

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA E DE
MATERIAIS**

BRUNO DOS SANTOS

**QUANTIFICAÇÃO DA INCERTEZA DO MODELO DE FORMAN VIA
METODOLOGIA "*FAST CRACK BOUNDS*"**

DISSERTAÇÃO

CURITIBA

2019

BRUNO DOS SANTOS

**QUANTIFICAÇÃO DA INCERTEZA DO MODELO DE FORMAN VIA
METODOLOGIA "*FAST CRACK BOUNDS*"**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica e de Materiais da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia – Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos.

Orientador: Prof. Dr. Claudio R. Ávila da S. Jr.

CURITIBA

2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

S237q Santos, Bruno dos
Quantificação da incerteza do modelo de Forman via metodologia "*Fast Crack Bounds*" / Bruno dos Santos.-- 2018.
106 f.: il.

Disponível via World Wide Web.

Texto em português com resumo em inglês.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica e de Materiais. Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos, Curitiba, 2018.

Bibliografia: f. 93-102.

1. Engenharia mecânica - Dissertações. 2. Mecânica da fratura. 3. Elasticidade. 4. Monte Carlo, Método de. 5. Materiais - Propriedades mecânicas. 6. Metais - Fadiga - Testes. 7. Incerteza - Modelos matemáticos. 8. Deformações e tensões. 9. Métodos de simulação. I. Silva Júnior, Cláudio Roberto Ávila da, orient. II. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica e de Materiais. III. Título.

CDD: Ed. 23 -- 620.1

Biblioteca Central do Câmpus Curitiba – UTFPR
Bibliotecária: Luiza Aquemi Matsumoto CRB-9/794



Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Diretoria de Pesquisa e Pós-Graduação

TERMO DE APROVAÇÃO DE DISSERTAÇÃO Nº 337

A Dissertação de Mestrado intitulada: **QUANTIFICAÇÃO DA INCERTEZA DO MODELO DE FORMAN VIA METODOLOGIA "FAST CRACK BOUNDS"**, defendida em sessão pública pelo Candidato **Bruno dos Santos**, no dia 26 de novembro de 2018, foi julgada para a obtenção do título de Mestre em Engenharia, área de concentração: Mecânica dos Sólidos, e aprovada em sua forma final, pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica e de Materiais – PPGEM.

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. Claudio Roberto Ávila da Silva Júnior - Presidente - UTFPR

Prof. Dr. Giuseppe Pintaúde - UTFPR

Prof. Dr. João Morais da Silva Neto - UFPR

A via original deste documento encontra-se arquivada na Secretaria do Programa, contendo a assinatura da Coordenação após a entrega da versão corrigida do trabalho.

Curitiba, ____ de _____ de 20__.

Carimbo e assinatura do Coordenador do Programa

Dedico este trabalho a alma mais bondosa que este Universo já conheceu.

Meu irmão, meu super-herói “*kako*”, meu extraordinário pai da vida.

Você carregou com muita honra um fardo que nunca foi seu

E o fez da maneira mais sublime, notável e amorosa,

que um pai pode fazer.

Você é inspiração e meu maior exemplo.

Você me agiganta

Obrigado por tudo,
eu te amo eternamente.

AGRADECIMENTOS

A Odin, o supremo deus nórdico. Serei eternamente grato a ti “Pai de todos” por ser minha inspiração, minha fé e meu destino.

Agradeço a UTFPR que forneceu a oportunidade de cursar o mestrado em Engenharia. Obrigado por proporcionar um ambiente saudável, estimulando a criatividade, interação e inovação. Sou grato a todo corpo docente, à direção e administração dessa instituição.

Ao meu grande mestre Dr. Claudio R. Ávila da Silva Jr. que compartilhou seus conhecimentos, ensinando novos caminhos a serem trilhados e auxiliando a minha jornada enquanto mestrando. Serei eternamente grato.

A minha família, meus amigos e todos aqueles que mesmo indiretamente ajudaram a concluir a minha dissertação. Sou grato a todos aqueles que tiveram paciência nos momentos de tensão e empenho. Obrigado por fazerem parte da minha vida!

Agradeço a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes), fundação do Ministério da Educação (MEC), que desempenha um papel fundamental na expansão, valorização e consolidação da ciência, da pesquisa e da universidade pública em todos os estados de nossa Pátria amada Brasil. Obrigado por todo suporte financeiro.

Em nome de Odin, senhor de Asgard. Obrigado.

“Em algum lugar, alguma coisa incrível está esperando para ser descoberta.”

Carl Sagan, 1980.

RESUMO

SANTOS, Bruno. **Quantificação da incerteza de modelo de Forman via metodologia "Fast Crack Bounds", 2019.** Dissertação (Mestrado em Engenharia) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica e de Materiais, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba.

A mecânica da fratura linear elástica (MFLE) permite a quantificação das relações entre as propriedades dos materiais, o nível de tensão, a presença de defeitos geradores de trincas e os mecanismos de propagação de trincas. Existem inúmeros modelos buscando descrever o crescimento de trinca. Estes são classificados em duas grandes categorias, a saber: amplitude de tensão constante (CATC) e amplitude de tensão variável (CATV). Neste trabalho apresenta-se a utilização do modelo de propagação de trinca do tipo amplitude de tensão constante (CATC) proposto por Forman, admitindo a existência da incerteza nos parâmetros de definição do modelo, tendo assim como objetivo a quantificação da incerteza do fenômeno de propagação de trincas. Para isso a modelagem da incerteza será feita através das variáveis aleatórias. A partir disso, os métodos de simulação de Monte Carlo (SMC) e Fast Crack Bounds (FCB) serão utilizados conjuntamente para se estimar os momentos estatísticos do processo estocástico "tamanho de trinca". O desempenho da proposta será avaliado a partir da combinação dos métodos de SMC com Runge-Kutta de quarta ordem (RK4). Utiliza-se de três exemplos clássicos da mecânica da fratura para explorar a precisão e a eficiência da solução proposta para o problema do valor inicial do crescimento de trinca. O trabalho identifica ganhos computacionais no mínimo 378,09% mais eficientes que a solução RK4 e desvios relativos de no máximo 26,28%, demonstrando a aplicabilidade e eficácia da metodologia Fast Crack Bounds.

Palavra-chave: Modelo de Forman; Mecânica da fratura linear elástica; Simulação de Monte Carlo; Metodologia "Fast Crack Bounds".

ABSTRACT

SANTOS, Bruno. **Uncertainty quantification of Forman model using the "Fast Crack Bounds" method, 2019**. Dissertation (Master in Engineering) – Postgraduate Program in Mechanical and Materials Engineering, Federal Technological University of Paraná, Curitiba.

The linear elastic fracture mechanics (LEFM) allows quantification of the relationship between the material properties, the stress level, the presence of crack-generating defects and crack propagation mechanisms. There are numerous models seeking to describe the crack growth. These are classified into two main areas, namely: constant amplitude loading (CAL) and variable amplitude loading (VAL). This work presents the use of crack propagation model type constant amplitude loading (CAL) proposed by Forman, assuming the existence of uncertainty in the model definition parameters, aiming at quantification of the uncertainty of the crack propagation phenomenon. For this, the uncertainty modeling will be done through random variables. From this, the Monte Carlo simulation (MCS) and Fast Crack Bounds (FCB) methods will be used together to estimate the statistical moments of the stochastic process 'crack size'. The performance of the proposal will be evaluated from the combination of MCS and Runge-Kutta fourth order (RK4) methods. Three classic examples of fracture mechanics are used to explore the accuracy and efficiency of the proposed solution to the initial value problem of crack growth. The work identifies computational gains of at least 378.09% more efficient than the RK4 solution and relative deviations of up to 26.28%, demonstrating the applicability and effectiveness of the Fast Crack Bounds methodology.

Keywords: Forman model; Linear elastic fracture mechanics; Monte Carlo simulation; "*Fast Crack Bounds*" methodology.

LISTA DE FIGURAS

| | |
|---|----|
| Figura 2.1 - Placa infinita no modo I de abertura de trinca demonstrando o estado plano de tensões de um elemento de área na vizinhança da trinca..... | 25 |
| Figura 2.2 – Etapas da propagação de trinca por fadiga..... | 29 |
| Figura 2.3 - Componentes de tensão e sistemas de referência nas proximidades da trinca. | 31 |
| Figura 2.4 - Modos de carregamento | 32 |
| Figura 2.5 - Curva da taxa de propagação de trinca por fadiga, $\log(da/dN)$, vs a variação do fator de intensidade de tensão, $\log(\Delta K)$, em escala log-log..... | 35 |
| Figura 2.6 - Variação do gráfico da/dN por ΔK em relação a variação de R. | 37 |
| Figura 4.1 - Placa com largura infinita e trinca central | 56 |
| Figura 4.2 - Primeiro momento estatístico para o parâmetro $a_{1.10}$. Com valor de ... | 56 |
| Figura 4.3 - Desvio relativo do primeiro momento estatístico para o parâmetro $a_{1.10}$. Com valor de $a^* = 1,40a_0$ | 57 |
| Figura 4.4 - Segundo momento estatístico para o parâmetro $a_{1.10}$. Com valor de $a^* = 1,40a_0$ | 58 |
| Figura 4.5 - Desvio relativo do segundo momento estatístico para o parâmetro $a_{1.10}$. Com valor de $a^* = 1,40a_0$ | 58 |
| Figura 4.6 - Primeiro momento estatístico para o parâmetro $m_{1.10}$. Com valor de $a^* = 1,40a_0$ | 59 |
| Figura 4.7 - Segundo momento estatístico para o parâmetro $m_{1.10}$. Com valor de $a^* = 1,40a_0$ | 59 |
| Figura 4.8 - Primeiro momento estatístico para o parâmetro $m_{1.10}$ Com valor de $a^* = 1,60a_0$ | 60 |
| Figura 4.9 - Segundo momento estatístico para o parâmetro $m_{1.10}$. Com valor de $a^* = 1,60a_0$ | 60 |
| Figura 4.10 - Desvio relativo para o primeiro momento estatístico para o parâmetro $m_{1.10}$. Com valor de $a^* = 1,60a_0$ | 61 |
| Figura 4.11 - Desvio relativo para o segundo momento estatístico para o parâmetro $m_{1.10}$. Com valor de $a^* = 1,60a_0$ | 62 |
| Figura 4.12 - Placa com largura finita e trinca central. | 69 |
| Figura 4.13 - Primeiro momento estatístico para o parâmetro $K_{1.10}$. Com valor de $a^* = 1,40a_0$ | 69 |

| | |
|--|----|
| Figura 4.14 - Primeiro momento estatístico para a variável m1.10. Com valor de $\alpha^* = 1,60a0$. | 70 |
| Figura 4.15 - Placa com largura finita e trinca na aresta | 77 |
| Figura 4.16 - Primeiro momento estatístico para o parâmetro C1.10. Com valor de $\alpha^* = 1,40a0$. | 77 |
| Figura 4.17 - Desvio relativo para o primeiro momento estatístico para o parâmetro C1.10. Com valor de $\alpha^* = 1,40a0$. | 78 |

LISTA DE TABELAS

| | |
|--|----|
| Tabela 3.1 Classificação dos parâmetros. | 53 |
| Tabela 4.1 Dados empregados nas simulações numéricas | 54 |
| Tabela 4.2 - Estimativa do primeiro momento estatístico para o exemplo de placa infinita com trinca central – Caso de dispersão 1/10. | 62 |
| Tabela 4.3 - Estimativa do segundo momento estatístico para o exemplo de placa infinita com trinca central – Caso de dispersão 1/10. | 63 |
| Tabela 4.4 - Tempo de execução (em segundos) para 900000 ciclos para o exemplo Placa infinita com trinca central, com coeficiente de dispersão igual à 1/10. | 63 |
| Tabela 4.5 - Desvio relativo do primeiro momento estatístico para o exemplo de placa infinita com trinca central [%]. | 64 |
| Tabela 4.6 - Desvio relativo do segundo momento estatístico para o exemplo de placa infinita com trinca central – [%]. | 64 |
| Tabela 4.7 - Estimativa do primeiro momento estatístico para o exemplo de placa infinita com trinca central – Caso de dispersão 3/10. | 65 |
| Tabela 4.8 - Estimativa do segundo momento estatístico para o exemplo de placa infinita com trinca central – Caso de dispersão 3/10 | 66 |
| Tabela 4.9 - Tempo de execução (em segundos) para 900000 ciclos para o modelo de Forman. Com coeficiente de dispersão igual a 3/10. | 66 |
| Tabela 4.10 - Desvio relativo do primeiro momento estatístico para o exemplo de placa infinita com trinca central – Caso de dispersão 3/10 [%]. | 67 |
| Tabela 4.11 - Desvio relativo do segundo momento estatístico para o exemplo de placa infinita com trinca central – Caso de dispersão 3/10 [%]. | 67 |
| Tabela 4.12 - Estimativa do primeiro momento estatístico para o exemplo de placa finita com trinca central – Caso de dispersão 1/10. | 70 |
| Tabela 4.13 - Estimativa do segundo momento estatístico para o exemplo de placa finita com trinca central – Caso de dispersão 1/10. | 71 |
| Tabela 4.14 - Tempo de execução (em segundos) para 900000 ciclos para o exemplo Placa com largura finita e trinca central. Com coeficiente de dispersão igual a 1/10. | 72 |
| Tabela 4.15 - Desvio relativo do primeiro momento estatístico para o exemplo de placa finita com trinca central – [%]. | 72 |

| | |
|--|----|
| Tabela 4.16 - Desvio relativo do segundo momento estatístico para o exemplo de placa infinita com trinca central – [%]..... | 73 |
| Tabela 4.17 - Estimativa do primeiro momento estatístico para o exemplo de placa finita com trinca central– Caso de dispersão 3/10..... | 73 |
| Tabela 4.18 - Estimativa do segundo momento estatístico para o exemplo de placa finita com trinca central – Caso de dispersão 3/10..... | 74 |
| Tabela 4.19 - Tempo de execução (em segundos) para 900000 ciclos para o exemplo de placa finita com trinca central – Caso de dispersão 3/10. | 75 |
| Tabela 4.20 - Desvio relativo do primeiro momento estatístico para o exemplo de placa finita com trinca central [%] – Caso de dispersão 3/10..... | 75 |
| Tabela 4.21 - Desvio relativo do segundo momento estatístico para o exemplo de placa finita com trinca central [%] – Caso de dispersão 3/10..... | 75 |
| Tabela 4.22 - Estimativa do primeiro momento estatístico para o exemplo de placa finita com trinca na aresta – Caso de dispersão 1/10..... | 79 |
| Tabela 4.23 - Estimativa do segundo momento estatístico para o exemplo de placa finita com trinca na aresta – Caso de dispersão 1/10..... | 79 |
| Tabela 4.24 - Tempo de execução (em segundos) para 900000 ciclos para o exemplo de placa finita com trinca na aresta para o modelo de Forman..... | 80 |
| Tabela 4.25 - Desvio relativo do primeiro momento estatístico para o exemplo de placa finita com trinca na aresta – [%]. | 80 |
| Tabela 4.26 - Desvio relativo do segundo momento estatístico para o exemplo de placa infinita com trinca na aresta – [%]. | 81 |
| Tabela 4.27 - Estimativa do primeiro momento estatístico para o exemplo de placa finita com trinca na aresta– Caso de dispersão 3/10..... | 82 |
| Tabela 4.28 - Estimativa do segundo momento estatístico para o exemplo de placa finita com trinca na aresta– Caso de dispersão 3/10..... | 82 |
| Tabela 4.29 - Tempo de execução (em segundos) para 900000 ciclos para o exemplo de placa finita com trinca na aresta. Com coeficiente de dispersão igual a 3/10. | 83 |
| Tabela 4.30 - Desvio relativo do primeiro momento estatístico para o exemplo de placa finita com trinca na aresta.Com coeficiente de dispersão igual a 3/10..... | 84 |
| Tabela 4.31 - Desvio relativo do segundo momento estatístico para o exemplo de placa finita com trinca na aresta para o modelo de Forman– [%]. Com coeficiente de dispersão igual a 3/10. | 84 |

LISTA DE SIGLAS

| | |
|------|--|
| MF | Mecânica da Fratura |
| MFLE | Mecânica da Fratura Linear Elástica |
| CATC | Carregamento com Amplitude de Tensão Constante |
| CATV | Carregamento com Amplitude de Tensão Variável |
| PVI | Problema de Valor Inicial |
| FCB | <i>Fast Crack Bounds</i> |
| RK4 | Runge-Kutta de quarta ordem |
| SMC | Simulação de Monte Carlo |
| FIT | Fator de Intensidade de Tensão |
| EDO | Equação Diferencial Ordinária |
| EPD | Estado plano de deformação |
| EPT | Estado plano de tensão |

LISTA DE SÍMBOLOS

| | |
|-----------------------------|--|
| σ | Tensão nominal |
| $\Delta\sigma$ | Amplitude de tensão nominal |
| K | Fator intensidade de tensão (FIT) |
| $K_{máx}$ | Fator intensidade de tensão máximo |
| K_C | Fator de tenacidade à fratura |
| ΔK | Variação do FIT |
| f | Função de correção do FIT |
| h | Lei genérica para a evolução de trinca |
| α | Conjunto genérico com os parâmetros dos modelos de evolução |
| N_0 | Número de ciclos inicial |
| N_1 | Número de ciclos final |
| R | Razão entre tensão mínima e tensão máxima |
| C_p | Parâmetro do modelo de Paris-Erdogan |
| m_p | Parâmetro do modelo de Paris-Erdogan |
| m_f | Parâmetro do modelo de Forman |
| C_f | Parâmetro do modelo de Forman |
| σ_y | Tensão de escoamento |
| a | Tamanho de trinca |
| a_0 | Tamanho de trinca inicial |
| \bar{a} | Tamanho de trinca obtido na cota superior do método FCB |
| \underline{a} | Tamanho de trinca obtido na cota inferior do método FCB |
| a^* | Tamanho de trinca estrela para a cota superior |
| ω | Evento randômico |
| Ω | Espaço amostral |
| F | σ -álgebra de eventos |
| P | Medida de probabilidade |
| $\hat{\mu}_{\underline{a}}$ | Estimativa do primeiro momento estatístico - Cota inferior |
| $\hat{\mu}_a$ | Estimativa do primeiro momento estatístico – tamanho de trinca |
| $\hat{\mu}_{\bar{a}}$ | Estimativa do primeiro momento estatístico - Cota superior |
| $\sigma_{\underline{a}}^2$ | Variância - Cota inferior |

| | |
|-------------------------------|--|
| σ_a^2 | Variância – tamanho de trinca |
| $\sigma_{\bar{a}}^2$ | Variância - Cota superior |
| $\hat{\mu}_{\underline{a}}^2$ | Estimativa do primeiro momento estatístico - Cota inferior |
| $\hat{\mu}_a^2$ | Estimativa do primeiro momento estatístico – tamanho de trinca |
| $\hat{\mu}_{\bar{a}}^2$ | Estimativa do primeiro momento estatístico - Cota superior |

SUMÁRIO

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | INTRODUÇÃO | 19 |
| 1.1 | OBJETIVOS | 20 |
| 1.1.1 | <i>Objetivo Geral</i> | 20 |
| 1.1.2 | <i>Objetivos Específicos</i> | 20 |
| 1.2 | JUSTIFICATIVA | 21 |
| 1.3 | ESTRUTURA DO TRABALHO | 21 |
| 2 | FADIGA EM MATERIAIS METÁLICOS E O FENÔMENO DE PROPAGAÇÃO DE TRINCAS | 22 |
| 2.1 | FADIGA | 22 |
| 2.2 | PANORAMA HISTÓRICO DA FADIGA E MECÂNICA DA FRATURA | 23 |
| 2.3 | ETAPAS DA FADIGA | 29 |
| 2.4 | MECÂNICA DA FRATURA | 30 |
| 2.5 | MECÂNICA DA FRATURA LINEAR ELÁSTICA | 31 |
| 2.5.1 | <i>Caracterização do Estado Plano (Hipótese H4)</i> | 33 |
| 2.6 | MODELOS DE PROPAGAÇÃO DE TRINCAS | 34 |
| 2.6.1 | <i>Modelo de Paris-Erdogan</i> | 35 |
| 2.6.2 | <i>Modelo de Forman</i> | 36 |
| 2.7 | MÉTODOS NÚMERICOS PARA SOLUÇÕES DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS | 38 |
| 2.7.1 | <i>Método de Runge-Kutta</i> | 38 |
| 2.7.1.1 | <i>Método de Runge-Kutta de quarta ordem</i> | 39 |
| 2.8 | METODOLOGIA “FAST CRACK BOUNDS” (FCB) | 40 |
| 2.9 | ESTIMADORES DA MÉDIA E VARIÂNCIA | 41 |
| 2.10 | SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO (SMC) | 44 |
| 3 | METODOLOGIA DE PESQUISA | 46 |
| 3.1 | MÉTODO <i>FAST CRACK BOUNDS</i> APLICADO AO MODELO DE FORMAN | 47 |
| 3.2 | QUANTIFICAÇÃO DA INCERTEZA | 50 |
| 3.3 | IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL | 53 |
| 4 | RESULTADOS NÚMERICOS | 54 |
| 4.1 | PLACA COM LARGURA INFINITA E TRINCA CENTRAL | 55 |
| 4.2 | PLACA COM LARGURA FINITA E TRINCA CENTRAL | 68 |
| 4.3 | PLACA COM LARGURA FINITA E TRINCA NA ARESTA | 76 |
| 4.4 | SÍNTESE DOS RESULTADOS NÚMERICOS | 86 |
| 4.5 | DISCUSSÕES ACERCA DO MATERIAL ESCOLHIDO | 88 |

| | |
|----------------------------|------------|
| 5 CONCLUSÃO | 90 |
| 5.1 TRABALHOS FUTUROS..... | 90 |
| REFERÊNCIAS | 92 |
| APÊNDICE | 102 |

1 INTRODUÇÃO

A necessidade do desenvolvimento tecnológico para processos de análise estrutural, está intimamente ligada ao sucesso da aplicação e a durabilidade de componentes metálicos frente aos motivos que ocasionam falhas no material.

Dentro deste contexto, o de maior relevância é o fenômeno de fadiga. Este é definido como sendo o processo de degradação localizada, progressiva e permanente, que ocorre em material sujeito a variações de tensões e deformações que produzem a nucleação de trincas e a completa fratura depois de um número suficiente de ciclos (ASTM, 2000).

Existem inúmeras aplicações nas indústrias automobilística e aeroespacial que admitem a ocorrência de trincas durante a vida útil de operação dos componentes (He et al., 2015). A existência de trincas dentro da taxa de tolerância de trabalho não representa necessariamente a possibilidade de uma falha. Contudo, fundamentado na detecção de uma trinca, faz-se necessário o acompanhamento e monitoramento de sua evolução em situação de trabalho. Por consequência, o prognóstico da taxa de evolução de trinca, é de suma importância na caracterização de manutenções preventivas e preditivas.

A Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE) evidencia inúmeros modelos de evolução de trinca. Estes são classificados em duas grandes categorias, a saber: carregamento de amplitude de tensão constante (CATC) e carregamento de amplitude de tensão variável (CATV). Para os modelos do tipo CATC, enfatiza-se as leis de evolução de Coleman (1958), Paris-Erdogan (1963), Forman (1967), Walker (1970), Erdogan e Ratwani (1970), Collipriest (1972), Klesnil e Lukas (1972), Priddle (1976), McEvily (1977), Wang (1994), Fatec-Engineering (1998), Kohout (1999) e FKM-Guideline (2004), entre outros.

Os modelos de propagação de trincas são formulados através de um problema de valor inicial (PVI). Em geral se faz necessário a utilização de métodos numéricos para obter soluções aproximadas, pois para poucas aplicações práticas, consegue-se obter uma solução exata. Com a finalidade de alcançar essas soluções numéricas emprega-se o procedimento numérico de Runge-Kutta de quarta ordem (RK4), representando a necessidade de elevado custo computacional.

Ávila et al. (2016), apresentaram o método *Fast Crack Bounds*. Contribuindo para minimizar esse problema. Essa metodologia estabelece as funções cota superior e inferior para a função tamanho de trinca, que delimitam o comportamento das soluções dos modelos de propagação de trinca.

Todavia os modelos de propagação de trincas são obtidos de forma empírica, apresentando uma dispersão no qual a lei não é conhecida e representando assim uma incerteza. Essa variabilidade observada justifica aplicar uma modelagem probabilística da lei de propagação. Isto é realizado através da randomização dos parâmetros da lei de evolução de trincas (CASTILLO et al., 2010). Para esta classe, pode-se referenciar os trabalhos de Lin e Yang (1985). Logo, a utilização de uma modelagem probabilística de incerteza, se faz necessária para a realização de um prognóstico com estimativas mais confiáveis (GHONEM e DORE, 1987).

Em vista disso, neste trabalho a modelagem da incerteza será feita através das variáveis aleatórias e suas distribuições de probabilidade. A partir disso, os métodos de SMC e FCB serão utilizados conjuntamente para se estimar as cotas que “envelopam” os estimadores dos momentos estatísticos do processo estocástico “tamanho de trinca”. O desempenho da proposta para o modelo de Forman será avaliado a partir da combinação dos métodos de SMC com RK4.

1.1 OBJETIVOS

1.1.1 Objetivo Geral

Toma-se como principal objetivo efetuar a realização da quantificação da incerteza do processo estocástico “tamanho de trinca” do modelo de evolução de trincas de Forman via metodologia “*Fast Crack Bounds*”.

1.1.2 Objetivos Específicos

Para concluir o objetivo geral, os seguintes objetivos específicos são desenvolvidos:

- i. Formulação matemática da metodologia “*Fast Crack Bounds*” (FCB) proposta para o modelo de Forman;

- ii. Determinação dos estimadores dos momentos estatísticos de primeira e segunda ordem para a evolução do tamanho de trinca;
- iii. Implementação computacional;
- iv. Simulação numérica, avaliação dos resultados e análise comparativa entre resultados encontrados na literatura técnica.

1.2 JUSTIFICATIVA

Com a metodologia FCB concluída em todos os níveis de complexidade propostos. O modelo poderá fornecer um diagnóstico para compor uma estratégia de manutenções preventivas e preditivas com menor esforço computacional. Contribuindo com a redução do tempo e dos custos envolvidos em avaliações dessa natureza, as quais envolvem inúmeras variáveis. Oferecendo assim métodos e técnicas que irão otimizar recursos no processamento e gerenciamento de componentes mecânicos.

1.3 ESTRUTURA DO TRABALHO

Este trabalho está organizado em cinco capítulos. Inicialmente, tem-se uma abordagem referente a introdução, os objetivos e a devida justificativa. No capítulo 2 apresenta-se uma revisão bibliográfica referente aos conceitos de fadiga em materiais metálicos, a mecânica da fratura, mecânica da fratura linear elástica (MFLE), modelos de propagação de trinca, métodos estatísticos, a metodologia FCB, momentos estatísticos em propagação de trincas e simulação numérica de Monte-Carlo (SMC). O capítulo 3 disserta o desenvolvimento da formulação matemática da metodologia FCB para o modelo de Forman e para a quantificação das incertezas. O capítulo 4 apresenta os devidos resultados numéricos obtidos durante as simulações. O capítulo 5 descreve as conclusões conquistadas no desenvolvimento e execução deste projeto de dissertação, ressaltando a sua contribuição para o universo acadêmico e industrial, além de propor temas para trabalhos futuros.

2 FADIGA EM MATERIAIS METÁLICOS E O FENÔMENO DE PROPAGAÇÃO DE TRINCAS

Apresenta-se neste capítulo definições referentes aos conceitos sobre Fadiga, a mecânica da fratura (MF), modelos de propagação de trinca. Em especial o modelo proposto por Forman (1967), a metodologia “*Fast Crack Bounds*” (FCB). Além disso apresentou-se as estratégias utilizadas para a quantificação das incertezas através dos momentos estatísticos e simulações numéricas, as quais servirão de referência para o desenvolvimento desse trabalho.

2.1 FADIGA

Durante a concepção de um componente mecânico estrutural a possibilidade da ocorrência do fenômeno fadiga deve ser considerada. Sendo determinante no dimensionamento e assumindo real importância por representar a maior causa individual de falhas em metais. Segundo Callister (2009), estima-se que o fenômeno fadiga compreenda aproximadamente 90% das falhas metálicas.

Abrahão et al. (2008) reforça este dado citando que em um âmbito geral grande parte das falhas em sistemas da engenharia ocorre em função das cargas que variam no tempo. Esse fenômeno de falha de materiais sujeitos a ciclos de tensão ou deformação é denominado como fadiga. Portando Branco, C., Fernandes, A., Castro (1984), resumem a fadiga como sendo um processo de redução da capacidade de carga de componentes estruturais pela ruptura lenta do material, através do avanço quase infinitesimal da trinca a cada ciclo de carregamento. Com frequência se descobre que membros de máquina falharam sob a ação de tensões repetidas ou flutuantes; todavia, uma análise mais cuidadosa revela que as tensões reais máximas estavam bem abaixo da resistência última do material e, muito seguidamente, abaixo mesmo da resistência ao escoamento. Deste modo, buscando aumentar o número de ciclos de tensão possíveis em uma máquina, é necessário reduzir a tensão nos seus componentes (VAN VLACK, 1964).

2.2 PANORAMA HISTÓRICO DA FADIGA E MECÂNICA DA FRATURA

Buscando-se uma compreensão geral acerca do fenômeno de propagação de trinca é interessante começar com uma breve revisão histórica do desenvolvimento da fadiga, partindo das ideias iniciais até o momento atual.

O primeiro grande relato histórico referente aos impactos de falhas devido às tensões cíclicas, foi descrito na indústria ferroviária no período de 1840-1850. Na época recomendou-se a eliminação de *cantos vivos*. Em trabalhos posteriores Peterson (1950), reconheceu que estes eixos ferroviários falhavam nos *ombros*.

Como as falhas aparentavam ser diferentes das rupturas até então consideradas normais associadas aos testes Monotônicos, ou seja, testes onde uma carga crescente é aplicada a amostra. Diferente dos testes cíclicos onde se aplicam cargas oscilantes. Introduziu-se o conceito errôneo de “cristalização” devido a vibração, que posteriormente foi refutado. Adicionou-se no período de 1840-1850 ao vocabulário técnico a palavra “fadiga”, descrevendo as falhas ocorridas devido a tensões repetidas.

A primeira investigação sistemática da fadiga, ocorreu na Alemanha e foi efetuada por Wohler (1857). Essa investigação mencionava as falhas nos eixos ferroviários. Realizou-se inúmeros testes laboratoriais de fadiga sob estresse repetido e desta forma Wohler ficou conhecido como o “pai” do ensaio de fadiga.

Por fim, Wohler estabeleceu o conceito de limite da resistência à fadiga, apresentando o diagrama tensão versus vida (S-N). Demonstrando que a medida que se diminui a tensão aplicada, o corpo de prova resiste a um maior número de ciclos e que a partir de um certo nível em que a curva se torna horizontal o número de ciclos para o rompimento do corpo de prova torna-se praticamente infinito. Esta tensão máxima, que praticamente não provoca mais a fratura por fadiga, chama-se limite de fadiga ou resistência à fadiga do metal considerado.

Nas décadas posteriores, pesquisadores expandiram o trabalho clássico de Wohler. Bauschinger (1886), demonstrou que a carga necessária para gerar as tensões de escoamento foram reduzidas após a aplicação de uma carga com sinal oposto ao que ocasionou a deformação inelástica. Representando a primeira indicação de que uma reversão da tensão inelástica poderia alterar o comportamento tensão-deformação dos metais sendo o pioneiro da compreensão a respeito do amolecimento cíclico.

Ewing e Humfrey (1903), buscando investigar as etapas da fadiga utilizaram um microscópio óptico. Observando linhas de deslizamento localizadas e faixas de deslizamento que acarretaram a formação de microfissuras. Goodman (1904), investigou a influência das tensões cíclicas e propôs uma teoria simplificada considerando o efeito das tensões médias.

Basquin (1910) demonstrou que a tensão alternada versus o número de ciclos até a falha (diagrama S-N) na região de vida finita pode ser representada como uma relação linear log-log. A equação proposta, acrescida de modificações posteriores é utilizada atualmente para reproduzir o comportamento da fadiga de vida finita.

Os trabalhos de Gough (1924) forneceram um estudo acerca do fenômeno da fadiga multiaxial (combinação de flexão e torção). Na época Gough publicou um relevante e abrangente livro sobre fadiga de metais.

Em 1927, Moore e Kommersf (1927) publicaram o primeiro livro norte-americano a respeito da fadiga em materiais metálicos, denominado de "*The fatigue of Metals*".

Em 1920, Griffith (1920) elaborou uma análise do comportamento da fratura de componentes com trincas através de experiências com óxidos metálicos superesfriados, assumindo a ocorrência de uma trinca de tamanho " $2a$ " no interior de uma placa em um material frágil ideal. Para estes materiais a trinca se propagaria de forma instável se a energia de deformação liberada quando a trinca avançasse de um comprimento infinitesimal fosse maior que energia necessária para romper a coesão entre os átomos à frente da trinca (GRIFFITH, 1920). Baseado nestas condições, Griffith, (1920) efetuou a estimativa da tensão nominal de falha. Também conhecida como tensão crítica, para o estado plano de tensões, empregando uma placa plana infinita, com uma trinca de comprimento igual a " $2a$ ", solicitada por um carregamento de tração, conforme a figura 2.1.

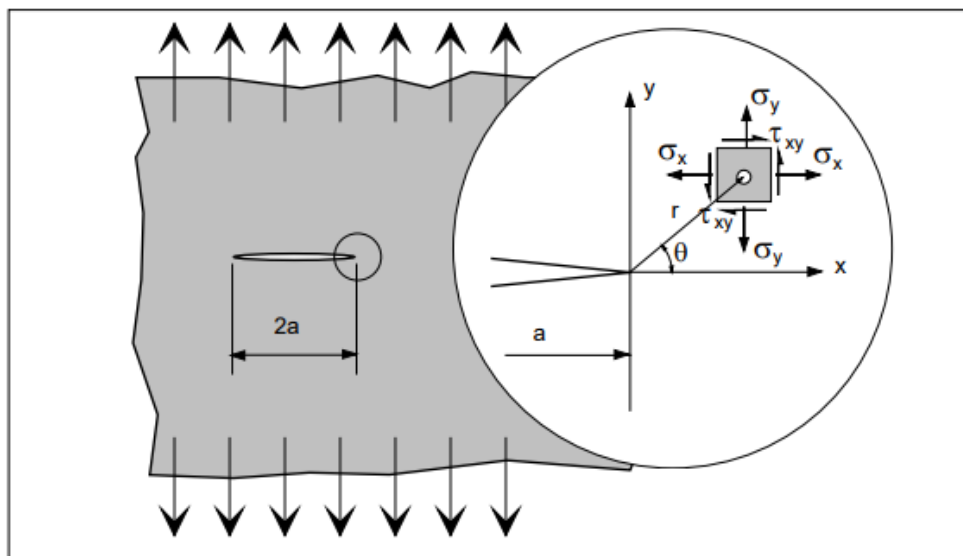


Figura 2.1 - Placa infinita no modo I de abertura de trinca demonstrando o estado plano de tensões de um elemento de área na vizinhança da trinca

Fonte: Adaptado Schivje (2009)

Através do trabalho pioneiro Griffith desenvolveu a base para a mecânica da fratura, sendo posteriormente conhecido como o “*early father*” da ciência mecânica da fratura.

Em 1924, Palmgren (1924) estabeleceu o uso de um componente em fadiga com base na dispersão estatística para o projeto de rolamento de esferas. No mesmo ano desenvolveu um modelo matemático de dano cumulativo linear para a carga de amplitude de tensão variável.

McAdam (1927) realizou estudos de fadiga por corrosão e demonstrou uma significativa degradação da resistência a fadiga em diversas soluções de água.

Por volta de 1929, Haighh (1929), utilizando de conceitos de análise de tensão de entalhe e tensões residuais, apresentou uma explicação racional da diferença na resposta dos aços macios e de alta resistência a tração, ambos sujeitos a fadiga e com a presença de entalhes.

Um importante avanço técnico foi alcançado na década de 1930, com a introdução do conceito “*shot-peening*” na indústria automobilística. Tornando raros os casos de falhas de fadiga em molas e eixos. Posteriormente, Almen (1963), explicou as melhorias, através de tensões residuais produzidas nas camadas superficiais de peças revestidas.

Neuber (1937) afirmou que a tensão média sobre um pequeno volume na raiz do entalhe possui maior importância se comparado ao pico de tensão no entalhe.

Gassner (1939) enfatizou a importância do teste de carga de amplitude de tensão variável, promovendo a utilização do espectro de carregamento de blocos para testes simulados. O teste de blocos foi notável para o posterior desenvolvimento de testes eletro-hidráulicos de circuito fechado.

Durante as Grandes Guerras Mundiais, intensificou-se o número de falhas por fadiga. Fato este, representado pelas fraturas frágeis em navios, aeronaves e veículos blindados. Este grande número de falhas acarretou em maiores esforços buscando soluções práticas para o momento e uma posterior reflexão acerca das concentrações de tensão e propriedades dos materiais.

Na data de 1945, Miner (1945) desenvolveu a partir das sugestões de Palmgren (1924) um critério linear de dano à fadiga cumulativo, conhecido hoje como a regra de dano linear de Palmgren-Miner. Atualmente esta regra tem sido amplamente utilizada nos projetos de fadiga.

Buscando estabelecer um padrão para as pesquisas e testes de falhas por fadiga. O comitê E-09 da ASTM, com Peterson como presidente, forneceu um fórum em 1946 a respeito da fadiga. Peterson (1959) destacou que o fator de entalhe da fadiga K_f é uma função do fator teórico de concentração de tensão. E que K_t representa a geometria do entalhe e do componente. Peterson (1953) publicou no ano de 1953 um livro sobre fatores de concentração de tensão, denominado "*Stress Concentration Design Factors*". Posteriormente uma versão expandida em 1974. (PETERSON, 1974).

Em 1952 iniciou-se a operação comercial do primeiro avião de passageiros a jato, conhecido como Comet. Após aproximadamente 300 horas de voo, uma unidade Comet caiu no mar Mediterrâneo. Concluindo-se após um extenso estudo acerca dos destroços encontrados, que o acidente foi ocasionado por falha devido a fadiga da cabine pressurizada. Posteriormente todas as espécies semelhantes de Comet foram retiradas de serviço. Este acidente colocou uma maior atenção no projeto de fadiga de estruturas metálicas, aumentando a importância dada ao quesito manutenção e inspeção.

Irwin (1957) introduziu o fator de intensidade de tensão (FIT), K_I . Onde foi aceito com base nas previsões de vida de crescimento de trinca por fadiga e na mecânica da fratura linear elástica (MFLE). Como Irwin foi o responsável por criar o termo MF e devido as suas contribuições, ele é considerado o "*modern father*" da MF. Irwin

demonstrou ainda que as tensões locais próximas à frente de trinca são, de forma geral, representadas pela seguinte equação:

$$\sigma_{ij} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta); \quad (2.1)$$

sendo (r, θ) as coordenadas polares da localização do ponto de interesse em relação a frente de trinca, e K o fator de intensidade de tensão (FIT). (BANNANTINE et al., 1989; ANDERSON, 2005; SCHIJVE, 2009). Esta descrição vetorial que Irwin, (1957) elaborou, até então era baseada em energia. Westergaard (1939) apresentou o FIT e um método para determina-lo. O qual se relaciona com a taxa de liberação de energia de Griffith, para descrever as tensões e deslocamentos próximos à frente de trinca.

Portando dado o método de Westergard em relação à equação (2.1). Para uma trinca submetida à tração (modo I - abertura). Utilizando a mesma placa plana, figura 1. O campo de tensão na vizinhança próxima à frente de trinca é definido pelas seguintes equações (WESTERGAARD, 1939):

$$\begin{cases} \sigma_{xx}(r, \theta) = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} - \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right); \\ \sigma_{yy}(r, \theta) = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} - \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right); \\ \tau_{xy}(r, \theta) = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} - \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}; \\ \sigma_{zz} = 0 \text{ (Para tensão plana);} \\ \sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \text{ (Para deformação plana);} \\ \tau_{xz} = \tau_{zx} = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

Na abordagem baseada no fator intensidade de tensão a propagação da trinca ocorre quando o fator de intensidade de tensão atingir um valor crítico. Neste caso tal valor é dado pelo fator de tenacidade a fratura. Assim tem-se:

$$K(a) = f(a)\sigma\sqrt{\pi a}; \quad (2.3)$$

Deste modo " σ " corresponde à tensão nominal aplicada, " a " é o tamanho da trinca e " $f(a)$ " é a função de correção do fator intensidade de tensão.

A equação (2.4), representa o momento que a trinca atinge um tamanho que conduz a uma condição de instabilidade, ou seja, quando o valor numérico do fator de tenacidade a fratura (K_{Ic}) for maior ou igual ao valor do fator de intensidade de tensões (K_I).

$$K_I \leq K_{Ic}. \quad (2.4)$$

Portanto o fator de tenacidade à fratura representa a capacidade que um material possui de manter sua integridade estrutural na presença de trincas. Este parâmetro é utilizado no contexto da Mecânica da Fratura (MF) como um parâmetro de seleção de material, analogamente como os limites de tensão de escoamento ou última.

Buscando validar o desempenho das propostas de Westergard, Weibull (1951), construiu a distribuição Weibull que fornece um dos parâmetros para distribuição estatística para testes e análises probabilísticas da vida a fadiga.

No início da década de 1960, Paris (1961), demonstrou que a taxa de crescimento de trinca por fadiga, da/dN pode ser melhor descrita utilizando a faixa de intensidade de tensão. Elber (1970) apresentou a importância do fechamento de trinca no crescimento de trinca por fadiga. Desenvolvendo-se um modelo quantitativo e expondo que o crescimento de trinca por fadiga é controlado por um intervalo efetivo do fator intensidade de tensão. Sendo este modelo frequentemente utilizando nos cálculos atuais de crescimento de trinca. Paris (1970) demonstrou que poderia ser obtido um FIT limiar para o qual o crescimento de trinca por fadiga não ocorreria.

Nas décadas posteriores ocorreram avanços computacionais, proporcionando melhorias significativas em diversos aspectos do projeto de fadiga. Incluindo software para diferentes modelos de propagação de trinca e inúmeros avanços na capacidade de simulação numérica.

Em 2015, Ávila e Santos (2015) apresentaram a metodologia “*Fast Crack Bounds*” (FCB). A metodologia FCB propõe estabelecer cotas para modelos de propagação de trincas que envelopam a solução numérica, buscando uma redução nos tempos computacionais.

2.3 ETAPAS DA FADIGA

Conforme Guimarães (2009), as falhas por fadiga têm aparência similar à de uma fratura frágil, uma vez que as superfícies de fratura são planas e perpendiculares ao eixo de tensão, com ausência do fenômeno da estrição. As características da fratura proveniente de uma falha por fadiga são bem diferentes daquelas provenientes de uma fratura frágil estática, surgindo de etapas de desenvolvimento de falha, chamados de etapas da fadiga (SHIGLEY, 2005). Estes são divididos em três estágios, conforme figura 2.2, sendo eles, etapa I reflete o início da trinca. A etapa II corresponde a propagação da trinca e a etapa III consiste na ruptura repentina devido ao crescimento instável da trinca. (MEYERS; CHAWLA, 1982; NEWMAN, 1998; CUI, 2002).

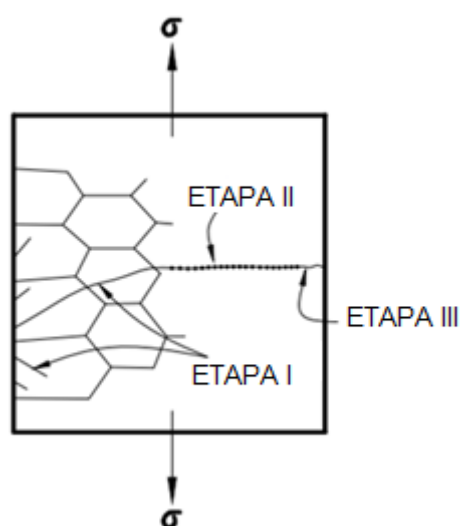


Figura 2.2 – Etapas da propagação de trinca por fadiga

Fonte: Adaptado de Meyers (1982)

De acordo com Brandão (2013) durante a etapa I as trincas iniciam com uma ou mais micro trincas causadas pela deformação plástica cíclica periódica de propagação cristalográfica. Estendendo-se por dois a cinco grãos relativamente à origem, geralmente ocorrendo nas regiões de concentração de tensão.

Durante a etapa II, o crescimento da trinca ocorre devido às tensões de tração, formando superfícies de fratura com platôs paralelos, separados por sulcos. Assim o crescimento propaga-se ao longo de planos normais na direção da máxima tensão tração (NORTON, 2002; ROSA, 2002).

No decorrer da etapa III, ocorre a ruptura repentina devido ao crescimento instável da trinca, sucede no ciclo de carga final. Isto resulta em uma fratura rápida e repentina. Devido a constante aplicação das tensões, a trinca propenderá ao aumento de dimensões. Conseqüentemente, aumenta-se o fator de intensidade de tensão na extremidade da trinca, até ao nível de tenacidade a fratura do material, quando de forma instantânea, ocorre uma falha repentina no próximo ciclo de tensão de tração (BRANDÃO, 2013; NORTON, 2002).

Estas etapas da fadiga são extremamente influenciáveis por diversos fatores, a saber, crescimento da trinca, dinâmica do carregamento, efeitos da superfície, natureza cristalográfica do material, temperatura, entre outros. (EWING, HUMPHREY, 1903; CUI, 2002).

Como a maior parte das falhas de componentes mecânicos ou estruturais é causada pela propagação de trincas (CALLISTER, 2009). Uma maior compreensão da magnitude e distribuição do campo de tensões na vizinhança da frente da trinca é essencial para determinar a segurança e confiabilidade de estruturas (BARSOM, 1976). Assim, segundo Kobayashi (2011), ocorre a previsão do tempo de vida dos componentes mecânicos.

Tendo em vista esta necessidade de acelerar o projeto de componentes sujeitos ao fenômeno de propagação e crescimento de trincas. Conduziu ao desenvolvimento de métodos para análise da fadiga de um componente estrutural, entre eles; Método da vida sob deformação que permite um estudo detalhado do escoamento localizado. Método da vida sob tensão (S-N), o qual é baseado em tensões nominais ajustadas pelos concentradores de tensão. E o método da mecânica da fratura linear elástica que estuda a propagação da trinca aplicando conceitos da mecânica da fratura (BANNANTINE et al., 1989; DOWLING, 2007).

O método da mecânica de fratura linear elástica assume que uma trinca já esteja presente no elemento em análise e já tenha sido detectada. De acordo com BANNANTINE et al. (1989) esse método prevê o crescimento dessa trinca devido à intensidade de tensão aplicada.

2.4 MECÂNICA DA FRATURA

A Mecânica da Fratura (MF) trata do comportamento à fratura de componentes contendo defeitos ou trincas sob condições semelhantes às encontradas na prática.

Portando a MF possui como objetivo determinar se um defeito tipo trinca é capaz de levar o componente à fratura catastrófica para tensões normais de serviço.

A Mecânica da Fratura (MF) divide-se em: Mecânica da Fratura Elasto-Plástica (MFEP) e Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE), tema desse trabalho.

2.5 MECÂNICA DA FRATURA LINEAR ELÁSTICA

A metodologia da mecânica da fratura linear elástica (MFLE) é baseada num procedimento analítico. Onde relaciona a magnitude e a distribuição do campo de tensões na vizinhança da ponta da trinca com a tensão nominal aplicada no componente, o tamanho, a forma e orientação da trinca. Deste modo a MFLE tem como base os fundamentos da teoria da elasticidade (ANDERSON, 2005) e segundo BANNANTINE et al. (1989) desenvolve-se a partir das seguintes hipóteses:

- (H1). Existência de uma trinca;
- (H2). Material elástico linear, isotrópico e homogêneo;
- (H3). Pequenas deformações;
- (H4). Estado plano;
- (H5). Modos de carregamento.

Conhecendo as hipóteses de trabalho é adequado definir as componentes de tensão e sistemas de referência nas proximidades da trinca conforme a figura 2.3.

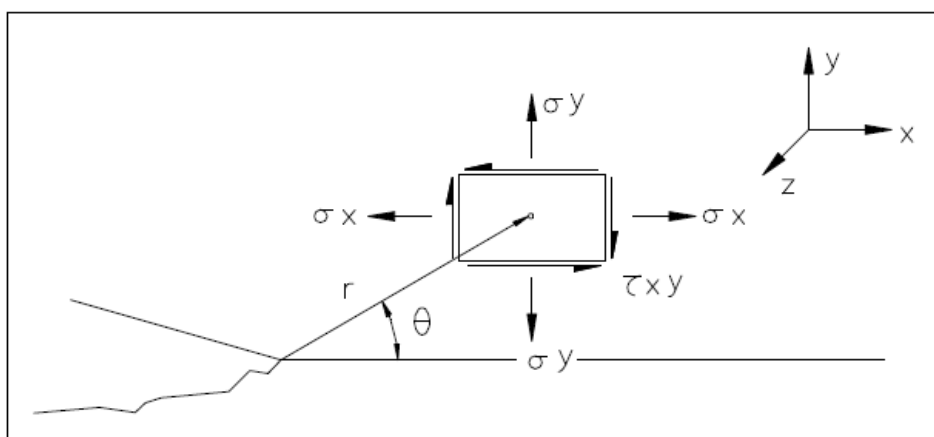


Figura 2.3 - Componentes de tensão e sistemas de referência nas proximidades da trinca.

Fonte: Adaptado Schivje (2009)

Assim é conveniente definir os três modos de carregamento. O modo I, é caracterizado pelo deslocamento local que é simétrico aos planos x-y e x-z. O modo de cisalhamento no plano, modo II, os deslocamentos são simétricos ao plano x-y e antissimétricos ao plano x-z. O modo de cisalhamento fora do plano, modo III, é associado com os deslocamentos que são antissimétricos com os planos x-y e x-z. Ressaltando que se pode obter outros modos de movimentos relativos de duas superfícies de trincas como uma composição dos modos descritos anteriormente. Abaixo apresenta-se e as três geometrias fundamentais de abertura de trincas. Figura 2.4.

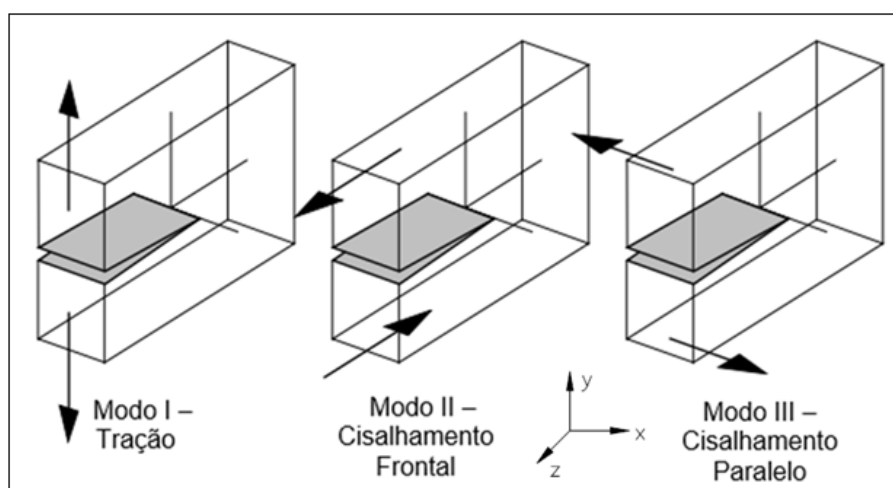


Figura 2.4 - Modos de carregamento

Fonte: Adaptado Schivje (2009)

Os respectivos fatores de intensidade de tensão como função somente da geometria e condições de carregamento são:

$$K_I = \sigma\gamma\sqrt{\pi a}. \quad (2.5)$$

$$K_{II} = \tau\gamma\sqrt{\pi a}. \quad (2.6)$$

$$K_{III} = \tau\gamma\sqrt{\pi a} \quad (2.7)$$

onde γ é um fator geométrico que depende da forma e proporções do componente em estudo; K_I fator de intensidade de tensão para o modo I de abertura da trinca; K_{II}

para o modo II e, K_{III} para o modo III.

2.5.1 Caracterização do Estado Plano (Hipótese H4)

Considerando casos extremos o colapso de um componente mecânico pode ocorrer através de dois modos, isto é, sob um estado plano de deformação (EPD), onde as deformações atingem níveis que ultrapassem as deformações críticas do material. Ou sob um estado plano de tensões (EPT), no qual as tensões elevadas são responsáveis pelo colapso do componente.

O estado plano de tensão (EPT) prevalece quando não existe tensão paralela a frente da trinca, e por esta razão, o estado triaxial de tensão restringe-se em um estado plano de tensão. Este estado leva em consideração que o plano de instabilidade da fratura é inclinado a 45° em relação a direção da tensão normal aplicada.

Estruturas onde a espessura B seja suficientemente pequena, a fratura irá ocorrer completamente em um estado plano de tensões (EPT), consumindo mais energia em função da ruptura ocorrer por cisalhamento. Já para materiais com comportamento dúctil, existe uma excessiva plastificação da frente da trinca, contribuindo para que o colapso seja em um estado plano de tensão.

Hahn e Rosenfield (1975) afirmam que para uma situação onde:

$$\frac{B}{a} \leq \frac{1}{4} \left(\sec \frac{\pi\sigma}{2\sigma_E} - 1 \right). \quad (2.8)$$

Considerando o modo I, prevalece uma deformação a 45° em relação a carga principal, ocasionando uma fratura por cisalhamento no estado plano de tensões (EPT).

O estado plano de deformação (EPD) predomina quando a deformação na direção a frente da trinca é nula, ou seja, ($\varepsilon_{33} = 0$). Levando em consideração uma situação no qual a fratura ocorre em um plano perpendicular a direção da tensão normal aplicada.

Sob as condições elásticas lineares a fratura ocorre quando $K_I > K_{IC}$ ou $K_I > K_C$, sendo K_{IC} a tenacidade da fratura para um Estado plano de Deformações (EPD).

Castro e Meggiolaro (2009), consideram que na prática o modo I (caracterizado pelo deslocamento local que é simétrico aos planos x-y e x-z da figura 2.4) é o mais significativo. Isto posto a discussão será centrada no modo I de faturamento onde em todos os cálculos numéricos utiliza-se o valor de K_{IC} , fixando o estado plano de deformações (EPD).

2.6 MODELOS DE PROPAGAÇÃO DE TRINCAS

A Mecânica da Fratura (MF) considera que os componentes mesmo antes de serem colocadas em serviço possuem trincas. Essas trincas podem ser provenientes do processo de fabricação (falhas na fundição, defeitos de soldagem, trincas devido a tratamentos térmicos, etc.) ou provenientes de uma sollicitação dinâmica (nucleação de trincas por fadiga).

O estudo da mecânica da fratura viabiliza métodos de análise para prever o tamanho dessas trincas antes que atinjam tamanhos catastróficos.

O diagrama $\log(da/dN)$ por $\log(\Delta K)$, demonstrado na figura 2.5, é utilizado para estudar o comportamento da evolução da taxa de propagação de trinca em função do termo forçante ΔK . Apresentando o parâmetro pelo qual a taxa de crescimento é dependente. Distingue-se na figura 2.5, três regiões distintas sendo elas;

- Região I – Representa o crescimento de trincas próximo do linear;
- Região II - Representa a propagação intermédia de trincas, onde a taxa de propagação de trincas é linearmente proporcional a K (em uma escala logarítmica);
- Região III – Acelerou o crescimento da trinca imediatamente antes da falha.

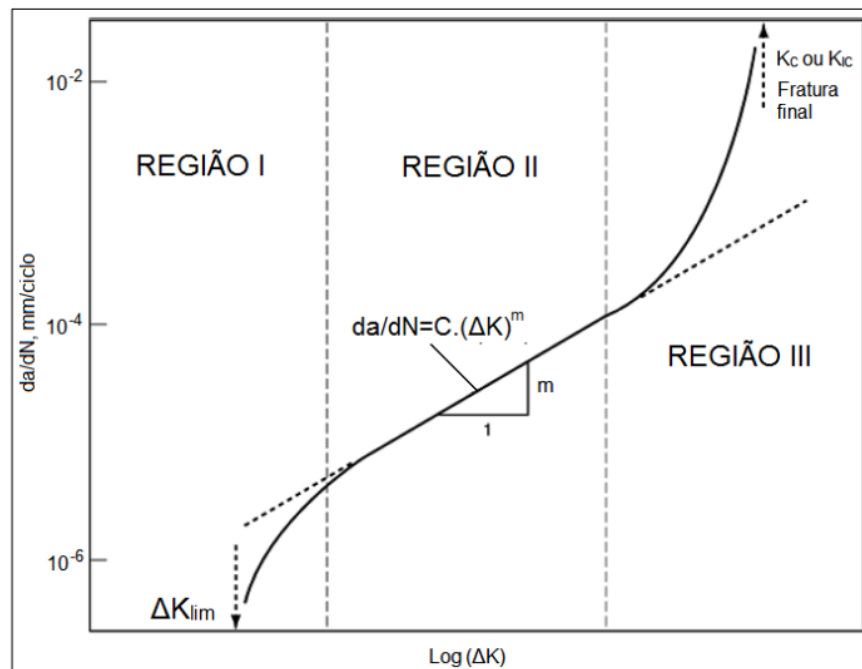


Figura 2.5 - Curva da taxa de propagação de trinca por fadiga, $\log(da/dN)$, vs a variação do fator de intensidade de tensão, $\log(\Delta K)$, em escala log-log.

Fonte: Adaptado de ASM Handbook, 1998.

Para uma análise da região II e III do diagrama $\log(da/dN) \times \log(\Delta K)$, será elaborado um estudo referente aos modelos de propagação de trinca, em especial a metodologia de Paris-Erdogan e Forman.

2.6.1 Modelo de Paris-Erdogan

O modelo de propagação de trinca proposto por Paris-Erdogan (Paris e Erdogan, 1963) descreve apenas o crescimento de trinca na região II da figura 2.5. Este modelo não considera os efeitos de tensão média, histórico de carregamento e os efeitos da interação de carregamento. As implicações geradas por essas limitações são resultados com precisão inferior e a restrição do modelo trabalhar apenas com carregamentos de tensão constante. O modelo de Paris-Erdogan é formulado através do seguinte PVI:

$$\begin{cases} \text{Determinar } a \in C^1 [N_0, N_1]; \mathbb{R}^+ \text{ tal que:} \\ \frac{da}{dN}(N) = C_p \left(\sqrt{\pi a(N)} f(a(N)) \Delta \sigma \right)^{m_p}, \forall N \in (N_0, N_1); \\ a(N_0) = a_0; \end{cases} \quad (2.9)$$

sendo C_p e m_p as constantes do material e $\Delta\sigma$ a variação de tensão, N o número de ciclos e a_0 o tamanho inicial da trinca.

Com relação ao coeficiente " C_p " e o expoente " m_p ", Barsom (1971) e Barsom e Rolf (1999) por meio de ensaios encontraram valores empíricos para várias classes de aços. Estes parâmetros dependem da frequência do carregamento, a razão de tensão, o meio ambiente, o intervalo de variação do fator intensidade de tensão, a temperatura, dentre outros (CAVALLINI, IACOVIELLO, 1991).

Muitas variações da equação de Paris têm sido desenvolvidas para eliminar essas limitações. Uma delas é o modelo de Forman (1967) que considera os efeitos de tensão média e por consequência fornece resultados com maior precisão.

2.6.2 Modelo de Forman

Como o modelo de Paris-Erdogan se limita apenas a descrever o crescimento da trinca na região II, da figura 2.5. Forman (1967) buscou aprimorar os trabalhos de Paris e Erdogan, considerando novos parâmetros. O primeiro é a razão de tensão, R ($R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}} = \frac{K_{min}}{K_{max}}$). A introdução dos parâmetros " K_{Ic} " e " K_{max} " possibilitou descrever o comportamento da propagação de trincas em regiões instáveis a altas taxas de propagação. Acrescentando assim o segundo parâmetro, que é a instabilidade do crescimento de trinca quando o fator intensidade de tensão aproxima-se do valor crítico " K_{Ic} ". Consequentemente, Forman (1967) propôs a seguinte equação:

$$\begin{cases} \frac{da}{dN} = \frac{C_f(\Delta K)^{m_f}}{(1-R)(K_{Ic} - K_{max})} = \frac{C_f(\Delta K)^{m_f-1}}{\frac{K_{Ic}}{K_{max}} - 1}; \\ \frac{da}{dN} = \frac{C_f(\Delta K)^{m_f}}{(1-R)K_{Ic} - \Delta K}; \end{cases} \quad (2.10)$$

sendo C_f e m_f parâmetros do material para o modelo de Forman, K_{max} o fator intensidade de tensão máximo, K_c a tenacidade a fratura do material e R a razão de tensão. A equação é válida para valores de $R > 0$, pois, para determinados materiais, quando $R < 0$ não ocorre mudanças significativas na taxa de propagação de trinca se

comparada com a taxa de propagação quando $R \geq 0$ (HUDSON, SCARDINA, 1969; BANNANTINE et al., 1989; KUMAR et al., 2013). A razão de tensão, utilizada no modelo de Forman, é um fator que influencia diretamente na taxa de propagação de trinca. De forma geral, fixando-se ΔK , quanto maior o valor de R , maior a taxa de propagação de trinca. Destaca-se que o efeito da razão de tensão é fortemente dependente do tipo de material (HUDSON, SCARDINA, 1969; YUEN et al., 1974; BANNANTINE et al., 1989; MEHRZADI, TAHERI, 2012). A figura 2.6 ilustra um gráfico representando a variação de da/dN por ΔK em relação a variação de R .

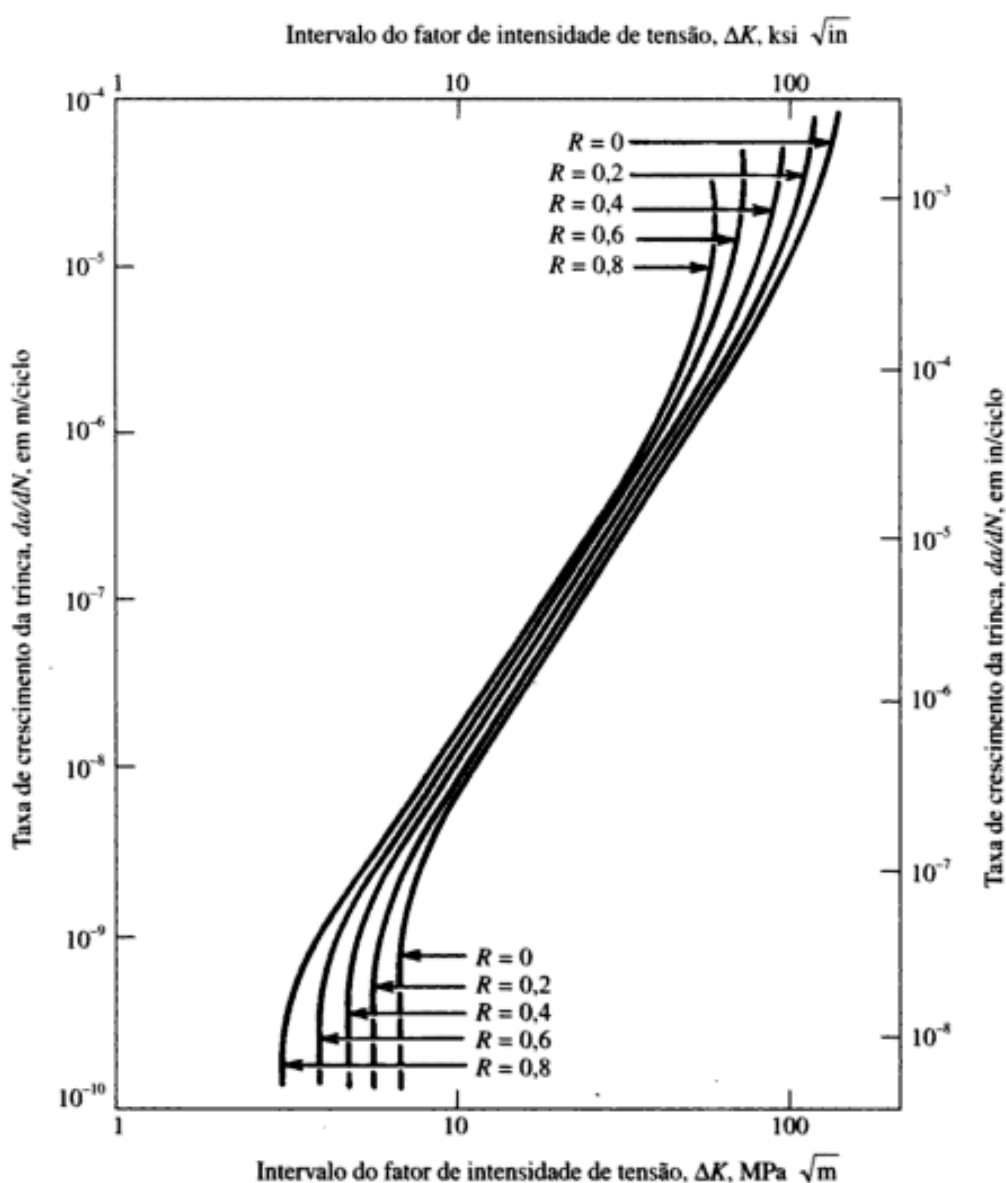


Figura 2.6 - Variação do gráfico da/dN por ΔK em relação a variação de R .

Fonte: Norton (2013).

O modelo de Forman apresentou, em estudos posteriores, concordância com os experimentos executados por Broek e Shijve (2009).

2.7 MÉTODOS NÚMERICOS PARA SOLUÇÕES DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Equações diferenciais ordinárias (EDO) são robustas representações teóricas de processos de evolução, onde a taxa de variação do estado do processo em cada instante t depende do processo nesse instante (MAIOLI, 2015).

Existem métodos que resolvem analiticamente uma Equação Diferencial Ordinária. Entretanto nem sempre é possível obter uma solução analítica. Neste caso, os métodos numéricos representam uma eficiente ferramenta eficaz para se encontrar uma solução aproximada.

2.7.1 Método de Runge-Kutta

O método de Runge-Kutta consiste em uma técnica de simples resolução do PVI proposto. Sendo de fácil utilização para a solução de passo simples, integra os métodos de Euler e Euler implícito. Possui como principal vantagem a precisão, com erro de truncamento que se encontra na ordem de h^4 (BOYCE, 2006). Sendo o método de Runge-Kutta de 4 estágios e ordem 4 mais utilizado (ASCHER, PETZOLD, 1998).

Os graus surgem do fato que cada método é uma comparação com um polinômio de Taylor. Por exemplo o método de Runge-Kutta de 4 ordem é comparado a um polinômio de grau 4. Através dessa comparação, o cálculo da derivada é eliminado. Efetuando-se avaliações da função f em cada iteração. Portanto se faz necessário conhecer o teorema de Taylor com resto de Lagrange:

Teorema: (Fórmula de Taylor com Resto de Lagrange). Seja $x : [t_0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^{n-1} , n -vezes derivável no aberto (t_0, b) . Então, existe $\xi \in (t_0, b)$ tal que

$$x(b) = x(t_0) + x'(t_0)(b - t_0) + \dots + \frac{(b - t_0)^{n-1}}{n - 1!} x^{(n-1)}(t_0) + \frac{(b - t_0)^n}{n!} x^{(n)}(\xi). \quad (2.11)$$

Com $b = t_0 + h$, isto equivale a dizer que existe $\theta \in (0,1)$ tal que

$$x(t_0 + h) = x(t_0) + x'(t_0)h + \dots + \frac{h^{n-1}}{n - 1!} x^{(n-1)}(t_0) + \frac{h^n}{n!} x^{(n)}(t_0 + \theta h). \quad (2.12)$$

A parcela $R_n(b) = \frac{x^{(n)}(\xi)}{n!} (b - t_0)^n$ em (2.11) é denominada Resto de Lagrange. Pelo Teorema (Fórmula de Taylor com Resto de Lagrange), se x for uma função de classe C^k , $(k + 1)$ –vezes derivável em um intervalo contendo t_0 e t , então existirá $\xi \in (t_0, t)$ tal que

$$x(t) = x(t_0) + x'(t_0)(t - t_0) + \dots + \frac{(t - t_0)^k}{k!} x^{(k)}(t_0) + \frac{(t - t_0)^{k+1}}{(k + 1)!} x^{(k+1)}(\xi). \quad (2.13)$$

A equação (2.13) será utilizada para descrever o método de Runge-Kutta de quarta ordem.

2.7.1.1 Método de Runge-Kutta de quarta ordem

Substituindo t_0 por t_n e t por $t_{n+1} = t_n + h$, a equação (2.13) equivale a:

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + x'(t_n)h + \dots + \frac{h^k}{k!} x^{(k)}(t_n) + \frac{h^{k+1}}{(k + 1)!} x^{(k+1)}(\xi). \quad (2.14)$$

Onde ξ representa um número entre t_n e t_{n+1} .

Substituindo $k = 4$ em (2.14)

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + x'(t_n)h + \frac{h^2}{2!} x''(t_n) + \frac{h^3}{3!} x'''(t_n) + \frac{h^4}{4!} x^{(4)} + \frac{h^5}{5!} x^{(5)}(\xi). \quad (2.15)$$

com $\xi \in (t_n, t_{n+1})$. Buscando encontrar as constantes que respeite:

$$x_{n+1} = x_n + h(\alpha k_1 + \beta k_2 + \gamma k_3 + \delta k_4)$$

sendo as constantes k_1, k_2, k_3 e k_4 dadas por:

$$\begin{cases} k_1 = f(t_n, x_n) \\ k_2 = f(t_n + \alpha_1 h, x_n + \beta_1 h k_1) \\ k_3 = f(t_n + \alpha_2 h, x_n + \beta_2 k_1 + \beta_3 h k_2) \\ k_4 = f(t_n + \alpha_3 h, x_n + \beta_4 k_1 + \beta_5 h k_2 + \beta_6 h k_3) \end{cases}$$

Solucionando o sistema a equação de recorrência do modelo RK4 é dada por (2.16).

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \left(\frac{h}{6}\right) (f(K_1) + 2f(K_2) + 2f(K_3) + f(K_4)); \\ K_1 = y_n; \\ K_2 = y_n + \left(\frac{h}{2}\right) f(K_1); \\ K_3 = y_n + \left(\frac{h}{2}\right) f(K_2); \\ K_4 = y_n + (h)f(K_3). \end{cases} \quad (2.16)$$

sendo que K_1 é o coeficiente angular no extremo esquerdo do intervalo, K_2 é o coeficiente angular no ponto médio, K_3 é a segunda aproximação do coeficiente angular do ponto médio e K_4 é o coeficiente angular em $(x_n + h)$. A soma $(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)/6$ também pode ser interpretada como coeficiente angular médio (BOYCE, DIPRIMA, 2006).

2.8 METODOLOGIA “FAST CRACK BOUNDS” (FCB)

A metodologia “*Fast Crack Bounds*” (FCB) foi apresentada nos trabalhos de Ávila e Santos (2015) e Machado Jr. (2015). Segundo Ávila e Santos (2015) propõe-se estabelecer cotas superiores e inferiores para a função tamanho de trinca. Procura-se estabelecer cotas que “envelopam” a solução do problema de valor inicial (PVI) do modelo de propagação de trincas de Forman.

Considerando-se um modelo de propagação do tipo CATC, formula-se o seguinte PVI.

$$\begin{cases} \text{Encontrar } a \in C^1, \text{ tal que:} \\ \frac{da}{dN} = h(\alpha, \Delta K), \forall N \in (N_0, N_1); \\ a(N_0) = a_0. \end{cases} \quad (2.17)$$

O método FCB se desenvolve a partir de hipóteses adequadas, que garantem a regularidade suficiente para que a função “tamanho de trinca” seja expandida, exatamente via série de Taylor com resto de Lagrange, conforme Santos (2015):

$$a(N) = a_0(N_0) + \frac{da}{dN}(N_0)(N - N_0) + \frac{1}{2} \frac{d^2a}{dN^2}(\eta)(N - N_0)^2, \text{ com } \eta \in [N_0, N]. \quad (2.18)$$

O método *Fast Crack Bounds* (FCB) propõe a partir da série de Taylor retendo termos até segunda ordem, com resto de Lagrange utilizando as hipóteses, quando necessárias, com majorações adequadas, obter cotas da seguinte forma:

$$\underline{a}(N) \leq a(N) \leq \bar{a}(N), \forall N \in [N_0, N]. \quad (2.19)$$

Sendo $\underline{a}(N)$, $a(N)$ e $\bar{a}(N)$, a cota inferior, a função tamanho de trinca e a cota superior, respectivamente (Ávila *et al.*, 2016).

2.9 ESTIMADORES DA MÉDIA E VARIÂNCIA

A modelagem do fenômeno de propagação de trinca é feita de forma empírica. Este processo é afetado por inúmeras fontes de variabilidade, como por exemplo, as propriedades do material, geometria da trinca e condições de contorno. Conseqüentemente, é adequado descrever o fenômeno de propagação de trinca após um certo número de ciclos de carga através de uma distribuição de probabilidade (SANKARARAMAN, LING, MAHADEVAN, 2011).

Um espaço de probabilidade é um trio (Ω, F, P) , onde Ω é um conjunto não-vazio, F é uma σ -álgebra de um subconjunto de Ω , e P é uma probabilidade em F .

Considerando-se os parâmetros dos modelos de propagação de trinca como variáveis aleatórias absolutamente contínuas em (Ω, F, P) . Assim, o PVI, Eq. (2.13), considerando o modelo de incerteza pode ser formulado de forma geral, como se segue:

$$\begin{cases} \text{Encontrar } a \in C^1((N_0, N_1); L^2(\Omega, F, P)), \text{ tal que:} \\ \frac{da}{dN}(N, \omega) = h(\alpha(\omega), \Delta K(a)), \forall (N, \omega) \in (N_0, N_1) \times (\Omega, F, P); \\ a(N_0, \omega) = a_0(\omega), \quad \forall \omega \in (\Omega, F, P). \end{cases} \quad (2.20)$$

A seguir define-se os estimadores dos momentos estatísticos.

Lema (Cotas para os estimadores dos momentos estatísticos): Seja $\{a(\omega_1), a(\omega_2), \dots, a(\omega_{N_s})\}$ o conjunto de um dado modelo com amplitude de tensão constante, $\{\underline{a}(\omega_i, N)\}_{i=N}^{N_s}$ a cota inferior e $\{\bar{a}(\omega_i, N)\}_{i=N}^{N_s}$ a cota superior. A partir do exposto, obtêm-se as seguintes desigualdades, Eq. (2.17):

$$\begin{cases} (i) \hat{\mu}_{\underline{a}}(N) \leq \hat{\mu}_a(N) \leq \hat{\mu}_{\bar{a}}(N), \forall N \in [N_0, N]; \\ (i) \hat{\mu}_{\underline{a}}^2(N) \leq \hat{\mu}_a^2(N) \leq \hat{\mu}_{\bar{a}}^2(N), \forall N \in [N_0, N]. \end{cases} \quad (2.21)$$

A primeira relação (i) representa as cotas para o estimador do momento estatístico de primeira ordem (valor esperado), onde $\hat{\mu}_{\underline{a}}(N)$ é cota inferior do tamanho de trinca, $\hat{\mu}_a(N)$ a função tamanho de trinca e $\hat{\mu}_{\bar{a}}(N)$ a cota superior do tamanho de trinca. A segunda relação retrata o estimador do momento estatístico de segunda ordem, onde $\hat{\mu}_{\underline{a}}^2(N)$ é cota inferior do tamanho de trinca, $\hat{\mu}_a^2(N)$ a função tamanho de trinca e $\hat{\mu}_{\bar{a}}^2(N)$ a cota superior do tamanho de trinca.

Demonstração do lema (Cotas para os estimadores dos momentos estatísticos)

Considere $\{a(N, \omega_i)\}_{i=N}^{N_s}$, $\{\underline{a}(N, \omega_i)\}_{i=N}^{N_s}$ e $\{\bar{a}(N, \omega_i)\}_{i=N}^{N_s}$ com $N \in [N_0, N_1]$ as realizações do tamanho de trinca e as cotas inferior e superior, respectivamente.

Da definição da cota inferior tem-se,

$$\begin{aligned} \underline{a}(N, \omega_i) &\leq a(N, \omega_i), \forall \omega_i \in \Omega \wedge \forall N \in [N_0, N_1]; \\ \underline{a}^k(N, \omega_i) &\leq a^k(N, \omega_i), \forall \omega_i \in \Omega \wedge \forall N \in [N_0, N_1]; \end{aligned} \quad (2.22)$$

A cota inferior para o estimador de um momento estatístico de ordem k é definida da seguinte forma:

$$\hat{\mu}_{\underline{a}}(N) = \left(\frac{1}{N}\right) \sum_{i=1}^N \underline{a}^k(N, \omega_i), \forall N \in [N_0, N_1]; \quad (2.23)$$

A partir da Eq. (2.22), tem-se,

$$\hat{\mu}_{\underline{a}}(N) = \left(\frac{1}{N}\right) \sum_{i=1}^N \underline{a}^k(N, \omega_i) \leq \left(\frac{1}{N}\right) \sum_{i=1}^N a^k(N, \omega_i) = \hat{\mu}_a(N). \quad (2.24)$$

Analogamente, obtém-se para a cota superior,

$$a(N, \omega_i) \leq \bar{a}(N, \omega_i), \forall \omega_i \in \Omega \wedge \forall N \in [N_0, N_1]; \quad (2.25)$$

$$\hat{\mu}_a^{(k)}(N) = \left(\frac{1}{N}\right) \sum_{i=1}^N a^k(N, \omega_i) \leq \left(\frac{1}{N}\right) \sum_{i=1}^N \bar{a}^{(k)}(N, \omega_i) = \hat{\mu}_{\bar{a}}^{(k)}(N). \quad (2.26)$$

Atribui-se valores para k , representado a ordem do estimador

$$k = 1 \rightarrow \hat{\mu}_{\underline{a}}^{(1)}(N) \leq \hat{\mu}_a^{(1)}(N) \leq \hat{\mu}_{\bar{a}}^{(1)}(N), \forall N \in [N_0, N_1];$$

$$k = 2 \rightarrow \hat{\mu}_{\underline{a}}^{(2)}(N) \leq \hat{\mu}_a^{(2)}(N) \leq \hat{\mu}_{\bar{a}}^{(2)}(N), \forall N \in [N_0, N_1];$$

Generalizando, para a n ésima ordem,

$$k = n \rightarrow \hat{\mu}_{\underline{a}}^{(n)}(N) \leq \hat{\mu}_a^{(n)}(N) \leq \hat{\mu}_{\bar{a}}^{(n)}(N), \forall N \in [N_0, N_1];$$

Assim sendo, chega-se a seguinte relação:

$$\hat{\mu}_{\underline{a}}^{(n)}(N) \leq \hat{\mu}_a^{(n)}(N) \leq \hat{\mu}_{\bar{a}}^{(n)}(N), \forall n \in \mathbb{N} \wedge \forall N \in [N_0, N_1]; \quad (2.27)$$

A Eq. (2.23), expressa uma forma geral para os estimadores dos momentos estatísticos de ordem n e suas respectivas cotas. Para este trabalho, efetua-se a análise dos estimadores do primeiro e segundo momento estatístico. Assim Vuolo (1996), define a Eq. (2.28) como uma boa alternativa para o cálculo da estimativa experimental da variância.

$$\sigma_a^2(N) = \frac{1}{N_S - 1} \sum_{N=1}^{N_S} (a - \hat{\mu}_a)^2(N), \forall N \in [N_0, N_1]. \quad (2.28)$$

Onde σ_a^2 , representa a variância da função tamanho de trinca. Assim o estimador do momento estatístico de segunda ordem é determinado pela Eq. (2.29):

$$\hat{\mu}_a(N) = \sigma_a^2(N) \frac{N_S}{N_S - 1} (\hat{\mu}_a)^2 \forall N \in [N_0, N_1] \times (\Omega, \mathcal{F}, P). \quad (2.29)$$

2.10 SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO (SMC)

A simulação de Monte Carlo é uma técnica matemática computadorizada que possibilita levar em conta o risco em análises quantitativas e tomadas de decisão.

O Método de Monte Carlo foi formalizado em 1949, por meio do artigo intitulado “Monte Carlo Method”, publicado por John Von Neumann e Stanislav Ulam (1947).

A Simulação de Monte Carlo pode ser descrita como método de simulação estatística que utiliza sequencias de números aleatórios para desenvolver simulações. Em outras palavras, é visto como método numérico universal para resolver problemas por meio de amostragem aleatória (aproximação da solução). (LOESCH, 2009).

Conforme Elishakoff (1999) o método de Simulação de Monte Carlo (SMC) é baseado na geração e simulação de amostras. Em geral, o método se desenvolve nas seguintes etapas:

1. Simulação da função da variável aleatória;
2. Solução do problema determinístico para um grande número de realizações;
3. Análise estatística dos resultados.

No trabalho de Lopez e Ávila (2015), a aproximação numérica das realizações do processo estocástico que descreve a propagação da trinca é avaliada usando um

método RK4. Assim, para a i -ésima realização dos parâmetros $\{\alpha(\omega_i), a_0(\omega_i)\}$, a solução numérica aproximada da i -ésima realização do processo estocástico “tamanho de trinca” é dada pela equação abaixo (2.30).

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Determinar } a_{K+1}(\omega_i) \in i^+, \text{ para cada } \omega_i \in \Omega; \\ a_{K+1}(\omega_i) = a_K(\omega_i) + \left(\frac{\Delta N}{6}\right) (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)(\omega_i), \forall K \in \{0, 1, \dots, n\}; \\ K_1(\omega_i) = \frac{C_f(\sqrt{\Pi a(N)} f(a(N)) \Delta \sigma)^{m_f}}{(1-R)K_C - \Delta K}; \\ K_2(\omega_i) = a_K(\omega_i) + \left(\frac{\Delta N}{2}\right) K_1(\omega_i); \\ K_3(\omega_i) = a_K(\omega_i) + \left(\frac{\Delta N}{2}\right) K_2(\omega_i); \\ a_0(\omega_i) = a(N, \omega_i). \end{array} \right. \quad (2.30)$$

3 METODOLOGIA DE PESQUISA

A pesquisa é desenvolvida em três etapas descritas a seguir:

- i. Método “Fast Crack Bounds” (FCB) aplicado ao modelo de Forman: Para o desenvolvimento dessa fase efetua-se a formulação matemática buscando a determinação das cotas superior e inferior para a evolução de trinca do modelo de Forman por intermédio da metodologia FCB, estipulando-se as cotas mediante série de Taylor de segunda ordem com resto de Lagrange.
- ii. Quantificação da incerteza: Nessa etapa a quantificação da incerteza do modelo de propagação de trinca de Forman consistirá em utilizar conjuntamente os métodos de Simulação de Monte Carlo (SMC) e *Fast Crack Bounds* (FCB) para obter cotas para os momentos estatísticos do processo estocástico “tamanho de trinca”.
- iii. Implementação computacional: Utilizando-se do software MatLab desenvolve-se o ambiente computacional. Implementa-se os métodos Simulação de Monte Carlo (SMC), Runge-Kutta de quarta ordem (RK4) e *Fast Crack Bounds* (FCB) do modelo de propagação de trinca de Forman. Em conformidade com os exemplos clássicos, “Placa com largura infinita com trinca central”, “Placa com largura finita e trinca central” e “Placa com largura finita e com trinca na aresta.” O resultado dessa iteração dentro do ambiente computacional, resultará em um algoritmo que desempenhará uma confrontação entre as soluções numéricas adquiridas através do método de RK4 e os estimadores das cotas.

3.1 MÉTODO *FAST CRACK BOUNDS* APLICADO AO MODELO DE FORMAN

A metodologia FCB foi apresentada nos trabalhos de Ávila e Santos (2015) e Machado Jr. (2015). Segundo Ávila e Santos (2015), propõe estabelecer cotas superiores e inferiores para a função tamanho de trinca. Estas cotas “envelopam” a solução do PVI do modelo de propagação de trincas de Forman.

Os modelos matemáticos para a evolução de trinca são formulados através do seguinte PVI.

$$\begin{cases} \text{Encontrar } a \in C^1, \text{ tal que:} \\ \frac{da}{dN} = h(\alpha, \Delta K), \forall N \in (N_0, N_1); \\ a(N_0) = a_0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Onde possuem como características serem equações diferenciais ordinárias de 1º ordem, não lineares e autônomas. Aplicando a expansão em série de Taylor com resto de Lagrange, considerando as seguintes hipóteses (SANTOS, 2015):

$$\begin{aligned} H1: \Delta\sigma(N) &= \Delta\sigma_0, \forall N \in [N_0, N_1]; \\ H2: f &\in C^1(\mathbb{R}^+); \\ H3: 0 < f(a_0) &\leq f(x) \leq f(y), x \leq y, \forall x, y \in [a_0, a_1]; \\ H4: f'(a_0) &\leq f'(x) \leq f'(y), x \leq y, \forall x, y \in [a_0, a_1]; \\ H5: m &\geq 1 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Onde a hipótese (H_1) assume um carregamento de tensão constante, (H_2) assegura que a função de correção do fator de intensidade de tensão é contínua, (H_3), afirma que a função geometria deve ser uma função monótona não-decrescente. A hipótese (H_4) assegura que a derivada da função geometria também é uma função monotonamente não decrescente, e a hipótese (H_5) determina o valor de m para que o modelo seja válido. As hipóteses (H_1), (H_2), (H_3), (H_4) e (H_5) estabelecem as bases para a definição do teorema que determinará as cotas para a função tamanho de trinca.

Teorema (Método FCB aplicado ao modelo de Forman): Seja $f(\cdot)$ e $\Delta(\cdot)$ funções que satisfaçam as hipóteses (H_1) , (H_2) , (H_3) , (H_4) e (H_5) e $a^* \in [a_0, a_1]$. Então as seguintes cotas superiores e inferiores são válidas:

$$\left\{ \begin{array}{l} a(N) - a_0 \leq \left\{ \begin{array}{l} \frac{C_f(\Delta K(a_0))^{m_f}}{(1-R)K_{Ic} - \Delta K(a_0)} + \frac{1}{2} \left[\frac{C_f(\Delta K(a^*))^{m_f}}{(1-R)K_{Ic} - \Delta K(a^*)} \right]^2 \\ \left[m_f + \frac{1}{\frac{(1-R)K_{Ic}}{\Delta K(a^*)} - 1} \right] \\ \left[\frac{1}{2a^*} + \frac{f'}{f}(a^*) \right] (N - N_0) \end{array} \right\} \\ a(N) - a_0 \geq \frac{C_f(\Delta K(a_0))^{m_f}}{(1-R)K_{Ic} - \Delta K(a_0)} \left\{ \begin{array}{l} 1 + \frac{1}{2} \left[\frac{C_f(\Delta K(a_0))^{m_f}}{(1-R)K_{Ic} - \Delta K(a_0)} \right]^2 \\ \left[m_f + \frac{1}{\frac{(1-R)K_{Ic}}{\Delta K(a_0)} - 1} \right] \\ \left[\frac{1}{2a_0} + \frac{f'}{f}(a_0) \right] (N - N_0) \end{array} \right\} \end{array} \right. \quad (3.3)$$

Prova: Das hipóteses (H_2) , (H_3) e (H_4) e por intermédio da série de Taylor de segunda ordem com resto de Lagrange. Conforme Santos (2015) obtém-se:

$$a(N) = a_0(N_0) + \frac{da}{dN}(N_0)(N - N_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2a}{dN^2}(\eta) \right) (N - N_0)^2, \text{ com } \eta \in [N_0, N]. \quad (3.4)$$

Por intermédio das hipóteses (H_2) , (H_3) e (H_4) , as seguintes desigualdades podem ser escritas:

$$a(s) \leq a(t), s \leq t \text{ com } s, t \in [N_0, N] \rightarrow (a(s))^m \leq (a(t))^m. \quad (3.5)$$

Das hipóteses (H_2) , (H_3) e (H_4) , obtém-se:

$$(f(s))^m \leq (f(t))^m \rightarrow \left(a^{\frac{1}{2}} \cdot f \right)^m(s) \leq \left(a^{\frac{1}{2}} \cdot f \right)^m(t), s \leq t \text{ com } s, t \in [N_0, N]. \quad (3.6)$$

Portanto, conclui-se:

$$(\Delta K)^m(a(s)) \leq (\Delta K)^m(a(t)), \quad (3.7)$$

Uma vez que $C > 0$, obtém-se:

$$\frac{da}{dN}(s) \leq \frac{da}{dN}(t), s \leq t \text{ com } s, t \in [N_0, N]. \quad (3.8)$$

A segunda derivada da função tamanho de trinca é:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 a}{dN^2}(a(N)) &= \frac{d}{dN} \left(\frac{da}{dN}(a(N)) \right) = \frac{d}{da} \left(\frac{da}{dN}(a) \right) \frac{da}{dN}(a(N)) \\ &= \left[\frac{C \Delta K^m}{(1-R)K_{Ic} - \Delta K} \right]^2 \left[m + \frac{1}{\frac{(1-R)K_{Ic}}{\Delta K} - 1} \right] \left[\frac{1}{2a} + \frac{f'(a)}{f(a)} \right] \end{aligned} \quad (3.9)$$

Substituindo a equação (3.8) na equação (3.7), a função de tamanho de trinca torna-se:

$$\begin{aligned} a(N) - a_0 &= \left[\frac{C \Delta K(a_0)^m}{(1-R)K_{Ic} - \Delta K(a_0)} \right] (N - N_0) \\ &+ \frac{1}{2} \left[\frac{C \Delta K(a(\eta))^m}{(1-R)K_{Ic} - \Delta K(a(\eta))} \right]^2 \left[m + \frac{1}{\frac{(1-R)K_{Ic}}{\Delta K(a(\eta))} - 1} \right] \left[\frac{1}{2(a(\eta))} \right. \\ &\left. + \left(\frac{f'}{f} \right)(a(\eta)) \right] (N - N_0)^2, \text{ com } \eta \in [N_0, N]. \end{aligned} \quad (3.10)$$

A partir do comportamento da função de correção geométrica das hipóteses (H_2) , (H_3) e (H_4) , a seguinte desigualdade é proposta:

$$\left[f'(a)\sqrt{\pi a} + \frac{f(a)\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} \right] \leq [\sqrt{\pi a^*} f(a^*)] \left[\frac{1}{2a^*} + \left(\frac{f'}{f} \right)(a^*) \right], \forall a \in [a_0, a_1]. \quad (3.11)$$

Igualmente,

$$\left[f'(a)\sqrt{\pi a} + \frac{f(a)\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} \right] \geq [\sqrt{\pi a_0} f(a_0)] \left[\frac{1}{2a_0} + \left(\frac{f'}{f} \right) (a_0) \right], \forall a \in [a_0, a_1]. \quad (3.12)$$

Substituindo a Eq. (3.11) na Eq. (3.9), infere-se a seguinte estimativa,

$$\frac{d^2 a}{dN^2}(\eta) \geq \left[\frac{C \Delta K(a_0)^m}{(1-R)K_{Ic} - \Delta K(a_0)} \right] \left[m + \frac{1}{\frac{(1-R)K_{Ic}}{\Delta K(a_0)} - 1} \right] \left[\frac{1}{2a_0} + \frac{f'(a_0)}{f(a_0)} \right], \forall \eta \in [a_0, a_1]. \quad (3.13)$$

Inserindo a Eq. (3.12) na Eq. (3.9), obtém-se a função para a cota inferior.

$$\frac{d^2 a}{dN^2}(\eta) \leq \left[\frac{C \Delta K(a^*)^m}{(1-R)K_{Ic} - \Delta K(a^*)} \right] \left[m + \frac{1}{\frac{(1-R)K_{Ic}}{\Delta K(a^*)} - 1} \right] \left[\frac{1}{2a^*} + \frac{f'(a^*)}{f(a^*)} \right], \forall \eta \in [a_0, a_1]. \quad (3.14)$$

Representa-se mais satisfatoriamente o fenômeno de propagação de trincas quando se considera os efeitos probabilísticos. Justificando-se esta abordagem estatística em função da dispersão dos valores mensurados dos parâmetros que envolvem os modelos de propagação de trinca (GHONEM e DORE, 1987; VIRKLER, HILLBERRY e GOEL, 1987).

3.2 QUANTIFICAÇÃO DA INCERTEZA

A quantificação de incertezas envolve a caracterização, estimação, propagação e análise de qualquer tipo de incerteza em um problema de decisão complexa (KIUREGHIAN e DITLEVSEN, 2009). A quantificação de incertezas em problemas de simulação numérica volta-se para a definição de uma distribuição de probabilidade que represente corretamente a aleatoriedade dos sistemas físicos modelados (SAMPAIO e CATALDO, 2010) e para os métodos de solução desses problemas (DINIZ et al., 2011).

Buscando-se alcançar a estimativa do primeiro e segundo momentos estatísticos do processo estocástico tamanho de trinca. Reescreve-se as cotas superiores e inferiores do modelo de Forman.

Cota superior

$$\left. a(N, \omega_i) - a_0(\omega_i) \leq \left\{ \begin{array}{l} \frac{C_f(\omega_i) \left(\Delta\sigma\sqrt{\pi a_0(\omega_i)} f(a_0(\omega_i)) \right)^{m_f(\omega_i)}}{(1-R)K_{Ic}(\omega_i) - \Delta\sigma\sqrt{\pi a_0(\omega_i)} f(a_0(\omega_i))} + \\ \frac{1}{2} \left[\frac{C_f(\omega_i) \left(\Delta\sigma\sqrt{\pi a^*(\omega_i)} f(a^*(\omega_i)) \right)^{m_f(\omega_i)}}{(1-R)K_{Ic}(\omega_i) - \Delta\sigma\sqrt{\pi a^*(\omega_i)} f(a^*(\omega_i))} \right]^2 \\ \left[m_f(\omega_i) + \frac{1}{\frac{(1-R)K_{Ic}(\omega_i)}{\Delta\sigma\sqrt{\pi a^*(\omega_i)} f(a^*(\omega_i))}} - 1 \right] \\ \left[\frac{1}{2(a^*)} + \left(\frac{f'}{f} \right) (a^*) \right] (N - N_0) \end{array} \right\} \right. \quad (3.15)$$

$\forall N \in [N_0, N_1] \text{ e } \forall \{\omega_i, \omega'_i, \omega''_i, \omega'''_i\} \in (\Omega, F, P)$

Cota inferior

$$\left. a(N, \omega_i) - a_0(\omega_i) \geq \left\{ \begin{array}{l} \frac{C_f(\omega_i) \left(\Delta\sigma\sqrt{\pi a_0(\omega_i)} f(a_0(\omega_i)) \right)^{m_f(\omega_i)}}{(1-R)K_{Ic}(\omega_i) - \Delta\sigma\sqrt{\pi a_0(\omega_i)} f(a_0(\omega_i))} + \\ \frac{1}{2} \left[\frac{C_f(\omega_i) \left(\Delta\sigma\sqrt{\pi a_0(\omega_i)} f(a_0(\omega_i)) \right)^{m_f(\omega_i)}}{(1-R)K_{Ic}(\omega_i) - \Delta\sigma\sqrt{\pi a_0(\omega_i)} f(a_0(\omega_i))} \right]^2 \\ \left[m_f(\omega_i) + \frac{1}{\frac{(1-R)K_{Ic}(\omega_i)}{\Delta\sigma\sqrt{\pi a_0(\omega_i)} f(a_0(\omega_i))}} - 1 \right] \\ \left[\frac{1}{2(a_0(\omega_i))} + \left(\frac{f'(a_0(\omega_i))}{f(a_0(\omega_i))} \right) (a_0(\omega_i)) \right] (N - N_0) \end{array} \right\} \right. \quad (3.16)$$

$\forall N \in [N_0, N_1] \text{ e } \forall \{\omega_i, \omega'_i, \omega''_i, \omega'''_i\} \in (\Omega, F, P)$

A modelagem da incerteza nos parâmetros do modelo de Forman é feita por variáveis aleatórias com distribuição uniforme. A distribuição uniforme é utilizada como hipótese simplificadora. Os parâmetros com incerteza são apresentados na equação (3.17).

$$\begin{cases} C_f(\omega_i) = \mu_{C_f} + \sqrt{3}\delta_{C_f}\xi(\omega_i), & \forall \omega \in \Omega; \\ m_f(\omega_i') = \mu_{m_f} + \sqrt{3}\delta_{m_f}\xi(\omega_i'), & \forall \omega' \in \Omega; \\ K_{Ic}(\omega_i'') = \mu_{K_c} + \sqrt{3}\delta_{K_c}\xi(\omega_i''), & \forall \omega'' \in \Omega \\ a_0(\omega_i''') = \mu_{a_0} + \sqrt{3}\delta_{a_0}\xi(\omega_i'''), & \forall \omega''' \in \Omega \end{cases} \quad (3.17)$$

No qual $\{\mu_{C_f}, \mu_{m_f}, \mu_{K_{Ic}}, \mu_{a_0}\}$ representa as médias e $\{\delta_{C_f}, \delta_{m_f}, \delta_{K_{Ic}}, \delta_{a_0}\}$ os coeficientes de dispersão das variáveis aleatórias. Ainda as variáveis aleatórias $\xi(\cdot)$ são uniformes $U[-1,1]$ e estatisticamente independentes.

Buscando identificar a interferência dos coeficientes de dispersão no processo estocástico para determinação dos momentos estatísticos. Assume-se dois conjuntos de valores. A primeira possibilidade estima uma dispersão de 1/10 do valor esperado para a variável com incerteza considerada, equação (3.18). Já no segundo evento, o valor utilizado para os coeficientes de dispersão será de 3/10 do valor esperado para o parâmetro com incerteza, equação (3.19).

$$\begin{cases} \delta_{C_f} = (1/10)\mu_{C_f}; \\ \delta_{m_f} = (1/10)\mu_{m_f}; \\ \delta_{K_{Ic}} = (1/10)\mu_{K_{Ic}}; \\ \delta_{a_0} = (1/10)\mu_{a_0}. \end{cases} \quad (3.18)$$

e

$$\begin{cases} \delta_{C_f} = (3/10)\mu_{C_f}; \\ \delta_{m_f} = (3/10)\mu_{m_f}; \\ \delta_{K_{Ic}} = (3/10)\mu_{K_{Ic}}; \\ \delta_{a_0} = (3/10)\mu_{a_0}. \end{cases} \quad (3.19)$$

Buscando a simplificação da apresentação dos casos de dispersão citados anteriormente. Utiliza-se a classificação apresentada na tabela 3.1.

Tabela 3.1 Classificação dos parâmetros.

| Casos de dispersão | Parâmetros | | | |
|--------------------|------------|-------|----------|-------|
| | C_f | m_f | K_{Ic} | a_0 |
| Caso I (1/10) | C1.10 | m1.10 | K1.10 | a1.10 |
| Caso II (3/10) | C3.10 | m3.10 | K3.10 | a3.10 |

Fonte: Elaborado pelo autor.

3.3 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

Utilizando-se do software MatLab desenvolve-se o ambiente computacional, através de algoritmos e códigos matemáticos. Busca-se implementar os métodos da simulação de Monte Carlo (SMC), Runge-Kutta de quarta ordem (RK4) e “*Fast Crack Bounds*” (FCB) do modelo de propagação de trincas de Forman. Em conformidade com exemplos clássicos da literatura técnica, tais como: problema de placa com largura finita e trinca na aresta, problema de placa com largura infinita e trinca central e problema de placa com largura finita e trinca central.

O resultado dessa iteração dentro do ambiente do software MatLab resultará na implementação computacional. Resultando em um algoritmo que desempenhará uma confrontação entre as soluções numéricas adquiridas através do método de Runge-Kutta de quarta ordem (RK4) e os estimadores das cotas superiores e inferiores. o algoritmo para quantificar a incerteza do parâmetro C_f encontram-se descrito no apêndice deste projeto de dissertação.

4 RESULTADOS NÚMERICOS

Os resultados alcançados foram gerados por código matemáticos desenvolvidos no ambiente do software MATLAB (versão R2015a), e executados em um computador com processador Intel Celeron B830 (1,80 GHz) e memória RAM de 4,00 GB. Para avaliar o desempenho das cotas aplicado ao modelo de propagação de trincas de Forman, utilizou-se os dados apresentados nos trabalhos de Castro e Meggiolaro (2009), para um material de aço ferrítico. Os dados empregados nas simulações estão apresentados na tabela 1. Para cada parâmetro com incerteza, foram geradas 10.000 amostras randômicas, para a estimativa dos momentos estatísticos do processo estocástico tamanho de trinca.

Tabela 4.1 Dados empregados nas simulações numéricas

| Parâmetro (Representação) | Valor numérico | Unidade |
|--|----------------------|----------------|
| Valor esperado da variável randômica C_f (μ_{C_f}) | $2,00 \cdot 10^{-9}$ | m/ciclo |
| Valor esperado da variável randômica m_f (μ_{m_f}) | 2,9 | Adimensional |
| Valor esperado da variável randômica K_{Ic} ($\mu_{K_{Ic}}$) | 250 | MPa \sqrt{m} |
| Valor esperado da variável randômica a_0 (μ_{a_0}) | 0,015 | M |
| Amplitude de tensão nominal ($\Delta\sigma$) | 70 | MPa |
| Razão entre tensões mínima e máxima (R) | 0 | Adimensional |
| Largura da placa (b) | 0,1 | m |
| Número de ciclos (N) | 900.000 | Ciclos |

Fonte: Castro e Meggiolaro (2009).

Complementa-se aos dados expostos na tabela 4.1, com o valor de tamanho de trinca estrela para a cota superior (a^*). Segundo Santos (2015), determina-se o valor de a^* por inspeção, e este é responsável por assegurar que a cota superior não seja violada pela solução numérica. Neste estudo aplica-se a metodologia a três exemplos clássico da literatura utilizando-se de um $a^* = 1,40a_0$. Para cada caso, onde é necessário um a^* diferente, este será tratado individualmente.

A fim de avaliar o desempenho da proposta apresentada neste trabalho, utilizou-se de um passo igual a 500 para os métodos RK4 e FCB, gerando 10.000 pontos. Para a análise quantitativa da metodologia FCB aplicada ao modelo de Forman, se faz necessário definir as seguintes funções indicadoras de desempenho.

$$\rho = \left(\frac{RK4 - FCB}{FCB} \right) * 100 \quad [\%] \quad (4.1)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{\hat{\mu}\bar{a}}(N) = 100 * \left(\frac{\hat{\mu}\bar{a} - \hat{\mu}a}{\hat{\mu}a} \right) (N) & [\%], \forall N \in [N_0, N] \\ \varepsilon_{\hat{\mu}\underline{a}}(N) = 100 * \left(\frac{\hat{\mu}\underline{a} - \hat{\mu}a}{\hat{\mu}a} \right) (N) & [\%], \forall N \in [N_0, N] \end{cases} \quad (4.2)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{\hat{\mu}\bar{a}^{(2)}}(N) = 100 * \left(\frac{\hat{\mu}\bar{a}^{(2)} - \hat{\mu}a^2}{\hat{\mu}a^2} \right) (N) & [\%], \forall N \in [N_0, N] \\ \varepsilon_{\hat{\mu}\underline{a}^{(2)}}(N) = 100 * \left(\frac{\hat{\mu}\underline{a}^{(2)} - \hat{\mu}a^2}{\hat{\mu}a^2} \right) (N) & [\%], \forall N \in [N_0, N] \end{cases} \quad (4.3)$$

A equação (4.1) apresenta a razão percentual entre os tempos computacionais da solução numérica e da metodologia FCB. A equação (4.2) descreve os desvios de primeiro momento e a equação (4.3) caracteriza os desvios de segundo momento estatístico.

A seguir apresenta-se os três exemplos clássicos da literatura da MFLE, a saber: Placa de largura infinita com trinca central, Placa de largura finita com trinca central e Placa com largura finita e trinca na aresta, onde as funções de correção do FIT são conhecidas e descritas por Bannantine (1989).

4.1 PLACA COM LARGURA INFINITA E TRINCA CENTRAL

A função de correção do fator de intensidade de tensão para o caso de “Placa com largura infinita e trinca central”, representada pela figura 4.1. É dada por Bannantine et al. (1989), equação 4.4.

$$f(a) = 1, \quad em (N_0, N_1) \times (\Omega, F, P). \quad (4.4)$$

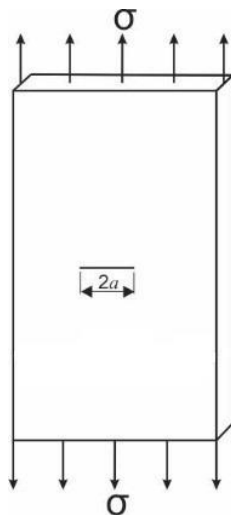


Figura 4.1 - Placa com largura infinita e trinca central

Fonte: Elaborada pelo autor.

Inicia-se o processo com a randomização do parâmetro “tamanho de trinca” (a1.10). Em seguida apresenta-se os gráficos dos estimadores do primeiro e segundo momento estatístico e os desvios relativos dos momentos estatísticos.

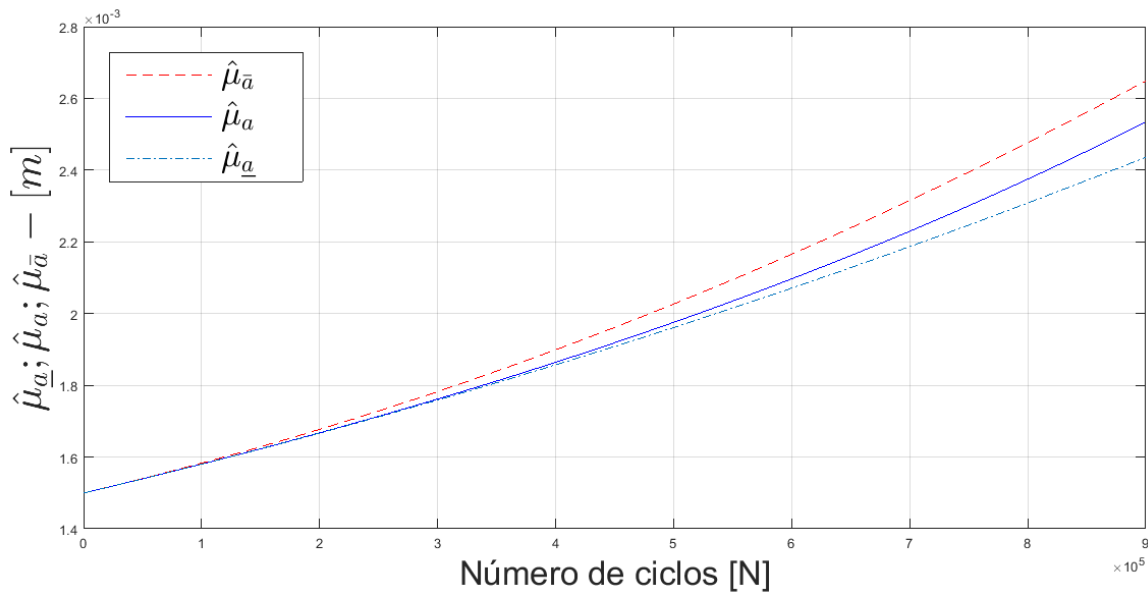


Figura 4.2 - Primeiro momento estatístico para o parâmetro a1.10. Com valor de

$$a^* = 1,40a_0$$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Observando a figura 4.2, comprova-se que o primeiro momento estatístico satisfaz a desigualdade da equação (2.18). Atendendo devidamente os critérios da

metodologia FCB. Na figura 4.3 apresenta-se o gráfico do desvio relativo para o primeiro momento estatístico para o parâmetro $a_{1.10}$. Com o valor de $a^* = 1,40a_0$.

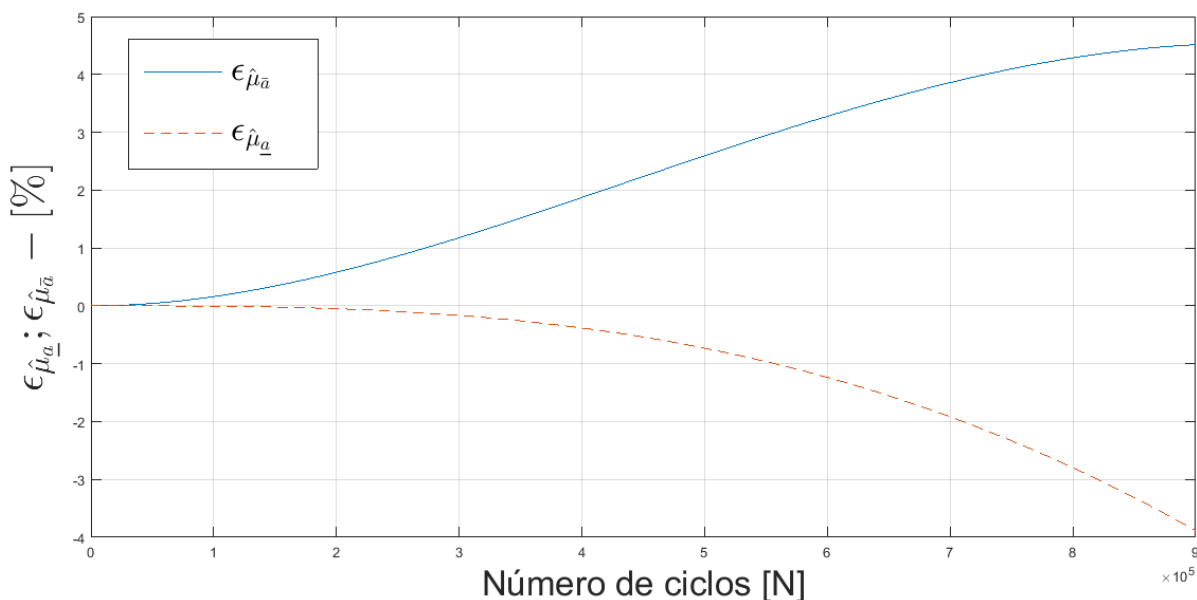


Figura 4.3 - Desvio relativo do primeiro momento estatístico para o parâmetro $a_{1.10}$.

Com valor de $a^* = 1,40a_0$.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Para a análise do desvio relativo do primeiro momento estatístico, utiliza-se da equação descrita em (4.2). Observa-se na figura 4.3, que o desvio máximo para a cota superior é igual a 4,51 e para a cota inferior é igual a -3,88. Em sequência demonstrase os gráficos para o segundo momento estatístico e os seus respectivos desvios relativos para o parâmetro $a_{1.10}$.

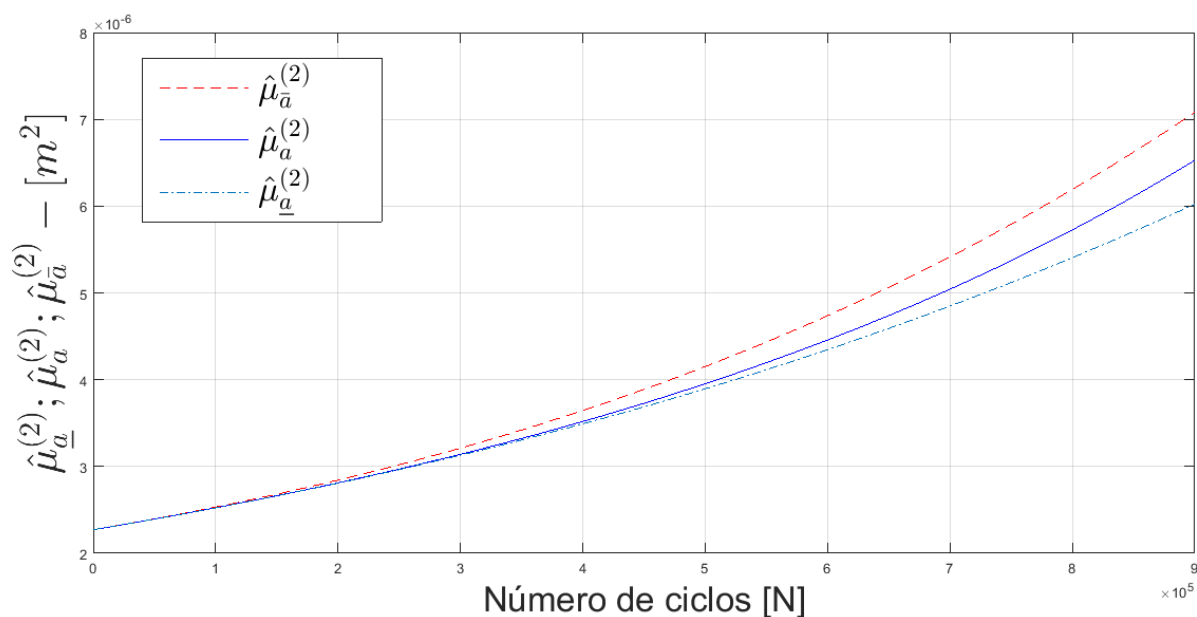


Figura 4.4 - Segundo momento estatístico para o parâmetro a1.10. Com valor de $a^* = 1,40a_0$

Fonte: Elaborado pelo autor

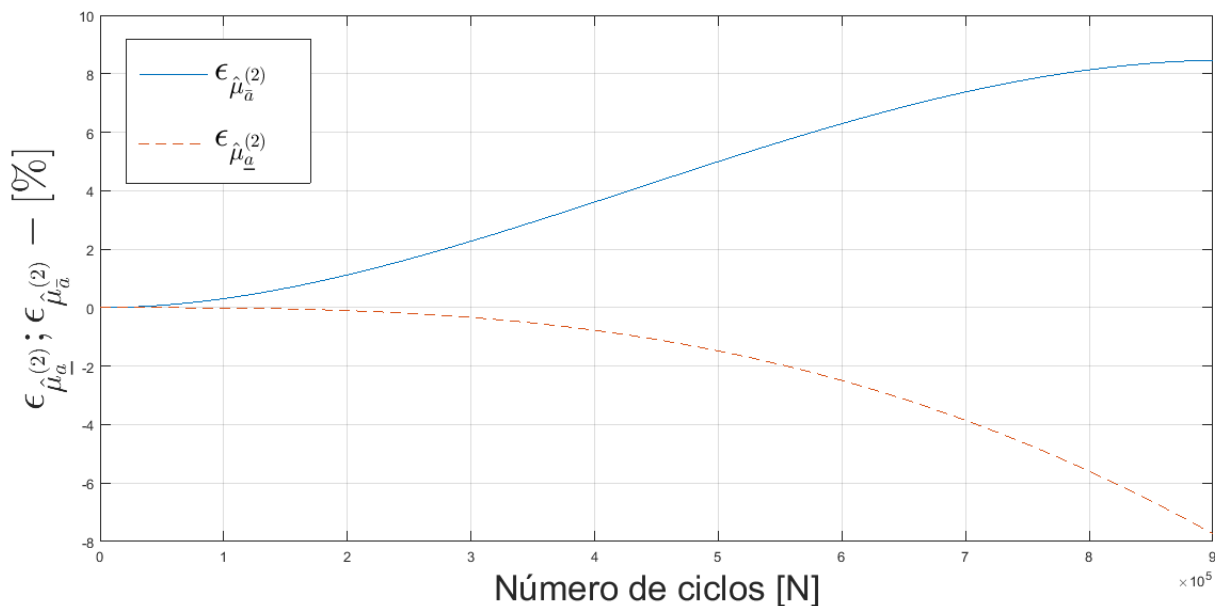


Figura 4.5 - Desvio relativo do segundo momento estatístico para o parâmetro a1.10.

Com valor de $a^* = 1,4a_0$.

Fonte: Elaborado pelo autor

Através da figura 4.4, comprova-se que o segundo momento estatístico também satisfaz a desigualdade da equação (2.17). Para a análise do desvio relativo para o segundo momento estatístico, utiliza-se da equação descrita em (4.3).

Observa-se na figura 4.3, que o desvio máximo para a cota superior é igual a 4,46 e para a cota inferior é igual a -7,72.

O processo de randomização prossegue para o parâmetro m1.10. Onde ocorreu uma violação da cota superior pela solução numérica, fato este, apresentado nas figuras 4.6 e 4.7.

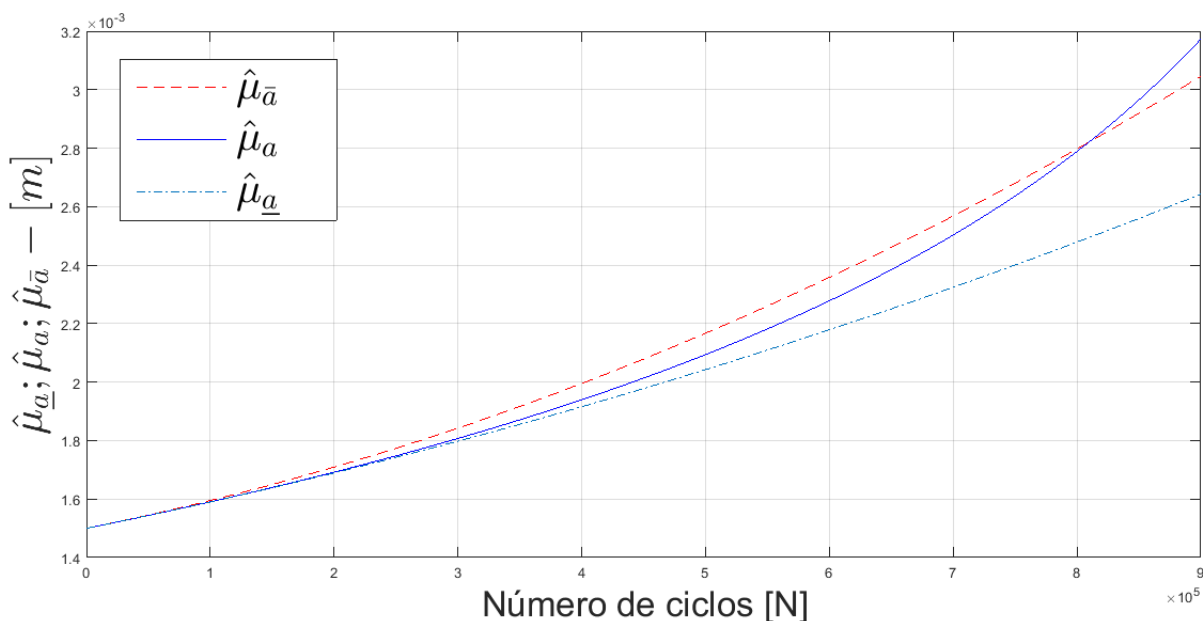


Figura 4.6 - Primeiro momento estatístico para o parâmetro m1.10. Com valor de $a^* = 1,40a_0$.

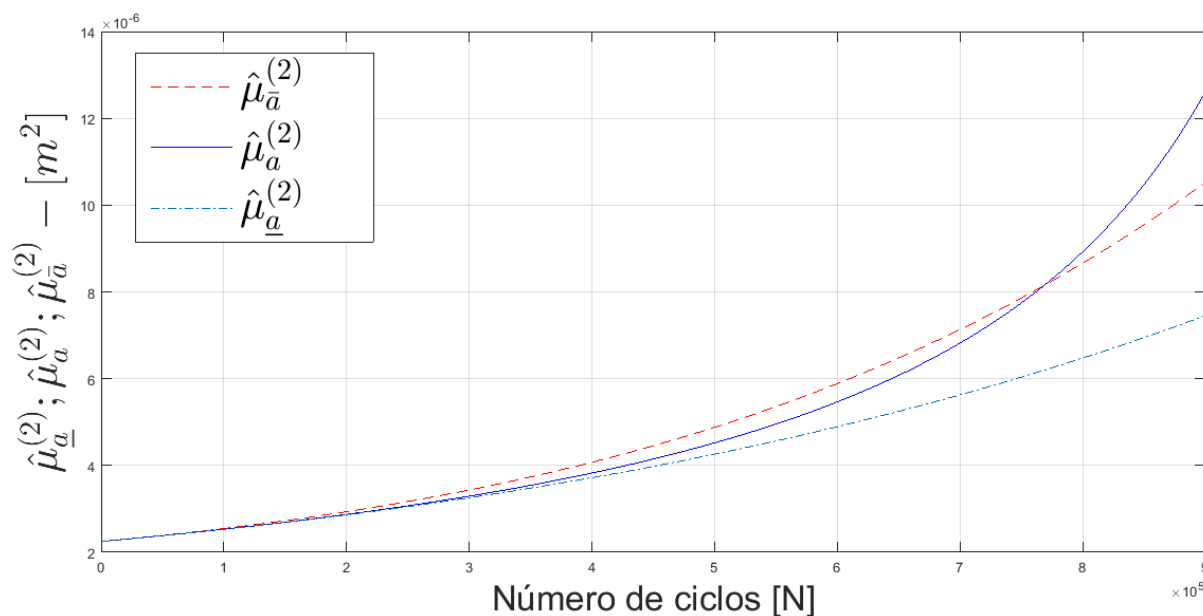


Figura 4.7 - Segundo momento estatístico para o parâmetro m1.10. Com valor de $a^* = 1,40a_0$.

Fonte: Elaborado pelo autor

Desta forma o valor empírico a^* foi ajustado para $a^* = 1,60a_0$. Observa-se nas figuras 4.8 e 4.9, que tanto o primeiro momento, quanto o segundo momento estatístico satisfazem a desigualdade da equação (2.17). Demonstrando a eficiência da metodologia FCB.

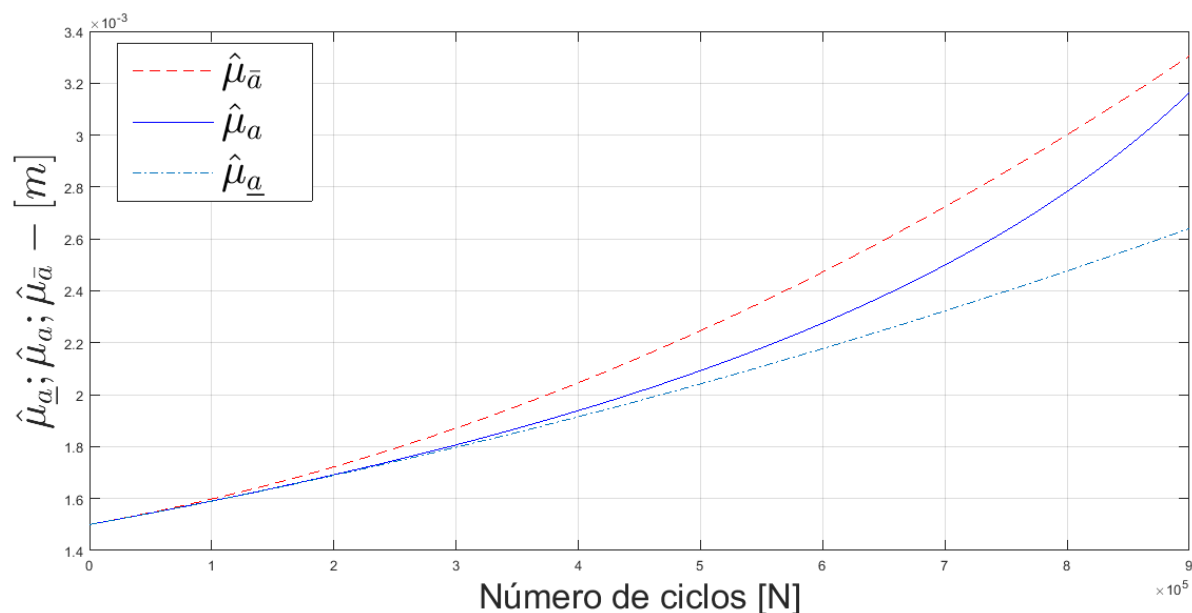


Figura 4.8 - Primeiro momento estatístico para o parâmetro m1.10 Com valor de $a^* = 1,60a_0$.

Fonte: Elaborado pelo autor.

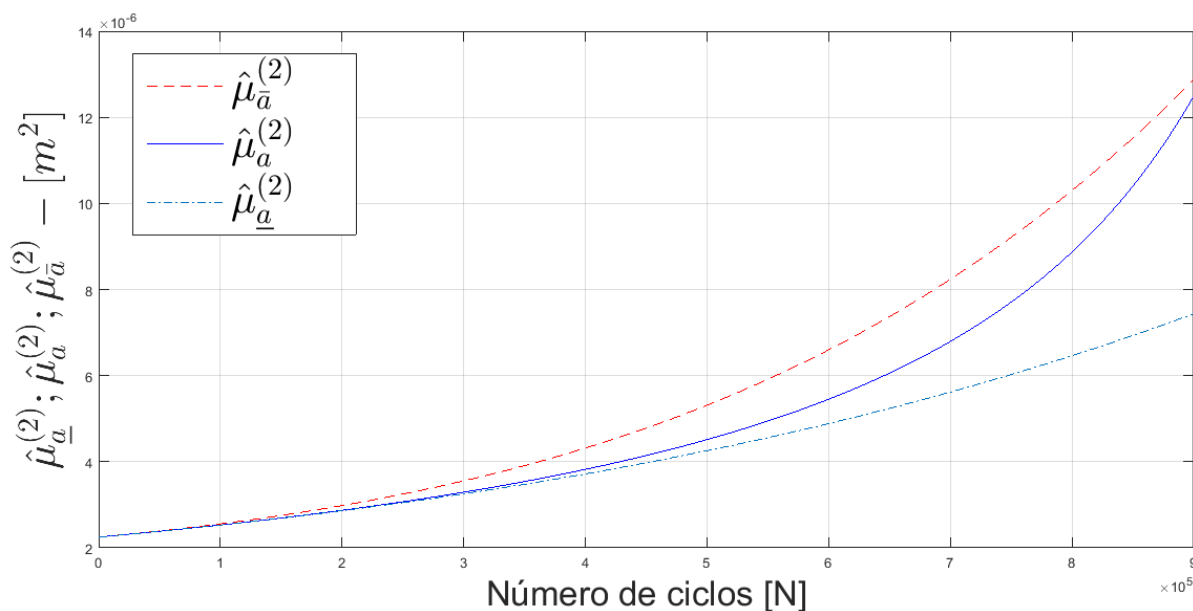


Figura 4.9 - Segundo momento estatístico para o parâmetro m1.10. Com valor de $a^* = 1,60a_0$.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Analisando a figura 4.10, observa-se que o máximo desvio relativo para a cota superior é igual a 8,99 e para a cota inferior é de -16,49.

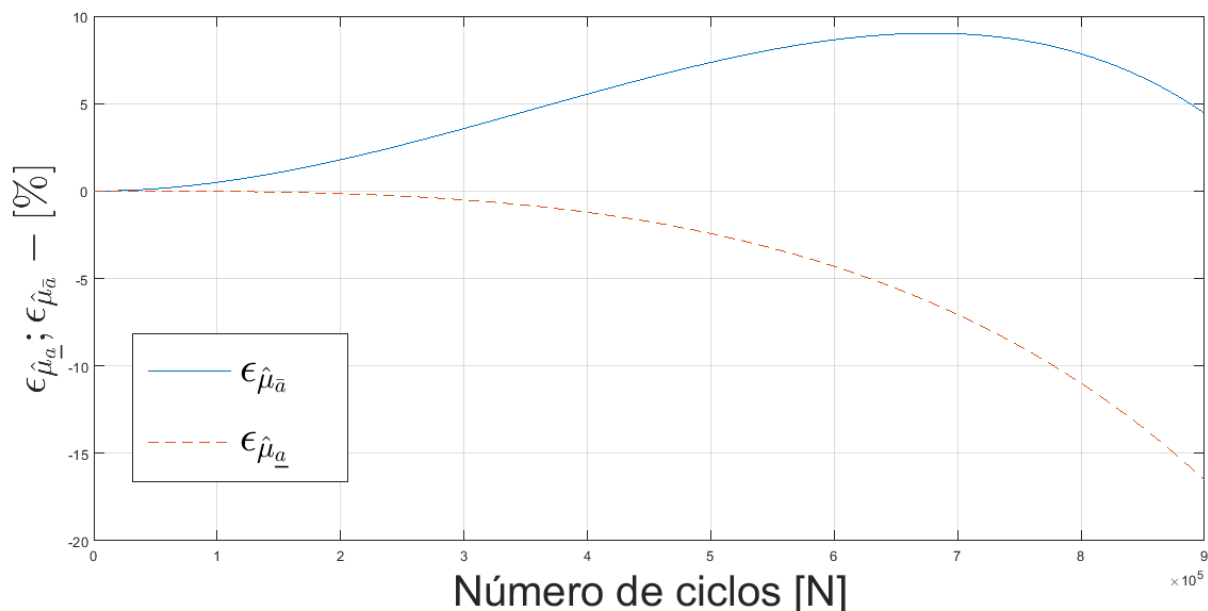


Figura 4.10 - Desvio relativo para o primeiro momento estatístico para o parâmetro m1.10. Com valor de $a^* = 1,60a_0$.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Para o desvio do segundo momento estatístico, representado na figura 4.11, identifica-se que o máximo desvio relativo para a cota superior é igual a 21,27 e para a cota inferior é de -40,40.

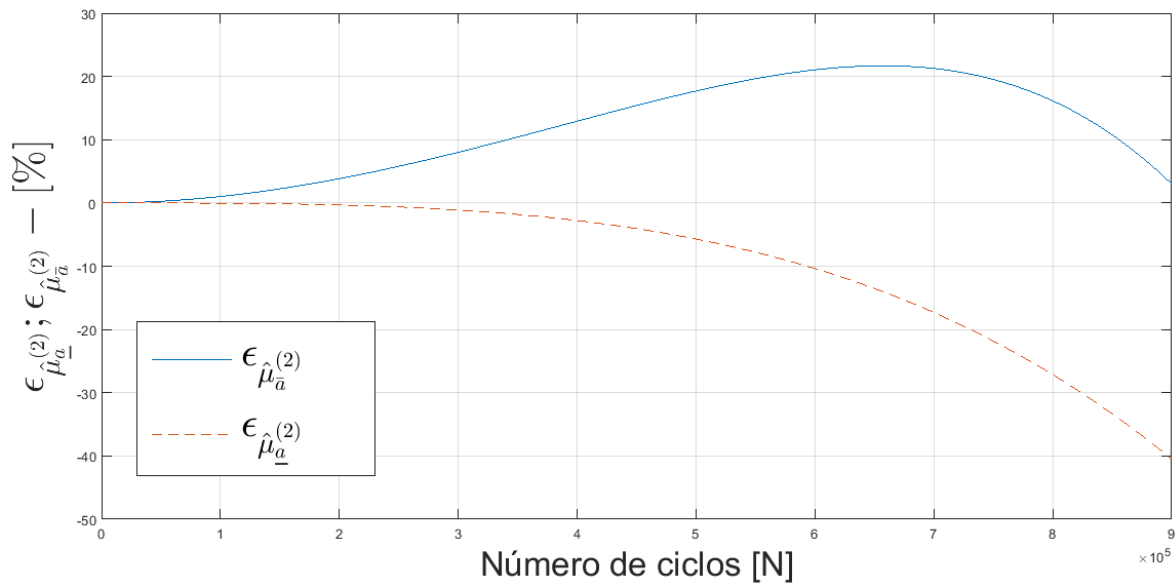


Figura 4.11 - Desvio relativo para o segundo momento estatístico para o parâmetro m1.10. Com valor de $a^* = 1,60a_0$.

Fonte: Elaborado pelo autor

Os dados obtidos pelo processo de randomização para os parâmetros a_0 , K_{Ic} , m_f e C_f estão resumidos nas tabelas posteriores. As tabelas 4.2 e 4.3 apresentam as estimativas do primeiro e segundo momentos estatísticos para o exemplo de placa infinita com trinca central (coeficiente de dispersão igual a 1/10).

Tabela 4.2 - Estimativa do primeiro momento estatístico para o exemplo de placa infinita com trinca central – Caso de dispersão 1/10.

| Parâmetro | | Primeiro momento estatístico - Caso de dispersão 1/10 (10^{-3} m) | | | | | | | | |
|------------|---------------------|--|------------------------------|------------------------------|-----------------------------|-----------------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|
| | | 1.10 ⁵ Ciclos | 2. 10 ⁵ Ciclos | 3. 10 ⁵ Ciclos | 4.10 ⁵ Ciclos | 5.10 ⁵ Ciclos | 6. 10 ⁵ Ciclos | 7. 10 ⁵ Ciclos | 8. 10 ⁵ Ciclos | 9. 10 ⁵ Ciclos |
| C_f | \bar{a} (N) | 1,58 | 1,67 | 1,78 | 1,89 | 2,02 | 2,16 | 2,31 | 2,47 | 2,65 |
| | a (N) | 1,57 | 1,66 | 1,76 | 1,86 | 1,97 | 2,09 | 2,22 | 2,37 | 2,53 |
| | \underline{a} (N) | 1,57 | 1,66 | 1,75 | 1,85 | 1,95 | 2,06 | 2,18 | 2,30 | 2,43 |
| m_f^{**} | \bar{a} (N) | 1,59 | 1,72 | 1,87 | 2,04 | 2,24 | 2,47 | 2,72 | 2,99 | 3,30 |
| | a (N) | 1,58 | 1,69 | 1,80 | 1,93 | 2,09 | 2,27 | 2,49 | 2,78 | 3,16 |
| | \underline{a} (N) | 1,58 | 1,68 | 1,79 | 1,91 | 2,04 | 2,17 | 2,32 | 2,47 | 2,63 |
| K_{Ic} | \bar{a} (N) | 1,58 | 1,67 | 1,78 | 1,90 | 2,03 | 2,17 | 2,32 | 2,48 | 2,66 |
| | a (N) | 1,58 | 1,66 | 1,76 | 1,86 | 1,97 | 2,10 | 2,23 | 2,38 | 2,54 |
| | \underline{a} (N) | 1,58 | 1,66 | 1,76 | 1,85 | 1,96 | 2,07 | 2,19 | 2,31 | 2,44 |

| | | | | | | | | | | |
|-------|---------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| a_0 | \bar{a} (N) | 1,58 | 1,67 | 1,78 | 1,89 | 2,02 | 2,16 | 2,31 | 2,47 | 2,64 |
| | a (N) | 1,57 | 1,66 | 1,76 | 1,86 | 1,97 | 2,09 | 2,28 | 2,37 | 2,53 |
| | \underline{a} (N) | 1,57 | 1,66 | 1,75 | 1,85 | 1,96 | 2,07 | 2,18 | 2,30 | 2,43 |

** Valores alcançados com a^* estrela ajustado para $a^* = 1,60a_0$.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 4.3 - Estimativa do segundo momento estatístico para o exemplo de placa infinita com trinca central – Caso de dispersão 1/10.

| Parâmetro | | Segundo momento estatístico - Caso de dispersão 1/10 (10^{-6} m) | | | | | | | | |
|------------|---------------------|---|------------------------------|------------------------------|-----------------------------|-----------------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|
| | | 1.10 ⁵ Ciclos | 2. 10 ⁵ Ciclos | 3. 10 ⁵ Ciclos | 4.10 ⁵ Ciclos | 5.10 ⁵ Ciclos | 6. 10 ⁵ Ciclos | 7. 10 ⁵ Ciclos | 8. 10 ⁵ Ciclos | 9. 10 ⁵ Ciclos |
| C_f | \bar{a} (N) | 2,50 | 2,81 | 3,17 | 3,60 | 4,11 | 4,69 | 5,37 | 6,15 | 7,04 |
| | a (N) | 2,49 | 2,77 | 3,10 | 3,47 | 3,90 | 4,39 | 4,97 | 5,64 | 6,44 |
| | \underline{a} (N) | 2,49 | 2,77 | 3,09 | 3,44 | 3,84 | 4,28 | 4,78 | 5,32 | 5,93 |
| m_f^{**} | \bar{a} (N) | 2,55 | 2,97 | 3,55 | 4,31 | 5,30 | 6,59 | 8,22 | 10,29 | 12,85 |
| | a (N) | 2,52 | 2,86 | 3,28 | 3,81 | 4,51 | 5,44 | 6,78 | 8,85 | 12,40 |
| | \underline{a} (N) | 2,52 | 2,86 | 3,25 | 3,71 | 4,25 | 4,88 | 5,61 | 6,45 | 7,43 |
| K_{Ic} | \bar{a} (N) | 2,50 | 2,81 | 3,18 | 3,62 | 4,13 | 4,73 | 5,42 | 6,21 | 7,12 |
| | a (N) | 2,49 | 2,78 | 3,11 | 3,48 | 3,92 | 4,42 | 5,01 | 5,70 | 6,51 |
| | \underline{a} (N) | 2,49 | 2,78 | 3,10 | 3,45 | 3,86 | 4,31 | 4,81 | 5,36 | 5,98 |
| a_0 | \bar{a} (N) | 2,53 | 2,84 | 3,20 | 3,64 | 4,14 | 4,73 | 5,41 | 6,18 | 7,07 |
| | a (N) | 2,52 | 2,81 | 3,13 | 3,51 | 3,95 | 4,54 | 5,04 | 5,72 | 6,25 |
| | \underline{a} (N) | 2,52 | 2,80 | 3,12 | 3,48 | 3,89 | 4,34 | 4,84 | 5,40 | 6,01 |

** Valores alcançados com a^* estrela ajustado para $a^* = 1,60a_0$

Fonte: Elaborado pelo autor.

A tabela 4.4 apresenta os tempos computacionais aproximados para a solução do método RK4 e FCB. Para o exemplo de placa infinita com trinca central, o tempo computacional obtido pela metodologia FCB foi no mínimo 525,146% (parâmetro a_0) mais eficiente quando comparado a solução de RK4.

Tabela 4.4 - Tempo de execução (em segundos) para 900000 ciclos para o exemplo Placa infinita com trinca central, com coeficiente de dispersão igual à 1/10.

| Parâmetro | | Tempo [s] | ρ [%] |
|-----------|-----|-----------|------------|
| C_f | RK4 | 345,584 | 5205,25 |
| | FCB | 6,514 | |

| | | | |
|---|-----|---------|---------|
| m_f^{**} | RK4 | 344,786 | 2273,90 |
| | FCB | 14,524 | |
| K_{Ic} | RK4 | 321,281 | 3924,56 |
| | FCB | 7,983 | |
| a_0 | RK4 | 302,852 | 525,146 |
| | FCB | 48,445 | |
| ** Valores alcançados com a^* estrela ajustado para $a^* = 1,60a_0$ | | | |

Fonte: Elaborado pelo autor.

Nas tabelas 4.5 e 4.6 são apresentados os desvios relativos para os estimadores dos momentos estatísticos de primeira e segunda ordem.

Tabela 4.5 - Desvio relativo do primeiro momento estatístico para o exemplo de placa infinita com trinca central [%].

| Parâmetro | | Desvio Relativo para o Primeiro momento estatístico - Caso de dispersão 1/10 [%] | | | | | | | | |
|---|---------------------|--|------------------------------|------------------------------|-----------------------------|-----------------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|
| | | 1.10 ⁵ Ciclos | 2. 10 ⁵ Ciclos | 3. 10 ⁵ Ciclos | 4.10 ⁵ Ciclos | 5.10 ⁵ Ciclos | 6. 10 ⁵ Ciclos | 7. 10 ⁵ Ciclos | 8. 10 ⁵ Ciclos | 9. 10 ⁵ Ciclos |
| C_f | \bar{a} (N) | 0,16 | 0,58 | 1,19 | 1,90 | 2,64 | 3,33 | 3,93 | 4,36 | 4,59* |
| | \underline{a} (N) | -0,006 | -0,05 | -0,16 | -0,38 | -0,74 | -1,25 | -1,95 | -2,84 | -3,96* |
| m_f^{**} | \bar{a} (N) | 0,49 | 1,78 | 3,56 | 5,53 | 7,34 | 8,64 | 8,99* | 7,85 | 4,47 |
| | \underline{a} (N) | -0,01 | -0,14 | -0,50 | -1,21 | -2,42 | -4,30 | -7,05 | -10,97 | -16,4* |
| K_{Ic} | \bar{a} (N) | 0,16 | 0,59 | 1,21 | 1,93 | 2,67 | 3,37 | 3,96 | 4,38 | 4,59* |
| | \underline{a} (N) | -0,006 | -0,05 | -0,17 | -0,39 | -0,76 | -1,29 | -2,00 | -2,92 | -4,07* |
| a_0 | \bar{a} (N) | 0,15 | 0,57 | 1,17 | 1,86 | 2,59 | 3,27 | 3,85 | 4,28 | 4,51* |
| | \underline{a} (N) | -0,006 | -0,04 | -0,16 | -0,38 | -0,72 | -1,23 | -1,91 | -2,79 | -3,88* |
| * Maiores valores de desvios relativos para cada linha analisada. | | | | | | | | | | |
| ** Valores alcançados com a^* estrela ajustado para $a^* = 1,60a_0$. | | | | | | | | | | |

Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 4.6 - Desvio relativo do segundo momento estatístico para o exemplo de placa infinita com trinca central – [%].

| Parâmetro | | Desvio Relativo para o Segundo momento estatístico - Caso de dispersão 1/10 (%) | | | | | | | | |
|-----------|---------------------|---|------------------------------|------------------------------|-----------------------------|-----------------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|
| | | 1.10 ⁵ Ciclos | 2. 10 ⁵ Ciclos | 3. 10 ⁵ Ciclos | 4.10 ⁵ Ciclos | 5.10 ⁵ Ciclos | 6. 10 ⁵ Ciclos | 7. 10 ⁵ Ciclos | 8. 10 ⁵ Ciclos | 9. 10 ⁵ Ciclos |
| C_f | \bar{a} (N) | 0,32 | 1,18 | 2,41 | 3,86 | 5,37 | 6,81 | 8,05 | 8,95 | 9,40* |
| | \underline{a} (N) | -0,01 | -0,10 | -0,355 | -0,77 | -1,49 | -2,51 | -3,90 | -5,68 | -7,87* |
| | \bar{a} (N) | 1,01 | 3,82 | 7,99 | 12,90 | 17,67 | 21,03 | 21,27* | 16,18 | 3,10 |

| | | | | | | | | | | |
|------------|---------------------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|--------|--------|---------|
| m_f^{**} | \underline{a} (N) | -0,03 | -0,31 | -1,11 | -2,77 | -5,69 | -10,34 | -17,27 | -27,08 | -40,40* |
| K_{Ic} | \bar{a} (N) | 0,32 | 1,20 | 2,45 | 3,91 | 5,44 | 6,89 | 8,11 | 8,99 | 9,40* |
| | \underline{a} (N) | -0,01 | -0,10 | -0,34 | -0,80 | -1,53 | -2,59 | -4,01 | -5,84 | -8,10* |
| a_0 | \bar{a} (N) | 0,30 | 1,11 | 2,26 | 3,60 | 4,98 | 6,28 | 7,37 | 8,13 | 8,46* |
| | \underline{a} (N) | -0,12 | -0,10 | -0,33 | -0,77 | -1,47 | -2,48 | -3,84 | -5,58 | -7,72* |

* Maiores valores de desvios relativos para cada linha analisada.
** Valores alcançados com a^* estrela ajustado para $a^* = 1,60a_0$.

Fonte: Elaborado pelo autor.

O parâmetro (ρ), apresentado na equação (4.1), em companhia das funções de desvio relativo, demonstram que a metodologia proposta possui um desempenho satisfatório para o exemplo “Placa com largura infinita e trinca central” (com coeficiente de dispersão igual a 1/10).

As estimativas dos momentos estatísticos e os desvios relativos, avaliados anteriormente, são apresentados a seguir para o caso onde os coeficientes de dispersão valem 3/10 do valor esperado de seus respectivos parâmetros com incerteza.

Tabela 4.7 - Estimativa do primeiro momento estatístico para o exemplo de placa infinita com trinca central – Caso de dispersão 3/10.

| Parâmetro | | Primeiro momento estatístico - Caso de dispersão 3/10 (10^{-3} m) | | | | | | | | |
|------------|---------------------|--|------------------------------|------------------------------|-----------------------------|-----------------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|
| | | 1.10 ⁵ Ciclos | 2. 10 ⁵ Ciclos | 3. 10 ⁵ Ciclos | 4.10 ⁵ Ciclos | 5.10 ⁵ Ciclos | 6. 10 ⁵ Ciclos | 7. 10 ⁵ Ciclos | 8. 10 ⁵ Ciclos | 9. 10 ⁵ Ciclos |
| C_f | \bar{a} (N) | 1,58 | 1,67 | 1,78 | 1,90 | 2,03 | 2,18 | 2,33 | 2,50 | 2,68 |
| | a (N) | 1,58 | 1,66 | 1,76 | 1,86 | 1,98 | 2,11 | 2,25 | 2,41 | 2,58 |
| | \underline{a} (N) | 1,58 | 1,66 | 1,76 | 1,86 | 1,96 | 2,07 | 2,19 | 2,33 | 2,45 |
| m_f^{**} | \bar{a} (N) | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| | a (N) | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| | \underline{a} (N) | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| K_{Ic} | \bar{a} (N) | 1,59 | 1,70 | 1,82 | 1,96 | 2,12 | 2,29 | 2,47 | 2,68 | 2,89 |
| | a (N) | 1,58 | 1,68 | 1,79 | 1,92 | 2,06 | 2,21 | 2,39 | 2,59 | 2,83 |
| | \underline{a} (N) | 1,58 | 1,68 | 1,79 | 1,90 | 2,02 | 2,16 | 2,29 | 2,44 | 2,59 |
| a_0 | \bar{a} (N) | 1,59 | 1,68 | 1,79 | 1,91 | 2,04 | 2,18 | 2,33 | 2,50 | 2,67 |
| | a (N) | 1,58 | 1,67 | 1,77 | 1,88 | 2,00 | 2,13 | 2,27 | 2,42 | 2,59 |

| | | | | | | | | | | |
|--|---------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| | \underline{a} (N) | 1,58 | 1,67 | 1,77 | 1,87 | 1,98 | 2,10 | 2,22 | 2,35 | 2,48 |
| ** Modelo instável para a variável m_f com coeficiente 3/10. | | | | | | | | | | |

Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 4.8 - Estimativa do segundo momento estatístico para o exemplo de placa infinita com trinca central – Caso de dispersão 3/10

| Parâmetro | | Segundo momento estatístico - Caso de dispersão 3/10 (10^{-6} m) | | | | | | | | |
|--|---------------------|---|------------------------------|------------------------------|-----------------------------|-----------------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|
| | | 1.10 ⁵ Ciclos | 2. 10 ⁵ Ciclos | 3. 10 ⁵ Ciclos | 4.10 ⁵ Ciclos | 5.10 ⁵ Ciclos | 6. 10 ⁵ Ciclos | 7. 10 ⁵ Ciclos | 8. 10 ⁵ Ciclos | 9. 10 ⁵ Ciclos |
| C_f | \bar{a} (N) | 2,50 | 2,82 | 3,20 | 3,65 | 4,19 | 4,83 | 5,57 | 6,44 | 7,45 |
| | a (N) | 2,49 | 2,78 | 3,12 | 3,51 | 3,97 | 4,51 | 5,16 | 5,93 | 6,91 |
| | \underline{a} (N) | 2,49 | 2,78 | 3,10 | 3,47 | 3,89 | 4,36 | 4,88 | 5,48 | 6,14 |
| m_f^{**} | \bar{a} (N) | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| | a (N) | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| | \underline{a} (N) | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| K_{Ic} | \bar{a} (N) | 2,53 | 2,90 | 3,35 | 3,91 | 4,58 | 5,40 | 6,38 | 7,54 | 8,92 |
| | a (N) | 2,52 | 2,85 | 3,25 | 3,72 | 4,31 | 5,03 | 5,95 | 7,13 | 8,71 |
| | \underline{a} (N) | 2,52 | 2,85 | 3,23 | 3,66 | 4,16 | 4,74 | 5,40 | 6,15 | 7,009 |
| a_0 | \bar{a} (N) | 2,76 | 3,12 | 3,53 | 4,01 | 4,57 | 5,21 | 5,94 | 6,78 | 7,74 |
| | a (N) | 2,76 | 3,09 | 3,48 | 3,93 | 4,46 | 5,08 | 5,81 | 6,67 | 7,70 |
| | \underline{a} (N) | 2,76 | 3,09 | 3,47 | 3,90 | 4,38 | 4,92 | 5,53 | 6,21 | 6,97 |
| ** Modelo instável para a variável m_f com coeficiente 3/10. | | | | | | | | | | |

Fonte: Elaborado pelo autor.

A tabela 4.9 apresenta os tempos computacionais aproximados para a solução do método RK4 e FCB. Para o exemplo de placa infinita com trinca central (coeficiente de dispersão igual a 3/10), o tempo computacional obtido pela metodologia FCB foi no mínimo 481,22% (parâmetro a_0) mais eficiente quando comparado a solução de RK4.

Tabela 4.9 - Tempo de execução (em segundos) para 900000 ciclos para o modelo de Forman. Com coeficiente de dispersão igual a 3/10.

| Parâmetro | | Tempo [s] | ρ [%] |
|-----------|-----|-----------|------------|
| C_f | RK4 | 304,200 | 3464,35 |
| | FCB | 8,5345 | |

| | | | |
|--|-----|---------|---------|
| m_f^{**} | RK4 | - | - |
| | FCB | - | |
| K_{Ic} | RK4 | 356,848 | 4610,24 |
| | FCB | 7,576 | |
| a_0 | RK4 | 263,47 | 481,22 |
| | FCB | 45,33 | |
| ** Modelo instável para a variável m_f com coeficiente 3/10. | | | |

Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 4.10 - Desvio relativo do primeiro momento estatístico para o exemplo de placa infinita com trinca central – Caso de dispersão 3/10 [%].

| Parâmetro | | Desvio Relativo para o Primeiro momento estatístico - Caso de dispersão 3/10 | | | | | | | | |
|---|---------------------|--|------------------------------|------------------------------|-----------------------------|-----------------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|
| | | 1.10 ⁵ Ciclos | 2. 10 ⁵ Ciclos | 3. 10 ⁵ Ciclos | 4.10 ⁵ Ciclos | 5.10 ⁵ Ciclos | 6. 10 ⁵ Ciclos | 7. 10 ⁵ Ciclos | 8. 10 ⁵ Ciclos | 9. 10 ⁵ Ciclos |
| C_f | \bar{a} (N) | 0,17 | 0,62 | 1,26 | 1,98 | 2,69 | 3,31 | 3,76 | 3,96* | 3,85 |
| | \underline{a} (N) | -0,079 | -0,06 | -0,21 | -0,49 | -0,94 | -1,61 | -2,52 | -3,70 | -5,19* |
| m_f^{**} | \bar{a} (N) | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| | \underline{a} (N) | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| K_{Ic} | \bar{a} (N) | 0,21 | 0,77 | 1,52 | 2,31 | 3,007 | 3,47 | 3,56* | 3,16 | 2,13 |
| | \underline{a} (N) | -0,01 | -0,09 | -0,32 | -0,76 | -1,47 | -2,53 | -3,99 | -5,93 | -8,41* |
| a_0 | \bar{a} (N) | 0,14 | 0,51 | 1,02 | 1,59 | 2,14 | 2,62 | 2,96 | 3,10 | 3,05* |
| | \underline{a} (N) | -0,007 | -0,056 | -0,18 | -0,43 | -0,83 | -1,40 | -2,18 | -3,19 | -4,44* |
| * Maiores valores de desvios relativos para cada linha analisada. | | | | | | | | | | |
| ** Modelo instável para a variável m_f com coeficiente 3/10. | | | | | | | | | | |

Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 4.11 - Desvio relativo do segundo momento estatístico para o exemplo de placa infinita com trinca central – Caso de dispersão 3/10 [%].

| Parâmetro | | Desvio Relativo para o Segundo momento estatístico - Caso de dispersão 3/10 | | | | | | | | |
|------------|---------------------|---|------------------------------|------------------------------|-----------------------------|-----------------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|
| | | 1.10 ⁵ Ciclos | 2. 10 ⁵ Ciclos | 3. 10 ⁵ Ciclos | 4.10 ⁵ Ciclos | 5.10 ⁵ Ciclos | 6. 10 ⁵ Ciclos | 7. 10 ⁵ Ciclos | 8. 10 ⁵ Ciclos | 9. 10 ⁵ Ciclos |
| C_f | \bar{a} (N) | 0,35 | 1,28 | 2,60 | 4,12 | 5,65 | 6,98 | 7,92 | 8,79* | 7,85 |
| | \underline{a} (N) | -0,01 | -0,12 | -0,43 | -1,02 | -1,99 | -3,41 | -5,37 | -7,92 | -11,12* |
| m_f^{**} | \bar{a} (N) | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| | \underline{a} (N) | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| K_{Ic} | \bar{a} (N) | 0,44 | 1,60 | 3,19 | 4,91 | 6,41 | 7,32* | 7,23 | 5,71 | 2,35 |
| | \underline{a} (N) | -0,02 | -0,20 | -0,69 | -1,65 | -3,27 | -5,72 | -9,15 | -13,73 | -19,60* |

| | | | | | | | | | | |
|---|---------------------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|
| a_0 | \bar{a} (N) | 0,19 | 0,68 | 1,30 | 1,90 | 2,36 | 2,55* | 2,37 | 1,73 | 0,54 |
| | \underline{a} (N) | -0,015 | -0,12 | -0,40 | -0,95 | -1,81 | -3,06 | -4,73 | -6,87 | -9,50* |
| * Maiores valores de desvios relativos para cada linha analisada. | | | | | | | | | | |
| ** Modelo instável para a variável m_f com coeficiente 3/10. | | | | | | | | | | |

Fonte: Elaborado pelo autor.

Verificou-se nas tabelas 4.7 e 4.8 um comportamento instável obtido do valor esperado da solução numérica para o parâmetro m_f . Em alguns pontos a estimativa do primeiro e segundo momentos estatísticos para a evolução de trinca, apresenta fechamento do tamanho de trinca. Isso posto, observa-se que o modelo de propagação de Forman é demasiadamente instável com coeficiente de dispersão igual a 3/10 sobre o parâmetro m_f .

O parâmetro (ρ), apresentado na equação (4.1), em companhia das funções de desvio relativo, apresentados nas tabelas 4.10 e 4.11, demonstram que a metodologia proposta possui um desempenho satisfatório para o exemplo clássico “Placa com largura infinita e trinca central”, com coeficiente de dispersão igual a 3/10.

A seguir efetua-se a análise do exemplo clássico da MFLE, “Placa com largura finita e trinca central”, para o modelo de propagação de trinca proposto por Forman.

4.2 PLACA COM LARGURA FINITA E TRINCA CENTRAL

A função de correção do fator de intensidade de tensão para o caso de “Placa com largura finita e trinca central”, representada pela Fig. 4.12 é dada por Bannantine et al. (1989), equação (4.4).

$$f(a) = \sqrt{\sec\left(\frac{\pi a}{2b}\right)}, \text{ em } (N_0, N_1) \times (\Omega, F, P). \quad (4.4)$$

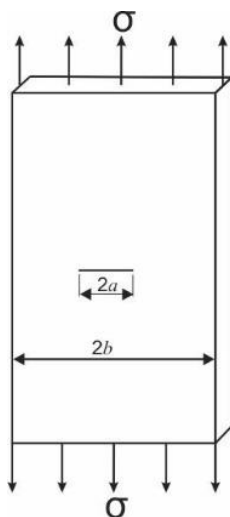


Figura 4.12 - Placa com largura finita e trinca central.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Inicia-se o processo com a randomização do parâmetro K1.10. Em seguida apresenta-se o gráfico do estimador do primeiro momento estatístico, figura 4.13.

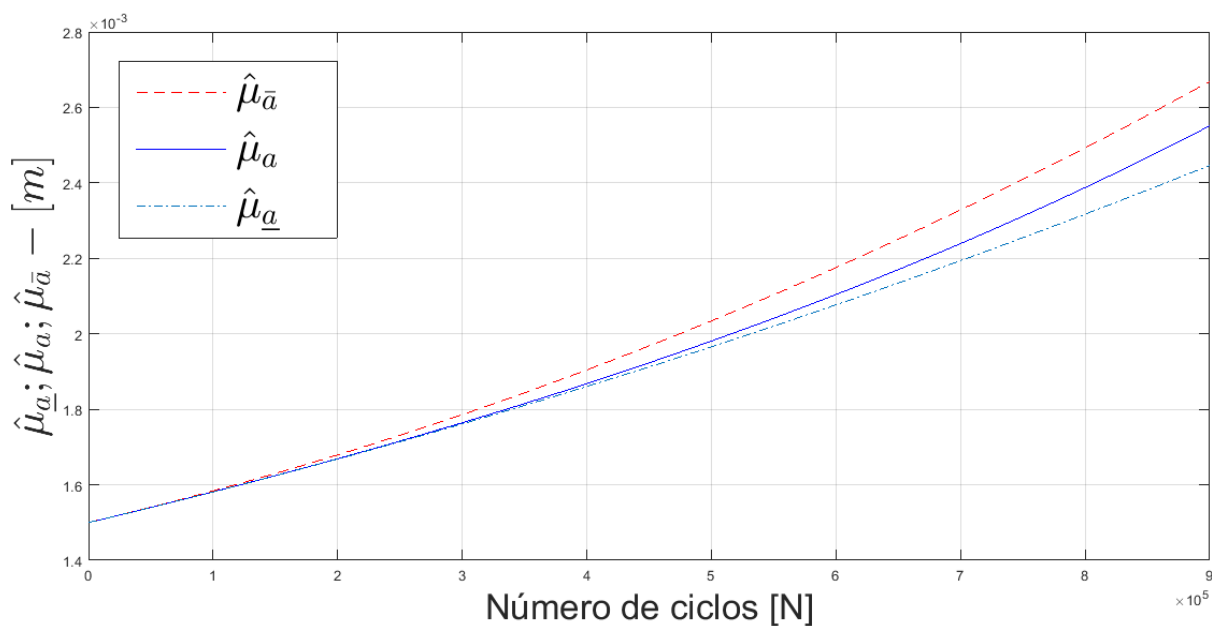


Figura 4.13 - Primeiro momento estatístico para o parâmetro K1.10. Com valor de $a^* = 1,40a_0$.

Fonte: laborado pelo autor.

Observando a figura 4.13, comprova-se que o primeiro momento estatístico satisfaz a desigualdade da equação (2.17). Atendendo devidamente os critérios da metodologia FCB.

O processo de randomização prossegue para o parâmetro $m_{1.10}$. Onde ocorreu uma violação da cota superior pela solução numérica, fato este, apresentado na figura 4.14.

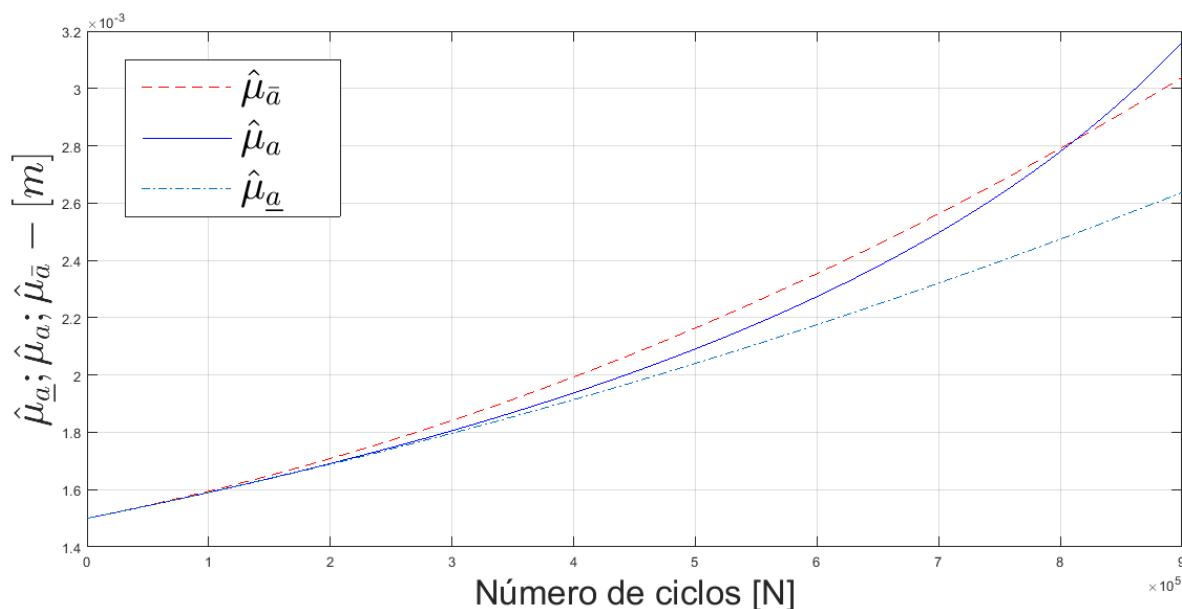


Figura 4.14 - Primeiro momento estatístico para a variável $m_{1.10}$. Com valor de $a^* = 1,60a_0$.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Desta forma o valor empírico a^* foi ajustado para $a^* = 1,60a_0$. Observa-se na figura 4.14, que o primeiro momento estatístico satisfaz a desigualdade da equação (2.17). Demonstrando a eficiência da metodologia FCB.

Os dados obtidos pelo processo de randomização para os parâmetros a_0 , K_{IC} , m_F e C_f estão resumidos nas tabelas posteriores. As tabelas 4.12 e 4.13 apresentam as estimativas do primeiro e segundo momento estatístico para o exemplo de placa finita com trinca central.

Tabela 4.12 - Estimativa do primeiro momento estatístico para o exemplo de placa finita com trinca central – Caso de dispersão 1/10

| Parâmetro | | Primeiro momento estatístico - Caso de dispersão 1/10 (10^{-3} m) | | | | | | | | |
|-----------|---------------------|--|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| | | 1.10 ⁵ Ciclos | 2.10 ⁵ Ciclos | 3.10 ⁵ Ciclos | 4.10 ⁵ Ciclos | 5.10 ⁵ Ciclos | 6.10 ⁵ Ciclos | 7.10 ⁵ Ciclos | 8.10 ⁵ Ciclos | 9.10 ⁵ Ciclos |
| C_f | \bar{a} (N) | 1,58 | 1,67 | 1,78 | 1,89 | 2,02 | 2,16 | 2,31 | 2,47 | 2,65 |
| | a (N) | 1,57 | 1,66 | 1,76 | 1,86 | 1,97 | 2,09 | 2,22 | 2,37 | 2,53 |
| | \underline{a} (N) | 1,57 | 1,66 | 1,75 | 1,85 | 1,95 | 2,06 | 2,18 | 2,30 | 2,43 |

| | | | | | | | | | | |
|------------|---------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| m_f^{**} | \bar{a} (N) | 1,59 | 1,72 | 1,87 | 2,04 | 2,24 | 2,47 | 2,72 | 3,00 | 3,31 |
| | a (N) | 1,58 | 1,69 | 1,80 | 1,93 | 2,09 | 2,27 | 2,50 | 2,78 | 3,17 |
| | \underline{a} (N) | 1,58 | 1,68 | 1,79 | 1,91 | 2,04 | 2,17 | 2,32 | 2,47 | 2,64 |
| K_{Ic} | \bar{a} (N) | 1,58 | 1,67 | 1,78 | 1,90 | 2,03 | 2,17 | 2,32 | 2,49 | 2,66 |
| | a (N) | 1,58 | 1,66 | 1,76 | 1,86 | 1,98 | 2,10 | 2,23 | 2,38 | 2,55 |
| | \underline{a} (N) | 1,58 | 1,66 | 1,76 | 1,86 | 1,96 | 2,07 | 2,19 | 2,31 | 2,44 |
| a_0 | \bar{a} (N) | 1,58 | 1,67 | 1,78 | 1,89 | 2,02 | 2,16 | 2,31 | 2,47 | 2,65 |
| | a (N) | 1,58 | 1,66 | 1,76 | 1,86 | 1,97 | 2,09 | 2,23 | 2,37 | 2,53 |
| | \underline{a} (N) | 1,58 | 1,66 | 1,75 | 1,85 | 1,96 | 2,07 | 2,18 | 2,30 | 2,43 |

** Valores alcançados com a* estrela ajustado para $a^* = 1,60a_0$.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 4.13 - Estimativa do segundo momento estatístico para o exemplo de placa finita com trinca central – Caso de dispersão 1/10.

| Parâmetro | Segundo momento estatístico - Caso de dispersão 1/10 (10^{-6} m) | | | | | | | | | |
|------------|---|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|-------|
| | 1.10^5 Ciclos | 2.10^5 Ciclos | 3.10^5 Ciclos | 4.10^5 Ciclos | 5.10^5 Ciclos | 6.10^5 Ciclos | 7.10^5 Ciclos | 8.10^5 Ciclos | 9.10^5 Ciclos | |
| C_f | \bar{a} (N) | 2,50 | 2,81 | 3,17 | 3,60 | 4,11 | 4,70 | 5,37 | 6,16 | 7,05 |
| | a (N) | 2,49 | 2,77 | 3,10 | 3,47 | 3,90 | 4,39 | 4,97 | 5,65 | 6,44 |
| | \underline{a} (N) | 2,49 | 2,77 | 3,09 | 3,44 | 3,84 | 4,28 | 4,78 | 5,33 | 5,93 |
| m_f^{**} | \bar{a} (N) | 2,55 | 2,98 | 3,55 | 4,32 | 5,32 | 6,61 | 8,27 | 10,35 | 12,94 |
| | a (N) | 2,53 | 2,87 | 3,29 | 3,82 | 4,51 | 5,46 | 6,81 | 8,90 | 12,58 |
| | \underline{a} (N) | 2,52 | 2,86 | 3,25 | 3,71 | 4,25 | 4,89 | 5,62 | 6,47 | 7,45 |
| K_{Ic} | \bar{a} (N) | 2,50 | 2,81 | 3,18 | 3,62 | 4,14 | 4,73 | 5,43 | 6,23 | 7,14 |
| | a (N) | 2,49 | 2,78 | 3,11 | 3,48 | 3,92 | 4,31 | 5,02 | 5,71 | 6,53 |
| | \underline{a} (N) | 2,49 | 2,78 | 3,10 | 3,46 | 3,86 | 4,31 | 4,81 | 5,37 | 5,99 |
| a_0 | \bar{a} (N) | 2,53 | 2,84 | 3,21 | 3,64 | 4,15 | 4,74 | 5,41 | 6,19 | 7,08 |
| | a (N) | 2,52 | 2,81 | 3,14 | 3,51 | 3,95 | 4,46 | 5,04 | 5,73 | 6,53 |
| | \underline{a} (N) | 2,52 | 2,80 | 3,13 | 3,49 | 3,89 | 4,34 | 4,85 | 5,40 | 6,02 |

** Valores alcançados com a* estrela ajustado para $a^* = 1,60a_0$.

Fonte: Elaborado pelo autor.

A tabela 4.14 apresenta os tempos computacionais aproximados para a solução do método RK4 e FCB. Para o exemplo de placa finita com trinca central (coeficiente de dispersão igual a 1/10), o tempo computacional obtido pela

metodologia FCB foi no mínimo 396,92% (parâmetro a_0) mais eficiente quando comparado a solução de RK4.

Tabela 4.14 - Tempo de execução (em segundos) para 900000 ciclos para o exemplo Placa com largura finita e trinca central. Com coeficiente de dispersão igual a 1/10.

| Parâmetro | | Tempo [s] | ρ [%] |
|------------|-----|-----------|------------|
| C_f | RK4 | 297,270 | 4155,83 |
| | FCB | 6,985 | |
| m_f^{**} | RK4 | 256,300 | 4696,93 |
| | FCB | 5,343 | |
| K_{Ic} | RK4 | 412,826 | 4434,05 |
| | FCB | 9,105 | |
| a_0 | RK4 | 307,545 | 396,92 |
| | FCB | 61,890 | |

** Valores alcançados com a^* estrela ajustado para $a^* = 1,60a_0$.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Nas tabelas 4.15 e 4.16, são apresentados os desvios relativos para os estimadores dos momentos estatísticos de primeira e segunda ordem.

Tabela 4.15 - Desvio relativo do primeiro momento estatístico para o exemplo de placa finita com trinca central – [%].

| Parâmetro | | Desvio Relativo para o Primeiro momento estatístico - Caso de dispersão 1/10 (%) | | | | | | | | |
|------------|---------------------|--|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| | | 1.10 ⁵ Ciclos | 2.10 ⁵ Ciclos | 3.10 ⁵ Ciclos | 4.10 ⁵ Ciclos | 5.10 ⁵ Ciclos | 6.10 ⁵ Ciclos | 7.10 ⁵ Ciclos | 8.10 ⁵ Ciclos | 9.10 ⁵ Ciclos |
| C_f | \bar{a} (N) | 0,16 | 0,59 | 1,20 | 1,91 | 2,65 | 3,35 | 3,94 | 4,38 | 4,60* |
| | \underline{a} (N) | -0,006 | -0,05 | -0,16 | -0,38 | -0,74 | -1,25 | -1,95 | -2,85 | -3,97* |
| m_f^{**} | \bar{a} (N) | 0,49 | 1,79 | 3,59 | 5,58 | 7,41 | 8,71 | 9,05* | 7,87 | 4,39 |
| | \underline{a} (N) | -0,01 | -0,14 | -0,50 | -1,22 | -2,44 | -4,34 | -7,12 | -11,09 | -16,70* |
| K_{Ic} | \bar{a} (N) | 0,16 | 0,60 | 1,22 | 1,94 | 2,69 | 3,39 | 3,98 | 4,40 | 4,60* |
| | \underline{a} (N) | -0,006 | -0,05 | -0,17 | -0,40 | -0,76 | -1,30 | -2,01 | -2,94 | -4,10* |
| a_0 | \bar{a} (N) | 0,15 | 0,57 | 1,17 | 1,87 | 2,59 | 3,27 | 3,86 | 4,28 | 4,51* |
| | \underline{a} (N) | -0,006 | -0,04 | -0,16 | -0,38 | -0,73 | -1,23 | -1,92 | -2,80 | -3,89* |

* Maiores valores de desvios relativos para cada linha analisada.
 ** Valores alcançados com a^* estrela ajustado para $a^* = 1,60a_0$.

Fonte: Elaborado pelo autor.

| | | | | | | | | | | |
|--|---------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| | \underline{a} (N) | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| K_{IC} | \bar{a} (N) | 1,59 | 1,70 | 1,82 | 1,96 | 2,12 | 2,29 | 2,47 | 2,67 | 2,89 |
| | a (N) | 1,58 | 1,68 | 1,79 | 1,92 | 2,05 | 2,21 | 2,39 | 2,59 | 2,83 |
| | \underline{a} (N) | 1,58 | 1,68 | 1,79 | 1,90 | 2,02 | 2,15 | 2,29 | 2,44 | 2,59 |
| a_0 | \bar{a} (N) | 1,58 | 1,68 | 1,79 | 1,91 | 2,04 | 2,18 | 2,33 | 2,49 | 2,67 |
| | a (N) | 1,58 | 1,67 | 1,77 | 1,88 | 1,99 | 2,12 | 2,26 | 2,42 | 2,59 |
| | \underline{a} (N) | 1,58 | 1,67 | 1,77 | 1,87 | 1,98 | 2,09 | 2,21 | 2,34 | 2,47 |
| ** Modelo instável para a variável m_f com coeficiente 3/10. | | | | | | | | | | |

Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 4.18 - Estimativa do segundo momento estatístico para o exemplo de placa finita com trinca central – Caso de dispersão 3/10.

| Parâmetro | | Segundo momento estatístico - Caso de dispersão 3/10 (10^{-6} m) | | | | | | | | |
|--|---------------------|---|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| | | 1.10^5 Ciclos | 2.10^5 Ciclos | 3.10^5 Ciclos | 4.10^5 Ciclos | 5.10^5 Ciclos | 6.10^5 Ciclos | 7.10^5 Ciclos | 8.10^5 Ciclos | 9.10^5 Ciclos |
| C_f | \bar{a} (N) | 2,50 | 2,82 | 3,20 | 3,65 | 4,19 | 4,83 | 5,57 | 6,44 | 7,45 |
| | a (N) | 2,49 | 2,78 | 3,12 | 3,51 | 3,97 | 4,51 | 5,16 | 5,95 | 6,91 |
| | \underline{a} (N) | 2,49 | 2,78 | 3,10 | 3,47 | 3,89 | 4,36 | 4,88 | 5,48 | 6,14 |
| m_f^{**} | \bar{a} (N) | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| | a (N) | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| | \underline{a} (N) | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| K_{IC} | \bar{a} (N) | 2,53 | 2,90 | 3,35 | 3,90 | 4,58 | 5,39 | 6,37 | 7,53 | 8,90 |
| | a (N) | 2,52 | 2,85 | 3,25 | 3,72 | 4,30 | 5,02 | 5,94 | 7,12 | 8,70 |
| | \underline{a} (N) | 2,52 | 2,85 | 3,22 | 3,66 | 4,16 | 4,73 | 5,39 | 6,14 | 6,99 |
| a_0 | \bar{a} (N) | 2,75 | 3,10 | 3,51 | 3,99 | 4,55 | 5,19 | 5,92 | 6,76 | 7,71 |
| | a (N) | 2,75 | 3,08 | 3,47 | 3,92 | 4,44 | 5,05 | 5,78 | 6,64 | 7,66 |
| | \underline{a} (N) | 2,74 | 3,08 | 3,45 | 3,88 | 4,36 | 4,90 | 5,50 | 6,18 | 6,93 |
| ** Modelo instável para a variável m_f com coeficiente 3/10. | | | | | | | | | | |

Fonte: Elaborado pelo autor.

A tabela 4.19 apresenta os tempos computacionais aproximados para a solução do método RK4 e FCB. Para o exemplo de placa finita com trinca central (coeficiente de dispersão igual a 3/10), o tempo computacional obtido pela metodologia FCB foi no mínimo 382,09% (parâmetro a_0) mais eficiente quando comparado a solução de RK4.

Tabela 4.19 - Tempo de execução (em segundos) para 900000 ciclos para o exemplo de placa finita com trinca central – Caso de dispersão 3/10.

| Parâmetro | | Tempo [s] | $\rho = \text{RK4/FCB}$ |
|--|-----|-----------|-------------------------|
| C_f | RK4 | 282,905 | 4385,57 |
| | FCB | 6,307 | |
| m_f^{**} | RK4 | - | - |
| | FCB | - | |
| K_{Ic} | RK4 | 323,002 | 5993,22 |
| | FCB | 5,301 | |
| a_0 | RK4 | 288,821 | 378,09 |
| | FCB | 60,411 | |
| ** Modelo instável para a variável m_f com coeficiente 3/10. | | | |

Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 4.20 - Desvio relativo do primeiro momento estatístico para o exemplo de placa finita com trinca central [%] – Caso de dispersão 3/10.

| Parâmetro | | Desvio Relativo para o Primeiro momento estatístico - Caso de dispersão 3/10 (%) | | | | | | | | |
|---|---------------------|--|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| | | 1.10 ⁵ Ciclos | 2.10 ⁵ Ciclos | 3.10 ⁵ Ciclos | 4.10 ⁵ Ciclos | 5.10 ⁵ Ciclos | 6.10 ⁵ Ciclos | 7.10 ⁵ Ciclos | 8.10 ⁵ Ciclos | 9.10 ⁵ Ciclos |
| C_f | \bar{a} (N) | 0,17 | 0,62 | 1,26 | 1,98 | 2,70 | 3,32 | 3,77 | 3,97* | 3,86 |
| | \underline{a} (N) | -0,007 | -0,063 | -0,21 | -0,49 | -0,94 | -1,61 | -2,52 | -3,71 | -5,21* |
| m_f^{**} | \bar{a} (N) | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| | \underline{a} (N) | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| K_{Ic} | \bar{a} (N) | 0,21 | 0,77 | 1,52 | 2,31 | 3,00 | 3,47 | 3,57 | 3,17 | 2,13 |
| | \underline{a} (N) | -0,01 | -0,09 | -0,32 | -0,75 | -1,47 | -2,52 | -3,99 | -5,93 | -8,42* |
| a_0 | \bar{a} (N) | 0,14 | 0,51 | 1,03 | 1,61 | 2,18 | 2,67 | 3,02 | 3,17* | 3,08 |
| | \underline{a} (N) | -0,007 | -0,05 | -0,18 | -0,43 | -0,83 | -1,41 | -2,19 | -3,20 | -4,46* |
| * Maiores valores de desvios relativos para cada linha analisada. | | | | | | | | | | |
| ** Modelo instável para a variável m_f com coeficiente 3/10. | | | | | | | | | | |

Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 4.21 - Desvio relativo do segundo momento estatístico para o exemplo de placa finita com trinca central [%] – Caso de dispersão 3/10.

| Parâmetro | | Desvio Relativo para o Segundo momento estatístico - Caso de dispersão 3/10 (%) | | | | | | | | |
|-----------|---------------|---|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| | | 1.10 ⁵ Ciclos | 2.10 ⁵ Ciclos | 3.10 ⁵ Ciclos | 4.10 ⁵ Ciclos | 5.10 ⁵ Ciclos | 6.10 ⁵ Ciclos | 7.10 ⁵ Ciclos | 8.10 ⁵ Ciclos | 9.10 ⁵ Ciclos |
| | \bar{a} (N) | 0,35 | 1,28 | 2,61 | 4,13 | 5,67 | 7,01 | 7,95 | 8,30* | 7,86 |

| | | | | | | | | | | |
|---|---------------------|--------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|--------|
| C_f | \underline{a} (N) | -0,016 | -0,129 | -0,43 | -1,02 | -1,99 | -3,42 | -5,39 | -7,95 | -11,1* |
| m_f^{**} | \bar{a} (N) | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| | \underline{a} (N) | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| K_{Ic} | \bar{a} (N) | 0,44 | 1,60 | 3,19 | 4,91 | 6,41 | 7,33* | 7,23 | 5,70 | 2,29 |
| | \underline{a} (N) | -0,02 | -0,20 | -0,68 | -1,65 | -3,27 | -5,71 | -9,16 | -13,76 | -19,6* |
| a_0 | \bar{a} (N) | 0,20 | 0,69 | 1,32 | 1,94 | 2,41 | 2,62* | 2,46 | 1,83 | 0,64 |
| | \underline{a} (N) | -0,01 | -0,12 | -0,41 | -0,95 | -1,82 | -3,07 | -4,75 | -6,90 | -9,54* |
| * Maiores valores de desvios relativos para cada linha analisada. | | | | | | | | | | |
| ** Modelo instável para a variável m_f com coeficiente 3/10. | | | | | | | | | | |

Fonte: Elaborado pelo autor.

Verificou-se um comportamento instável obtido do valor esperado da solução numérica para o parâmetro m_f . Em alguns pontos a estimativa do primeiro e segundo momentos estatísticos para a evolução de trinca, apresenta fechamento do tamanho de trinca. Isso posto, observa-se que o modelo de propagação de Forman é demasiadamente instável com coeficiente de dispersão igual a 3/10 sobre o parâmetro m_f .

O parâmetro (ρ), apresentado na tabela 4.19, juntamente com a função desvio relativo, apresentados nas tabelas 4.20 e 4.21, demonstram que a metodologia proposta possui um desempenho satisfatório para o exemplo clássico “Placa com largura finita e trinca central”, com coeficiente de dispersão igual a 3/10.

A seguir efetua-se a análise do exemplo clássico da MFLE, “Placa com largura finita e trinca na aresta”, para o modelo de propagação de trinca proposto por Forman.

4.3 PLACA COM LARGURA FINITA E TRINCA NA ARESTA

A função de correção do fator de intensidade de tensão para o caso “Placa com largura finita e trinca na aresta”, representada pela figura 4.15. É dada por Bannantine et al. (1989), equação (4.5).

$$f(a) = \left\{ \begin{array}{l} 1,122 - 0,231 \left(\frac{a}{b}\right) + 10,55 \left(\frac{a}{b}\right)^2 \\ -21,72 \left(\frac{a}{b}\right)^3 + 30,39 \left(\frac{a}{b}\right)^4 \end{array} \right\}, em (N_0, N_1) \times (\Omega, F, P). \quad (4.5)$$

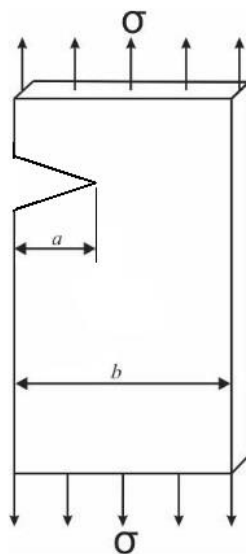


Figura 4.15 - Placa com largura finita e trinca na aresta

Fonte: Elaborado pelo autor.

Inicia-se o processo com a randomização do parâmetro C1.10. Em seguida apresenta-se o gráfico do estimador do primeiro momento estatístico.

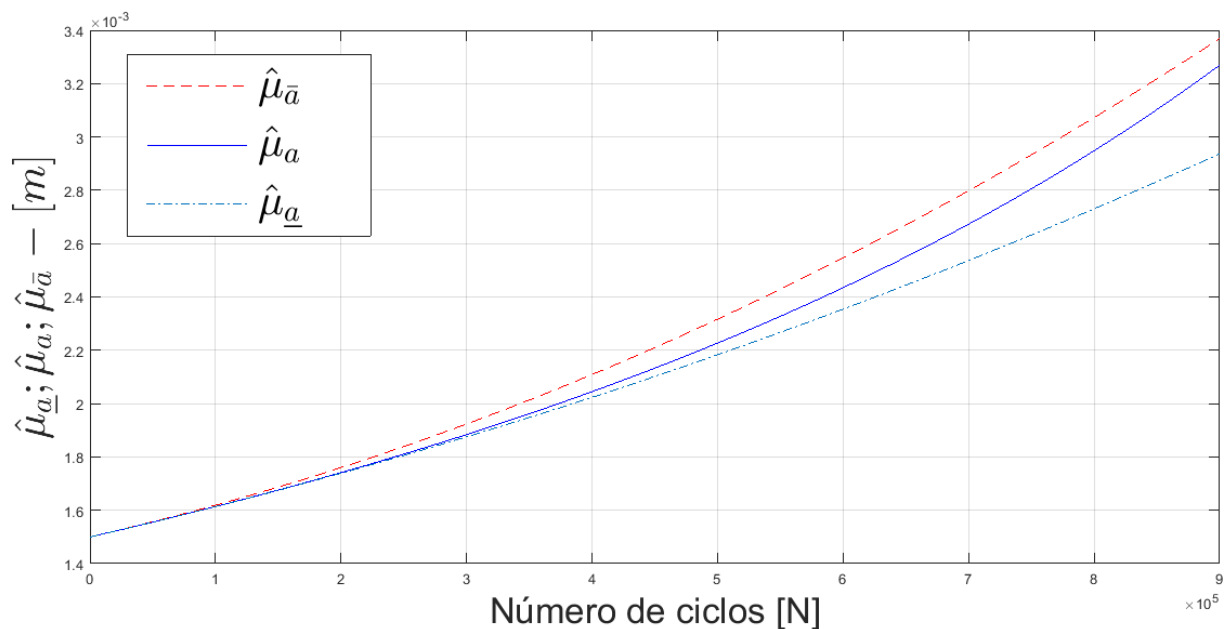


Figura 4.16 - Primeiro momento estatístico para o parâmetro C1.10. Com valor de $a^* = 1,40a_0$.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Observando a figura 4.16, comprova-se que o primeiro momento estatístico satisfaz a desigualdade da equação (2.17). Atendendo devidamente os critérios da

metodologia FCB. A figura 4.17 apresenta o gráfico do desvio relativo para o primeiro momento estatístico para o parâmetro C1.10.

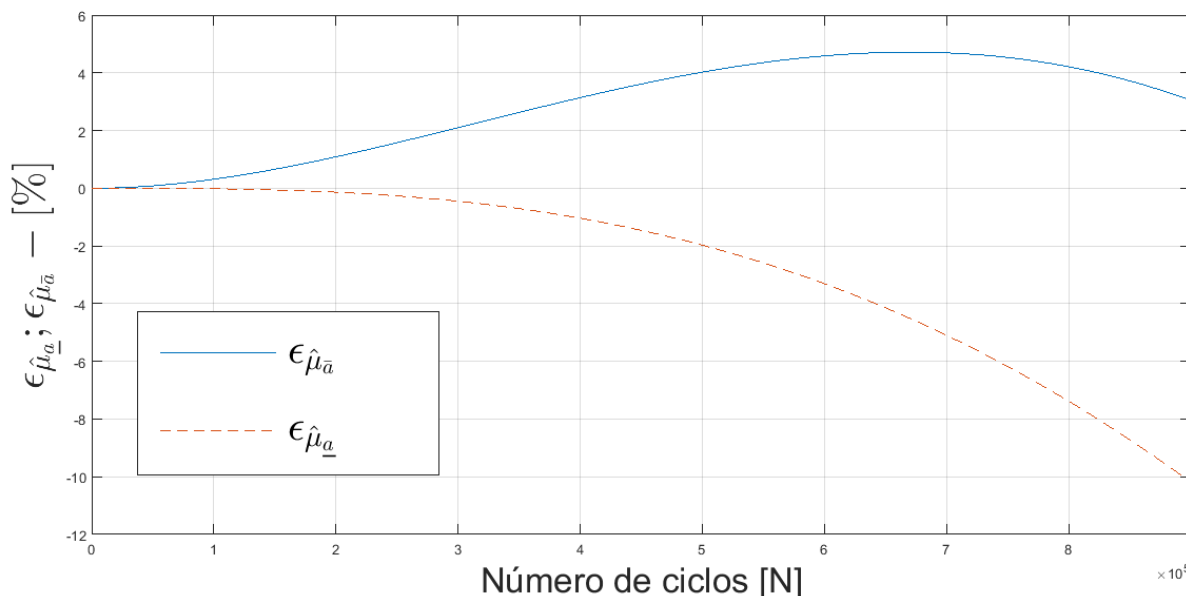


Figura 4.17 - Desvio relativo para o primeiro momento estatístico para o parâmetro C1.10. Com valor de $a^* = 1,40a_0$.

Fonte: Elaborado pelo autor.

A análise do desvio relativo para o primeiro momento estatístico, utiliza-se da equação descrita em (4.2). Observa-se na figura 4.17, que o desvio máximo para a cota superior é igual a 4,69 e para a cota inferior é igual a -10,17.

O processo de randomização prossegue para o parâmetro m1.10. Onde verificou-se um comportamento instável obtido do valor esperado da solução numérica. Em alguns pontos a estimativa do primeiro e segundo momentos estatísticos para a evolução de trinca, apresenta fechamento do tamanho de trinca. Isso posto, observa-se que o modelo de propagação de Forman é demasiadamente instável com coeficiente de dispersão igual a 1/10 sobre o parâmetro m_f .

Os dados obtidos pelo processo de randomização para os parâmetros a_0 , K_{IC} , m_F e C_f estão resumidos nas tabelas posteriores. A tabela 4.22 e 4.23 apresentam as estimativas do primeiro momento estatístico para o exemplo de placa finita com trinca na aresta e as estimativas do segundo momento estatístico para o exemplo de placa infinita com trinca na aresta, respectivamente.

Tabela 4.22 - Estimativa do primeiro momento estatístico para o exemplo de placa finita com trinca na aresta – Caso de dispersão 1/10.

| Parâmetro | | Primeiro momento estatístico - Caso de dispersão 1/10 (10^{-3} m) | | | | | | | | |
|------------|---------------------|--|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| | | 1.10 ⁵ Ciclos | 2.10 ⁵ Ciclos | 3.10 ⁵ Ciclos | 4.10 ⁵ Ciclos | 5.10 ⁵ Ciclos | 6.10 ⁵ Ciclos | 7.10 ⁵ Ciclos | 8.10 ⁵ Ciclos | 9.10 ⁵ Ciclos |
| C_f | \bar{a} (N) | 1,61 | 1,75 | 1,92 | 2,10 | 2,31 | 2,54 | 2,79 | 3,07 | 3,36 |
| | a (N) | 1,61 | 1,74 | 1,88 | 2,04 | 2,22 | 2,43 | 2,67 | 2,94 | 3,26 |
| | \underline{a} (N) | 1,61 | 1,73 | 1,87 | 2,02 | 2,18 | 2,35 | 2,53 | 2,72 | 2,93 |
| m_f^{**} | \bar{a} (N) | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| | a (N) | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| | \underline{a} (N) | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| K_{Ic} | \bar{a} (N) | 1,61 | 1,76 | 1,92 | 2,11 | 2,32 | 2,56 | 2,81 | 3,09 | 3,40 |
| | a (N) | 1,61 | 1,74 | 1,88 | 2,05 | 2,23 | 2,45 | 2,69 | 2,97 | 3,30 |
| | \underline{a} (N) | 1,61 | 1,74 | 1,87 | 2,03 | 2,19 | 2,36 | 2,55 | 2,74 | 2,95 |
| a_0 | \bar{a} (N) | 1,61 | 1,75 | 1,92 | 2,10 | 2,31 | 2,54 | 2,79 | 3,06 | 3,35 |
| | a (N) | 1,61 | 1,73 | 1,88 | 2,04 | 2,22 | 2,43 | 2,66 | 2,94 | 3,25 |
| | \underline{a} (N) | 1,61 | 1,73 | 1,87 | 2,02 | 2,18 | 2,35 | 2,53 | 2,72 | 2,93 |

** Modelo instável para a variável m_f com coeficiente 1/10.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 4.23 - Estimativa do segundo momento estatístico para o exemplo de placa finita com trinca na aresta – Caso de dispersão 1/10.

| Parâmetro | | Segundo momento estatístico - Caso de dispersão 1/10 (10^{-6} m) | | | | | | | | |
|------------|---------------------|---|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| | | 1.10 ⁵ Ciclos | 2.10 ⁵ Ciclos | 3.10 ⁵ Ciclos | 4.10 ⁵ Ciclos | 5.10 ⁵ Ciclos | 6.10 ⁵ Ciclos | 7.10 ⁵ Ciclos | 8.10 ⁵ Ciclos | 9.10 ⁵ Ciclos |
| C_f | \bar{a} (N) | 2,61 | 3,09 | 3,69 | 4,45 | 5,37 | 6,49 | 7,85 | 9,48 | 11,41 |
| | a (N) | 2,60 | 3,03 | 3,54 | 4,18 | 4,96 | 5,94 | 7,17 | 8,73 | 10,77 |
| | \underline{a} (N) | 2,60 | 3,02 | 3,51 | 4,09 | 4,76 | 5,54 | 6,44 | 7,47 | 8,65 |
| m_f^{**} | \bar{a} (N) | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| | a (N) | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| | \underline{a} (N) | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| K_{Ic} | \bar{a} (N) | 2,62 | 3,10 | 3,72 | 4,49 | 5,43 | 6,59 | 7,98 | 9,66 | 11,65 |
| | a (N) | 2,60 | 3,04 | 3,56 | 4,21 | 5,01 | 6,02 | 7,29 | 8,92 | 11,05 |
| | \underline{a} (N) | 2,60 | 3,03 | 3,53 | 4,12 | 4,81 | 5,61 | 6,53 | 7,58 | 8,79 |
| a_0 | \bar{a} (N) | 2,64 | 3,12 | 3,72 | 4,47 | 5,39 | 6,51 | 7,86 | 9,46 | 11,36 |
| | a (N) | 2,62 | 3,05 | 3,58 | 4,22 | 5,01 | 6,00 | 7,23 | 8,81 | 10,83 |

| | | | | | | | | | | |
|--|---------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| | \underline{a} (N) | 2,62 | 3,05 | 3,55 | 4,13 | 4,82 | 5,61 | 6,52 | 7,56 | 8,75 |
| ** Modelo instável para a variável m_f com coeficiente 1/10. | | | | | | | | | | |

Fonte: Elaborado pelo autor.

A tabela 4.24 apresenta os tempos computacionais aproximados para a solução do método RK4 e FCB. Para o exemplo de placa infinita com trinca central (coeficiente de dispersão igual a 3/10), o tempo computacional obtido pela metodologia FCB foi no mínimo 508,51% (parâmetro a_0) mais eficiente quando comparado a solução de RK4.

Tabela 4.24 - Tempo de execução (em segundos) para 900000 ciclos para o exemplo de placa finita com trinca na aresta para o modelo de Forman.

| Parâmetro | | Tempo [s] | ρ [%] = RK4/FCB *100 |
|---|-----|-----------|---------------------------|
| C_f | RK4 | 339,683 | 5468,57 |
| | FCB | 6,100 | |
| m_f^{**} | RK4 | - | - |
| | FCB | - | |
| K_{Ic} | RK4 | 335,028 | 5769,44 |
| | FCB | 5,708 | |
| a_0 | RK4 | 442,632 | 508,51 |
| | FCB | 72,740 | |
| **Modelo instável para a variável m_f com coeficiente 1/10. | | | |

Fonte: Elaborado pelo autor.

Nas tabelas 4.25 e 4.26, são apresentados os desvios relativos para os estimadores dos momentos estatísticos de primeira e segunda ordem.

Tabela 4.25 - Desvio relativo do primeiro momento estatístico para o exemplo de placa finita com trinca na aresta – [%].

| Parâmetro | | Desvio Relativo para o Primeiro momento estatístico - Caso de dispersão 1/10 (%) | | | | | | | | |
|------------|---------------------|--|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| | | $1 \cdot 10^5$ Ciclos | $2 \cdot 10^5$ Ciclos | $3 \cdot 10^5$ Ciclos | $4 \cdot 10^5$ Ciclos | $5 \cdot 10^5$ Ciclos | $6 \cdot 10^5$ Ciclos | $7 \cdot 10^5$ Ciclos | $8 \cdot 10^5$ Ciclos | $9 \cdot 10^5$ Ciclos |
| C_f | \bar{a} (N) | 0,31 | 1,08 | 2,09 | 3,13 | 4,01 | 4,58 | 4,69* | 4,21 | 3,05 |
| | \underline{a} (N) | -0,01 | -0,13 | -0,44 | -1,03 | -1,96 | -3,30 | -5,08 | -7,36 | -10,1* |
| m_f^{**} | \bar{a} (N) | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| | \underline{a} (N) | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| K_{Ic} | \bar{a} (N) | 0,31 | 1,10 | 2,13 | 3,18 | 4,06 | 4,60 | 4,66* | 4,10 | 2,82 |

| | | | | | | | | | | |
|-------|---------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|
| | \underline{a} (N) | -0,01 | -0,14 | -0,46 | -1,07 | -2,04 | -3,43 | -5,28 | -7,65 | -10,5* |
| a_0 | \bar{a} (N) | 0,30 | 1,06 | 2,06 | 3,08 | 3,95 | 4,52 | 4,64* | 4,20 | 3,10 |
| | \underline{a} (N) | -0,01 | -0,13 | -0,44 | -1,01 | -1,93 | -3,23 | -4,98 | -7,20 | -9,93* |

* Maiores valores de desvios relativos para cada linha analisada.
** Modelo instável para a variável m_f com coeficiente 1/10.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 4.26 - Desvio relativo do segundo momento estatístico para o exemplo de placa infinita com trinca na aresta – [%].

| Parâmetro | | Desvio Relativo para o Segundo momento estatístico - Caso de dispersão 1/10 (%) | | | | | | | | |
|------------|---------------------|---|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| | | 1.10 ⁵ Ciclos | 2.10 ⁵ Ciclos | 3.10 ⁵ Ciclos | 4.10 ⁵ Ciclos | 5.10 ⁵ Ciclos | 6.10 ⁵ Ciclos | 7.10 ⁵ Ciclos | 8.10 ⁵ Ciclos | 9.10 ⁵ Ciclos |
| C_f | \bar{a} (N) | 0,62 | 2,18 | 4,25 | 6,39 | 8,23 | 9,41 | 9,59* | 8,52 | 5,97 |
| | \underline{a} (N) | -0,03 | -0,27 | -0,90 | -2,08 | -3,93 | -6,58 | -10,07 | -14,44 | -19,6* |
| m_f^{**} | \bar{a} (N) | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| | \underline{a} (N) | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| K_{Ic} | \bar{a} (N) | 0,63 | 2,23 | 4,33 | 6,49 | 8,32 | 9,44 | 9,51* | 8,25 | 5,43 |
| | \underline{a} (N) | -0,03 | -0,28 | -0,93 | -2,16 | -4,09 | -6,84 | -10,47 | -15,02 | -20,4* |
| a_0 | \bar{a} (N) | 0,59 | 2,06 | 3,97 | 5,93 | 7,57 | 8,55 | 8,59* | 7,44 | 4,92 |
| | \underline{a} (N) | -0,03 | -0,27 | -0,89 | -2,05 | -3,88 | -6,47 | -9,87 | -14,12 | -19,1* |

* Maiores valores de desvios relativos para cada linha analisada.
** Modelo instável para a variável m_f com coeficiente 1/10.

Fonte: Elaborado pelo autor.

O parâmetro (ρ), apresentado na equação (4.1), em companhia das funções de desvio relativo, apresentados nas tabelas 4.25 e 4.27, demonstram que a metodologia proposta possui um desempenho satisfatório para o exemplo clássico “Placa com largura infinita e trinca central”, com coeficiente de dispersão igual a 1/10.

Durante o processamento do parâmetro $m_{3.10}$. Verificou-se um comportamento instável obtido do valor esperado da solução numérica. Em alguns pontos a estimativa do primeiro e segundo momentos estatísticos para a evolução de trinca, apresenta fechamento do tamanho de trinca. Isso posto, observa-se que o modelo de propagação de Forman é demasiadamente instável com coeficiente de dispersão igual a 1/10 sobre o parâmetro m_f .

As estimativas dos momentos estatísticos (tabelas 4.27 e 4.28), e os devidos desvios relativos (tabelas 4.30 e 4.31), avaliados anteriormente, são apresentados a

| | | | | | | | | | | |
|-----------------|---------------------|------|------|------|------|------|-------|-------|-------|-------|
| | \underline{a} (N) | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| K_{Ic}^{****} | \bar{a} (N) | 2,72 | 3,48 | 4,62 | 6,28 | 8,63 | 11,88 | 16,24 | 21,99 | 29,43 |
| | a (N) | 2,65 | 3,16 | 3,83 | 4,71 | 5,94 | 7,73 | 10,52 | 11,54 | 27,24 |
| | \underline{a} (N) | 2,65 | 3,14 | 3,75 | 4,49 | 5,39 | 6,46 | 7,74 | 9,26 | 11,04 |
| a_0^{**} | \bar{a} (N) | 2,92 | 3,50 | 4,25 | 5,19 | 6,37 | 7,82 | 9,59 | 11,73 | 14,30 |
| | a (N) | 2,90 | 3,41 | 4,05 | 4,84 | 5,84 | 7,12 | 8,77 | 10,94 | 13,87 |
| | \underline{a} (N) | 2,90 | 3,40 | 4,00 | 4,72 | 5,55 | 6,53 | 7,67 | 8,98 | 10,49 |

* Maiores valores de desvios relativos para cada linha analisada.

** Valores alcançados com a^* ajustado para $a^* = 1,60a_0$

*** Modelo instável para a variável m_f com coeficiente 3/10.

**** Valores alcançados com a^* ajustado para $a^* = 1,95a_0$.

Fonte: Elaborado pelo autor.

A tabela 4.29 apresenta os tempos computacionais aproximados para a solução do método RK4 e FCB. Para o exemplo de placa infinita com trinca central (coeficiente de dispersão igual a 3/10), o tempo computacional obtido pela metodologia FCB foi no mínimo 471,55% (parâmetro a_0) mais eficiente quando comparado a solução de RK4.

Tabela 4.29 - Tempo de execução (em segundos) para 900000 ciclos para o exemplo de placa finita com trinca na aresta. Com coeficiente de dispersão igual a 3/10.

| Parâmetro | | Tempo [s] | ρ [%] |
|-----------------|-----|-----------|------------|
| C_f^{**} | RK4 | 382,430 | 5440,05 |
| | FCB | 6,903 | |
| m_f^{***} | RK4 | - | - |
| | FCB | - | |
| K_{Ic}^{****} | RK4 | 378,509 | 2043,67 |
| | FCB | 17,657 | |
| a_0^{**} | RK4 | 417,966 | 471,55 |
| | FCB | 73,128 | |

** Valores alcançados com a^* ajustado para $a^* = 1,60a_0$.

*** Modelo instável para a variável m_f com coeficiente 3/10.

**** Valores alcançados com a^* ajustado para $a^* = 1,95a_0$.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 4.30 - Desvio relativo do primeiro momento estatístico para o exemplo de placa finita com trinca na aresta. Com coeficiente de dispersão igual a 3/10.

| Parâmetro | | Desvio Relativo para o Primeiro momento estatístico - Caso de dispersão 3/10 (%) | | | | | | | | |
|-----------------|---------------------|--|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| | | 1.10 ⁵ Ciclos | 2.10 ⁵ Ciclos | 3.10 ⁵ Ciclos | 4.10 ⁵ Ciclos | 5.10 ⁵ Ciclos | 6.10 ⁵ Ciclos | 7.10 ⁵ Ciclos | 8.10 ⁵ Ciclos | 9.10 ⁵ Ciclos |
| C_f^{**} | \bar{a} (N) | 0,55 | 1,97 | 3,88 | 5,95 | 7,86 | 9,30 | 10,00* | 9,69 | 8,12 |
| | \underline{a} (N) | -0,02 | -0,17 | -0,56 | -1,32 | -2,54 | -4,32 | -6,74 | -9,90 | -13,88* |
| m_f^{***} | \bar{a} (N) | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| | \underline{a} (N) | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| K_{Ic}^{****} | \bar{a} (N) | 1,29 | 4,64 | 9,19 | 14,15 | 18,74 | 22,17 | 23,58* | 21,81 | 14,29 |
| | \underline{a} (N) | -0,03 | -0,26 | -0,88 | -2,09 | -4,07 | -7,04 | -11,28 | -17,24 | -26,28* |
| a_0^{**} | \bar{a} (N) | 0,47 | 1,66 | 3,26 | 4,98 | 6,56 | 7,76 | 8,39* | 8,25 | 7,18 |
| | \underline{a} (N) | -0,01 | -0,15 | -0,51 | -1,18 | -2,26 | -3,79 | -5,86 | -8,52 | -11,80* |

* Maiores valores de desvios relativos para cada linha analisada.
 ** Valores alcançados com a^* ajustado para $a^* = 1,60a_0$.
 *** Modelo instável para a variável m_f com coeficiente 3/10.
 **** Valores alcançados com a^* ajustado para $a^* = 1,95a_0$.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 4.31 - Desvio relativo do segundo momento estatístico para o exemplo de placa finita com trinca na aresta para o modelo de Forman- [%]. Com coeficiente de dispersão igual a 3/10.

| Parâmetro | | Desvio Relativo para o Segundo momento estatístico - Caso de dispersão 3/10 (%) | | | | | | | | |
|-----------------|---------------------|---|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| | | 1.10 ⁵ Ciclos | 2.10 ⁵ Ciclos | 3.10 ⁵ Ciclos | 4.10 ⁵ Ciclos | 5.10 ⁵ Ciclos | 6.10 ⁵ Ciclos | 7.10 ⁵ Ciclos | 8.10 ⁵ Ciclos | 9.10 ⁵ Ciclos |
| C_f^{**} | \bar{a} (N) | 1,12 | 4,08 | 8,21 | 12,82 | 17,14 | 20,37 | 21,68* | 20,26 | 15,41 |
| | \underline{a} (N) | -0,04 | -0,35 | -1,19 | -2,80 | -5,42 | -9,25 | -14,42 | -21,02 | -29,09* |
| m_f^{***} | \bar{a} (N) | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| | \underline{a} (N) | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| K_{Ic}^{****} | \bar{a} (N) | 2,67 | 9,97 | 20,70 | 33,22 | 45,22 | 53,58 | 54,33* | 42,37 | 8,02 |
| | \underline{a} (N) | -0,06 | -0,56 | -1,94 | -4,69 | -9,33 | -16,37 | -26,36 | -40,02 | -59,45* |
| a_0^{**} | \bar{a} (N) | 0,73 | 2,54 | 4,86 | 7,16 | 8,96 | 9,81* | 9,32 | 7,15 | 3,04 |
| | \underline{a} (N) | -0,04 | -0,34 | -1,12 | -2,59 | -4,91 | -8,20 | -12,53 | -17,94 | -24,41* |

* Maiores valores de desvios relativos para cada linha analisada.
 ** Valores alcançados com a^* ajustado para $a^* = 1,95a_0$.
 *** Modelo instável para a variável m_f com coeficiente 3/10.
 **** Valores alcançados com a^* ajustado para $a^* = 1,95a_0$.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Verificou-se um comportamento instável obtido do valor esperado da solução numérica para o parâmetro m_f . Em alguns pontos a estimativa do primeiro e segundo momentos estatísticos para a evolução de trinca, apresenta fechamento do tamanho de trinca. Isso posto, observa-se que o modelo de propagação de Forman é demasiadamente instável com coeficiente de dispersão igual a 3/10 acerca do parâmetro m_f .

O parâmetro (ρ), apresentado na equação (4.1), juntamente com a função desvio relativo, apresentados nas tabelas 4.30, 4.3, demonstram que a metodologia proposta possui um desempenho satisfatório para o exemplo clássico “Placa com largura finita e trinca na aresta”, com coeficiente de dispersão igual a 3/10.

4.4 SÍNTESE DOS RESULTADOS NÚMERICOS

Através de três problemas clássicos da literatura técnica. Designados como “Placa com largura infinita e trinca central”, “Placa com largura finita e trinca central” e “Placa com largura finita e trinca na aresta”. E dados de um material de aço ferrítico. Buscou-se realizar a quantificação da incerteza do fenômeno de propagação de trincas a voz do modelo de Forman. Onde os métodos de SMC e FCB foram utilizados conjuntamente para se estimar os momentos estatísticos do processo estocástico “tamanho de trinca”.

Para o exemplo clássico placa com largura infinita e trinca central com coeficiente de dispersão igual a 1/10. Constatou que para todos os parâmetros, as cotas enveloparam a solução numérica. Atendendo as desigualdades propostas na equação (2.17). Entretanto para o parâmetro m_f se fez necessário um ajuste do $a^* = 1,60a_0$. Com a análise dos desvios relativos observa-se uma variação máxima para o primeiro momento estatístico de -16,49% em relação ao parâmetro m_f . Através do confronto dos tempos computacionais, identifica-se que o tempo obtido pela metodologia FCB foi no mínimo 525,146% (parâmetro a_0) mais eficiente quando comparado a solução de RK4.

Considerando o exemplo “placa com largura infinita e trinca central”, com coeficiente de dispersão igual a 3/10. Constatou-se que o modelo de propagação de Forman é demasiadamente instável para o parâmetro m_f . Com a análise dos desvios relativos observa-se uma variação máxima para o primeiro momento estatístico de -8,41 em relação ao parâmetro K_{IC} . Através do confronto dos tempos computacionais, observa-se que o tempo obtido pela metodologia FCB foi no mínimo 481,22% (parâmetro a_0) mais eficiente quando comparado a solução de RK4.

Para o exemplo “placa com largura finita e trinca central” com coeficiente de dispersão igual a 1/10. Constatou que para todos os parâmetros, as cotas para os momentos estatísticos, enveloparam a solução numérica. Atendendo as desigualdades propostas na equação (2.17). Entretanto para o parâmetro m_f se fez necessário um ajuste do $a^* = 1,60a_0$. Com a análise dos desvios relativos observa-se uma variação máxima para o primeiro momento estatístico de -16,70 em relação ao parâmetro m_f . Através do confronto dos tempos computacionais, observa-

se que o tempo computacional obtido pela metodologia FCB foi no mínimo 396,92% (parâmetro a_0) mais eficiente quando comparado a solução de RK4.

Considerando o exemplo “placa com largura finita e trinca central”, com coeficiente de dispersão igual a 3/10. Constatou que o modelo de propagação de Forman é demasiadamente instável para o parâmetro m_f . Com a análise dos desvios relativos observa-se uma variação máxima para o primeiro momento estatístico de -8,42 em relação ao parâmetro K_{IC} . Através do confronto dos tempos computacionais, observa-se que o tempo obtido pela metodologia FCB foi no mínimo 378,09% (parâmetro a_0) mais eficiente quando comparado a solução de RK4.

Para o exemplo “placa com largura finita e trinca na aresta”, com coeficiente de dispersão igual a 1/10. Constatou-se que o modelo de propagação de Forman é demasiadamente instável para o parâmetro m_f . Com a análise dos desvios relativos observa-se uma variação máxima para o primeiro momento estatístico de -10,5% em relação ao parâmetro K_{IC} . Através do confronto dos tempos computacionais, observa-se que o tempo obtido pela metodologia FCB foi no mínimo 508,51% (parâmetro a_0) mais eficiente quando comparado a solução de RK4.

Considerando o exemplo “placa com largura finita e trinca na aresta”, com coeficiente de dispersão igual a 3/10. Constatou-se que o modelo de propagação de Forman é demasiadamente instável para o parâmetro m_f . Já para os parâmetros a_0 , K_{IC} e C_f as cotas enveloparam a solução numérica. Atendendo as desigualdades propostas na equação (2.17). Entretanto se fez necessário os seguintes ajustes $a^* = 1,60a_0$ (parâmetros a_0 e C_f) e $a^* = 1,95a_0$ (parâmetro K_{IC}). Com a análise dos desvios relativos observa-se uma variação máxima para o primeiro momento estatístico de -26,28 em relação ao parâmetro K_{IC} . Através do confronto dos tempos computacionais, observa-se que o tempo computacional obtido pela metodologia FCB foi no mínimo 471,55% (parâmetro a_0) mais eficiente quando comparado a solução de RK4.

4.5 DISCUSSÕES ACERCA DO MATERIAL ESCOLHIDO

Na Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE), a tenacidade à fratura é definida como sendo a capacidade do material resistir à propagação de uma trinca, mensurada pelo trabalho necessário para fazê-la crescer. Assim o fator de intensidade K_I , descreve a singularidade do campo tensão na frente da trinca. A fratura ocorre quando $K_I > K_{IC}$ ou $K_I > K_C$, sendo K_{IC} a tenacidade da fratura para um Estado plano de Deformações (EPD) e K_C a tenacidade para qualquer outra situação.

Respeitando as limitações da mecânica da fratura linear elástica (MFLE), a fratura de um material deve se processar dentro do campo elástico-linear. Caracterizando a fratura por uma iniciação instável, e de fácil definição da curva carga-deslocamento.

Contudo caso ocorra uma violação do comportamento elástico-linear, o início da fratura é caracterizado considerando um desvio de 4 a 5% a contar da parte elástica sobre a curva (ASTM, 1997). Esta transgressão da mecânica da fratura linear elástica (MFLE) pode ser originada por uma plastificação na frente da trinca. Considerando o Estado Plano de Deformação (EPD), o valor numérico do K_{IC} somente é válido na condição que o raio da zona plástica antes da fratura não exceda a 2% da espessura do material.

Entretanto evidencia-se nos trabalhos de Egan e Robison (1978), que independentemente de o raio de plastificação seja igual a espessura do corpo, não ocorrem deformações proporcionais a zona plástica, dado que a região continua restrita e envolta de material com comportamento elástico. Assim desde que a plastificação seja contida os parâmetros elásticos para um material com comportamento dúctil, são determináveis.

Portando observa-se a importância do controle dos parâmetros geométricos e físicos do material. Assim Egan (1973) demonstra um critério que amplia o campo de aplicação da Mecânica da fratura linear elástica (MFLE):

$$B > \left(\frac{K_{IC}}{\sigma_E} \right)^2 \quad (4.6)$$

A norma E 399-72 (ASTM, 1997) estabelece que o cálculo da tenacidade da fratura, em relação a espessura B da estrutura, tem sua validade restringida pela equação 4.7

$$B \geq 2,5 \left(\frac{K_{IC}}{\sigma_E} \right)^2 \quad (4.7)$$

Neste trabalho de dissertação de mestrado foi utilizado um material de aço ferrítico, com altíssima tenacidade a fratura e não foi informado a espessura B para o montante dos cálculos que determinam a validade da proposta, segundo a equação 4.7, portanto sugere-se que estes fatores são em parte responsáveis pela instabilidade gerada pelo parâmetro m_f em inúmeros exemplos.

5 CONCLUSÃO

Este documento consiste de uma dissertação de mestrado para o programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica e Materiais (PPGEM) da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR) campus Curitiba. Área de concentração da mecânica dos sólidos computacional. Com o tema de pesquisa, Quantificação da incerteza do modelo de Forman via metodologia “*Fast Crack Bounds*”, sob a orientação do Prof. Dr. Claudio R. Ávila da S. Jr.

O trabalho teve como objetivo realizar a quantificação da incerteza do fenômeno de propagação de trincas a voz do modelo de Forman. A modelagem da incerteza se fez através de variáveis aleatórias. A partir disso, utilizou-se conjuntamente os métodos de simulação de Monte Carlo e “*Fast Crack Bounds*” para se estimar os momentos estatísticos do processo estocástico “tamanho de trinca”. Avaliou-se o desempenho da proposta a partir da combinação dos métodos de SMC-FCB com SMC-RK4.

Com o estudo pôde-se validar a eficiência da metodologia FCB para a análise do fenômeno “tamanho de trinca”. Em razão da metodologia apresentar tempos computacionais de no mínimo 378,09% (parâmetro a3.10, exemplo placa finita com trinca central) mais eficiente que a solução RK4. E desvios relativos de no máximo 26,28% (parâmetro K3.10, exemplo placa finita com trinca na aresta). Demonstrando a aplicabilidade e eficácia da metodologia “*Fast Crack Bounds*”.

Os exemplos apresentados nesta dissertação de mestrado nos aproximam da conclusão de que não é possível uma aplicação generalizada da Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE). Visto que mesmo utilizando fatores de correção para a zona plástica, a fratura na maioria dos metais estruturais, possui uma plasticidade maior do que a teoria permite (ARROYO, 1979).

5.1 TRABALHOS FUTUROS

Os conhecimentos obtidos através do desenvolvimento deste projeto de dissertação podem ser consideravelmente ampliados através das seguintes recomendações de trabalhos futuros:

- (i) O valor numérico do parâmetro a^* , foi definido para cada exemplo de forma empírica, ou seja, no intervalo analisado de números de ciclos, N , foi obtido

o menor valor de a^* , o qual não violasse a solução numérica aproximada definida pelo RK4. Assim, sugere-se que esse parâmetro seja obtido por técnicas de otimização. Através do intervalo analisado de números de ciclos, N , definisse o menor valor de a^* .

- (ii) Neste trabalho foi abordado o efeito de um carregamento com amplitude de tensão constante, portanto recomenda-se aplicar a metodologia FCB utilizando-se de carregamento com amplitude de tensão variável.
- (iii) Sugere-se aplicar a metodologia "*Fast Crack Bounds*" a outros materiais, alterando as relações entre tenacidade e tensão de escoamento, e portando produzindo raios plásticos diferentes.
- (iv) Por fim, aplicar a quantificação de incertezas para outros modelos de propagação de trinca, simultaneamente com a metodologia "*Fast Crack Bounds*".

REFERÊNCIAS

ALMEN, John O.; BLACK, Paul Howard. **Residual stresses and fatigue in metals**. 1. ed. New York: McGraw-Hill, 1963.

AMERICAN SOCIETY FOR TESTING AND MATERIALS. **E 823-96**: Standard Terminology Relating to Fatigue and Fracture testing., 2000.

AMERICAN SOCIETY FOR TESTING AND MATERIALS. **E 399-90**: Standard method of test for plane strain fracture toughness of metallic materials.,1997.

AMERICAN SOCIETY FOR METALS. ASM Handbook. **Fatigue and Fracture**. Vol. 19. Usa: ASM international, 1998.

ANDERSON, T. L. **Fracture mechanics: Fundamentals and Applications**. 3. ed. New York: CRC, 2005.

ARROYO, I. K. **Descontinuidades geométricas e fratura dúctil em aço estrutural**. 1979. Dissertação (Mestrado em ciências), Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis ,1979.

ASCHER, U. M.; PETZOLD, L. R. **Computer methods for ordinary differential equations and differential-algebraic equations**. 1. ed. Philadelphia: SIAM, 1998.

ÁVILA, S. Jr. C. R.; SANTOS, Rodrigo Villaca. Bounds for the Propagation Model of Crack Forman. **International journal of sciences: basic and applied research**. v. 22, n. 2, p. 219-231, 2015.

ÁVILA, S. Jr. C. R.; SANTOS, Rodrigo Villaca; BECK, A. T. Analytical Bounds for Efficient Crack Growth Computation. **Applied mathematical modelling**, .v. 40, p. 2312-2321, 2016.

BANNANTINE, J. A.; COMER, J.J.; HANDROCK, J. L. **Fundamentals of Metal Fatigue Analysis**. Prentice Hall, 1989.

BARSOM, J. M. Fatigue crack growth under variable amplitude loading in various bridge steels. Fatigue Crack Growth under Spectrum Loads. **American Society for Testing and Materials**. v. 595, p. 217-235. 1976.

BARSOM J. M.; ROLF S. T. **Fracture and fatigue control in structures: Applications of fracture mechanics**. 3 ed. Philadelphia: ASTM, 1999.

BASQUIN, O. H. The Exponential Law of Endurance Tests. **American Society for Testing and Materials Proceedings**, Vol. 10, pp. 625-630, 1910.

BAUSCHINGER, J. On the Change of the Position of the Elastic Limit of Iron and Steel Under Cyclic Variations of Stress. **Mitt. Mech.-Tech. Lab.**, Munich, Vol. 13, No. I, 1886.

BOYCE, William E.; DIPRIMA, Richard C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valor de contorno**. 8 ed. LTC, 2006.

BRANCO, C., FERNANDES, A., CASTRO, P., **Fadiga de Estruturas Soldadas**, Fundação Calouste Gulbenkian –Lisboa, 1999.

BRANDÃO, Rodrigo P. **Projeto Mecânico de uma Máquina de Ensaio de Fadiga por Flexão Rotativa**. Monografia (Bacharelado- Engenharia Mecânica). Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro. 2013. 76p.

BROEK, D; SCHIJVE, J. The influence of the Mean Stress on Propagation of Fatigue Cracks in Aluminum Alloy Sheet. **Aircraft Engineering and Aerospace Technology**. Vol. 39 Issue: 3, pp.10-18, 1967.

CALLISTER, W. D., **Ciência e Engenharia de Materiais - Uma Introdução**, Utah – USA, 1999.

CARDOSO, Douglas; AMARAL, Hudson F. **O Uso da Simulação de Monte Carlo na Elaboração do Fluxo de Caixa Empresarial: Uma Proposta para Quantificação das Incertezas Ambientais**. Minas Gerais, UFMG/FACIG, 2000.

CASTILLO, E.; FERNÁNDEZ-CANTELI, A.; CASTILLO, C; MOZOS, C.M., A new probabilistic model for crack propagation under fatigue loads and its connection with Wöhler fields. **Engineering Fracture Mechanics**. v. 32, p. 744-753. 2010.

CASTRO, J. T. P.; MEGGIOLARO, M. A. **Fadiga – Técnicas e Práticas de Dimensionamento Estrutural sob Cargas Reais de Serviço**, 1 ed. Create Space, 2009.

CAVALLINI, M.; IACOVIELLO, F. Fatigue models for Al alloys. **International Journal of Fatigue**. v. 13, p. 442-446. 1991.

COLEMAN BD. Statistics and time dependence of mechanical breakdown in fibers. **J Appl Phys** 1958;29:968–83.

COLLIPRIEST, J. E. An experimentalist's view of the surface flaw problem. **American Society for Testing and Materials**. p. 43-62. 1972.

CUI, W. A state-of-the-art review on fatigue life prediction methods for metal structures. **Journal of Marine Science and Technology**. v. 7, p. 43-56. 2002.

DINIZ, A.C.G.C. **Qualidade nos Laboratórios Universitários, presente e futuro**. Banas Qualidade, São Paulo - SP, v. 208, p. 84 - 85, 2009.

DOWLING, N. E. **Mean Stress Effects in Stress-life and Strain-life Fatigue**. SAE Technical Paper 2004-01-2227, 2004.

EGAN, G.R., Compatibility on linear elastic (K_{Ic}) and general yielding (COD) fracture mechanics. **Engineering Fracture Mechanics**, v.5, pp. 167-183, 1973

EGAN, G.R., ROBINSON, J.N., The application of elastic-plastic fracture mechanics parameters in fracture safe design. **Nuclear Engineering and Design**. v.8, pp. 133-15, 1978.

ELBER, W. Fatigue crack closure under cyclic tension. **Engineering Fracture Mechanics**. v. 2, p. 37-45. 1970.

ELISHAKOFF, Isaac. **PROBABILISTIC THEORY OF STRUCTURES**. 2nd ed. Mineola, New York, Dover, 1999.

ERDOGAN F, RATWANI M. Fatigue and fracture of cylindrical shells containing a circumferential crack. **Engineering Fracture Mechanics**, vol. 6; 1970.

EWING, J. A.; HUMPHREY, J. C. Fracture of metals under repeated alternations of stress. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London**. v, 200, p. 241–253. 1903.

ELBER, W. Fatigue Crack Closure under Cyclic Tension, **Engineering Fracture Mechanics**, Vol. 2, 1970, p. 37.

FATEC-ENGINEERING, Luftfahrttechnisches Handbuch, Handbuch Struktur Berechnung (HSB), Rissfortschrittsgleichung mit Berücksichtigung von Temperatur, R-Verhältnis, Threshold-Bereich und Bereich instabilen Risswachstums; 1998.

FKM-Guideline. Fracture mechanics proof of strength for engineering components. Germany: Frankfurt/Main; 2004.

FORMAN, R. G. Study of fatigue crack initiation from flaws using fracture mechanics theory. **Engineering Fracture Mechanics**. v. 4, p. 333-345. 1972.

GASSNER, E. Festigkeitsversuche mit Wiederholter Beanspruchung im Flugzeugbau, Deutsche Luftwacht, Ausg. Luftwissen, Vol. 6, 1939, p. 43 (in German).

GHONEM, H; DORE, S. Experimental Study of the Constant-Probability Crack Growth Curves Under Constant Amplitude Loading, **Engineering fracture mechanics**. v. 27, n. 1, p. 1-25, 1987.

GOUGH, H. J. **The Fatigue of Metals**, Scott, Greenwood and Son, London, 1924.

GRIFFITH, A.A. The phenomena of rupture and flow in solids. **Philosophical Transactions of the Royal Society A**. v. 221, p. 163-198. 1920.

GUIMARÃES, S. R.. **Desenvolvimento e aplicação de uma metodologia para previsão de vida de eixos de mandris de bobinadeiras de laminação a frio submetidas a danos acumulados por fadiga**. Dissertação em Engenharia Mecânica. Belo Horizonte: UFMG, 2009.

HAIGH, B. P. The Relative Safety of Mild and High-Tensile Alloy Steels Under Alternating and Pulsating Stresses. **The Institute automobile engineers.**, Vol. 24, 1929-1930, p. 320.

HE, Wentao; LIU, Jingxi and XIE, De. Probabilistic life assessment on fatigue crack growth in mixed-mode by coupling of Kriging model and finite element analysis. **Engineering Fracture Mechanics**. v.139, p. 56–77. 2015.

HUDSON, C. M.; SCARDINA, J. T. Effect of stress ratio on fatigue-crack growth in 7075-T6 aluminum-alloy sheet. **Engineering Fracture Mechanics**. v. 1, p. 429-446. 1969.

HAHN, G.T., ROSENFELD, A.R., Local yielding and extension of a crack under plane stress. **Acta Metallurgica** v. 13, pp. 293-306. 1975

IRWIN, G. R. Analysis of stresses and strains near the end of crack traversing a plate. **Journal of Applied Mechanics**. v. 24, p. 361-364. 1957.

KIUREGHIAN, A. D., DITLEVSEN, O. "Aleatory or epistemic? Does it matter?" **Structural Safety**, v. 31, pp. 105–112, 2009.

KLESNIL M, LUKAS P. Effect of stress cycle asymmetry on fatigue crack growth. **Materials Science and Engineering**, vol. 9; 1972.

KOBAYASHI, Shigeaki; NAKAMURA, Manabu; TSUREKAWA, Sadahiro; WATANABE, Tadao. Effect of grain boundary microstructure on fatigue crack propagation in austenitic stainless steel. **Journal of Materials Science**, v. 46, p. 4254–4260, 2011.

KOHOUT J. A new function describing fatigue crack growth curves. **International Journal of Fatigue**. v. 21, issue 8. pg 813–821. 1999.

KUMAR, A; MURTHY, R. C; IYER, N. R. Enhanced model for describing total fatigue rate curve considering stress ratio effects. **Advances in Structural Engineering**. v. 17, p. 1011-1028. 2014.

LIN Y.K.; YANG J.N. A stochastic theory of fatigue crack propagation. **The American Institute of Aeronautics and Astronautics** ;23:117–24. 1985.

LOESCH, Cláudio; HEIN, Nelson. **Pesquisa Operacional – Fundamentos e Modelos**. São Paulo, Editora Saraiva, 2009.

LOPEZ, Rafael H.; ÁVILA, S. Jr. C. R. A non-intrusive methodology for the representation of crack growth stochastic processes. **Mechanics research communications**. v. 64, p. 23-28, 2015.

MACHADO Jr., Waldir Mariano. **Aplicação da metodologia “fast bounds crack” para a estimativa eficiente da evolução do tamanho de trinca**. 2015. 65 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica). Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2015.

MAIOLI, Gabrielle. **Métodos Numéricos para Equações Diferenciais Ordinárias**. 2015. 67 F. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, 2015.

McADAM, D. J. Corrosion Fatigue of Metals, **Trans. Am. Soc. Steel Treating**, Vol. 11, 1927, p. 355.

MCEVILY, A. J; GROEGER, J. On the threshold for fatigue crack growth. **In: ICF4, Waterloo (Canada), 1977.**

MEHRZADI, M; TAHERI, F. The influence of negative and positive stress ratios on crack growth rate in AM60B magnesium alloy. **Materials Science and Engineering A**, v, 545, p. 68-77. 2012.

MEYERS, M.A.;CHAWLA, K.K. **Princípios de metalurgia mecânica**. São Paulo: Ed.Edgard Blucher, 1982. 505p.

MINER, M. A., Cumulative Damage in Fatigue. **Journal of Applied Mechanics**, Vol. 67, 1945, p. A159.

MOORE, H. F.; KOMMERS, J. B **The Fatigue of Metals**, McGraw-Hill Book Co., New York, 1927.

NEUBER, H. KERBSPANNUNGSLEHRE, Springer-Verlag, **Theory of notch stresses: principles for exact stress calculation**, J. W. Edwards, Ann Arbor, MI, 1946.

NEWMAN Jr, J.C. The merging of fatigue and fracture mechanics concepts: a historical perspective. **Progress in Aerospace Sciences**, v.34, issues 5-6, p.347-390, July. 1998.

NORTON, Robert L. **Projeto de Máquinas**. Porto Alegre. 2 ed. 2004. 931 p. ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 6023 (NB 66): Informação e documentação: referências de elaboração. Rio de Janeiro, 2002.

PALMGREN, A. "Die Lebensdauer von Kugellagern," ZDVDI, Vol. 68, No. 14,1924, p. 339 (in German).

PARIS, P.C.; ERDOGAN, F. A critical analysis of crack propagation laws. **Journal of fluids engineering**. v. 85, p. 528-533. 1963.

PARIS, P. C.; GOMEZ, M. P.; ANDERSON, W. E. A Rational Analytical Theory of Fatigue," **Trend Eng.**, Vol. 13, No. 9, 1961, p. 9.

PARIS, P. C. Testing for Very Slow Growth of Fatigue Cracks. **Closed Loop**, Vol. 2, No. 5, 1970.

PETERSON, R. E. Discussion of a Century Ago Concerning the Nature of Fatigue, and Review of Some of the Subsequent Researches Concerning the Mechanism of Fatigue. **ASTM Bull.**, No. 164, 1950, p. 50.

PETERSON, R. E. "Notch Sensitivity," **Metal Fatigue**, G. Sincs and J. L. Waisman, eds., McGraw-Hill Book Co., New York, 1959, p. 293.

PETERSON, R. E. Stress Concentration Design Factors, John Wiley and Sons, New York, 1953.

PETERSON, R. E. Stress Concentration Factors, John Wiley and Sons, New York, 1974.

PRIDDLE, E. K. High cycle fatigue crack propagation under random and constant amplitude loadings. **International journal of pressure vessels and piping**, v. 4, n. 2, p. 89-117, 1976.

ROLFE, S. T.; BARSOM J. M. **Fracture and fatigue control in structures. Englewood Cliffs**, New Jersey: Prentice-Hall. 1987.

ROSA, Edison. **Análise de resistência mecânica de peças e componentes estruturais: Mecânica da Fratura e Fadiga**. Florianópolis, SC: GRANTE, 2002.

SANTOS, Rodrigo Villaca. **Desenvolvimento de uma nova metodologia estabelecendo cotas para a evolução de trincas para modelos de carregamento com amplitude de tensão constante**. 2015. 116 f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica). Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2015.

SANKARARAMAN, Shankar; LING, You; MAHADEVAN, Sankaran. Uncertainty quantification and model validation of fatigue crack growth prediction. **Engineering Fracture Mechanics**. V. 78, p. 1487-1504. 2011.

SAMPAIO R.; CATALDO E. Comparing Two Strategies to Model Uncertainties in Structural Dynamics. **Shock and Vibration** 17 (2), pp. 171-186, 2010.

SCHIJVE, J. **Fatigue of structures and materials**. 2 ed. Springer, 2009.

SHIGLEY, J. E., **Projeto de Engenharia Mecânica**, Bookman, Michigan – USA, 2005.

SURESH, S., **Fatigue of Materials**, Cambridge – United Kingdom, 1998.

ULAM J. VON NEUMANN, R. D. R. S. **Statistical methods in neutron diffusion**. LAMS-551, April 9 1947.

VAN VLACK, L. H., **Princípios de Ciência dos Materiais**, Michigan – USA, 1964.

VUOLO, José Henrique. **Fundamentos da teoria de erros**. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

VIRKLER DA, HILLBERRY BM, GOEL PK. The statistical nature of fatigue crack propagation. AFFDL-TR-43-78, **Air Force Flight Dynamics Laboratory**; April 1978.

WALKER, K. The effect of stress ratio during crack propagation and fatigue for 2024-T3 and 7076-T6 aluminum. Effect of environment and complex load history on fatigue life. **American society for testing and materials**. p. 1–14. 1970.

WANG, Wei; CHENG, Thomas. Fatigue Crack Growth Rate of Metal by Plastic Energy Damage Accumulation Theory. **Journal of engineering mechanics**, p. 776-795, 1994.

WESTERGAARD, H. M. Bearing pressures and cracks. **Journal of Applied Mechanics**. v. 6, p. 49-53. 1939.

WEIBULL, W. A Statistical Distribution Function of Wide Applicability. **Journal of Applied Mechanics.**, Sept. 1951, p. 293.

YUEN A. et al. Correlations between fracture surface appearance and fracture mechanics parameters for stage II fatigue crack propagation in Ti-6Al-4V. **Metallurgical and Materials Transactions B.** v. 5, p. 1833-1842. 1974.

APÊNDICE

Algoritmo para quantificação das incertezas do modelo de Forman, via metodologia “Fast Crack Bounds”

```

clc
clear all
close all
format long
syms x

%%% Dados de entrada (sistema
internacional)%%%

% parâmetro (m/ciclo) %
mu_C=2e-9;
% parâmetro (adimensional)%
mu_m=2.9;
% tamanho de trinca inicial
(m) %
mu_a0=0.0015;
% [MPa.m1/2] %
mu_kc=250;
C=mu_C;
m=mu_m;
a0=mu_a0;
kc=mu_kc;
% (MPa) %
delta_sigma=70;
R=0;
% a estrela %
a_c=1.4*a0;
% número de ciclo inicial %
N0=0;
% número de ciclo final %
N1=9e5;
% tamanho do passo %
delta_N=500;
% número de passos %
n_passos=(N1-N0)/delta_N
% largura da placa (m) %
b=0.1;
% número de amostras %
Ns=1e4;
%DESVIO PADRÃO - Coeficiente
de 1/10 %
sigma_C=mu_C*(1/10);
sigma_m=mu_m*(1/10);

sigma_a0=mu_a0*(1/10);
sigma_kc=mu_kc*(1/10);

% Distribuição Uniforme %
aux_C=(sqrt(3)*sigma_C)*unifrnd(-1,1,Ns,1);
format long

%%% RK4 %%%
tic
for i=1:1:Ns
    i
    C=mu_C+aux_C(i);
    j=1;
    a(i,j)=a0;
        for
j=1:1:n_passos;
            x=a(i,j);
            g_aux=1;
            f_aux=real((C*(sqrt(pi*x)*g_a
ux*delta_sigma)^m)/(((1-
R)*kc)-(
(sqrt(pi*x)*g_aux*delta_sigma
))));
            K1=delta_N*f_aux;
            x=a(i,j)+(1/2)*K1;
            g_aux=1;
            f_aux=real((C*(sqrt(pi*x)*g_a
ux*delta_sigma)^m)/(((1-
R)*kc)-(
(sqrt(pi*x)*g_aux*delta_sigma
))));
            K2=delta_N*f_aux;
            x=a(i,j)+(1/2)*K2;
            g_aux=1;
            f_aux=real((C*(sqrt(pi*x)*g_a
ux*delta_sigma)^m)/(((1-
R)*kc)-(
(sqrt(pi*x)*g_aux*delta_sigma
))));
            K3=delta_N*f_aux;
            x=a(i,j)+K3;
            g_aux=1;

```

```

f_aux=real((C*(sqrt(pi*x)*g_aux*delta_sigma)^m)/((1-R)*kc)-(sqrt(pi*x)*g_aux*delta_sigma));
K4=delta_N*f_aux;
a(i,j+1)=a(i,j)+(1/6)*(K1+2*(K2+K3)+K4);
    end
end
tempo_RK4=toc
display 'Fim RK4'

% Valor esperado - primeiro momento estatístico %
mu_rk4=mean(a);

%%% Variância %%%
var_rk4=var(a);

%%% COTAS %%%
syms x
format long
N=N0:delta_N:N1;
f=1+0*x;
f_deriv=diff(f);
deriv_a_relacao_N_em_a0 = zeros(1,Ns);
deriv_2_a_relacao_N_em_a0 = zeros(1,Ns);
deriv_2_a_relacao_N_em_aestre = zeros(1,Ns);
f_a0 = zeros(1,Ns);
deriv_f_a0 = zeros(1,Ns);
delta_k_a0 = zeros(1,Ns);
a_inf = zeros(length(N),Ns);
a_sup = zeros(length(N),Ns);
tic
% f com valor de a_c%
f_a_c=eval(subs(f,x,a_c));
% deriv primeira para usar na cota superior %
deriv_f_a_c=eval(subs(diff(f),x,a_c));
% delta_k_a* para usar na cota superior %
delta_k_a_c=eval(subs(delta_sigma*sqrt(pi*x)*f,x,a_c));
f_a0_cte=eval(subs(f,x,a0));
deriv_f_a0_cte=eval(subs(diff(f),x,a0));

delta_k_a0_cte=eval(subs(delta_sigma*sqrt(pi*x)*f,x,a0));
for j=1:Ns
    f_a0(j)=f_a0_cte;
    deriv_f_a0(j)=deriv_f_a0_cte;
    delta_k_a0(j)=delta_k_a0_cte;
end
for j=1:Ns
    C=mu_C+aux_C(j);
    deriv_a_relacao_N_em_a0(j)=real(C*(delta_k_a0(j))^m/((1-R)*kc-(delta_k_a0(j))));
    deriv_2_a_relacao_N_em_a0(j)=real(((C*(delta_k_a0(j))^m)/((1-R)*kc... - (delta_k_a0(j))))^2*(m+1/(((1-R)*kc/(delta_k_a0(j))-1))*... (deriv_f_a0(j)/f_a0(j)+1/(2*a0))));
    deriv_2_a_relacao_N_em_aestre = real(((C*(delta_k_a_c)^m)/((1-R)*kc... - (delta_k_a_c))^2*(m+1/(((1-R)*kc/(delta_k_a_c)-1))*... (deriv_f_a_c/f_a_c+1/(2*a_c))));
end
for i=1:(length(N))
    for j=1:Ns
        a_inf(i,j)=a0+(N(i)-N0)*deriv_a_relacao_N_em_a0(j)+(1/2)*deriv_2_a_relacao_N_em_a0(j)*(N(i)-N0)^2;
        a_sup(i,j)=a0+(N(i)-N0)*deriv_a_relacao_N_em_a0(j)+(1/2)*deriv_2_a_relacao_N_em_aestre(j)*(N(i)-N0)^2;
    end
end
tempo_cotas=toc
display 'Fim Cotas'
a_inf=a_inf.';
a_sup=a_sup.';

% Momentos estatísticos %
mu_inf=mean(a_inf);
mu_sup=mean(a_sup);
var_inf=var(a_inf);

```

```

var_sup=var(a_sup);
for i=1:1:(n_passos+1);
lambda_rk4(i)=
var_rk4(i)+(Ns/(Ns-
1))*(mu_rk4(i))^2;
%estimador do momento
estatístico de segunda ordem
lambda_inf(i)=
var_inf(i)+(Ns/(Ns-
1))*(mu_inf(i))^2;
lambda_sup(i)=
var_sup(i)+(Ns/(Ns-
1))*(mu_sup(i))^2; %estimador
do momento estatístico de
segunda ordem
end

% Lei de Evolução de trincas
for j=1:1:(n_passos+1);
g_rk4=1; %trinca placa
infinita para a0
delta_k_rk4(j)=
sqrt(pi*mu_rk4(j))*g_rk4*delt
a_sigma;
end
for j=1:1:(n_passos+1);
g_inf=1;
delta_k_inf(j)=
sqrt(pi*mu_inf(j))*g_inf*delt
a_sigma;
end
for j=1:1:(n_passos+1);
g_sup=1; %trinca placa
infinita para a_c
delta_k_sup(j)=
sqrt(pi*mu_sup(j))*g_sup*delt
a_sigma;
end
for i=1:1:(n_passos+1);
f_rk4(i)=C*(delta_k_rk4(i))^m
/((1-R)*kc-(delta_k_rk4(i)));
end
for i=1:1:(n_passos+1);
f_inf(i)=C*(delta_k_inf(i))^m
/((1-R)*kc-(delta_k_inf(i)));
end
for i=1:1:(n_passos+1);
f_sup(i)=C*(delta_k_sup(i))^m
/((1-R)*kc-(delta_k_sup(i)));
end

%%% Erro Relativo %%%
erro_relativo_mu_sup =
zeros(1,length(N));
erro_relativo_mu_inf =
zeros(1,length(N));
erro_relativo_lambda_sup =
zeros(1,length(N));
erro_relativo_lambda_inf =
zeros(1,length(N));
erro_relativo_da_dN_sup =
zeros(1,length(N));
erro_relativo_da_dN_inf =
zeros(1,length(N));
for i=1:length(N)
erro_relativo_mu_sup(i)=100*(
mu_sup(i)-
mu_rk4(i))/mu_rk4(i);
erro_relativo_mu_inf(i)=100*(
mu_inf(i)-
mu_rk4(i))/mu_rk4(i);
erro_relativo_da_dN_sup(i)=10
0*(f_sup(i)-
f_rk4(i))/f_rk4(i);
erro_relativo_da_dN_inf(i)=10
0*(f_inf(i)-
f_rk4(i))/f_rk4(i);
erro_relativo_lambda_sup
(i)=
100*(lambda_sup(i)-
lambda_rk4(i))/(lambda_rk4(i)
);
erro_relativo_lambda_inf
(i)=
100*(lambda_inf(i)-
lambda_rk4(i))/(lambda_rk4(i)
);
end

% Médias - Aritiméticas e
Geométricas %
format long
%%% Valor Esperado %%%
media_aritmetica =
zeros(1,length(N));
media_geometrica =
zeros(1,length(N));
erro_media_aritmetica =
zeros(1,length(N));
erro_media_geometrica =
zeros(1,length(N));
for i=1:length(N)
media_aritmetica(i)=(mu_sup
(i)+ mu_inf(i))/2);

```



```

media_geometrica(i)=(mu_sup
(i)*mu_inf (i))^(0.5));
end
for i=1:length(N)
erro_media_aritmetica(i)=100*
(media_aritmetica(i)-
mu_rk4(i))/mu_rk4(i);
erro_media_geometrica(i)=100*
(media_geometrica(i)-
mu_rk4(i))/mu_rk4(i);
end

%%% Segundo momento %%%
media_aritmetica_lambda =
zeros(1,length(N));
media_geometrica_lambda =
zeros(1,length(N));
erro_media_aritmetica_lambda
= zeros(1,length(N));
erro_media_geometrica_lambda
= zeros(1,length(N));
for i=1:length(N)
media_aritmetica_lambda(i)=(
lambda_sup (i)+
lambda_inf(i))/2);
media_geometrica_lambda(i)=(
lambda_sup (i)*lambda_inf
(i))^(0.5));
end
for i=1:length(N)
erro_media_aritmetica_lambda(
i)=100*(media_aritmetica_lambda
da(i)-
lambda_rk4(i))/lambda_rk4(i);
erro_media_geometrica_lambda(
i)=100*(media_geometrica_lambda
da(i)-
lambda_rk4(i))/lambda_rk4(i);
end

%%% VALORES A SEREM PLOTADOS
NA LINHA DE COMANDO %%%

a_1=mu_rk4(200) % medias
solução numérica
asup_1=mu_sup(200) %medias
cota superior
ainf_1=mu_inf(200) %medias
cota inferior

lambda_1=lambda_rk4(200) %
segundo momento solução
numérica
lambdasup_1=lambda_sup(200)
%segundo momento cota
superior
lambdainf_1=lambda_inf(200) %
segundo momento cota inferior

desvio_mu_sup_1=erro_relativo
_mu_sup(200) %desvio primeiro
momento cota superior
desvio_mu_inf_1=erro_relativo
_mu_inf(200) %desvio primeiro
momento cota inferior
desvio_lambda_sup_1=erro_rela
tivo_lambda_sup(200) %desvio
segundo momento cota superior

desvio_lambda_inf_1=erro_rela
tivo_lambda_inf(200)
desvio_lambda_inf_2=erro_rela
tivo_lambda_inf(400) %desvio
primeiro momento cota
inferior

desvio_media_art_1=erro_media
_aritmetica(200) %valores das
medias

desvio_media_art_lambda_1=err
o_media_aritmetica_lambda(200
) %valores das medias

%%% Gráficos %%%
figure(1),plot(N,mu_sup, 'r--
',N, mu_rk4,'b', N,mu_inf,'-
. ');
xlabel('Número de ciclos
[N]');
ylabel('$\hat{\mu}_{\underline{a}}$
');
set(h,'interpreter','latex');
grid on

```