

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ**

**RAFAEL FLORES ISOPPO**

**EQUAÇÕES DIFERENCIAIS, UMA COMPARAÇÃO ENTRE REGIÕES DE  
ESTABILIDADE OBTIDAS PELO MÉTODO DOS MULTIPLICADORES  
INVARIANTES E PELO TEOREMA DE KRASOVSKII**

**PATO BRANCO**

**2025**

**RAFAEL FLORES ISOPPO**

**EQUAÇÕES DIFERENCIAIS, UMA COMPARAÇÃO ENTRE REGIÕES DE  
ESTABILIDADE OBTIDAS PELO MÉTODO DOS MULTIPLICADORES  
INVARIANTES E PELO TEOREMA DE KRASOVSKII**

**Differential Equations, a Comparison Between Stability Regions Obtained  
by the Method of Invariant Multipliers and by Krasovskii's Theorem**

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação  
apresentado como requisito para obtenção do  
título de Licenciado em Matemática do Curso  
de Licenciatura em Matemática da Universidade  
Tecnológica Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Fredy Maglorio Sobrado  
Suárez

**PATO BRANCO**

**2025**



[4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

Esta licença permite compartilhamento, remixe, adaptação e criação a partir do trabalho, mesmo para fins comerciais, desde que sejam atribuídos créditos ao(s) autor(es). Conteúdos elaborados por terceiros, citados e referenciados nesta obra não são cobertos pela licença.

**RAFAEL FLORES ISOPPO**

**EQUAÇÕES DIFERENCIAIS, UMA COMPARAÇÃO ENTRE REGIÕES DE  
ESTABILIDADE OBTIDAS PELO MÉTODO DOS MULTIPLICADORES  
INVARIANTES E PELO TEOREMA DE KRASOVSKII**

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação  
apresentado como requisito para obtenção do  
título de Licenciado em Matemática do Curso  
de Licenciatura em Matemática da Universidade  
Tecnológica Federal do Paraná.

Data de aprovação: 02/Dezembro/2025

---

Fredy Maglorio Sobrado Suárez  
Doutorado  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Pato Branco

---

João Biesdorf  
Doutorado  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Pato Branco

---

Waldir Silva Soares Junior  
Doutorado  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Pato Branco

**PATO BRANCO**  
**2025**

Dedico este trabalho a minha família que sempre me apoiou nos estudos, sem eles nada seria possível.

## **AGRADECIMENTOS**

Gostaria de iniciar agradecendo Deus, em seguida minha família, em especial minha mãe e minha vó, por todos os incentivos e apoio em tudo. Eles foram essenciais para eu chegar até aqui e conseguir realizar este trabalho. Agradeço também meu orientador Fredy, pela paciência e disposição em me orientar. Além disso a professora Edineia que sempre me motivou e esteve disponível para ajudar nos momentos mais complicados.

Não posso deixar de agradecer também a todos os meus amigos que me acompanharam mesmo que de longe durante essa jornada, em especial Everson, Elian, João Guilherme, Leonardo e Maria, que sempre me apoiaram e ouviram minhas reclamações quanto a este trabalho.

Por fim, agradeço a todos os professores com quem tive aula, pois cada um de vocês faz parte deste trabalho.

## RESUMO

A teoria da estabilidade de Lyapunov é uma ferramenta fundamental na análise qualitativa de sistemas dinâmicos não lineares, permitindo determinar o comportamento de soluções em torno de pontos de equilíbrio sem a necessidade de resolução explícita das equações. Este trabalho tem como objetivo estudar e comparar dois métodos distintos para a construção de Funcionais de Lyapunov e análise de estabilidade: o Método dos Multiplicadores Invariantes e o Teorema de Krasovskii. A eficácia de cada abordagem é avaliada através da aplicação a três sistemas clássicos de relevância física e biológica: o Sistema Massa-Mola Amortecida com não linearidades, o Modelo de Predação de Lotka-Volterra e a Equação do Pêndulo Amortecido. Para os sistemas mecânicos, o Método dos Multiplicadores Invariantes demonstrou ser superior, permitindo a construção intuitiva de funcionais de energia que provam a estabilidade assintótica e, no caso do pêndulo invertido, a instabilidade. Em contrapartida, o Teorema de Krasovskii mostrou-se inconclusivo para estes sistemas devido à estrutura das suas matrizes Jacobianas, que resultam em menores principais nulos. No sistema conservativo de Lotka-Volterra, ambos os métodos falharam em demonstrar estabilidade assintótica, corroborando a natureza de centro do ponto de equilíbrio. Desta maneira, para este trabalho conclui-se que o Método dos Multiplicadores é mais robusto para sistemas físicos, enquanto o critério de Krasovskii apresenta restrições significativas que dificulta sua aplicabilidade. Embora seja necessário o teste em mais sistemas para uma conclusão mais geral.

**Palavras-chave:** Lyapunov; Sistemas não-lineares; Teorema de Krasovskii; Equações diferenciais ordinárias; Estabilidade.

## ABSTRACT

Lyapunov stability theory is a fundamental tool in the qualitative analysis of nonlinear dynamical systems, allowing for the determination of solution behavior near equilibrium points without explicitly solving the equations. This work aims to study and compare two distinct methods for constructing Lyapunov functionals and analyzing stability: the Method of Invariant Multipliers and Krasovskii's Theorem. The effectiveness of each approach is evaluated by applying them to three classic systems of physical and biological relevance: the Nonlinear Damped Mass-Spring System, the Lotka-Volterra Predation Model, and the Damped Pendulum Equation. For the mechanical systems, the Method of Invariant Multipliers proved to be superior, enabling the intuitive construction of energy functionals that demonstrate asymptotic stability and, in the case of the inverted pendulum, instability. Conversely, Krasovskii's Theorem proved inconclusive for these systems due to the structure of their Jacobian matrices, which result in null principal minors. In the conservative Lotka-Volterra system, both methods failed to demonstrate asymptotic stability, corroborating the center nature of the equilibrium point. In this academic work, it is concluded that the Method of Multipliers is more robust for physical systems, while Krasovskii's criterion presents significant restrictions that limits their applicability. Although the studies of more systems are necessary for a better conclusion.

**Keywords:** Lyapunov; Nonlinear systems; Krasovskii Theorem; Ordinary differential equations; Estability.

## SUMÁRIO

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>INTRODUÇÃO</b>                              | <b>7</b>  |
| 1.1      | Objetivo Geral                                 | 8         |
| 1.2      | Objetivos Específicos                          | 8         |
| <b>2</b> | <b>PRÉ-REQUISITOS</b>                          | <b>9</b>  |
| 2.1      | Revisão Álgebra Linear                         | 9         |
| 2.2      | Revisão Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) | 12        |
| <b>3</b> | <b>METODOLOGIA</b>                             | <b>18</b> |
| <b>4</b> | <b>DESENVOLVIMENTO</b>                         | <b>19</b> |
| 4.1      | O Sistema Massa Mola Amortecida                | 23        |
| 4.2      | O modelo Presa-Predador (Lotko Volterra)       | 25        |
| 4.3      | A Equação do Pêndulo Amortecido                | 33        |
| <b>5</b> | <b>CONCLUSÃO</b>                               | <b>39</b> |
|          | <b>REFERÊNCIAS</b>                             | <b>40</b> |

## 1 INTRODUÇÃO

Na procura de solucionar problemas do dia a dia, os cientistas procuram criar modelos matemáticos a partir de dados e/ou experimentos gerados em laboratórios. Estes modelos são feitos através das leis da física e com conceitos, e teorias matemáticas, os modelos podem ser discretos e/ou contínuos, nesta pesquisa estudaremos alguns modelos contínuos. Tais modelos contínuos podem ser sistemas algébricos e/ou equações diferenciais. Na nossa proposta estaremos mais concentrados nos modelos contínuos governados pelas Equações Diferenciais Ordinárias.

A teoria das Equações Diferenciais Ordinárias (EDO's) é de grande importância para solucionar e modelar problemas reais das ciências aplicadas, como de engenharia, das ciências físicas, sociais entre outras. Podemos citar problemas de decaimento radioativo, dinâmica de populações, propagação de doenças, a competição de espécies como, por exemplo, no sistema predador versus presa, o sistema massa mola amortecida, entre outros.

O estudo das equações diferenciais começou com o desenvolvimento do Cálculo por Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz no final do século XVII, através de relatos históricos que repassaram as origens e desenvolvimento dos principais conceitos do Cálculo. Dada a grande utilidade da teoria das equações diferenciais ordinárias ela foi objeto de muito estudo dos matemáticos gerando um grande avanço nas teorias para resolver ou compreender o comportamento das soluções (MATOS, 2016).

No que diz respeito às EDO's elas são classificadas como lineares ou não-lineares, no caso das lineares existe uma teoria bem estabelecida e capaz de obter a solução explícita dos problemas. Quanto às não-lineares, ou seja, quando a equação envolve por exemplo: funções trigonométricas, polinômiais de ordem maior ou igual a dois, logaritmos e exponenciais, até o presente momento não existem teorias matemáticas suficientes para encontrar a solução explícita das EDO, sendo que em geral, para abordar a solução de tais equações são utilizados métodos numéricos ou geométricos.

Além das EDO's, nos modelos contínuos temos as Equações Diferenciais Parciais (EDP's) inicialmente estudadas por Jean Le Rond D'Alembert (1717 - 1783) o estudo de tais equações nasceu na física matemática. Seu trabalho sobre esse assunto apareceu, pela primeira vez, em 1747 com o trabalho "Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration"(Pesquisas sobre a curva que uma corda tensionada forma quando posta em vibração). Quanto às EDP's temos algumas que são consideradas clássicas a saber a equação de Laplace, a equação do calor, eletromagnetismo e equação das ondas.

Como determinar as soluções explícitas tanto das EDO's não lineares quanto dos sistemas de EDO's na maioria dos casos não é possível, então surge as teorias de estabilidade, que fornecem o comportamento das possíveis soluções de um sistema, sem resolver-lô de maneira analítica.

Dentre os métodos que possibilitam o estudo da estabilidade da solução de um sistema de EDO podemos destacar a teoria desenvolvida por Aleksandr Mikhailovich Lyapunov (1857-1918), que está centralizada em determinar um funcional popularmente conhecido como funcional de Liapunov. Este funcional será determinado usando o teorema de Kravovskii e o método de multiplicadores invariantes, método esse que vem do estudo das EDP's.

A justificativa para este trabalho está na relevância das equações diferenciais ordinárias. Estudar o comportamento das soluções de problemas que permeiam diversas áreas do conhecimento. Apesar da ampla aplicabilidade das EDOs, a complexidade associada às soluções de sistemas não lineares, justifica o contínuo estudo de métodos que facilitem sua análise.

Neste trabalho, nossa proposta é o método dos multiplicadores de Lagrange no contexto de multiplicadores invariantes, amplamente utilizado em otimização. Ele oferece uma abordagem alternativa para o estudo de estabilidade de sistemas equações diferenciais. Desta forma, fazemos a comparação com o teorema de Krasovskii, outro método que gera um funcional de Lyapunov, que já é consolidado na análise de estabilidade, assim buscando contribuir para uma melhor compreensão das ferramentas disponíveis e sua aplicação em contextos matemáticos variados.

## **1.1 Objetivo Geral**

Estudar estabilidade de sistemas de EDO's autônomos, utilizando o método dos multiplicadores e o teorema de Krasovskii.

## **1.2 Objetivos Específicos**

1. Contextualizar o desenvolvimento histórico das EDOs, destacando suas aplicações práticas e relevância.
2. Apresentar os fundamentos teóricos do método dos multiplicadores invariantes, do teorema de Lyapunov e o teorema de Kravovskii.
3. Aplicar o método dos multiplicadores invariantes e o teorema de Krasovskii a sistemas autônomos de EDOs, explorando as regiões de estabilidade obtida em torno nos pontos críticos.
4. Comparar as regiões de estabilidade fornecidas pelo método dos multiplicadores e pelo teorema de Kravovskii, através funcionais de Lyapunov, analisando vantagens e limitações de cada abordagem.

## 2 PRÉ-REQUISITOS

O presente capítulo possui como objetivo apresentar de maneira breve resultados sobre os conteúdos de Álgebra Linear, Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) e Equações Diferenciais Parciais (EDP) que serão utilizados no trabalho. Espera-se que o leitor esteja familiarizado com tais conteúdos. Todavia pode-se consultar os livros

Este capítulo será dividido em duas seções, sendo a primeira referente aos resultados de Álgebra linear, já a segunda parte corresponde aos resultados relacionados às EDO.

Nenhum resultado apresentado será demonstrado, porém as demonstrações podem ser encontradas nas obras que foram referenciadas.

### 2.1 Revisão Álgebra Linear

Esta seção será dedicada a apresentar alguns resultados de álgebra linear, utilizando como referência as obras escritas por Coelho e Lourenço (2001) e Figueiredo (1982).

Um fato importante é que todos os resultados e o exposto no trabalho será considerando espaços vetoriais sobre um corpo  $\mathbb{K}$  de **dimensão finita**. A partir disso, iniciamos com o conceito de Espaços vetoriais.

#### Definição 1. Espaço Vetorial

Um conjunto não vazio  $V$  é um espaço vetorial sobre (um corpo)  $\mathbb{K}$  se em seus elementos, denominados vetores, estiverem definidas as seguintes duas operações:

(A) A cada par  $u, v$  de vetores de  $V$  corresponde um vetor  $u + v \in V$  chamado de soma de  $u$  e  $v$ , de modo que:

$$(A1) \quad u + v = v + u, \forall u, v \in V \text{ (propriedade comutativa).}$$

$$(A2) \quad (u + v) + w = u + (v + w), \forall u, v, w \in V \text{ (propriedade associativa).}$$

(A3) Existe em  $V$  um vetor, denominado vetor nulo e denotado por  $0$ , tal que  $0 + v = v$ ,  $\forall v \in V$  (elemento neutro da adição).

(A4) A cada vetor  $v \in V$  existe um vetor em  $V$ , denotado por  $-v$ , tal que  $v + (-v) = 0$  (elemento inverso da adição).

(M) A cada par  $\alpha \in \mathbb{K}$  e  $v \in V$ , corresponde um vetor  $\alpha \cdot v \in V$ , denominado produto por escalar de  $\alpha$  por  $v$  de modo que:

(M1)  $(\alpha\beta) \cdot v = \alpha(\beta \cdot v), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \text{ e } \forall v \in V$  (*propriedade associativa*).

(M2)  $1 \cdot v = v, \forall v \in V$  (*onde 1 é o elemento identidade de  $\mathbb{K}$* ).

Além disso, vamos impor que as operações dadas em (A) e (M) se distribuem, isto é, que valham as seguintes propriedades:

(D1)  $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v, \forall \alpha \in \mathbb{K} \text{ e } \forall u, v \in V$  (*distributiva da multiplicação por escalar em relação a adição de vetores*).

(D2)  $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \text{ e } \forall v \in V$  (*distributiva da multiplicação por escalares em relação a soma de escalares*).

### Definição 2. Transformação Linear

Sejam  $U$  e  $V$  espaços vetoriais sobre um corpo  $\mathbb{K}$ . Uma função  $T : U \rightarrow V$  é uma **transformação linear** se:

- (1)  $T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2)$ , para todos  $u_1, u_2 \in U$ , e
- (2)  $T(\lambda u) = \lambda T(u)$ , para todo  $\lambda \in \mathbb{K}$  e  $u \in U$ .

No que diz respeito às transformações lineares, estamos interessados em estudá-las, através da sua matriz associada. Assim fixadas bases para os espaços vetoriais  $V$  e  $W$ , toda transformação linear  $T : U \rightarrow V$  estará associada a uma única matriz. Daí, considerando  $\beta = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  uma base ordenada de  $U$  e  $\beta' = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$  uma base ordenada de  $V$ . Temos que  $T(u_1), T(u_2), \dots, T(u_n)$  são elementos de  $V$  logo podem ser escritos como combinação linear dos elementos de  $\beta'$ . O que pode ser representado a partir do sistema:

$$\begin{cases} T(u_1) = a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \dots + a_{m1}v_m \\ T(u_2) = a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + \dots + a_{m2}v_m \\ T(u_3) = a_{13}v_1 + a_{23}v_2 + \dots + a_{m3}v_m \\ \vdots \\ T(u_n) = a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + \dots + a_{mn}v_m \end{cases} \quad (1)$$

A partir deste sistema podemos definir a matriz associada a transformação.

### Definição 3. Matriz Associada a Transformação

A transposta da matriz dos coeficientes do sistema acima, denotada por  $[T]_{\beta}^{\beta'}$ , é chamada de matriz da transformação em relação às bases  $\beta$  e  $\beta'$ . Ou seja,

$$[T]_{\beta}^{\beta'} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (2)$$

Daí segue um fato importante que será utilizado para resolver sistemas de EDO. Quando temos uma transformação que leva vetores de um espaço vetorial  $V$  nele mesmo, chamamos tal transformação de **operador linear**. Dessa maneira, um vetor  $v \in V$  pode ser transformado em um múltiplo dele mesmo ou nele mesmo. Segue que  $T(v) = \lambda v$ , onde  $v \in V$  e  $\lambda \in \mathbb{K}$ . A seguir veremos que  $\lambda$  será chamado de autovalor e  $v$  será chamado autovetor.

#### Definição 4. Autovalor e Autovetor

Seja  $T : U \rightarrow U$  um operador linear, onde  $U$  é um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial. Se existirem  $u \in U$ ,  $u \neq 0$  e  $\lambda \in \mathbb{K}$  tais que  $T(u) = \lambda u$ , diremos que  $\lambda$  é **autovalor** de  $T$  e  $u$  um **autovetor** de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda$ . Denotaremos por  $\text{Aut}_T(\lambda)$  o subespaço de  $U$  gerado por todos os autovetores associados a  $\lambda$ .

**Exemplo 1.** Considere a transformação linear  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , tal que  $T(x_1, x_2, x_3) = (3x_1, 3x_2, 3x_3)$ . Obtenha os autovalores e autovetores.

Observe que a transformação  $T$  é de  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  logo se trata de fato de um operador linear. É fácil ver que de fato,  $T(x_1, x_2, x_3) = (3x_1, 3x_2, 3x_3) = 3(x_1, x_2, x_3)$  portanto  $3$  é o autovalor de  $T$  e para todo  $v \in V$ , com  $v \neq 0$  será um autovetor associado ao autovalor  $\lambda = 3$ .

Escrevendo autovalores e autovetores através da matriz associada a transformação linear:

Podemos escrever o conceito de autovalor e autovetor utilizando a matriz associada ao sistema linear. De fato, seja  $A$  a matriz associada a transformação linear  $T : V \rightarrow V$ , considere a matriz  $X$  a qual representa um vetor de  $V$  e  $\lambda$  um escalar que pertence ao corpo tal que  $AX = \lambda X$ . Observe que

$$AX - \lambda X = 0 \quad (3)$$

daí segue

$$(A - \lambda I)X = 0 \quad (4)$$

Esta expressão representa um sistema linear homogêneo logo recorrendo a definição de autovalor e autovetor, desejamos que  $\det(A - \lambda I) = 0$  pois do contrário teríamos um sistema possível e determinado cuja única possibilidade seria  $X = 0$ .

Calculando  $\det(A - \lambda I)$ , obteremos um polinômio  $p(\lambda)$  que será chamado de **polinômio característico**, tomando  $p(\lambda) = 0$ , fazemos com que as raízes do polinômio característico correspondam aos autovalores de  $T$ .

Para obter os autovetores associados a  $T$ , substituímos os valores de  $\lambda$  e resolvemos o sistema homogêneo  $(A - \lambda I)X = 0$ . Uma observação é que dependendo de qual corpo os escalares pertencem pode não ser possível não será possível obter as raízes de  $p(\lambda)$ , pois nem sempre as raízes não pertencem ao corpo.

### Definição 5. Produto interno

Seja  $V$  um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial, tal que  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Um produto interno sobre  $V$  é uma função  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$  que satisfaz as seguintes propriedades:

$$(P1) \langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle, \forall u, v, w \in V.$$

$$(P2) \langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle, \forall u, v \in V \text{ e } \forall \lambda \in \mathbb{K}.$$

$$(P3) \langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}, \forall u, v \in V.$$

$$(P4) \langle u, u \rangle > 0 \text{ se } u \neq 0.$$

**Observação:** No contexto das EDP's, um conceito que utiliza do produto interno é o espaço  $L^2$  que é conhecido como espaço das funções de quadrado integrável. Cujo produto interno é definido por:

$$\langle f, g \rangle = \int_D \overline{f(x)}g(x) dx \quad (5)$$

### Definição 6. Matriz positiva definida

Uma matriz  $A$  é dita **positiva definida** (p.d) se a forma quadrática associada a  $A$ ,  $Q_A(x) > 0 \forall x \neq 0$ . Os seguintes testes são condições necessárias e suficientes equivalentes para que uma matriz  $A = A^t$  seja positiva definida:

$$(1) x^t A x > 0, \forall x \neq 0$$

(2) Todos os autovalores de  $A$  são positivos.

(3) Todas as matrizes líderes possuem determinantes positivos.

(4) Todos os pivôs são positivos.

(5)  $\exists R$  com colunas linearmente independentes (l.i.) tal que  $A = RR^t$ .

**Observação:** Se uma matriz  $A$  é definida positiva então  $(-A)$  é uma matriz **definida negativa**.

## 2.2 Revisão Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)

A presente seção possui como objetivo enunciar alguns resultados importantes sobre equações diferenciais ordinárias, nenhum resultado será demonstrado. Porém tais demonstrações podem ser consultadas nos livros textos de Boyce e DiPrima (1997), Figueiredo (1982), (Lório Jr., 2001) e Zill (2016).

No estudo de cálculo diferencial, temos em geral uma função  $y = f(x)$  e buscamos encontrar sua derivada  $\frac{dy}{dx} = f'(x)$  ou seja sua taxa de variação. Durante um curso de cálculo diferencial somos apresentados a como calcular a derivada de uma função através de regras.

**Exemplo 2.** Considere  $y = \cos(x^2)$ , obtenha  $\frac{dy}{dx}$ .

Usando a regra da cadeia e a regra apropriada para calcular a derivada de  $\cos(x)$ , temos  $\frac{dy}{dx} = -2x \sin(x^2)$ .

Quanto ao objeto de estudo das EDO, temos a derivada da função e estamos interessados em obter a função que se relaciona com a derivada da função através de uma equação. Ou seja considere a seguinte equação  $\frac{dy}{dx} = 3x + y$ , o que espera-se encontrar é uma função  $y = f(x)$  que verifique a equação, caso  $y = f(x)$  verifique a equação dizemos então que  $y$  é uma solução da equação diferencial.

**Observação:** No estudo das equações diferenciais existem várias notações para representar a mesma equação, considere o seguinte exemplo  $y' = 2xy$  e  $\frac{dy}{dx} = 2xy$  representam a mesma equação diferencial, no decorrer do trabalho adotaremos a primeira notação apresentada como padrão para as definições e exemplos, porém no desenvolvimento do trabalho usaremos a primeira notação, alida a notação  $\dot{V}(x)$  que significa primeira derivada em relação ao tempo (notação muito utilizada na física).

Quanto aos métodos para obter a solução de uma equação diferencial, já existem técnicas e métodos que são bem definidos e capazes de explicitar a solução, como por exemplo, o método do fator integrante, separação de variáveis, equações exatas entre outros. Porém, quando se trata de uma equação diferencial que não é linear, em geral não existe um método ou regra bem definida capaz de obter a solução.

### Definição 7. Variáveis independentes

Uma equação diferencial pode ter  $n$  variáveis independentes, porém existe uma distinção quanto ao número de variáveis independentes. Quando uma equação diferencial possui apenas uma variável independente recebe o nome de **equação diferencial ordinária (EDO)**, caso ocorra da equação possuir mais que uma variável independente estamos diante de uma **equação diferencial parcial (EDP)**.

### Definição 8. Equação Diferencial Parcial

Uma equação diferencial parcial (EDP) é uma equação envolvendo duas ou mais variáveis independentes  $t_1, t_2, \dots, t_n$  e derivadas parciais de uma função  $u = u(t_1, t_2, \dots, t_n)$ . Mais precisamente é uma equação da forma:

$$F\left(t_1, t_2, \dots, t_n, u, \frac{\partial u}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial t_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial t_n^k}\right) = 0 \quad (6)$$

**Exemplo 3.** Considere as seguintes equações diferenciais a seguir e classifique-as como EDO ou EDP.

- $\frac{dy}{dx} + \sin(x) = 0$  (É uma EDO)

2.  $x \frac{dy}{dx} = 8xy$  (É uma EDO)
3.  $\frac{\partial u}{\partial y} + xy \frac{\partial u}{\partial x} = 7x + 3xy + 1$  (É uma EDP)
4.  $\frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + x = y$  (É uma EDO)

**Observação:** Com o intuito de não gerar confusão no decorrer do trabalho e assim como em grande parte dos livros texto sobre EDO consideraremos a variável  $t$  como independente, salvo os casos onde será explícito o contrário.

### Classificando uma EDO quanto a sua ordem

A ordem da derivada de maior grau em uma equação diferencial é, por definição, a ordem da equação. Considere os seguintes exemplos  $\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} = -3t^2$  e  $\frac{dy}{dt} - 5e^y = \cos(t)$ , temos que as ordens das EDO's são respectivamente 2 e 1.

### Classificando uma EDO quanto a linearidade

Uma equação diferencial é dita linear quando pode ser escrita na forma

$$a_n(t) \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1(t) \frac{dy}{dt} + a_0(t)y = g(t) \quad (7)$$

Temos ainda que:

- i) A variável dependente  $y$  e todas suas derivadas são de primeiro grau, ou seja, a potência de cada termo envolvendo  $y$  é 1;
- ii) Cada coeficiente depende apenas da variável independente  $t$ .

**Exemplo 4.** Classifique as EDO's a seguir quanto a linearidade.

1.  $t \frac{dy}{dt} + 5y = 0$  é uma EDO linear;
2.  $\frac{d^2y}{dt^2} - 8t \frac{dy}{dt} + 7 = 0$  é uma EDO linear;
3.  $t \frac{d^6y}{dt^6} - 7 \frac{dy}{dt} + y = e^t$  é uma EDO linear;
4.  $\frac{d^2y}{dt^2} + 8 \frac{dy}{dt} + \sin(y) = \cos(t)$  não é uma EDO linear pois o coeficiente  $\sin(y)$  depende da variável dependente  $y$ .

### Definição 9. Sistemas de equações diferenciais e sua representação matricial

Durante o estudo de sistemas de equações lineares, ao nos depararmos com sistema de grande ordem, a fim de sintetizar a notação usaremos matrizes para representar o sistema de EDO. Considere o seguinte sistema linear de primeira ordem:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t) \end{cases} \quad (8)$$

O sistema pode ser reescrito na forma matricial da seguinte maneira:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix} \quad (9)$$

e pode ser reescrito de maneira mais sucinta:

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + F(t) \quad (10)$$

assim temos

$$X = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} \quad e \quad F = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix} \quad (11)$$

**Observação:** Um vetor é dito solução do sistema em um intervalo  $I$  quando a matriz

$$\text{coluna } X = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \text{ verifica as equações do sistema no intervalo } I.$$

**Exemplo 5.** Reescreva na forma matricial o seguinte sistema de EDO's.

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 3x_1 + 2x_2 + e^t - 1 \\ \frac{dx_2}{dt} = 7x_1 - 6x_2 + \cos(t) \end{cases} \quad (12)$$

O sistema pode ser reescrito na forma matricial como:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^t - 1 \\ \cos(t) \end{bmatrix} \quad (13)$$

Que por sua vez pode ser reduzido a

$$\frac{dX}{dt} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & -6 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} e^t - 1 \\ \cos(t) \end{bmatrix} \quad (14)$$

### Definição 10. Sistemas Autônomos

Um sistema de equações diferenciais de primeira ordem é dito **autônomo** quando pode ser posto na forma:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} = g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = g_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases} \quad (15)$$

Ou seja a variável independente  $t$  não aparece de maneira explícita no membro direito das equações do sistema de EDO's.

**Observação:** Quando temos sistemas de EDO's de grau 2 e 3, dizemos que estamos diante respectivamente de um sistema autônomo plano e um sistema autônomo espacial. Os quais serão objetos de estudo ao decorrer deste trabalho pois suas soluções possuem representação geométrica.

**Exemplo 6.** Considere o sistema de EDO's a seguir:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1(t) - 3x_2(t) + t^2 \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 \sin(t \cdot x_2(t)) \end{cases} \quad (16)$$

O sistema não é **autônomo** pois tem a presença dos termos  $t^2$  e  $\sin(t \cdot x_2(t))$  no lado direito de ambas as equações diferenciais.

### Definição 11. Problema de valor inicial

Denotaremos por  $t_0$  um ponto em um intervalo  $I$  e  $X(t_0) = \begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \\ \vdots \\ x_n(t_0) \end{bmatrix}$  e  $X_0 = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix}$

onde  $\gamma_i$  são constantes dadas. Então o sistema a seguir:

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = A(t)X + F(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases} \quad (17)$$

representa um problema de valor inicial (PVI).

### 3 METODOLOGIA

A classificação quanto a sua abordagem é qualitativa, pois não se espera coletar ou analisar dados numéricos, mas sim verificar o tipo de estabilidade que ocorre nos pontos críticos de sistemas de EDO e comparar regiões de estabilidade obtidas por dois diferentes métodos. Sendo eles, o teorema de Krasovskii e pelo método dos multiplicadores de Lagrange. Por fim, de acordo com (GIL, 2002) do ponto de vista dos seus procedimentos técnicos, a pesquisa é classificada como pesquisa bibliográfica, pois o trabalho será elaborado a partir da análise de livros e artigos que tratam do método de multiplicadores de Lagrange adaptado das EDP's e da estabilidade dos sistemas em estudo. Portanto, o trabalho consiste em uma pesquisa básica, descritiva e qualitativa que utiliza procedimentos bibliográficos para analisar a estabilidade dos pontos críticos de sistemas de EDO.

## 4 DESENVOLVIMENTO

A seguir vamos definir estabilidade segundo Lyapunov, utilizando como base a bibliografia contida em Vincent e Grantham (1997) e Khalil (2013), sendo o resultado mais importante para este trabalho pois somente através dele será possível falar sobre a estabilidade de sistemas de EDO, antes será necessário definir o que é um ponto de estabilidade (crítico) para um sistema autônomo.

**Definição 12. Ponto de Equilíbrio** Considere um sistema autônomo descrito pela equação diferencial:

$$\mathbf{X}' = \mathbf{f}(\mathbf{X})$$

Um ponto  $\mathbf{x}_e$  é chamado de **ponto de equilíbrio** (ou ponto crítico) se a derivada for nula nesse ponto.

**Definição 13. Estabilidade**  $x = 0$  de um sistema  $\frac{dx}{dt} = f(x)$  onde  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  é classificado como:

(1) *Estável* se, para cada  $\epsilon > 0$  existe  $\delta = \delta(\epsilon) > 0$  tal que  $\|x(0)\| < \delta \implies \|x(t)\| < \epsilon, \forall t \geq 0$ .

(2) *Instável* se não é estável.

(3) *Assintoticamente estável* se é estável e  $\delta > 0$  pode ser escolhido de maneira tal que satisfaça  $\|x(0)\| < \delta \implies \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$

### Definição 14. Estabilidade Segundo Lyapunov

Seja  $x = 0$  um ponto de equilíbrio para um sistema autônomo e  $D \subset \mathbb{R}^n$  um domínio contendo  $x$ . Considere  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$  uma função continuamente diferenciável tal que:

1.  $V(0) = 0$ .
2.  $V(x) > 0$  em  $D - \{0\}$ .
3.  $\dot{V}(x) \leq 0$  em  $D$ .

Então,  $x = 0$  é estável. Além disso, se  $\dot{V}(x) < 0$  em  $D - \{0\}$ , então  $x = 0$  é assintoticamente estável

### Definição 15. Teorema de Krasovskii

Considere um sistema dinâmico autônomo descrito pela equação  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ , onde  $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma função de classe  $C^1$  em um domínio  $D \subset \mathbb{R}^n$ , e  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  é um ponto de equilíbrio isolado (ou seja,  $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$  e  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$  para  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  em uma vizinhança da origem).

Nestas condições, temos os seguintes resultados de estabilidade:

1. Se a matriz simétrica  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{J}(\mathbf{x}) + \mathbf{J}(\mathbf{x})^T$ , onde  $\mathbf{J}(\mathbf{x})$  é a matriz Jacobiana de  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ , for negativa definida em uma vizinhança da origem, então o ponto de equilíbrio  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  é **assintoticamente estável**.
2. Adicionalmente, se a matriz  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  for negativa definida para todo  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  e a função candidata de Lyapunov associada,  $V(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x})^T \mathbf{f}(\mathbf{x})$ , for radialmente ilimitada (isto é,  $V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$  quando  $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$ ), então o ponto de equilíbrio  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  é **globalmente assintoticamente estável**.

**Exemplo 7.** Analise a estabilidade segundo Lyapunov para o sistema descrito abaixo:

Vamos fazer a análise utilizando primeiro o método dos multiplicadores adaptado das EDP's, e depois utilizando o teorema de krasovskii.

$$\begin{cases} x' = -2x \\ y' = x - y - y^3 \end{cases}$$

1° Vamos obter os pontos críticos do sistema, ou seja, igualar as derivadas a 0 obtendo assim:

$$\begin{cases} 0 = -2x \\ 0 = x - y - y^3 \end{cases}$$

Da primeira equação do sistema temos que  $-2x = 0 \implies x = 0$ , utilizando este fato na segunda equação temos que resolver  $y + y^3 = 0$  logo,  $y(y^2 + 1) = 0$  daí temos que  $y = 0$  e mais duas raízes complexas conjugadas que serão descartadas. Portanto o ponto crítico para o sistema é  $(0,0)$

2° Vamos construir o funcional de Lyapunov utilizando o método dos multiplicadores:

Ao multiplicarmos a primeira linha do sistema por  $x$  e a segunda linha por  $y$  obtemos:

$$\begin{cases} x'x = -2x^2 \\ y'y = xy - y^2 - y^4 \end{cases}$$

Somando as equações obtemos:

$$x'x + y'y = -2x^2 + xy - y^2 - y^4.$$

Observe que:

$$\frac{1}{2} \frac{d(x^2 + y^2)}{dt} = x'x + y'y$$

Assim um candidato a funcional de Lyapunov é:

$$V(x) = \frac{x^2 + y^2}{2}$$

É fácil verificar que tal função cumpre as condições para funcional de Lyapunov pois.

$$(1) V(0) = \frac{0^2 + 0^2}{2} = 0$$

$$(2) V(x) > 0 \text{ como } x^2, y^2 > 0 \forall x, y \in \mathbb{R} - \{0\} \implies \frac{x^2 + y^2}{2} > 0$$

$$(3) \dot{V}(x) \leq 0 \text{ de fato basta analisar quando } \dot{V}(x) = -2x^2 + xy - y^2 - y^4 \leq 0$$

Para analisar (3) observe que:

$$-2x^2 + xy - y^2 - y^4 \leq 0 \iff xy \leq y^4 + y^2 + 2x^2$$

Como  $(x - y)^2 \geq 0 \forall x, y \in \mathbb{R}$  então

$$x^2 + y^2 - 2xy \geq 0$$

$$x^2 + y^2 \geq 2xy \iff \frac{x^2 + y^2}{2} \geq xy$$

$$\therefore xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2} \leq 2x^2 + y^2 \leq 2x^2 + y^2 + y^4 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Logo o sistema é estável no ponto crítico  $(0,0)$  além disso como  $\forall (x,y) \neq (0,0) \dot{V}(x) < 0$  então o sistema é assintoticamente estável. Assim como a função verifica as 3 condições de estabilidade segundo Lyapunov então ela é um funcional de Lyapunov.

**Utilizando o Teorema de Krasovskii:**

Segue que:

$$f(X) = f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x \\ x - y - y^3 \end{pmatrix}$$

Como vimos antes o ponto  $(0,0)$  é um ponto crítico (equilíbrio) e de fato  $f(0) = 0$  assim a primeira condição do teorema é satisfeita.

Além disso segue que as componentes de  $f(x,y)$  são funções polinomiais que de fato são continuamente diferenciáveis, ou seja, de classe  $C^1$ . O sistema cumpre as hipóteses do teorema assim devemos analisar se  $F(x,y) = J(x,y) + J^T(x,y)$  é negativa definida.

Calculando o jacobiano obtemos que

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 - 3y^2 \end{pmatrix}$$

além disso temos que

$$J^T(x,y) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 - 3y^2 \end{pmatrix}$$

Portanto

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -2 - 6y^2 \end{pmatrix}$$

A partir disso vamos analisar se tal matriz é negativa definida para isso utilizando o critério de Sylvester temos que verificar:

1° O primeiro menor principal líder, ou seja,  $a_{11} < 0$ : De fato  $-4 < 0$  assim a condição é satisfeita.

2° O segundo menor principal líder, ou seja, o determinante de  $F(x,y)$  deve ser maior que 0.

De fato

$$\text{Det}(F(x,y)) = \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -2 - 6y^2 \end{vmatrix} = (-4)(-2 - 6y^2) - (1)(1) = 8 + 24y^2 - 1 = 24y^2 + 7$$

Como  $y^2 > 0, \forall y \in \mathbb{R} \implies \text{Det}(F(x,y)) \geq 7$

Portanto a matriz  $F(x,y)$  é definida negativa assim temos que o ponto  $(0,0)$  é assintoticamente estável.

Assim temos que a função candidata a funcional de Lyapunov é dada por:

$$V(x) = f^T(x) \cdot f(x) = \begin{pmatrix} -2x & x - y - y^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2x \\ x - y - y^3 \end{pmatrix} = 4x^2 + (x - y - y^3)^2$$

Por fim vamos verificar que a candidata a funcional de Lyapunov de fato cumpre as 3 condições estabilidade segundo Lyapunov:

(1)  $V(0) = 4 \cdot 0^2 + (0 - 0 - 0^3)^2 = 0$  logo a primeira condição é satisfeita.

(2)  $V(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$ , de fato como  $x^2 > 0$  e  $(x - y - y^3)^2 > 0, \quad \forall x, y \in \mathbb{R} - \{0\}$  então  $V(x) > 0$ .

(3) A terceira condição é verificada pelo teorema de Krasovskii logo  $V(\dot{x}) \leq 0$ .

Portanto a função de fato é um funcional de Lyapunov para o sistema.

#### 4.1 O Sistema Massa Mola Amortecida

Uma das equações que iremos analisar é conhecido como oscilador harmônico, em geral descrito pela equação  $mx'' + bx' + kx = 0$ . Porém a equação que iremos estudar a estabilidade é dada por:

$$mx'' + bx' |x'| + k_0x + k_1x^3 = 0$$

Tal que  $b, k_0, k_1, m$  são constantes físicas reais positivas e  $x(t)$ ,  $x'(t)$  e  $x''(t)$  representam respectivamente deslocamento, velocidade e aceleração de uma massa  $m$ . O fato de a equação que iremos estudar possuir um termo  $x^3$  é devido a uma mola que não segue a Lei de Hooke, ou seja, não possui comportamento linear, além disso o amortecedor segue padrão não linear também sendo responsável pelos termos  $bx' |x'|$ .

Fazendo  $x(t) = x_1(t)$  e  $x_2(t) = x_1'(t)$  podemos escrever a equação como um sistema de segunda ordem:

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t) \\ x_2'(t) = \frac{-b}{m}x_2(t) |x_2(t)| - \frac{k_0}{m}x_1(t) - \frac{k_1}{m}x_1^3(t) \end{cases}$$

Calculando os pontos críticos obtemos que  $x_2 = 0$  e  $x_1(k_0 + k_1x_1^2) = 0$  Como  $k_0$  e  $k_1$  são diferentes de zero então  $x_1 = 0$  portanto o ponto crítico que iremos analisar é  $(0,0)$ . A partir do sistema iremos construir o funcional de Lyapunov utilizando os multiplicadores invariantes adaptado das EDP'S

Portanto vamos multiplicar o sistema da seguinte maneira:

$$\begin{cases} (k_0x_1 + k_1x_1^3)x_1' = (k_0x_1 + k_1x_1^3)x_2 \\ (mx_2)x_2' = (mx_2)\left(\frac{-b}{m}x_2 |x_2| - \frac{k_1}{m}x_1^3 - \frac{k_0}{m}x_1\right) \end{cases}$$

Que é equivalente ao sistema:

$$\begin{cases} (k_0x_1 + k_1x_1^3)x_1' = (k_0x_1 + k_1x_1^3)x_2 \\ (mx_2)x_2' = (-k_0x_1 - k_1x_1^3)x_2 - bx_2^2|x_2| \end{cases}$$

Somando as duas equações do sistema obtemos:

$$(k_0x_1 + k_1x_1^3)x_1' + (mx_2)x_2' = -b|x_2|^3$$

Além disso, temos que:

$$k_0x_1x_1' + k_1x_1^3x_1' + mx_2x_2' = \frac{1}{2} \frac{d(k_0x_1^2)}{dt} + \frac{1}{4} \frac{d(k_1x_1^4)}{dt} + \frac{1}{2} \frac{d(mx_2^2)}{dt}$$

Portanto um candidato a funcional de Lyapunov é:

$$V(x_1, x_2) = \frac{k_0x_1^2 + mx_2^2}{2} + \frac{k_1x_1^4}{4}$$

Vamos mostrar que a função candidata a funcional verifica as três condições de estabilidade segundo Lyapunov:

$$(1) V(0) = \frac{k_0 0^2 + m 0^2}{2} + \frac{k_1 0^4}{4} = 0$$

$$(2) V(x) > 0 \text{ como } x_1^2 \text{ ou } x_2^2 > 0 \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} - \{0\} \implies \frac{k_0x_1^2 + mx_2^2}{2} + \frac{k_1x_1^4}{4} > 0$$

(3)  $\dot{V}(x) \leq 0$  de fato basta analisar quando  $\dot{V}(x) = -b|x_1|^3 \leq 0$  como  $b > 0 \implies -b < 0$  logo  $-b|x_1|^3 \leq 0 \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} - \{0\}$  sendo que  $\dot{V}(0) = 0$  pois  $-b \cdot 0 = 0$  portanto o ponto  $(0,0)$  é assintoticamente estável.

### Utilizando o Teorema de Krasovskii:

Como visto antes  $(0,0)$  é um ponto crítico do sistema. Além disso

$$f(X) = f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\frac{b}{m}x_2|x_2| - \frac{k_0}{m}x_1 - \frac{k_1}{m}x_1^3 \end{pmatrix}$$

Essa função é de classe  $C^1$ , satisfaz  $f(0) = 0$  e  $f(x) \neq 0$  para  $x \neq 0$ . Assim devemos analisar se  $F(X) = J(X) + J(X)^T$  é negativa definida. Segue que:

$$J(X) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_0}{m} - \frac{3k_1}{m}x_1^2 & -\frac{2b}{m}|x_2| \end{pmatrix}$$

Além disso:

$$J^T(X) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_0}{m} - \frac{3k_1}{m}x_1^2 & -\frac{2b}{m}|x_2| \end{pmatrix}$$

Portanto:

$$F(X) = \begin{pmatrix} 0 & 1 - \frac{k_0}{m} - \frac{3k_1}{m}x_1^2 \\ 1 - \frac{k_0}{m} - \frac{3k_1}{m}x_1^2 & -\frac{4b}{m}|x_2| \end{pmatrix}$$

Como o menor principal  $F_{11} = 0$ , então pelo critério de Silvester a matriz não é negativa definida assim não podemos utilizar o Teorema de Krasovskii para estudar a estabilidade do sistema massa mola amortecida.

## 4.2 O modelo Presa-Predador (Lotko Volterra)

O Modelo de Lotka-Volterra é um sistema de Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) não lineares, fundamental na ecologia e na biologia matemática, utilizado para descrever as interações e as oscilações nas populações de uma espécie de presa ( $x_1$ ) e uma espécie de predador ( $x_2$ ).

### Hipóteses de Modelagem

Para a representação matemática do Modelo de Lotka-Volterra, considerando  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  as densidades de presas e predadores, respetivamente, fazem-se inicialmente as seguintes hipóteses:

1. **Crescimento da Presa (Termo  $ax_1$ ):** Na ausência de predadores, a população de presas aumenta a uma taxa proporcional à população atual ( $x_1$ ), multiplicado pela constante de crescimento  $a$  tal que  $a > 0$ . (Consequência:  $x_1' = ax_1$  quando  $x_2 = 0$ ).
2. **Mortalidade do Predador (Termo  $-cx_2$ ):** Na ausência de presas, a população de predadores irá à extinção, pois estas são a sua única fonte de alimento. A população de predadores declina a uma taxa proporcional à sua população ( $c > 0$ ). (Consequência:  $x_2' = -cx_2$  quando  $x_1 = 0$ ).
3. **Interação e Encontros (Termo  $x_1x_2$ ):** O número de encontros entre predadores e presas é proporcional ao produto das duas populações, ou seja, ao produto  $x_1x_2$ . Estes

encontros tendem a ser benéficos para a população de predadores (aumentando  $x_2$ ) e inibem o crescimento da população de presas (diminuindo  $x_1$ ).

4. **Taxas de Interação ( $\alpha$  e  $\beta$ ):** A taxa de crescimento da população de predadores é aumentada por um termo da forma  $\beta x_1 x_2$ , e a taxa de crescimento da população de presas é diminuída por um termo da forma  $-\alpha x_1 x_2$ , em que  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes positivas.

### O Modelo Matemático

Em consequência das hipóteses acima, o Modelo de Lotka-Volterra tem a forma:

$$\begin{cases} x'_1 = x_1(a - \alpha x_2) \\ x'_2 = x_2(-c + \beta x_1) \end{cases} \quad (18)$$

Onde  $a, c, \alpha, \beta$  são constantes positivas que governam as taxas de crescimento e interação.

### Hipóteses Simplificadoras Chave (Limitações do Modelo)

O Modelo de Lotka-Volterra é considerado um sistema **idealizado** e suas previsões dependem de simplificações rigorosas:

- **Crescimento Ilimitado para Presa:** Não há restrições de ambiente ou capacidade de carga.
- **Ambiente Fechado e Homogéneo:** Não há migração, e as populações estão perfeitamente misturadas.
- **Respostas Imediatas e Lineares:** A predação e o crescimento dos predadores respondem instantaneamente ao produto das populações.

Vamos estudar estabilidade utilizando o método dos multiplicadores invariantes.

$$\begin{cases} x'_1 = x_1(a - \alpha x_2) \\ x'_2 = x_2(-c + \beta x_1) \end{cases}$$

1º Vamos obter os pontos críticos(equilíbrio) igualando as derivadas do sistema a 0. Assim obtemos:

$$\begin{cases} 0 = x_1(a - \alpha x_2) \\ 0 = x_2(-c + \beta x_1) \end{cases}$$

Por inspeção o ponto  $(0,0)$  é um ponto crítico, além disso temos que se  $x_1, x_2 \neq 0$  então:

$$x_1(a - \alpha x_2) = x_1 a - \alpha x_1 x_2$$

Logo:

$$x_1 a = \alpha x_1 x_2 \therefore x_2 = \frac{a}{\alpha}$$

Por outro lado temos que:

$$\frac{a}{\alpha}(-c + \beta x_1) = 0$$

Assim:

$$\frac{-ac}{\alpha} + \frac{\beta a x_1}{\alpha} = 0 \iff \beta a x_1 = ac$$

Portanto:

$$x_1 = \frac{c}{\beta}$$

Assim temos que analisar os pontos  $\mathbf{P}_1 = (0,0)$  e  $\mathbf{P}_2 = (\frac{c}{\beta}, \frac{a}{\alpha})$ .

Agora vamos construir um candidato a funcional de Lyapunov utilizando os multiplicadores invariantes, multiplicando o sistema por  $x_1$  e  $x_2$  da seguinte maneira:

$$\begin{cases} x_1' x_1 = x_1(a - \alpha x_2) \\ x_2' x_2 = x_2(-c + \beta x_1) \end{cases}$$

Somando as duas equações do sistema obtemos:

$$x_1' x_1 + x_2' x_2 = x_1^2(a - \alpha x_2) + x_2^2(-c + \beta x_1)$$

Como:

$$x_1' x_1 + x_2' x_2 = \frac{1}{2} \frac{d(x_1^2 + x_2^2)}{dt}$$

Então a função candidata a funcional que iremos analisar se verifica as três condições de estabilidade segundo Lyapunov será:  $V(x) = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}$

$$(1) \text{ De fato } V(0) = \frac{0^2 + 0^2}{2} = 0$$

$$(2) \text{ Como } x_1^2 \text{ ou } x_2^2 > 0 \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} - \{0\} \implies V(x) = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} > 0 \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} - \{0\}$$

(3)  $\dot{V}(x) \leq 0$  de fato basta analisar quando  $\dot{V}(x) = x_1^2(a - \alpha x_2) + x_2^2(-c + \beta x_1) \leq 0$

Assim temos que a função de fato é um funcional de Lyapunov, agora vamos estudar se temos estabilidade assintótica.

Tomando  $x_2 = 0$  temos que:

$$x_1^2(a - \alpha x_2) + x_2^2(-c + \beta x_1) \leq 0$$

se reduz a

$$ax_1^2 \leq 0$$

Como  $a > 0$  e  $x_1^2 \geq 0$ , logo o ponto  $(0,0)$  não é assintoticamente estável em sua vizinhança.

### Utilizando o Teorema de Krasovskii para o ponto $(0,0)$ :

Como visto antes  $(0,0)$  é um ponto crítico do sistema. Além disso

$$f(X) = f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1(a - \alpha x_2) \\ x_2(-c + \beta x_1) \end{pmatrix}$$

Essa função é de classe  $C^1$ , satisfaz  $f(0) = 0$  e  $f(x) \neq 0$  para  $x \neq 0$  e  $x \neq P_2$ . Assim devemos analisar se  $F(X) = J(X) = J(X)^T$  é negativa definida. Segue que:

$$J(X) = \begin{pmatrix} a - \alpha x_2 & -\alpha x_1 \\ -\beta x_2 & -c - \beta x_1 \end{pmatrix}$$

Além disso

$$J^T(X) = \begin{pmatrix} a - \alpha x_2 & -\beta x_2 \\ -\alpha x_1 & -c - \beta x_1 \end{pmatrix}$$

Portanto

$$F(X) = \begin{pmatrix} 2a - 2\alpha x_2 & -\alpha x_1 - \beta x_2 \\ -\alpha x_1 - \beta x_2 & -2c - 2\beta x_1 \end{pmatrix}$$

Analisando

$$F(0,0) = \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 0 & -2c \end{pmatrix}$$

precisamos que os menores principais tenham sinais alternados, começando com  $F_{11} < 0$  implica  $2a < 0$ , o que é um absurdo pois  $a > 0$  por hipótese. Além disso precisamos  $\det F > 0$  implica que  $(2a)(-2c) = -4ac > 0$  novamente chegamos a um absurdo pois  $a, c > 0$  logo

$-4ac < 0$ . Portanto não podemos utilizar o **teorema de Krasovskii** pois falha em verificar que  $F(X)$  é negativa definida na vizinhança do ponto  $(0,0)$ , assim nada podemos concluir sobre este ponto.

Para a análise da estabilidade do ponto  $P_2 = \left(\frac{c}{\beta}, \frac{a}{\alpha}\right)$ , realizamos uma translação de coordenadas para mover o ponto de equilíbrio  $X_e$  para a origem. Definimos as variáveis:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - \frac{c}{\beta} \\ y_2 = x_2 - \frac{a}{\alpha} \end{cases} \quad (19)$$

As derivadas são  $y'_1 = x'_1$  e  $y'_2 = x'_2$ . Substituindo no sistema original :

Primeira Equação ( $y'_1$ )

$$y'_1 = \left(y_1 + \frac{c}{\beta}\right) \left[a - \alpha \left(y_2 + \frac{a}{\alpha}\right)\right] = \left(y_1 + \frac{c}{\beta}\right) (-\alpha y_2)$$

$$y'_1 = -\alpha y_1 y_2 - \frac{\alpha c}{\beta} y_2$$

Segunda Equação ( $y'_2$ )

$$y'_2 = \left(y_2 + \frac{a}{\alpha}\right) \left[-c + \beta \left(y_1 + \frac{c}{\beta}\right)\right] = \left(y_2 + \frac{a}{\alpha}\right) (\beta y_1)$$

$$y'_2 = \beta y_1 y_2 + \frac{a\beta}{\alpha} y_1$$

O sistema transladado para a origem em  $P_2$  é:

$$\begin{cases} y'_1 = -\frac{\alpha c}{\beta} y_2 - \alpha y_1 y_2 \\ y'_2 = \frac{a\beta}{\alpha} y_1 + \beta y_1 y_2 \end{cases} \quad (20)$$

### **Análise do sistema transladado**

Vamos analisar a estabilidade deste ponto utilizando o método dos multiplicadores invariantes (adaptado das EDP's) para construir um candidato a Funcional de Lyapunov.

### Construção do Candidato a Funcional

Multiplicamos a primeira equação por  $y_1$  e a segunda por  $y_2$ :

$$\begin{cases} y_1' y_1 = y_1 \left( -\alpha y_1 y_2 - \frac{\alpha c}{\beta} y_2 \right) = -\alpha y_1^2 y_2 - \frac{\alpha c}{\beta} y_1 y_2 \\ y_2' y_2 = y_2 \left( \beta y_1 y_2 + \frac{a\beta}{\alpha} y_1 \right) = \beta y_1 y_2^2 + \frac{a\beta}{\alpha} y_1 y_2 \end{cases} \quad (21)$$

Esta escolha de multiplicadores sugere um candidato a funcional da forma quadrática simples:

$$V(y_1, y_2) = \frac{y_1^2 + y_2^2}{2}$$

Procedendo como no caso anterior verificamos as condições para este candidato:

1.  $V(0,0) = 0$ .
2.  $V(y_1, y_2) > 0$  para todo  $(y_1, y_2) \neq (0,0)$ . Portanto,  $V$  é definida positiva.

Agora, analisamos o sinal da derivada de  $V$ .

Partindo da expressão da derivada do funcional:

$$\begin{aligned} \dot{V}(y_1, y_2) &= -\alpha y_1^2 y_2 + \beta y_1 y_2^2 + y_1 y_2 \left( -\frac{\alpha c}{\beta} + \frac{a\beta}{\alpha} \right) \\ \dot{V}(y_1, y_2) &= y_1 y_2 \left( -\alpha y_1 + \beta y_2 - \frac{\alpha c}{\beta} + \frac{a\beta}{\alpha} \right) \\ \dot{V}(y_1, y_2) &= \beta y_1 y_2 \left( -\frac{\alpha y_1}{\beta} + y_2 - \frac{\alpha c}{\beta^2} + \frac{a}{\alpha} \right) \end{aligned}$$

Considere  $y_1 = x$  e  $y_2 = y$ , assim temos:

$$\dot{V}(x, y) = \beta x y \left( -\frac{\alpha x}{\beta} + y - \frac{\alpha c}{\beta^2} + \frac{a}{\alpha} \right)$$

Assim, temos 4 casos.

1° Se  $x > 0$  e  $y > 0$  e:

$$y - \frac{\alpha x}{\beta} - \frac{\alpha c}{\beta^2} + \frac{a}{\alpha} > 0$$

O que equivale a:

$$y > \frac{\alpha x}{\beta} + \frac{\alpha c}{\beta^2} - \frac{a}{\alpha}$$

Esta expressão representa a região do 1º quadrante no plano  $xy$ . Para  $x = 0$ , temos o ponto de intercepto:

$$y = \frac{\alpha c}{\beta^2} - \frac{a}{\alpha}$$

Assim, não é possível construir um disco para qualquer  $\epsilon > 0$  em torno da origem onde o sinal de  $\dot{V}$  seja definido. Portanto, a condição de estabilidade de Lyapunov não é satisfeita universalmente na vizinhança. Os outros 3 casos são feitos de maneira análoga e representam os outros quadrantes do plano  $xy$  e chegam na mesma conclusão.

### Conclusão sobre a Estabilidade

Para garantir a estabilidade assintótica, a derivada  $\dot{V}$  deveria ser negativa definida ( $\dot{V} < 0$ ) numa vizinhança da origem.

No entanto, como mostramos ao estudar o sinal da derivada do funcional vimos que não é possível construir um disco para qualquer que seja o raio numa vizinhança da origem.

Portanto, a condição  $\dot{V} \leq 0$  não é satisfeita universalmente numa vizinhança da origem assim o ponto  $P_2$  não possui estabilidade.

### Análise via Teorema de Krasovskii

O sistema transladado é dado por:

$$\mathbf{f}(\mathbf{y}) = \mathbf{f}(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} -\alpha y_1 y_2 - \frac{\alpha c}{\beta} y_2 \\ \beta y_1 y_2 + \frac{a\beta}{\alpha} y_1 \end{pmatrix} \quad (22)$$

#### 1. Construção da Matriz Jacobiana

A Matriz Jacobiana  $\mathbf{J}(\mathbf{Y})$  do sistema é definida por  $J_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial y_j}$ :

$$\mathbf{J}(\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha y_2 & -\alpha y_1 - \frac{\alpha c}{\beta} \\ \beta y_2 + \frac{a\beta}{\alpha} & \beta y_1 \end{bmatrix} \quad (23)$$

#### 2. A Matriz Simétrica de Krasovskii

O Teorema de Krasovskii utiliza a matriz simétrica  $\mathbf{F}(\mathbf{y}) = \mathbf{J}(\mathbf{y}) + \mathbf{J}(\mathbf{y})^T$ . Calculamos esta matriz:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{y}) &= \begin{bmatrix} -\alpha y_2 & -\alpha y_1 - \frac{\alpha c}{\beta} \\ \beta y_2 + \frac{a\beta}{\alpha} & \beta y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\alpha y_2 & \beta y_2 + \frac{a\beta}{\alpha} \\ -\alpha y_1 - \frac{\alpha c}{\beta} & \beta y_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2\alpha y_2 & \left(-\alpha y_1 - \frac{\alpha c}{\beta}\right) + \left(\beta y_2 + \frac{a\beta}{\alpha}\right) \\ \left(\beta y_2 + \frac{a\beta}{\alpha}\right) + \left(-\alpha y_1 - \frac{\alpha c}{\beta}\right) & 2\beta y_1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Simplificando o termo fora da diagonal, definindo  $K(\mathbf{y}) = \beta y_2 - \alpha y_1 + \left(\frac{a\beta}{\alpha} - \frac{\alpha c}{\beta}\right)$ :

$$\mathbf{F}(\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} -2\alpha y_2 & K(\mathbf{y}) \\ K(\mathbf{y}) & 2\beta y_1 \end{bmatrix} \quad (24)$$

### 3. Verificação das Hipóteses na Origem

Para aplicar o teorema e garantir a estabilidade assintótica, a matriz  $\mathbf{F}(\mathbf{y})$  deve ser negativa definida numa vizinhança da origem. Avaliamos a matriz em  $\mathbf{y} = (0,0)$

$$\mathbf{F}(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{a\beta}{\alpha} - \frac{\alpha c}{\beta} \\ \frac{a\beta}{\alpha} - \frac{\alpha c}{\beta} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & C \\ C & 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

onde  $C = \frac{a\beta}{\alpha} - \frac{\alpha c}{\beta}$  é uma constante.

### 4. Conclusão da Análise

Aplicamos o Critério de Sylvester para verificar se  $\mathbf{F}(0,0)$  é negativa definida:

- O primeiro menor principal é  $\det(F_{11}) = 0$ . Para ser negativa definida, este valor deveria ser estritamente negativo ( $< 0$ ).
- O determinante da matriz é  $\det(\mathbf{F}) = 0 \cdot 0 - C^2 = -C^2$ . Como  $C^2 \geq 0$ , o determinante é sempre menor ou igual a zero. Para ser definida negativa (em dimensão par), o determinante deveria ser estritamente positivo ( $> 0$ ).

**Resultado:** A matriz  $\mathbf{F}(\mathbf{Y})$  não satisfaz a condição de ser negativa definida na origem. Portanto, o Teorema de Krasovskii falha em demonstrar a estabilidade assintótica do ponto de equilíbrio  $P_2$ .

### 4.3 A Equação do Pêndulo Amortecido

A equação do pêndulo amortecido é dada por:

$$\ddot{\Theta} + a\dot{\Theta} + b \operatorname{sen}(\Theta) = 0$$

Onde  $\ddot{\Theta}$  representa a aceleração angular,  $\dot{\Theta}$  a velocidade angular e  $\Theta$  a posição angular. Fazendo  $x_1 = \Theta$  e  $x_2 = \dot{\Theta}$  Temos que  $x'_1 = x_2$  e  $x'_2 = \ddot{\Theta} = -b \operatorname{sen} x_1 - ax_2$  e  $a, b \in \mathbb{R}$  com  $a, b > 0$ . Formando assim o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x'_1 = x_2 \\ x'_2 = -b \operatorname{sen}(x_1) - ax_2 \end{cases}$$

Encontrando os pontos críticos temos então:

$$\begin{cases} 0 = x_2 \\ 0 = -b \operatorname{sen}(x_1) - ax_2 \end{cases}$$

Como  $x_2 = 0$  então  $-b \operatorname{sen}(x_1) = 0 \implies \operatorname{sen}(x_1) = 0 \therefore x_1 = k\pi$  com  $k \in \mathbb{Z}$  Portanto devido a periodicidade da solução analisaremos apenas os pontos  $P_1 = (0,0)$  este ponto corresponde ao pêndulo em repouso e é um ponto assintoticamente estável o que será mostrado. E  $P_2 = (\pi,0)$  que corresponde ao pêndulo na posição vertical diatralmente oposto ao ponto  $P_1$  este é um ponto instável pois qualquer vizinhança fara com que sua energia aumente. A partir disto vamos construir o Funcional de Lyapunov utilizando o método dos multiplicadores invariantes adaptado das EDP's, segue que:

$$\begin{cases} x'_1 b \operatorname{sen}(x_1) = bx_2 \operatorname{sen}(x_1) \\ x'_2 x_2 = -bx_2 \operatorname{sen}(x_1) - ax_2^2 \end{cases}$$

Somando as equações do sistema obtemos:  $x'_1 bx_2 \operatorname{sen}(x_1) + x'_2 x_2 = bx_2 \operatorname{sen}(x_1) - bx_2 \operatorname{sen}(x_1) - ax_2^2$ .

Note que:

$$(\mathbf{b} - \mathbf{b} \cos(\mathbf{x}_1))' = \mathbf{b} \operatorname{sen}(\mathbf{x}_1) \mathbf{x}'_1$$

Assim podemos reescrever

$$x'_1 b \operatorname{sen}(x_1) + x'_2 x_2 = bx_2 \operatorname{sen}(x_1) - bx_2 \operatorname{sen}(x_1) - ax_2^2$$

Como:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{x_2^2}{2} + b(1 - \cos(x_1)) \right] = -ax_2^2$$

Vamos considerar a função  $V(x_1, x_2) = +\frac{x_2^2}{2} + b(1 - \cos(x_1))$  como candidata a Funcional de Lyapunov e vamos mostrar que de fato satisfaz as condições para ser considerada um Funcional de Lyapunov.

$$(1) \text{ De fato } V(0,0) = \frac{0^2}{2} + b(1 - \cos(0)) = 0 + 0 = 0$$

$$(2) \text{ Como } x_2^2 > 0 \text{ e } -1 < \cos(x_1) < 1 \implies 0 < 1 - \cos(x_1) < 2, \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$$\therefore V(x_1, x_2) = \frac{x_2^2}{2} + b(1 - \cos(x_1)) > 0, \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} - \{0\}$$

(3)  $\dot{V}(x) \leq 0$  de fato basta analisar quando  $\dot{V}(x) = -ax_2^2 \leq 0$ . Como  $a > 0$  implica  $-a < 0$  logo  $-ax_2^2 \leq 0, \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} - \{0\}$ , sendo que  $\dot{V}(0) = -a0^2 = 0$  portanto o ponto  $(0,0)$  é assintoticamente estável.

Além disso fica evidenciado que função que escolhemos como candidata a funcional de Lyapunov de fato é um funcional de Lyapunov.

### **Análise no ponto $(\pi, 0)$**

Como para analisar estabilidade segundo Lyapunov precisamos que o ponto crítico esteja na origem ou seja  $f(0) = 0$  se  $x = 0$ , não podemos estudar o ponto  $P_2 = (\pi, 0)$  sem antes aplicar uma translação para que  $P_2$  se torne a origem do sistema.

Segue que:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - \pi \\ y_2 = x_2 - 0 \end{cases} \quad (26)$$

As derivadas das novas variáveis são iguais às originais:  $y_1' = x_1'$  e  $y_2' = x_2'$ . Substituímos

#### 1. Substituição na Primeira EDO ( $x_1'$ )

$$y_1' = x_1' = x_2$$

$$y_1' = y_2$$

#### 2. Substituição na Segunda EDO ( $x_2'$ )

$$y_2' = x_2' = -b \operatorname{sen}(x_1) - ax_2$$

$$y_2' = -b \operatorname{sen}(y_1 + \pi) - ay_2$$

Utilizamos a identidade trigonométrica  $\operatorname{sen}(\alpha + \pi) = -\operatorname{sen}(\alpha)$ :

$$\operatorname{sen}(y_1 + \pi) = -\operatorname{sen}(y_1)$$

Substituindo esta simplificação na equação  $y_2'$ :

$$y_2' = -b(-\operatorname{sen}(y_1)) - ay_2$$

$$y_2' = b \operatorname{sen}(y_1) - ay_2$$

### 3. O Novo Sistema Transladado

O sistema de EDOs transladado, onde  $P_2 = (\pi, 0)$  agora é a origem  $(0, 0)$ , é:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = a \operatorname{sen}(y_1) - by_2 \end{cases} \quad (27)$$

#### Utilizando o Teorema de Krasovskii:

Como visto antes  $(0,0)$  é um ponto crítico do sistema. Além disso

$$f(X) = f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_2 \\ a \operatorname{sen}(x_1) - bx_2 \end{pmatrix}$$

Essa função é de classe  $C^1$ , satisfaz  $f(0) = 0$  e  $f(x) \neq 0$  para  $x \neq 0$ . Assim devemos analisar se  $F(X) = J(X) + J(X)^T$  é negativa definida. Segue que:

$$J(X) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a \cos(x_1) & -b \end{pmatrix}$$

Além disso:

$$J^T(X) = \begin{pmatrix} 0 & a \cos(x_1) \\ 1 & -b \end{pmatrix}$$

Portanto:

$$F(X) = \begin{pmatrix} 0 & 1 + a \cos(x_1) \\ 1 + a \cos(x_1) & -2b \end{pmatrix}$$

Como o menor principal  $F_{11} = 0$ , então pelo critério de Silvester a matriz não é negativa definida assim não podemos utilizar o Teorema de Krasovskii para estudar o sistema que descreve a equação do pêndulo amortecido.

### **Análise do sistema translado para o ponto $P_2 = (\pi, 0)$**

Consideremos o sistema translado para a origem, representando a dinâmica em torno do ponto de equilíbrio  $P_2 = (\pi, 0)$ :

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = a \operatorname{sen}(y_1) - by_2 \end{cases} \quad (28)$$

Para analisar a estabilidade, construímos um funcional candidato utilizando o método dos multiplicadores. Multiplicamos a primeira equação por  $by_1$  e a segunda por  $y_2$ :

$$\begin{cases} by_1 y_1' = by_1 y_2 \\ y_2 y_2' = y_2 (a \operatorname{sen}(y_1) - by_2) = ay_2 \operatorname{sen}(y_1) - by_2^2 \end{cases} \quad (29)$$

Vamos considerar a função  $V(y_1, y_2) = \frac{by_1^2 + y_2^2}{2}$  como candidata a Funcional de Lyapunov e vamos mostrar que de fato satisfaz as condições para ser considerada um Funcional de Lyapunov.

$$(1) \text{ De fato } V(0,0) = \frac{b0^2 + 0^2}{2} = 0$$

$$(2) \text{ Como } b, y_1^2, y_2^2 > 0 \implies V(y_1, y_2) = \frac{by_1^2 + y_2^2}{2} > 0, \quad \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R} - \{0\}$$

(3) Vamos mostrar que  $\dot{V}(x)$  não verifica a terceira condição de instabilidade segundo Lyapunov.

Somando as duas equações, obtemos a derivada  $\dot{V}(y)$  do funcional

$$\dot{V} = by_1 y_2 + ay_2 \operatorname{sen}(y_1) - by_2^2 \quad (30)$$

Fatorando  $y_2$ :

$$\dot{V} = y_2 [by_1 + a \operatorname{sen}(y_1) - by_2] \quad (31)$$

### **Verificação da Instabilidade**

Para que o ponto de equilíbrio seja assintoticamente estável segundo Lyapunov, seria necessário que  $\dot{V} < 0$  numa vizinhança da origem (para  $V$  definida positiva).

No entanto, vamos analisar o comportamento de  $\dot{V}$  ao longo da direção  $y_1 = y_2$  (no primeiro quadrante, onde  $y_1, y_2 > 0$  e pequenos):

Substituindo  $y_2 = y_1$  na expressão da derivada:

$$\dot{V} = y_1[by_1 + a \operatorname{sen}(y_1) - by_1]$$

$$\dot{V} = y_1[a \operatorname{sen}(y_1)]$$

Como estamos no primeiro quadrante ( $y_1 > 0$ ), temos que  $\operatorname{sen}(y_1) > 0$  (para  $y_1$  pequeno). Sendo  $a > 0$ , concluímos que:

$$\dot{V} > 0$$

Encontramos uma trajetória arbitrariamente próxima da origem onde a derivada do funcional é estritamente positiva. Isto significa que a “energia” ou distância ao equilíbrio cresce ao longo desta direção.

Portanto, a condição de estabilidade ( $\dot{V}(y) \leq 0$ ) é violada. O ponto de equilíbrio não é assintoticamente estável ele é **instável**.

#### Utilizando o Teorema de Krasovskii para o sistema transladado:

Do sistema

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = a \operatorname{sen}(y_1) - by_2 \end{cases} \quad (32)$$

Associamos a seguinte função:

$$f(Y) = f(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} y_2 \\ a \operatorname{sen}(y_1) - by_2 \end{pmatrix}$$

Essa função é de classe  $C^1$ , satisfaz  $f(0) = 0$  e  $f(y) \neq 0$  para  $y \neq 0$ . Assim devemos analisar se  $F(Y) = J(Y) = J^T(Y)$  é negativa definida. Segue que:

$$J(Y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a \cos(y_1) & -b \end{pmatrix}$$

Além disso:

$$J^T(Y) = \begin{pmatrix} 0 & a \cos(y_1) \\ 1 & -b \end{pmatrix}$$

Portanto:

$$F(Y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 + a \cos(y_1) \\ 1 + a \cos(y_1) & -2b \end{pmatrix}$$

Novamente como o menor principal  $F_{11} = 0$ , então pelo critério de Silvester a matriz não é negativa definida assim não podemos utilizar o Teorema de Krasovskii para estudar o sistema que descreve a equação do pêndulo amortecido no ponto  $P_2 = (\pi, 0)$ .

## 5 CONCLUSÃO

O presente trabalho dedicou-se ao estudo e comparação de técnicas fundamentais para a análise de estabilidade em sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias não lineares autônomos, comparando o Método dos Multiplicadores Invariantes com o Teorema de Krasovskii. A aplicação destes métodos a sistemas de relevância física e biológica, como o Sistema Massa-Mola Amortecida, o Modelo de Predação de Lotka-Volterra e a Equação do Pêndulo Amortecido, permitiu evidenciar as vantagens e limitações de cada abordagem teórica.

A análise comparativa revelou que o Método dos Multiplicadores Invariantes se destaca como uma ferramenta extremamente robusta e versátil, especialmente quando aplicado a sistemas de natureza mecânica. Observou-se que a escolha adequada dos multiplicadores permitiu a construção direta e intuitiva de Funcionais de Lyapunov associados à energia total do sistema. Esta característica foi determinante para confirmar a estabilidade assintótica da origem no sistema massa-mola e no pêndulo na posição vertical inferior. Mais notavelmente, este método mostrou-se eficaz na análise de instabilidade do pêndulo invertido, permitindo a construção de um funcional que evidenciou o crescimento da “energia” ao longo de trajetórias específicas, confirmando a natureza instável do ponto de equilíbrio sem recorrer a linearizações.

Em contraste, a aplicação do Teorema de Krasovskii encontrou obstáculos significativos nos sistemas mecânicos estudados. A estrutura intrínseca das equações de movimento de segunda ordem resulta frequentemente em matrizes Jacobianas com elementos nulos na diagonal principal, o que leva o primeiro menor principal da matriz de Krasovskii a ser nulo. Esta característica violou sistematicamente o Critério de Sylvester para matrizes negativas definidas, tornando o teorema inconclusivo tanto para o sistema massa-mola quanto para o pêndulo. Conclui-se, portanto, que a formulação clássica de Krasovskii impõe condições algébricas excessivamente restritivas dificultando sua aplicabilidade.

No que concerne ao modelo biológico de Lotka-Volterra, a análise corroborou a natureza conservativa do sistema. Ambos os métodos falharam em demonstrar estabilidade assintótica: o funcional quadrático gerou uma derivada com sinal indefinido e a matriz de Krasovskii apresentou determinante não positivo. Este resultado negativo foi, contudo, consistente com a dinâmica do sistema, que possui um centro caracterizado por estabilidade neutra e órbitas periódicas fechadas, confirmando que a ausência de convergência assintótica foi corretamente identificada pelas limitações de ambos os critérios.

Em suma, esta investigação permite concluir que, para os sistemas dinâmicos analisados, o Método dos Multiplicadores Invariantes apresentou uma superioridade prática na construção de funções de Lyapunov, oferecendo resultados conclusivos onde o critério algébrico de Krasovskii se mostrou insuficiente. O trabalho reforça a importância de dominar múltiplas ferramentas analíticas na teoria da estabilidade, uma vez que a falha de um teorema específico não implica a ausência de estabilidade, exigindo muitas vezes abordagens mais construtivas e adaptadas à física do problema.

## REFERÊNCIAS

- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems**. 6th. ed. [S./]: Wiley, 1997.
- COELHO, F. U.; LOURENÇO, M. L. **Álgebra Linear**. [S./]: Editora Harbra, 2001.
- FIGUEIREDO, D. G. **Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais**. [S./]: IMPA, 1982.
- GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. [S./]: atlas São Paulo, 2002. v. 4.
- Lório Jr., R. **Equações Diferenciais Parciais: Uma Introdução**. [S./]: IMPA, 2001.
- KHALIL, H. **Nonlinear Systems**. Pearson Education Limited, 2013. (Always learning). ISBN 9781292039213. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=VZ72nQEACAAJ>.
- MATOS, M. M. L. Equações diferenciais ordinárias - uma abordagem histórica. **São Cristovão, SE : UFS**, 2016.
- VINCENT, T.; GRANTHAM, W. **Nonlinear and Optimal Control Systems**. Wiley, 1997. (A Wiley-Interscience publication). ISBN 9780471042358. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=SbuEnyLfJxAC>.
- ZILL, D. G. **Equações Diferenciais com Aplicações em Modelagem**. 3rd. ed. [S./]: Cengage Learning, 2016.