoas almoçaram. 948 g desperdício Cardápio: Arroz, feijão, salada e linguiça
---	--	--

Massa de comida nos pratos 4º coleta de dados

558	556	294	384	518
818	270	252	264	212
280	458	432	304	600
346	284	388	382	256
428	476	300	314	323
406	394	220	326	432
524	510	512	342	326

- Quantos pratos o desperdício encheria?
- Qual o percentual de comida desperdiçada?

2.3. Atividade 3 – Tarifa Branca

No início do ano de 2018 a Agência Nacional de Energia Elétrica, autorizou o início da adesão pelos usuários a Tarifa Branca da Energia Elétrica, a adesão é gradativa iniciando pelos usuários de alta tensão até os de baixa tensão.

A Tarifa Branca, consiste em pagar um valor menor que o convencional para o consumo fora do horário de pico², e um valor maior durante o horário de pico.

Nesse contexto a terceira atividade denominada Tarifa Branca, surgiu como iniciativa do professor após os alunos decidirem que gostariam de investigar sobre energia elétrica. A proposta do a viabilidade de adesão à Tarifa Branca. A seguir apresentamos uma sugestão de planejamento da aula para se trabalhar esse contexto.

2.3.1. Planejamento da atividade

Para iniciar a atividade o professor pode dividir os alunos em grupo de 3 a 4 alunos, e para que os alunos interajam com o tema, propor que façam uma pesquisa de “onde” vem a energia elétrica, e provavelmente encontrarão as diferentes formas de geração de energia, a maneira de transmissão e como calcular a quantidade de energia elétrica.

Durante esse levantamento de informações o professor deve interagir com os alunos para que eles discutam sobre o consumo de energia, essas reflexões podem gerar diálogos que se remetam ao uso de eletrodomésticos, e principalmente ao tempo no banho, uma vez que, o chuveiro é um dos itens que mais consome energia.

Se os alunos falarem sobre o chuveiro elétrico, é uma oportunidade para o professor comentar sobre o gasto de energia do chuveiro e pedir para que os alunos investiguem qual a duração do seu banho e dos demais familiares.

Com esses dados, em uma outra aula, o professor questiona os alunos como saber o quanto de energia elétrica todos os banhos em casa, e caso eles tenham encontrado na pesquisa como calcular a energia elétrica o professor orienta na utilização do algoritmo e na sequência que pesquisem o que é a Tarifa

² Horário de pico das 18h às 21h – Intermediário das 17h às 18h e das 21h às 22h – Fora do pico das 22h às 17h.

Branca, e respondam a problemática: é viável para sua família aderir a Tarifa Branca?

2.3.2. Interação que emergiu entre professor e alunos

No desenvolvimento dessa atividade, os alunos se comentaram durante as pesquisas iniciais sobre os pais pedirem para que não demorassem no banho, esse comentário foi o desencadeador da coleta de dados e matematização da problemática, sobre a viabilidade de adesão à Tarifa Branca. A seguir um recorte do diálogo entre professor/alunos e alunos/alunos que retrata essa situação.

Prof: Por que os pais sempre pedem para que a gente tome banho rápido?

Vinícius: Porque o chuveiro gasta mais.

Professor: Será que conseguimos saber o quanto o chuveiro gasta?

Francisco: Não é só usar aquela fórmula lá que a gente pesquisou?

Vinícius: Mas como vou saber do chuveiro lá de casa?

Prof: É, cada um tem um chuveiro diferente em casa, mas podemos fazer o que o Francisco disse, e como podemos fazer isso aqui?

Vinícius: Só pesquisar um chuveiro aqui na internet.

Laura: E esse triângulo t é o que mesmo?

Francisco: O tempo que fica ligado.

Nesse diálogo é possível evidenciar a qualidade de diálogo **reconhecer**, quando o Francisco diz, “*Não é só usar aquela fórmula lá que a gente pesquisou?*”. Para Alrø e Skovsmose (2010, p. 110), **reconhecer** “é necessário para que se dê sentido às atividades e aos cálculos subsequentes.” A fórmula ($E = POT \cdot \Delta T$), a qual Francisco faz referência foi encontrada durante a pesquisa.

2.3.3. Conteúdo matemático que emergiu

Nessa atividade de modelagem matemática o conteúdo que emergiu foi a utilização do algoritmo do cálculo da energia, que remete a resolução de equações, também transformações de medida de tempo e entre outras unidades de medidas, bem como proporcionar a interdisciplinaridade entre matemática e física.

2.3.4. Outras possibilidades de abordagem

A configuração da atividade pode possibilitar a utilização de outros itens que funcionam com energia elétrica, e trabalhar o consumo de energia em toda

a casa, observando quais itens consomem mais, como micro-ondas, ferro de passar roupa, entre outros.

2.3.5. Atividade para impressão

A seguir trazemos uma atividade pronta para ser impressa.

Grupo: _____

A energia elétrica está presente no nosso cotidiano o tempo, entre às 18 e 21 horas temos o chamado horário de pico, intervalo de tempo no qual o consumo de energia elétrica é mais alto. Além do horário de pico temos o intermediário 17h às 18h e 21h às 22h e o fora do pico das 22h às 17h.

O consumo de energia elétrica está ligado a potência do aparelho elétrico e o tempo que este fica ligado, assim é possível calcular a quantidade de energia elétrica (kWh) consumida por um determinado aparelho elétrico multiplicando a potência (W) pelo tempo (h) que fica ligado.

Uma família com um chuveiro de 500 W, utiliza o chuveiro como descrito na tabela 1, e que a tabela 2 mostra a tarifa em cada faixa de horário, determine a quantidade de energia elétrica por eles consumida em cada faixa de horário e qual a diferença em 30 dias entre cada faixa.

Membro da Família	Duração do banho	Horário do banho
Pai	12 minutos	Entre 19h e 21h
Avô	13 minutos	Entre 16h e 21h
Filho 1	18 minutos	Entre 18h e 22h
Filho 2	21 minutos	Entre 22h e 23h
Filha	20 minutos	Entre 15h e 17h

Tarifa Branca Fora do Pico (22h às 17h)	0,22419 kwh
Tarifa Branca Intermediária (17h às 18h e 21h às 22h)	0,32629 kwh
Tarifa Branca Pico (18h às 21h)	0,51792 kwh

4. Referências

ALMEIDA, L. W.; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na Educação Básica**. São Paulo: Contexto 2012.

ALMEIDA, L. M. W.; DIAS, M. R. Um estudo sobre o uso da modelagem matemática como estratégia de ensino e aprendizagem. **Boletim de educação matemática**, Rio Claro, v. 17, n. 22, p. 19-36, 2004.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A. P. Semiótica e as ações cognitivas dos alunos em atividades de Modelagem Matemática: um olhar sobre os modos de inferência. **Ciência & Educação**, v. 18, n. 3, p. 623-642, 2012.

ALRØ, H., SKOVSMOSE, O. **Diálogo e Aprendizagem em Educação Matemática**. Belo Horizonte, Autêntica, 2010.

COSTA, J. A. A. **Diálogo em sala de aula: interações mediadas pela investigação matemática**. 2018. 90 p. Dissertação (Mestrado) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2018.

FERRUZZI, E. C.; ALMEIDA, M. L. W. Diálogos em modelagem matemática. **Ciência & Educação**, v. 21, n. 2, p. 377-394, 2015.

SILVA, R. M. **Atividades de Modelagem Matemática com estudantes em Vulnerabilidade Social: uma análise à luz da Educação Matemática Crítica**. 2019 116p. Dissertação Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática – Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Londrina, 2019.

SOARES, D. S.; VIER, G. Os diálogos em um ambiente de análise de modelos e tecnologias: queda de um objeto com resistência do ar. **Educere Et Educare**, v.12, n.24, Jan/Abr – 2017

