TAREFAS MATEMÁTICAS COM POTENCIAL PARA O DESENVOLVIMENTO DO RACIOCÍNIO MATEMÁTICO

Arnold Vinicius Prado Souza
André Luis Trevisan
Guadalupe Cabañas Sanchez

PPGECT
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciência e Tecnologia
UTFPR
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
CAMPUS PONTA GROSSA

Arnold Vinicius Prado Souza
André Luis Trevisan
Guadalupe Cabañas Sanchez

TAREFAS MATEMÁTICAS COM POTENCIAL PARA O DESENVOLVIMENTO DO RACIOCÍNIO MATEMÁTICO

PPGECT Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciência e Tecnologia

UTFPR UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ CAMPUS PONTA GROSSA

BY NC SA
4.0 Internacional

Esta licença permite remixe, adaptação e criação a partir do trabalho, para fins não comerciais, desde que sejam atribuídos créditos ao(s) autor(es) e que licenciem as novas criações sob termos idênticos. Conteúdos elaborados por terceiros, citados e referenciados nesta obra não são cobertos pela licença.

APRESENTAÇÃO

O Produto educacional “Tarefas matemáticas com potencial para o desenvolvimento do raciocínio matemático” é fruto de um estudo de Doutorado realizado junto ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciência e Tecnologia (PPGECT) da UTFPR, no período de 2021 a 2025, com orientação do Prof. Dr. André Luís Trevisan e coorientação da Prof.ª Dra. Maria Guadalupe Cabañas Sanchez. A pesquisa origina-se de uma análise aprofundada de dissertações desenvolvidas por membros do mesmo grupo de pesquisa, no âmbito da disciplina de CDI.

Este material foi organizado com o intuito de apoiar docentes e formadores de docentes na construção de tarefas matemáticas com potencial para o desenvolvimento do raciocínio matemático (RM) em diferentes níveis de escolaridade. Nosso objetivo é compartilhar alguns aspectos dos processos de raciocínio mobilizados por estudantes a partir do trabalho com uma tarefas matemáticas.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Segundo o Parecer CNE/CES nº1/2019 (Brasil, 2019), nos últimos anos, as taxas de evasão nos cursos de Engenharia no Brasil têm crescido exponencialmente, atingindo a ordem de 50% nos cursos de graduação de ofertas de alguma Engenharia.

Apesar do indiscutível papel que a Matemática desempenha nesses cursos, ao fornecer aos estudantes uma base sólida para a aprendizagem de outras disciplinas, elevadas taxas de reprovação em disciplinas matemáticas têm comprometido a progressão acadêmica e contribuído para o aumento da evasão estudantil (Hora; Mesquita; Gomes, 2017). Segundo os autores, existe um consenso entre os pesquisadores, "de que a maior parte das reprovações ocorre nos primeiros semestres dos cursos" (Hora; Mesquita; Gomes, 2017, p. 72), quando o estudante recém-ingresso à universidade precisa cursar disciplinas de Matemática, como Cálculo Diferencial e Integral (CDI) – por vezes, denominado apenas "Cálculo", Probabilidade e Estatística, Geometria Analítica e Álgebra Linear.

Essas disciplinas devem contribuir para a formulação e solução de problemas de diversas áreas, para a análise e compreensão de fenômenos e sua validação por experimentação e para a comunicação eficaz, oral, escrita e gráfica (Brasil, 2019). Além disso, constituem importantes ferramentas no desenvolvimento de competências para a interpretação e resolução de problemas do cotidiano profissional (Guimarães, 2019).

Apesar dos avanços em fundamentos teóricos a respeito do ensino e da aprendizagem da matemática terem contribuído para as pesquisas no âmbito do Ensino Superior, poucos são os seus reflexos na sala de aula, especialmente nas disciplinas que contemplem essas áreas (Rasmussen; Marrongele; Borba, 2014). É fundamental, portanto, que nós, enquanto professores de cursos de Engenharia, reflitamos e pesquisemos a nossa situação particular para avançarmos na busca por minimizar os problemas por nós enfrentados (Trevisan; Borssoi; Elias , 2015).

Pesquisas desenvolvidas no âmbito do Ensino da Matemática, que apresentam resultados promissores, podem contribuir para a reverter o quadro de evasão nos cursos de Engenharia mencionado anteriormente. Essas pesquisas indicam que as abordagens de ensino mais promissoras são aquelas em que os estudantes colaboram entre si (Carlsen, 2018; Granberg; Olsson, 2015), participando ativamente de discussões matemáticas (Rodrigues; Menezes; Ponte, 2018; Ribeiro; Aguiar; Trevisan; Elias, 2021), resolvendo tarefas que são exploratórias ou matematicamente ricas (Ponte, 2005; White; Mesa, 2014).

Assim, a constituição de ambientes de ensino e de aprendizagem com tais características, no âmbito das disciplinas citadas (Couto; Fonseca; Trevisan, 2017; Trevisan; Mendes, 2018), assume importância singular no contexto do ensino em Engenharia.

A articulação entre a proposta de trabalho com a resolução de tarefas e o desenvolvimento de competências e habilidades preconizadas pelas DCN-Eng. (Brasil, 2019) é um aspecto fundamental a ser pensado no ensino de disciplinas matemáticas em cursos de Engenharia. A proposição de tarefas exploratórias (Ponte, 2005; 2014) pode contribuir em relação ao perfil e às competências esperadas do egresso de cursos de Engenharia, como: maior autonomia na construção do conhecimento matemático, maior clareza sobre a utilização dos conceitos matemáticos na resolução de problemas reais e o aprimoramento da capacidade de abstração.

Em suma, a Educação em Engenharia necessita priorizar a formação profissional e o desenvolvimento de competências e habilidades em seus estudantes e, assim, estratégias de ensino alternativas mostram-se como uma possibilidade de fomentar a aprendizagem em disciplinas matemáticas. O uso do termo “alternativa” para designar determinadas estratégias de ensino se justifica por apontar para práticas que se distanciam do ensino tradicional. Conforme Cabral (2015, p.228), “há uma preocupação com a produção de meios de recuperar o envolvimento dos alunos nos problemas com que lidam e que estão vinculados à condição de conhecer e trabalhar com ferramentas matemáticas”. Assim, ao adotar o termo, evidencia-se a intenção de destacar propostas que buscam superar a lógica transmissiva, favorecendo processos de ensino que promovem o maior engajamento e apropriação crítica dos conteúdos pelos estudantes.

JUSTIFICATIVA

Destacamos que a escolha pela articulação entre a Engenharia e a Matemática é fundamentada principalmente pela interdependência intrínseca entre essas áreas, sendo a Matemática uma linguagem universal que permite a modelagem, análise, resolução e comunicação de problemas complexos enfrentados pelos profissionais de Engenharia. Essa relação também é evidenciada pelas DCN-Eng (Brasil, 2019), que destacam a necessidade de egressos capazes de integrar conhecimento técnico com habilidades analíticas e raciocínio crítico para a solução de problemas reais que poderão ser enfrentados no exercício da profissão.

Entende-se que a Engenharia utiliza a Matemática como base para a modelagem de fenômenos físicos, químicos e computacionais, essenciais ao desenvolvimento de soluções tecnológicas. Desde o Cálculo Diferencial e Integral, que fundamenta a análise de sistemas dinâmicos, até a Álgebra Linear e a Estatística, que sustentam a resolução de problemas em áreas como controle de processos, otimização e inteligência artificial, a Matemática é indispensável para a formação de engenheiros competentes e aptos ao exercício da profissão.

A articulação entre Matemática e Engenharia potencializa o desenvolvimento das competências descritas pelas DCN-Eng, como: a) o raciocínio lógico-matemático, como habilidade central para analisar problemas de Engenharia e tomar decisões informadas; b) a capacidade de resolução de problemas, por meio de tarefas matemáticas que podem desenvolver a habilidade de decompor problemas complexos em partes manejáveis e abordá-los sistematicamente; e c) o pensamento crítico, já que o trabalho com problemas matemáticos fomenta a análise criteriosa de hipóteses e resultados, essencial para a prática da Engenharia.

A formação em Engenharia requer que os egressos possuam habilidades que vão além do domínio técnico, incluindo a capacidade de inovar e de atuar em ambientes multidisciplinares Esse desenvolvimento de competências mais gerais proporciona aos estudantes uma forma estruturada de compreender e resolver problemas complexos, muitas vezes multidimensionais, encontrados no exercício profissional.

O uso de estratégias de ensino alternativas possibilita que os estudantes contextualizem o conhecimento matemático no âmbito das demandas reais da Engenharia. Essa abordagem promove a integração prática e teórica, além de desenvolver competências como o trabalho colaborativo, a comunicação técnica e a criatividade.

O alinhamento entre as áreas de Matemática e Engenharia atende não apenas às demandas educacionais, mas também às necessidades da sociedade, que requer soluções inovadoras e eficientes para problemas em diferentes setores, como infraestrutura, energia, saúde e tecnologia. Acreditamos que esse alinhamento contribui para a formação de profissionais mais preparados para responder às complexidades do mundo contemporâneo.

O presente manual foi elaborado com o propósito de oferecer um suporte prático a docentes e formadores de docentes interessados na construção de tarefas matemáticas com potencial para o desenvolvimento do raciocínio matemático (RM). Entendemos que há uma demanda por materiais que auxiliem os professores a levar as contribuições da pesquisa acadêmica para a realidade da sala de aula, e é essa lacuna que este trabalho busca preencher, servindo como um guia para a criação de atividades que incentivem a exploração, a investigação e a argumentação matemática em diferentes níveis de escolaridade.

Para a sua organização, partimos de uma análise aprofundada de um conjunto de pesquisas. O material aqui apresentado é fruto da revisão de nove dissertações de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGMAT) da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), campi Cornélio Procópio e Londrina. Um ponto que confere unidade a estes trabalhos é o fato de terem sido todos desenvolvidos sob a mesma orientação, o que garante uma linha teórica e metodológica consistente como base para este manual.

A relevância deste conjunto de dissertações reside no fato de explorarem, de maneira aprofundada e com evidências da prática em sala de aula, uma estratégia de ensino que se distancia das abordagens mais tradicionais. Todos os trabalhos investigam temáticas relacionadas ao Ensino de Engenharia e ao Cálculo Diferencial e Integral (CDI) por meio do trabalho com "episódios de resolução de tarefas". É justamente essa abordagem, com comprovado potencial para mobilizar o raciocínio e o engajamento dos estudantes, que serve como ponto central para as discussões e propostas apresentadas ao longo deste material.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

UM DIÁLOGO COM A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Tarefas Matemáticas

A disciplina de CDI desempenha um papel fundamental em cursos de Engenharia, com contribuições importantes para a formação do perfil e o desenvolvimento de competências necessárias para o futuro engenheiro. Por essa razão, torna-se fundamental refletir sobre seu ensino. Dessa forma, há vários anos, mesmo antes da promulgação das DCN-Eng, um trabalho com episódios de resolução de tarefas articulado à disciplina de CDI em cursos de Engenharia vem sendo desenvolvido no câmpus Londrina da UTFPR, apresentando evidências de suas contribuições no processo formativo do futuro engenheiro, seja no desenvolvimento de maior autonomia na construção do conhecimento matemático, na clareza sobre a utilização dos conceitos matemáticos ou mesmo na resolução de problemas reais e de aprimoramento da capacidade de abstração.

A adoção dessa abordagem de ensino requer que os objetivos do ensino, os métodos e os espaços organizacionais sejam reestruturados, o que implica trabalhar com tarefas matemáticas que propiciem momentos reflexivos, integrativos e dialógicos. No âmbito dos cursos de Engenharia, esse ambiente de aprendizagem precisa ser propício para se desenvolverem as competências matemáticas necessárias para o estudante.

Sendo assim, a constituição de ambientes de ensino e aprendizagem baseados em episódios (momentos) de resolução de tarefas (Couto; Fonseca; Trevisan, 2017; Trevisan; Mendes, 2018; Trevisan, 2022), mostra-se como uma proposta viável que considera as condições reais de ensino, como turmas numerosas, ementas extensas e demandas da sala de aula, além da organização didático-pedagógica da instituição. Nesses momentos, que antecedem a explicação formal do professor e a apresentação de definições, os estudantes são convidados a “explorar intuitivamente, a partir das tarefas, conceitos que auxiliem na elaboração de conjecturas, testando-as e compartilhando-as com seus colegas” (Couto; Fonseca; Trevisan, 2017, p. 52).

A Figura 1 sintetiza os principais ideais do trabalho com episódios de tarefa, entendendo que o conceito é amplo e que, ao longo do trabalho com essa abordagem, podem se desencadear diferentes objetivos e ações.

Figura 1 – Ações relacionadas ao trabalho com episódio de resolução de tarefas

Fonte: Autoria própria (2025)

O termo "tarefa" é comumente utilizado no contexto de ensino e aprendizagem. Sua interpretação pode variar de acordo com o referencial adotado pelo pesquisador. Neste trabalho, uma tarefa matemática pode ser descrita como o conjunto abrangente de situações que o professor propõe para que os estudantes resolvam em sala de aula de Matemática, desde a resolução de exercícios algorítmicos até a realização de pesquisas ou a criação de modelos matemáticos (Trevisan *et al.*, 2015).

Assim, as tarefas matemáticas podem ser vistas como elementos que organizam a atividade dos aprendizes. Embora normalmente sejam propostas pelo professor, é fundamental que os alunos façam suas próprias interpretações, o que pode levar a diferentes respostas ou, em algumas situações, à ausência de ação (Ponte, 2014).

A seleção de tarefas adequadas e desafiadoras, bem como seu desenvolvimento em sala de aula, representa um grande desafio para o professor, sendo ambas as etapas essenciais em sua prática docente (Canavarro; Santos, 2012). Algumas características desejáveis para uma tarefa matemática são mostradas na Figura 2.

Figura 2 – Propostas relacionadas ao trabalho com tarefas

Fonte: Adaptado de Watson *et al.* (2013, p. 12).

De acordo com Ponte (2014), uma tarefa pode ter ou não potencialidades em relação aos conceitos e processos matemáticos que podem ser mobilizados. Assim, ao se envolverem em tarefas, os estudantes podem aprofundar sua compreensão de conceitos matemáticos, aprimorar seu pensamento crítico e analítico, fomentando uma atitude investigativa, testando hipóteses e buscando respostas de forma autônoma e proativa.

Ponte (2014), a partir do documento National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), aponta alguns papéis que as tarefas devem cumprir durante todo o processo de ensino dos estudantes, como mostra a Figura 3. É importante destacar que, embora esse documento seja direcionado à Educação Básica, o grupo de pesquisa do qual o proponente participa se apropriou de algumas dessas ideias para o trabalho que vem sendo desenvolvido no CDI.

Figura 3 – Papéis desempenhados pelas tarefas no processo de ensino

Fonte: Adaptado de Ponte (2014)

A Figura 3 destaca a importância de engajar os estudantes em tarefas que estimulem o pensamento crítico e a resolução de problemas, com foco no desenvolvimento de habilidades matemáticas. A intenção é criar um ambiente onde os estudantes possam explorar e formular ideias matemáticas de forma significativa, incentivando a mobilização resolver problemas complexos. Além disso, a comunicação eficaz e a sensibilização para a aplicação da matemática em contextos práticos são incentivadas, promovendo uma compreensão mais profunda e integrada da disciplina e de suas conexões com o mundo real. Nesse contexto, entende-se que esses apontamentos são válidos para todos os níveis de ensino, incluindo para ingressantes no Ensino Superior.

Stein e Smith (2009) classificam as tarefas matemáticas por níveis, propondo tarefas de baixa ou alta demanda cognitiva. As tarefas de baixa demanda cognitiva envolvem apenas a memorização e a aplicação de algoritmos, enquanto as tarefas de alto nível cognitivo possuem contexto e ideias matemáticas subjacentes, estimulando os alunos a pensar e elaborar suas próprias estratégias de resolução.

Ponte (2005), por sua vez, classifica as tarefas matemáticas como exercícios, problemas, explorações e investigações, com base em dois critérios: o grau de desafio (alta ou baixa demanda cognitiva) e o grau de estrutura (aberta ou fechada), como apresentado na Figura 4.

Figura 4 – Relação entre diversos tipos de tarefas, em termos do seu grau de desafio e de abertura

Fonte: Ponte (2005, p.8)

Com relação à estrutura das tarefas, de acordo com o esquema proposto por Ponte (2005), verifica-se que as tarefas fechadas são aquelas onde os dados são fornecidos e se pede uma resposta específica, enquanto as tarefas abertas são caracterizadas por um grau de indeterminação nos dados apresentados e nas perguntas formuladas.

Com base no modelo apresentado por Ponte (2005), no Quadro 1, apresentamos o que cada tipo de tarefa pode desenvolver, bem como seus processos e características, que podem contribuir para o desenvolvimento das competências matemáticas necessárias ao estudante.

Quadro 1 - Comparação dos diferentes tipos de tarefas

Tipo de Tarefa	Objetivo	Processo	Características
Exercício	Atividade destinada à aplicação e consolidação de conceitos previamente assimilados, visando reforçar e automatizar processos cognitivos já estabelecidos.	Envolve a aplicação de procedimentos e técnicas previamente internalizados, com foco na repetição controlada para reforçar habilidades.	• Repetição sistemática de procedimentos. • Enfatiza a memorização e automatização de habilidades cognitivas. • Baixa nível de desafio e reflexão crítica.
Exploração	Atividade de caráter inicial, que promove a familiarização do estudante com um conceito ou situação problema, sem exigir um planejamento detalhado, mas incentivando a descoberta por meio de abordagens experimentais.	Consiste na interação inicial com um problema ou conceito, onde o estudante experimenta e descobre soluções de maneira intuitiva, sem a necessidade de um planejamento estruturado.	• Incentiva a curiosidade e a construção de hipóteses. • Permite liberdade criativa e aproximação informal com o conteúdo. • Baixa estruturação formal do processo.
Problema	Situação didática que demanda do estudante a mobilização de conhecimentos e habilidades adquiridos para a resolução de um desafio concreto, implicando análise crítica e a busca por soluções.	Exige a mobilização ativa de conhecimentos prévios e competências para análise crítica da situação proposta, permitindo a busca de soluções inovadoras e contextualizadas.	• Grau intermediário de desafio • Promove o desenvolvimento de estratégias de resolução. • Requer raciocínio lógico e análise crítica. • Exige a aplicação integrada de conhecimentos teóricos e práticos.

Investigação	Processo sistemático de levantamento e análise de dados, no qual o aluno é desafiado a formular questões e desenvolver hipóteses, participando ativamente da construção de conhecimento e da resolução de problemas complexos.	Implica em um processo de pesquisa sistemática, que requer planejamento estruturado e metodológico, com a coleta e análise de dados para responder a questões previamente formuladas.	• Alto grau de desafio • Envolve a formulação de hipóteses e coleta de evidências. • Exige autonomia intelectual e planejamento estratégico. • Desenvolve habilidades de pesquisa e pensamento científico.

Fonte: Ponte (2005).

Esse quadro apresenta uma comparação entre os quatro tipos de tarefas, destacando suas diferenças em termos de objetivo, processo e características. Os exercícios focam na aplicação de conhecimentos previamente adquiridos, com processos repetitivos que visam à automatização de habilidades. A exploração permite que os alunos interajam de forma intuitiva com novos conteúdos, promovendo a curiosidade sem a necessidade de um planejamento estruturado. As tarefas de problema envolvem a mobilização de conhecimentos para resolver desafios específicos, estimulando o raciocínio lógico e a análise crítica. Por fim, as investigações exigem um processo mais complexo e estruturado, onde os alunos coletam dados e formulam hipóteses, desenvolvendo habilidades de pesquisa e pensamento científico. Essas diferenças refletem a progressão no nível de autonomia, desafio e reflexão exigidos em cada tipo de tarefa.

Com base nessas perspectivas apresentadas por diversos autores, referente à utilização do trabalho com episódios de tarefas, defendemos que seu uso é promissor em disciplinas relacionadas à área da Matemática, em cursos de Engenharia, em especial o CDI, pois estimula o pensamento crítico, a resolução de problemas complexos e o desenvolvimento da habilidade de aplicar conceitos matemáticos em contextos práticos. Isso prepara os estudantes para enfrentar desafios reais e promove uma compreensão mais profunda dos fundamentos matemáticos necessários para a Engenharia.

Raciocínio Matemático e seus processos

O conceito de raciocínio é polissêmico. Ponte, Quaresma e Mata-Pereira (2020) destacam que racionar é um processo mais elaborado do que simplesmente pensar, enquanto Brodie (2010) ressalta que raciocinamos para alcançar propósitos específicos, como convencer, resolver problemas ou construir ideias de forma coerente. Esse processo exige elaborar inferências justificadas com base nas informações disponíveis, indo além da simples memorização de conceitos ou da execução de procedimentos rotineiros (Mata-Pereira; Ponte, 2013). Partindo de fatos conhecidos, é possível gerar novas informações e conclusões de maneira fundamentada (Ponte *et al*., 2020).
A Figura 5 apresenta algumas perspectivas que a literatura traz em relação ao RM.

Figura 5 – Perspectivas em relação ao RM

"um conjunto de processos mentais complexos através dos quais se obtêm novas proposições (conhecimento novo) a partir de proposições conhecidas ou assumidas (conhecimento prévio)" (Oliveira, 2008, p. 3).

Stylianides (2009) defende que o raciocínio matemático é um processo de inferência que utiliza informação matemática já conhecida para obter novo conhecimento ou novas conclusões.

é "um processo evolutivo de conjeturar, generalizar, investigar porquê e desenvolver e avaliar argumentos" (Lannin, Ellis e Elliott, 2011, p. 12).

é um "processo de comunicação com outros ou consigo mesmo que permite inferir enunciados matemáticos a partir de outros enunciados matemáticos" Jeannotte e Kieran (2017, p. 7).

Fonte: Autoria própria (2025).

Assim, a partir da exposição da Figura 5, entende-se que o RM pode envolver tanto aspectos lógicos ou demonstrativos quanto "processos intuitivos, abrangendo a formulação de novas ideias e a obtenção e validação de conclusões" (Mata-Pereira; Ponte, 2017, p. 783).

Percebe-se ainda que o desenvolvimento do RM é fundamental para a aprendizagem da Matemática, sendo amplamente destacado nos currículos escolares (Jeannotte; Kieran, 2017). Esse valor curricular reflete uma compreensão mais abrangente do RM, que vai além de uma abordagem puramente lógica. Conforme Mata-Pereira e Ponte (2012), essa perspectiva inclui também a formulação e o teste de novas ideias. Ainda de acordo com as autoras, o RM pode ser entendido como um processo de comunicação, seja com os outros ou consigo mesmo, que possibilita a inferência de resultados matemáticos (Jeannotte; Kieran, 2017).

A ênfase no RM está alinhada à necessidade de preparar os alunos para enfrentar um mundo cada vez mais complexo, onde é crucial analisar situações inéditas, interpretar informações, justificar argumentos e tomar decisões embasadas. Nesse sentido, o fortalecimento do RM contribui para o desenvolvimento do raciocínio em geral (Brocardo *et al.*, 2022). Considerando isso, pensar em possibilidades que desenvolvam o RM é um desafio para os professores de Matemática e para pesquisadores que investigam sobre essa temática (Brodie, 2010).

Quadro 2 – Processos do Raciocínio Matemático

Relação	Processos	Definição
Semelhanças e diferenças	Generalizar	Infere narrativas sobre um conjunto de objetos matemáticos ou uma relação entre objetos do conjunto a partir de um subconjunto desse conjunto.
	Conjecturar	Infere uma narrativa sobre alguma regularidade com valor epistêmico provável ou provável e que tem potencial para teorização matemática.
	Identificar um padrão	Infere uma narrativa sobre uma relação recursiva entre objetos ou relações matemáticas.
	Comparar	Infere uma narrativa sobre objetos ou relações matemáticas.
	Classificar	Infere uma narrativa sobre uma classe de objetos baseada em propriedades e definições Matemáticas.
Validação	Justificativa	Um processo que ao buscar dados, garantir e respaldar, permite modificar o valor epistêmico de uma narrativa.
	Prova	Um processo que ao buscar dados, garantir e apoiar, modifica o valor epistêmico de uma narrativa de provável para verdadeiro.
	Formalizar	Um processo que, ao buscar dados, garantia e respaldo, modifica o valor epistêmico de uma narrativa de provável para verdadeiro, que tem como base a teoria matemática construída a priori e em realizações formalizadas (axiomas e teoremas).
Exemplificação	Exemplificação	Um processo que suporta outros processos, inferindo exemplos que auxiliam na busca de semelhanças e diferenças e da validação, gerando elementos que servirão para generalizar, conjecturar e até validar.

Fonte: Adaptado de Jeannote e Kieran (2017).

Jeannotte e Kieran (2017, p.6) apontam, ainda, quatro aspectos centrais do RM: “a dicotomia atividade/produto, a natureza inferencial de RM, a meta e as funções do raciocínio matemático e o que referem como aspetos estruturais e de processo”. A relação entre esses quatro aspectos e uma perspectiva cognitiva, que reconhece a importância da comunicação na realização de atividades, fundamenta a afirmação de que raciocinar matematicamente é “um processo de comunicação [...] que permite inferir enunciados matemáticos a partir de outros enunciados matemáticos” (Jeannotte; Kieran, 2017, p. 9).

De modo similar, Lannin, Ellis e Elliot (2011) descrevem que raciocinar matematicamente implica saber o porquê de certas coisas serem matematicamente apropriadas, e nesse caminho, ser capaz de resolver tipos particulares de problemas. O RM exige profundamente que as ideias matemáticas não sejam apenas conhecidas, mas também que elas sejam reconhecidas quando relacionadas com outras ideias matemáticas, envolvendo ideias e novas conexões entre as já existentes.

Na Figura 6, apresenta-se o modelo dos processos de RM proposto por Lannin, Ellis e Elliot (2011), destacando as principais características de cada processo.

Figura 6 – Processos de RM

Fonte: Adaptado de Lannin, Ellis e Elliot (2013)

Para Herbert e Bragg (2021), os aspectos essenciais do RM incluem: analisar, avaliar, explicar, justificar e generalizar. As autoras enfatizam a importância de um planejamento cuidadoso, incluindo a seleção de tarefas e a definição de objetivos e abordagens de ensino. Isso proporciona aos alunos oportunidades para raciocinar, analisar suas inferências, avaliá-las, explicá-las e colocá-las em prática, de modo a provar que suas hipóteses podem ser generalizadas.

Stylianides (2009) complementa essa perspectiva ao enfatizar que o RM envolve a capacidade de generalizar padrões, fazer conjecturas e visualizar relações matemáticas. Esse aspecto é crucial não apenas para resolver problemas específicos, mas também para entender profundamente os conceitos matemáticos e aplicá-los de maneira significativa em novas situações. Essa habilidade de generalização e transferência de conhecimento é fundamental para uma educação matemática eficaz e para preparar os alunos para os desafios complexos do mundo contemporâneo.

Nesse contexto, é fundamental que os educadores compreendam a natureza complexa do RM e adotem estratégias de ensino que não apenas ensinem procedimentos, mas também desenvolvam o pensamento crítico e a resolução de problemas. Segundo Oliveira, Araman e Trevisan (2022), a ênfase na compreensão conceitual e na aplicação dos conhecimentos matemáticos contribui significativamente para o desenvolvimento de competências essenciais para o sucesso acadêmico e profissional dos estudantes.

Em suma, o RM pode auxiliar no desenvolvimento de competências, como o pensamento crítico, a resolução de problemas e a criatividade, sendo necessária a adoção de estratégias pedagógicas que não apenas ensinem procedimentos matemáticos, mas também promovam uma compreensão conceitual e incentivem a aplicação flexível desses conceitos em diferentes contextos. Isso não só fortalece a base de conhecimento matemático dos alunos, mas também os prepara para que sejam pensadores independentes e adaptáveis em um mundo cada vez mais complexo e tecnológico.

AÇÕES PARA O DESENVOLVIMENTO DO RACIOCÍNIO MATEMÁTICO

Nesta seção, serão abordadas ações que podem contribuir para o desenvolvimento do RM. Para isso, serão destacados dois aspectos fundamentais: a escolha de tarefas matemáticas e o papel do professor nas discussões produtivas. Articuladas, essas ações visam criar um ambiente de aprendizagem dinâmico e estimulante, favorecendo a mobilização dos processos do RM.

Escolha de tarefas matemáticas

A tarefa é concebida como uma proposição apresentada pelo professor em sala de aula, com o objetivo de direcionar a atenção dos alunos para uma ideia matemática específica (Stein; Smith, 2009). Essa abordagem não apenas estimula o interesse dos alunos, mas também os engaja ativamente no processo de aprendizagem, o que pode permitir que construam um entendimento profundo e significativo da matemática.

Segundo Watson *et al.* (2013), as tarefas matemáticas oferecem aos estudantes a oportunidade de elaborar conceitos, formular ideias e desenvolver estratégias, contribuindo assim para o desenvolvimento do seu RM. Mata-Pereira e Ponte (2018) argumentam que tarefas desafiadoras, contextualizadas e com múltiplas soluções não apenas motivam os alunos, mas também promovem o engajamento cognitivo e a exploração de diferentes estratégias de resolução. Essa variedade de tarefas permite que os estudantes desenvolvam flexibilidade mental e aprendam a selecionar abordagens adequadas para cada situação, fomentando seu RM e sua capacidade de resolver problemas complexos.

Niss e Blum (2020) complementam essa visão argumentando que problemas matemáticos bem formulados não apenas desafiam os alunos a aplicar procedimentos aprendidos, mas também os incentivam a explorar conexões entre diferentes conceitos e a desenvolver argumentos fundamentados para justificar suas soluções. Nesse sentido, a seleção de tarefas e problemas matemáticos não deve ser aleatória, mas sim cuidadosamente planejada para estimular o pensamento crítico e promover um entendimento mais profundo dos conceitos.

De acordo com NCTM (2009), a seleção de problemas matemáticos significativos é essencial para engajar os alunos em atividades que promovam o desenvolvimento de habilidades matemáticas fundamentais. Problemas que requerem investigação, análise crítica e a aplicação de múltiplas estratégias não só desafiam os estudantes, mas também os motivam a perseverar na busca por soluções e a refletir sobre o processo de resolução de problemas. Dessa forma, a escolha criteriosa de tarefas e problemas matemáticos não apenas melhora o desempenho dos alunos, mas também desenvolve competências essenciais para o sucesso acadêmico e profissional.

Henriques (2010), em sua pesquisa com alunos do Ensino Superior, destaca as potencialidades das tarefas de exploração e investigação na aprendizagem, não apenas em relação aos conceitos e procedimentos, mas também no desenvolvimento de habilidades como o RM. Além disso, Brodie (2010) ressalta que tarefas que promovem resultados diversos ou diferentes representações, que resultam em desacordos e desafios, ou que oferecem aos alunos "oportunidades de investigar, analisar, explicar, conjecturar e justificar" (Brodie, 2010, p. 47), são igualmente eficazes no fomento do RM.

Tarefas que mobilizam os diferentes processos de RM precisam compreender aspectos como: analisar, avaliar, explicar, justificar e generalizar. É fundamental um planejamento cuidadoso, incluindo a seleção de tarefas, bem como a determinação de objetivos e abordagens de ensino que oportunizem aos alunos raciocinar, analisar suas inferências, avaliá-las e explicá-las, e colocá-las em prática a fim de provar que suas hipóteses podem ser generalizadas (Herbert; Bragg, 2021).

De acordo com a abordagem exploratória do ensino de matemática (Ponte, 2005), a escolha de tarefas adequadas é um dos principais recursos para promover atividades de aprendizagem que sejam realmente significativas para os alunos. Em particular, para desenvolver o RM, a seleção, adaptação ou criação de tarefas desempenha um papel essencial. A seguir, no Quadro 3, apresentamos alguns princípios a partir do projeto Reason (Delgado; Brocardo; Mendes, 2022), que orientam a elaboração de tarefas com o objetivo de estimular o raciocínio matemático dos alunos.

Quadro 3 – Princípios para a Criação de Tarefas que podem favorecer o Raciocínio Matemático

Princípios Gerais	Princípios específicos para promover a generalização	Princípios específicos para promover a justificação	Princípios específicos para promover a classificação
a) Incluir questões que permitem uma variedade de estratégias de resolução. b) Incluir questões que envolvem uma variedade de representações. c) Incluir questões que incentivem e favoreçam a reflexão sobre os processos de raciocínio utilizados.	a) Incluir questões que incentivem a formulação de generalizações baseadas na observação de semelhanças e diferenças entreo bjetos. b) Incluir questões que incentivem a formulação de generalizações a partir do conhecimento prévio. c) Incluir questões que incentivem a formulação de generalizações por transformação das condições dasituação.	a) Incluir questões que solicitem ou incentivem a justificação de respostas, ou de estratégias de resolução, ou de afirmações matemáticas. b) Incluir questões que solicitem ou incentivem justificações de natureza diversa, nomeadamente, com base na coerência lógica, com recurso a exemplos genéricos ou contraexemplos, por exaustão ou absurdo. c) Incluir questões que solicitem a identificação justificada da verdade ou falsidade de afirmações matemáticas. d) Incluir questões que solicitem ou incentivem a análise por parte do aluno de justificações apresentadas por outros.	a) Incluir questões que incentivem o estabelecimento de uma organização de objetos com base na identificação de características desses objetos. b) Incluir questões que incentivem o estabelecimento de uma organização hierárquica ou partitiva de classes.

Fonte: Adaptado de Delgado; Brocardo; Mendes (2022)

Os princípios aqui apresentados englobam os processos de RM que consideramos fundamentais, sem, no entanto, constituírem um conjunto de condições fixas e cumulativas. Em primeiro lugar, uma tarefa pode conter elementos que não estão incluídos neste conjunto, mas que ainda assim têm o potencial de estimular o raciocínio matemático, seja de forma geral ou em um processo específico. Em segundo lugar, para que uma tarefa seja eficaz em promover o RM dos alunos ou o desenvolvimento de um processo de raciocínio, não é imprescindível que ela atenda a todos os princípios mencionados.

Assim, a seleção cuidadosa de tarefas e problemas matemáticos desempenha um papel fundamental no desenvolvimento do RM dos estudantes. Essa abordagem pode cultivar habilidades essenciais, como a resolução de problemas, a análise crítica e a aprendizagem de conceitos matemáticos. Além de fortalecer a base de conhecimento matemático, essa prática prepara os alunos para enfrentar os desafios complexos do mundo contemporâneo com confiança e competência.

O papel do professor

É importante ressaltar que as tarefas, por si só, não determinam a qualidade da aprendizagem, pois essa qualidade também está ligada à forma como o professor as explora em sala de aula (Stylianides; Stylianides, 2008).

Dessa forma, o papel do professor no encaminhamento de discussões produtivas em sala de aula é crucial para o desenvolvimento do RM dos alunos. Mata-Pereira e Ponte (2018) argumentam que o professor não deve apenas fornecer respostas corretas, mas sim estimular o pensamento crítico e a argumentação entre os estudantes. Ao promover discussões que incentivam os alunos a justificar suas soluções matemáticas e a explorar diferentes métodos de resolução, o professor cria um ambiente propício para o desenvolvimento de um entendimento mais profundo dos conceitos.

Boaler (2016) salienta que o diálogo crítico em sala de aula não se limita à troca de ideias, mas também contribui para a conscientização e a ação transformadora. No contexto matemático, isso significa que as discussões em sala de aula não são apenas sobre resolver problemas, mas também sobre compreender as estruturas subjacentes a eles e sua aplicação na vida real. Ao adotar uma abordagem de ensino problematizadora, o professor capacita os alunos não apenas a resolver problemas matemáticos, mas também a questionar e transformar suas realidades através do conhecimento matemático.

Conforme discutido por Jeannotte e Kieran (2017), as discussões produtivas em sala de aula ajudam os alunos a desenvolver a capacidade de argumentar matematicamente. A argumentação envolve não apenas a justificação de respostas, mas também a análise crítica das soluções propostas pelos colegas, o que fortalece a compreensão dos princípios matemáticos subjacentes. Essa prática não só melhora a capacidade dos alunos de raciocinar matematicamente, mas também os prepara para comunicar eficazmente suas ideias e defender seus pontos de vista, habilidades essenciais tanto na educação quanto na vida profissional.

Na mesma direção, Mata-Pereira e Ponte (2018) enfatizam que o ambiente de aprendizagem colaborativo não apenas facilita a compreensão dos conceitos, mas também promove o desenvolvimento de habilidades sociais, como a cooperação, a comunicação e a resolução de conflitos. Através da discussão de problemas matemáticos, os alunos aprendem a trabalhar em equipe, a compartilhar ideias e a apreciar diferentes abordagens para a resolução de problemas (Oliveira, 2015). Essas habilidades são fundamentais não apenas para o sucesso acadêmico, mas também para a preparação dos alunos para desafios futuros em uma sociedade globalizada e tecnologicamente avançada.

Stein, Engle, Smith e Hughes (2008) reforçam que o papel do professor é fundamental para promover discussões produtivas. Nesse contexto, Bellini (2022) destaca a importância de um ambiente de aprendizagem onde o aluno se sinta à vontade, oferecendo tempo suficiente para que ele resolva problemas, reflita e teste suas conjecturas. "O aluno deve perceber que suas ideias são valorizadas e que se espera que as discuta com os colegas, sem a necessidade de validação constante do professor" (Ponte; Brocardo; Oliveira, 2019, p. 28).

Em suma, o papel do professor na facilitação de discussões produtivas em sala de aula é fundamental para o desenvolvimento do RM dos alunos. Ao criar um ambiente de aprendizagem colaborativo e reflexivo, o professor promove um entendimento mais profundo dos conceitos matemáticos, e também fortalece habilidades essenciais de argumentação, comunicação e aplicação do conhecimento. Investir no desenvolvimento dessas habilidades através de práticas pedagógicas críticas e contextuais não só enriquece a educação matemática, mas também capacita os alunos a se tornarem pensadores críticos e agentes de mudança em suas comunidades.

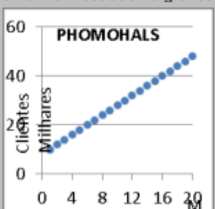
APRESENTAÇÃO DAS TAREFAS

A seguir, apresentamos uma seleção de tarefas utilizadas nas análises desta tese. Tais atividades foram escolhidas por seu potencial para desenvolver tanto as competências do futuro engenheiro quanto o raciocínio matemático.

Figura 7 - Tarefa 1

A empresa COMPUNET fornece conexões de Internet para seus atuais 10.000 consumidores. A COMPUNET está interessada na contratação de uma agência de publicidade para desenvolver uma campanha, para aumentar o número de consumidores. A empresa tem três agências de publicidade diferentes para escolher: PROMOHALS, H & G publicidade e SCHLEICH & Co. Cada empresa garante um aumento do lucro para COMPUNET, mas em ritmos diferentes. Seu trabalho é investigar qual agência é melhor para COMPUNET.

A campanha desenvolvida pela **PROMOHALS** promete um crescimento nos negócios, conforme mostrado no gráfico.



H & G Adversiting

A campanha da Agência de publicidade H & G Adversiting promete um crescimento mensal a uma taxa 10%. Ou seja, o lucro de cada mês é 10% maior que do mês anterior.

Schleich & Co promete o crescimento mostrado na Tabela.

Tempo (meses)	Clientes (Milhares)
1	10
2	15
3	19
4	23
5	27
6	30
7	32
8	34
9	36
10	38
11	39
12	40
13	41
14	42
15	42
16	43
17	43
18	44
19	44

Fonte: Ramos (2017)

Figura 8 - Tarefa 2 (Parte 1)

1. Levante algumas hipóteses sobre o comportamento de cada uma das sequências a seguir, buscando analisar:
   i) se os termos serão números positivos ou negativos;
   ii) se ela é crescente ou decrescente (ou ainda nenhuma dessas opções);
   iii) se, graficamente, será côncava para baixo ou côncava para cima. Apresente justificativas.

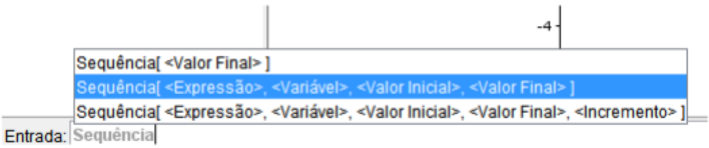
   a) $a_n = 20 - 5n$ b) $a_n = 100 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$ c) $a_n = (-1)^n \frac{n^2}{2^n}$

   d) $a_n = n^3 - 3n^2 + 1$

Fonte: Ramos (2017)

Figura 9 - Tarefa 2 (Parte 2)

2. Vamos agora analisar esses comportamentos com auxílio do **Geogebra**. Como exemplo, tome a sequência $a_n = n^3 - 3n^2 + 1$. No campo de entrada, digite **Sequência** e escolha a segunda opção, conforme abaixo:



Consideremos nossa variável sendo **n.** Em <Expressão>, coloque o seguinte par ordenado: (n,n^3-3n^2+1).

Dessa forma, teremos pontos plotados no plano cartesiano obedecendo à sequência informada. Substitua <Variável> por **n.** Substitua <Valor Inicial> por **1.** Por fim, substitua <Valor final> por **um valor de sua escolha.** Para melhor visualizar a tela e o comportamento da sequência, segure a tecla "Ctrl" e, com o botão esquerdo do mouse, re-escale o eixo y.

a) Utilize essa ferramenta para avaliar suas respostas na questão (1).

b) Investigue também as sequências a seguir:

i) $a_n = \frac{n}{n+1}$ ii) $a_n = \frac{n+20}{5n}$ iii) $a_n = \sqrt{n}$ iv) $a_n = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

v) $a_n = \sqrt[n]{a}$ (Automaticamente o programa irá lhe pedir para criar um controle deslizante para o número *a*)

c) Para cada uma das sequências investigadas até agora, descreva o que acontece quando tomamos valores "muito grandes" para **n**.

Fonte: Ramos (2017)

Figura 10 - Tarefa 3

1.Vamos investigar agora sequências definidas por mais de uma expressão. Um exemplo é:

$$a_n = \begin{cases} 2, & \text{é} \quad \text{múltiplo} \quad \text{de} \quad 10 \\ 1+\dfrac{1}{n}, & \text{para} \quad \text{qualquer} \quad \text{outro} \quad \text{valor} \end{cases}.$$

No Geogebra, utilize o mesmo comando “Sequência” já apresentado. No campo <Expressão>, coloque o par ordenado **(n, Se[Resto[n, 10] == 0, 2, 1+1/n])**. Dessa forma, teremos pontos plotados no plano cartesiano obedecendo à sequência informada. Note que a imagem da sequência é 2 se da divisão do número n por 10 restar 0. Caso contrário, a imagem é 1+1/n.]

Investigue essa sequência e também as apresentadas abaixo, levando em conta os aspectos pedidos na questão (1) e descrevendo o que acontece quando tomamos valores “muito grandes” para **n**.

i) $$a_n = \begin{cases} 1, & \text{é} \quad \text{múltiplo} \quad \text{de} \quad 10 \\ 1+\dfrac{1}{n}, & \text{para} \quad \text{qualquer} \quad \text{outro} \quad \text{valor} \end{cases}$$

ii) $$a_n = \begin{cases} 2, & \text{se} \quad n = 1000 \\ 1+\dfrac{1}{n}, & \text{para} \quad \text{qualquer} \quad \text{outro} \quad \text{valor} \end{cases}$$

iii) $$a_n = \begin{cases} 2, & \text{se} \quad 1000 \le n \le 10000 \\ 1-\dfrac{1}{n}, & \text{para} \quad \text{qualquer} \quad \text{outro} \quad \text{valor} \end{cases}$$

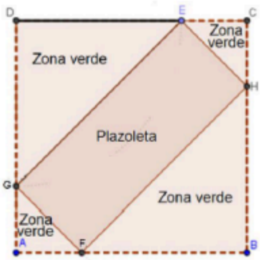
iv) $$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{se } n < 100 \\ 1, & \text{se } n > 100 \end{cases}$$

v) $$a_n = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad n \quad \text{é} \quad \text{par} \\ 1-\dfrac{1}{n}, & \text{se} \quad n \quad \text{é} \quad \text{ímpar} \end{cases}$$

vi) $$a_n = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad n \quad \text{é} \quad \text{par} \\ 0, & \text{se} \quad n \quad \text{é} \quad \text{ímpar} \end{cases}$$

Fonte: Ramos (2017)

Figura 11 - Tarefa Construção da Praça



SITUACIÓN 1: Introduciendo la covariación mediante las medidas de la plazoleta

Se desea construir una plazoleta en forma rectangular dentro de un terreno cuadrado de 80m de largo. La condición es que cada vértice de la plazoleta debe quedar sobre uno de los lados del terreno, una vez construida la plazoleta, las zonas restantes se reservarán para sembrar árboles, es decir serán zonas verdes (ver grafica).

¿Qué tan largo debe ser el segmento $\overline{DE}$, para que el área de la plazoleta sea máxima?

Texto que apresentamos como proposta da **Tarefa Construção da Praça**: Deseja-se construir uma praça em forma retangular dentro de um terreno quadrado de 80 m de largura. A condição é que cada vértice da praça deve estar sobre um dos lados do terreno. As partes restantes serão utilizadas como área verde.

A) Faça algumas representações do formato que a praça pode ter (mínimo 3 representações).

B) Nessa situação, o que se pode medir?

C) As grandezas listadas acima se relacionam?

D) Representar graficamente algumas das relações apresentadas.

Fonte: Gonçalves (2018)

Figura 12 - Tarefa da Garrafa (Parte 1)

Água é derramada em um vaso a uma taxa constante. Use essa informação e a forma do vaso para responder às perguntas a seguir.

a) O que você entende por taxa constante de derrame de água nessa situação?

b) Imagine a cena do vaso sendo enchido e escreva o que você acha que pode ser medido nessa situação.

c) Esboce um gráfico que relacione a altura de água na garrafa com o passar do tempo. Explique o raciocínio que levou ao seu esboço.

Abra o aplicativo 1 de ajuda (https://virtualmath.hva.nl/Babylon/help1-3d.html) e acione o enchimento do vaso. Perceba os intervalos de tempo, a variação da altura e a queda da água. Nesse aplicativo, o usuário clica em um bota com temporizador (inicia em 10 segundos até zerar) e assim vai preenchendo o vaso com "água".

A partir disso, você acha que alguma de suas respostas, a), b) e c), estão incorretas? Se sim, responda-a novamente e explique o quê e o porquê você acha que está incorreto. Se não, vá para a próxima questão.

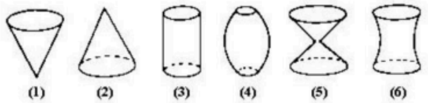
Fonte: Gonçalves (2018)

Figura 13 - Tarefa da Garrafa (Parte 2)

d) Construa gráficos que relacionem as diferentes grandezas envolvidas nessa situação.

As tarefas que seguem, a partir do item d, foram selecionadas para aplicação, porém não foram utilizadas. As situações foram elaboradas pelos autores, com contribuição do estudante de iniciação científica[20] Daniel Daré.

e) Agora, considerando que todos os vasos seguintes têm a mesma altura, esboce gráficos da altura em função do volume.



Para auxiliar, utilize-se do aplicativo de ajuda 2 (Problema do vaso – Dynagraph). É possível mudar as formas do vaso clicando em "Change vase chape". A janela de visualização 2 traz um Dynagraph, uma relação entre a altura e o tempo, para auxiliar a visualização da situação. Nesse aplicativo o usuário pode movimentar os x vermelhos dando o formato desejado ao vaso.

Fonte: Gonçalves (2018)

Figura 14 - Tarefa Dynagraphs

1 – O que é possível observar nessa tela? (a seguir apresentamos as imagens *Dyna 1, 2, 3* e *4*)

2 - Se você fosse fazer uma ligação para alguém descrevendo o que está representado na tela, como seria sua descrição? (escreva como falaria)

3 – Existe alguma coisa que muda e a outra não? Pode-se afirmar que há relação entre as partes que aparecem na tela?

4 – Se fosse criar algo que mostrasse a forma como as partes estão se relacionando, como seria sua representação? É possível um modelo algébrico? E que tal tentar representar graficamente a situação?

5 – Utilize seus dedos como recurso para explicar para seu amigo a forma como estão variando as grandezas envolvidas.

6 – As variações existentes são iguais para os dois pontos em movimento observados em cada situação, ou seja, a variação do ponto deslizante é também a do ponto que se move de acordo com o deslizante?

Abaixo trazemos alguns *prints* da tarefa que apresentamos como proposta da tarefa (chamaremos de Dyna 1, 2, 3 e 4):

Fonte: Gonçalves (2018)

Figura 15 - Tarefa das Tabelas

Como você descreveria, para uma pessoa que não esteja vendo o gráfico, cada das funções descritas por meio das tabelas abaixo.

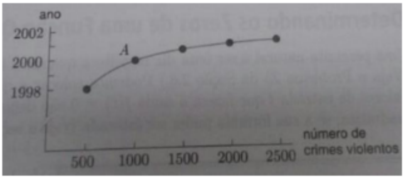
X	0	1	3	6
f(x)	1	1,3	1,7	2,2

X	12	15	18	21
h(x)	21,40	21,53	21,75	22,02

Fonte: Gonçalves (2018)

Figura 16 - Tarefa do Político

Um político concorrendo à reeleição declarou que o número de crimes violentos não está mais crescendo e que, atualmente, está sob controle. O gráfico apresentado na figura abaixo confirma essa afirmação? Por que sim ou por que não?



Fonte: Gonçalves (2018)

Figura 17 - Tarefa Depósito Bancário

Quando se faz um depósito bancário, a quantia depositada na conta cresce lentamente no início. À medida que o saldo vai aumentando, a quantia de dinheiro cresce mais rapidamente, visto que a conta vai recebendo os juros sobre os novos juros e também sobre a quantia original. Faça uma representação dessa situação.

Fonte: Gonçalves (2018)

Figura 18 - Tarefa Medicamento Injetado

Quando um medicamento é injetado na circulação sanguínea de uma pessoa, a quantidade da droga presente no corpo começa a crescer rapidamente. Se a pessoa toma injeções diárias, o corpo metaboliza a droga, de modo que a quantidade de droga presente no corpo continua crescendo, mas a uma taxa decrescente. Por fim, a quantidade se torna constante em um nível de saturação. Construa um gráfico que represente essa situação.

Fonte: Gonçalves (2018)

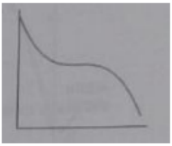
Figura 19 - Tarefa do Boato

Quando surge um boato, o número de pessoas que o ouviram começa crescendo lentamente. À medida que o boato se espalha, a taxa de crescimento torna-se maior (à medida que mais pessoas continuam a contar o boato aos seus amigos), em seguida, diminui novamente (quando quase todos já ouviram). Como se poderia representar essa situação?

Fonte: Gonçalves (2018)

Figura 20 - Tarefa Descreva a Situação

Descreva uma situação (de modo análogo ao apresentado nas questões anteriores) cuja representação corresponda ao gráfico ao lado. Em seguida, construa uma tabela que possa representar esse gráfico.



Fonte: Gonçalves (2018)

Figura 21 - Tarefa Escuro ou Frio

Você está sozinho em seu quarto mal iluminado e mal aquecido e acende uma única vela, de forma a "espantar a amaldiçoada escuridão". Deprimido com a situação, você caminha, afastando-se da vela, suspirando (mas sem apagá-la). A temperatura (em ºC) e a iluminação (em % da capacidade da vela) decrescem à medida que sua distância (em metros) da vela aumenta. Na verdade, você tem tabelas mostrando a situação. Suponha que você sente frio quando a temperatura está abaixo de 4,5º C e que você estará no escuro quando a iluminação é no máximo 50%. Você estará no escuro antes de sentir frio ou vice-versa? Explique.

Distância(m)	Temp(º C)	Ilum(%)
0	13,0	100
0,30	12,4	84
0,55	12,0	75
0,90	10,9	67
1,30	10,0	60
1,70	8,3	56
2,00	6,4	53

Fonte: Gonçalves (2018)

Figura 22 - Tarefa Investigativa

Grandes grupos de pessoas gostam de aproveitar a natureza e fazer trilhas em cachoeiras, parques, entre outros. Muitos preferem acampar nesses locais e desejam possuir locais para um descanso confortável e seguro.

Para isso, um grupo decidiu investigar a respeito do material e capacidade de tendas de acampamento.

Sabendo que uma lona é vendida em um formato quadrado de 25m².

As tendas de acampamento devem possuir o chão de lona também, a fim de evitar a possível entrada de insetos no decorrer da noite.

Momento 1: Existem diferentes modelos que podem ser utilizados na elaboração dessa barraca.

Explore e investigue alguns modelos que podem ser utilizados para a construção dessa barraca.

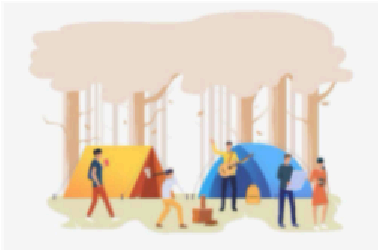
Realize investigações e construa um modelo que possa representar o volume dessa barraca escolhida.

Momento 2: No Momento 1, vocês desenvolveram a situação proposta utilizando alguns modelos particulares e atribuindo alguns valores para as dimensões da tenda de acampamento.

Nessa próxima etapa vocês devem definir variáveis e escrever um modelo algébrico que represente o volume dessa tenda de acampamento.

Realize algumas investigações sobre o tamanho das dimensões do modelo da tenda de acampamento para que seu volume seja máximo

Quais estratégias podem ser utilizadas nesta resolução? Quais as dimensões dessa barraca?



Tendas de Acampamento (Fonte: Freepik.com)

Fonte: Hening (2023)

Figura 23 - Tarefa matemática

<u>Tarefa matemática 1</u>

Deseja-se construir uma caixa aberta, sendo que o material da base custa R$10,00 por metro quadrado, ao passo que o material das laterais custa R$ 6,00 por metro quadrado.

a) Como vocês imaginam ser a aparência dessa caixa, para que o custo de sua produção seja mínimo?

b) Construa uma expressão matemática do custo total do material para fabricação da caixa.

c) O que muda (ou não) em suas respostas anteriores, se considerarmos que a caixa deve ter volume de $10m^3$?

d) E se consideramos que, além do volume de $10m^3$, a base da caixa deve ser retangular, com um dos lados igual ao dobro do outro?

Fonte: Lima (2024)

Figura 24 - Tarefa matemática

<u>Tarefa matemática 2</u>

No início da disciplina, vocês trabalharam com a seguinte situação:

"Deseja-se construir uma caixa aberta, sendo que o material da base custa R$10,00 por metro quadrado, ao passo que o material das laterais custa R$ 6,00 por metro quadrado".

Agora, com as ferramentas com a qual teve contato na disciplina, proponha duas formas de resolver o problema de determinar as dimensões dessa caixa, assumindo uma base retangular e que seu volume deve ser de $10m^3$.

Fonte: Lima (2024)

Figura 25 - Tarefa matemática (Parte 1)

<u>Tarefa matemática 3</u>

DENSIDADE E MASSA DE UMA HASTE UNIDIMENSIONAL (part. 1)

A densidade linear é a medida de uma quantidade de qualquer valor característico por unidade de comprimento. Considere uma haste longa e fina de massa m e comprimento Δx, a densidade deste objeto unidimensional, é expressa por $\rho = \frac{m}{\Delta x}$. Logo a massa desse objeto é dada pela fórmula $m = \Delta x \,.\, \rho$.

i. Qual é a massa de uma haste homogênea com comprimento 1,5m e densidade igual 2,5kg/m?

ii. A equação anterior define a massa desde que a densidade seja constante. Mas o que acontece se a densidade for variável? Ou seja, $m = \Delta x \,.\, \rho(x)$. Suponha que este objeto unidimensional esteja posicionado, ao longo de um eixo coordenado, entre $x = a$ e $x = b$, com densidade variável ρ(x). Explique como encontrar a massa total do objeto, usando palavras, desenhos, escrevendo fórmulas ou qualquer outro tipo de registro.

Fonte: Lima (2024)

Figura 26 - Tarefa matemática (Parte 2)

DENSIDADE E MASSA DE UMA LÂMINA NÃO HOMOGÊNEA (part 2)

Consideremos um objeto achatado idealizado suficientemente fino para ser imaginado como sendo uma região plana bidimensional. Dizemos que tal objeto é uma lâmina. Uma lâmina é dita homogênea se sua composição for inteiramente uniforme, caso contrário é dita não-homogênea. A densidade ρ de uma lâmina homogênea de massa m e área A é dada por $\rho = \frac{m}{A}$. Já em uma lâmina não-homogênea, a composição pode variar de ponto para ponto, uma definição apropriada de "densidade" deve refletir essa condição. Para estabelecer tal definição, suponha que a lâmina seja colocada em um plano xy A densidade no ponto (x, y) pode ser especificada por uma função $\rho(x, y)$, chamada de função densidade.

Considere uma lâmina de vértices (0, 0), (0, 4), (4, 4) e (4, 0), com densidade variável, ou seja, uma lâmina não-homogênea, com densidade $\rho(x, y, z) = x + y$ kg/m.

1. Considere essa lâmina subdividida em 4 retângulos, conforme figura abaixo. Admitindo que em cada retângulo a densidade é constante e igual ao valor no ponto representativo indicado, determine a massa total aproximada da lâmina.
2. Considere agora subdivisão dessa lâmina, em 8 retângulos, a sua escolha. Admitindo que em cada retângulo a densidade é constante e igual ao valor em um ponto representativo também da sua escolha, determine a massa total aproximada da lâmina.
3. Suponha agora um caso mais geral, em que a densidade da lâmina no ponto (x, y) pode ser especificada por uma função densidade $\rho(x, y)$. Explique como encontrar a massa total dessa lâmina não-homogênea, usando palavras, desenhos, escrevendo fórmulas ou qualquer outro tipo de registro.

Fonte: Lima (2024)

Figura 27 - Tarefa matemática (Parte 3)

DENSIDADE E MASSA DE UM SÓLIDO (part. 3)

Considere um sólido tridimensional G. Se G for homogêneo de massa m e volume V, então sua densidade é dada por. $\rho = \frac{m}{V}$. Se G for não-homogêneo e estiver em um sistema de coordenadas xyz, então sua densidade no ponto genérico (x, y, z) é especificada por uma função $\rho(x, y, z)$.

Explique como encontrar a massa total desse sólido não-homogênea, usando palavras, desenhos, escrevendo fórmulas ou qualquer outro tipo de registro.

Fonte: Lima (2024)

ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS

O TRABALHO COM EPISÓDIOS DE RESOLUÇÃO DE TAREFAS COMO UMA ESTRATÉGIA DE ENSINO

Avançando na análise, esta seção se debruça sobre as dissertações produzidas no âmbito do grupo de pesquisa no qual esta tese foi desenvolvida. O Quadro 4, a seguir, sistematiza os achados desses nove trabalhos, organizando-os em uma estrutura de três níveis para aprofundar a discussão.
Para cada dissertação, o quadro apresenta, um resumo dos principais achados ou do foco metodológico de cada pesquisa original (resultados). A nossa interpretação analítica sobre o significado desses resultados, ou seja, os princípios pedagógicos ou as implicações metodológicas que extraímos de cada estudo, respondendo à pergunta: "O que esses resultados nos ensinam sobre o processo de ensino e aprendizagem?". E uma projeção de como essas inferências se conectam diretamente ao desenvolvimento de competências do futuro engenheiro. Esta coluna responde à pergunta: "Como esse aprendizado pode ser usado para formar profissionais mais completos?", alinhando os achados das dissertações ao objetivo central da nossa investigação.

Quadro 4 – Sistematização e análise das dissertações do grupo de pesquisa

Dissertação	Resultados	Inferências	Possíveis Contribuições para a Formação do Engenheiro
Ramos (2017)	Desenvolvimento do conceito de limite no infinito a partir de sequências numéricas e critérios de convergência. Estímulo à criatividade e interação dos estudantes.	As tarefas abertas incentivam autonomia e flexibilidade no pensamento matemático.	A abordagem inicial de conceitos desafiadores com tarefas exploratórias pode ser um caminho eficaz para introduzir temas complexos, como o limite.
Gonçalves (2018)	Mobilização de ideias relacionadas ao Raciocínio Covariacional (RC). Identificação de lacunas em representações e na conexão entre conceitos.	Discussões coletivas aprofundam compreensão, mas tarefas precisam ser estruturadas para fortalecer múltiplas representações.	A abordagem inicial de conceitos desafiadores com tarefas exploratórias pode ser um caminho eficaz para introduzir temas complexos, como o limite.
Volpato (2022)	Papel do professor na promoção de discussões matemáticas que incentivaram a elaboração de conjecturas e justificativas.	Ações docentes que estimulam criatividade e reflexão crítica impactam desenvolvimento do raciocínio matemático.	Professores que assumem um papel ativo na facilitação de discussões matemáticas podem promover avanços significativos na compreensão dos estudantes.
Hening (2023)	Promoção de colaboração em ensino remoto utilizando ferramentas digitais. Incentivo à autonomia e trabalho coletivo.	O uso das tecnologias digitais pode compensar limitações do ensino remoto e criam ambientes ricos para a resolução de tarefas.	As tecnologias digitais são aliadas importantes para o ensino colaborativo, especialmente em contextos remotos, promovendo engajamento e aprendizagem ativa.

Lima (2024)	Identificação de manifestações de raciocínio criativo em tarefas desafiadoras.	Tarefas desafiadoras e contextualizadas incentivam criatividade e pensamento inovador.	A criatividade deve ser vista como uma competência essencial em Engenharia, e tarefas desafiadoras são ferramentas poderosas para desenvolvê-la.

Fonte: Autoria própria (2025)

Uma análise cronológica das dissertações sugere uma evolução no foco das pesquisas. Os trabalhos iniciais, como os de Ramos (2017) e Gonçalves (2018), concentram-se em estabelecer a eficácia da abordagem para a construção de conceitos matemáticos basilares (funções, limites e derivadas) e na promoção da autonomia discente. Em um segundo momento, pesquisas como a Volpato (2022) aprofunda a discussão sobre outros elementos da prática pedagógica, investigando o papel da avaliação formativa e das ações docentes na mediação da aprendizagem. Por fim, os trabalhos mais recentes, como os de Hening (2023) e Lima (2024), refletem desafios atuais da educação, abordando a integração de tecnologias digitais no processo colaborativo e o fomento explícito da criatividade como competência essencial para a inovação em Engenharia. Essa trajetória demonstra um amadurecimento do campo de pesquisa, que se move da validação do método para a exploração de suas potencialidades em contextos pedagógicos cada vez mais complexos e alinhados às novas demandas profissionais.

Um elemento transversal a todas as dissertações é o papel central desempenhado pela natureza das tarefas propostas. Longe de serem meros exercícios de fixação, as tarefas funcionam como catalisadoras do desenvolvimento de competências. Em trabalhos como o de Lima (2024), o caráter aberto e desafiador das tarefas é diretamente ligado ao estímulo do raciocínio criativo. Em Volpato (2022) mostra como tarefas que incentivam a formulação de conjecturas e justificativas são fundamentais para o desenvolvimento do raciocínio lógico e crítico. Fica evidente, portanto, que o sucesso da estratégia de ensino reside no design instrucional cuidadoso de tarefas que sejam investigativas, promovam a autonomia e exijam a colaboração, contribuindo no desenvolvimento do RM.

O trabalho com episódios de resolução de tarefas mostrou-se versátil, sendo aplicada desde a introdução intuitiva de conceitos fundamentais como limite (Ramos, 2017), até o desenvolvimento de raciocínios mais complexos, como o covariacional (Gonçalves, 2018) e o criativo (Lima, 2024), além de se adaptar a novos contextos, como o ensino remoto mediado por tecnologias (Hening, 2023). No que tange às tarefas, podemos destacar que elas permitiram: a construção gradual e sólida de conceitos matemáticos; o desenvolvimento de habilidades transversais como comunicação, criatividade e liderança e a promoção da autonomia e do trabalho colaborativo, fundamentais para a prática profissional desses futuros engenheiros.

Uma análise aprofundada das dissertações revela uma forte sinergia entre a abordagem de conceitos a partir de contextos práticos e o desenvolvimento do pensamento abstrato, essencial para a engenharia. Ramos (2017), ao explorar limites através de sequências, demonstram que a formalização matemática se torna mais significativa quando ancorada em experiências concretas.

Outro eixo de discussão fundamental é a centralidade da colaboração, que transcende a simples divisão de tarefas. A "elaboração de conjecturas e justificativas" (Volpato, 2022) indicam que a interação social qualificada impulsiona o rigor matemático e o pensamento crítico. Hening (2023) expande essa noção para o ambiente digital, provando que a tecnologia pode ser uma aliada na criação desses espaços de interação, mesmo à distância. Quando contextualizamos essa colaboração com o estímulo à criatividade (Lima, 2024), percebemos que a engenharia do futuro não será moldada por profissionais isolados, mas por equipes capazes de dialogar, questionar e construir soluções inovadoras a partir da inteligência coletiva.

A análise conjunta também permite refletir sobre a evolução do papel docente. O professor deixa de ser um mero transmissor de conteúdo para se tornar um arquiteto de experiências de aprendizagem, como sugere Volpato (2022) ao destacar o impacto das "ações docentes que estimulam criatividade e reflexão crítica". No entanto, o trabalho de Gonçalves (2018) lança um alerta importante: para que essas experiências sejam eficazes, as tarefas devem ser cuidadosamente estruturadas para não apenas mobilizar ideias, mas também para sanar lacunas específicas, como as dificuldades de conexão entre diferentes representações (gráfica, algébrica, etc.).

Um ponto de convergência crucial é a transição do foco na "resolução de problemas" para a "formulação de soluções criativas". Enquanto a abordagem tradicional do CDI muitas vezes se concentra em aplicar algoritmos a problemas padronizados, as pesquisas analisadas apontam para um caminho diferente. As "tarefas abertas" de Ramos (2017) e as "tarefas desafiadoras" de Lima (2024) não possuem um único caminho de resolução, exigindo dos estudantes flexibilidade de pensamento, exploração e a defesa de suas ideias. Isso está diretamente alinhado às competências exigidas pelas DCN-Eng, que preveem um profissional capaz de inovar. A criatividade, portanto, não deve ser vista como um talento inato ou um subproduto ocasional da aprendizagem, mas como uma competência a ser intencionalmente cultivada por meio de desafios matemáticos que valorizem a plausibilidade e a originalidade.

A partir da análise das dissertações, é possível inferir que os episódios de resolução de tarefas desempenham um papel central no desenvolvimento de competências dos acadêmicos do curso de Engenharia, alinhando-se também às DCN-Eng. Podemos destacar: a construção gradual e sólida de conceitos matemáticos; o desenvolvimento de habilidades transversais, como comunicação, criatividade e liderança, e a promoção da autonomia e do trabalho colaborativo, fundamentais para a prática profissional desses futuros engenheiros.

UMA ANÁLISE CRÍTICA DO POTENCIAL DAS TAREFAS A PARTIR DOS REGISTROS DE PRÁTICA

A análise conjunta das dissertações e dos registros de prática revela um modelo pedagógico consistente e bem fundamentado no qual as tarefas matemáticas deixam de ser meros exercícios de aplicação para se tornarem verdadeiros ambientes de investigação. A concepção dessas atividades é planejada com o propósito de desafiar os alunos e desenvolver as diversas habilidades que formam o Raciocínio Matemático (RM). Os diálogos dos estudantes e as intervenções dos professores, quando examinados em conjunto, não apenas confirmam o potencial dessas tarefas, mas também revelam a complexa relação entre a estrutura da atividade, o raciocínio do aluno e a mediação do professor na construção do pensamento matemático.

O ponto de partida para essa análise está no próprio desenho das tarefas. Seja nos problemas de otimização abertos propostos por Hening (2023) (como a construção de tendas ou piscinas), na análise comparativa de modelos de crescimento da tarefa "Compunet", ou na investigação qualitativa do enchimento da garrafa, identifica-se um princípio de elaboração comum: uma abertura intencional que estimula o pensamento. As tarefas não apresentam um caminho de resolução único e evidente. Essa característica é o principal estímulo para o raciocínio, pois leva os estudantes a abandonar uma postura passiva, de mera execução de algoritmos, para se engajarem ativamente na modelagem matemática. É nesse espaço de investigação que os pilares do RM são mobilizados: para avançar, os alunos precisam observar o comportamento das grandezas, perceber padrões e, de forma fundamental, formular conjecturas sobre as relações em jogo.

Os registros da "Tarefa da Garrafa" oferecem um exemplo claro de como um raciocínio sofisticado se desenvolve. A discussão do grupo vai além de uma simples observação ("se o tempo passa, a altura aumenta") e aprofunda-se na essência do Raciocínio Covariacional ao focar na taxa de variação. A afirmação de que a altura "cresce no começo rápido, depois ela diminui e depois volta mais rápido" representa a construção de uma generalização qualitativa sobre o comportamento da função, uma intuição essencial para o Cálculo. Analisando este mesmo episódio sob a ótica do Raciocínio Criativo, a iniciativa dos alunos de investigar uma relação não solicitada – a "velocidade de crescimento da

altura" em função do "raio" – é uma clara manifestação de flexibilidade e novidade. Este caso contrasta com as dificuldades vistas na "Tarefa das Tabelas", onde os dados discretos inicialmente levaram os alunos a um raciocínio linear, mostrando como a apresentação de uma tarefa pode tanto facilitar quanto restringir certas linhas de pensamento.
Contudo, o potencial de uma tarefa não se concretiza de forma isolada. Os diálogos mostram que o Raciocínio Matemático é um processo tanto individual quanto coletivo. A organização de justificativas, por exemplo, não é um ato puramente interno; ela é construída, testada e aprimorada durante as discussões em grupo, um processo alinhado às fases de interação e negociação da da Aprendizagem Colaborativa descritas por Hening. Nesse cenário, a mediação do professor, detalhada na análise da tarefa "Compunet", mostra-se decisiva. As ações de Convidar, Guiar/Apoiar e, principalmente, Desafiar ("o que eu poderia tá querendo que o número de clientes aumente muito rápido?") funcionam como suportes estratégicos. Elas movem a conversa de uma simples descrição de passos para uma argumentação conceitual, incentivando os alunos a conectar seus resultados matemáticos ao contexto do problema e a defender suas generalizações.
Finalmente, a sequência de tarefas sobre convergência de sequências mostra como essa abordagem exploratória é um caminho intencional em direção ao rigor matemático. A proposta parte de um problema concreto ("Compunet"), avança para uma exploração conceitual com o apoio de tecnologias e culmina na construção da definição formal de limite. Essa progressão supera a falsa separação entre intuição e formalismo. Fica claro que, ao permitir que os alunos primeiro percebam padrões e formulem conjecturas em contextos com significado, cria-se uma base de compreensão sólida sobre a qual a linguagem abstrata da matemática pode ser construída. O modelo pedagógico que se desenha a partir do conjunto dessas dissertações é, portanto, dinâmico e adaptável, com um valor que reside em sua estrutura replicável e continuamente atualizável, capaz de incorporar novos problemas sem perder o foco no que é essencial: o desenvolvimento de um Raciocínio Matemático autêntico,

criativo e bem fundamentado.
Aprofundando a análise, a perspectiva de Lima sobre o Raciocínio Criativo permite qualificar o tipo de pensamento que essas tarefas abertas promovem. O Raciocínio Criativo não se refere apenas a encontrar a resposta correta, mas ao processo de exploração e à geração de ideias originais. A "Tarefa da Garrafa" é, novamente, um exemplo contundente. Quando os alunos decidem, por conta própria, investigar a relação entre a "velocidade de crescimento da altura" e o "raio da secção", eles demonstram uma clara manifestação de novidade. Esta não era uma pergunta formulada pelo professor ou pela tarefa; foi uma questão que emergiu da própria curiosidade e engajamento do grupo. A flexibilidade, outra faceta do Raciocínio Criativo, manifesta manifesta-se na forma como eles persistem em representar essa relação complexa através de diferentes esboços gráficos, negociando e refinando suas ideias visuais na ausência de uma fórmula. A tarefa, portanto, não apenas permitiu, mas validou essa abordagem original como uma forma legítima de fazer matemática.
De forma complementar, os trabalhos de Ramos, Gonçalves e Volpato oferecem a base para analisar em profundidade o desenvolvimento do Raciocínio Covariacional nos diálogos dos alunos. Suas pesquisas nos permitem ir além da superfície das falas dos estudantes e identificar os níveis de raciocínio em ação. A discussão sobre a garrafa evidencia uma progressão clara: os alunos partem de uma coordenação inicial de variáveis ("tempo" e "altura"), avançam para a direção da mudança (ambas crescem) e atingem o nível mais sofisticado ao analisar como a taxa de variação da altura muda. A fala "quando chega mais 'pro' diâmetro ela diminui [a velocidade]" é a verbalização de uma compreensão da relação inversa entre o raio da secção e a velocidade de subida da altura. Este é um raciocínio covariacional avançado, que lida com a variação de uma taxa, sendo a base conceitual para a compreensão da derivada e da concavidade. As tarefas, sob esta ótica, funcionam como cenários que demandam esse tipo de raciocínio, tornando-o explícito e passível de discussão e refinamento.
Portanto, ao integrar as diferentes perspectivas, a análise

se torna mais completa e poderosa. As tarefas não apenas "desenvolvem o RM" de maneira genérica. Elas o fazem ao criar um espaço que exige e valoriza a criatividade, a novidade e a flexibilidade (Lima, 2024); ao mesmo tempo em que demandam uma reflexão profunda sobre a covariação e as taxas de mudança (Ramos, 2017; Gonçalves, 2018; Volpato, 2022) tudo isso sustentado por uma estrutura de colaboração e ferramentas que viabilizam a exploração (Hening, 2023). Os registros de prática são o elo que une essas teorias, mostrando que a formulação de conjecturas e a organização de justificativas são processos complexos que emergem quando tarefas desafiadoras são propostas em um ambiente de aprendizagem planejado para a investigação matemática autêntica.

Torna-se importante destacar o papel fundamental do impasse e da dificuldade no desenvolvimento do raciocínio dos alunos. As tarefas que mais contribuíram para o aprendizado não foram aquelas resolvidas de forma rápida e linear, mas sim as que geraram debates intensos e até momentos de frustração. Na "Tarefa da Garrafa", por exemplo, a longa e confusa discussão sobre o "bico" do gráfico é um dos momentos de maior aprendizado. A incerteza dos alunos sobre o formato exato da curva os forçou a articular e defender suas intuições sobre a taxa de variação de uma maneira muito mais profunda do que se a resposta fosse óbvia. A fala de um aluno, "pra saber se é bico de verdade precisa fazer conta", revela a tensão entre a necessidade de uma justificativa conceitual e a dependência de procedimentos algébricos, uma tensão central no aprendizado do Cálculo.

É justamente nesse esforço para superar os desafios que as diferentes formas de raciocínio são verdadeiramente testadas e aprimoradas. A necessidade de convencer um colega de que o raio não é constante, ou de que o crescimento não é linear, exige que os alunos transformem ideias vagas em argumentos estruturados. É nesse processo de negociação, como aponta Hening, que o conhecimento é construído de forma sólida. O erro inicial na "Tarefa das Tabelas", ao supor um padrão linear, não foi uma falha, mas uma hipótese que, ao ser testada e refutada em grupo, levou a uma compreensão mais sofisticada do que é uma taxa de variação não constante. Portanto, o potencial dessas tarefas não está apenas em levar os alunos a uma resposta correta, mas em sua capacidade de gerar dúvidas significativas, provocar debates e exigir que os estudantes construam, defendam e refinem suas próprias ideias matemáticas.

Por fim, uma análise dos registros e das propostas das dissertações revela uma consequência fundamental desta abordagem: ela exige uma redefinição completa do papel do professor e dos métodos de avaliação. O professor não é mais apenas quem expõe o conteúdo, mas passa a ser quem organiza as atividades e guia as conversas mais desafiadoras. A sua principal ferramenta não é a explicação, mas a pergunta estratégica. Vemos isso claramente na tarefa "Compunet", onde o professor usa questionamentos para guiar e desafiar os alunos, ou na "Tarefa da Garrafa", onde o pesquisador se abstém de dar respostas diretas, mesmo quando solicitado, para manter o processo de investigação dos alunos ativo.

Essa mudança na prática docente levanta uma questão central: como avaliar o conhecimento que está sendo construído? Se o aprendizado mais valioso ocorre nos debates, nas conjecturas erradas que são refinadas e nas justificativas construídas em grupo, então uma prova tradicional, focada em respostas corretas para problemas padronizados, torna-se insuficiente. Ela seria incapaz de capturar o desenvolvimento do Raciocínio Criativo de um aluno que propõe uma linha de investigação original, ou a evolução do Raciocínio Covariacional de um grupo que debate a forma de um gráfico. A avaliação, nesse modelo, precisa se aproximar do próprio ato de pesquisar: trata-se de ouvir atentamente as discussões, analisar as estratégias propostas e valorizar a qualidade da argumentação, e não apenas o resultado final. O verdadeiro indicador de aprendizagem passa a ser a capacidade do aluno de participar de um discurso matemático, formulando, defendendo e ajustando suas ideias em diálogo com os outros.

Os diálogos revelam que o processo de aprendizagem não é apenas conceitual, mas também linguístico. Os estudantes chegam à sala de aula com uma linguagem do dia a dia, e as tarefas servem como um espaço de tradução, onde eles

aprendem a conectar suas expressões intuitivas com o vocabulário formal e preciso da matemática.
Inicialmente, na "Tarefa da Garrafa", os alunos descrevem um fenômeno complexo – a mudança na taxa de variação – usando palavras simples e eficazes como "rápido", "diminui" e "demora mais pra encher". Essa linguagem informal não deve ser vista como uma falta de rigor, mas como um primeiro passo essencial para a apropriação do conceito. É a maneira que eles encontram para "sentir" o problema e construir um modelo mental antes de qualquer formalização. A discussão sobre o crescimento das empresas na tarefa "Compunet" também se baseia em ideias como "crescimento constante" ou "crescimento que se estabiliza", que são descrições qualitativas poderosas.
No entanto, o verdadeiro potencial das tarefas se manifesta quando elas expõem os limites dessa linguagem informal. Na mesma "Tarefa da Garrafa", a dificuldade em descrever o "bico" do gráfico mostra exatamente esse ponto de transição. Os alunos sentem que suas palavras não são mais suficientes e que precisam de uma ferramenta mais precisa, como evidenciado na fala "pra saber se é bico de verdade precisa fazer conta". É nesse momento de necessidade que termos formais como "derivada" começam a ser mencionados pelo grupo, ainda que de forma incerta. A tarefa, portanto, não apenas apresenta um conceito, mas cria a demanda por ele.
O caminho proposto pela sequência de tarefas sobre convergência é um bom exemplo de como essa abordagem funciona. O objetivo é levar os alunos de uma compreensão inicial e intuitiva de "aproximação" para a definição formal de limite. As tarefas intermediárias, que pedem aos alunos para que melhorem suas próprias definições, são atividades que os fazem pensar sobre o significado exato das palavras. Eles são desafiados a transformar uma ideia vaga de "chegar perto" na relação mais rigorosa entre épsilon e N. Ao passar por esse processo, a linguagem formal da matemática deixa de ser um conjunto de regras a serem memorizadas e passa a ser vista como uma ferramenta útil e necessária para expressar ideias complexas sem deixar dúvidas. Assim, as tarefas não ensinam apenas os conceitos matemáticos; elas ajudam os alunos a aprender a falar

matematicamente, um passo fundamental para que desenvolvam a capacidade de pensar por conta própria em matemática.

Com base no que foi discutido ao longo deste trabalho, foi elaborado um modelo de ficha de tarefa que pode ser utilizado para estruturar a análise de todas as atividades apresentadas. Para exemplificar sua aplicação, utilizamos algumas das tarefas como modelo descritivo. No entanto, essa ficha foi concebida para ser uma estrutura flexível, podendo ser facilmente adaptada para documentar e analisar o potencial de qualquer uma das outras tarefas, como "Compunet", "Tabelas" ou "Tendas", entre outras, servindo como uma ferramenta para o professor avaliar e registrar o desenvolvimento do raciocínio matemático em suas aulas, como mostra os Quadros de análise a seguir.

Quadro 5 - Modelo de Ficha de Tarefa da Garrafa

Título da Tarefa	**Tarefa da Garrafa**
Descrição/Enunciado	Aos estudantes é apresentada a imagem de uma garrafa com formato irregular (base estreita, meio largo e bocal estreito). A tarefa propõe que eles investiguem o que acontece quando a garrafa é enchida com água a uma taxa de vazão constante. Os itens solicitam que os alunos identifiquem as grandezas envolvidas na situação, discutam o conceito de "taxa constante" e, principalmente, esbocem e justifiquem o gráfico que relaciona a altura da água na garrafa em função do tempo.
Conteúdos matemáticos envolvidos	- Funções e Relações entre Variáveis (altura, tempo, raio, volume) - Taxa de Variação (constante e variável) - Análise Gráfica (crescimento, decrescimento, concavidade) - Conceitos Intuitivos de Derivada (velocidade de crescimento da altura) - Raciocínio Proporcional e Covariacional.
Objetivos de Aprendizagem	- Diferenciar entre crescimento linear e não linear. - Relacionar a forma de um objeto tridimensional com a taxa de variação de uma de suas dimensões. - Construir e justificar um gráfico qualitativo a partir de uma situação-problema, sem a necessidade de uma expressão algébrica.

Registros de prática coletados e discussão do potencial para o desenvolvimento do Raciocínio Matemático (RM)	Os registros de prática (transcrições de áudio dos alunos) revelam um imenso potencial desta tarefa para o desenvolvimento do RM, pois ela cria uma necessidade genuína de investigar, em vez de apenas aplicar uma fórmula. Percepção de Padrões: A primeira ação dos alunos é observar a imagem e perceber o padrão fundamental que rege o problema: a largura da garrafa (o raio) não é constante. Essa percepção inicial é a base para a conjectura de que a altura não subirá de maneira uniforme. Eles identificam a relação de causa e efeito entre a geometria do objeto e o comportamento dinâmico do enchimento. Elaboração de Conjecturas: A tarefa leva os alunos a elaborarem conjecturas sobre o comportamento do gráfico. A discussão inicial já parte da hipótese de que o gráfico não será uma reta. As primeiras tentativas de descrever o que acontece são conjecturas qualitativas: "cresce no começo rápido, depois ela diminui e depois volta mais rápido". Essa fala é uma conjectura sobre a taxa de variação da função, um passo cognitivo muito além de simplesmente descrever que a altura aumenta com o tempo. Formulação de Generalizações: A partir das conjecturas, os alunos buscam formular uma generalização que descreva todo o processo. O esboço do gráfico (com a concavidade para baixo no meio e para cima nas extremidades) é a formalização visual dessa generalização. Eles conseguem abstrair as observações pontuais ("no começo", "no meio", "no fim") para um modelo contínuo que representa a relação entre altura e tempo ao longo de todo o enchimento. Organização de Justificativas: O potencial mais rico da tarefa manifesta-se na organização de justificativas. O longo e detalhado debate sobre o "bico" do gráfico é um exemplo claro desse processo. Os alunos são forçados a defender suas ideias e a construir argumentos para convencer os colegas. A fala "pra saber se é bico de verdade precisa fazer conta" mostra a tensão entre a justificativa visual/conceitual e a necessidade de um rigor algébrico. A necessidade de explicar por que o gráfico tem aquele formato, conectando a largura da garrafa com a "velocidade" do enchimento, é um exercício profundo de argumentação matemática, que transforma intuições vagas em um raciocínio estruturado. A tarefa, portanto, não apenas permite, mas exige que os alunos justifiquem suas conclusões, tornando o processo de argumentação central para a resolução do problema.

Competências do Futuro Engenheiro	- Resolução de Problemas Complexos: A tarefa exige que os alunos modelem uma situação não padronizada, sem um caminho de resolução óbvio. - Pensamento Crítico: Os alunos precisam analisar a relação entre múltiplas variáveis e justificar suas conclusões. - Criatividade e Inovação (Lima): A tarefa abre espaço para que os alunos explorem relações não previstas, como a análise da "velocidade em função do raio", uma manifestação de Raciocínio Criativo.
Pontos Críticos e Dificuldades Previstas	- Pensamento Linear: Risco de os alunos inicialmente esboçarem uma reta, ignorando a variação do raio. - Conceito de Taxa de Variação: Dificuldade em diferenciar "a altura está aumentando" (variação) de "a velocidade com que a altura aumenta está mudando" (taxa de variação). - Formalismo vs. Intuição: Tensão revelada na fala "precisa fazer conta", mostrando a dependência de fórmulas para validar um raciocínio conceitual.
Sugestões de Mediação Docente (Volpato)	- Perguntas Desafiadoras: Em vez de dar a resposta, o professor pode perguntar: "Em qual parte da garrafa um mesmo volume de água causa a maior mudança na altura? E a menor? Como isso apareceria no gráfico?". - Foco na Justificativa: Incentivar a pergunta "Por quê?" entre os próprios alunos durante o debate. - Valorizar o Processo: Validar a exploração de novas relações (como a velocidade vs. raio), mesmo que não estivesse no roteiro inicial, tratando-a como uma descoberta valiosa.
Conexões e Extensões	- Tecnologias Digitais (Hening): A tarefa pode ser estendida com o uso do GeoGebra ou outro software para simular o enchimento, permitindo que os alunos comparem seus esboços com o modelo computacional. - Conexão com o Cálculo Formal: Esta tarefa serve como uma introdução perfeita para a discussão formal de derivadas e concavidade. O debate sobre o "bico" pode ser retomado ao se estudar pontos de inflexão e diferenciabilidade.

Fonte: Autoria própria (2025)

Quadro 6 - Modelo de Ficha de Tarefa Compunet

Título da Tarefa	Tarefa Compunet (Análise de Crescimento)
Descrição/Enunciado	A tarefa apresenta diferentes modelos (sequências ou funções) que descrevem o crescimento do número de clientes de uma empresa de tecnologia fictícia, a "Compunet", ao longo do tempo. O enunciado solicita que os estudantes analisem e comparem o comportamento desses modelos de crescimento a longo prazo, em vez de apenas fazer cálculos pontuais. O foco é na discussão sobre qual modelo é o mais sustentável ou vantajoso e como o número de clientes se estabiliza ou "converge".
Conteúdos matemáticos envolvidos	- Convergência de Sequências e Séries. - Funções e Modelos de Crescimento (linear, exponencial, logístico). - Conceito Intuitivo de Limite. - Relação entre a Taxa de Variação (derivada) e o crescimento do negócio. - Análise Comparativa de Funções.
Objetivos de Aprendizagem	- Compreender o conceito de convergência e limite em um contexto prático. - Diferenciar e justificar modelos de crescimento. - Conectar a análise matemática com a tomada de decisão em um cenário de negócios/engenharia. - Criar uma base conceitual sólida para a definição formal de limite.
Registros de prática coletados e discussão do potencial para o desenvolvimento do Raciocínio Matemático (RM)	Esta tarefa é citada por seu papel fundamental como introdução a um conceito formal (limite). Ela mobiliza o RM ao exigir: Percepção de Padrões: O aluno é forçado a observar o comportamento das grandezas e perceber os padrões de crescimento de cada modelo. Elaboração de Conjecturas: Ao comparar os modelos, os alunos precisam fazer conjecturas sobre o que acontecerá "muito longe" no tempo (o comportamento assintótico), antes de ter a ferramenta formal do limite. Organização de Justificativas: O potencial da tarefa está no debate em grupo sobre a validade e a pertinência de cada modelo para o contexto do problema. O professor atua desafiando o grupo com perguntas como: "o que eu poderia tá querendo que o número de clientes aumente muito rápido?", o que exige que o aluno justifique a matemática usando a linguagem do problema real. O trabalho avança de uma simples descrição de passos para uma argumentação conceitual.

Competências do Futuro Engenheiro	- Resolução de Problemas Complexos: Envolve a análise e escolha do melhor modelo entre múltiplas opções, uma situação comum na engenharia e negócios. - Pensamento Crítico: Exigência de analisar as hipóteses subjacentes a cada modelo matemático. - Comunicação Eficaz: A tarefa é projetada para o debate e a negociação de ideias, fortalecendo a capacidade de defender a melhor solução técnica para o problema.
Pontos Críticos e Dificuldades Previstas	- Formalismo vs. Intuição: Dificuldade na transição entre a ideia intuitiva de que um valor "se aproxima" de um número e a necessidade do rigor da definição formal de limite. - Significado Contextual: Para alunos com
	raciocínio mais técnico, pode haver dificuldade em conectar os resultados numéricos ou algébricos à realidade do negócio (o que significa a taxa de variação no contexto de "clientes").
Sugestões de Mediação Docente	- Estratégias de Desafio: Usar perguntas desafiadoras que forcem a conexão entre o resultado matemático e o contexto real, como a pergunta sobre o aumento rápido de clientes. - Foco na Argumentação: Convidar e apoiar a discussão, garantindo que os alunos conectem seus resultados matemáticos ao contexto do problema para defender suas generalizações. - Progressão Intencional: Posicionar esta tarefa como o primeiro passo de uma sequência, usando-a para criar a demanda pelo conceito de limite, que será formalizado posteriormente.
Conexões e Extensões	- Tecnologias Digitais: Uso de softwares ou planilhas para simular o crescimento de clientes ao longo de muitos períodos (tendendo ao infinito) e visualizar a convergência. - Conexão com o Cálculo Formal: Utilizar a discussão sobre convergência para introduzir e formalizar a definição de limite de sequências e, posteriormente, de funções.

Fonte: Autoria própria (2025)

Quadro 7 - Modelo de Ficha de Tarefa Construção da Praça

Título da Tarefa	Tarefa Construção da Praça (Gonçalves, 2018)
Descrição/ Enunciado	A tarefa propõe aos alunos que modelem e otimizem a área ou o perímetro de uma praça a ser construída, muitas vezes com restrições orçamentárias ou de materiais (cercas), e geralmente envolvendo diferentes formatos geométricos. A essência é determinar as dimensões ideais de uma forma (como um retângulo) para maximizar a área (ou minimizar o perímetro), dado um recurso fixo. A tarefa é aberta, permitindo a exploração de diversas estratégias geométricas antes do cálculo formal.
Conteúdos matemáticos envolvidos	- Funções de Duas Variáveis (introdução intuitiva). - Otimização Clássica (Máximos e Mínimos). - Conceitos de Derivada (para encontrar pontos críticos e validar o máximo/mínimo). - Modelagem Matemática (Tradução do problema real para a linguagem algébrica). - Geometria Plana (Área e Perímetro).
Objetivos de Aprendizagem	- Aplicar a otimização matemática para resolver problemas práticos de engenharia (uso eficiente de recursos). - Modelar situações reais, transformando restrições do problema em equações. - Desenvolver o Raciocínio Covariacional ao observar como as mudanças em uma dimensão afetam a outra e o resultado final.
Registros de prática coletados e discussão do potencial para o desenvolvimento do Raciocínio Matemático (RM)	O potencial reside na Elaboração de Conjecturas e na Organização de Justificativas. Os alunos partem de uma Percepção de Padrões intuitiva (testam valores, como 1x9, 2x8, etc.) e rapidamente conjecturam que a melhor forma está ligada a um quadrado (ou um formato "mais simétrico"). O RM se manifesta no momento em que eles tentam justificar essa intuição: Por que o quadrado usa melhor o material? A dificuldade emerge quando eles passam da tabela de valores para a fórmula (modelagem), e é a necessidade de provar que a conjectura é válida para todos os números, e não só para os testados, que cria a demanda genuína pela Derivada.
Competências do Futuro Engenheiro	- Modelagem e Solução de Problemas: Exige a tradução de um cenário prático para um modelo matemático. - Pensamento Crítico: Análise de diferentes soluções possíveis (testar valores vs. usar o Cálculo) e seleção da mais eficiente. - Criatividade e Inovação: Busca por formas alternativas de alocar o material, indo além da solução retangular simples.

Pontos Críticos e Dificuldades Previstas	- Foco em Resultados Pontuais: Risco de os alunos pararem na conjectura visual/numérica, sem buscar uma prova formal (a fórmula da derivada). - Erro de Modelagem: Dificuldade em expressar a área/volume em função de apenas uma variável. - Diferenciação: Falha na interpretação da derivada como a ferramenta que garante o ponto de máximo (justificativa de rigor).
Sugestões de Mediação Docente	- Perguntas Desafiadoras: Perguntar: "Como você pode ter certeza que não existe uma dimensão com casas decimais que dá uma área ainda maior?" - Foco na Generalização: Incentivar a criação de uma função genérica em vez de apenas testar números inteiros. - Conexão Contextual: Retomar a pergunta sobre o uso eficiente de recursos no cenário de engenharia.
Conexões e Extensões	- Tecnologias Digitais: Uso de softwares como GeoGebra ou planilhas para visualizar o gráfico da função e confirmar o ponto de máximo. - Cálculo de Múltiplas Variáveis: Estender a otimização para problemas com três ou mais variáveis,introduzindo o conceito de derivadas parciais.

Fonte: Autoria própria (2025)

Quadro 8 - Modelo de Ficha de Tarefa de Otimização - Construção de Tendas

Título da Tarefa	**Tarefa de Otimização - Construção de Tendas (Hening)**
Descrição/Enunciado	Esta tarefa de otimização geralmente envolve o design de uma estrutura (como uma tenda, um silo ou uma caixa) que precisa satisfazer a dois requisitos conflitantes: maximizar o volume (para caber mais coisas) e minimizar o custo de material (superfície). Aos estudantes é dado o custo do material por metro quadrado e solicitado que encontrem as dimensões da estrutura que otimizem a relação volume/custo.
Conteúdos matemáticos envolvidos	- Funções e Relações entre Volume, Área de Superfície e Dimensões. - Otimização (Máximos e Mínimos Absolutos e Locais). - Derivada como Taxa de Variação. - Modelagem de Problemas Tridimensionais.
Objetivos de Aprendizagem	- Integrar conceitos de geometria espacial e cálculo para modelar um problema de engenharia. - Utilizar as

	derivadas para justificar o ponto de máxima eficiência (custo/volume). - Desenvolver o Raciocínio Covariacional ao analisar como o volume muda em relação ao custo.
Registros de prática coletados e discussão do potencial para o desenvolvimento do Raciocínio Matemático (RM)	Esta tarefa é um motor de Raciocínio Criativo (Lima), pois exige que os alunos proponham soluções originais e viáveis. A Percepção de Padrões se manifesta quando eles testam diferentes formas para a tenda e buscam o design mais econômico. A discussão em grupo força a Organização de Justificativas sobre a melhor escolha: "Não basta ser o maior volume, tem que ser o mais barato por litro". O impasse ocorre na negociação entre as prioridades (Volume vs. Custo), exigindo que o grupo defina o que significa "otimizar" naquele contexto, um passo que liga a matemática à tomada de decisão profissional
Competências do Futuro Engenheiro	- Resolução de Problemas Complexos: Lida com restrições do mundo real (custo, material) e objetivos conflitantes. - Tomada de Decisão: Exige a justificativa de uma escolha de design baseada em critérios matemáticos e econômicos. - Comunicação Técnica: Necessidade de apresentar as dimensões ideais e defender a escolha do modelo perante os colegas.
Pontos Críticos e Dificuldades Previstas	- Dificuldade Geométrica: Alunos podem ter problemas em calcular a área superficial de formatos complexos (tendas), focando apenas no volume. - Modelagem de Restrições: Dificuldade em incluir a restrição de custo na função de otimização. - Abandono do Raciocínio: Risco de voltar a testar valores em vez de usar a derivada, demonstrando a dependência do formalismo.
Sugestões de Mediação Docente	- Foco no Impasse: Usar o conflito (volume alto = custo alto) para desafiar o aluno a encontrar o ponto de equilíbrio perfeito. - Valorizar a Exploração: Validar a fase inicial de testar formas e dimensões, tratando-a como uma etapa essencial da Exploração conceitual. - Guiar a Generalização: Sugerir a criação de uma "função de eficiência" (Volume/Custo) para guiar o raciocínio.
Conexões e Extensões	- Engenharia de Materiais/Produção: Conexão direta com a minimização de desperdício e maximização de capacidade. - Cálculo Avançado: Introdução de Multiplicadores de Lagrange para otimização com restrições complexas.

Fonte: Autoria própria (2025)

Quadro 9 - Modelo de Ficha de Tarefa Modelagem Linear/Não Linear

Título da Tarefa	**Tarefa 1 - Modelagem Linear/Não Linear**
Descrição/Enunciado	(Baseado no contexto de CDI e Ramos, 2017) A tarefa geralmente apresenta uma sequência de dados em forma de tabela ou uma descrição de um fenômeno (como o crescimento de uma população, o consumo de um recurso, ou a distância percorrida por um veículo). O objetivo inicial é que os alunos identifiquem a natureza da relação (linear ou não linear) e, se não for linear, explorem o comportamento da taxa de variação do fenômeno.
Conteúdos matemáticos envolvidos	- Taxa Média de Variação e Taxa Instantânea (introdução intuitiva). - Funções (identificação de domínio, contradomínio, e tipo de função). - Raciocínio Proporcional e Covariacional (coordenação das mudanças nas variáveis).
Objetivos de Aprendizagem	- Diferenciar entre taxas de variação constante e variável. - Construir gráficos a partir de dados tabulados, traduzindo o crescimento da tabela para uma forma visual. - Introduzir a necessidade de um modelo mais refinado que a taxa média de variação (base para a derivada).
Registros de prática coletados e discussão do potencial para o desenvolvimento do Raciocínio Matemático (RM)	O potencial se encontra na Percepção de Padrões e no Raciocínio Covariacional. Os alunos partem de um Pensamento Linear (ponto crítico previsto), assumindo que o crescimento se mantém constante. Quando a tabela (ou dados) contradiz essa hipótese, eles são forçados a refutá-la, levando a um debate sobre "o que está mudando e como". O erro inicial (impasse) não é uma falha, mas uma hipótese que, ao ser testada e refutada em grupo, leva a uma compreensão mais sofisticada do que é uma taxa de variação não constante. A Organização de Justificativas se torna central quando precisam explicar por que o crescimento está acelerando ou desacelerando, sem usar a fórmula da derivada.
Competências do Futuro Engenheiro	- Análise de Dados: Habilidade de interpretar dados tabulados e extrair padrões de crescimento. - Pensamento Crítico: Questionamento da hipótese inicial e busca por um modelo mais preciso. - Modelagem: Capacidade de escolher o tipo de função que melhor representa o fenômeno.

Pontos Críticos e Dificuldades Previstas	- Raciocínio Linear (Pensamento Linear): Grande risco de os alunos inicialmente esboçarem uma reta ou aplicarem a taxa média de variação de forma incorreta. - Conceito de Taxa: Confusão entre a quantidade que está crescendo e a velocidade desse crescimento (diferenciar f(x) de f'(x)).
Sugestões de Mediação Docente	- Foco na Taxa de Mudança: Perguntar: "Quanto cada unidade de tempo (ou variável) está contribuindo para o crescimento do resultado? Esse valor é o mesmo a cada passo?" - Incentivar a Argumentação: Pedir para que um aluno que defendeu o modelo linear explique por que ele mudou de ideia.
Conexões e Extensões	- Cálculo Formal: Introdução da definição formal de taxa instantânea de variação (a derivada) após a construção intuitiva. - Estatística/Ciência de Dados: Conexão com a escolha do melhor modelo de regressão (linear, exponencial, etc.).

Fonte: Autoria própria (2025)

Quadro 10 - Modelo de Ficha de Tarefa Sequências e Convergência de Limites

Título da Tarefa	**Tarefa 2 - Sequências e Convergência de Limites (Similar à Compunet)**
Descrição/Enunciado	(Baseado no contexto de Limites e Ramos, 2017) A tarefa avança do problema da "Tarefa 1" para a análise de sequências ou modelos de crescimento que tendem a um valor. É frequentemente contextualizada (e.g., decaimento de uma dose de medicamento na corrente sanguínea, ou a "Compunet" sobre a estabilização de clientes). Pede-se para que os alunos investiguem, geralmente usando tabelas ou gráficos, qual o valor que a função ou sequência se aproxima a longo prazo (tendendo ao infinito).
Conteúdos matemáticos envolvidos	- Conceito Intuitivo de Limite (de sequências e funções). - Convergência e Comportamento Assintótico. - Análise Gráfica. - Sequências e Progressões (geométrica, aritmética, etc.).

Objetivos de Aprendizagem	- Criar uma necessidade para o conceito formal de limite (o que acontece "no infinito"?). - Formular conjecturas sobre o valor de convergência. - Compreender que uma sequência pode se aproximar de um valor sem jamais alcançá-lo.
Registros de prática coletados e discussão do potencial para o desenvolvimento do Raciocínio Matemático (RM)	Esta tarefa é um ótimo exemplo de como a abordagem exploratória leva ao rigor matemático. A Elaboração de Conjecturas é o processo central, pois os alunos precisam prever um valor final (o limite) sem o cálculo formal. O Raciocínio Covariacional atua ao coordenar "o que acontece com o resultado enquanto a variável de entrada aumenta muito". O potencial se destaca na discussão sobre a "estabilização": os alunos usam a linguagem cotidiana ("vai parar em x", "fica muito perto de y")6, e o professor usa isso para criar o impasse necessário para introduzir a definição formal de Limite. A progressão é clara: Concreto/Intuitivo (Compunet)- Formal/Rigoroso (Definição de Limite).
Competências do Futuro Engenheiro	- Análise de Longo Prazo: Habilidade de prever o comportamento de um sistema (estrutura, mercado, medicamento) ao longo do tempo. - Modelagem Preditiva: Criação de modelos que estimam resultados futuros com base em dados. - Pensamento Crítico: Julgamento sobre a sustentabilidade e viabilidade do modelo (e.g., um modelo que tende ao infinito não é sustentável).
Pontos Críticos e Dificuldades Previstas	- Conceito de Infinito: Dificuldade em aceitar a ideia de que o processo continua infinitamente, e não para em um número grande. - Formalismo vs. Intuição: Tensão entre a intuição - visual/numérica e a necessidade de provar o limite algebricamente.
Sugestões de Mediação Docente	- Perguntas Desafiadoras: Perguntar: "Se você calculasse por mais um bilhão de vezes, o número mudaria? Por quê?" - Uso de Tecnologia: Incentivar o uso de planilhas para simular o comportamento da sequência ao longo de muitas iterações.
Conexões e Extensões	- Séries e Somatórios Infinitos: Estender o conceito de limite para a soma de termos infinitos (séries). - Engenharia de Controle/Sistemas: Análise de estabilidade e regime permanente de sistemas dinâmicos.

Fonte: Autoria própria (2025)

Quadro 11 - Modelo de Ficha de Tarefa Otimização Clássica (Volume Máximo/Custo Mínimo)

Título da Tarefa	**Tarefa 3 - Otimização Clássica (Volume Máximo/Custo Mínimo)**
Descrição/Enunciado	(Baseado no contexto de Otimização e Ramos, 2017) Um problema clássico de otimização no CDI, frequentemente contextualizado na indústria, como o corte de cantos de uma folha de papelão quadrada para formar uma caixa aberta (sem tampa) com o maior volume possível. Aos alunos é solicitado que determinem o tamanho do corte (a altura da caixa) que maximiza o volume final.
Conteúdos matemáticos envolvidos	- Funções Polinomiais (Volume). - Domínio e Imagem (Restrições Físicas do problema). - Otimização e Análise de Pontos Críticos. - Derivada como ferramenta de Máximo/Mínimo.
Objetivos de Aprendizagem	- Aplicar o processo completo de otimização (modelagem, diferenciação, teste de pontos críticos e extremos). - Conectar o resultado matemático (o valor de x) à restrição física (não se pode cortar mais do que a metade do lado do papelão). - Desenvolver a capacidade de decompor um problema complexo em partes gerenciáveis.
Registros de prática coletados e discussão do potencial para o desenvolvimento do Raciocínio Matemático (RM)	O potencial está na Formulação de Generalizações e na Organização de Justificativas. Os alunos precisam, primeiro, perceber o padrão de que o volume cresce e depois diminui, forçando-os a conjecturar a existência de um ponto ideal. A Organização de Justificativas exige que eles defendam o valor encontrado não apenas com a Derivada (o rigor matemático), mas também com o contexto: o corte encontrado é fisicamente possível dentro do tamanho da folha inicial? A discussão sobre as restrições (o domínio da função) é um ponto chave onde o Raciocínio Matemático se conecta com o Raciocínio Profissional (Engenharia).
Competências do Futuro Engenheiro	- Resolução de Problemas Complexos: Execução de um processo analítico completo (modelagem e otimização). - Pensamento Crítico: Interpretação do resultado matemático no contexto das restrições físicas do problema. - Modelagem: Transformação de um objeto tridimensional em uma função de uma variável.

Pontos Críticos e Dificuldades Previstas	- Domínio da Função: Erro em determinar o intervalo de valores de corte que são fisicamente possíveis. - Erro Algébrico: Erros na aplicação da regra do produto ou da cadeia ao derivar a função volume. - Rigor na Justificativa: Falta de teste para garantir que o ponto encontrado é de máximo e não de mínimo.
Sugestões de Mediação Docente	- Foco no Domínio: Iniciar a discussão perguntando: "Qual é o maior corte que você pode fazer antes de a caixa se desfazer?" - Perguntas Desafiadoras: Questionar: "E se o papelão tivesse um custo maior para a base do que para os lados? Como o problema mudaria?" - Processo vs. Resultado: Valorizar cada passo da modelagem e da justificação, não apenas a resposta final.
Conexões e Extensões	- Cálculo de Múltiplas Variáveis: Usar o problema da caixa aberta para otimizar um volume com tampa e/ou um custo variável (introduzindo a necessidade de duas ou mais variáveis). - Engenharia de Produção: Conexão direta com a maximização da produção e otimização do design.

Fonte: Autoria própria (2025)

Este modelo de ficha foi pensado não apenas como um registro descritivo da tarefa, mas como uma ferramenta de análise para o professor. Ao preencher as diferentes seções, o docente pode criar uma ponte entre o planejamento da atividade e as discussões que de fato ocorrem em sala de aula. Utilizar esta estrutura de forma contínua permite construir um histórico do potencial de cada tarefa, ajudando a refinar a mediação pedagógica e a identificar com mais clareza os momentos em que os alunos demonstram avanços conceituais ou enfrentam dificuldades.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao final desta investigação, a análise conjunta das dissertações e dos registros de prática oferece uma visão clara sobre o potencial de uma abordagem de ensino baseada em tarefas investigativas. Fica evidente que o trabalho com episódios de resolução de tarefas, particularmente as do tipo Exploração e Investigação, é uma estratégia eficaz para promover o desenvolvimento do Raciocínio Matemático (RM) dos estudantes de Engenharia. Esse potencial se manifesta na forma como as tarefas (como a "Tarefa da Garrafa" e "Compunet") geram dúvidas significativas e provocam debates, exigindo que os alunos construam, defendam e refinem suas próprias ideias matemáticas. O processo de aprendizagem é ativado pela discussão entre pares, pela coragem em expor os impasses e pela necessidade de buscar justificativas robustas. Este movimento permite que a prática pedagógica se alinhe com as Diretrizes Curriculares Nacionais da Engenharia, formando profissionais com maior capacidade de raciocinar matematicamente e de pensar de forma crítica.

A adoção dessa abordagem exige, como consequência fundamental, uma redefinição completa do papel do professor e dos métodos de avaliação. O professor deixa de ser o mero expositor de conteúdo e se torna o mediador e organizador das atividades, utilizando a pergunta estratégica como sua principal ferramenta de mediação.

A principal contribuição das tarefas para o desenvolvimento do RC, reside em seu próprio desenho. Ao apresentar problemas abertos, que não possuem um caminho de resolução único e evidente, as tarefas exigem que os estudantes abandonem uma postura passiva e se engajem ativamente na modelagem matemática. É nesse espaço que eles são levados a observar o comportamento das grandezas, perceber padrões, formular conjecturas e, fundamentalmente, organizar e defender suas justificativas. Os diálogos dos alunos, repletos de debates, impasses e descobertas, são a maior prova de que o aprendizado mais significativo ocorre quando eles são desafiados a construir

seus próprios caminhos e a negociar significados com seus colegas, um processo que reflete a própria prática da matemática.
Além disso, esta abordagem apresenta um grande potencial para ser continuamente atualizada com novas tarefas. O valor do modelo pedagógico apresentado não está nos exemplos específicos analisados, mas em sua estrutura flexível e adaptável. O princípio de utilizar problemas contextuais e investigativos pode ser aplicado a inúmeros outros cenários, permitindo que o currículo de Cálculo se mantenha relevante e conectado aos desafios contemporâneos da engenharia e de outras áreas. Novas tarefas podem ser criadas a partir de novas tecnologias, problemas industriais ou questões sociais, garantindo que a prática em sala de aula continue a preparar os estudantes não apenas para os exames, mas para uma atuação profissional criativa, crítica e fundamentada. A essência da proposta se mantém: criar um ambiente que valorize a pergunta tanto quanto a resposta, e o processo tanto quanto o resultado final, consolidando um aprendizado autêntico e duradouro.
O presente Produto Educacional, fruto da análise aprofundada de pesquisas do nosso grupo, consolida-se, portanto, como um instrumento prático essencial para a formação continuada de docentes. Ele visa preencher uma lacuna ao traduzir as contribuições teóricas da pesquisa acadêmica em um guia aplicável, oferecendo modelos de tarefas e estratégias de mediação que fortalecem o processo de ensino e aprendizagem do CDI.
Contudo, é fundamental reconhecer que a transição do modelo tradicional para uma abordagem baseada em tarefas exploratórias não está isenta de desafios. O professor enfrenta a realidade de turmas numerosas, ementas extensas, resistência à mudança por parte de alguns estudantes e, sobretudo, a necessidade de formação contínua para desenvolver as habilidades de mediação e gestão da discussão em sala de aula. Para contornar tais dificuldades, sugere-se que as instituições de ensino e os programas de pósgraduação promovam a criação de comunidades de prática entre professores, oferecendo tempo para o planejamento conjunto e a reflexão sobre o uso das tarefas

aqui propostas.
Como perspectivas futuras, propomos a utilização deste manual em oficinas e grupos de estudo com docentes do Ensino Superior. Além disso, a continuidade da pesquisa poderá se concentrar na aplicação do modelo de análise e da metodologia das fichas de tarefas em outras áreas do conhecimento matemático (como Álgebra Linear ou Probabilidade) e em diferentes contextos de Engenharia, com o objetivo de testar a eficácia e aperfeiçoar o modelo de (RM) aqui estabelecido. Acreditamos que o alinhamento entre Matemática e Engenharia, fomentado por estratégias pedagógicas alternativas, contribui decisivamente para a formação de profissionais mais preparados para as complexidades do mundo contemporâneo.

REFERÊNCIAS

BELLINI, J. A. M. **Processos de raciocínio matemático no Ensino Fundamental:** tarefas exploratórias sobre medidas de comprimento. 2022. 81 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2022.

BOALER, J. **Mathematical mindsets: unleashing students' potential through creative math, inspiring messages and innovative teaching.** San Francisco: Jossey-Bass/Wiley, 2016.

BRASIL. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. **Parecer CNE/CES nº 1/2019**. Diretrizes Curriculares Nacionais do Curso de Graduação em Engenharia. [Brasília, DF], 2019a. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=109871-pces001-19-1&category_slug=marco-2019-pdf&Itemid=30192. Acesso em: 25 dez. 2024.

BROCARDO, J. *et al.* Ações do professor e desenvolvimento do raciocínio matemático durante a discussão coletiva de uma tarefa. **Educ. mat.**, Ciudad de México, v. 34, n. 2, p. 101-133, 2022. Disponível em: http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S2448-80892022000200101&lng=es&nrm=iso>. accedido en 28 sept. 2025.

BRODIE, K. **Teaching Mathematical Reasoning in Secondary School Classrooms.** Nova Iorque: Springer, 2010.

CABRAL, T. C. B. Metodologias alternativas e suas vicissitudes: ensino de matemática para engenharias. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 8, n. 17, 2015. Disponível em: https://periodicos.ufms.br/index.php/pedmat/article/view/1397. Acesso em: 23 out. 2024.

CANAVARRO, A. P; SANTOS, L. **Explorar tarefas matemáticas.** 2012.

CARLSEN, M. Upper secondary students' mathematical reasoning on a sinusoidal function. **Educational Studies in Mathematics**, v. 99, p. 277–291, 2018. Disponível em: https://link.springer.com/article/10.1007/s10649-018-9844-1. Acesso em: 04 nov. 2022.

COUTO, A. F.; FONSECA, M. O. S.; TREVISAN, A. L. Aulas de Cálculo Diferencial e Integral organizadas a partir de episódios de resolução de tarefas: um convite à insubordinação criativa. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática (REnCiMa)**, v. 4, p. 50-61, 2017.

DELGADO, C.; BROCARDO, J. MENDES, F. (org.). **Desenvolver o raciocínio matemático dos alunos: práticas e desafios**. [S.l.]: Instituto Politécnico de Setúbal, 2022. E-book.

GRANBERG, C.; OLSSON, J. ICT-supported problem solving and collaborative creative reasoning: Exploring linear functions using dynamic mathematics software. **Journal of Mathematical Behavior**, v. 37, p. 48–62, 2015. Disponível em: https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0732312314000728. Acesso em: 04 nov. 2022.

GONÇALVES, W. J. **Raciocínio covariacional em aulas de cálculo diferencial e integral:** possibilidades de desenvolvimento a partir do uso de tarefas. 2018. 101 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2018

GUIMARÃES, G. G. Novas tendências de aprendizagem em engenharia: o aluno como protagonista na produção do conteúdo curricular na disciplina de cálculo diferencial e integral. **Revista de Ensino de Engenharia**, v. 38, n. 1, p. 81-91, 2019.

HENRIQUES, A. **O pensamento matemático avançado e a aprendizagem da análise numérica num contexto de**

actividades de investigação. 2010. 446 f. Tese (Doutoramento em Educação, Didáctica da Matemática) - Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Lisboa, 2010.

HENING, R. F. **Análise de uma tarefa exploratória aliada ao uso de tecnologias digitais em aulas de cálculo no contexto remoto.** 2023. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2023.

HERBERT, S; BRAGG, L. A. Factors in a professional learning program to support a teacher's growth in mathematical reasoning and its pedagogy. **Mathematics education research journal,** v. 33, n. 3, p. 409-433, 2021.

HORA, E. R.; MESQUITA, G. G. M.; GOMES, R. B. Análise das reprovações discentes no curso de Engenharia Ambiental e Sanitária da Universidade Federal de Goiás (EECA/UFG). **REEC - Revista Eletrônica de Engenharia Civil,** v. 14, n. 1, 2017. Disponível em: https://revistas.ufg.br/reec/article/view/46579. Acesso em: 26 dez. 2024.

JEANNOTTE, D.; KIERAN, C. A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, v. 96, n. 1, p. 1-16, 2017.

LANNIN, J.; ELLIS, A. B.; ELLIOT, R. **Developing essential understanding of mathematical reasoning for teaching mathematics in prekindergarten-grade 8**. Reston: NCTM, 2011.

LIMA, L. L. **Manifestações do raciocínio criativo de estudantes de cálculo de mais de uma variável ao lidar com tarefas matemáticas.** 2024. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2024.

MATA-PEREIRA, J; PONTE, J.P. **Raciocínio Matemático em conjuntos numéricos: uma investigação no 3 ciclo**. Quadrante, v. XXI, n.2, p.81-110, 2012.

MATA-PEREIRA, J; PONTE, J. P. Desenvolvendo o raciocínio matemático: Generalização e justificação no estudo das inequações. **Boletim GEPEM, Rio de Janeiro**, v. 62, n. 1, p. 17-31, jan./jun. 2013.

MATA-PEREIRA, J; PONTE, J.P. Aprimorando o raciocínio matemático dos alunos em sala de aula: ações do professor facilitando generalizações e justificativas. **Educ Stud Math**, v. 96, n. 2, 169–186, 2017.

MATA-PEREIRA, J.; PONTE, J. P. Promover o raciocínio matemático dos alunos: uma investigação baseada em design. **BOLEMA,** v. 32, n. 62, p. 781-801, 2018. DOI: 10.1590/1980-4415v32n62a02.

NCTM (National Council of Teachers of Mathematics). **Focus in High School Mathematics:** Reasoning and Sense Making. Reston, Va.: NCTM, 2009.

NISS, M.; BLUM, W. **The learning and teaching of mathematical modelling.** London: Routledge, 2020.

OLIVEIRA JÚNIOR, V. F. **Resolução de problemas**: uma metodologia comprometida com a construção do conhecimento matemático. 2015. 110 f. il. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fundação Universidade Federal de Rondônia, Porto Velho, 2015.

OLIVEIRA, L.; ARAMAN, E. M. O.; TREVISAN, A. L. Processos de raciocínio matemático em uma tarefa exploratória. **Revista Paradigma,** v. 43, n. Edição temática 1, p. 1-21, 2022.

PASSOS, F. G. D. *et al*. Diagnóstico sobre a reprovação nas disciplinas básicas dos cursos de engenharia da UNIVASF. *In:* CONGRESSO BRASILEIRO DE EDUCAÇÃO EM ENGENHARIA – COBENGE, 35., 2007. **Anais [...]**. 2007. p. 1–16.

PONTE, J. P. Gestão curricular em Matemática. *In*: GTI (Ed.). **O professor e o desenvolvimento curricular**. Lisboa: APM, 2005,

p. 11-34.

PONTE, J. P. **Tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática**. Práticas Profissionais dos Professores de Matemática. Lisboa: APM, p. 13-27, 2014.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula.** 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2019, 160 p.

PONTE, J.; QUARESMA, M.; MATA PEREIRA, J. Como desenvolver o raciocínio matemático na sala de aula? **Educação e Matemática**, v. 2, n. 156, 2020.

RAMOS, N. S. **Sequências numéricas como desencadeadoras do conceito de convergência:** episódios de resolução de tarefas. 2017. 126 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2017.

RASMUSSEN, C; MARRONGELE, K; BORBA, M. C. Research on calculus: what do we know and where do we need to go? **ZDM,** v. 46, p. 507-515, 2014.

RIBEIRO, A. J.; AGUIAR, M.; TREVISAN, A. L.; ELIAS, H. R. How teachers deal with students mathematical reasoning when promoting whole-class discussion during the teaching of algebra. *In*: SPINILLO A.G.; LAUTERT S.L.; BORBA, R.E.S.R. (Org.). Mathematical Reasoning of Children and Adults. 1ed. **Springer International Publishing,** 2021, v. 1, p. 239-264.

RODRIGUES, C.; MENEZES, L.; PONTE, J. P. Práticas de Discussão em Sala de Aula de Matemática: os casos de dois professores. **Bolema**, Rio Claro, v. 12, n. 61, p. 398-418, 2018. Disponível em: https://www.scielo.br/j/bolema/a/vKJjLJycccFdLGb9nsx4gdP/?lang=pt&format=pdf. Acesso em: 04 nov. 2022.

STEIN, M.K.; ENGLE, R.A.; SMITH, M. S.; HUGHES, E.K. Orchestrating productive mathematical discussions: five practices for helping teachers move beyond show and tell. **Mathematical Thinking and Learning**, Abingdon, n. 10, p.313-340, 2008.

STEIN, M. K; SMITH, M. S. Mathematical tasks as a framework for reflection: from research to practice. Mathematics Teaching in the Middle School, **Reston**, v. 3, n. 4, p. 268- 275, 1998.

STEIN, M. K.; SMITH, M. S. Tarefas matemáticas como quadro para a reflexão: da investigação à prática. **Educação e Matemática**, Lisboa, n. 105, p. 22-28, 2009. Disponível em: https://bit.ly/3teRemO. Acesso em: 15 out. 2019.

STYLIANIDES, G. Reasoning-and-proving in school mathematics textbooks. **Mathematical Thinkingand Learning,** v.11, n.4, p.258-288, 2009.

STYLIANIDES, A. J.; STYLIANIDES, G. J. Studying the classroom implementation of tasks: highlevel mathematical tasks embedded in "real-life" contexts. **Teaching and Teacher Education**, Reino Unido, n. 24, p. 859-875, 2008.

TREVISAN, A. L. Raciocínio matemático em aulas de Cálculo Diferencial e Integral: uma análise a partir de tarefas exploratórias. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia**, v. 15, n. 3, 2022.

TREVISAN, A. L; BORSSOI, A. H; ELIAS, H. R. **Delineamento de uma Sequência de Tarefas para um Ambiente Educacional de Cálculo**. VI Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, Pirinópolis/GO, p. 1-12, 2015.

TREVISAN; A. L.; MENDES, M. T. Ambientes de ensino e aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral organizados a partir de episódios de resolução de tarefas: uma proposta. **Revista Brasileira de Ensino e Tecnologia**, Ponta Grossa, v. 11, n. 1, p. 209-227, 2018. Disponível em: https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/view/5702. Acesso em: 04 nov. 2024.

VOLPATO, M. A. **Ações do professor para promoção do raciocínio matemático em momentos de discussão coletiva em aulas de cálculo**. 2022. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2022.

WATSON, A. *et al.* Task Design in Mathematics Education. In: MARGOLINAS, C *et al.* (Eds.). **Proceedings of the ICMI Study 22**, Oxford, UK, (p. 9 – 16). Oxford: ICMI, 2013

WHITE, N.; MESA, V. Describing cognitive orientation of Calculus I tasks across different types of coursework. **ZDM Mathematics Education**, v. 46, n. 675–690, 2014. Disponível em: https://link.springer.com/article/10.1007/s11858-014- 0588-9. Acesso em: 04 nov. 2022.

PPGECT
Programa de Pós-Graduação em
Ensino de Ciência e Tecnologia

UTFPR
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
CAMPUS PONTA GROSSA