UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

FLAVIA CERQUEIRA CEZAR

INTERDEPENDÊNCIA ENTRE PROPORCIONALIDADE E O ENSINO DE EDUCAÇÃO FINANCEIRA E FUNÇÕES

CURITIBA

2025

FLAVIA CERQUEIRA CEZAR

INTERDEPENDÊNCIA ENTRE PROPORCIONALIDADE E O ENSINO DE EDUCAÇÃO FINANCEIRA E FUNÇÕES

Interdependence between proportionality and the teaching of financial education and functions

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de Mestra em Matemática, Área de Concentração: Matemática na Educação , Básica, no Programa Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).
Linha de pesquisa: Matemática na Educação Básica e suas Tecnologias.
Orientador: Prof. Dr, Márcio Rostirolla Adames

CURITIBA

2025

Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Curitiba

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

FLAVIA CERQUEIRA CEZAR

INTERDEPENDÊNCIA ENTRE PROPORCIONALIDADE E O ENSINO DE EDUCAÇÃO FINANCEIRA E FUNÇÕES

Trabalho de pesquisa de mestrado apresentado como requisito para obtenção do título de Mestre Em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Área de concentração: Matemática Na Educação Básica.

Data de aprovação: 05 de Fevereiro de 2026

Dr. Marcio Rostirolla Adames, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dr. Joao Luis Goncalves, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dr. Roberto Pettres, Doutorado - Universidade Federal do Paraná (Ufpr)

Documento gerado pelo Sistema Acadêmico da UTFPR a partir dos dados da Ata de Defesa em 05/02/2026.

AGRADECIMENTOS

À Deus, fonte de força, sabedoria e esperança, ofereço não apenas minha gratidão, mas o próprio fruto deste trabalho, sustentado pela fé e esperança nos momentos de incerteza ao longo de todo processo.

Ao Prof. Dr Márcio Rostirolla Adames, agradeço por assumir a orientação em percurso, pela confiança e contribuições fundamentais para o desenvolvimento desta pesquisa, principalmente do recurso educacional.

Aos meus pais, Américo e Cleonice, em especial pelo cuidado, acolhimento e carinho, especialmente nos momentos em que pude descansar e recuperar as energias durante as "férias". À minha família, pela compreensão e incentivo diante das constantes ausências por conta da dedicação acadêmica.

Aos amigos pelo apoio e pela leveza que tornaram o percurso mais possível, que intercederam e pacientemente me ouviram nos momentos de cansaço, dúvidas e incontáveis reclamações.

À Sociedade Brasileira de Matemática que, na busca da melhoria do ensino de matemática na Educação Básica, viabilizou a implementação do PROFMAT.

À CAPES, pela recomendação do PROFMAT por meio do parecer do Conselho Técnico Científico da Educação Superior.

À todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para esta jornada, meu muito obrigada.

RESUMO

CEZAR, Flavia Cerqueira. **Interdependência entre proporcionalidade e o ensino de educação financeira e funções**. 116 f. Dissertação - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2025.

Este trabalho documenta o desenvolvimento de um recurso educacional virtual e interativo, composto por atividades sobre proporcionalidade no contexto da matemática financeira, com o objetivo de promover o desenvolvimento do raciocínio lógico, a resolução de problemas e a construção do conhecimento matemático por meio da análise de padrões e regularidades. As atividades foram organizadas à luz da Taxonomia de Bloom. Ao longo do desenvolvimento, investiga-se os conceitos de razão e proporcionalidade sob uma perspectiva histórica, conceitual e aplicada, estabelecendo conexões com o estudo de funções e com a educação financeira na educação básica. A escolha do tema é justificada a partir das orientações da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que enfatiza o desenvolvimento do pensamento proporcional, da modelagem matemática e da educação financeira como competências essenciais para a formação crítica e cidadã dos estudantes. O recurso educacional está disponível em: <https: //flaviacerqueiracezar.github.io/Proporcionalidade_Educacao_Financeira/>

Como produto educacional, desenvolveu-se um conjunto de atividades sobre educação financeira, organizado em um ambiente online e interativo, que permite ao estudante explorar situações realísticas, testar hipóteses, analisar gráficos e interpretar resultados. Essas atividades visam promover uma aprendizagem significativa, articulando conceitos matemáticos, tomada de decisão consciente e letramento financeiro, em consonância com as competências e habilidades previstas na BNCC.

Palavras-chave: Proporcionalidade; Educação Financeira; Material Didático Interativo.

ABSTRACT

CEZAR, Flavia Cerqueira. **Interdependence between proportionality and the teaching of financial education, and functions**. 116 pg. Dissertation - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2025.

This work documents the development of a virtual and interactive educational resource consisting of activities on proportionality in the context of financial mathematics, with the aim of promoting the development of logical reasoning, problem-solving skills, and the construction of mathematical knowledge through the analysis of patterns and regularities. The activities were organized in light of Bloom's Taxonomy. Throughout its development, the concepts of ratio and proportionality are investigated from historical, conceptual, and applied perspectives, establishing connections with the study of functions and with financial education in basic education. The choice of this theme is justified based on the guidelines of the Brazilian National Common Core Curriculum (BNCC), which emphasizes the development of proportional reasoning, mathematical modeling, and financial education as essential competencies for students' critical and civic formation. The educational resource is available at: <https://flaviacerqueiracezar.github.io/Proporcionalidade_Educacao_Financeira/>

As an educational product, a set of financial education activities was developed and organized in an online and interactive environment, allowing students to explore realistic situations, test hypotheses, analyze graphs, and interpret results. These activities aim to promote meaningful learning by articulating mathematical concepts, informed decision-making, and financial literacy, in accordance with the competencies and skills established by the BNCC.

Keywords: Proportionality; Financial Education; Interactive didactic material.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CREP	Currículo da Rede Estadual Paranaense
DCNI	Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação Infantil
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
PA	Progressão Aritmética
PG	Progressão Geométrica
PCN	Parametros Curriculares Nacionais
PROFMAT	Mestrado Profissional em Matemática
REA	Recurso Educacional Aberto
SAEB	Sistema de Avaliação da Educação Básica
UTFPR	Universidade Tecnológica Federal do Paraná

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

As Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação Infantil (DCNEIs) incluem nas práticas pedagógicas como eixos norteadores a importância de "garantir experiências que recriem, em contextos significativos para as crianças, relações quantitativas, medidas, formas e orientações espaço-temporais" (Brasil, 2010, p. 25), abrangendo a noção de proporcionalidade em diversos contextos. Por exemplo, destacam-se as brincadeiras desenvolvidas com blocos lógicos que exploram a noção espacial a partir de objetos manipuláveis, associando formas geométricas de dimensões variadas a áreas compatíveis para seu encaixe, o que, futuramente, na Educação Básica, auxiliará a compreensão de conteúdos como congruência e semelhança de polígonos e suas proporcionalidades.

Já inseridos na Educação Básica, começamos a relacionar a ideia de proporcionalidade com os cálculos de matemática básica envolvendo divisão e multiplicação, semelhança de triângulos, Teorema de Tales, regra de três e porcentagem, bem como em aplicações relacionadas a taxas de juros, rendimentos, ajustes de receitas e planejamento doméstico. Porém, ao prosseguirmos a níveis de conteúdos algébricos e geométricos mais complexos, a ideia da proporcionalidade se torna mais abstrata, distanciando-se da realidade dos estudantes, e de acordo com Oliveira (2012), essa perspectiva pode resultar em desinteresse e dificuldades de aprendizagem.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é o documento normativo que estabelece um conjunto contínuo e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os estudantes devem desenvolver ao longo das diferentes etapas e modalidades da Educação Básica. No Ensino Fundamental, a BNCC aborda a proporcionalidade em um de seus objetos de conhecimento na Unidade Temática Números, determinando para o 4º ano a habilidade **EF04MA06** que consiste em:

> "Resolver e elaborar problemas envolvendo diferentes significados da multiplicação (adição de parcelas iguais, organização retangular e proporcionalidade), utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos." (BNCC, 2018, p. 291).

Ao longo de todos os demais anos, outras habilidades são elencadas no tópico da proporcionalidade, destacando sua relevância no pensamento lógico matemático.

Compreender a proporcionalidade é fundamental para a análise, interpretação e resolução de problemas, bem como o desenvolvimento do raciocínio lógico-crítico em diversas aplicações reais e problemas matemáticos. O desafio nas aulas de matemática é favorecer a compreensão de sua estrutura e aplicações, evidenciando sua relevância prática, objetivo central deste trabalho

1.1 JUSTIFICATIVA PARA A ESCOLHA DO TEMA

O interesse na pesquisa sobre a relação entre proporcionalidade e o ensino de conteúdos matemáticos surgiu da experiência da autora, que atua há três anos no Ensino Médio em Matemática e Educação Financeira, e de discussões com colegas de outras áreas. Foi observado que os estudantes têm dificuldade em compreender a proporcionalidade, o que impacta a resolução de problemas em temas como razões trigonométricas, funções lineares, porcentagem, juros, além de aplicações em disciplinas como Química, Biologia e Geografia.

O conceito de proporcionalidade está relacionado à definição de proporção que no dicionário online Michaelis (2015) é “relação das partes de um todo entre si, ou entre cada uma delas e o todo, quanto a tamanho, quantidade ou grau; relação equilibrada entre as diferentes partes de uma coisa ou entre duas ou mais coisas; harmonia, simetria; igualdade entre duas razões”.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) estabelece que os diferentes campos da Matemática reúnem um conjunto de ideias fundamentais, entre as quais está a proporcionalidade, as quais devem produzir articulações entre si e se converter em objetos de conhecimento no ambiente escolar, articulando-se ao desenvolvimento do pensamento matemático dos estudantes (Brasil, 2018). Essas ideias são trabalhadas de forma progressiva ao longo da escolarização pelos descritores que envolvem situações de variação entre grandezas, resolução de problemas e análise de relações proporcionais em contextos diversificados (por exemplo, habilidade EF08MA13 que propõe resolver e elaborar problemas com grandezas diretamente ou inversamente proporcionais).

Um dos descritores do documento é a habilidade **EF09MA07** (Habilidade a ser desenvolvida no 9º ano do Ensino Fundamental, em matemática) que focaliza a compreensão da razão entre grandezas distintas, como velocidade e densidade demográfica, no contexto da resolução de problemas (Brasil, 2018, p. 217), o que denota a aplicação da proporcionalidade a situações do cotidiano e outras áreas do conhecimento.

A BNCC também afirma que as ideias fundamentais da Matemática — equivalência, ordem, proporcionalidade, interdependência, representação, variação e aproximação — precisam ser convertidas em objetos de conhecimento na escola. Evidenciando sua natureza integrada e contextualizada, a proporcionalidade "deve estar presente no estudo de: operações com os números naturais; representação fracionária dos números racionais; áreas; funções; probabilidade etc. Além disso, essa noção também se evidencia em muitas ações cotidianas e de outras áreas do conhecimento, como vendas e trocas mercantis, balanços químicos, representações gráficas etc."(Brasil, 2018, p. 268).

É possível verificar em outras áreas aplicações de proporcionalidade: nas ciências sociais, jurídicas e econômicas, na área da saúde, e até mesmo nas ciências humanas, a relevância vai além do simples cálculo numérico.

Um estudo realizado por Dias (2024), relaciona o componente curricular da matemática e seus conteúdos às aplicações em diversas profissões. A proporcionalidade aparece de forma direta nas áreas de Arquitetura, Gastronomia, Medicina e Farmácia, e intrínseca em profissões relacionadas a Ciências de Dados, Contabilidade e Logística, analisando padrões e métricas. Para Dias

> Matemática é, assim como todos os outros componentes curriculares presentes no currículo escolar, parte importante do desenvolvimento pessoal, social e profissional dos sujeitos, para torná-los independentes e ativos em uma sociedade que nos requer o tempo todo raciocínio lógico, resolução de problemas e análise crítica de todas as informações que nos atravessam. (Dias, 2024, p. 75)

Essa afirmação corrobora o desenvolvimento desse trabalho, dado que um dos objetivos é destacar a importância da proporcionalidade para o raciocínio lógico na resolução de problemas.

A Matriz de Referência do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), na seção Matemática e suas Tecnologias motiva a abordagem na Educação Básica de proporcionalidade, a partir da descrição das habilidades da:

> Competência 4: Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.
> H15: Identificar a relação de dependência entre grandezas.
> H16: Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas, direta ou inversamente proporcionais.
> H17: Analisar informações envolvendo a variação de grandezas como recurso para a construção de argumentação.
> H18: Avaliar propostas de intervenção na realidade envolvendo variação de grandezas. (Brasil, 2024)

Assim, ressalta a importância de um trabalho atencioso da relação de interdependência de conteúdos do Ensino Médio com a proporcionalidade, tendo em vista que a proporcionalidade é um dos tipos mais fundamentais de relações entre grandezas.

A proporcionalidade também é um elemento importante em construções estéticas. Uma proporção de grande relevância, historicamente, é a proporção Áurea, o número de ouro ou número de Deus, tendo sido utilizada para comparar medidas em seres vivos e na arquitetura, entre outras aplicações. A Figura 1.1 é um compilado de imagens sob a perspectiva da proporção áurea.

1.2 REVISÃO DA BIBLIOGRAFIA

Ao consultar o banco de dissertações do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT (SBM, 2024) a palavra chave “proporcionalidade” filtrou 26 trabalhos. Já com a chave “proporção” constatamos 19 trabalhos, apenas um desenvolvido na UTFPR, campus de Pato Branco, por Schallenberger (2017) com uma abordagem Etnomatemática, aproximando os conteúdos teóricos à conceitos matemáticos informais, apresentando a relação proporcional entre área e volume, com atividades contextualizadas com o cotidiano do aluno.

Figura 1.1 – Representações visuais da proporção áurea

Fonte: Ventus (2024).

Aplicando o filtro “áurea”, ainda na página de dissertações do PROFMAT, obtivemos 27 trabalhos, sendo que 2 abordaram como “seções áureas”, 3 usaram a "proporção áurea" e 22 a “razão áurea”. Desses trabalhos somente um foi desenvolvido na UTFPR, também de Pato Branco, por Carraro (2021), tratando da aplicação da razão áurea no processo de ensino aprendizagem. Das 27 dissertações analisadas, quatro delas tinham como filtro comum o “Ensino Médio”, nosso principal foco de estudo neste trabalho, tendo também em comum a palavra chave Razão Áurea e aplicando o conceito de proporcionalidade ao longo do texto mais de 10 vezes.

Pesquisando com relação as metodologias ativas na página de dissertações do PROFMAT (SBM, 2024), 7 dissertações foram apresentadas, sendo que duas delas chamaram a atenção pela abordagem ao longo trabalho. A dissertação de Generoso (2019) apresenta a modelagem matemática e algumas metodologias ativas: problematização, aprendizagem baseada em problemas (ABP) e a espiral construtivista (EC), servindo como referencial teórico para o desenvolvimento deste trabalho.

Além dessas dissertações, também examinamos documentos oficiais relacionados à Educação Básica, como a BNCC (Brasil, 2018), as DCN’s (Brasil, 2013) e os PCN’s (Brasil, 1999). Esses documentos brasileiros, fundamentais para a orientação educacional, têm como principal objetivo direcionar o trabalho pedagógico nas escolas, oferecendo subsídios para o desenvolvimento de práticas pedagógicas eficazes. A relação deles com a proporcionalidade foi discutida nas seções acima.

1.3 OBJETIVOS

1.3.1 OBJETIVO GERAL

Tendo em vista a discussão apresentada e a pluralidade de trabalhos envolvendo a proporcionalidade em diferentes contextos da Matemática, este trabalho tem como objetivo desenvolver e analisar atividades didáticas que possibilitem ao estudante reconhecer, interpretar e correlacionar propriedades da proporcionalidade em tópicos de funções e Educação Financeira na Educação Básica, com ênfase no Ensino Fundamental.

1.3.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

A fim de atingir o objetivo geral, delineiam-se os objetivos específicos a seguir, centrados na aprendizagem do estudante e na construção do conhecimento matemático a partir de situações contextualizadas.

- Analisar o desenvolvimento histórico do conceito de proporcionalidade, relacionando-o às práticas matemáticas contemporâneas, como estratégia para promover uma aprendizagem mais significativa dos conceitos de razão e proporção.
- Possibilitar ao estudante o reconhecimento das relações de razão e proporcionalidade em diferentes contextos matemáticos, como funções, análise de gráficos e situações do cotidiano financeiro.
- Favorecer o desenvolvimento da capacidade de interpretar e comparar grandezas proporcionais e inversamente proporcionais, utilizando diferentes registros de representação, como tabelas, expressões algébricas e gráficos.
- Promover a aplicação dos conceitos de proporcionalidade, porcentagem e juros na resolução de problemas contextualizados de Educação Financeira, envolvendo planejamento financeiro, uso do crédito e financiamentos.
- Estimular o desenvolvimento do raciocínio lógico e do pensamento crítico por meio da análise de padrões matemáticos e da tomada de decisões fundamentadas em situações reais.

1.4 RECURSO EDUCACIONAL

Ao longo deste trabalho são apresentadas atividades envolvendo o tema de proporcionalidade, articulando conceitos matemáticos com situações contextualizadas e problemas do cotidiano, de forma a favorecer a compreensão, a análise e a aplicação de relações proporcionais. Essas atividades foram desenvolvidas utilizando materiais concretos e recursos digitais, com destaque para uma plataforma interativa elaborada em *Jupyter Notebook*(2025) que permite explorar funções, relações entre grandezas e representações gráficas de forma dinâmica. A calculadora gráfica *Desmos* é utilizada como recurso complementar, proporcionando visualizações imediatas e interativas de gráficos e funções, apoiando a exploração e a compreensão dos conceitos pelos estudantes.

A calculadora *Desmos* é uma ferramenta matemática online, gratuita e interativa, disponível em navegadores e aplicativos, o que permite aos usuários inserir equações e funções para visualizar seus gráficos em tempo real (Desmos, 2025). A plataforma possibilita a criação de gráficos dinâmicos com *sliders*, tabelas de valores e ajustes em tempo real, favorecendo a visualização imediata de como alterações algébricas influenciam representações gráficas e apoiando a compreensão de conceitos matemáticos abstratos por meio de interação visual e manipulativa, características avaliadas pela *Common Sense Education* (2025), como uma ferramenta interativa eficaz para visualização de gráficos e funções no ensino de matemática, o que apoiam estudantes e professores na exploração e compreensão de relações proporcionais e funções em contextos significativos.

A proposta pedagógica envolve a aplicação de metodologias ativas. O método tradicional de ensino, onde o professor é o supremo detentor do conhecimento e o aluno receptor, não havendo troca entre as partes, tem sido superado com a aplicação das chamadas metodologias ativas que são, segundo Generoso (2019, p. 15), " alternativas metodológicas com uma abordagem contrária ao ensino tradicional focado nos componentes curriculares", considerando o aluno como sujeito no processo de ensino-aprendizagem, propondo um "olhar crítico e reflexivo do educando em relação ao que estão fazendo." .

De acordo com Marinell (2024), metodologias ativas são estratégias pedagógicas dinâmicas que engajam ativamente os estudantes no processo de construção do conhecimento.

Recursos educacionais são os materiais de ensino, aprendizagem e pesquisa, disponibilizados em qualquer formato ou mídia como livros, plataformas digitais, material concreto e metodologias ativas. Furniel, Mendonça e Silva (2020) apresentam o conceito de Recurso Educacional Aberto (REA):

> [...] qualquer recurso educacional (incluindo mapas curriculares, materiais de cursos, livros didáticos, vídeos assistidos na Internet, aplicativos multimídia, podcasts e quaisquer outros materiais designados para uso no ensino e aprendizado) disponíveis abertamente para uso por educadores e alunos, sem a necessidade de pagar direitos autorais ou taxas de licença. (Furniel; Mendonça; Silva, 2020, p. 7)

Considerando ambas as declarações, podemos observar que a prática pedagógica planejada para sair do âmbito puramente teórico ao utilizar os REA's acessíveis aos estudantes e as metodologias ativas, possibilitam a interação com os recursos, a fim de motivá-los a participar do processo de ensino aprendizagem.

Desenvolvemos recursos educacionais envolvendo os tópicos de proporção e funções, com ênfase na matemática financeira aplicada a situações do cotidiano, como compra, consumo, planejamento e cálculo de juros, bem como em conteúdos matemáticos fundamentais, como equivalência de frações, porcentagem, proporções e interpretação de gráficos. Conforme apontado por Nehrin(2013), a proporcionalidade como função é um conceito central no ensino médio, permitindo aos estudantes compreender relações entre grandezas e aplicar esses conhecimentos em contextos significativos e cotidianos.

No livro *Introdução à história da matemática* (Eves, 2011) temos um conjunto de atividades que podem ser aplicadas em sala de aula como recurso educacional, como a conversão de moedas e unidades de medidas e o uso do gráfico da função de 1º grau para descrever as conversões, utilizando o *Desmos*, são atividades simples que demandam envolvimento dos alunos e materiais manipuláveis.

Como parte do desenvolvimento dos recursos educacionais, foram elaboradas listas de exercícios envolvendo proporcionalidade, funções, juros simples e porcentagem, articulando conceitos matemáticos com situações contextualizadas do cotidiano. Algumas dessas atividades foram construídas com o apoio do ChatGPT, utilizando o *prompt*: “Poderia criar uma lista de atividades de porcentagem e juros simples aplicáveis ao Ensino Fundamental, incluindo qual a habilidade BNCC utilizada, 10 exercícios de cada?”, depois repetindo o processo, para as habilidades do Ensino Médio a ferramenta auxiliou na formulação de questões, na criação de contextos problematizadores e na organização das tarefas de forma progressiva, respeitando os objetivos de aprendizagem e as habilidades da BNCC. Essa colaboração evidencia o potencial da inteligência artificial como apoio educacional ao professor, oferecendo sugestões de exercícios diversificados e contextualizados que auxiliam no planejamento pedagógico e no desenvolvimento de atividades que promovem a compreensão, a análise e a aplicação dos conceitos matemáticos pelos estudantes.

As atividades elaboradas em *Jupyter Notebook*, disponibilizada como recurso digital, foram desenvolvidas apoiadas na metodologia da Taxonomia de Bloom (1956, 2001), as atividades propostas contemplam os níveis de *lembrar, compreender, aplicar, analisar, avaliar e criar*, possibilitando o desenvolvimento gradual do pensamento crítico e da autonomia financeira. Tal organização está em consonância com as orientações da Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018), ao favorecer a construção de competências que integram conhecimentos matemáticos, argumentação e resolução de problemas reais.

1.5 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

O planejamento da pesquisa foi estruturado sob a perspectiva de Gerhardt e Silveira (2009) que aborda a pesquisa científica como o caminho para investigar realidades, possibilitando propostas de interações e intervenções.

Quanto à abordagem de pesquisas científicas temos a qualitativa e quantitativa; enquanto a primeira trata de “aspectos da realidade que não podem ser quantificados, centrando-se na compreensão e explicação da dinâmica das relações sociais” (Gerhardt; Silveira, 2009, p. 32), a outra é baseada “no pensamento positivista lógico, tende a enfatizar o raciocínio dedutivo, as regras da lógica e os atributos mensuráveis da experiência humana” (Gerhardt; Silveira, 2009, p. 33). Com essas definições, delimitamos para esse trabalho apenas a linha de pesquisa qualitativa.

Realiza-se uma pesquisas de caráter exploratório e descritivo, abordando a problemática do tópico de proporcionalidade em sua relação com diversos outros temas do conhecimento, por meio da descrição de exemplos reais baseados em situações práticas do cotidiano, além de experiências relacionadas ao contexto educacional. Quanto à sua natureza, trata-se de uma pesquisa aplicada, com o propósito de oferecer conhecimento e recursos didáticos destinados à implementação prática no ensino da Matemática.

Além disso, elementos de contextualização histórica são incluídos. De acordo com Moretti (2022), a abordagem histórica possibilita conhecer e refletir sobre determinaos fenômenos, permitindo analisar as relações existentes entre conceitos e hipóteses. Como exemplo, aborda-se a contribuição histórica e bibliográfica associada ao trabalho do arquiteto persa Mussaraf (Paques, C. 2011).

Dessa forma, a metodologia proposta para este trabalho adota uma abordagem de pesquisa qualitativa, de natureza bibliográfica, com caráter exploratório e descritivo, apresentando também uma dimensão aplicada voltada ao desenvolvimento de recursos educacionais com potencial de utilização na Educação Básica, nesse contexto, os seguintes aspectos:

- **Qualitativa, bibliográfica e com contextualização histórica:** contempla a análise do legado histórico do conceito de proporcionalidade a partir das contribuições de autores clássicos e historiadores da Matemática, como Euclides (2006), com o estudo das razões, proporções e médias em *Os Elementos*; Eves (2011) e Fossa (2011), que discutem a evolução histórica do conceito desde as civilizações antigas até sua formalização matemática. Inclui-se também a abordagem das médias aritmética, geométrica e harmônica, bem como o estudo da razão áurea e de suas aplicações históricas e geométricas, com destaque para a contribuição do arquiteto persa Mussaraf (2011), evidenciando a proporcionalidade como um conceito historicamente construído e estruturante do pensamento matemático.

- **Exploratória e descritiva:** fundamenta-se no levantamento e na análise de conteúdos relacionados à razão e proporção, funções e matemática financeira, bem como em exercícios correlacionados que articulam tais conteúdos à Educação Financeira, em consonância com os documentos norteadores da Educação Básica.

- **Aplicada:** consiste na elaboração de propostas de atividades destinadas à Educação Básica, utilizando materiais concretos, metodologias ativas e tecnologias digitais, como a calculadora gráfica *Desmos*, colocando o estudante no centro do processo de aprendizagem e incentivando sua participação ativa na construção do conhecimento.

- **Desenvolvimento de material online:** elaboração de recursos educacionais de livre acesso, estruturados em *Jupyter Book* e disponibilizados via *GitHub*, permitindo que estudantes e professores explorem conteúdos de forma interativa, com exemplos, exercícios e recursos multimídia. A organização das atividades segue a Taxonomia de Bloom (1956, 2001), promovendo a progressão das habilidades cognitivas, desde a compreensão e análise até a aplicação e avaliação crítica dos conceitos matemáticos.

1.6 ESTRUTURA DO TRABALHO

A estrutura deste trabalho está organizada em capítulos, os quais abordam as diversas etapas da pesquisa, com o objetivo de apresentar, de forma clara e objetiva, seu desenvolvimento e as contribuições resultantes.

- ⋆ Capítulo 1: introduz o trabalho com as abordagens do tema proporcionalidade ao longo da Educação Básica, apresentando em seguida a justificativa para a escolha do tema, uma breve revisão bibliográfica, os objetivos geral e específicos e, por fim, os procedimentos metodológicos e os recursos educacionais que fundamentam a interdependência entre proporcionalidade e o ensino de funções e educação financeira.
- ⋆ Capítulo 2: apresenta-se um panorama histórico sobre os conceitos de razão, proporção e proporcionalidade, evidenciando sua construção ao longo da Antiguidade. Inicialmente, discute-se o legado histórico desses conceitos e sua sistematização na obra *Os Elementos*, de Euclides, com destaque para o estudo das médias e das proporções. Em seguida, aborda-se a contribuição do arquiteto persa Mussaraf, ressaltando a aplicação prática das relações proporcionais em contextos arquitetônicos. Por fim, analisa-se a Razão Áurea, também conhecida como proporção divina ou número de ouro, explorando suas propriedades matemáticas e sua relevância histórica e cultural.
- ⋆ Capítulo 3: associa a proporção direta com o conteúdo de funções, explorando, com o uso de ferramentas digitais como *GeoGebra* e *Calculadora Desmos*, os padrões existentes nos gráficos de funções do 1° grau. Apresentou-se também a comparação da proporção inversa com funções. O capítulo também estabelece conexões com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e com os descritores do Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB).
- ⋆ Capítulo 4: aborda a articulação entre Matemática e Educação Financeira, com ênfase nos conceitos de proporcionalidade, porcentagem, juros simples e compostos, funções e sistemas de amortização. São discutidas situações reais relacionadas ao planejamento financeiro, ao uso do crédito e aos financiamentos, destacando-se a importância da compreensão matemática para a tomada de decisões conscientes no cotidiano.
- ⋆ Capítulo 5: apresenta as propostas de atividades desenvolvidas no âmbito desta pesquisa relacionadas ao conteúdo de educação financeira, organizadas em duas frentes. A primeira consiste em listas de exercícios voltadas ao Ensino Fundamental e ao Ensino Médio, contemplando conteúdos de porcentagem, juros, funções e análise de gráficos, alinhadas

às habilidades da BNCC. A segunda corresponde a explicação da sequência didática, desenvolvida como recurso digital estruturada a partir da Taxonomia de Bloom, elaboradas com o apoio de recursos digitais, como calculadoras gráficas *Desmos* e *Jupyter*.

⋆ Capítulo 6: Finalizamos o trabalho sintetizando o que foi desenvolvido, acompanhado de uma breve reflexão sobre o processo de realização da pesquisa, além de destacar as contribuições feitas ao longo da produção.

2 RAZÃO E PROPORÇÃO - HISTÓRIA

O objetivo desse capítulo é apresentar um panorama do desenvolvimento do contexto de proporcionalidade. Isso é feito contando alguns casos selecionados em diversos momentos da história, desde a história antiga até a idade média.

Tabela 2.1 – História antiga sobre estudos de proporcionalidade

Época	Nome	Contribuição relacionada à proporcionalidade
c. 1650 a.C.	Ahmes (Egito)	Uso prático de razões (Papiro de Rhind)
c. 600 a.C.	Tales de Mileto	Proporção por semelhança de triângulos
c. 500–400 a.C.	Pitagóricos	Relação entre números e música (razão sonora)
c. 400 a.C.	Eudoxo de Cnido	Teoria geral das proporções (Livro V de Euclides)
c. 300 a.C.	Euclides	Formalização da teoria de Eudoxo no livro Elementos

Apresentamos também conceitos de proporções e médias, além da história do arquiteto Mussaraf, resolvendo problemas em suas viagens pelo reino Persa. Finalizando o capítulo com dois dos mais famosos conceitos relacionados à proporcionalidade: a Razão Áurea e a Sequência de Fibonacci.

2.1 UM LEGADO ANTIGO

A proporcionalidade é um conceito usado e aplicado desde a Antiguidade Clássica por estudiosos da Geometria e Filosofia. A palavra proporção deriva do latim *proportio*, “*pro*: em relação a” e “*portio*: divisão ou parte”, indicando a referência a divisão de algo a partir de um parâmetro. Das contribuições da filosofia antiga, temos Tales de Mileto, que ao comparar comprimentos de sombra, até Aristóteles aplicando o conceito de proporcionalidade para estabelecer padrões de justiça na distribuição e repartição de propriedades.

Silva e Júnior (2016) destacam que a civilização egípcia, formada por volta de 4000 a.C. às margens do rio Nilo, desenvolveu uma sociedade organizada, com avanços significativos em relação à agricultura, comércio, divisão de terras e construção de monumentos, que impulsionaram o desenvolvimento de registros matemáticos, na maioria feitos em papiros. Dentre esses documentos, o mais conhecido é o Papiro de Rhind, compilado por volta de 1650 a.C. pelo escriba Ahmes e descoberto por H. Rhind em 1858. Nele, são apresentados 85 problemas matemáticos, caracterizados como aritméticos e algébricos, envolvendo operações com quantidades e a resolução de equações — o que hoje se conhece por equações do 1° grau — por meio do método da falsa posição (tentativa e erro), revelando um conhecimento funcional da Matemática adaptado às necessidades cotidianas daquela civilização.

A análise proposta por Silva e Júnior (2016) evidencia que o conhecimento matemático egípcio não era apenas empírico, mas possuía sistematizações que apontam para a elaboração de conceitos fundamentais, como proporcionalidade e resolução de problemas, destacando a importância de compreender esses registros como parte da construção histórica da Matemática. O problema 72 do papiro de Rhind é um exemplo da resolução de situações problema envolvendo proporcionalidade, a saber: “Qual o número de pães de força 45 que são equivalentes a 100 de força 10?” Que, resolvido a partir da regra de três, obtemos

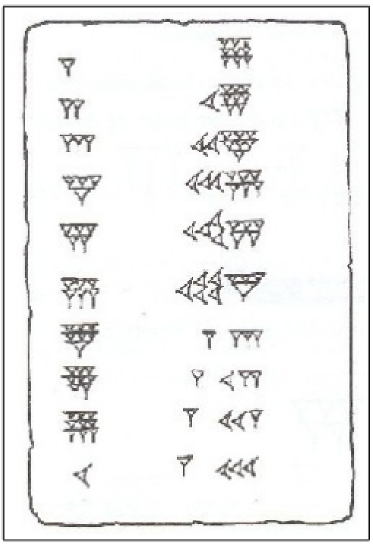
$$\frac{100}{10} \cdot 45 = 450\text{pães}.$$

Podemos transcrever o problema, adaptando-o para aplicar em sala de aula, por exemplo: "Quantos pães são necessários para 45 famílias, sabendo que 100 pães são suficientes para 10 famílias?"

Claramente, a resolução que apresentamos do problema 72 não foi feita a partir da falsa posição. Para observarmos a aplicação do método da falsa posição em uma situação prática, consideremos como exemplo o problema 24 do Papiro de Rhind, com o seguinte enunciado: "Sabendo que *aha* mais um sétimo de *aha* dá 24, encontre o valor de *aha*."A solução consistia em considerar um valor qualquer, calcular a sétima parte e verificar se o resultado final obtido seria 24. Supondo o número 7 inicialmente, a sétima parte é 1; o resultado final é 8 e, portanto, precisaria ser multiplicado por 3 para chegar ao valor correto 24. na mesma proporção, deveria ser multiplicada a falsa posição $7 \cdot 3$ para se obter o valor correto da incógnita. Assim, o método da falsa posição apontava para $aha = 21$.

Para auxiliar no ajuste proporcional do método da falsa posição e nos cálculos, os babilônios desenvolveram Tábuas Matemáticas: da multiplicação, da divisão (tábua recíproca), dos quadrados e cubos, e a tábua de problemas (lista de trios pitagóricos). A Figura 2.1 é uma representação desses registros. Os babilônios usavam o sistema númerico sexagesimal (base 60), que permitia trabalhar com frações de forma eficiente, envolvendo medidas de tempo e ângulos.

Figura 2.1 – Tabuada babilônica do 9



Fonte: Ortiz (2020).

Os babilônios foram os precursores no estudo de aproximações de raízes quadradas de números que não são quadrados perfeitos. A Figura 2.2 representa a chamada Tábua de Plimpton, escrita entre 1.900 e 1.600 a.C, que consiste em 3 colunas de caracteres com ternas pitagóricas, ou seja, números que representam a medida da hipotenusa e de um cateto de triângulos retângulos cujos 3 lados têm medidas inteiras (Eves, 2011).

Figura 2.2 – Tábua de Plimpton

Fonte: Simon (2018).

Além das tradições egípcia e babilônica, os textos bíblicos do Antigo Testamento oferecem diversos registros que evidenciam o uso de ideias proporcionais em contextos normativos, arquitetônicos e religiosos.

As instruções para a construção do Tabernáculo (Êxodo 25–27) e do Templo de Salomão (1 Reis 6) apresentam medidas exatas e relações harmônicas entre comprimento, largura e altura, como a relação estabelecida em 1 Reis 7:23, na construção de uma grande bacia redonda, com o comprimento da borda (circunferência) e o diâmetro de razão estabelecida igual a 3, aproximando-se do valor de π, demonstrando uma compreensão empírica de proporcionalidade geométrica. Outro exemplo notável é a descrição da Arca de Noé em Gênesis: "E desta maneira a farás: De trezentos côvados o comprimento da arca, e de cinquenta côvados a sua largura, e de trinta côvados a sua altura."(Gn 6:15) - côvado é uma antiga unidade de medida de comprimento, aproximadamente a distância do cotovelo à ponta do dedo médio de uma pessoa, variando entre 43 e 46 centímetros: portanto, a Arca segue uma razão de 30:5:3, reconhecida atualmente como um modelo eficiente de estabilidade estrutural.

Para além dos padrões nas descrições geométricas da Bíblia, há também a prática do dízimo (Levítico 27:30; Malaquias 3:10), que estabelece a entrega de um décimo da produção ou rendimento, um caso evidente de razão aritmética aplicada a normas sociais e religiosas. Tais exemplos indicam que, embora ainda não sistematizada em termos teóricos, a proporcionalidade já era amplamente empregada como princípio organizador das relações entre o divino, o humano e o material. Esses registros revelam uma compreensão intuitiva e funcional das proporções, inserida na lógica cultural do Antigo Oriente próximo e anterior às formulações matemáticas dos gregos.

O desenvolvimento da matemática na Grécia Antiga pode ser compreendido a partir de dois grandes períodos históricos: o Clássico (séculos VI a IV a.C.) e o Alexandrino (século III a.C. ao IV d.C.). No período Clássico, cujo principal centro era Atenas, floresceram escolas filosófico-matemáticas em cidades como Mileto, Crotona e Eleia. Ainda que não tenham sobrevivido documentos originais desse tempo, os escritos e ensinamentos de matemáticos como Euclides foram preservados por comentadores do período subsequente. Já o período Alexandrino, centrado na cidade de Alexandria, destacou-se pela sistematização do conhecimento matemático e pela produção de tratados que foram copiados e reinterpretados ao longo dos séculos.

Os gregos da Antiguidade aplicaram a proporcionalidade para elucidar o estudo de equações, pois o conceito de função foi formalizado apenas depois do século XVIII. Além disso, para eles, a razão está diretamente ligada a definição de números (*arithmós*) e, por reconhecerem apenas os números inteiros, as frações ainda não eram definidas, não fazendo sentido a sua aplicação. Com isso, temos a razão aplicada para mensurar, pressupondo referências de unidades de medida reconhecidas. Tal abordagem da teoria da razão e proporção foi reformulada com o surgimento de medidas incomensuráveis (Fossa, 2011).

O filósofo e matemático Tales de Mileto (624–546 a.C.), um dos primeiros da Grécia Antiga, contribuiu para o estudo da geometria, estabelecendo padrões de proporcionalidade e o conceito de razão entre segmentos de reta em figuras semelhantes. Seus estudos consistiam em estabelecer padrões para medir grandes estruturas, como, por exemplo, a altura de pirâmides, a partir de sua sombra comparada a de outra sombra de um objeto menor (Eves, 2011). O Teorema de Tales aparece em um dos livros dos Elementos de Euclides, a Proposição $VI2$, a saber:

Teorema de Tales: "Se uma reta é traçada paralela a um dos lados de um triângulo e intercepta os outros dois lados, então ela os divide em partes proporcionais."

Outro matemático e filósofo grego importante foi Pitágoras (570–495 a.C.). A sua contribuição para o estudo de proporcionalidade vai muito além do conhecido *Teorema de Pitágoras*. A escola Pitagórica produziu muitos estudos no campo das proporções, especialmente na relação a números, música e geometria. Resumidamente, temos na música as relações harmônicas baseadas em proporções; na matemática dos números, temos o estudo das proporções entre os inteiros; na geometria, a relação entre lados e diagonais foi precursora do estudo dos números irracionais; e na filosofia, a ideia de que o universo é regido por proporções numéricas inspirou outros estudos.

A descoberta da irracionalidade de $\sqrt{2}$ foi um marco perturbador para a escola pitagórica, que acreditava que todas as grandezas poderiam ser expressas por números racionais. A demonstração clássica parte da suposição de que

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b},$$

o que nos leva a uma contradição lógica, ao se provar que, nesse caso, tanto o numerador a quanto o denominador b da fração deveriam ser pares.

De fato, assumindo por absurdo, que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$,

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b},$$

onde a **e** $b \in \mathbb{N}^*$ são coprimos, reescrevendo a expressão obtemos

$$a = b\sqrt{2} \Leftrightarrow a^2 = 2b^2,$$

de modo que a é par. Então podemos escrever que $a = 2k$, para algum $k \in \mathbb{N}$.

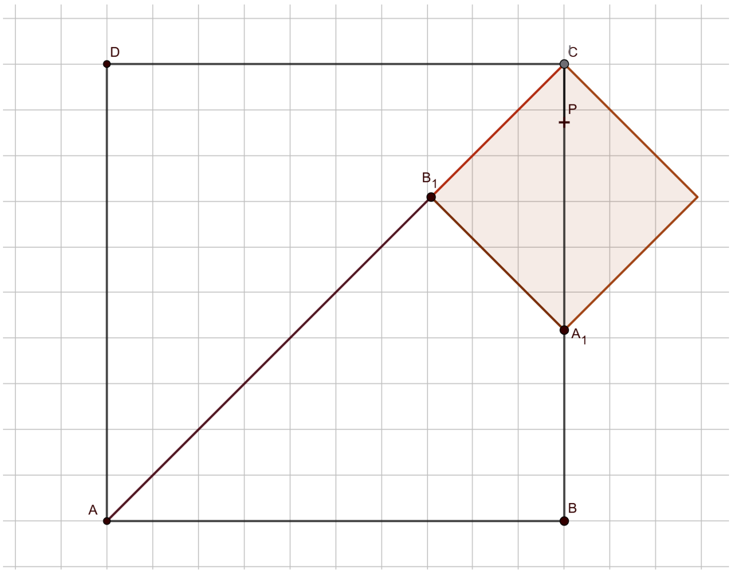
Assim, temos que

$$a^2 = 2b^2 \Leftrightarrow (2k)^2 = 2b^2 \Leftrightarrow 4k^2 = 2b^2 \Rightarrow b^2 = 2k^2,$$

e b também é par, o que é impossível, pois, ao considerar que os números a e b são coprimos, a fração não teria divisor comum; é irredutível.

Além disso, há também a demonstração geométrica que reforça que não podemos mensurar (medir) o numero $\sqrt{2}$. ao assumir que o lado e a diagonal de um quadrado são comensuráveis, chega-se a um absurdo, mostrando que não há unidade de medida comum

Figura 2.3 – Diagonal incomensurável



Fonte: A autora.

entre eles, provando sua incomensurabilidade, negando o questionamento sobre a possível proporcionalidade de $\sqrt{2}$ (Eves, 2011).

A Figura 2.3 ilustra a demonstração geométrica da irracionalidade de $\sqrt{2}$, mostrando que o lado e a diagonal de um quadrado são incomensuráveis simultaneamente. Vejamos uma demonstração clássica desse fato.

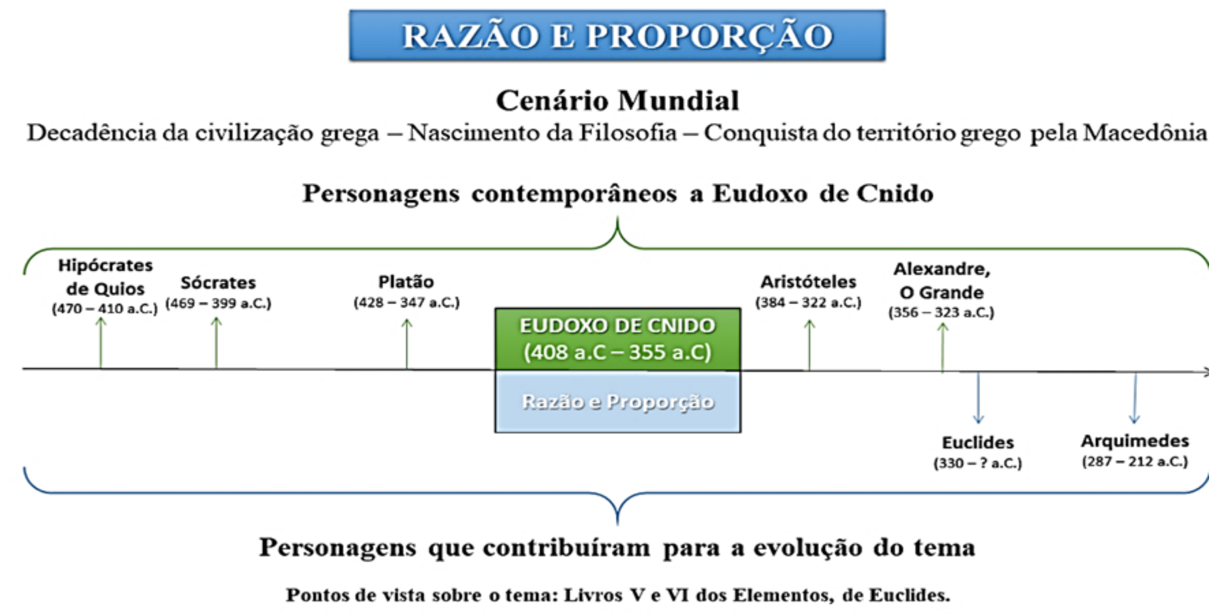
Supondo, por absurdo, que existe um segmento CP (ver Figura 2.3) tal que tanto a diagonal AC como o lado CB do quadrado $ABCD$ são múltiplos inteiros de CP, isto é, AC e CB são comensuráveis com relação a CP. Em AC tomemos o ponto B_1 de modo que AB_1 = CB e tracemos B_1A_1 perpendicular à AC.

Pode-se provar por congruência dos triângulos AB_1C_1 e ABA_1 que A_1B = B_1A_1 e, consequentemente, é igual a CB_1, dado que o triângulo CB_1A_1 é isósceles. Então CA_1 = $CB - CB_1$ e AB_1 são comensuráveis em relação a CP por hipótese. Mas CA_1 é a diagonal e $CB1$ é o lado de um quadrado de dimensões menores que a metade do quadrado original $ABCD$. Repetindo-se o processo, podemos obter finalmente um quadrado cuja diagonal CA_n e cujo lado CB_n são comensuráveis em relação a AP e $CA_n < AP$, o que é um absurdo, já que AP é a medida de referência inicial.

Segundo Eves (2011, p. 106), "tão grande foi o 'escândalo lógico' que, por algum tempo, se fizeram esforços para manter a questão em sigilo". A tradição conta que o matemático que descobriu isso, Hipaso, teria sido punido, talvez até lançado ao mar, por revelar tal segredo. Posteriormente, outros números irracionais foram identificados por Teodoro de Cirene, por volta de 370 a.C.

Posterior a Pitágoras, temos Eudoxo de Cnido (408–355 a.C.), um dos mais importantes personagens na história da proporcionalidade, considerado o verdadeiro arquiteto da teoria das proporções para grandezas incomensuráveis, aquelas que não podiam ser expressas por uma razão de números inteiros. A Figura 2.4 apresenta o contexto contemporâneo a Eudoxo de Cnido na grécia, evidenciando filósofos precursores e sucessores dele.

Figura 2.4 – Linha histórica da proporcionalidade



Fonte: Santos, Oliveira e Lins (2022).

Aristóteles, contemporâneo de Eudoxo, aplicava o conceito de proporcionalidade no campo da filosofia e ética, utilizando o conceito de proporção na justiça distributiva e corretiva. Eudoxo é o elo entre a matemática empírica e filosófica e a matemática axiomática grega. Eudoxo solucionou o problema ao reformular a definição de proporção, cujo tratamento aparece no Livro V dos Elementos de Euclides, antecipando a formalização moderna dos números irracionais proposta em 1872 por Dedekind. Seu estudo, intitulado "Teoria das proporções ou Teoria Eudoxiana", foi incorporado integralmente ao Livro V da obra *Os Elementos* de Euclides, como veremos a seguir.

2.2 PROPORCIONALIDADE NA OBRA *OS ELEMENTOS DE EUCLIDES*

A obra *Os Elementos*, de Euclides, compila muito do conhecimento matemático da época do autor, incluindo a teoria de proporções de Eudoxo, sendo considerada uma das mais influentes da história do pensamento ocidental. Composta por treze livros que abrangem desde a geometria plana até a geometria sólida, passando pela teoria dos números e pelos incomensuráveis, essa obra permaneceu como referência no ensino da matemática até o século XX. Segundo Coelho (2012), ao longo dos séculos, diferentes versões e edições foram surgindo, desde a tradição teonina até manuscritos mais antigos, culminando em importantes traduções e comentários modernos, como os de Thomas Heath e Irineu Bicudo. Assim, *Os Elementos* não apenas consolidaram a matemática grega como ciência, mas também se tornaram um modelo duradouro de estrutura axiomática e rigor lógico.

O Livro IV dos Elementos trata de construções geométricas com régua e compasso, enfocando principalmente a inscrição e circunscrição de polígonos regulares (de $3, 4, 5, 6$ e 15 lados) em círculos. Embora o conteúdo dependa de resultados anteriores sobre círculos e ângulos (principalmente do Livro III), seu foco está em apresentar métodos construtivos exatos, de grande importância para o desenvolvimento da geometria clássica e da noção de regularidade em figuras planas, dedica-se principalmente a construções geométricas clássicas, sem tratar diretamente de proporcionalidade.

Já o Livro V apresenta a teoria das proporções formulada por Eudoxo, sendo considerado um dos trechos mais sofisticados da obra de Euclides. A Teoria Eudoxiana das proporções diz que

> "grandezas estão na mesma razão, a primeira para a segunda e a terceira para a quarta quando, tomando-se equimúltiplos quaisquer da primeira e da terceira e equimúltiplos quaisquer da segunda e da quarta, os primeiros equimúltiplos são ambos maiores que, ou ambos iguais a, ou ambos menores que os últimos equimúltiplos considerados em ordem correspondente."(EVES, 2011, pag. 173)

Transcrevendo essa definição, temos quatro grandezas A, B, C, D, ordenadas da primeira à quarta, que estão na mesma razão; ou seja,

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D},$$

quando, para quaisquer números naturais m e n (os equimútiplos de A, C e B, D respectivamente), valem as seguintes condições:

- Se $mA > nB$, então $mC > nD$;
- Se $mA = nB$, então $mC = nD$;
- Se $mA < nB$, então $mC < nD$.

Em outras palavras, as comparações entre os múltiplos das grandezas A e B são sempre correspondentes às comparações entre os múltiplos de C e D, para quaisquer valores inteiros positivos de m e n.

Consideremos o seguinte exemplo: $A = 2$, $B = 6$, $C = 4$ e $D = 12$, temos

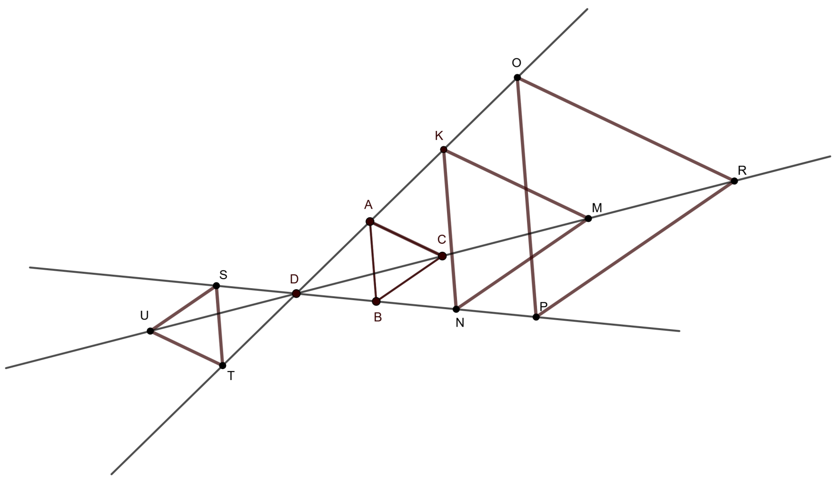
$$\frac{A}{B} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad \text{e} \quad \frac{C}{D} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

Aplicando $m = 3$ e $n = 2$, temos que $m \cdot A < n \cdot B \Rightarrow 3 \cdot 2 < 2 \cdot 6$, então $3 \cdot 4 < 2 \cdot 12$

Essa teoria permite comparar grandezas comensuráveis e incomensuráveis (como comprimentos e áreas, ou números racionais e irracionais) sem recorrer a aritmética direta, ou seja, usar números, o que era necessário antes do desenvolvimento da álgebra moderna. A definição de proporção baseia-se na comparação de múltiplos de grandezas, fornecendo uma estrutura lógica rigorosa que mais tarde fundamentaria a noção de número real. Essa abordagem solucionou o problema lógico causado pela descoberta dos irracionais e estabeleceu as bases para aplicações seguras de proporcionalidade na geometria (Euclides, 2006)

No Livro VI dos Elementos, Euclides (século IV a.c.) desenvolve aplicações da teoria das proporções à geometria plana, especialmente em situações envolvendo triângulos semelhantes e divisões proporcionais em segmentos de reta. Temos como exemplo, a homotetia no triângulo, que é a transformação geométrica, que amplia ou reduz proporcionalmente a figura a partir de um ponto central, como mostra a Figura 2.5, embora a homotetia como conceito formal ainda não seja apresentada nos estudos de Euclides, já está implícita em várias proposições sobre semelhança de triângulos. Esse conteúdo fornece a base clássica para o estudo da proporcionalidade em figuras geométricas (Eves, 2011, p.231).

Figura 2.5 – Homotetia no triângulo



Fonte: A autora.

A proposição 1 do livro de VI de Euclides afirma que "*triângulos com a mesma altura têm áreas proporcionais às suas bases*". Analisando a abordagem histórica dessa proposição Eves (2011) nos apresenta uma comparação de três métodos para demonstrações dessa proposição: Pitagórico, Eudoxiano e Moderno.

No **Método pitagórico** (pré-descoberta dos irracionais) assumia-se que qualquer par de segmento era comensurável, ou seja, tem medida comum. Dividindo-se as bases BC e DE em partes iguais e, usando a Proposição $I.38$, que diz que triângulos com mesma base e altura têm áreas iguais, concluía-se que as áreas dos triângulos também estavam na mesma razão $\frac{BC}{DE}$.

Proposição 2.1. *($VI.1$) Triângulos que têm a mesma altura estão entre si como suas bases.*

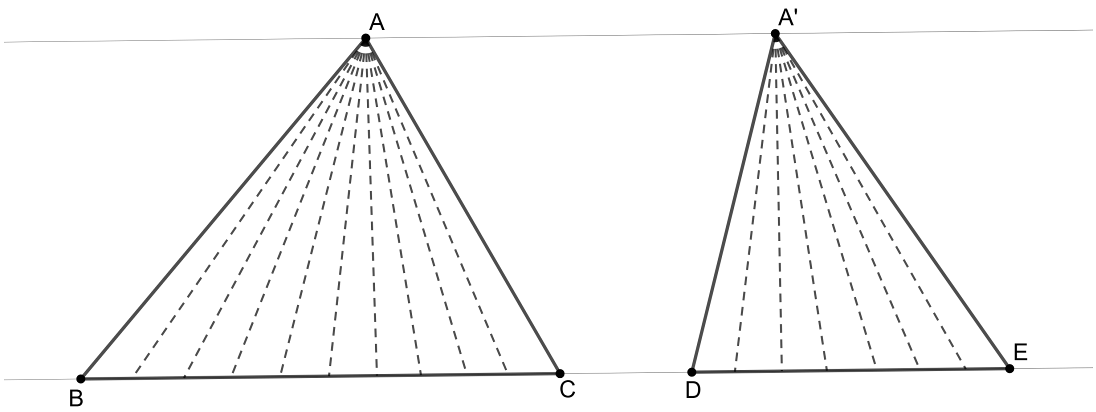
Demonstração. (1)

Considerando os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'DE$ cujas bases BC e DE sobre a mesma reta, como mostra a Figura 2.6, assumindo a comensurabilidade de dois segmentos de reta quaisquer, admitia-se que BC e DE tenham uma unidade de medida comum contida, que divide o segmento BC em p vezes e DE em q vezes. Marcando os pontos de divisão de BC e os de DE e li gando os ao vértice A e A'. Então os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'DE$ ficam divididos, respectivamente, em p e q triângulos menores, todos tendo, devido a Proposição $I.38$, a mesma área. Segue-se que

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle A'DE} = \frac{p}{q} = \frac{BC}{DE}.$$

□

Figura 2.6 – Triângulos de bases comensuráveis



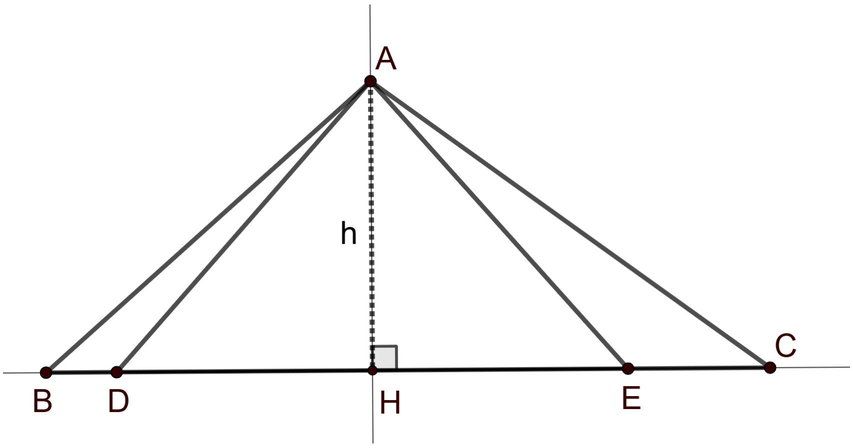
Fonte: A autora.

O **Método eudoxiano** (Euclides, Livro V e VI) resolve a incomensurabilidade. Eudoxo propôs uma nova definição de proporção, válida para segmentos comensuráveis e incomensuráveis. A demonstração eudoxiana evita assumir a comensurabilidade, baseando-se na divisão de segmentos e na comparação entre múltiplos, generalizando a demonstração, representando uma transição da matemática puramente aritmética para uma abordagem mais estrutural e relacional.

Demonstração. (2)

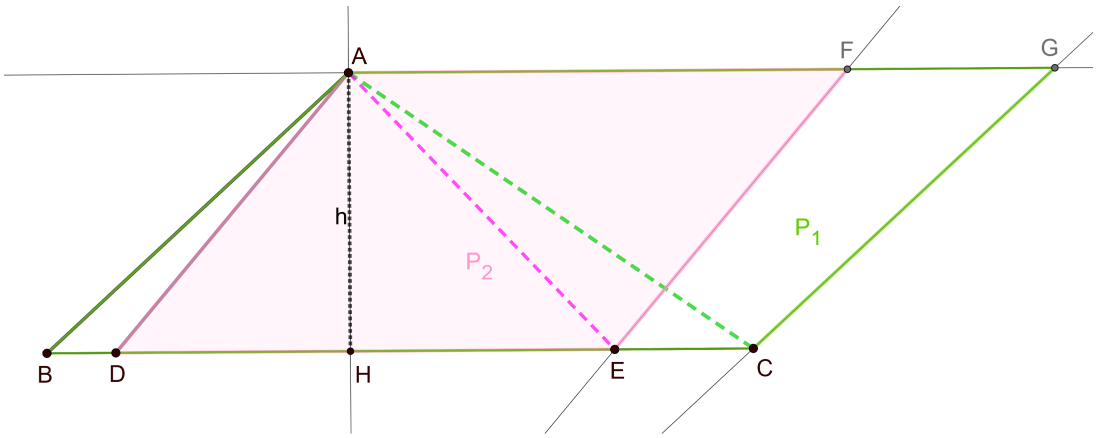
Sejam dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle ADE$, com bases BC e DE, respectivamente, com vértice em A de modo que os dois triângulos possuam a mesma altura h, ou seja, a distância perpendicular de A à BC é igual a distância de A à DE.

Figura 2.7 – Triângulos de mesma altura



Fonte: A autora.

Figura 2.8 – Paralelogramos P_1 e P_2



Fonte: A autora.

A teoria das proporções de Eudoxo (Livro V dos *Elementos*) estabelece uma definição rigorosa de igualdade entre razões de grandezas, permitindo a comparação de segmentos, áreas, volumes etc., mesmo quando as razões não são comensuráveis.

A área de um triângulo é definida geometricamente como sendo igual à metade da área de um paralelogramo que possua a mesma base e altura. Assim, para os triângulos dados, podemos construir os paralelogramos P_1 e P_2, sobre as bases BC e DE, com a mesma altura h, conforme Figura 2.8. Por proposições anteriores de Euclides, sabemos que:

$$\text{Área}(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot \text{Área}(P_1), \quad \text{Área}(\triangle ADE) = \frac{1}{2} \cdot \text{Área}(P_2).$$

e que, se os paralelogramos têm a mesma altura, então suas áreas estão entre si como suas bases:

$$\frac{\text{Área}(P_1)}{\text{Área}(P_2)} = \frac{BC}{DE}$$

Dividindo ambos os membros da proporção por 2, temos:

$$\frac{\text{Área}(\triangle ABC)}{\text{Área}(\triangle ADE)} = \frac{BC}{DE}$$

Portanto, os triângulos estão entre si como suas bases, conforme queríamos demonstrar.

$\square$

E no **Método moderno**, usado a partir do século XX, alguns textos apresentam duas demonstrações distintas: uma para segmentos comensuráveis, à maneira pitagórica, e outra para segmentos incomensuráveis, utilizando definições baseadas em limites, estabelecendo uma conexão entre a geometria clássica e a análise matemática. Nesse contexto, o segmento irracional é aproximado por segmentos racionais, empregando ideias que remetem à teoria dos conjuntos de Georg Cantor, conforme discutido por Eves (2011), garantindo maior rigor analítico ao argumento. Entretanto, neste trabalho, a demonstração baseada em limites será omitida, por exigir ferramentas formais da Análise Matemática que extrapolam os objetivos e o nível de aprofundamento propostos, priorizando-se a abordagem histórica e conceitual mais acessível ao público-alvo da Educação Básica.

Eudoxo definiu a razaõ e comparação entre grandezas da mesma espécie sem usar números, estabelecendo que as grandezas podem ser comparadas por meio de múltiplos inteiros. A definição de igualdade de razões é baseada na comparação de múltiplos; além disso, afirma que grandezas são proporcionais se múltiplos arbitrários satisfazem certas desigualdades. Aplicando o método da Teoria das proporções Eudoxiana, podemos provar a proposição $VI.33$ dos Elementos de Euclides:

Proposição 2.2. *($VI.33$) Ângulos centrais do mesmo círculo ou de círculos iguais estão entre si como os arcos correspondentes.*

Demonstração. (*Método Eudoxiano*) Ao dividirmos um círculo em X partes iguais, obtemos arcos iguais de comprimento k, com ângulos centrais iguais a θ. Consideremos $m, n \in \mathbb{Z}_+^*$. Se um arco $\widehat{AB}$ é formado por m dessas partes e um arco $\widehat{CD}$ contém n partes, então o ângulo $\angle AOB$ é m vezes o ângulo básico θ e o ângulo $\angle COD$ é n vezes θ, isto é,

$$\angle AOB = m \cdot \theta \quad \text{e} \quad \ell(\widehat{AB}) = m \cdot k$$

$$\angle COD = n \cdot \theta \quad \text{e} \quad \ell(\widehat{CD}) = n \cdot k$$

onde $\ell(\widehat{AB})$ e $\ell(\widehat{CD})$ indicam o comprimento dos arcos correspondentes.

Assim, ao dividirmos o $\angle AOB$ por $\angle COD$ e $\ell(\widehat{AB})$ por $\ell(\widehat{CD})$, obtemos

$$\frac{\angle AOB}{\angle COD} = \frac{m \cdot \theta}{n \cdot \theta} \quad \text{e} \quad \frac{\ell(\widehat{AB})}{\ell(\widehat{CD})} = \frac{m \cdot k}{n \cdot k}$$

Logo

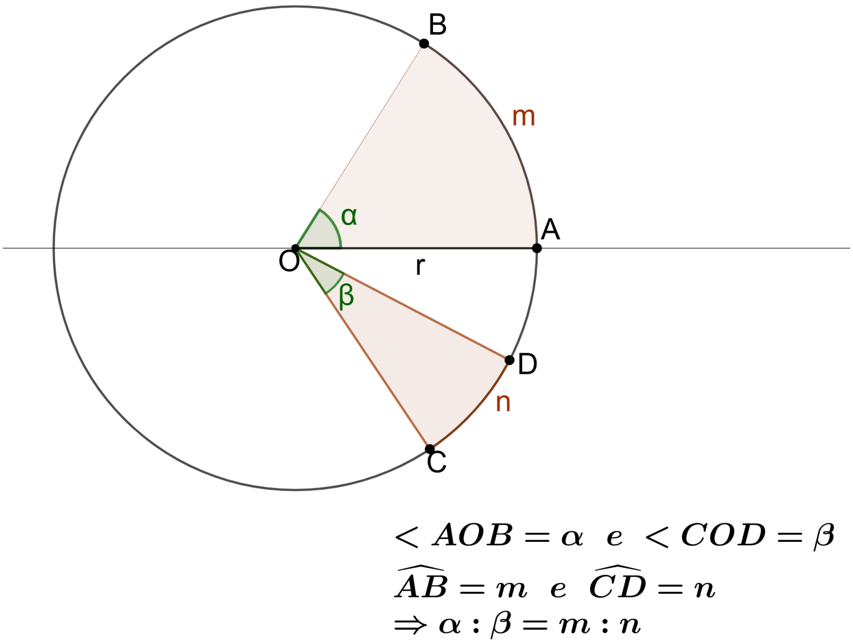
$$n \cdot \angle AOB = m \cdot \angle COD \quad \Leftrightarrow \quad n \cdot \ell(\widehat{AB}) = m \cdot \ell(\widehat{CD})$$

Portanto

$$\frac{\angle AOB}{\angle COD} = \frac{\ell(\widehat{AB})}{\ell(\widehat{CD})}$$

$\square$

Figura 2.9 – Arcos e ângulos proporcionais



Fonte: A autora.

A proposição também pode ser provada com métodos mais atuais, desenvolvidos a partir do século XX. Como ilustra a Figura 2.9, consideremos dois ângulos centrais $\angle AOB$ e $\angle COD$. Então

$$\frac{\angle AOB}{\angle COD} = \frac{\widehat{AB}}{\widehat{CD}}$$

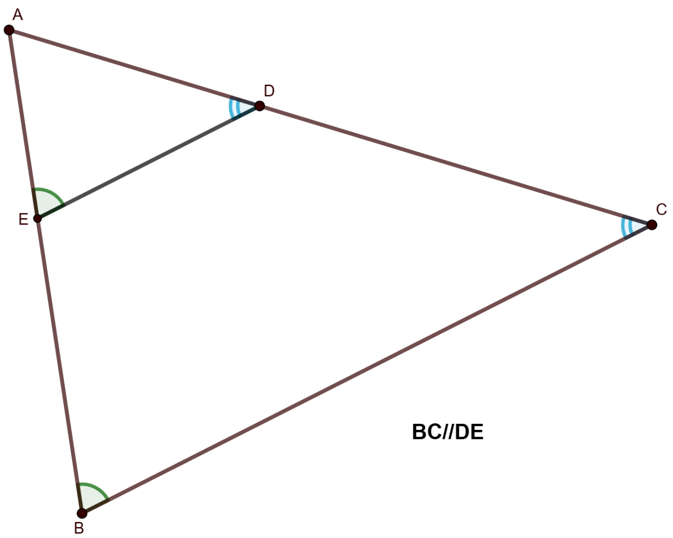
Em outras palavras, a razão entre os ângulos centrais é igual à razão entre os comprimentos dos arcos correspondentes.

Consideremos o exercício do livro *Introdução à história* no capítulo *Euclides e seus Elementos*, que propõe a prova da "Proposição $VI.2$: Uma reta paralela a um dos lados de um triângulo divide os outros dois lados proporcionalmente"(Eves, 2011, p. 186).

Demonstração. Consideremos o triangulo ABC da Figura 2.10, traçando um segmento $\overline{DE}$ paralelo ao lado BC, com D pertencente ao lado AC e E pertencente ao lado AB. Desse modo temos as transversais AB e AC passando pelos segmentos paralelos $BC//DE$ formando os ângulos correspondentes $\angle ABC$ e $\angle AED$ congruentes, assim como $\angle ACB$ é congruente a $\angle ADE$. Logo os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle AED$ são semelhantes, e portanto, tem seus lados correspondentes proporcionais, ou seja,

$$\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB} \Leftrightarrow \frac{AE}{AE+EC} = \frac{AD}{AD+DB} \Leftrightarrow AE \cdot (AD+DB) = AD \cdot (AE+EC)$$

Figura 2.10 – Triângulos semelhantes



Fonte: A autora.

Aplicando a distributiva e comutativa obtemos

$$AD \cdot AE + AE \cdot DB = AD \cdot AE + AD \cdot EC$$

Como em ambos os lados da igualdade temos $AD \cdot AE$, conclui-se que

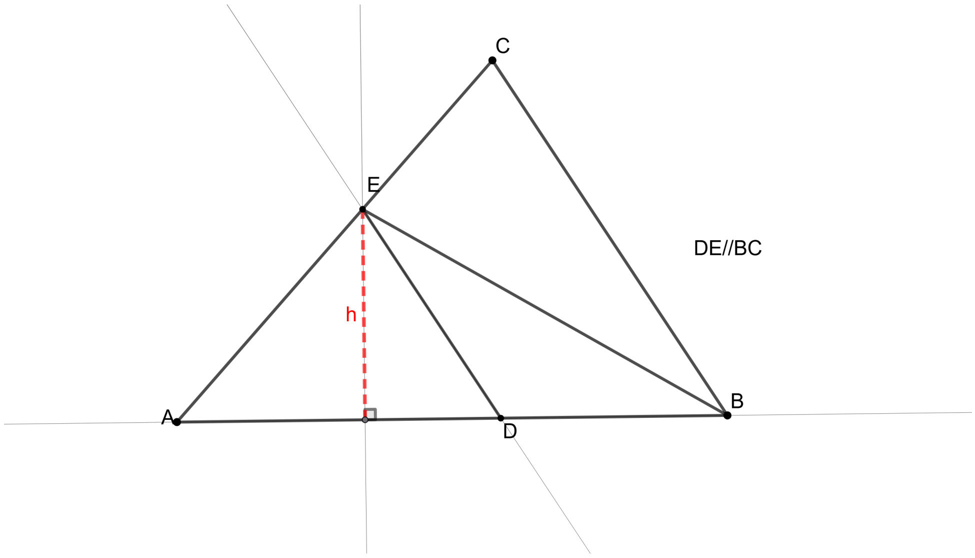
$$DB \cdot AE = AD \cdot EC \Leftrightarrow \frac{AE}{EC} = \frac{AD}{DB}$$

□

Outra prova, semelhantemente eficaz considera as coordenadas dos vértices de um triângulo retângulo no plano cartesiano, e ai aplicar o método pitagórico, utilizando do Teorema de Pitágoras define distâncias dos pontos, concluindo a proporcionalidade dos lados dos triângulos.

Ao considerarmos a altura dos triângulos ABC e ADE, com relação aos lados BC e DE, respectivamente, podemos aplicar a Proposição $VI.1$, que nos apresenta a proporcionalidade da área de triangulos a partir de suas alturas, podemos provar a proposição $VI.2$.

Figura 2.11 – Semelhança de triângulos



Fonte: A autora.

Demonstração. Seja $DE \parallel BC$, com $D \in AB$ e $E \in AC$. Queremos provar que:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}.$$

Como $DE \parallel BC$, os triângulos $\triangle ADE$ e $\triangle ABC$ têm os mesmos ângulos correspondentes, portanto são semelhantes, como mostra a Figura 2.10.

Mas vamos usar uma abordagem baseada em áreas, conforme a Proposição $VI.1$:

1. Os triângulos $\triangle ADE$ e $\triangle DBE$ compartilham a mesma altura h a partir do vértice E oposto às bases AD e DB, respectivamente, como mostra a Figura 2.11.

2. Pela Proposição $VI.1$, a razão entre suas áreas é igual à razão entre as suas bases:

$$\frac{\text{Área}_{ADE}}{\text{Área}_{DBE}} = \frac{AD}{DB}$$

3. Da mesma forma, os triângulos $\triangle ADE$ e $\triangle CEA$ também compartilham a mesma altura (em relação às bases AE e EC), então:

$$\frac{\text{Área}_{ADE}}{\text{Área}_{CEA}} = \frac{AE}{EC}$$

4. Como $\text{Área}_{DBE} = \text{Área}_{CEA}$ (por $DE \parallel BC$ e igualdade de alturas e bases correspondentes), segue que: $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

Conclusão: Uma reta paralela a um lado de um triângulo divide os outros dois lados proporcionalmente, como queríamos demonstrar. □

No Livro VII dos *Elementos*, Euclides apresenta uma teoria das proporções com base na aritmética dos números naturais. As vinte e duas definições iniciais estabelecem os fundamentos conceituais para os Livros VII, $VIII$ e IX. Destacam-se as definições de:

> 1.**Unidade** é aquilo segundo o qual cada uma das coisas existentes é dita uma.
> 2. E **número** é a quantidade composta de unidades.
> 3. **Submúltiplo** Um número é uma parte de um número, o menor, do maior, quando meça exatamente o maior.[...]
> 6. Um **número par** é o que é dividido em dois.
> 7. E um **número ímpar** é o que não é dividido em dois, ou o que difere de um número par por uma unidade.[...]
> 12. Um **número primo** é o medido por uma unidade só.
> 13. **Números primos** entre si são os medidos por uma unidade só como medida comum.
> 14. Um **número composto** é o medido por algum número.
> 15. E **números compostos** entre si são os medidos por algum número como medida comum. [...]
> 21. Números estão em proporção, quando sejam o primeiro do segundo e o terceiro do quarto o mesmo múltiplo ou a mesma parte ou as mesmas partes. (Euclides, 2006, p. 269-270)

De acordo com Silva (2012) a definição VII. 3 comparada com a de Nicomaco diz que

> O submúltiplo, que é por natureza o primeiro na divisão de menor desigualdade, é o número que, comparado com o maior, consegue medi-lo mais do que uma vez e o "mais do que uma vez" começa em duas até à infinidade. Nicómaco fala em "subduplo" (1 de 2), "subtriplo" (1 de 3), etc; enquanto que em Euclides, que nós seguimos atualmente, se usa "metade", "terça parte", etc... (Silva, 2012, p. 100)

E a definição euclidiana de proporção ($VII.20$) afirma que quatro meros estão em proporção quando a relação entre os dois primeiros é equivalente, em múltiplos ou partes, à relação entre os dois últimos. Essa definição reflete uma abordagem estritamente matemática, em contraste com a tradição pitagórica representada por Nicômaco, que atribuía à proporção geométrica um papel idealizado e filosófico.

Euclides também define operações como multiplicação ($VII.15$) e conceitos como números planos e sólidos ($VII.16$ e 17), quadrados e cúbicos ($VII.18$ e 19). A definição de número perfeito ($VII.22$), aquele que é igual à soma de seus divisores próprios, fecha o conjunto. Tais definições evidenciam uma matemática mais rigorosa e estruturada, marcada por concisão e aplicabilidade prática nas demonstrações subsequentes dos *Elementos* (Silva, 2020).

Além de desenvolver aplicações da teoria eudoxiana à geometria plana, o Livro VI dos Elementos permite a construção das proporcionais terceiras, quartas e médias, e a resolução geométrica de equações quadráticas. Embora os pitagóricos já conhecessem muitos desses teoremas, com Eudoxo, essas construções ganharam fundamentação lógica e precisão matemática.

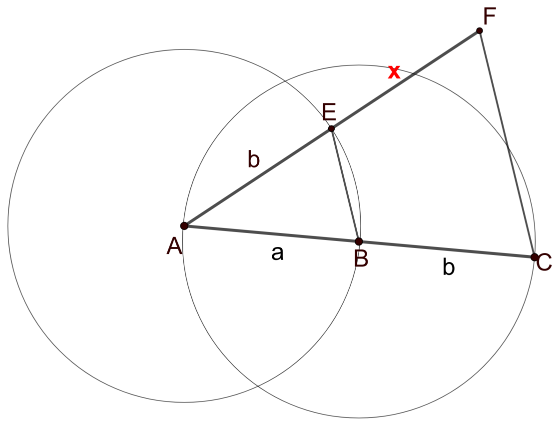
Construção da terceira porporcional

Um número x é a terceira proporcional a dois números a e b quando:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{x},$$

ou seja, o segundo termo é comum às duas razões. Para construir essa medida, traçamos um segmento $\overline{AC}$ contendo B, onde $AB = a$ e $BC = b$, sobre outra semireta com origem em A, determinamos o ponto E definido pela circunferencia de raio b centrada em A, determinando o segmento $\overline{AE} = b$, marcando o segmento $\overline{EB}$ construindo uma paralela a ele passando por C, marcamos o ponto F na intersecção dessa paralela com a semireta AE determinando assim o segmento $\overline{EF} = x$, conforme mostra a Figura 2.12, com isso obtemos que $x = \frac{b^2}{a}$.

Figura 2.12 – Terceira proporcional



Fonte: A autora.

Construção da quarta porporcional

Assumindo os valores a, b e c, um número x é a quarda proporcional a esses três valores quando:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}.$$

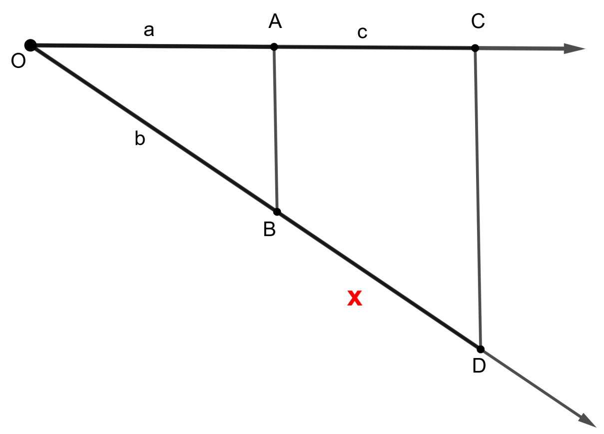
O equivalente a $ax = bc$ ou $x = \frac{b \cdot c}{a}$

Usando o Teorema de Tales (Prop VI 2), considera-se o ãngulo de vértice O formado pelas semiretas OA e OB, assumindo que sobre a semi-reta AB temos o segmento $OA = a$ e $AC = c$ e sobre a semi-reta OB o segmento $OB = b$, Assumimos o segmento AB e traçamos uma paralela a ele passando pelo ponto C determina-se o ponto D como intercecÇão da semireta OA e a paralela CD, assim determinamos o segmento $BD = x$, conforme mostra a Figura 2.13

Construção da média proporcional

Dados dois segmentos a e b, definimos a média aritmética por $m = \frac{a+b}{2}$ e sua média geométrica $G = \sqrt{ab}$. A representação geométrica dessas medidas podem ser construídas a

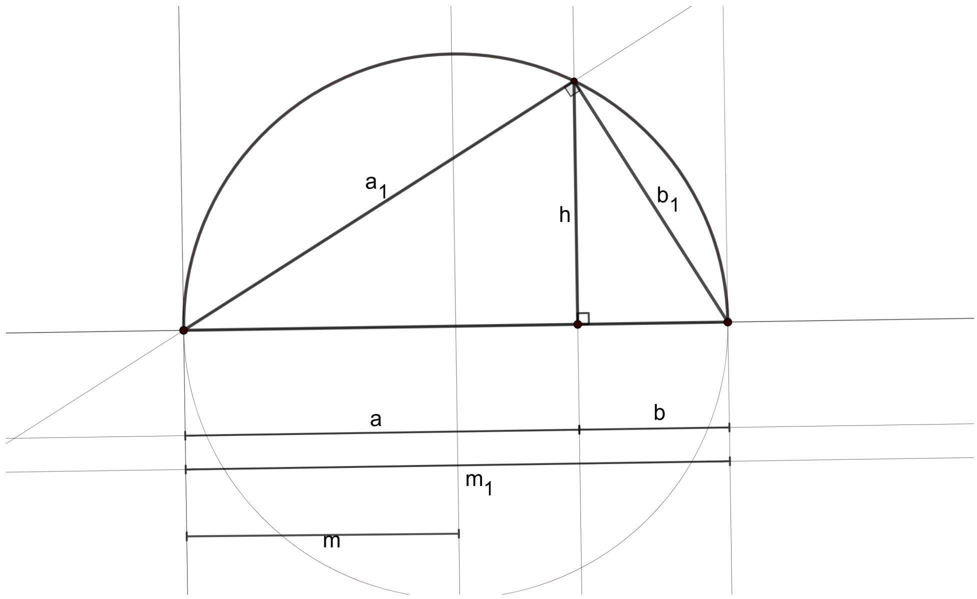
Figura 2.13 – Quarta proporcional



Fonte: A autora.

partir das relações métricas do triângulo, mais precisamente da altura $h^2 = ab$, Assim temos que $G = h = \sqrt{ab}$, conforme mostra a Figura 2.14.

Figura 2.14 – Média geométrica



Fonte: A autora.

Resolução geométrica de equações quadráticas

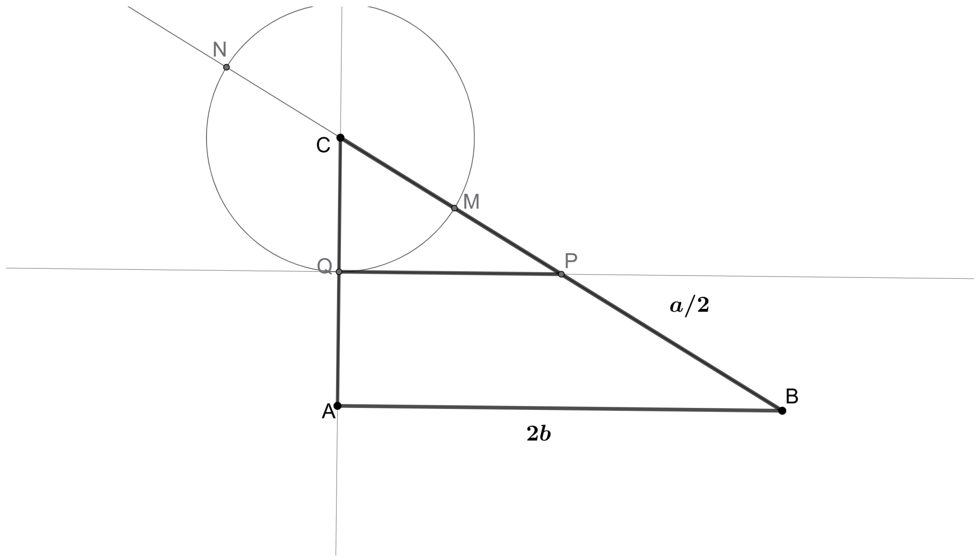
Dada a equação $x^2 - ax + b^2 = 0$, com a e b segmentos quaisquer, podemos resolve-la algebricamente, obtendo:

$$x = \frac{a^2 \pm \sqrt{a^2 - (2b)^2}}{2}.$$

Assim, o radical $r = \sqrt{a^2 - 4b^2}$ é o cateto de um triângulo retângulo com a sendo a hipotenusa e $2b$ sendo o outro cateto. Se $a > 2b$ conseguimos construir geometricamente (Figura 2.15) e assim calculamos as raízes:

$$x' = \frac{a}{2} + \frac{r}{2} \quad \text{e} \quad x" = \frac{a}{2} - \frac{r}{2}$$

Figura 2.15 – Construção da solução da equação quadrática



Fonte: A autora.

Na construção, o triângulo retângulo $\triangle ABC$, a hipotenusa $BC = a$, $AB = 2b$ e $AC = r$, marcamos P, o ponto médio de BC, traçamos a paralela a AB passando por P, obtemos o ponto Q sobre AC, assim $CQ = \frac{r}{2}$. Construímos o círculo de centro em C e raio $\frac{r}{2}$ marcamos sobre a reta BC os pontos M e N. Portanto $PN = x'$ e $PM = x"$ são as soluções da equação $x^2 - ax + b^2 = 0$.

2.2.1 MÉDIAS E PROPORÇÕES

Sob dominío do império Romano, entre séculos I e II d.C., na atual região da Jordânia, temos Nicômaco de Gérasa, filósofo e matemático neopitagórico, que seguiu e sistematizou alguns estudos de Pitágoras, escreveu *Arithmētikē eisagōgē* (Introdução à Aritmética), autoridade padrão por 1.000 anos, expondo a teoria elementar e propriedades dos números e contém a mais antiga tabuada de multiplicação grega conhecida (Thesleff, 2025). Sua obra influenciou diretamente autores medievais como Boécio, que traduziu suas ideias para o latim, garantindo sua circulação na Europa durante séculos. Com isso, a tradição das três médias chegou até o Renascimento com base em seus estudos, como abordaremos a seguir.

Os pitagóricos já conheciam três tipos de médias para dois números positivos a e b, a **Média Aritmética (A)**, **Média Geométrica (G)**, **Média Harmônica (H)** — esta última, anteriormente chamada de subcontrária. Para os membros dessa escola, os números não possuíam apenas valor quantitativo, mas também carregavam significados filosóficos e espirituais. Nicômaco de Gerasa seguiu essa tradição, porém com uma abordagem mais didática e aritmética. Em sua obra, tratou as médias como expressões da harmonia do cosmos, associando-as à música, tal como os pitagóricos, ao demonstrar como diferentes proporções numéricas originam os intervalos musicais.

Em sua obra *Introdução à Aritmética* e *Manual de Harmonia*, Nicômaco detalha os conceito de proporções associados às médias:

- Proporção Aritmética: Uma sequência numérica de três termos a, b e $c \in \mathbb{R}$ com diferença constante entre um termo e outro, isto é,

$$b - a = c - b = r,$$

  para $r \in \mathbb{R}$. Generalizando, uma sequência numérica qualquer com essa propriedade é chamada de Progressão Aritmética (PA) de razão r.

- Proporção Geométrica: Uma sequência numérica de três termos a, b e $c \in \mathbb{R}$ com razão constante entre um termo e outro, isto é,

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = q,$$

  para $q \in \mathbb{R}$. Dizemos que uma sequência numérica qualquer com essas características é chamada de Progressão Geométrica (PG) de razão q, também chamado de quociente.

- Proporção Harmônica: Sequência numérica onde a diferença entre dois termos é proporcional a diferença entre os próximos dois termos, ou seja, seja a sequência {a, b, c} temos:

$$\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{c}$$

Podemos provar a relação da Progressão Aritmética com a Média Aritmética da seguinte maneira:

Proposição 2.3. *Três números reais a, b e c estão em progressão aritmética se, e somente se, o termo central é a média aritmética dos extremos, isto é, $b = \frac{a+c}{2}$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Se a, b e c estão em progressão aritmética então existe uma constante r tal que

$$b = a + r \quad \text{e} \quad c = b + r$$

Substituindo $b = a + r$ na equação de c temos

$$c = (a + r) + r = a + 2r$$

Adicionando a e dividindo por 2 em ambos os lados da igualdade obtemos:

$$\frac{a+c}{2} = \frac{2a+2r}{2} = a+r = b$$

($\Leftarrow$) Se $b = \frac{a+c}{2}$, multiplicando ambos os lados por 2 obtemos

$$2b = a + c \Rightarrow b - a = c - b,$$

ou seja, a diferença de três termos a, b e c consecutivos é constante, portanto os temos estão em Progressão Aritmética (PA).

Portanto a, b e c em PA $\Leftrightarrow b = \frac{a+c}{2}$ □

De forma análoga, a Progressão Geométrica está associada a Média Geométrica, de modo que:

Proposição 2.4. *Os números estão em progressão geométrica se, e somente se, o termo central for igual a média geométrica dos extremos, ou seja,* $b = \sqrt{ac}$*, considerando* $a, b, c > 0$.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Se a, b e c estão em progressão geométrica (PG), então existe $q > 0$ tal que :

$$b = a \cdot q \quad \text{e} \quad c = a \cdot q^2$$

Substituindo c em $\sqrt{a \cdot c}$ obtemos

$$\sqrt{ac} = \sqrt{a \cdot a \cdot q^2} = \sqrt{a^2 q^2} = a \cdot q = b$$

($\Leftarrow$) Se $b = \sqrt{a \cdot c}$ com $a, b, c > 0$, elevando ambos os lados ao quadrado obtemos

$$b^2 = a \cdot c \Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{a}{b} = q.$$

Portanto, três termos a, b e c consecutivos estão em PG $\Leftrightarrow b = \sqrt{ac}$, para $a, b, c > 0$. □

Também podemos definir e provar a relação da proporção harmônica com a Média Harmônica:

Proposição 2.5. *Três números estão em proporção harmônica se, e somente se, o inverso do termo central for igual à média aritmética dos inversos dos extremos:* $\frac{1}{b} = \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{a} + \frac{1}{c})$

Demonstração. ($\Rightarrow$) Se a, b e c estão em proporção harmônica, então por definição seus inversos $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ e $\frac{1}{c}$ formam uma PA, logo, temos a a média dos inversos $\frac{1}{b} = \frac{1}{2}(\frac{1}{a} + \frac{1}{c})$.

($\Leftarrow$) O inverso do termo central for igual à média aritmética dos inversos dos extremos: $\frac{1}{b} = \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{a} + \frac{1}{c})$ então

$$\frac{1}{b} = \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{c}}{2} \Rightarrow \frac{1}{b} = \frac{\frac{c+a}{ac}}{2} \Rightarrow b = \frac{2ac}{a+c}$$

□

A tabela 2.2 apresenta exemplos dessas sequências com seus respectivos coeficentes de proporcionalidade. No Capitulo 3 temos a imagem do gráfico 3.5 que expressa o exemplo da PA como Função do 1º grau ligada a proporção direta.

Proporção	Sequência	Coeficiente de proporcionalidade
Aritmética	$2, 5, 8, 11, ...$	$5-2=3$ $8-5=3$ $11-8=3$
Geométrica	$2, 4, 8, 16, ...$	$4:2=2$ $8:4=2$ $16:8=2$
Harmônica	$6, 4, 3$	$\frac{6}{3}=\frac{6-4}{4-3}=\frac{2}{1}=2$

Tabela 2.2 – Exemplos das proporções sistematizadas por Nicômaco

Nicômaco trabalhou na preservação, sistematização e divulgação dos estudos pitagóricos sobre proporções e médias. Foi ele que organizou e formalizou a trinca de médias e mostrou que elas obedecem à desigualdade clássica $H \leq G \leq A$. Essas médias são definidas assim:

$$A = \frac{a+b}{2},\ G = \sqrt{ab},\ H = \frac{2ab}{a+b}$$

Aplicando em situações problemas temos para a média harmônica o cálculo do inverso da média dos inversos, geralmente usada para médias de velocidades ou taxas quando o tempo ou o espaço é fixo.

Sejam a e b dois números reais positivos. A média harmônica H de a e b é o inverso da média aritmética dos inversos desses números:

$$\frac{1}{H} = \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2} \Rightarrow H = \frac{2ab}{a+b}$$

Substituindo $a+b$ por $2A$, sendo A a média aritmética e $a \cdot b$ por G^2, com G representando a média Geométrica, obtemos:

$$H = \frac{2 \cdot G^2}{2A} \Rightarrow H = \frac{G^2}{A} \Rightarrow H \cdot A = G^2.$$

A última igualdade diz que a média geométrica de a e b é igual à média geométrica das suas médias aritmética e harmônica. Reescrevendo a equação na forma de proporção, obtemos:

$$\frac{A}{G} = \frac{G}{H} \tag{2.1}$$

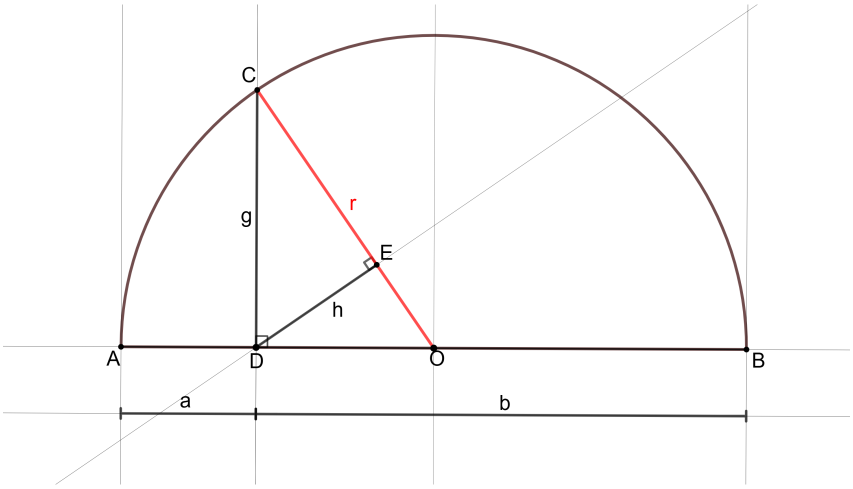
A partir da equação acima podemos aplicar a terceira proporção para construir a Média Harmônica, e como mostramos na Figura 2.14 a construção da média geométrica, temos na Figura 2.16 que a altura g no triângulo $\triangle ODC$ é a média Geométria e r (raio da semi-circunferência) é a

Media Aritmética entre a e b, traçando uma perpendicular a OC passando por D construímos o triângulo $\triangle EDC$ que é semelhante a ODC, assim temos a proporção $\frac{h}{g} = \frac{g}{r} \Rightarrow h = \frac{g^2}{r}$ comparando com a proporção 2.1, temos:

$$H = \frac{G^2}{A} = \frac{g^2}{r} = \frac{ab}{\frac{a+b}{2}} = \frac{2ab}{a+b}.$$

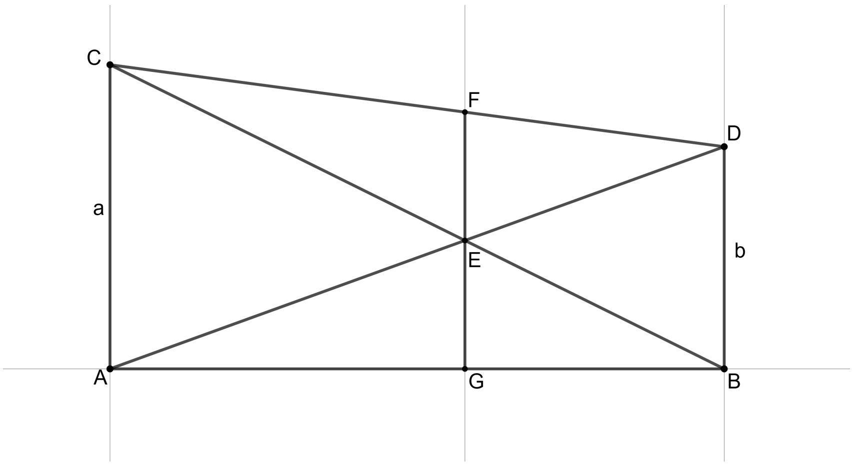
Portanto h na Figura 2.16 representa a média harmônica entre a e b.

Figura 2.16 – Representação geométrica da média harmônica



Fonte: A autora.

Figura 2.17 – Construção da média harmônica



Fonte: A autora.

Para a média aritmética facilmente encontramos exemplos práticos, como por exemplo o cálculo de média de notas. Hariki, (2009) nos apresenta exemplos da aplicação da média Harmônica.

Exemplo 1: "Você vai de casa até o trabalho, uma distância de 10 km, a 60 km/h na ida e 40 km/h na volta. Qual é a velocidade média da viagem inteira?"Nesse caso não é possível aplicar a média aritmética, porque o tempo gasto em cada trecho é diferente. A média correta é a harmônica:

$$H = \frac{2.60.40}{60+40} = \frac{4800}{100} = 48$$

Ou seja, a velocidade média da viagem de ida e volta é 48 km/h. Nesse caso nossa Sequência Harmônica é $\{60, 48, 40\}$ de proporcionalidade igual a

$$\frac{60-48}{48-40} = \frac{60}{40} = 1,5$$

Exemplo 2: O problema do uísque

"Durante 4 meses consecutivos, o sr. Mário comprou uísque para o bar de sua casa aos preços, respectivamente, de 16, 18, 21 e 25 reais por garrafa. Qual foi o custo médio do uísque para o sr. Mário nesse período todo?"

Uma hipótese é que sr. Mário seja um bebedor regular e compre a mesma quantidade x de uísque a cada mês.

Logo, ele despendeu $16x+18x+21x+25x = 80x$ reais para comprar uísque no período. Daí, o custo médio no período de 4 meses foi de

$$\frac{80x}{4x} = 20$$

reais por garrafa. Caso essa hipótese seja verdadeira, o custo médio no período é a média aritmética dos custos mensais.

Uma outra hipótese plausível é que, talvez por não ter tido aumento de salário nesse período, o sr. Mário tenha gasto a mesma quantia y de reais a cada mês.

Logo, ele consumiu $\frac{y}{16} + \frac{y}{18} + \frac{y}{21} + \frac{y}{28}$ garrafas no período. Assim, o custo médio nesse período foi, aproximadamente:

$$\frac{4y}{\frac{y}{16} + \frac{y}{18} + \frac{y}{21} + \frac{y}{28}} = 19,5$$

reais por garrafa. Portanto, neste caso, o custo médio no período é a média harmônica dos custos mensais.

Outra aplicação da proporção Harmônica é no campo da música. De acordo com Hariki (2009) a proporção $A \cdot H = a \cdot b$ já era conhecida pelos babilônicos, mas foram os Pitágoricos que a relacionaram à música.

> "Pitágoras descobriu que os comprimentos x, y, z, w de uma corda vibrante, correspondentes a uma nota (digamos dó), à sua quarta (fá), à sua quinta (sol) e à sua oitava (dó), estão entre si assim como os números $12, 9, 8, 6$. Na notação de Euclides,
>
> $$\frac{x}{12} = \frac{y}{9} = \frac{z}{8} = \frac{w}{6}$$
>
> (Hariki, 2009).

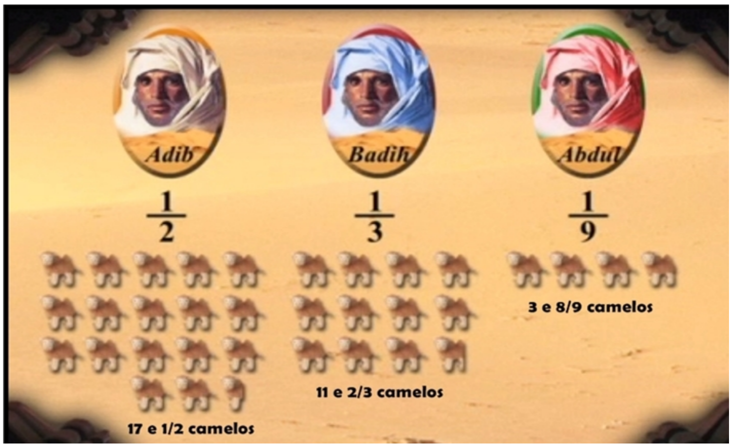
A primeira vez a ser chamada de média harmônica foi por volta de 400 a. C, por Arquitas, conhecida até então por média subcontrária. Os relatos sobre Nicomâco são embasadas pela analise realizada por Silva (2012) de suas obras e contribuições à escola pitagórica, como nos exemplos das sequências citadas anterioremente

2.2.2 MUSSARAF E SUA CONTRIBUIÇÃO

A história de Mussaraf é analisada na série *Matemática na escola* desenvolvida pela Universidade de Campinas, que apresenta uma versão das histórias de Malba Tahan, contribuindo para a abordagem do conteúdo de frações, a partir de situações problemas.

De acordo com Paques e Cornélio (2011) Mussaraf é um arquiteto do reino Persa, que viaja por todo Oriente atrás de inspirações arquitetônnicas. Quando passava pelo Iemen, encontra o filho caçula de um rico comerciante, *Abdul*, que após perder o pai, ele e seus dois irmãos andavam aflitos buscando partilhar a herança conforme o testamento deixado para divisão de seus 35 camelos. O documento dizia que *Adib*, o mais velho tem direito a metade dos camenlos, ou seja, $\frac{1}{2}$ de 35, *Badih*, o segundo filho deve receber um terço da cáfila, isto é, $\frac{1}{3}$ de 35, já *Abdul* receberá apenas um nono, $\frac{1}{9}$ de 35 camelos. Matematicamente, essa partilha é impossível, considerando que os camelos representam valores inteiros e 35 não é divisivel por 2 ou 3. Como ilustra a Figura 2.18, a partilha era, de fato, um grande problema, mas o arquiteto Mussaraf pensou em uma solução.

Figura 2.18 – Divisão da herança de camelos



Fonte: Paques e Cornélio, 2011.

Para possibilitar a divisão, Mussaraf doa seu camelo a *Abdul*, totalizando 36 camelos, quantidade divisível por 2, 3 e 9, então ao recalcular a partilha obtém:

- *Adib*: $\frac{1}{2}$ x 36 = 18 camelos
- *Badih*: $\frac{1}{3}$ x 36 = 12 camelos
- *Abdul*: $\frac{1}{9}$ x 36 = 4 camelos

Todos os irmãos receberam mais do que na partilha anterior, mas a soma das heranças, a saber, $18 + 12 + 4$ é igual a 34 camelos, sobrando assim dois camelos a Mussaraf. Ao pensarmos na junção das partes estipuladas no testamento do pai, temos

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{9+6+2}{18} = \frac{17}{18} \text{ x } 35$$

O resultado é pouco mais de 33 camelos, o que nos mostra que o pai deixou $\frac{1}{18}$ da herança sem distribuir, quase 2 camelos inteiros. Ao somar os valores inteiros da divisão apresentada na Figura 2.18 obtemos 17+11+3 = 31, restando 4 camelos. Assim, mesmo doando um camelo, Mussaraf ainda conseguiu distribuir justamente a herança e retomar seu camelo doado com acréscimo de mais um camelo.

Outra situação delicada que Mussaraf ajudou *Abdul* foi libertar sua noiva de um encantamento. Ela havia sido transformada numa pomba até que resolvessem um problema envolvendo o tanque e duas torneiras de água. Individualmente a torneira verde enchia o tanque em 30 minutos e a vermelha em 45 minutos, e após cheio, o tanque demorava 90 minutos para escoar toda água pelo ralo. O problema tem duas partes, a primeira era determinar o tempo necessário para encher o tanque com as duas torneiras ligadas juntas, e a segunda etapa é calcular o tempo para esvaziar o tanque com a torneira verde ligada e o ralo aberto.

Mussaraf pensou na situação considerando a parcela do tanque que é preenchida ou esvaziada por minuto em cada caso:

- torneira verde: enche uma parte de 30 volume total, $\frac{1}{30}$ por minuto
- torneira vermelha: enche $\frac{1}{45}$ por minuto
- ralo: esvazia $\frac{1}{90}$ por minuto

Somando a vazão das duas torneiras temos

$$\frac{1}{30} + \frac{1}{45} = \frac{3}{90} + \frac{2}{90} = \frac{5}{90} = \frac{1}{18},$$

provando que é necessário 18 minutos para preencher o tanque com as duas torneiras ligadas. Já o escoamento total com a torneira verde ligada e o ralo aberto seria de 45 minutos

$$\frac{1}{30} - \frac{1}{90} = \frac{3}{90} - \frac{1}{90} = \frac{2}{90} = \frac{1}{45}$$

calculado a partir da diferença entre a vazão da torneira verde e a capacidade de escoamento do ralo.

A história de Mussaraf é semelhante a do calculista Beremiz Samir, retirado e analisado por Oliveira(2023) do livro *O homem que calculava* de Malba Tahan. Mussaraf ou Beremiz podem ser apenas personagens fictícios, usados para ilustrar a resolução de situações problema que envolvem o conceito de frações, na prática, dividiram um mesmo número em partições diferentes e ao comparar as partes determinam suas devidas proporções, aplicando o conceito de frações equivalentes que conhecemos hoje. Os problemas de *Abdul* foram resolvidos, mas ainda teremos muita situação problema envolvendo fração para analisar ao longo do trabalho.

2.3 RAZÃO ÁUREA: UMA PROPORÇÃO FAMOSA

A proporção áurea, tem seus primeiros registros formais na Grécia Antiga, com a obra *Elementos* de Euclides. O valor é representado pela letra ϕ, pertencente ao conjunto dos números irracionais $\mathbb{I}$, com valor aproximado de 1,618.

Mesmo sendo os gregos os primeiros a descrever matematicamente a razão áurea, foram os pitagóricos, ainda no século VI a.C, que acreditaram que a matemática explicava a harmonia que havia no universo, apresentando diversas relações numéricas em seus estudos, principalmente geométricas e musicais.

Construção do Segmento áureo

Tomemos um segmento AB e um ponto C no seu interior dividindo-o em duas partes, conforme a Figura 2.19, temos a seguinte propriedade: a razão entre a menor e a maior parte é igual a razão entre a maior parte e o segmento total, ou seja,

$$\frac{CB}{AC} = \frac{AC}{AB},$$

considerando $AB = a$, obtemos

$$AC = a \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

O segmento AC com essa propriedade é chamado de segmento áureo interno de AB.

Figura 2.19 – Proporção de segmento

Fonte: A autora.

Considerando o ponto externo C' ao segmento AB obtemos a proporção

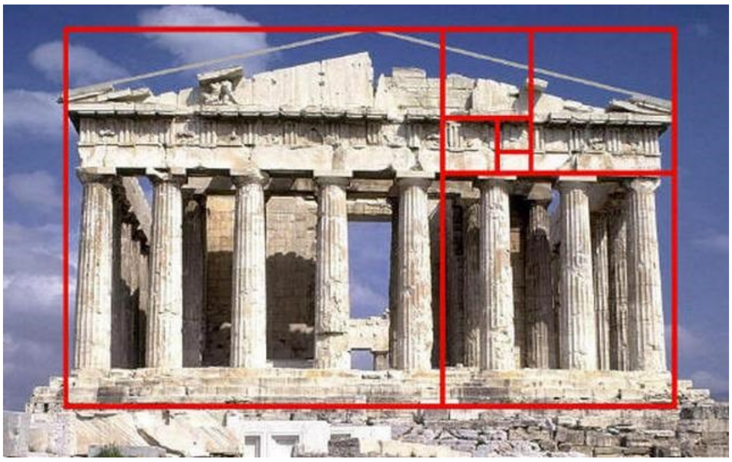
$$\frac{BC'}{AB} = \frac{AB}{AC'},$$

o segmento AC' é conhecido com Segmento áureo externo de AB. Fazendo $AB = a$, e temos

$$BC' = a \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

O arquiteto grego Phidias, no projeto do Parthenon, do século V a.C aplica a representação geométrica da razão áurea, descrita e explicada posteriormente pelos gregos e também pela sequência de Fibonacci, como mostra a Figura 2.20.

Figura 2.20 – Templo Parthenom



Fonte: Lima, Maranhão e Lins (2017).

O matemático Leonardo de Pisa conhecido como Fibonacci (1170-1250) publica em sua obra **Liber abaci**, em 1202, o "problema dos coelhos"que dá origem a famosa Sequência de Fibonacci, a saber, o sucessor de um número da sequência é resultado da soma dos dois números anteriores, para explicar a sequência a associou ao crescimento da população de coelhos. A situação é apresentada no livro didático de Matemática por Bonjorno(2020) como exercício resolvido:

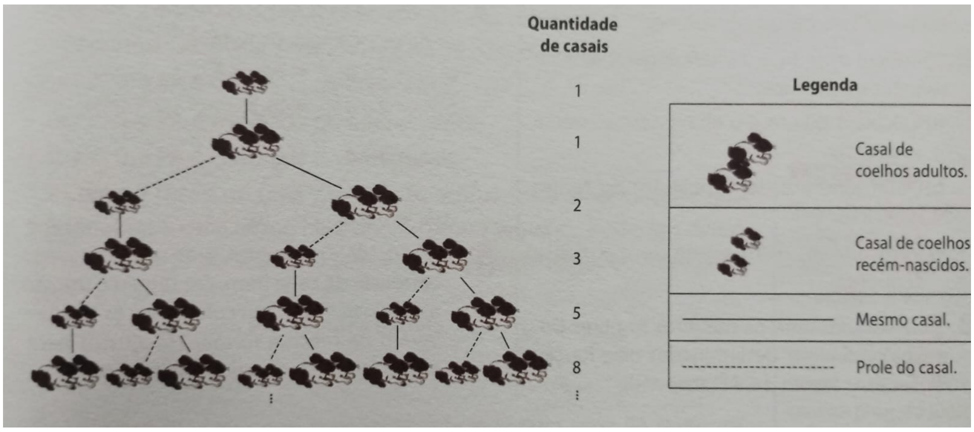
> "Os coelhos se reproduzem mais rapidamente que a maioria dos mamíferos. Considere a seguinte situação que foi estudada por Fibonacci: um casal de coelhos pode reproduzir-se apenas depois do segundo mês de vida e, a partir daí, gerar um novo casal por mês. Começando com apenas um casal recém-nascido de coelhos, quantos casais existirão após o quinto e oitavo mês?"(Bonjorno, 2020, p. 121).

A Figura 2.21 ilustra claramente a situação da reprodução de coelhos estudada por Fibonacci.

A explicação apresenta que ao final do:

- 1º mês haverá apenas 1 casal de filhotes;

Figura 2.21 – Reprodução de coelhos



Fonte: Bonjorno (2020).

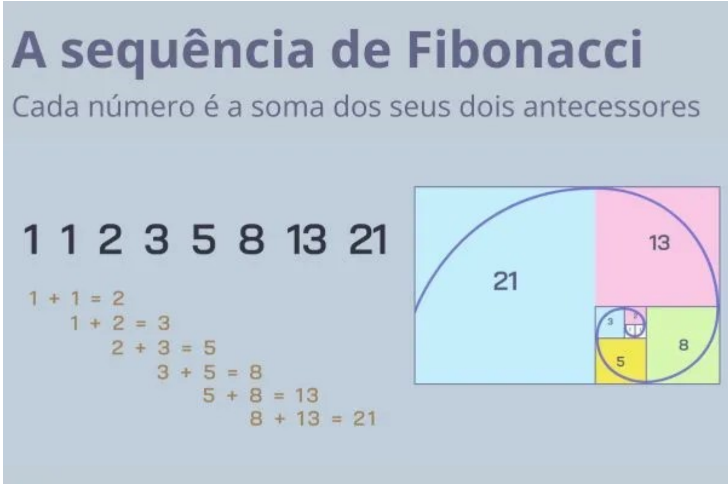
- 2º mês haverá 1 casal de coelhos adulto;
- 3º mês haverá 1 casal adulto e 1 casal recém-nascido, ou seja, $1 + 1 = 2$ casais;
- 4º mês haverá 2 casais adultos e 1 novo casal de filhotes, pois apenas o casal adulto do mÊs anterior reproduziu, ou seja, $2 + 1 = 3$ casais;
- 5º mês haverá 3 casais adultos e 2 casais de recém-nascidos, pois os 2 casais adultos do mês anterior tiverem filhotes, ou seja, serão $3 + 2 = 5$ casais;
- 6º mês são 5 adultos e $+3$ filhotes $= 8$ casais;
- 7º mês são 8 adultos $+5$ filhotes $= 13$ casais;
- 8º mês seriam 13 adultos $+8$ filhotes $= 21$ casais.

Formando perfeitamente, como esperado, a Sequência de Fibonacci:

$$\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots\}.$$

De acordo com Sousa (2020), a Sequência de Fibonacci permitiu relacionar o número de ouro com a geometria, vastamente usada nas arquiteturas antigas e artes anteriores a sua publicação. Por exemplo, a sequência de Fibonacci se relaciona com espirais compostas por uma sequência de quadrados onde suas arestas são proporcionais aos números da sequência, conforme ilustram a Figura 2.22.

Figura 2.22 – Sequência de Fibonacci



Fonte: Rafael Ash (2019).

Outra relação importante dessa sequência é sua relação com a razão áurea, devido a razão entre dois números consecutivos resultar valores variando em torno da proporção áurea, conforme aumenta-se os valores da sequência o resultado tende número de ouro

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,61803339874\ldots$$

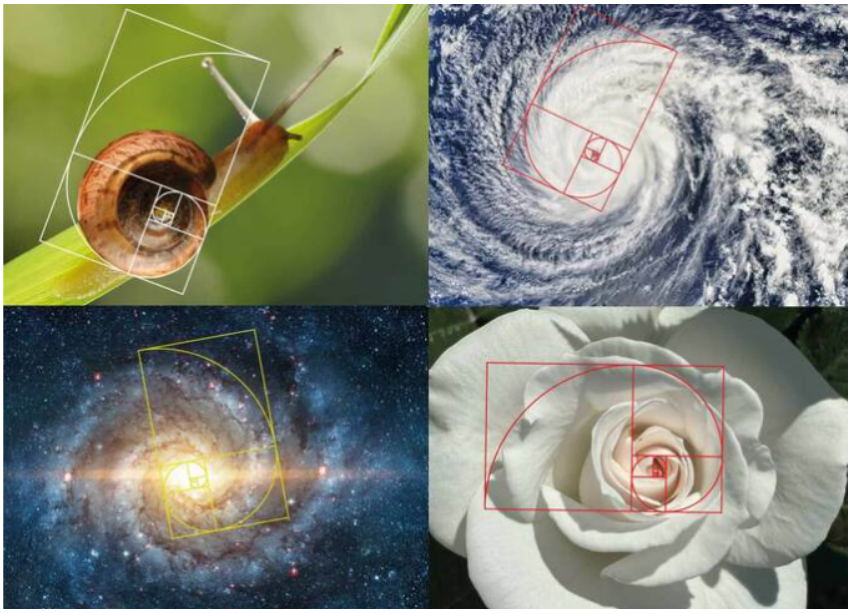
Vejamos,

$$\frac{1}{1} = 1 \;\; \rightarrow \;\; \frac{2}{1} = 2 \;\; \rightarrow \;\; \frac{3}{2} = 1,5 \;\; \rightarrow \;\; \frac{5}{3} = 1,6666\ldots \;\; \rightarrow \;\; \frac{8}{5} = 1,6 \;\; \rightarrow \;\; \frac{13}{8} = 1,625$$

$$\frac{21}{13} = 1,61538\ldots \;\; \rightarrow \;\; \frac{34}{21} = 1,6190476\ldots \;\; \rightarrow \;\; \frac{55}{34} = 1,6176\ldots \;\; \rightarrow \;\; \frac{89}{55} = 1,61818\ldots$$

A grande notoriedade da proporção áurea reside em sua recorrência nas formas da natureza: ela pode ser observada na disposição em espiral presentes em conchas de Nautilus, cascos de caramujos, Via Láctea, nos padrões de crescimento das plantas e simetria das flores (Figura 2.23), nas sementes de um girassol (Figura 2.24), na estrutura de uma pinha, nas proporções do corpo humano, todos esses exemplos que evidenciam a presença harmônica dessa razão no mundo natural. (Westwing, 2024).

Figura 2.23 – Sequência de Fibonacci na natureza

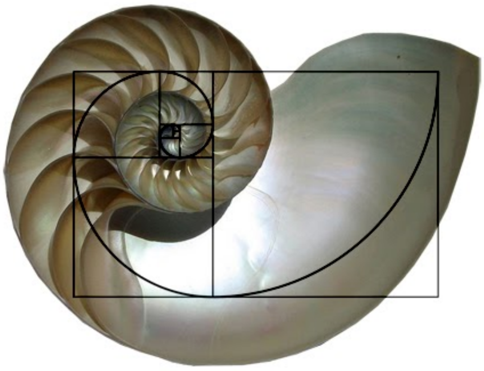


Fonte: Rafael Ash (2019).

Figura 2.24 – Espiral de Fibonacci na natureza

(a) Girassol

Fonte: Franco (2024).

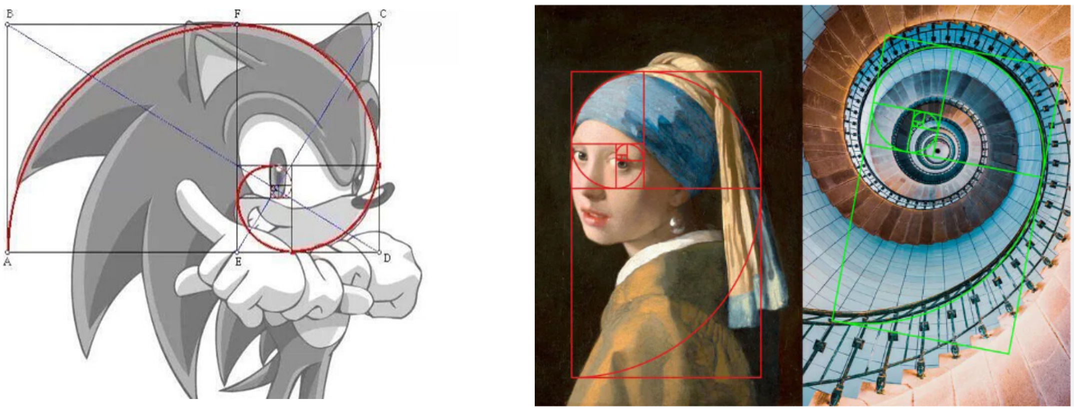


(b) Concha de caracol

Fonte: Bassini (2020).

Segundo Franco (2024) a proporção de Fibonacci está presente em diversas escalas da natureza — desde a organização de plantas e galáxias até as impressões digitais humanas — revelando uma ordem matemática subjacente ao universo. Essa proporção contribui tanto para a eficiência funcional quanto para a estética, sendo associada à beleza e perfeição, do macro ao microscópico, sendo amplamente usada na produção de imagens proporcionais em desenhos animados e obras de arte, como nos exemplos da Figura 2.25.

Figura 2.25 – Exemplos da Sequência de Fibonacci nas artes



(a) Desenho Sonic

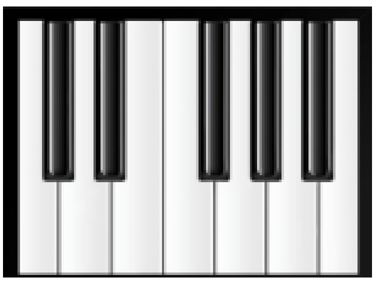
(b) Artes em tela

Fonte: Rafael Asth (2019).

A proporção áurea também tem sido associada à música desde a Antiguidade Clássica, quando os pitagóricos identificaram relações matemáticas nos sons como reflexo da ordem cósmica. No século XX, essa proporção passou a ser reconhecida na estrutura de obras eruditas, que mesmo sem comprovação de intenção explícita, a presença da proporção de Fibonacci nas composições reforça a ideia de que a busca por equilíbrio e simetria artística se conecta à lógica matemática, unindo emoção e razão. Na análise feita por Oliveira e Falcão (2019) temos o exemplo da **Música para Instrumentos de Corda, Percussão e Celeste** (*Music for Strings, Percussion and Celesta, de Béla Bartók*), onde na primeira parte temos uma estrutura de crescimento e decrescimento que se aproxima da simetria da espiral relacionada à proporção áurea. A peça tem 89 compassos, número da sequência de Fibonacci, que se aproxima da razão áurea quando dividido por termos anteriores da sequência. O clímax da música ocorre no compasso 55, e como vimos anteriormente a razão $\frac{89}{55} \approx 1,618$, que se aproxima a ϕ, o valor da razão áurea .

Outra relação importante da Sequência de Fibonacci com a música é na estrutura dos instrumentos. As medidas tendem a seguir essa sequência. Como exemplo temos as oitavas do piano, composta por 5 teclas pretas e 8 teclas brancas, organizadas na proporção $3:2$ e $5:3$, como mostra a Figura 2.26.

Figura 2.26 – Fibonacci e as teclas de um piano



Fonte: Oliveira e Falcão (2019)

Após a abordagem da razão áurea em segmentos, da presença do número de ouro nas artes e sua relação com a sequência de Fibonacci e padrões musicais, evidencia-se que todos esses exemplos têm como base a ideia de razão e de comparação entre grandezas. Esse núcleo conceitual conduz naturalmente aos capítulos seguintes, nos quais a proporcionalidade direta e inversa, a função afim e os modelos de juros são tratados de forma sistemática, mostrando como relações de variação, taxas e dependência entre grandezas estruturam tanto a linguagem matemática quanto situações do cotidiano, especialmente no contexto da educação financeira.

3 RAZÃO E PROPORÇÃO APLICADA A FUNÇÕES

No processo de ensino-aprendizagem da Matemática, é essencial garantir a compreensão sobre razão e proporção não apenas de forma algorítmica, mas contextualizada às suas múltiplas aplicações, como velocidade, consumo, preço, densidade, escalas etc., utilizando-se de relações quantitativas e funcionais para representar fenômenos cotidianos e científicos. Essas ideias não são apenas conteúdos escolares, mas formas de pensar e modelar situações-problema, sendo uma ferramenta para a compreensão do mundo, por parte do estudante, e auxiliando-o a tomar decisões racionais e a agir efetivamente na sociedade.

A proporção estabelece uma relação de igualdade entre duas razões, expressa por uma equação

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

na qual o produto dos extremos é igual ao produto dos meios: $a : b = c : d \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$. Essa equação, conhecida como equação da proporção, é fundamental na resolução de problemas envolvendo grandezas diretamente proporcionais, também conhecida como regra de três simples, sendo uma ferramenta essencial na construção de modelos funcionais, como ocorre nas funções afins e na análise de variáveis interdependentes. Se for uma proporção inversa, a equação é a relação expressa por $a \cdot b = c \cdot d$, ou seja, o produto das grandezas permanece constante, e não mais a igualdade de frações. Logo temos aplicado o conceito da lógica multiplicativa que se refere à compreensão de relações proporcionais entre grandezas, nas quais a variação de uma quantidade implica variações multiplicativas nas demais.

A partir do conceito de equação, podemos estabelecer a transição da proporcionalidade para o estudo de funções matemáticas, atribuindo significado por meio da associação a representação gráfica, permitindo visualizar e interpretar as variações entre grandezas diretamente ou inversamente proporcionais.

De acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC, 2018), espera-se que, ao longo do Ensino Fundamental e Médio, os estudantes sejam capazes de analisar relações de dependência entre variáveis, resolver problemas envolvendo grandezas proporcionais, interpretar e construir gráficos, além de aplicar modelos matemáticos em diferentes contextos (EM13MAT302, EM13MAT401). Além disso, avaliações externas como o SAEB enfatizam a compreensão de proporcionalidade direta e inversa (D15) e de funções lineares (D20, D23), evidenciando a relevância desses conteúdos para a consolidação da aprendizagem.

Proporção, no dicionário Michaelis (2015), é a relação entre duas partes. Matematicamente, pode-se definir a proporção através de uma correspondência entre dois valores distintos, de tal modo que esses valores, x e y, sejam muito bem definidos. Então, se $x \mapsto y$, tem-se que $nx \mapsto ny \; \forall \, n \in \mathbb{R}$. É possível, então, definir uma constante k que relaciona a proporcionalidade entre as grandezas x e y, de modo que:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^*,\ \exists k \in \mathbb{R} \mid \frac{x}{y} = k.$$

Essa constante denominada **razão** é uma comparação de dois números, que geralmente, separamos com dois pontos ($x : y$) ou representamos como uma fração. A **proporção** é o nome usado para a igualdade entre duas razões. Ela pode ser escrita de duas maneiras:

- igualdade de frações:
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$
- usando dois pontos:
$$a : b = c : d$$

Uma aplicação prática é a conversão monetária aplicada no câmbio entre moedas distintas, por exemplo, converter o Euro (€) para Libras(£). Considerando a taxa de câmbio aproximada de

$$100£ = 117€$$

temos a razão

$$\text{Razão} = \frac{117}{100} \quad \text{ou} \quad 100 : 117.$$

Se precisarmos converter $40£$ em euros, estabelecemos a seguinte proporção:

$$\frac{117}{100} = \frac{x}{450},$$

o que implica

$$x = 450 \cdot \frac{117}{100} = 526{,}5.$$

Assim, $450£ \approx 526{,}5€$.

De forma equivalente, podemos escrever a proporção na forma de razão:

$$100 : 117 = 450 : x,$$

o que resulta em

$$100 \cdot x = 450 \cdot 117 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{52650}{100} = 526{,}5,$$

confirmando que

$$100 : 117 = 450 : 526{,}5.$$

A relação de proporcionalidade é transitiva, reflexiva e comutativa, descrevendo, então, uma relação de equivalência ($\sim$). Seja a relação $\mathbb{R}$ definida no conjunto dos pares ordenados de números reais positivos, ou seja, $\mathbb{R}^+$x$\mathbb{R}^+$ tal que:

$$(a, b) \sim (c, d) \iff \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Vamos mostrar que essa relação é:

- **Reflexiva**:

  Para todo par (a, b), temos:

  $$\frac{a}{b} = \frac{a}{b} \Rightarrow (a, b) \sim (a, b).$$

  Logo, é reflexiva.

- **Simétrica** (Comutativa, no sentido relacional)

  Se $(a, b) \sim (c, d)$ então:

  $$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \Rightarrow (c, d) \sim (a, b)$$

  Logo é simétrica.

- **Transitiva**

  Se $(a, b) \sim (c, d)$ e $(c, d) \sim (e, f)$ então

  $$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{e} \quad \frac{c}{d} = \frac{e}{f} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{e}{f} \Rightarrow (a, b) \sim (e, f).$$

  Logo é transitiva.

Podemos, portanto, definir a relação entre grandezas de proporções diretas ou inversas:

- Duas grandezas são diretamente proporcionais quando, ao aumentarmos uma, a outra também aumenta na mesma razão. Nesse caso, a razão entre elas permanece constante.

  Exemplo: distância e tempo, com velocidade constante — quanto mais tempo se percorre, maior a distância.

- Duas grandezas são inversamente proporcionais quando, ao aumentarmos uma, a outra diminui na mesma razão. O produto entre elas permanece constante.

  Exemplo: velocidade e tempo, com distância constante — quanto maior a velocidade, menor o tempo necessário para completar o percurso.

Com isso, podemos estabelecer suas respectivas relações com funções e representações gráficas.

3.1 PROPORÇÃO DIRETA

A **proporção direta** é aquela que relaciona duas grandezas que crescem e decrescem sob a mesma razão, ou seja, o mesmo fator. Como exemplo dessa relação podemos citar a correspondência entre as grandezas físicas do tempo que um carro realiza uma viagem e a a distância percorrida, denominada a velocidade média do percurso.

Tabela 3.1 – Correspondência entre os valores de tempo e posição do carro (distância).

Grandeza	Medida 1	Medida 2	Medida 3	Medida 4
Posição	$50\ km$	$100\ km$	$150\ km$	$200\ km$
Tempo	$1\ h$	$2\ h$	$3\ h$	$4\ h$

Nesse exemplo, as grandezas tempo e distância são *diretamente proporcionais*, independente da medida utilizada, chega-se a um coeficiente de proporcionalidade (a razão) dado por:

$$\frac{n \cdot 50\ km}{n \cdot 1\ h} = 50\ km/h,$$

sendo n o número da medida realizada. Ora, se um carro anda por duas horas, a diferença entre a posição dele e o início do movimento deve ser o dobro do percurso percorrido em uma hora.

Quando temos a relação de duas grandezas diretamente proporcionais e apenas três valores são conhecidos, conseguiremos determinar o quarto valor relacionado aplicando o conceito do coeficiente de proporcionalidade, o que chamamos de **Regra de três simples**. Vejamos no Exemplo a seguir.

Problema:

Um carro permanece a uma velocidade média de $50km/h$; portanto, sabemos que são percorridos 50 quilômetros em uma hora. Em uma viagem de $450km$, quantas horas serão necessárias para completar o percurso?

Passo 1: Organizar os dados:

$$\begin{array}{ccc} \text{Distância (km)} & \rightarrow & \text{tempo (h)} \\ 50 & \rightarrow & 1 \\ 450 & \rightarrow & x \end{array}$$

Como a distância percorrida aumenta a cada hora de viagem, as grandezas "distância" e "tempo" são diretamente proporcionais, o que nos permite organizar a regra de três com igualdade de frações equivalentes. Multiplicando o numerador de uma fração pelo denominador da outra (multiplicação cruzada), obtemos:

Passo 2: Proporção direta, multiplicamos os valores cruzados da fração

$$\frac{50}{450} = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad 50x = 450.1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{450}{50} \quad \Rightarrow \quad x = 9$$

Resposta: Concluímos que para percorrer 450 km na velocidade $50km/h$ serão necessárias 9 horas.

Função é uma relação entre dois conjuntos, chamada de domínio (conjunto de partida) e contradomínio (conjunto de chegada), na qual cada elemento do domínio está associado a um único elemento do contradomínio, e esses valores formam o conjunto Imagem da função ($Im(f)$).

Em termos matemáticos, se f é uma função de A em B, escrevemos:

$$f : A \to B$$

e, para todo $x \in A$ existe um único $y \in B$ tal que

$$y = f(x).$$

Vamos estabelecer a relação entre a proporção direta e *funções*, especificamente, a ***Função do*** $1°$ ***grau (Afim)***.

3.1.1 PROPORÇÃO DIRETA E FUNÇÃO

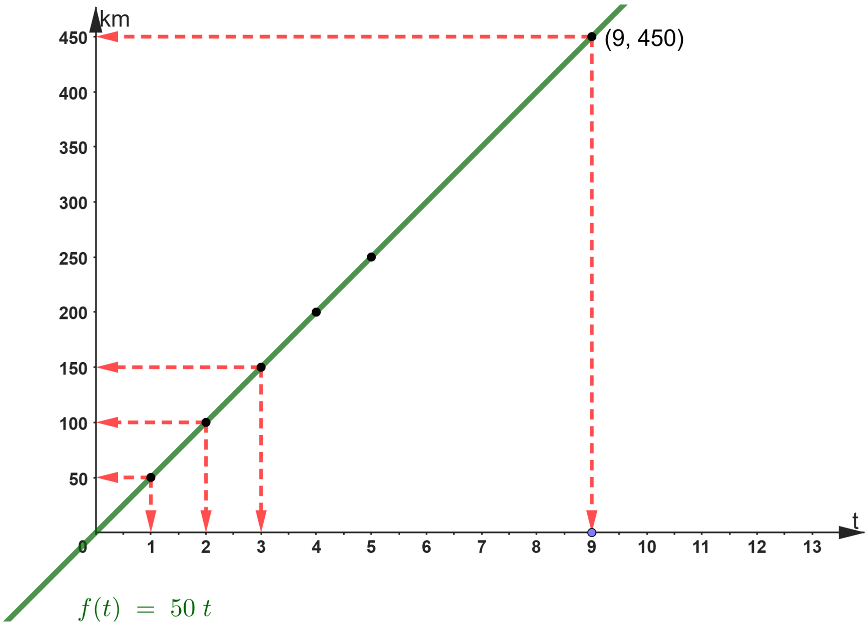
Uma Função do $1°$ grau é definida por $f(x) = ax + b$, onde b representa o coeficiente linear e a é o coeficiente angular. O coeficiente angular indica a proporção de crescimento ou decrescimento dessas funções; já o coeficiente b representa o ponto onde $f(x) = 0$, ou seja, a intersecção da curva $f(x)$ e o eixo das ordenadas.

Do exemplo anterior, das grandezas diretamente proporcionais, podemos estabelecer uma função do tempo em relação à distância percorrida, pois a cada hora o carro percorreu 50 quilômetros, estabelecendo a razão 50 km a cada 1h, ou seja, o coeficiente angular é a velocidade do carro, $a = 50$ e o linear é o ponto de partida, $b = 0$. Assim, a relação pode ser modelada por uma função do tipo:

$$f(t) = 50t.$$

Associando os dados da Tabela 3.1 ao plano cartesiano, obtemos a reta partindo do ponto $(0, 0)$, representada na Figura 3.1.

Figura 3.1 – Função f(t) = 50t



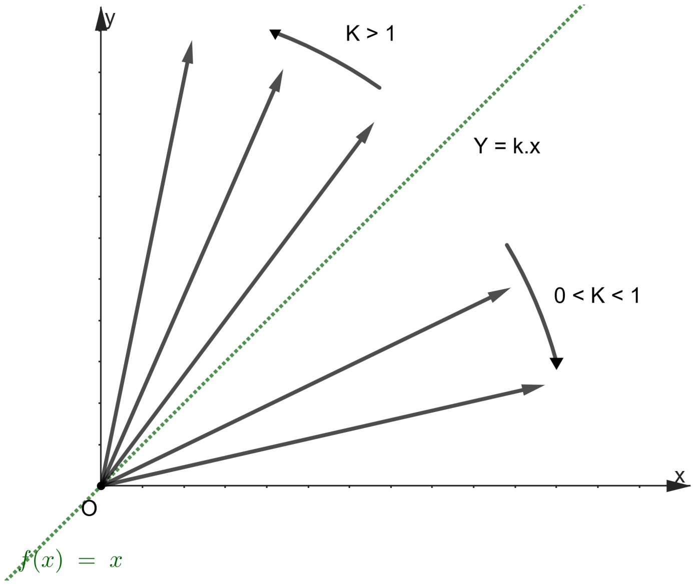
Fonte: A autora.

Podemos, com esse exemplo, formalizar a definição da função do 1º grau conhecida como *Função Linear* e relacionar sua taxa de variação ao conceito de proporcionalidade.

3.1.2 PROPORCIONALIDADE NA FUNÇÃO LINEAR

A função Linear $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = k.x$, com $k \in \mathbb{R}^{+}_{*}$, é um caso particular da função afim, com $b = 0$, e representa uma proporção direta entre o valor do eixo das abscissas, reta horizontal no plano cartesiano, e a variável representada pelo eixo das ordenadas, a reta vertical do plano cartesiano. Ao definirmos a lei de formação de uma função linear $Y = aX$, onde $k = a$ é o coeficiente angular e o coeficiente linear é $b = 0$, estabelecendo que x é uma variável independente, determinamos os valores de y de acordo com a regra de formação, que varia proporcionalmente a variação de x.

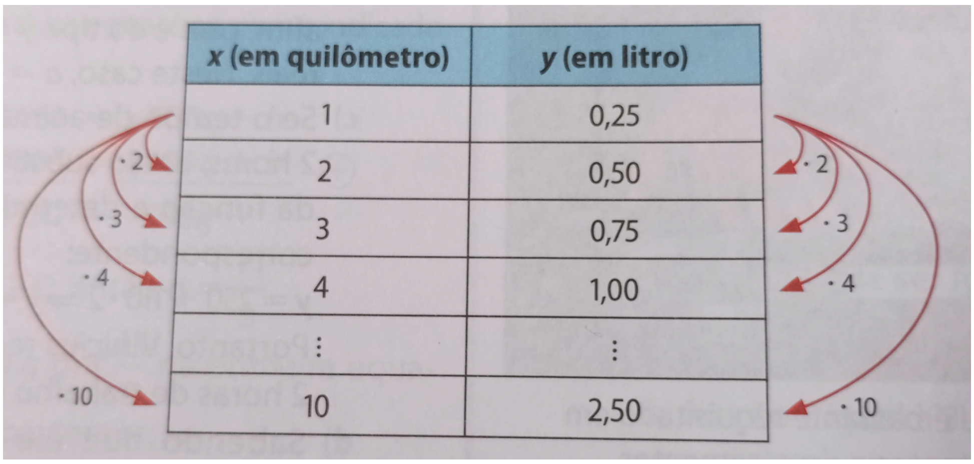
Figura 3.2 – Função linear $f(x) = k \cdot x$



Fonte: A autora.

Outra situação que podemos descrever como diretamente proporcional é a relação entre o consumo de combustível y (em litros) de um modelo de carro blindado e a distância x que ele percorre (em quilômetros) por meio de uma função linear dada por $y = 0,25x$. A Figura 3.3 podemos analisar a relação entre os valores.

Figura 3.3 – Relação das grandezas da proporção direta com as variáveis x e y



x (em quilômetro)	*y* (em litro)
1	0,25
2	0,50
3	0,75
4	1,00
⋮	⋮
10	2,50

Fonte: Bonjourno (2020).

Ao dobrarmos o valor de x, o correspondente em y também dobra, se multiplicarmos x por 10, o correspondente em y também será $10x0,25$. Assim, podemos afirmar que a constante de proporcionalidade k pode ser obtida pela razão $\frac{y}{x}$, quando $x \neq 0$ corresponde ao coeficiente a da função linear.

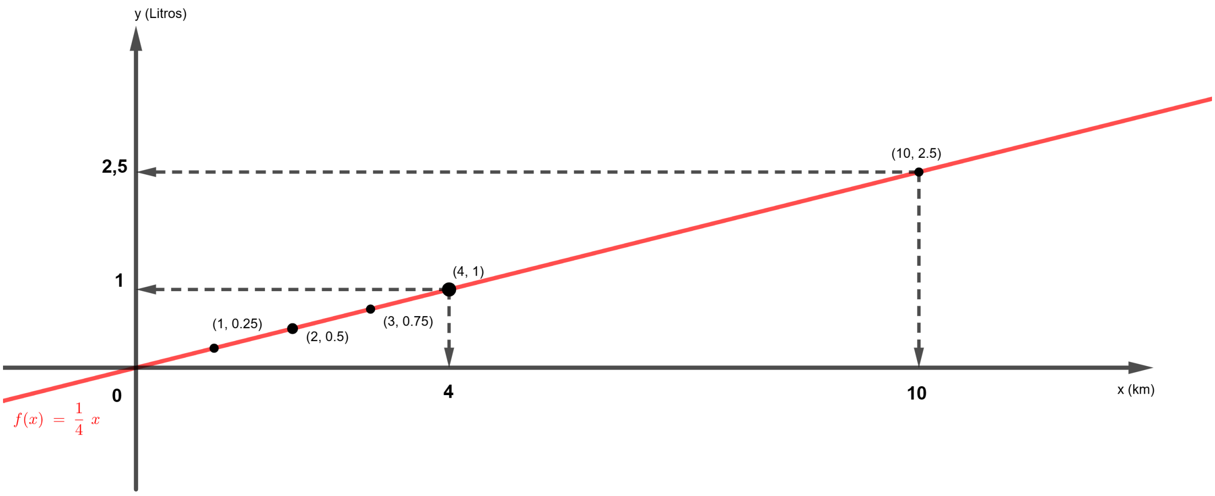
$$k = \frac{0,25}{1} = \frac{0,50}{2} = \frac{0,75}{3} = ... = \frac{2,50}{10} = 0,25$$

Tabela 3.2 – Função f(x) litros de combustível por quilomêtro x

x	**f(x) = 0,25x**	**y**
1	$f(1) = 0,25.1$	0,25
2	$f(2) = 0,25.2$	$0,50$
3	$f(3) = 0,25.3$	$0,75$
4	$f(4) = 0,25.4$	$1,00$
...	...	
10	$f(10) = 0,25.10$	$2,50$

Na representação geométrica, o gráfico de uma função f é o conjunto de todos os pontos (x, y) tais que $x \in D(f)$ e $y = f(x)$ no plano cartesiano da função $y = f(x)$, isto é, se considerarmos o domínio em $x \in \mathbb{R}$ e a imagem da função f, no eixo das ordenadas ($Im(f) \in \mathbb{R}$), ou seja, $y \in \mathbb{R}$. Assim, se x é a variável independente, y representa a variável dependente e descreve uma reta. Para o nosso exemplo $f(x) = 0,25x$, a Tabela 3.2 e o Gráfico 3.4 relacionam as duas grandezas, crescendo proporcionalmente.

Figura 3.4 – Consumo de combustível f(x)



Fonte: A autora.

Podemos redefinir k, o coeficiente de proporcionalidade da equação, como coeficiente angular a da função linear $f(x) = ax$, referindo-se a inclinação da reta $f(x)$:

$$a = \frac{y}{x} = \text{tg}\theta,$$

com θ indicando o ângulo formado pela reta descrita por $f(x)$ com relação ao eixo x em sentido anti-horário, nos permitindo também analisar a proporcionalidade da função do 1° grau com coeficiente linear $b \neq 0$.

3.1.3 FUNÇÃO AFIM E PROPORCIONALIDADE

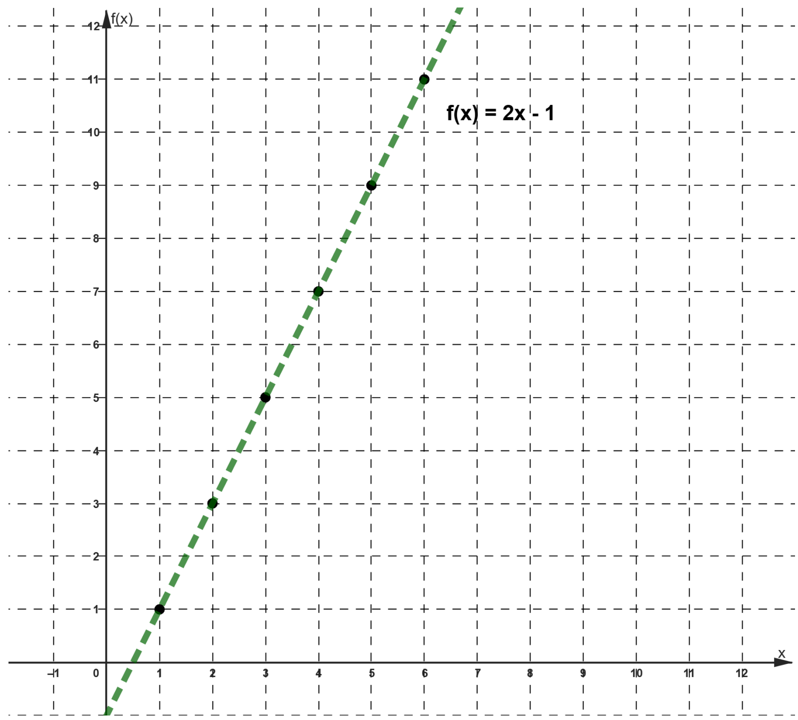
"Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax + b$, com a e b reais e $a \neq 0$, é chamada de **função polinomial do 1º grau** ou *função afim*."(BONJORNO; JUNIOR; SOUSA, 2020)

Numa PA, por exemplo, temos o primeiro termo a_1 e a razão r. Com esses dois valores, podemos descrever a lei de formação da sequência $a_n = a_1 + r(n-1)$ e associá-la a uma função Afim $f(n)$. Assim, a lei de formação associa cada $n \in D(f)$ a $f(n)$, com $f(n) = Cn + D$ e com C, D coeficientes. Consideremos $a_1 = 1$ e $r = 2$. Temos

$$a_n = 1 + 2(n-1) = 2n - 1$$

relacionando a sequência gerada com o plano cartesiano de coordenadas $(x, f(x))$. Podemos esboçar o gráfico de $f(x) = 2x - 1$, como mostra a Figura 3.5, com os valores de x representando n, a posição de cada termo na sequência. Os valores de x e $f(x)$ não são proporcionais, mas a variação em x é proporcional à variação em $f(x)$.

Figura 3.5 – Representação de uma PA como função do 1º grau



Fonte: A autora.

Neste caso, a função do 1° grau descrita não é linear, mas continua estabelecendo uma proporção direta entre as variáveis x e y. O que ocorre é apenas o deslocamento da reta $f(x)$ para baixo considerando o coeficiente linear $b = -1$ paralela a $f(x) = 2x$, mantendo o mesmo coeficiente angular a, como mostra a Figura. Esse coeficiente a é determinado pela razão entre a distância das coordenadas y de dois pontos pela distância das coordenadas em x desses mesmos pontos, ou seja, a variação de y dividida pela variação de x.

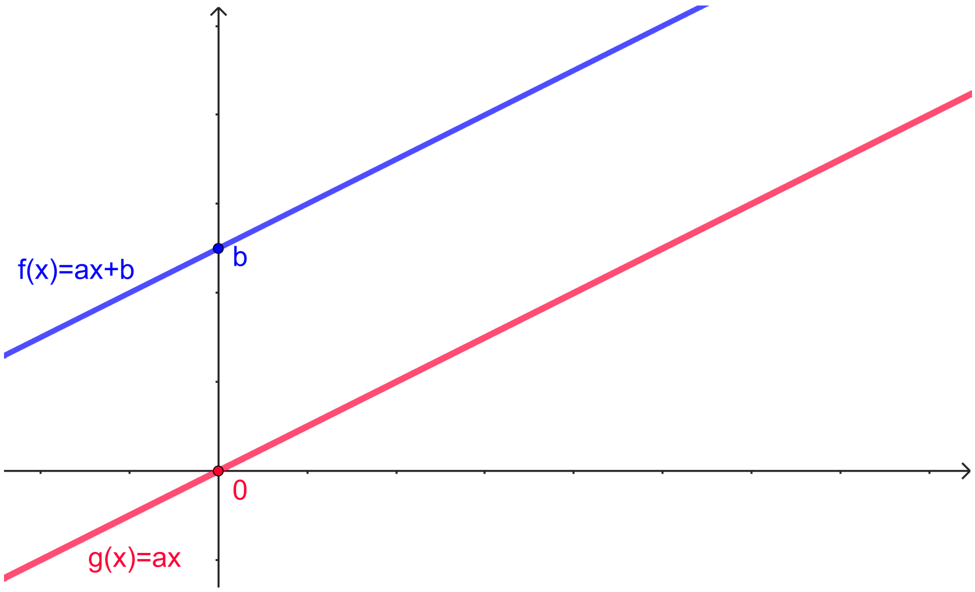
De modo análogo, essa interpretação pode ser estendida às funções financeiras, em especial à função que modela o juro simples. Nesse regime, o montante M pode ser expresso por uma função afim do tempo t, dada por

$$M(t) = C(1 + i \cdot t) = C + C \cdot i \cdot t,$$

em que C representa o capital inicial e i a taxa de juros. Observa-se que o acréscimo do montante ao longo do tempo é proporcional ao número de períodos, caracterizando uma variação linear, ainda que a função não seja proporcional no sentido estrito, pois não passa pela origem.

Comparando os gráficos das funções $g(x) = ax$ e $f(x) = ax + b$, nota-se que ambas apresentam crescimento linear, com inclinação determinada pelo coeficiente angular a, que expressa a razão entre a variação de y e a variação de x. No entanto, enquanto a função linear representa uma proporcionalidade direta, na qual as grandezas são diretamente proporcionais, a função afim preserva a regularidade da variação, mas incorpora um termo constante b, responsável pelo deslocamento vertical da reta, conforme mostra o gráfico da figura 3.6.

Figura 3.6 – Comparação da função linear g e função afim f



Fonte: A autora.

No contexto da Matemática Financeira, esse deslocamento corresponde ao capital inicial, enquanto o coeficiente angular está associado à taxa de variação do montante, evidenciando que a proporcionalidade se manifesta na variação das grandezas, e não necessariamente em seus valores absolutos. Dessa forma, a análise gráfica permite compreender que, embora nem toda função afim represente uma relação proporcional direta, ela mantém uma relação de proporcionalidade entre incrementos, aspecto fundamental para a interpretação de fenômenos financeiros e para a transição do pensamento aritmético para o algébrico.

3.2 PROPORÇÃO INVERSA E COMPARAÇÃO COM OUTRAS FUNÇÕES

Já a **proporção inversa** é aquela em que as grandezas analisadas também mudam juntas, porém, enquanto uma aumenta, a outra diminui. Podemos citar os clássicos problemas de livros didáticos sobre a relação entre a quantidade de pintores e o tempo necessário para concluir determinado trabalho.

Sabendo que cada pintor consegue pintar $10\ m^2$ de área por hora, pode-se determinar a quantidade de horas necessária para pintar uma parede de $160\ m^2$. Um pintor gastará 16 horas para concluir a área, mas se quisermos diminuir o tempo, será necessário aumentar o número de pintores. Isso é uma relação inversa entre as grandezas número de pintores e tempo para concluir o trabalho.

Tabela 3.3 – Correspondência entre o número de pintores e o tempo necessário para pintar uma parede inteira.

Número de pintores	Tempo para pintura
1	16 horas
2	8 horas
4	4 horas
8	2 horas

Nesse tipo de proporção, ocorre um aumento na primeira grandeza ao mesmo tempo que a segunda grandeza diminui. No caso, um dobra e outro é metade, dando um coeficiente de proporcionalidade de 16. Podemos organizar o cálculo da regra de três da seguinte forma:

Problema:
Um pintor conclui $160\ m^2$ em 16 horas, quantos pintores serão necessários para concluir a mesma área em 2 horas?

Passo 1: Organizar os dados:

$$\begin{array}{ccc} \text{Tempo (h)} & \rightarrow & \text{Pintores} \\ 16 & \rightarrow & 1 \\ 2 & \rightarrow & x \end{array}$$

Com o número de pintores aumentando reduzimos a área a ser pintada por cada um, assim o tempo de conclusão será menor, ou seja as grandezas "número de pintores" e "horas para concluir o trabalho" representam uma proporção inversa, na regra de três multiplicamos os valores na mesma linha.

Passo 2: Como é uma proporção inversa, multiplicamos os valores da mesma linha:

$$16 \cdot 1 = 2 \cdot x \quad \Rightarrow \quad 16 = 2x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{16}{2} \quad \Rightarrow \quad x = 8$$

Resposta: Concluímos que 8 pintores fariam o mesmo trabalho, de pintar $160zm^2$ em **2 horas**.

Por conta da natureza da proporcionalidade, pode-se acrescentar mais grandezas de tal modo que todas as medidas sejam proporcionais entre si:

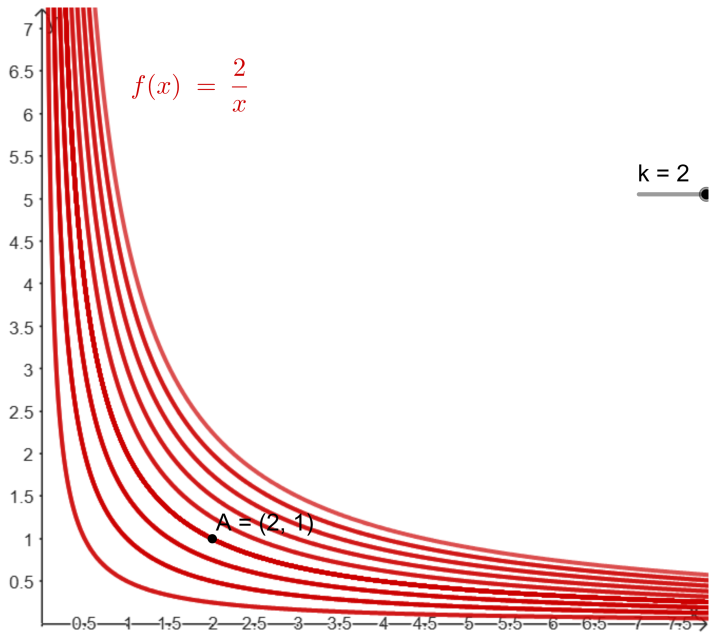
$$x \propto y,\ x \propto z \rightarrow x = k \cdot y \cdot z,$$

onde k é um coeficiente de proporcionalidade.

Esse tipo de composição de proporção permite o estudo de fenômenos e objetos matemáticos mais complexos. tais como são abordados na Educação Financeira, como veremos no capítulo 4.

Assim como para grandezas diretamente proporcionais, podemos associar grandezas inversamente proporcionais ao conceito de função. A função $f(x) = \frac{k}{x}$, com domínio $Df \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e imagem $Im \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, pois a divisão por zero não está definida.

Figura 3.7 – Função inversa



Fonte: A autora.

Outras funções não aplicam diretamente a proporcionalidade, mas o tema ainda pode ser abordado por exemplo, identificando que tais funções não são lineares ou afins ou comparando valores esperados com aqueles de funções afins. A função exponencial apresenta um crescimento ou decrescimento não linear, mas continua sendo uma função, ou seja, para cada valor de x existe um único valor correspondente de y. Seu domínio geralmente é $\mathbb{R}$ (ou restrito dependendo da base) e a imagem depende do coeficiente e da base da exponencial. Por exemplo, em $f(x) = a \cdot b^x$ com $a > 0, b > 1$ e a imagem é $y > 0$. A função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ também é não linear e tem como domínio $\mathbb{R}$.

Quando analisamos propriedades como tamanho da curva ou distância entre pontos, não há proporcionalidade linear direta, pois o crescimento não é constante. Entretanto, podemos estudar taxas de variação (crescimento e decrescimento), que se relacionam indiretamente com ideias de proporcionalidade e comparações entre grandezas. Como conexão com proporcionalidade da função exponencial temos a razão constante entre termos sucessivos, logo é proporcional em progressão geométrica. Exemplo: $f(x) = 2^x$ Aplicando alguns valores para x temos:

$$x = 1 \rightarrow f(x) = 2; x = 2 \rightarrow f(x) = 4; x = 3 \rightarrow f(x) = 8$$

A variação entre dois termos é uma progressão geométrica

$$\frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{4 - 2}{2 - 1} = \frac{2}{1} = 2,$$

$$\frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = \frac{8 - 4}{3 - 2} = \frac{4}{1} = 4$$

Aqui também não temos proporcionalidade linear, mas existe uma razão constante entre os valores de y, ou seja

$$\frac{f(2)}{f(1)} = \frac{4}{2} = \frac{f(3)}{f(2)} = \frac{8}{4} = 2$$

É uma proporcionalidade geométrica (multiplicativa), típica das funções exponenciais.

Já na função quadrática a proporcionalidade pode ser encontrada na relação dos coeficientes da função e suas raíxes (zeros da função). A saber: A função quadrática é dada por:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

As raízes x_1 e x_2 são calculadas por:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad \text{onde } \Delta = b^2 - 4ac$$

Podemos elencar as principais relações de proporcionalidade entre as raízes e os coeficientes de $f(x)$:

- **Soma das raízes:** $x_1 + x_2 \propto -\frac{b}{a}$
- **Produto das raízes:** $x_1 \cdot x_2 \propto \frac{c}{a}$
- **Coordenada do vértice:** $x_v \propto -\frac{b}{2a}$

Resumindo temos uma tabela de Proporcionalidades na função quadrática:

Relação	**Proporcionalidade**	**Observação**
Soma das raízes	$-\frac{b}{a}$	Inversa em relação a a, direta em b
Produto das raízes	$\frac{c}{a}$	Direta em c, inversa em a
Vértice (x_v)	$-\frac{b}{2a}$	Inversa em a, direta em b

Exemplo Numérico

Consideremos $f(x) = x^2 - 4x + 3$, isto é, $a = 1, b = -4, c = 3$:

$$x_1 + x_2 = -\frac{-4}{1} = 4, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{3}{1} = 3$$

Se dobrarmos a para $a = 2$ (mantendo b, c fixos), isto é, $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$:

$$x_1 + x_2 = -\frac{-4}{2} = 2, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{3}{2} \quad \text{(diminuiu à metade)}$$

Enquanto a função quadrática apresenta proporcionalidade nas raízes em relação aos coeficientes, a função exponencial $f(x) = k \cdot a^x$ apresenta crescimento multiplicativo, não proporcionalmente linear.

3.3 PROPORCIONALIDADE E FUNÇÃO AFIM NA PROVA SAEB

A relevância da proporcionalidade articulada ao estudo de funções, em especial da função afim, torna-se evidente ao analisarmos os dados e descritores das provas do Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB, 2018). O SAEB tem como objetivo avaliar a qualidade do ensino oferecido pela Educação Básica brasileira por meio de testes padronizados e questionários socioeconômicos aplicados, a cada dois anos, ao final de cada etapa escolar, contemplando turmas do 2º, 5º e 9º anos do Ensino Fundamental e da 3ª série do Ensino Médio. A avaliação é estruturada a partir de descritores alinhados ao Plano de Desenvolvimento da Educação (PDE) e à Base Nacional Comum Curricular (BNCC, 2018).

No Ensino Médio, o descritor D15 — "resolver problemas que envolvam variação proporcional, direta ou inversa, entre grandezas" — avalia a capacidade dos estudantes de reconhecer e resolver situações que envolvem relações proporcionais, constituindo um eixo central para a compreensão de fenômenos lineares. Esse descritor está inserido no **Tema III: Números e Operações / Álgebra e Funções**, da matriz de referência do SAEB para a 3ª série do Ensino Médio.

Além do D15, outros descritores da matriz de referência abordam, de forma direta ou indireta, a relação entre proporcionalidade e funções afins, especialmente no que se refere à representação algébrica, gráfica e tabular de situações lineares. Destacam-se, nesse contexto, os descritores:

- D18 — Reconhecer a expressão algébrica que representa uma função a partir de uma tabela;
- D19 — Resolver problema envolvendo uma função do 1º grau;
- D22 — Resolver problema envolvendo progressão aritmética ou geométrica, dada a fórmula do termo geral;
- D23 — Reconhecer o gráfico de uma função polinomial do 1º grau por meio de segmentos;
- D24 — Reconhecer a representação algébrica de uma função do 1º grau a partir de seu gráfico.

Observa-se que os descritores D19 e D24 tratam diretamente da aplicação e do reconhecimento da função do 1º grau, conceito intrinsecamente relacionado à função afim e à modelagem de situações de variação linear. Tais habilidades exigem do estudante a compreensão das relações de proporcionalidade, bem como a interpretação de diferentes registros de representação, como gráficos, tabelas e expressões algébricas.

A BNCC (2018) reforça a centralidade desse tema ao definir, no Ensino Fundamental, habilidades específicas relacionadas à proporcionalidade, como EF07MA17 e EF09MA08, e, no Ensino Médio, competências associadas ao estudo da função afim e de equações, como EM13MAT301, EM13MAT401, EM13MAT501 e EM13MAT507. Essas habilidades e competências dialogam diretamente com os descritores avaliados pelo SAEB, especialmente D15, D19 e D24, evidenciando a coerência entre o currículo prescrito e os instrumentos de avaliação externa.

Destaca-se ainda que a BNCC enfatiza o uso de tecnologias digitais no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, conforme a Competência Específica 4, aspecto que também se articula às demandas do SAEB, sobretudo no que diz respeito à análise de gráficos, construção de modelos e interpretação de representações funcionais.

Nesse sentido, habilidades como a EM13MAT302, que propõe a construção de modelos por meio de funções polinomiais do primeiro ou segundo grau para a resolução de problemas em diferentes contextos, e a EM13MAT401, que envolve a conversão entre representações algébricas e geométricas de funções do 1º grau, reforçam a importância do estudo da proporcionalidade como fundamento para a compreensão da função afim e de seus usos em situações reais.

Para concluir esta seção, apresenta-se um exemplo de atividade que pode ser desenvolvida em sala de aula, articulando o conceito de proporcionalidade com a interpretação de gráficos e funções. A atividade proposta explora a relação entre grandezas inversamente proporcionais a partir de uma situação contextualizada.

Considere a seguinte situação: o professor, em conjunto com seus alunos, constrói um robô e analisa a relação entre a velocidade média do robô e o tempo necessário para percorrer um determinado trajeto. Mantida a distância fixa, observa-se que, à medida que a velocidade aumenta, o tempo gasto para completar o percurso diminui, caracterizando uma relação de proporcionalidade inversa entre as grandezas envolvidas.

Essa relação pode ser representada matematicamente pela função

$$t = \frac{k}{v}$$

onde **t** é o tempo, **v** é a velocidade e **k** é uma constante de proporcionalidade associada à distância percorrida. Assim, quanto maior for a velocidade, menor será o tempo necessário para o deslocamento, evidenciando o comportamento inversamente proporcional das variáveis.

Em contraste, a função polinomial do primeiro grau, ou função afim, é definida por

$$f(x) = ax + b,$$

cujo gráfico é uma reta oblíqua em relação aos eixos coordenados. Nessa função, o coeficiente angular a indica a inclinação da reta e representa a taxa de variação de y em relação a x, enquanto o coeficiente linear b corresponde ao ponto em que a reta intercepta o eixo y, isto é, $f0) = b$.A inclinação da reta pode ser determinada pela razão entre a variação da ordenada e a variação da abscissa entre dois pontos do gráfico, dada por

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Dessa forma, o coeficiente a pode ser interpretado como um coeficiente de proporcionalidade, pois expressa como a variável dependente y cresce ou decresce em função da variável independente x.

Essa abordagem contribui para o desenvolvimento de habilidades relacionadas à interpretação de gráficos e à análise de funções, estando diretamente associada ao Descritor D23 do SAEB (2018), que avalia a capacidade do estudante de reconhecer o gráfico de uma função polinomial do primeiro grau.

4 PROPORCIONALIDADE NA EDUCAÇÃO FINANCEIRA

A Educação Financeira, nas últimas décadas, tem sido destaque no âmbito educacional em função das transformações econômicas e sociais que impactam diretamente a vida cotidiana. No contexto brasileiro, a crescente complexidade das relações de consumo, aliada ao acesso facilitado ao crédito, evidencia a necessidade de formar cidadãos capazes de compreender, analisar e tomar decisões conscientes sobre o uso de recursos financeiros, envolvendo aspectos como planejamento, consumo, endividamento e qualidade de vida. Nessa perspectiva, a Educação Financeira configura-se como um elemento essencial para a formação cidadã e para a participação crítica na sociedade contemporânea.

Quando inserida no contexto escolar, a Educação Financeira ultrapassa uma abordagem meramente instrumental do dinheiro, assumindo um caráter formativo voltado ao desenvolvimento da autonomia, do pensamento crítico e da responsabilidade social. Conforme destacam autores da área da Educação Matemática, a discussão de situações financeiras reais possibilita ao estudante atribuir significado aos conceitos matemáticos, favorecendo a construção do conhecimento a partir de problemas contextualizados e socialmente relevantes (D'Ambrosio, 2001; Kistemann Jr., 2011).

Reconhecendo essa relevância, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) incorpora a Educação Financeira como um tema transversal, a ser desenvolvido de forma integrada às diferentes áreas do conhecimento, especialmente à Matemática. De acordo com a BNCC (Brasil, 2018), o trabalho com situações que envolvem dinheiro, consumo e planejamento contribui para o desenvolvimento de competências relacionadas à resolução de problemas, ao raciocínio lógico, à análise crítica de situações do cotidiano e à tomada de decisões fundamentadas, reforçando o papel da escola na formação integral dos estudantes.

A articulação entre Educação Financeira, Matemática Financeira e relações de proporcionalidade contribui, assim, para o desenvolvimento da cidadania e para a leitura crítica do mundo econômico. Ao incorporar ideias como a lógica multiplicativa, presente na razão áurea e nos juros compostos, evidencia-se que princípios matemáticos fundamentais permeiam tanto o comportamento de investimentos quanto fenômenos naturais e culturais. Assim, a integração desses conhecimentos no espaço escolar fortalece o letramento matemático e desenvolve autonomia nos estudantes, possibilitando a elaboração consciente de orçamentos pessoais, o planejamento de gastos e a tomada de decisões financeiras mais responsáveis e sustentáveis ao longo da vida.

No ensino de Matemática, a Educação Financeira configura-se como um contexto privilegiado para a abordagem de conceitos como porcentagem, proporcionalidade e juros, possibilitando uma aprendizagem significativa e contextualizada. Neste capítulo, esses conteúdos serão primeiramente discorridos teoricamente e relacionadas com a educação financeira, e então organizadas atividades à luz da Taxonomia de Bloom, orientando uma progressão cognitiva desde a compreensão até a análise e avaliação de situações financeiras, com apoio de recursos tecnológicos, Jupyter e a calculadora Desmos, foram exploradas relações proporcionais presentes em situações do cotidiano — tais como Regra de Três, juros simples, descontos, orçamento e análise de rendimentos — favorecendo o desenvolvimento do raciocínio lógico, da autonomia e da tomada de decisões conscientes em contextos de gestão financeira pessoal.

4.1 MATEMÁTICA FINANCEIRA

A matemática financeira é essencial para a tomada de decisões em diversos contextos econômicos, como quando calcular a viabilidade de investimentos, analisar a rentabilidade de uma aplicação financeira ou planejar o pagamento de dívidas.

Na Educação Básica, a Matemática Financeira pode ser compreendida como um campo de conhecimentos no sentido teórico, voltado à interpretação e à análise de situações financeiras do cotidiano, articulando-se, na BNCC (2018), à área de conhecimento da Matemática, sob as Unidades Temáticas **Números** e **Álgebra**, conectados ao cotidiano como descontos e planejamento financeiro. Essa área da Matemática contribui para o desenvolvimento do raciocínio lógico, envolve a mobilização de conceitos fundamentais razão, proporção, porcentagem, Regra de Três, juros simples e juros compostos, bem como das noções de capital, taxa, tempo e montante. permitindo ao estudadnte compreender relações entre grandezas financeiras e analisar variações de valores ao longo do tempo, princípios matemáticos essenciais, como a lógica multiplicativa e as comparações proporcionais, que sustentam a interpretação de situações financeiras recorrentes, como compras a prazo, rendimentos e descontos, importantes para a tomada de decisões e leitura crítica de informações de natureza econômica, articulando-se diretamente à Educação Financeira e à formação cidadã.

As habilidades relacionadas a matemática financeira na BNCC (Brasil. 2018) propõem resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, juros, e comparação de valores monetários. Para o Ensino Fundamental são:

- EF03MA24 Resolver e elaborar problemas que envolvam a comparação e equivalência de valores monetários do sistema brasileiro
- EF06MA13 Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com base na ideia de proporcionalidade
- EF09MA05 Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com a ideia de aplicação de percentuais sucessivos: juros simples e compostos com e sem uso da tecnologia

Dentro dessas habilidades habilidades previstas na BNCC, é possível abordar conceitos fundamentais da Matemática Financeira, como a regra de três aplicada à porcentagem, aos aumentos e descontos, os juros simples e as taxas equivalentes, bem como a lógica multiplicativa, incluindo relações como a razão áurea associada aos juros compostos. Nesse contexto, a relação entre Matemática Financeira e proporcionalidade assume um papel estruturante no processo de ensino e aprendizagem, uma vez que muitos desses conceitos podem ser compreendidos a partir de relações proporcionais, como ocorre no cálculo de porcentagens, acréscimos, descontos e juros simples, caracterizados por crescimento linear.

No dicionário Michaelis (2015) **porcentagem** é definida como a "relação entre uma quantidade e outra tomada como cem; taxa ou proporção calculada sobre o valor de 100; modo de expressar uma razão com denominador cem, indicada pelo símbolo $\%$". **Juro** é a "quantia cobrada ou paga pelo uso de um capital durante determinado período de tempo; remuneração do dinheiro emprestado ou aplicado, calculada em função de uma taxa previamente estabelecida", podendo ser simples ou composto. A **taxa de juros** corresponde à porcentagem aplicada sobre o valor inicial, chamado de capital. Já o **desconto** refere-se à "diminuição ou abatimento feito sobre um valor ou preço; quantia subtraída do montante original, geralmente expressa em valor absoluto ou percentual, em razão de pagamento antecipado, promoção ou condição especial"(MICHAELIS, 2015).

Essas definições fundamentam a abordagem dos conceitos da Matemática Financeira na Educação Básica, permitindo a articulação entre linguagem matemática formal e situações financeiras do cotidiano.

4.1.1 REGRA DE TRÊS E PORCENTAGEM

Entre os conceitos fundamentais da Matemática Financeira destaca-se a regra de três, que se apoia em relações de proporcionalidade entre grandezas e serve de base para a resolução de problemas envolvendo comparação de valores, consumo e rendimento. A partir dessa noção, desenvolve-se o estudo da porcentagem, compreendida como uma razão com denominador 100, amplamente utilizada em contextos de aumento e desconto, como promoções, reajustes de preços e variações salariais.

A **Regra de Três** como apresentada no capitulo sobre Proporções (ver seção 3.1) é usada para calcular valores proporcionais, quando três valores são conhecidos. No contexto financeiro é aplicada no cálculo de descontos, taxas de juros e variações percentuais. Vejamos um exemplo de aplicação relacionado a desconto.

Problema:
Um produto que custa $R\$ \ 250,00$ está em promoção com 20% de desconto a vista. Qual será o valor final a ser pago pelo consumidor após a aplicação do desconto?

Passo 1: Organizar os dados:

$$\begin{array}{ccc} \text{Valor (R\$)} & \rightarrow & \text{Porcentagem } (\%) \\ x & \rightarrow & 20 \\ 250 & \rightarrow & 100 \end{array}$$

Passo 2: Proporção direta, multiplicamos os valores cruzados da fração

$$\frac{x}{250} = \frac{20}{100} \quad \Rightarrow \quad 100x = 250 \cdot 20 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{5000}{100} \quad \Rightarrow \quad x = 50$$

Resposta: Concluímos que o desconto do produto será de $R\$\ 50,00$, logo o preço final a ser pago é de $250 - 50$, ou seja $R\$\ 200,00$.

Outro modo de resolução mais simples, para calcular o valor do desconto, é reescrever a $\%$ como definido: "proporção calculada sobre o valor de 100", assim temos

$$250 \cdot 20\% = 250 \cdot \frac{20}{100} = 50.$$

Porém, considerando que o problema quer saber o valor final do produto com desconto, é possível considerar a $\%$ que será paga diretamente, ou seja, o total é 100%, o desconto é 20%, subtraundo $100 - 20 = 80$, obtemos que o valor final a ser pago equivale a 80%, portanto

$$250 \cdot 80\% = 250 \cdot \frac{80}{100} = 200.$$

Independentemente do método utilizado, a resolução do problema fundamenta-se na compreensão da proporcionalidade inerente à porcentagem, evidenciando que o desconto representa uma parte do valor inicial. Desse modo, o raciocínio proporcional mostra-se essencial para a interpretação de situações financeiras do cotidiano.

4.1.2 JUROS SIMPLES E PROPORÇÃO

Os juros simples constituem um regime de capitalização em que os juros são calculados sempre sobre o valor inicial, denominado capital, permanecendo constantes a cada período. Nesse modelo, o crescimento do capital ocorre de forma linear, uma vez que o valor dos juros é proporcional ao capital aplicado, à taxa de juros e ao tempo de aplicação. Essa característica permite compreender esse regime a partir do conceito de proporcionalidade, favorecendo a interpretação de situações financeiras do cotidiano, especialmente no contexto da Educação Básica, em que a Matemática Financeira é introduzida de forma gradual e significativa (KISTEMANN JR., 2011).

Para o cálculo dos juros simples, considera-se as fórmulas:

$$J = C \cdot i \cdot t \quad \text{e} \quad M = C + J$$

ou de forma compacta, o montante é dado pela equação:

$$M = C + C \cdot i \cdot t, \tag{4.1}$$

onde J representa o valor dos juros, C o capital inicial, i indica a taxa percentual ($\%$) de juros, t é o tempo ou período e M o montante, valor final.

A compreensão dos juros simples também mobiliza a lógica multiplicativa, uma vez que o cálculo dos juros decorre da relação proporcional entre capital, taxa e tempo. Ainda que o crescimento do montante ao longo do tempo seja linear, o valor do juro em cada período resulta da aplicação de uma taxa percentual sobre o capital, exigindo do estudante a interpretação de relações multiplicativas entre as grandezas envolvidas. Nesse regime, a taxa de juros é aplicada periodicamente sobre o valor do Capital. Assim, tanto os juros quanto o montante apresentam crescimento linear, aumentando sempre o mesmo valor a cada período. Dessa forma, é possível estabelecer uma função afim que relaciona o tempo ao montante:

$$f(x) = C + C \cdot i \cdot x,$$

onde x representa o tempo de aplicação financeira. Consideremos a seguinte exemplo:

Situação Problema

A agiotagem é uma prática de empréstimo de dinheiro realizada por pessoas físicas com cobrança de juros abusivos, sem autorização no Brasil. No entanto, o empréstimo entre pessoas físicas não é proibido, desde que não se configure como atividade financeira habitual nem envolva lucro excessivo. De acordo com a Lei nº 7.492/1986 (Brasil, 1986), que trata dos crimes contra o Sistema Financeiro Nacional, apenas instituições autorizadas podem atuar de forma regular na concessão de crédito. Assim, é permitida a cobrança de juros moderados, como aqueles destinados apenas à reposição da perda do poder de compra causada pela inflação, sem finalidade de lucro.

Suponha que uma pessoa, em dificuldades financeiras, recorra a um amigo em melhores condições, que lhe empreste o valor de $R\$\ 8.000,00$, estabelecendo que esse valor será devolvido no prazo máximo de um ano, sob o regime de juros simples, à taxa de $0,5\%$ ao mês, aproximada da inflação mensal do período.

Qual o montante a ser pago dentro do período de um ano?

Interpretação

Sabemos que no regime de juros simples calcula-se os juros com a fórmula $J = C \cdot i \cdot t$ e o montante é a soma do capital aos juros, $M = C + J$. Utilizando os dados do problema: $C = 8000$ e $i = 0,5\% = \frac{0,5}{100} = 0,005$, então

$$J = 8000 \cdot 0,005 \cdot t = 40t.$$

Logo $M = 8000 + 40t$. Considerando que o tempo é variável, tomaremos $t = x$, em meses. Assim, o montante passa a ser uma função em relação ao tempo x, isto é, $M = f(x)$. Portanto

$$f(x) = 8000 + 40x$$

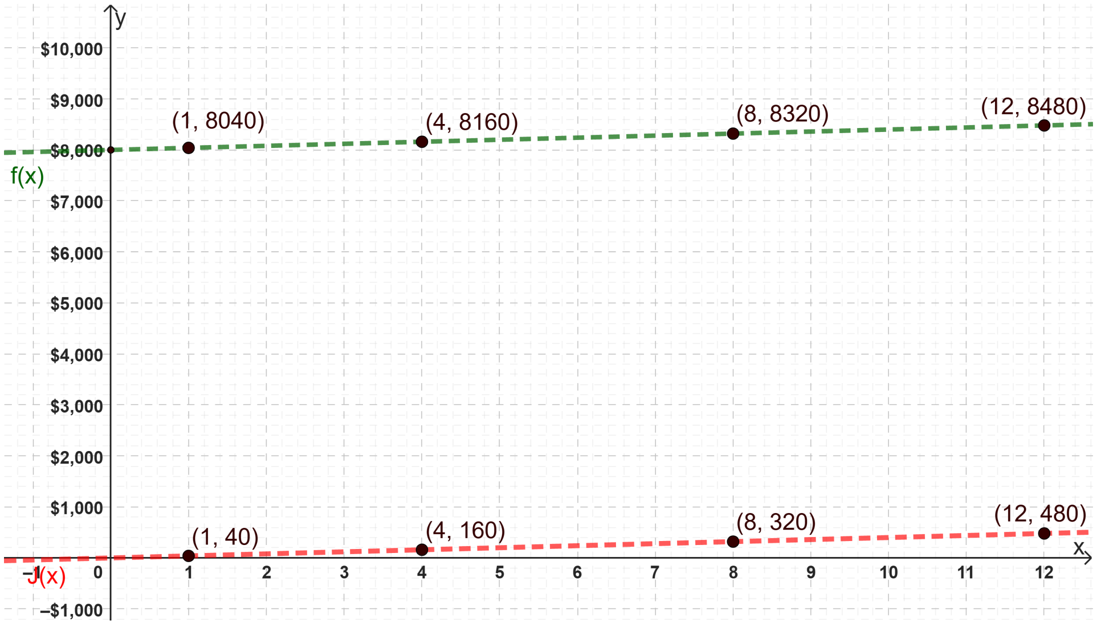
Como já analisado na seção 3.1.3 uma função Afim, $y = ax + b$, tem seu coeficiente angular a indicando a proporcionalidade da função, equivalente ao crescimento linear das variáveis. O coeficiente angular da função $f(x)$ no exemplo, mostra que o montante é proporcional ao tempo emprestado em 40 reais, pois o coeficiente $a = 40$ e a sequência de montante gerada equipara-se a uma PA de razão $r = 40$, conforme podemos analisar na tabela 4.1. Essa representação funcional permite ao aluno visualizar que, no regime de juros simples, o acréscimo mensal é constante, característica fundamental da proporcionalidade direta entre tempo e montante.

Tabela 4.1 – Função f(x) do Montante com relação ao tempo x

x	**f(x) = 8000+40x**	**y**
1	$f(1) = 8000 + 40 \cdot 1$	8040
2	$f(2) = 8000 + 40 \cdot 2$	8080
3	$f(3) = 8000 + 40 \cdot 3$	8120
4	$f(4) = 8000 + 40 \cdot 4$	8160
5	$f(5) = 8000 + 40 \cdot 5$	8200
6	$f(6) = 8000 + 40 \cdot 6$	8240
7	$f(7) = 8000 + 40 \cdot 7$	8280
...	...	
12	$f(12) = 8000 + 40 \cdot 12$	8480

O Figura 4.1 representa o gráfico da função afim $f(x) = 8000 + 40x$, relacionada ao crescimento do montante da divida ao longo do tempo x, bem como da função linear $J(x) = 40x$, paralela a $f(x)$, que representa o crescimento do juros ao longo do tempo. A proporcionalidade de ambas é equivalente, dado que o tempo x altera proporcionalmente o valor do juros a ser adicionado ao capital inicial, alterando assim, igualmente, o resultado do montante $f(x)$.

Figura 4.1 – Comparação das funções *J* do juros simples e *M* do montante



Fonte: A autora.

O regime de juros simples permite uma compreensão direta da relação entre capital, taxa e tempo, uma vez que o acréscimo financeiro ocorre de forma constante ao longo dos períodos. Essa característica evidencia a proporcionalidade direta entre o tempo de aplicação e o montante obtido, possibilitando sua representação por meio de funções afins e progressões aritméticas. Porém algumas alterações podem ser feitas, mantendo-se o conceito de proporcionalidade, caso a variação ocorra na taxa de juros, mantendo o mesmo capital e tempo de aplicação. Vejamos o exemplo anterior, com tempo de empréstimo fixado em 6 meses e a taxa de juros indeterminada, a função juros passa a ser

$$J(x) = 8000 \cdot x \cdot 6 = 48000x,$$

onde x representa a taxa de juros. Assim, a função montante permanece paralela a $J(x)$, com mesmo fator de crescimento,

$$f(x) = 8000 + 48000x.$$

Observa-se que o montante é proporcional à taxa de juros aplicada, mantendo-se a linearidade característica do regime de juros simples.

Por outro lado, se fixarmos a taxa de juros em $0,5\%$ e o tempo em 6 meses, e analisarmos diferentes valores a serem emprestados, o capital se torna a variável x do problema. Nesse caso, a função dos juros é dada por

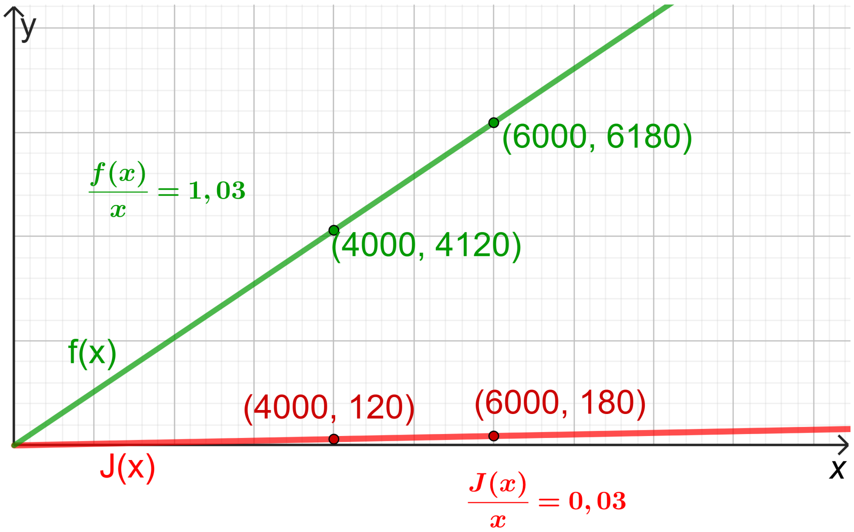
$$J(x) = x \cdot 0,005 \cdot 6 = 0,03x$$

e o montante correspondente por

$$f(x) = x + 0,03x = 1,03x.$$

Observa-se que ambas as funções são lineares, portanto proporcionais, pois o juro e o montante variam linearmente com a variação do capital inicial. Contudo, elas não são equivalentes, uma vez que apresentam coeficientes de proporcionalidade distintos, conforme ilustra o gráfico da Figura 4.2.

Figura 4.2 – Funções montante e juros com relação ao capital x



Fonte: A autora.

Assim, embora as grandezas envolvidas sejam proporcionais entre si, os coeficientes de proporcionalidade dependem da variável considerada, evidenciando a natureza linear desse regime. No entanto, nem todas as situações financeiras apresentam esse comportamento linear. Em muitos contextos reais, especialmente em aplicações e financiamentos, os juros incidem também sobre os juros acumulados, produzindo um crescimento não proporcional. Esse tipo de comportamento será estudado na próxima seção, dedicada ao regime de juros compostos, no qual o crescimento do montante ocorre de forma exponencial.

4.1.3 JUROS COMPOSTOS

Diferentemente do regime de juros simples, em que o crescimento do montante ocorre de forma linear e proporcional ao tempo, o regime de juros compostos caracteriza-se pela aplicação recorrente da taxa de juros, que passa a incidir não apenas sobre o capital inicial, mas também sobre os juros acumulados em períodos anteriores. Esse processo produz um crescimento exponencial do montante, rompendo com a proporcionalidade direta observada nos juros simples. Ainda assim, a análise desse regime permite comparações entre rendimentos em diferentes períodos, contribuindo para a compreensão de situações financeiras mais complexas.

Antes de apresentarmos diretamente a fórmula dos juros compostos, é importante compreender sua origem a partir do processo de capitalização recorrente. Diferentemente dos juros simples, nesse regime os juros de cada período são incorporados ao capital, passando a produzir novos juros nos períodos seguintes.

Seja C o capital inicial e i a taxa percentual de juros por período. Ao final do primeiro período, o montante M será dado por

$M_1 = C + C \cdot i$

$M_! = C \cdot (1 + i)$.

No segundo período, temos que o capital C a ser considerado é M_1, o montante do mês anterior.

$M_2 = M_1 + M_1 \cdot i$

$M_2 = C \cdot (1 + i) + C \cdot (1 + i) \cdot i$

$M_2 = C \cdot (1 + 1) \cdot (1 + i)$

$M_2 = C \cdot (1 + i)^2$.

Para o terceiro período, o capital $C = M_2$, portanto,

$M_3 = M_2 + M_2 \cdot i$

$M_3 = C \cdot (1 + i)^2 + C \cdot (1 + i)^2 \cdot i$

$M_3 = C \cdot (1 + 1)^2 \cdot (1 + i)$

$M_3 = C \cdot (1 + i)^3$.

Observando o padrão, que a cada novo período, o montante é obtido multiplicando-se o valor do período anterior pelo fator $(1 + i)$. Concluímos que no regime de juros compostos, o montante final de determinado período t é obtido por meio da expressão

$$M = C \cdot (1 + i)^t \tag{4.2}$$

em que C representa o capital inicial, i a taxa percentual de juros por período e t o tempo de aplicação. Nessa relação, observa-se que o tempo atua como expoente, o que explica o crescimento exponencial do montante e diferencia esse regime do modelo linear dos juros simples. Um exemplo comum da cobrança de de juros composto é o uso do cartão de crédito quando a fatura não é paga integralmente.

Situação problema:

Considere um consumidor que realiza uma compra no valor de $R\$ \ 1.000,00$ no cartão de crédito e, ao final do mês, paga apenas $R\$ \ 200,00$, valor mínimo da fatura. O saldo restante, de $R\$ \ 800,00$, entra no crédito rotativo, sujeito a uma taxa de juros de 10% ao mês. Quanto será sua dívida após 10 meses.

No primeiro mês, os juros cobrados sobre o saldo devedor são de

$$J_1 = 800 \cdot 0,10 = 80$$

totalizando um montante $R\$ \ 880,00$. No segundo mês, o juros serão

$$J_2 = 880 \cdot 0,10 = 88$$

e a dívida passará a ser de $R\$\ 968,00$.

Para o décimo mês, usando a equação 4.2, o montante será de

$$M = 800 \cdot (1 + 0,10)^{10} = 800 \cdot 1,1^{10} \approx 800 \cdot 2,59 = 2074,99.$$

Assim, ao final de 10 meses, a dívida inicial de $R\$\ 800,00$ transforma-se em aproximadamente $R\$\ 2.075,00$, causnado maior endividamento do consumidor.

Esse processo no qual os juros são incorporados ao capital a cada período e passam a servir de base para novos cálculos é o fenômeno conhecido como **juro sobre juros**, caracterizando um crescimento exponencial e explicando o rápido aumento das dívidas no crédito rotativo, fator importante que torna o regime dos juros compostos especialmente relevantes na análise de investimentos e financiamentos de médio e longo prazo, além de exigir do estudante a compreensão de relações não proporcionais entre as grandezas envolvidas.

4.1.4 TAXAS PROPORCIONAIS E TAXAS EQUIVALENTES

Após o estudo dos regimes de juros simples e juros compostos, faz-se necessário aprofundar a análise das taxas de juros envolvidas nas operações financeiras. Nos exemplos anteriores, as taxas foram consideradas associadas a um único período de capitalização (mensal); contudo, na prática, é comum que sejam expressas em diferentes unidades de tempo. Nesse sentido, a distinção entre **taxas proporcionais** e **taxas equivalentes** possibilita compreender como a mesma taxa pode assumir representações distintas, conforme o regime de capitalização adotado, evidenciando relações proporcionais nos juros simples e relações não proporcionais nos juros compostos.

Para o cálculo de juros a taxa percentual i considera um período de aplicação t, na mesma unidade de medida, ou seja, se a taxa é mensal, o tempo deverá ser considerado em meses, isso é chamado de Taxa Efetiva. (BORNATTO, 2024)

Exemplos da aplicação de taxas efetivas são:

taxa i(%)	tempo em
a.m.	meses
a. t.	trimestres
a. a.	anos

As **Taxas de juros proporcionais** são aquelas em que a relação entre os valores das taxas e os períodos de tempo a que se referem segue uma proporção constante, ou seja, quando uma taxa de juros efetiva é aplicada a um determinado período e outra taxa efetiva corresponde a um período distinto, diz-se que essas taxas são proporcionais quando a razão entre os valores das taxas é igual à razão entre os períodos de tempo aos quais se referem. Em termos práticos, taxas proporcionais mantêm a mesma relação entre seus percentuais e os respectivos períodos de aplicação, característica típica do regime de juros simples.

Exemplo 1: 20% a.a. (ao ano) e 5% a.t. (ao trimestre) são taxas proporcionais, pois

$$\frac{20}{5} = \frac{12 \text{ meses}}{3 \text{ meses}} = 4$$

Exemplo 2: 6% a.m. (ao mês) e 18% a.t. (ao trimestre) são taxas proporcionais, pois

$$\frac{18}{6} = \frac{3 \text{ meses}}{1 \text{ meses}} = 3$$

Problema:

Suponha que temos uma taxa de juros simples anual de 12% ao ano. Qual seria a taxa proporcional mensal?

Interpretação:

Taxa anual é de 12% a.a. e o tempo de 1 ano = 12 meses.

Como é juros simples, basta dividir e encontrar a Taxa mensal $= \dfrac{12\%}{12} = 1\%$ a.m.

Conclusão:

As taxas 12% a.a. e 1% a.m., no regime de juros simples, são proporcionais, pois $12\% = 1\% \times 12$

No regime de juros simples, as taxas podem ser consideradas proporcionais, uma vez que é possível obtê-las por meio da multiplicação ou divisão pela quantidade de períodos correspondentes, conforme ilustrado nos exemplos anteriores. Em contrapartida, no regime de juros compostos, as taxas não mantêm uma relação de proporcionalidade direta, pois a capitalização ocorre de forma exponencial, sendo necessária a utilização da fórmula de equivalência de taxas para estabelecer comparações corretas entre diferentes períodos.

Taxas de juros equivalentes são aquelas que, embora possam ter valores diferentes e serem aplicadas a períodos de tempo distintos, geram o mesmo montante de juros ou valor futuro ao final de um período comparável, ou seja, duas taxas de juros são equivalentes quando, aplicadas ao mesmo capital inicial, resultam no mesmo valor acumulado, independentemente de os períodos de capitalização ou os próprios valores das taxas serem diferentes. Para que isso aconteça, é necessário que as taxas sejam ajustadas de acordo com os períodos de tempo em que são aplicadas, de forma que o efeito final sobre o valor investido seja o mesmo.

Em outras palavras, as taxas são equivalentes quando produzem o mesmo efeito financeiro no mesmo período de tempo, levando em conta a frequência de capitalização.

Problema:

Suponha que temos uma taxa de 12% a.a, e queremos encontrar a taxa mensal equivalente no regime de juros compostos.

Passo 1: Comparar os montantes com a taxa mensal e anual:

$$M_a = M_m$$

onde M_a é o montante no período anual e M_m é o montante num período mensal, ambos com mesmo capital aplicado. Assim,

$$C \cdot (1 + i_a)^1 = C \cdot (1 + i_m)^{12},$$

isto é,

$$(1 + i_a) = (1 + i_m)^{12}$$

Onde: i_a = taxa anual (em decimal)
i_m = taxa mensal (em decimal)
12 = número de períodos (meses no ano)

Passo 2: Usar a fórmula de equivalência para o período de um ano:

Substituindo a taxa de 12% a.a obtemos:

$$1 + 0{,}12 = (1 + i_m)^{12}$$

$$1{,}12 = (1 + i_m)^{12}$$

Agora tiramos a raiz 12^a dos dois lados:

$$\sqrt[12]{1{,}12} = \sqrt[12]{(1 + i_m)^{12}}$$

$$1 + i_m = (1{,}12)^{1/12} \rightarrow i_m = (1{,}12)^{1/12} - 1$$

Calculando:

$i_m \approx 1{,}009488 - 1 = 0{,}009488\%$ ou $0{,}9488$

Conclusão

Aplicar um capital a uma taxa de 12% a.a. equivale, no regime de juros compostos, a uma taxa mensal de aproximadamente $0,9488\%$ a.m., produzindo o mesmo montante ao final de um ano. Nota-se que essa taxa mensal não corresponde a 1% como ocorre no regime de juros simples, evidenciando a diferença entre taxas proporcionais e taxas equivalentes.

4.1.5 PROPORCIONALIDADE NOS INVESTIMENTOS

Por conta da natureza da proporcionalidade, pode-se acrescentar mais grandezas de tal modo que todas as medidas sejam proporcionais entre si:

$$x \propto y,\ x \propto z \rightarrow x = k \cdot y \cdot z,$$

onde k é um coeficiente de proporcionalidade e $\propto$ indica a relação de proporcionalidade.

Esse tipo de composição de proporção permite o estudo de fenômenos e objetos matemáticos mais complexos. tais como são abordados na Educação Financeira, exemplificado pelo retorno de investimento (R) proporcional ao capital investido (C), o tempo de investimento (t) e a taxa de administração (T):

$$R = k\frac{C \cdot t}{T}.$$

Nesse caso, o retorno de investimento aumenta conforme o capital investido e o tempo de investimento também aumentam, ao passo em que diminui quando a taxa de administração aumenta. Esta relação é uma proporção inversa, ao contrário das anteriores que são diretas.

4.2 EDUCAÇÃO FINANCEIRA

As discussões desenvolvidas nas seções anteriores evidenciam que a Matemática Financeira se estrutura a partir de conceitos fundamentais da Matemática, como razão, proporção, porcentagem e funções, os quais permitem modelar e analisar situações relacionadas ao uso do dinheiro ao longo do tempo. Quando compreendidos de maneira relacional, e não apenas procedimental, esses conceitos possibilitam ao estudante comparar grandezas, interpretar variações e analisar diferentes cenários financeiros, constituindo uma base matemática essencial para a tomada de decisões conscientes e fundamentadas.

É a partir dessa base conceitual que se amplia a discussão para a Educação Financeira, compreendida como um tema transversal na Educação Básica. Mais do que o domínio de técnicas de cálculo, educar financeiramente implica desenvolver a capacidade de analisar, comparar e julgar situações que envolvem escolhas econômicas presentes no cotidiano. Nesse sentido, a autonomia financeira não se constrói dissociada do conhecimento matemático, mas fundamenta-se na habilidade de mobilizar conceitos como proporcionalidade, porcentagem e funções para interpretar informações, prever consequências e optar por alternativas mais adequadas em diferentes contextos.

Essa perspectiva está em consonância com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que destaca a Educação Financeira como um tema integrador, articulado ao desenvolvimento do pensamento matemático e à formação para a cidadania. A BNCC enfatiza que o ensino de Matemática deve possibilitar aos estudantes interpretar e resolver problemas relacionados a situações reais, incluindo aquelas que envolvem consumo, planejamento e organização financeira (BRASIL, 2018).

Nesse contexto, conceitos matemáticos como razão, proporção, porcentagem e funções assumem papel central, pois constituem ferramentas essenciais para a compreensão de fenômenos financeiros presentes no cotidiano dos estudantes. Situações envolvendo compras, planejamento de gastos, organização de orçamentos e análise de diferentes formas de pagamento permitem trabalhar a proporcionalidade de maneira contextualizada e significativa. Ao comparar preços, calcular descontos ou avaliar promoções, os estudantes mobilizam relações proporcionais e percentuais, estabelecendo conexões diretas entre a Matemática escolar e práticas sociais reais.

A Educação Financeira, assim, pode ser compreendida como um campo que se apoia na Matemática Financeira, mas a extrapola ao incorporar dimensões formativas relacionadas ao consumo consciente, ao planejamento e à responsabilidade social. Ao analisar condições de pagamento, organizar orçamentos ou comparar alternativas financeiras, a escola promove experiências que exigem do estudante a mobilização de raciocínios proporcionais e funcionais, favorecendo a construção de uma postura crítica diante das práticas financeiras presentes na sociedade, conforme defendido por Kistemann Jr. (2011).

Essa abordagem possibilita que a Educação Financeira seja trabalhada de forma progressiva ao longo de toda a Educação Básica. Nos anos iniciais do Ensino Fundamental, comparações simples de valores e quantidades já introduzem noções de proporcionalidade; nos anos finais, essas relações se ampliam para o estudo sistemático de porcentagens, juros e variações percentuais; e, no Ensino Médio, permitem análises mais complexas envolvendo funções, crescimento exponencial, inflação e investimentos. Dessa forma, o ensino de Matemática contribui diretamente para a formação de sujeitos capazes de compreender e intervir de maneira autônoma em situações financeiras reais.

O estudo do orçamento pessoal e familiar constitui outro eixo relevante da Educação Financeira na Educação Básica. A análise da distribuição da renda, dos gastos fixos e variáveis e da necessidade de poupança possibilita a introdução de modelos simples de planejamento financeiro. Estratégias como a organização percentual da renda favorecem o trabalho com proporções, frações e porcentagens, além de estimular reflexões sobre prioridades, consumo consciente e planejamento de curto, médio e longo prazo.

Além disso, situações-problema como o planejamento de viagens, a organização de eventos ou a simulação de compras permitem articular diferentes conceitos matemáticos, como proporcionalidade, funções e análise de variações. Ao estimar custos, comparar preços e adequar escolhas a restrições orçamentárias, os estudantes desenvolvem competências relacionadas à resolução de problemas, à argumentação matemática e à tomada de decisões fundamentadas.

Outro aspecto central da Educação Financeira refere-se à compreensão de juros e porcentagens, especialmente nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio. O estudo dos regimes de juros simples e compostos possibilita analisar situações de empréstimos, financiamentos, compras parceladas e aplicações financeiras, ampliando a compreensão sobre o custo do dinheiro no tempo. A comparação entre diferentes condições de pagamento evidencia a importância do raciocínio proporcional e funcional, além de favorecer discussões sobre endividamento e consumo responsável.

No Ensino Médio, a Educação Financeira pode ser aprofundada por meio do estudo introdutório de investimentos, inflação e poder de compra. A análise de rendimentos, taxas e crescimento exponencial permite a exploração de funções, sequências e gráficos, contribuindo para que os estudantes desenvolvam uma postura crítica diante das informações financeiras divulgadas pela mídia e por instituições financeiras.

Dessa forma, a Educação Financeira na Educação Básica, ao articular-se aos conceitos de proporcionalidade e às demais estruturas matemáticas, ultrapassa o ensino de procedimentos mecânicos e assume um caráter formativo. Ela promove a construção de conhecimentos matemáticos contextualizados, favorece o desenvolvimento da autonomia e contribui para a formação de cidadãos capazes de atuar de maneira consciente, crítica e responsável em uma sociedade marcada por constantes decisões de ordem financeira.

A matemática financeira é uma ciência exata, com fórmulas e teorias para analisar a forma como o dinheiro se transforma sob a influência de diferentes fatores e cenários. Já a educação financeira tem seu enfoque nos hábitos, nas emoções e nas atitudes de uma pessoa, ou até de uma empresa como um todo.

É por essa distinção que existem, por exemplo, pessoas que possuem um conhecimento matemático gigantesco, mas que não tomam boas decisões ao investir, ou que estejam perdidas em meio às dívidas. Da mesma forma, há quem não lide tão bem assim com os números, mas que tenha uma boa carteira de ativos.

4.2.1 A MATEMÁTICA NO PLANEJAMENTO FINANCEIRO

O planejamento financeiro constitui um eixo central da Educação Financeira, pois envolve a organização consciente da renda, dos gastos e das metas de curto, médio e longo prazo. Mais do que um controle mecânico de despesas, planejar financeiramente implica analisar prioridades, prever compromissos futuros e tomar decisões fundamentadas, mobilizando conceitos matemáticos. Nesse sentido, a adoção de métodos de planejamento financeiro favorece a construção da autonomia e contribui para o uso responsável do crédito e do consumo.

Entre os métodos mais difundidos de planejamento financeiro pessoal, destacam-se aqueles baseados na distribuição proporcional da renda, como o método 50/30/20, que propõe a divisão do orçamento em gastos essenciais, despesas pessoais e poupança ou investimentos. Esse tipo de abordagem permite trabalhar, de forma concreta, relações proporcionais e percentuais, além de incentivar a reflexão sobre equilíbrio orçamentário, consumo consciente e prevenção do endividamento.

Tabela 4.2 – Métodos de planejamento financeiro, conceitos matemáticos e alinhamento com a BNCC

Método	**Descrição**	**Conceitos matemáticos**	**Alinhamento com a BNCC**
Método 50/30/20	Distribuição proporcional da renda entre despesas essenciais, gastos pessoais e poupança ou investimentos.	Razão, proporção, porcentagem, frações.	EF08MA04; EF09MA05
Orçamento mensal	Registro e análise de receitas e despesas para controle e equilíbrio financeiro.	Operações aritméticas, porcentagens, tabelas e gráficos.	EF07MA26; EF08MA19
Definição de metas financeiras	Planejamento de objetivos de curto, médio e longo prazo, considerando tempo e recursos disponíveis.	Proporcionalidade, funções, sequências, juros.	EF09MA06; EM13MAT302
Planejamento do uso do crédito	Análise de financiamentos, parcelamentos e empréstimos considerando juros, prazos e comprometimento da renda.	Juros simples e compostos, funções afim e exponencial, proporcionalidade.	EM13MAT101; EM13MAT303
Reserva financeira	Formação de poupança ou reserva de emergência por meio de contribuições periódicas.	Progressões, juros compostos, funções exponenciais.	EM13MAT304

4.2.2 MÉTODO 50/30/20

O método 50/30/20, proposto por Warren e Tyagi (2005), consiste na divisão proporcional da renda em três categorias: 50% destinada às despesas essenciais, 30% a gastos pessoais e 20% à poupança, investimentos ou quitação de dívidas, favorecendo o equilíbrio financeiro e o planejamento de longo prazo. Essa estratégia facilita a visualização do orçamento e possibilita o trabalho, de forma concreta, com conceitos de porcentagem e proporcionalidade, além de estimular a reflexão sobre prioridades financeiras e consumo consciente.

Exemplo de aplicação do método 50/30/20

Considere uma família com renda mensal equivalente a dois salários mínimos. Admitindo, para fins de exemplificação, o valor do salário mínimo de $R\$\ 1.502,00$, a renda bruta familiar mensal é dada por:

$$2 \times 1.502 = \text{R\$}\ 3.004,00$$

Supondo um desconto médio de 8% referente à contribuição ao INSS, o valor líquido aproximado recebido pela família é:

$$3.004 - 0{,}08 \times 3.004 = \text{R\$ } 2.763{,}68.$$

Aplicando o método 50/30/20 sobre essa renda líquida, obtém-se o seguinte planejamento financeiro mensal:

- **50% — Despesas essenciais**:

  $$0{,}50 \times 2.763{,}68 = \text{R\$ } 1.381{,}84,$$

  destinados a gastos com moradia, alimentação, transporte, contas básicas e saúde.

- **30% — Gastos pessoais**:

  $$0{,}30 \times 2.763{,}68 = \text{R\$ } 829{,}10,$$

  referentes a despesas com lazer, vestuário e consumo não essencial.

- **20% — Poupança, investimentos ou quitação de dívidas**:

  $$0{,}20 \times 2.763{,}68 = \text{R\$ } 552{,}74,$$

  direcionados à formação de reserva financeira, investimentos ou amortização de dívidas existentes.

Esse exemplo evidencia como o método 50/30/20 permite operacionalizar conceitos matemáticos de porcentagem e proporcionalidade em uma situação concreta, favorecendo a visualização do orçamento familiar e a reflexão sobre prioridades financeiras. Além disso, constitui uma estratégia didática acessível para o desenvolvimento da Educação Financeira na Educação Básica, alinhada à formação de sujeitos capazes de planejar, analisar e tomar decisões conscientes no uso do dinheiro.

Ressalta-se que o modelo 50/30/20 foi utilizado neste trabalho não como prescrição universal de planejamento financeiro, mas como instrumento didático para a análise de relações proporcionais aplicadas à organização da renda. Nesse contexto, a parcela correspondente aos 20% não representa apenas um valor destinado à poupança e investimento, mas, sobretudo, a fração da renda que não deve ser previamente comprometida, funcionando como margem de segurança financeira. Assim, o modelo foi explorado pedagogicamente como meio de discutir limites de comprometimento financeiro, tomada de decisão e interpretação de proporções, permitindo aos estudantes refletirem criticamente sobre diferentes formas de organização orçamentária.

4.2.3 ORÇAMENTO MENSAL

O orçamento mensal consiste no registro sistemático das receitas e despesas, possibilitando a análise da distribuição da renda ao longo do período. Por meio dessa prática, é possível identificar gastos fixos e variáveis, avaliar o comprometimento da renda e planejar ajustes necessários para manter o equilíbrio financeiro. Do ponto de vista matemático, o orçamento mensal permite a aplicação de operações aritméticas, porcentagens e comparações proporcionais, contribuindo para o desenvolvimento do raciocínio financeiro.

O registro sistemático de receitas e despesas constitui uma etapa fundamental do planejamento financeiro, pois permite acompanhar a forma como a renda é distribuída ao longo do mês e identificar possibilidades de ajuste. Esse controle favorece a tomada de decisões conscientes, contribuindo para o equilíbrio do orçamento familiar. A tabela a seguir apresenta um modelo em branco de registro de receitas e despesas, que pode ser utilizado para o planejamento do orçamento pessoal ou familiar.

Tabela 4.3 – Modelo de registro mensal de receitas e despesas

Categoria	**Valor (R$)**
Receita mensal	____________
Despesas essenciais	____________
Gastos pessoais	____________
Poupança / dívidas	____________

O quadro 4.4 apresenta um modelo de controle do orçamento mensal que permite identificar a origem da renda, classificar as despesas e analisar o saldo final, favorecendo o planejamento financeiro e a reflexão sobre consumo e prioridades.

Tabela 4.4 – Modelo de controle do orçamento mensal

Descrição	**Valor (R$)**
Receitas	
Salário / renda principal	____________
Outras receitas	____________
Despesas fixas	
Aluguel / moradia	____________
Água, luz e internet	____________
Transporte	____________
Despesas variáveis	
Alimentação	____________
Lazer	____________
Outros gastos	____________
Total de despesas	____________
Saldo mensal	____________

Esse modelo possibilita analisar a relação entre receitas e despesas, identificar excessos e planejar ajustes, mobilizando conceitos de soma, diferença, porcentagem e proporcionalidade, podendo ser adaptado a diferentes realidades, incentivando a organização financeira, o consumo consciente e a aplicação de conceitos matemáticos no cotidiano.

O quadro 4.5 apresenta um modelo de registro de receitas e despesas organizado de acordo com o método 50/30/20, permitindo visualizar a distribuição proporcional da renda entre necessidades, gastos pessoais e poupança ou quitação de dívidas. Esse tipo de organização favorece o planejamento financeiro e a análise do comprometimento do orçamento familiar.

Tabela 4.5 – Modelo de orçamento mensal pelo método 50/30/20

Categoria	**Percentual**	**Valor (R$)**
Receita mensal		
Renda total	100%	____________
Despesas essenciais (50%)		
Moradia		____________
Alimentação		____________
Transporte		____________
Saúde / educação		____________
Subtotal	50%	____________
Gastos pessoais (30%)		
Lazer		____________
Vestuário		____________
Outros gastos pessoais		____________
Subtotal	30%	____________
Poupança / investimentos / quitação de dívidas (20%)		
Reserva financeira		____________
Investimentos		____________
Pagamento de dívidas		____________
Subtotal	20%	____________
Total geral	100%	____________

Esse modelo permite ao estudante visualizar a distribuição proporcional da renda, comparar valores planejados e realizados e refletir sobre prioridades financeiras, mobilizando conceitos de porcentagem, proporcionalidade e organização de dados.

Considerando o exemplo da família com renda mensal líquida de R$ 2.763,68, após os descontos previdenciários, apresenta-se a seguir um modelo simplificado de registro mensal de receitas e despesas, organizado de acordo com o método 50/30/20.

Tabela 4.6 – Modelo de registro mensal de receitas e despesas

Descrição	**Valor (R$)**
Receita	
Salários líquidos	2.763,68
Despesas essenciais (50%)	
Aluguel / moradia	700,00
Alimentação	450,00
Transporte	150,00
Energia elétrica	120,00
Água e internet	80,00
Saúde e medicamentos	81,84
Total despesas essenciais	1.381,84
Gastos pessoais (30%)	
Lazer	250,00
Vestuário	180,00
Outros gastos pessoais	399,10
Total gastos pessoais	829,10
Poupança / dívidas (20%)	
Reserva financeira / investimentos	552,74
Total poupado	552,74

Esse tipo de registro possibilita visualizar a distribuição da renda de forma clara e organizada, favorecendo o acompanhamento do orçamento ao longo do tempo. Do ponto de vista educacional, essa prática permite trabalhar conceitos matemáticos como soma, porcentagem e proporcionalidade, além de incentivar hábitos de organização financeira e consumo consciente, em consonância com os objetivos da Educação Financeira na Educação Básica.

4.2.4 OUTRAS ESTRATÉGIAS DE PLANEJAMENTO

Ao integrar o ensino de Matemática Financeira a práticas de planejamento financeiro, a escola contribui para uma compreensão crítica das práticas econômicas do cotidiano. Além do controle orçamentário, outras estratégias voltadas ao longo prazo se mostram fundamentais, como:

- **Definição de metas financeiras**: envolve o estabelecimento de objetivos de curto, médio e longo prazo, como a aquisição de bens, a formação de uma reserva de emergência ou o planejamento de viagens. Esse método favorece a compreensão da relação entre tempo, valor e esforço financeiro, permitindo a utilização de modelos matemáticos para estimar prazos, valores acumulados e impacto dos juros. Assim, a construção de metas contribui para o desenvolvimento da autonomia e do planejamento consciente.

- **Planejamento do uso do crédito**: O planejamento do uso do crédito consiste na análise criteriosa das condições de empréstimos, financiamentos e parcelamentos, considerando taxas de juros, prazos e comprometimento da renda. Essa prática permite comparar diferentes modalidades de crédito e avaliar seus impactos no orçamento familiar, articulando conceitos de juros simples e compostos, amortização e proporcionalidade. Dessa forma, o estudante desenvolve uma postura crítica diante das ofertas de crédito e do risco de endividamento.

- **Reserva financeira**: A constituição de uma reserva financeira é um método fundamental de planejamento, pois visa garantir segurança diante de imprevistos e estabilidade no orçamento. A formação dessa reserva envolve contribuições periódicas e a análise do crescimento do capital ao longo do tempo, permitindo explorar conceitos matemáticos como progressões, juros compostos e funções exponenciais. Essa prática reforça a importância do planejamento de longo prazo e da disciplina financeira.

Tais práticas de planejamento financeiro permitem ao indivíduo compreender a dinâmica do próprio orçamento, identificar excessos e avaliar, de forma consciente, a viabilidade de financiamentos e parcelamentos. Nesse contexto, o tema financiamento pode ser explorado em sala de aula como uma situação financeira real, articulando-se ao ensino de proporcionalidade e evidenciando sua relevância para a tomada de decisões responsáveis na vida do cidadão brasileiro.

4.2.5 FINANCIAMENTOS

Financiamentos são um tipo de empréstimo destinado à compra de bens ou serviços, no qual o valor da dívida é pago de forma parcelada ao longo de um determinado período. Para isso, aplica-se um sistema de **amortização**, que consiste na distribuição do valor devido em parcelas, levando em consideração a taxa de juros e o prazo estabelecido. Os tipos de amortização mais utilizados no Brasil na atualidade são:

- Sistema de amortização Constante (SAC), com parcelas de valor decrescentes.
- Tabela Price (Sistema Francês) com parcelas fixas e amortização crescente.

Estudos que analisam os sistemas de amortização mais adotados no Brasil destacam que a Tabela Price e o Sistema de Amortização Constante (SAC) são amplamente utilizados em financiamentos imobiliários, com cada método apresentando características específicas quanto à forma de cobrança de juros e composição das parcelas ao longo do tempo (Reis, 2025).

A discussão sobre SAC e Price também integra propostas de educação financeira no contexto escolar, contribuindo para a compreensão dos impactos das diferentes formas de amortização no orçamento familiar (Freitas & Moreira, 2022).

No Brasil, o comprometimento da renda familiar em financiamentos habitacionais é objeto de regulamentação legal. A Lei nº 8.692/1993 estabelece que os encargos mensais do financiamento não devem ultrapassar 30% da renda familiar bruta, com o objetivo de preservar o equilíbrio do orçamento e reduzir riscos de inadimplência (BRASIL, 1993). Esse limite é amplamente utilizado nas práticas de mercado como um critério de capacidade de pagamento, embora em algumas modalidades de crédito e perfis de tomadores seja possível certa flexibilidade nos percentuais de comprometimento.

Na Tabela Price, o valor das parcelas é calculado de forma a permanecer constante ao longo de todo o financiamento. Nesse sistema, a amortização não é fixa, variando ao longo do tempo, enquanto os juros são calculados sobre o saldo devedor, resultando em uma composição das parcelas em que, nos períodos iniciais, predomina o pagamento de juros, e, nos períodos finais, aumenta a parcela destinada à amortização da dívida. Para o calculo do valor da parcela no sitema Price, aplixa-se a fórmula:

$$P = C \cdot \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^{n-1}} \tag{4.3}$$

onde

- P é o valor da prestação constante;
- C é o capital financiado;
- i é a taxa de juros por período, em forma decimal;
- n é o número total de parcelas.

No Sistema de Amortização Constante (SAC), a amortização é calculada pela divisão do capital financiado pelo número total de parcelas, permanecendo constante ao longo de todo o financiamento.

$$A = \frac{C}{n} \tag{4.4}$$

$$J_k = i \cdot SD_{k-1} \tag{4.5}$$

$$P_k = A + J_k \tag{4.6}$$

$$SD_k = SD_{k-1} - A \tag{4.7}$$

onde

- A é o valor da amortização constante;
- C é o capital financiado;
- n é o número total de parcelas;
- i é a taxa de juros por período;

- J_k é o juro da k-ésima parcela;
- P_k é o valor da prestação no período k;
- SD_k é o saldo devedor após o pagamento da parcela k.

Ao comparar o Sistema de Amortização Constante (SAC) e a Tabela Price, observa-se que ambos diferem essencialmente na forma como a amortização da dívida é distribuída ao longo do tempo. No SAC, a amortização é constante, o que implica parcelas iniciais mais elevadas e progressivamente decrescentes, resultando em uma redução mais rápida do saldo devedor e, consequentemente, em menor pagamento total de juros ao final do financiamento. Já na Tabela Price, as parcelas permanecem constantes, porém a amortização é menor nos períodos iniciais e aumenta ao longo do tempo, enquanto os juros decrescem de forma gradual. Dessa forma, embora a Tabela Price apresente maior previsibilidade no valor das parcelas, tende a implicar maior custo total em juros quando comparada ao SAC, especialmente em financiamentos de longo prazo. Com o objetivo de possibilitar a compreensão das diferenças entre os principais sistemas de financiamento, vejamos uma aplicaçã:

Situação problema

Considerando o financiamento de um automóvel de $R\$ \ 50.000,00$, analisado segundo os sistemas SAC (Sistema de Amortização Constante) e Price (Sistema Francês de Amortização), com as seguintes condições:

- Valor financiado: R$ 30.000,00;
- Taxa de juros: 1% ao mês;
- Prazo: 24 meses;
- Entrada: R$ 20.000,00.

Sistema de Amortização Constante (SAC)

No sistema SAC, o valor da amortização é constante ao longo do prazo do financiamento, sendo calculado pela razão entre o valor financiado e o número de parcelas:

$$A = \frac{30.000}{24} = R\$1.250,00.$$

Os juros incidem sobre o saldo devedor, que diminui mensalmente, o que resulta em parcelas decrescentes ao longo do tempo.

Na primeira parcela, os juros correspondem a:

$$J_1 = 0{,}01 \times 30.000 = R\$300,00,$$

resultando em uma parcela inicial de:

$$P_1 = 1.250 + 300 = R\$1.550,00.$$

Na última parcela, considerando um saldo devedor de R$ 1.250,00, os juros são:

$$J_{24} = 0{,}01 \times 1.250 = R\$12,50,$$

e o valor da parcela final é:

$$P_{24} = 1.250 + 12,50 = R\$1.262,50.$$

Sistema Price (Sistema Francês de Amortização)

No sistema Price, o valor da parcela permanece constante durante todo o financiamento, sendo calculado pela fórmula:

$$PMT = PV \cdot \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1},$$

em que PV representa o valor financiado, i a taxa de juros mensal e n o número de parcelas.

Substituindo os valores do exemplo, obtém-se uma parcela mensal aproximada de:

$$PMT \approx R\$1.412,00.$$

Nesse sistema, observa-se que, nas parcelas iniciais, a maior parte do valor pago corresponde aos juros, enquanto a amortização aumenta progressivamente ao longo do tempo.

Comparação entre os sistemas

A Tabela 4.7 apresenta uma comparação sintética entre os dois sistemas de amortização.

Tabela 4.7 – Comparação entre os sistemas de amortização SAC e Price

Sistema	**Parcela inicial**	**Parcela final**	**Valor total aproximado**
SAC	R$ 1.550,00	R$ 1.262,50	R$ 33.750,00
Price	R$ 1.412,00	R$ 1.412,00	R$ 33.888,00

Tabela 4.8 – Tabela de amortização mensal — Sistema Price

Mês	**Saldo Devedor (R$)**	**Juros (R$)**	**Amortização (R$)**	**Parcela (R$)**
1	30.000,00	300,00	1.112,00	1.412,00
2	28.888,00	288,88	1.123,12	1.412,00
3	27.764,88	277,65	1.134,35	1.412,00
4	26.630,53	266,31	1.145,69	1.412,00
5	25.484,84	254,85	1.157,15	1.412,00
6	24.327,69	243,28	1.168,72	1.412,00
7	23.158,97	231,59	1.180,41	1.412,00
8	21.978,56	219,79	1.192,21	1.412,00
9	20.786,35	207,86	1.204,14	1.412,00
10	19.582,21	195,82	1.216,18	1.412,00
11	18.366,03	183,66	1.228,34	1.412,00
12	17.137,69	171,38	1.240,62	1.412,00
13	15.897,07	158,97	1.253,03	1.412,00
14	14.644,04	146,44	1.265,56	1.412,00
15	13.378,48	133,78	1.278,22	1.412,00
16	12.100,26	121,00	1.291,00	1.412,00
17	10.809,26	108,09	1.303,91	1.412,00
18	9.505,35	95,05	1.316,95	1.412,00
19	8.188,40	81,88	1.330,12	1.412,00
20	6.858,28	68,58	1.343,42	1.412,00
21	5.514,86	55,15	1.356,85	1.412,00
22	4.158,01	41,58	1.370,42	1.412,00
23	2.787,59	27,88	1.384,12	1.412,00
24	1.403,47	14,03	1.397,97	1.412,00

Tabela 4.9 – Tabela de amortização mensal — Sistema SAC

Mês	Saldo Devedor (R$)	Juros (R$)	Amortização (R$)	Parcela (R$)
1	30.000,00	300,00	1.250,00	1.550,00
2	28.750,00	287,50	1.250,00	1.537,50
3	27.500,00	275,00	1.250,00	1.525,00
4	26.250,00	262,50	1.250,00	1.512,50
5	25.000,00	250,00	1.250,00	1.500,00
6	23.750,00	237,50	1.250,00	1.487,50
7	22.500,00	225,00	1.250,00	1.475,00
8	21.250,00	212,50	1.250,00	1.462,50
9	20.000,00	200,00	1.250,00	1.450,00
10	18.750,00	187,50	1.250,00	1.437,50
11	17.500,00	175,00	1.250,00	1.425,00
12	16.250,00	162,50	1.250,00	1.412,50
13	15.000,00	150,00	1.250,00	1.400,00
14	13.750,00	137,50	1.250,00	1.387,50
15	12.500,00	125,00	1.250,00	1.375,00
16	11.250,00	112,50	1.250,00	1.362,50
17	10.000,00	100,00	1.250,00	1.350,00
18	8.750,00	87,50	1.250,00	1.337,50
19	7.500,00	75,00	1.250,00	1.325,00
20	6.250,00	62,50	1.250,00	1.312,50
21	5.000,00	50,00	1.250,00	1.300,00
22	3.750,00	37,50	1.250,00	1.287,50
23	2.500,00	25,00	1.250,00	1.275,00
24	1.250,00	12,50	1.250,00	1.262,50

A apresentação das tabelas 4.8 e 4.9, com a amortização mês a mês mostra o comportamento dos juros, da amortização e do saldo devedor em cada sistema, permitindo uma análise comparativa detalhada entre o SAC e o Price. Esse material subsidia a compreensão das diferenças estruturais entre os sistemas e reforça a importância da análise criteriosa de financiamentos no contexto da Educação Financeira. A análise comparativa entre os sistemas de amortização SAC e Tabela Price evidencia que, embora o sistema Price apresente parcelas fixas e inicialmente mais acessíveis, o custo total do financiamento tende a ser superior ao do sistema SAC, que, apesar de exigir maior comprometimento financeiro no início do contrato, resulta em menor valor pago ao final. Dessa forma, a escolha do sistema de financiamento não deve se restringir ao valor da parcela mensal, mas considerar o impacto global da operação ao longo do tempo. A compreensão da dinâmica da amortização, do saldo devedor e da incidência dos juros possibilita ao estudante e ao consumidor uma leitura crítica das condições oferecidas pelas instituições financeiras, contribuindo para a Educação Financeira ao articular conceitos matemáticos, como proporcionalidade, funções e juros compostos, a situações reais de tomada de decisão, favorecendo uma postura mais consciente e responsável frente ao uso do crédito.

No que se refere à proporcionalidade, o Sistema de Amortização Constante (SAC) apresenta uma relação mais direta com esse conceito, uma vez que a amortização resulta da divisão proporcional do capital pelo número de parcelas, caracterizando uma relação linear entre as grandezas envolvidas. Já na Tabela Price, embora exista relação entre capital, taxa e tempo, essa relação não é proporcional no sentido estrito, pois o cálculo das prestações envolve processos exponenciais decorrentes da capitalização composta. Dessa forma, enquanto o SAC favorece a análise sob a ótica da proporcionalidade e das funções afins, a Tabela Price exige a mobilização de uma lógica multiplicativa, associada ao crescimento exponencial dos juros compostos.

5 ATIVIDADES SOBRE EDUCAÇÃO FINANCEIRA

Com base nos fundamentos discutidos anteriormente, esta seção apresenta duas propostas de trabalho pedagógico, considerando a importância do desenvolvimento progressivo da Educação Financeira ao longo do Ensino Fundamental e do Ensino Médio. A primeira consiste em uma lista de atividades voltadas ao estudo de porcentagem, juros e análise de gráficos, com foco na compreensão e aplicação desses conceitos em situações do cotidiano. A segunda corresponde a uma sequência didática organizada em três eixos, elaborada segundo a Taxonomia de Bloom, buscando favorecer o avanço gradual das habilidades cognitivas dos estudantes e a construção de uma postura crítica e consciente diante de decisões financeiras.

5.1 ATIVIDADES PARA ENSINO FUNDAMENTAL

5.1.1 LISTA DE ATIVIDADES: PORCENTAGEM

Nível de ensino: Ensino Fundamental (anos finais)

Habilidades da BNCC:

- EF06MA07 – Compreender, comparar e calcular porcentagens em situações do cotidiano.
- EF07MA02 – Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, incluindo acréscimos e decréscimos simples.

1. Uma camiseta custa R$ 80,00. Em uma promoção, a loja oferece 25% de desconto. Determine o valor do desconto e o preço final do produto.
2. Uma família gasta 30% de sua renda mensal de R$ 2.000,00 com alimentação. Qual é o valor gasto mensalmente com esse item?
3. Em uma turma com 40 alunos, 60% possuem acesso à internet em casa. Quantos alunos têm acesso à internet?
4. Um celular sofreu um aumento de 10% sobre o preço original de R$ 1.200,00. Qual é o novo valor do aparelho?
5. Um supermercado anuncia um desconto de 15% em um produto que custava R$ 200,00. Quanto o consumidor economiza?
6. Um estudante poupou 20% de sua mesada mensal de R$ 150,00. Qual foi o valor poupado?
7. Uma conta de energia elétrica de R$ 180,00 sofreu um acréscimo de 12%. Qual será o novo valor da conta?

8. Em uma pesquisa, 45% dos entrevistados afirmaram utilizar cartão de crédito. Se 200 pessoas participaram da pesquisa, quantas responderam positivamente?

9. Um produto teve dois descontos sucessivos: primeiro de 10% e depois de 5% sobre o valor restante. Sabendo que o preço inicial era R$ 300,00, determine o valor final do produto.

10. Um trabalhador compromete 35% de seu salário de R$ 1.800,00 com despesas fixas. Quanto sobra para outras despesas?

5.1.2 LISTA DE ATIVIDADES: JUROS SIMPLES

Nível de ensino: Ensino Fundamental (anos finais)

Habilidades da BNCC:

- EF07MA04 – Resolver e elaborar problemas que envolvam acréscimos e decréscimos simples, incluindo juros simples.
- EF08MA04 – Resolver problemas envolvendo porcentagens, juros simples e proporcionalidade em contextos financeiros.

Fórmulas utilizadas:

$$J = C \cdot i \cdot t$$

$$M = C + J$$

1. Um capital de R$ 500,00 foi aplicado a juros simples, à taxa de 2% ao mês, durante 5 meses. Calcule o juro e o montante.

2. Uma pessoa emprestou R$ 1.200,00 a um amigo, cobrando juros simples de 3% ao mês por 4 meses. Determine o valor dos juros.

3. Uma conta de R$ 300,00 foi paga com 2 meses de atraso, com juros simples de 5% ao mês. Qual será o valor total pago?

4. Um capital de R$ 800,00 gerou R$ 96,00 de juros simples em 6 meses. Qual foi a taxa mensal de juros?

5. Calcule o juro obtido em 8 meses sobre um capital de R$ 2.000,00 aplicado a juros simples de 1,5% ao mês.

6. Um produto no valor de R$ 1.000,00 será pago após 10 meses, com juros simples de 2% ao mês. Qual será o valor total pago?

7. Um estudante pegou emprestado R$ 400,00 e devolveu R$ 480,00 após 10 meses. Determine a taxa mensal de juros simples.

8. Uma loja cobra juros simples de 4% ao mês em compras parceladas. Quanto será pago ao final de 6 meses por um produto de R$ 600,00?

9. Um capital aplicado por 12 meses, a juros simples de 1% ao mês, gerou R$ 180,00 de juros. Determine o capital inicial.

10. Considere duas opções de empréstimo para um capital de R$ 1.000,00:

    a) juros simples de 2% ao mês por 5 meses;

    b) juros simples de 1,5% ao mês por 8 meses.

    Indique qual opção é mais vantajosa, justificando sua resposta.

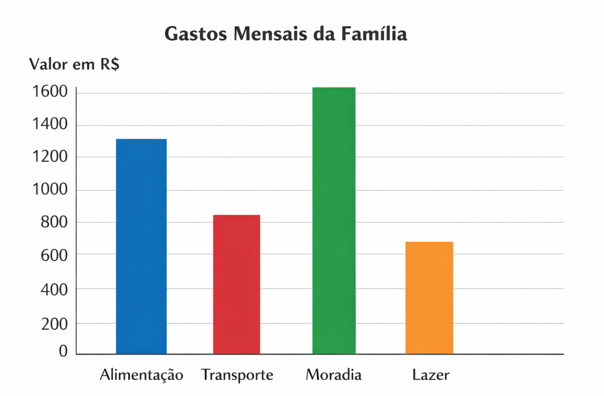
5.1.3 LISTA DE ATIVIDADES: ANÁLISE DE GRÁFICOS

Nível de ensino: Ensino Fundamental (anos finais)

Habilidades da BNCC:

- EF06MA24 – Interpretar e analisar dados apresentados em tabelas e diferentes tipos de gráficos.
- EF07MA25 – Resolver problemas que envolvam a leitura e a interpretação de gráficos em contextos do cotidiano.

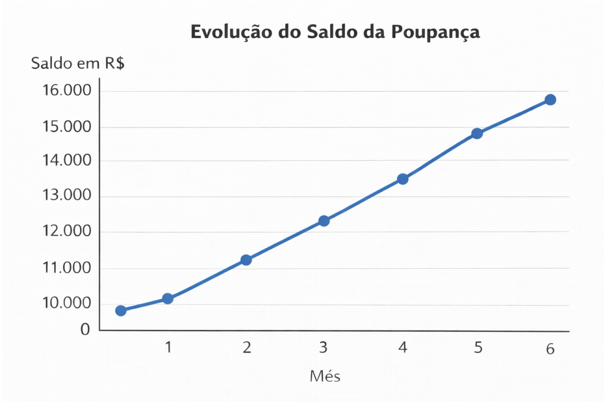
1. O gráfico de barras a seguir representa os gastos mensais de uma família com alimentação, transporte, moradia e lazer.



    a) Identifique qual categoria apresenta o maior gasto.

    b) Determine a diferença de valores entre o maior e o menor gasto.

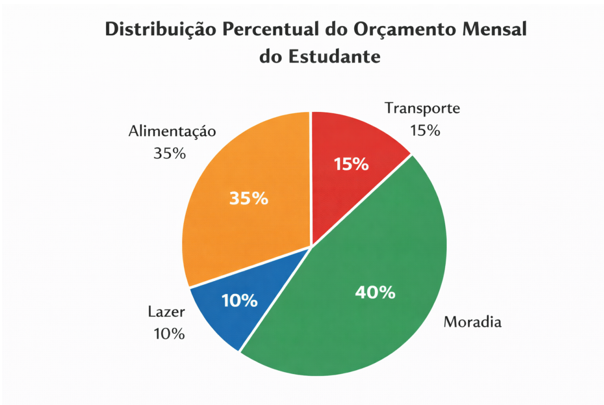
2. Um gráfico de linhas mostra a evolução do saldo de uma poupança ao longo de seis meses.



a) Em qual mês ocorreu o maior aumento do saldo?

b) O crescimento apresentado no gráfico é constante? Justifique.

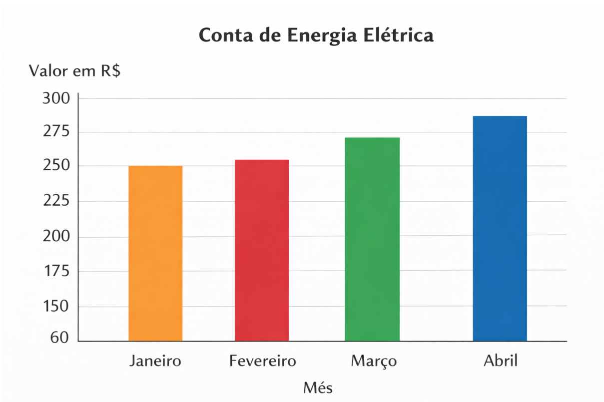
3. O gráfico de setores apresenta a distribuição percentual do orçamento mensal de um estudante.



a) Qual item ocupa a maior porcentagem do orçamento?

b) A soma das despesas apresentadas ultrapassa 100%? Explique.

4. O gráfico abaixo compara o valor de uma conta de energia elétrica em quatro meses consecutivos.



a) Em qual mês a conta apresentou maior valor?

b) Qual foi a variação entre o mês de menor e o de maior valor?

5.2 ATIVIDADES PARA ENSINO MÉDIO

5.2.1 LISTA DE ATIVIDADES: PORCENTAGEM

Nível de ensino: Ensino Médio

Habilidades da BNCC:

- EM13MAT101 – Interpretar e resolver problemas que envolvam porcentagens e razões em diferentes contextos.
- EM13MAT104 – Analisar situações-problema envolvendo grandezas, proporcionalidade e variação.

1. Um produto cujo preço inicial era de R$ 250,00 sofreu um aumento de 12% e, em seguida, um desconto de 10%. Determine o preço final e analise se o valor retornou ao preço inicial.
2. Uma família compromete 45% de sua renda mensal de R$ 3.200,00 com despesas fixas. Calcule o valor comprometido e discuta o impacto desse percentual no orçamento familiar.
3. Um investimento apresenta rendimento anual de 8%. Calcule o rendimento obtido sobre um capital de R$ 5.000,00 após um ano.
4. Em uma pesquisa de consumo, 32% dos entrevistados utilizam crédito rotativo. Em um universo de 1.250 pessoas, quantas utilizam esse tipo de crédito?
5. Um serviço teve reajuste de 15% no primeiro ano e de 5% no segundo ano. Sabendo que o valor inicial era de R$ 1.000,00, determine o valor final após os dois reajustes.
6. Um estudante reserva mensalmente 18% de uma renda de R$ 1.800,00. Qual é o valor reservado por mês e qual será o total acumulado após 6 meses, sem considerar rendimentos?
7. Um produto anunciado por R$ 900,00 é vendido à vista com 20% de desconto ou parcelado sem desconto. Determine o valor à vista e compare as duas opções.
8. Uma taxa de inadimplência aumentou de 6% para 9%. Calcule o aumento percentual relativo e discuta seu significado.
9. Uma conta sofreu acréscimo de 11% devido a encargos. Se o valor final pago foi de R$ 1.110,00, determine o valor inicial.
10. Analise uma situação em que um desconto anunciado pode induzir o consumidor a uma decisão equivocada. Utilize porcentagem para justificar sua análise.

5.2.2 LISTA DE ATIVIDADES: JUROS SIMPLES

Nível de ensino: Ensino Médio

Habilidades da BNCC:

- EM13MAT203 – Resolver e analisar problemas que envolvam juros simples e compostos em diferentes contextos.
- EM13MAT104 – Analisar situações envolvendo proporcionalidade e variação entre grandezas.

Fórmulas utilizadas:

$$J = C \cdot i \cdot t$$

$$M = C + J$$

1. Um capital de R$ 2.000,00 foi aplicado a juros simples, à taxa de 3% ao mês, durante 8 meses. Calcule o juro total e o montante.
2. Um empréstimo de R$ 1.500,00 foi contratado com juros simples de 4% ao mês por 6 meses. Determine o valor total a ser pago.
3. Uma dívida de R$ 900,00 foi quitada após 10 meses, com juros simples de 2,5% ao mês. Calcule o valor final da dívida.
4. Um capital gerou R$ 360,00 de juros simples após 12 meses. Sabendo que a taxa mensal era de 1,5%, determine o capital inicial.
5. Compare dois empréstimos para um capital de R$ 3.000,00:

   a) juros simples de 2% ao mês por 12 meses;

   b) juros simples de 1,8% ao mês por 15 meses.

   Determine qual é o mais vantajoso e justifique.
6. Um investimento rende juros simples à taxa anual de 10%. Calcule o montante após 2 anos sobre um capital de R$ 4.000,00.
7. Um produto financiado gera juros simples de R$ 540,00 após 9 meses. Sabendo que a taxa mensal é de 3%, determine o valor financiado.
8. Um atraso no pagamento de uma fatura resultou em juros simples de R$ 75,00 em 5 meses. Determine a taxa mensal aplicada sobre uma dívida de R$ 1.500,00.
9. Um capital aplicado por um período t gerou juros simples proporcionais ao tempo. Explique essa relação com base no conceito de proporcionalidade.

10. Analise por que o uso de juros simples pode subestimar o custo real de financiamentos de longo prazo.

5.2.3 LISTA DE ATIVIDADES: JUROS COMPOSTOS

Nível de ensino: Ensino Médio

Habilidades da BNCC:

- EM13MAT203 – Resolver e analisar problemas que envolvam juros simples e compostos em diferentes contextos.
- EM13MAT104 – Analisar situações envolvendo proporcionalidade, variação e crescimento exponencial.

Fórmulas utilizadas:

$$M = C \cdot (1 + i)^t$$

$$J = M - C$$

1. Um capital de R$ 2.000,00 foi aplicado a juros compostos, à taxa de 2% ao mês, durante 12 meses. Calcule o montante e o juro total.
2. Um investimento de R$ 5.000,00 rende juros compostos à taxa de 1,5% ao mês. Qual será o montante após 18 meses?
3. Uma dívida de R$ 1.200,00 foi financiada a juros compostos de 3% ao mês por 10 meses. Determine o valor final da dívida.
4. Um capital aplicado a juros compostos dobrou de valor após certo período. Sabendo que a taxa mensal é de 4%, determine o tempo necessário para que isso ocorra (aproxime, se necessário).
5. Um investimento rende juros compostos à taxa anual de 8%. Determine o montante após 3 anos sobre um capital de R$ 10.000,00.

5.2.4 LISTA DE ATIVIDADES: COMPARAÇÃO ENTRE JUROS SIMPLES E JUROS COMPOSTOS

Nível de ensino: Ensino Médio

Habilidades da BNCC:

- EM13MAT203 – Resolver e analisar problemas que envolvam juros simples e compostos em diferentes contextos.

- EM13MAT104 – Analisar situações envolvendo proporcionalidade, variação e crescimento não linear.

Fórmulas utilizadas:

$$M_s = C \cdot (1 + i \cdot t) \qquad M_c = C \cdot (1 + i)^t$$

1. Considere um capital de R\$ 2.000,00 aplicado à taxa de 2% ao mês durante 12 meses.
   a) Calcule o montante em regime de juros simples.
   b) Calcule o montante em regime de juros compostos.
   c) Compare os resultados obtidos.
2. Para um capital de R\$ 3.000,00, à taxa de 1,5% ao mês, determine o montante após 18 meses nos dois regimes de capitalização e analise a diferença.
3. Explique por que, para períodos longos, os juros compostos produzem montantes significativamente maiores do que os juros simples.
4. Um financiamento pode ser contratado a juros simples ou compostos, ambos à taxa de 2% ao mês. Discuta qual opção é mais vantajosa para o consumidor em um prazo de 24 meses.
5. Compare o crescimento do montante ao longo do tempo em cada regime, identificando se o crescimento é linear ou exponencial.

5.2.5 LISTA DE ATIVIDADES: FUNÇÕES E MODELOS FINANCEIROS

Nível de ensino: Ensino Médio

Habilidades da BNCC:

- EM13MAT401 – Analisar e interpretar funções lineares e exponenciais em diferentes contextos.
- EM13MAT203 – Modelar situações financeiras por meio de funções.

Modelos matemáticos:

$$f(t) = C \cdot (1 + i \cdot t) \qquad g(t) = C \cdot (1 + i)^t$$

1. Associe a função $f(t)$ ao regime de juros simples e a função $g(t)$ ao regime de juros compostos, explicando sua escolha.

2. Represente graficamente as funções

$$f(t) = 1000 \cdot (1 + 0{,}02t) \quad \text{e} \quad g(t) = 1000 \cdot (1{,}02)^t$$

para $0 \leq t \leq 12$.

3. Compare os gráficos obtidos e descreva as diferenças entre os tipos de crescimento.

4. Determine em que momento o montante em juros compostos passa a ser maior do que o montante em juros simples.

5. Explique por que a função exponencial é mais adequada para modelar financiamentos e investimentos de longo prazo.

5.3 RECURSO DIGITAL

As atividades desenvolvidas para esta seção foram organizadas considerando a progressão dos processos cognitivos proposta por Bloom (1956), estrutura que possibilita o desenvolvimento gradual do pensamento crítico e da autonomia financeira. Tal organização está em consonância com as orientações da Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018), desenvolvendo competências que integram conhecimentos matemáticos, argumentação e resolução de problemas reais.

5.3.1 NÍVEIS DA TAXONOMIA DE BLOOM

Nesta subseção, apresentam-se os níveis da Taxonomia de Bloom adotados na organização da sequência didática, conforme a proposta clássica de Bloom(1956). Cada nível orienta o tipo de atividade desenvolvida, respeitando a progressão cognitiva dos estudantes e favorecendo a articulação entre conteúdos matemáticos e situações de Educação Financeira. São elas:

- **Lembrar**: refere-se à capacidade de reconhecer e recordar conceitos, definições e procedimentos básicos, como o significado de porcentagem, juros ou proporcionalidade, constituindo a base para as aprendizagens posteriores.

- **Compreender**: envolve interpretar, explicar e exemplificar conceitos matemáticos e financeiros, permitindo que o estudante atribua sentido às relações entre grandezas e às informações apresentadas em tabelas e gráficos.

- **Aplicar**: diz respeito ao uso dos conhecimentos adquiridos na resolução de problemas contextualizados, como cálculos de porcentagem, juros simples ou compostos, e organização de orçamentos financeiros.

- **Analisar**: corresponde à habilidade de examinar informações, comparar situações e identificar relações, como a distinção entre juros simples e compostos ou a interpretação crítica de gráficos financeiros.

- **Avaliar**: implica julgar e justificar escolhas com base em critérios matemáticos e financeiros, analisando vantagens, riscos e consequências de decisões relacionadas ao uso do crédito, financiamento ou planejamento financeiro.
- **Criar**: refere-se à capacidade de elaborar soluções próprias, propor estratégias de planejamento financeiro, construir modelos, gráficos ou sequências de decisões fundamentadas, integrando conhecimentos matemáticos e reflexão crítica.

5.3.2 SEQUÊNCIA DIDÁTICA: PROPORCIONALIDADE E EDUCAÇÃO FINANCEIRA

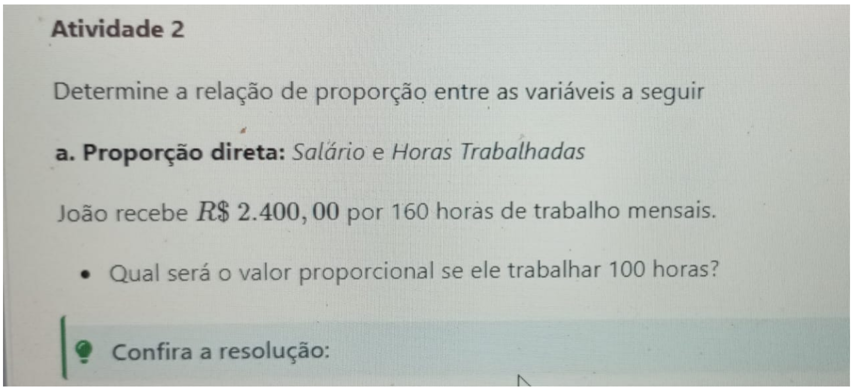
O recurso educacional completo está disponível em: <https://flaviacerqueiracezar.github.io/Proporcionalidade_Educacao_Financeira/>

A organização das atividades propostas na sequência didática do recurso digital **Proporcionalidade e Educação Financeira** segue uma estrutura intencional, planejada para favorecer a progressão da aprendizagem e o desenvolvimento da autonomia dos estudantes. O conjunto inclui três eixos de aprendizagem:

- Proporcionalidade na Educação Financeira: aborda a Educação Financeira e grandezas proporcionais diretas e inversas, relacionando-as a funções matemáticas;
- Planejamento financeiro familiar Estudo e elaboração de orçamentos familiares;
- Juros e proporcionalidade.

As questões foram classificadas em dois formatos distintos: aquelas identificadas por sequência numérica (por exemplo, "**1.** Em matemática, a razão entre dois valores representa a divisão entre eles. E o que representa a palavra proporção?"), correspondem a perguntas mais diretas, voltadas à mobilização de conhecimentos conceituais, à interpretação de ideias matemáticas e à verificação da compreensão inicial dos conteúdos. Já as atividades identificadas como **Atividade nº** envolvem situações que exigem cálculos, análise matemática, interpretação de dados ou resolução de problemas contextualizados, demandando maior elaboração cognitiva e aprofundamento conceitual por parte do estudante, conforme exemplo da figura 5.1.

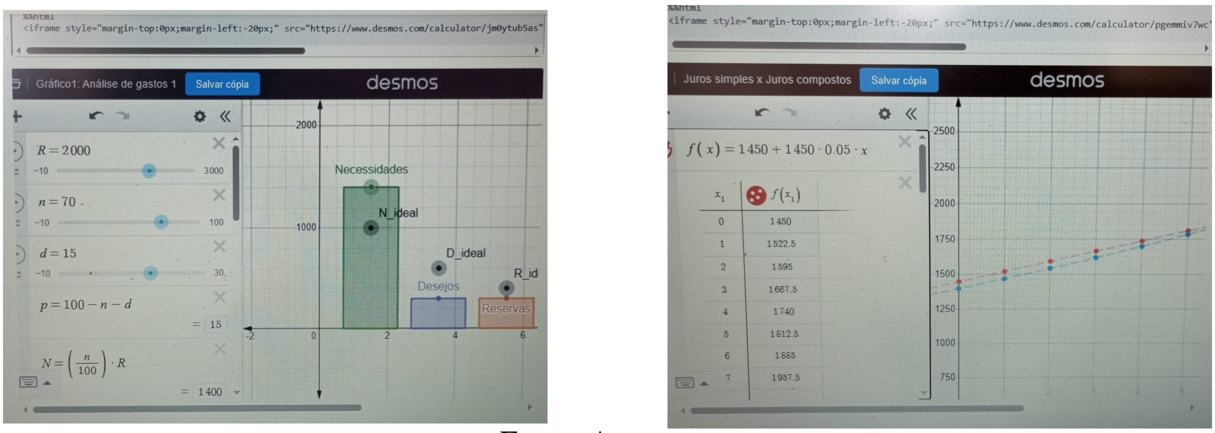
Figura 5.1 – Exemplo de atividade no recurso educacional digital



Fonte: A autora.

Além disso, a sequência didática incorpora o uso de recursos digitais, como a calculadora gráfica Desmos, empregada na construção e exploração de gráficos relacionados a situações de proporcionalidade, juros e planejamento financeiro (ver Figura 5.2). A utilização desse recurso possibilita a manipulação dinâmica de parâmetros, permitindo ao estudante observar, em tempo real, as variações nos gráficos e estabelecer relações entre expressões algébricas, tabelas e representações gráficas, contribuindo para uma compreensão mais significativa dos conceitos matemáticos envolvidos.

Figura 5.2 – Exemplos de gráficos gerados na calculadora Desmos



Fonte: A autora.

Com o objetivo de promover a autorregulação da aprendizagem e o acompanhamento do próprio processo de construção do conhecimento, o material apresenta abas ocultas com indicações como “sugestões de respostas”, “confira sua resposta” e “compare sua resposta”, bem como exemplos resolvidos. Esses elementos funcionam como estratégias de apoio pedagógico, permitindo que o estudante confronte seus raciocínios, identifique possíveis equívocos e refine suas estratégias de resolução, sem comprometer o caráter investigativo das atividades.

Por fim, cada eixo da sequência didática é concluído com um desafio final, concebido como uma atividade integradora que convida o estudante a mobilizar, de forma articulada, os conhecimentos desenvolvidos ao longo das etapas anteriores. Esses desafios favorecem a síntese dos conteúdos trabalhados, a aplicação dos conceitos em situações mais complexas e a tomada de decisões fundamentadas, alinhando-se aos níveis cognitivos mais elevados da Taxonomia de Bloom, conforme a revisão proposta por Anderson e Krathwohl (2001), e às orientações da Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018), no que se refere à formação de sujeitos críticos, autônomos e financeiramente conscientes.

6 CONCLUSÃO

A motivação deste estudo surgiu da prática docente, ao identificar, entre os estudantes, dificuldades na compreensão do conceito de proporção em diversos conteúdos que exigem o uso da regra de três, muitas vezes aplicada de forma mecânica e sem compreensão conceitual. A observação cotidiana em sala de aula, marcada por dúvidas persistentes e, por vezes, pelo desinteresse dos alunos diante de procedimentos percebidos como abstratos, evidenciou a necessidade de compreender e articular melhor esse conceito na Educação Básica. Presente desde as primeiras construções matemáticas, até aplicações contemporâneas no cotidiano, a proporcionalidade revela-se como um conceito central no desenvolvimento do pensamento matemático.

Este trabalho surgiu de investigações sobre o conceito de proporcionalidade, articulando sua construção histórica, seus fundamentos matemáticos e suas aplicações no contexto da Educação Básica. Foram desenvolvidas e analisadas atividades didáticas que buscaram relacionar esse conceito aos conteúdos de funções e à Educação Financeira, procurando favorecer a compreensão, a interpretação e a correlação de relações proporcionais em diferentes contextos, especialmente aqueles próximos à realidade dos estudantes.

Inicialmente, no Capítulo 2, a partir da história do conceito de razão e proporção, destacou-se sua presença em civilizações antigas e em obras clássicas da Matemática, como *Os Elementos* de Euclides (2006). Essa perspectiva permitiu compreender a proporcionalidade não apenas como conteúdo formal, mas como um conhecimento construído ao longo do tempo, associado à resolução de problemas concretos e à organização do pensamento matemático. A discussão sobre médias, proporções e a razão áurea reforçou o caráter interdisciplinar e cultural desse conceito, ampliando suas possibilidades pedagógicas.

No Capítulo 3, foram desenvolvidos os conceitos de proporção direta e inversa, articulados ao estudo de funções, destacando a análise de relações entre grandezas e a transição de representações aritméticas para algébricas e gráficas. Observou-se que a proporcionalidade constitui uma base importante para o pensamento funcional e para o raciocínio lógico dos estudantes. À luz da BNCC e das matrizes de referência do SAEB, verificou-se que esse conceito permeia habilidades relacionadas à variação de grandezas, interpretação de gráficos e resolução de problemas, estabelecendo fundamentos essenciais para a compreensão de situações do cotidiano, especialmente aquelas envolvendo cálculos financeiros.

Posteriormente, essa perspectiva foi articulada com a Educação Financeira, campo que, na prática docente, mostrou-se particularmente potente para despertar o interesse dos estudantes. Situações relacionadas a consumo, planejamento orçamentário, taxas, juros e financiamentos aproximaram os conceitos matemáticos da realidade vivida pelos alunos, favorecendo maior engajamento e participação. A articulação entre Matemática e Educação Financeira contribui, assim, para a formação de estudantes mais críticos, capazes de tomar decisões conscientes e fundamentadas, em consonância com as competências gerais propostas pela BNCC.

Como culminância do trabalho, foram propostas atividades didáticas que integram proporcionalidade, funções e matemática financeira, com destaque para situações de variação direta e inversa alinhadas às habilidades da BNCC. Como recurso digital, foi desenvolvida uma plataforma em Jupyter Notebook, integrada a gráficos interativos da calculadora Desmos, organizada segundo a Taxonomia de Bloom, permitindo ao estudante analisar, aplicar e avaliar conceitos de proporcionalidade em contextos reais. O recurso desenvolvido foi pensado como instrumento de apoio pedagógico, com potencial para favorecer a aprendiz associada a problemas significativos e contextualizados.

Este trabalho reafirma a proporcionalidade como conceito central no ensino de Matemática, relevante tanto historicamente quanto em suas aplicações práticas. Ao articular fundamentos matemáticos, funções e contextos de Educação Financeira é evidente que compreender relações proporcionais significa compreender como grandezas se organizam, variam e se relacionam no mundo real. Mais do que um procedimento algorítmico, a proporcionalidade serve como instrumento para interpretar situações concretas e promover autonomia intelectual.

Assim, ao propor atividades integradas e contextualizadas, o trabalho buscou responder a inquietações surgidas da própria prática docente, demonstrando que é possível ressignificar conteúdos tradicionalmente associados à memorização de regras, conectando conceitos matemáticos abstratos à realidade dos alunos e tornando a aprendizagem mais significativa. Essa trajetória reforça a compreensão de que ensinar Matemática é também enfrentar desafios cotidianos, reinventar estratégias e buscar, continuamente, caminhos que aproximem o conhecimento escolar da vida dos estudantes.

REFERÊNCIAS

ANDERSON, L. W.; KRATHWOHL, D. R. **A taxonomy for learning, teaching, and assessing: A revision of Bloom's taxonomy of educational objectives**. New York: Longman, 2001. 18, 19, 109

ASTH, R. C. **O que é e como calcular a Proporção Áurea**. Toda Matéria, 2019. Disponível em: <https://www.todamateria.com.br/o-que-e-e-como-calcular-a-proporcao-aurea/>. Acesso em: 2024-12-02. 51, 52, 53

BASSINI, D. P. de S. M. F. A. M. **Proporção Áurea**. São Paulo: Cientec USP, 2020. Disponível em: <https://www.parquecientec.usp.br/passeio-virtual/matematica/proporcao-aurea>. Acesso em: 08 jan. 2026. 50, 52

BLOOM, B. S. et al. **Taxonomy of Educational Objectives: The Classification of Educational Goals. Handbook I: Cognitive Domain**. New York: Longmans, Green, 1956. 18, 19, 106

BONJORNO, J. R.; JUNIOR, J. R. G.; SOUSA, P. R. C. de. **Prisma Matemática no Ensino Médio: Funções e Progressões**. São Paulo, Sp: FTD, 2020. 118-121 p. 49, 50, 61, 63

BORNATTO, G. **Matemática Financeira**. 2024. Disponível em: <https://mat.ufpb.br/sergio/provas/magp/Matematica_financeira_Gilmar_Bornatto.pdf>. Acesso em: Acesso em: 08 jan. 2026. 80

BRASIL. **Lei nº 7.492, de 16 de junho de 1986**. Brasília: Presidência da República, 1986. Define os crimes contra o Sistema Financeiro Nacional. Disponível em: <https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l7492.htm>. Acesso em: 18 jan. 2025. 75

BRASIL. **Lei nº 8.692, de 28 de julho de 1993**: Dispõe sobre o comprometimento da renda nos financiamentos habitacionais. Brasília: Presidência da República, 1993. Disponível em: <https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l8692.htm>. Acesso em: 05 jan. 2026. 92

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental**: Pcn's. Brasília, 1999. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/introducao.pdf>. Acesso em: 02 dez. 2024. 15

BRASIL. **Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação Infantil**: Dcnei's. Brasília, 2010. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/dmdocuments/diretrizescurriculares_2012.pdf>. Acesso em: 02 nov. 2024. 12

BRASIL. **Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica**: Dcn's. Brasília, 2013. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=13448-diretrizes-curiculares-nacionais-2013-pdf&Itemid=30192>. Acesso em: 10 nov. 2024. 15

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018. Disponível em: <https://www.gov.br/mec/pt-br/escola-em-tempo-integral/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal.pdf>. Acesso em: 10 out. 2024. 12, 13, 15, 55, 68, 69, 71, 72, 106, 109

BRASIL. **Sistema de Avaliação da Educação Básica**. Brasília, 2018. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/saeb/matrizes-e-escalas>. Acesso em: 12 mai. 2025. 68, 70

CARRARO, J. **Razão áurea como facilitador no processo de ensino-aprendizagem**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Pato Branco, PR, 2021. 15

D'AMBROSIO, U. **Etnomatemática: elo entre as tradições e a modernidade**. Belo Horizonte: Autêntica, 2001. 20-21 p. 71

DESMOS. **Desmos Graphing Calculator – aplicação web e aplicativo móvel para gráficos interativos**. 2025. Disponível em: <https://www.desmos.com>. Acesso em: 20 dez. 2025. 17

DIAS, N. C. **A matemática presente nas profissões: uma proposta de trabalho para o Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória Espírito Santo, 2024. 13, 14

EDUCATION, C. S. **Desmos Review for Teachers – avaliação da plataforma digital de matemática**. 2025. Disponível em: <https://www.commonsense.org/education/reviews/desmos>. Acesso em: 15 jan. 2026. 17

EUCLIDES. **Os Elementos**. São Paulo: Editora UNESP, 2006. Tradução para o português. 19, 30, 37, 110

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. 5ed. Campinas, SP: Unicamp, 2011. 18, 19, 24, 26, 27, 29, 30, 33, 34

FOSSA, J. A. Razão e proporção: a herança antiga. **Anais do IX Seminário Nacional de História da Matemática Edição Especial da Revista Brasileira de História da Matemática**, v. 11, n. 23, p. 1–6, 2011. Disponível em: <https://www.rbhm.org.br/index.php/RBHM/article/view/109/93>. Acesso em: 21 fev. 2025. 19, 25

FRANCO, P. **Por que você deve guardar o número 1,618?** Revista Haus, 2024. Disponível em: <https://revistahaus.com.br/vozes/design-filosofico/por-que-voce-deve-guardar-o-numero-1618/>. Acesso em: 2025-03-24. 52

FREITAS, B. G. d.; MOREIRA, V. G. a. Uma abordagem sobre sistemas de amortização à luz da educação financeira. **Educação em Foco**, v. 25, n. 46, p. 351–370, 2022. 91

FURNIEL, A. C. da M.; MENDONÇA, A. P. B.; SILVA, R. M. da. **Recursos Educacionais Abertos: conceitos e princípios**. Rio de Janeiro, 2020. Disponível em: <https://campusvirtual.fiocruz.br/portal/guiarea/assets/files/Guia1.pdf>. Acesso em: 04 dez. 2024. 17

GENEROSO, L. H. C. **Modelagem Matemática e Metodologia Ativa: práticas pedagógicas alternativas ao ensino tradicional**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Mato Grosso, 2019. 15, 17

GERHARDT, T. E.; SILVEIRA, D. T. **Métodos de pesquisa**. Porto Alegre: UFRGS, 2009. 18

HARIKI, S. Média harmônica. **Revista Professor de Matemática**, v. 32, n. 3, 2009. Disponível em: <https://rpm.org.br/cdrpm/32/3.htm>. Acesso em: 24 jun. 2025. 44, 45

INEP/MEC. **Matriz de referência ENEM**. Brasília, 2024. Disponível em: <https://download.inep.gov.br/download/enem/matriz_referencia.pdf>. Acesso em: 02 nov. 2024. 14

JR., M. A. K. **Educação Financeira: uma proposta de ensino de Matemática Financeira no Ensino Médio**. 45-47 p. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2011. 71, 74

JUPYTER, P. **Jupyter Notebook – ambiente interativo para desenvolvimento de códigos e análise de dados**. 2025. Disponível em: <https://jupyter.org>. Acesso em: 20 dez. 2025. 16

LIMA, A.; MARANHAO, J.; LIONN, R. **A regra de ouro na arquitetura**. Projeto Batente, 2017. Disponível em: <https://projetobatente.com.br/regra-aurea-na-arquitetura/>. Acesso em: 2025-03-21. 49

MARINELL, C. A. H. M. **Uma proposta de sequência didática para o ensino de sólidos geometricos para estudantes do 6º ano**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Toledo, Paraná, 2024. 17

MATEMáTICA, S. B. de. **PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional: Dissertações do PROFMAT**. Rio de Janeiro, RJ: SBM, 2024. Disponível em: <https://profmat-sbm.org.br/dissertacoes/>. Acesso em: 06 dez. 2024. 14, 15

MICHAELIS. **Dicionário da Língua Portuguesa.** Dicionário Uol Online. São Paulo: Editora Melhoramentos, 2015. Disponível em: <https://michaelis.uol.com.br/busca?id=ne1xw>. Acesso em: 20 nov. 2024. 13, 55, 73

MORETTI, I. **Pesquisa Histórica: o que é, como fazer e exemplos**. 2022. Disponível em: <https://regrasparatcc.com.br/pesquisa-historica/>. Acesso em: 02 dez. 2024. 19

OLIVEIRA, A. **Análise do conhecimento sobre proporcionalidade com alunos ingressantes no ensino médio**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual do Maranhão, São Luís, Maranhão, 2012. 12

OLIVEIRA, C. A. R. d. O.; FALCAO, R. Composição musical e fibonacci: a utilização da música como forma lúdica de aprendizagem. **Sociedade Brasileira de Matemática - SBM**, 2019. Disponível em: <https://ufsj.edu.br/portal2-repositorio/File/profmat_cap/CLARICE_AUGUSTA_REZENDE_DE_OLIVEIRA.pdf>. Acesso em: 21 jul. 2025. 53

OLIVEIRA, K. S. D. **Investigando problemas arit,éticos, algébricos e geométricos com o GeoGebra e o GNU OCTAVE**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, Paraná, 2023. 47

ORTIZ, S. A matemática da babilônia. **ResearchGate**, Santa Catarina, 2020. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/351661897_A_Matematica_da_Babilonia>. Acesso em: 21 jul. 2025. 24

PAQUES, O.; CORNÉLIO, T. **Razão e Proporção - A História de Mussaraf**. Campinas, 2011. Disponível em: <https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1115>. Acesso em: 10 out. 2024. 19, 46

REIS, T. S. d. Price ou sac, qual é melhor? **REMAT: Revista Eletrônica da Matemática**, v. 11, p. e306, 2025. 91

SANTOS, V. S.; OLIVEIRA, S. D. de; LINS, A. F. Uma viagem pela hitória da matemática: Introdução ao conceito de razão e proporção. **VII CONEDU - Conedu em Casa.**, Realize Editora, n. 3, 2022. Disponível em: <https://editorarealize.com.br/artigo/visualizar/80756>. 28

SCHALLENBERGER, A. **Um estudo da aplicação prática das grandezas de área e volume e suas relações de proporção, aplicadas ao cotidiano do aluno**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Pato Branco, PR, 2017. 14

SILVA, D. P. C. **Alguns marcos históricos relativos a um conceito matemático elementar : um estudo sobre proporções**. Dissertação (Mestrado) — Universidade do Minho, Escola de Ciências, 2012. 28, 37, 46

SILVA, F. H. Polígonos elegantes. **Revista do Professor de Matemática**, n. 102, p. 22–25, 2020. 37

SILVA, J. B. R. da; JúNIOR, J. R. C. Contribuições da história da matemática para o estudo de matemáticos: o caso da proporcionalidade. **Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática, SBEM**, São Paulo, 2016. Disponível em: <https://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/5168_2709_ID.pdf>. Acesso em: 26 jun. 2025. 22, 23

SIMON, F. O. Aspectos introdutórios da historia da matematica na babilonia. **Univesp**, 2018. Disponível em: <https://integra.univesp.br/courses/1909/pages/texto-base-aspectos-introdutorios-da-historia-da-matematica-na-babilonia-%7C-fernanda-oliveira-simon>. Acesso em: 27 jul. 2025. 24

SOARES, M. A. da S.; NEHRIN, C. M. Proporcionalidade como função: Uma análise de livros didáticos do ensino médio. **Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática, SBEM**, Curitiba, PR, 2013. 17

THESLEFF, H. **Nicomachus of Gerasa**. Encyclopaedia Britannica, 2025. Disponível em: <https://www.britannica.com/biography/Nicomachus-of-Gerasa>. Acesso em: Accessed: 2025-05-29. 40

VENTUS, L. **Domine a Proporção Áurea: arte, natureza e design**. Goiânia, 2024. Disponível em: <https://mangarosa.io/design/aplicando-proporcao-aurea/>. Acesso em: 10 nov. 2024. 15

WARREN, E.; TYAGI, A. W. **All Your Worth: The Ultimate Lifetime Money Plan**. New York: Free Press, 2005. 86

WESTWING. **Proporção Áurea: o que é, origem histórica e muito mais**. São Paulo: Westwing, 2024. Disponível em: <https://www.westwing.com.br/guiar/proporcao-aurea/>. Acesso em: 18 jan. 2025. 51