

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO ACADÊMICO DA ELÉTRICA (DAELE)
CURSO DE ENGENHARIA DE CONTROLE E AUTOMAÇÃO

FELIPE MAKOTO IMANISHI

**DESENVOLVIMENTO DE UM MÓDULO DIDÁTICO PÊNULO INVERTIDO
ROTACIONAL PARA O ESTUDO DE ANÁLISE E CONTROLE DE SISTEMA
DINÂMICO**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

CORNÉLIO PROCÓPIO

2021

FELIPE MAKOTO IMANISHI

**DESENVOLVIMENTO DE UM MÓDULO DIDÁTICO PÊNULO INVERTIDO
ROTACIONAL PARA O ESTUDO DE ANÁLISE E CONTROLE DE SISTEMA
DINÂMICO**

**DEVELOPMENT OF A DIDATIC MODULE ROTARY INVERTED PENDULUM FOR
THE STUDY OF ANALYSIS AND CONTROL OF DYNAMIC SYSTEMS.**

Trabalho de conclusão de curso de graduação apresentado como requisito para obtenção do título de Bacharel em Engenharia de Controle e Automação da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).

Orientador: Prof. Dr. Emerson Ravazzi Pires da Silva

Coorientador: Julio Yuzo Yassuda

CORNÉLIO PROCÓPIO

2021



[4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/)

Esta licença permite download e compartilhamento do trabalho desde que sejam atribuídos créditos ao(s) autor(es), sem a possibilidade de alterá-lo ou utilizá-lo para fins comerciais.

Conteúdos elaborados por terceiros, citados e referenciados nesta obra não são cobertos pela licença.



FOLHA DE APROVAÇÃO

Felipe Makoto Imanishi

Desenvolvimento de um Módulo Didático Pêndulo Invertido Rotacional para o Estudo de Análise e Controle de Sistema Dinâmico

Trabalho de conclusão de curso apresentado às 16:30hs do dia 30/11/2021 como requisito parcial para a obtenção do título de Engenheiro de Controle e Automação no programa de Graduação em Engenharia de Controle e Automação da Universidade Tecnológica Federal do Paraná. O candidato foi arguido pela Banca Avaliadora composta pelos professores abaixo assinados. Após deliberação, a Banca Avaliadora considerou o trabalho aprovado.

Prof(a). Dr(a). Emerson Ravazzi Pires da Silva - Presidente (Orientador)

Engenheiro(a) Julio Yuzo Yassuda - (Coorientador)

Prof(a). Dr(a). Cristiano Marcos Agulhari - (Membro)

Prof(a). Dr(a). Luiz Francisco Sanches Buzachero - (Membro)

AGRADECIMENTOS

Gostaria de direcionar meus agradecimentos a todas as pessoas que colaboraram no desenvolvimento deste trabalho. Com um agradecimento em especial ao professor doutor Emerson Ravazzi Pires da Silva e ao Julio Yuzo Yassuda que não mediram tempo e esforços para me ajudar, orientar e superar os desafios enfrentados.

E gostaria de agradecer a meus pais por terem me apoiado, encorajado e me dado suporte nas escolhas que tive, me tornando uma pessoa melhor e para que tenha mais oportunidades na vida. Gostaria também de agradecer a todos os meus amigos e pessoas que conheci durante esta jornada. Não somente me proporcionou a crescer profissionalmente, mas principalmente pessoalmente. Como também gostaria de agradecer a Universidade Tecnológica Federal do Paraná do campus de Cornélio Procópio por ter proporcionado tal experiência e oportunidades a serem levadas pelo resto da minha vida.

RESUMO

IMANISHI, Felipe Makoto. **DESENVOLVIMENTO DE UM MÓDULO DIDÁTICO PÊNDELO INVERTIDO ROTACIONAL PARA O ESTUDO DE ANÁLISE E CONTROLE DE SISTEMA DINÂMICO**. 60 f. Trabalho de Conclusão de Curso – Curso de Engenharia de Controle e Automação, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2021.

No contexto do ensino profissionalizante atual, em alguns casos, há a escassez de recursos para o aprendizado de conceitos práticos nas áreas de engenharia, com destaque para área de controle e automação. Isso se deve ao alto custo de equipamentos e módulos didáticos disponíveis no mercado, que os tornam inacessíveis ou inviáveis para a maioria das instituições adquirir como ferramentas para uso didático. Em meio às dificuldades de aquisição, necessidade de complementação de conhecimentos profissionalizantes e a multiplicidade de conceitos agregados ao pêndulo invertido, é vista a vantagem da criação de módulos didáticos replicáveis deste sistema para o desenvolvimento e ensino na área de controle e automação. Diante deste cenário, este trabalho propõe o desenvolvimento de um módulo didático pêndulo invertido rotacional, ou também conhecido como pêndulo de Furuta. Será também abordada a modelagem matemática do sistema e a implementação de técnicas de controle clássico da família PID, seguida de análise e validação dos resultados considerando as respostas práticas do sistema.

Palavras-chave: Pêndulo invertido rotacional, Controle linear, Módulo didático.

ABSTRACT

IMANISHI, Felipe Makoto. **DEVELOPMENT OF A DIDATIC MODULE ROTARY INVERTED PENDULUM FOR THE STUDY OF ANALYSIS AND CONTROL OF DYNAMIC SYSTEMS.** 60 p. Trabalho de Conclusão de Curso – Curso de Engenharia de Controle e Automação, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2021.

In the context of current vocational education, in some cases, there is a scarcity of resources for learning practical concepts in engineering areas, especially in the area of control and automation. This is due to the high cost of equipment and teaching modules available on the market, which make them inaccessible or unfeasible for most institutions to acquire as tools for teaching use. Amidst the acquisition difficulties, the need to complement professional knowledge and the multiplicity of concepts added to the inverted pendulum, the advantage of creating replicable didactic modules of this system for the development and teaching in the area of control and automation is seen. Given this scenario, this work proposes the development of a didactic module inverted rotational pendulum, or also known as Furuta's pendulum. The mathematical modeling of the system and the implementation of classical control techniques of the PID family will also be addressed, followed by analysis and validation of the results considering the practical responses of the system.

Keywords: Rotary Inverted Pendulum, Linear Control, Didatic Module.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Freedom® FRDM KKL25Z.....	14
Figura 2: Encoder giratório ótico 5-24V E38-S6-600-2-N-24.....	15
Figura 3: Motor metálico 19:1 37Dx52L mm com encoder.....	16
Figura 4: Fonte colmeia 12V/10A.....	17
Figura 5: Módulo driver ponte H – BTS7960.....	18
Figura 6: Visão frontal do Pêndulo de Furuta.....	20
Figura 7: Visão em perfil do Pêndulo de Furuta.....	20
Figura 8: Visão lateral do Pêndulo de Furuta.....	21
Figura 9: Visão superior do Pêndulo de Furuta.....	21
Figura 10: Distribuição dos componentes do módulo.....	22
Figura 11: Visão posterior do Pêndulo de Furuta.....	22
Figura 12: Esquemático da posição da estrutura do módulo didático.....	24
Figura 13: Descrição das medidas e parâmetros do sistema do pêndulo invertido rotacional.....	25
Figura 14: (a) Pêndulo translacional; (b) Pêndulo rotacional.....	29
Figura 15: Estudo da energia potencial.....	30
Figura 16: Estudo da energia cinética.....	31
Figura 17: Diagrama geral do sistema em malha fechada com controlador.....	35
Figura 18: Resposta típicas de nível para diferentes valores de parâmetro proporcional.....	36
Figura 19: Ação derivativa em uma resposta de rampa.....	39
Figura 20: Respostas típicas de cada modo do controlador PID.....	40
Figura 21: Posição angular do pêndulo (P=1, I=1, D=1).....	44
Figura 22: Sinal de controle (P=1, I=1, D=1).....	44
Figura 23: Posição angular do pêndulo (esquerda) e sua visualização ampliada ao redor do <i>setpoint</i> (direita) (P=10, I=1, D=1).....	45
Figura 24: Posição angular do braço e sinal de controle (P=10, I=1, D=1).....	46
Figura 25: Posição angular do pêndulo (esquerda) e sua visualização ampliada ao redor do <i>setpoint</i> (direita) (P=10, I=45, D=1).....	47
Figura 26: Posição angular do braço e sinal de controle (P=10, I=45, D=1).....	47

Figura 27: Posição angular do pêndulo (esquerda) e sua visualização ampliada ao redor do <i>setpoint</i> (direita) (P=10, I=45, D=0).....	48
Figura 28: Posição angular do braço e sinal de controle (P=10, I=45, D=0)	49
Figura 29: Posição angular do pêndulo (esquerda) e sua visualização ampliada ao redor do <i>setpoint</i> (direita) (P=10, I=45, D=5).....	50
Figura 30: Posição angular do braço e sinal de controle (P=10, I=45, D=5)	50
Figura 31: Posição angular do pêndulo (esquerda) e sua visualização ampliada ao redor do <i>setpoint</i> (direita) (P=10, I=45, D=3).....	51
Figura 32: Posição angular do braço e sinal de controle (P=10, I=45, D=3)	52
Figura 33: Posição angular do pêndulo (esquerda) e sua visualização ampliada ao redor do <i>setpoint</i> (direita) (P=10, I=45, D=3, Pb=1)	53
Figura 34: Posição angular do braço e sinal de controle (P=10, I=45, D=3, Pb=1)..	54

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Parâmetros do motor.....	16
Tabela 2: Materiais utilizados na construção do módulo.....	19
Tabela 3: Parâmetros do sistema e suas medidas	25
Tabela 4: Resumo dos resultados obtidos	55

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	10
1.1 Problema	11
1.2 Justificativa	11
1.3 Objetivos	12
1.3.1 Objetivo Geral	12
1.3.2 Objetivos Específicos	12
1.4 Estrutura do Trabalho	12
2. MATERIAIS E MÉTODOS	13
2.1 Microcontrolador	13
2.2 Sensores	14
2.3 Motor	15
2.4 Fonte Colmeia	17
2.5 Módulo Driver Ponte H	17
2.6 Software	18
2.7 Estruturação do módulo	19
3. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	26
3.1 Espaço de Estados	26
3.2 Mecânica de Lagrange	28
3.3 Pêndulo Invertido Rotacional	29
3.3.1 Modelagem	29
3.4 Métodos de Controle de Sistemas	34
3.4.1 Controlador Proporcional Integral Derivativo (PID)	34
3.4.1.1 Proporcional (P)	35
3.4.1.2 Proporcional-Integral (PI)	37
3.4.1.3 Proporcional-Integral-Derivativo (P)	38
4. RESULTADOS	41
4.1 Modelo do sistema	41
4.2 Sintonia do Controlador	42
5. CONCLUSÃO	56
REFERÊNCIAS	58

1. INTRODUÇÃO

A extensa aplicação de métodos e teoria de controle automático em processos é alvo atual no mercado, como também em pesquisa. Diante dos diversos desafios, sistemas automatizados são implementados em função de sua contribuição na redução de despesas de produção, eficácia e disponibilizando maior qualidade e agilidade nos processos (VASCONCELLOS, 2012).

No emprego de sistemas de controle em casos em que o projeto necessite que requerimentos sejam atendidos de forma rigorosa, se torna imprescindível o estudo do projeto e de estratégias de controle apropriados. Neste intuito, dentre os diversos sistemas para o estudo de controle dinâmico, o pêndulo invertido é um dos mais populares experimentos para a introdução de conceitos de controle, propondo à nova geração de estudantes de controle uma forma de verificação de técnicas convencionais, assim como de validação de novas ferramentas e técnicas (BOUBAKER. 2012).

O pêndulo invertido rotacional, também conhecido como Pêndulo de Furuta, é um exemplo clássico da engenharia no ensino da teoria de controle, sendo possível aplicações das diversas técnicas. Apesar da simplicidade física do sistema, as implicações físicas tornam o estudo de seu sistema dinâmico mais complexas, principalmente por ser um sistema não-linear e instável, demonstrando o comportamento de diversos sistemas reais (BAITI et al, 2019). O comportamento oscilante da haste reproduz problemas oscilatórios de sistemas instáveis, frequentes em situações como controle da trajetória de um projétil, movimento de um satélite e mesmo, dentro de determinados condicionantes, a postura humana (OLIVEIRA et al, 2005).

Neste trabalho, propõe-se o desenvolvimento de um módulo didático de um pêndulo invertido rotacional, bem como a modelagem e a aplicação de uma estratégia de controle para estabilização do pêndulo, um controlador Proporcional Integral Derivativo (PID).

1.1 Problema

No cenário atual de ensino, a aproximação entre teoria e prática é essencial para o aprendizado. Entretanto, pode ser visto um certo déficit no emprego de métodos de ensino prático, e ênfase em teórico. A utilização de módulos didáticos para auxiliar no aprendizado prático do aluno é uma abordagem que, em alguns casos, torna-se inviável pelas instituições em função do seu alto custo de aquisição, comprometendo o conhecimento essencial para o profissional em sua atuação no mercado de trabalho.

Considerando que o sistema pêndulo invertido rotacional é referência para diversos tipos de sistemas, ele pode ser utilizado para validar técnicas e verificar desempenho de sistemas. A criação de módulos didáticos baseados nele propõe uma alternativa para transpor os problemas de aquisição de alto custo, como também dispõe de um sistema dinâmico ideal para o ensino profissionalizante.

1.2 Justificativa

Diante da problemática apresentada, e visto que o sistema do pêndulo invertido é referência para diversos tipos de sistemas e são tipicamente utilizados para realizar experimentos em modelos, validar a eficácia das técnicas de controle emergentes e verificar o seu desempenho, a proposta de desenvolver módulos didáticos replicáveis oferece um meio sólido para complementar o desenvolvimento profissional nos estudos.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo Geral

Diante do problema e da justificativa apresentados, o presente trabalho tem como objetivo geral desenvolver, modelar e aplicar técnicas de controle PID em um módulo didático de um pêndulo invertido rotacional.

1.3.2 Objetivos Específicos

- Construir um módulo didático pêndulo invertido rotacional;
- Realizar a comunicação entre o módulo e o *software* MATLAB®/Simulink®;
- Obter um modelo matemático que descreva o sistema identificando as grandezas envolvidas, através da modelagem física;
- Implementar controladores da família Proporcional Integral Derivativo (PID);
- Analisar os resultados práticos obtidos.

1.4 Estrutura do Trabalho

O presente trabalho aborda as fases de produção do pêndulo invertido rotacional introduzidas nos objetivos, sendo divididas em cinco Capítulos. O primeiro Capítulo envolve a introdução do trabalho, ou seja, do que se trata o pêndulo invertido rotacional, além da problemática e dos objetivos do trabalho. No segundo Capítulo são apresentados os materiais e métodos utilizados no desenvolvimento do trabalho. No terceiro Capítulo são abordadas as fundamentações teóricas que regem e suportam o desenvolvimento e projeto do sistema trabalhado, envolvendo uma revisão bibliográfica sobre os conceitos utilizados. No quarto capítulo são apresentados e discutidos os resultados obtidos. As considerações finais a respeito do trabalho são localizadas no quinto Capítulo.

2. MATERIAIS E MÉTODOS

2.1 Microcontrolador

O microcontrolador é um circuito integrado que contém CPU, memória, unidades de entrada/saída e periféricos (conversores A/D, *timers*, portas de comunicação, etc), com a finalidade de executar uma tarefa específica. Esta plataforma de *hardware* é a unidade principal de processamento de um projeto, assim, a decisão deste influi fortemente no desempenho do sistema (ANGÉLICO et al, 2017).

As características do projeto que decidem a escolha do microcontrolador foram: quantidade de portas de aquisição e comando de dados, necessidade de grande quantidade destas em função do número de periféricos; facilidade no uso, devido à sua utilização como plataforma de comunicação é necessária a interação com os *softwares* utilizados; alta velocidade de processamento, monitoramento de mínimas variações no funcionamento do sistema são cruciais; acessibilidade para compra; e custo acessível.

Baseando-se nas características do projeto e considerações secundárias como custo e facilidade de uso, foi então escolhido o microcontrolador Freedom® FRDM KL25Z, baseado em critérios que devem ser satisfeitos pela disponibilização de tais recursos. Estes critérios foram a alta velocidade de processamento, trabalhando com uma frequência de operação de 48 MHz; arquitetura de 32 bits; grande quantidade de portas digitais; compatibilidade para comunicação com MATLAB® e Simulink®; e, levando em consideração as funcionalidades, o custo baixo de aquisição.

Figura 1: Freedom® FRDM KL25Z.



Fonte: <https://www.filipeflop.com/blog/apresentando-frdm-kl25z/>

2.2 Sensores

Os sensores denominados *encoders* são dispositivos cuja função é transformar posição em sinal elétrico digital. Assim, em um sistema que necessite medir a posição angular, como no caso do pêndulo invertido rotacional, o sistema realiza a leitura baseado em um disco formado por janelas radiais (TURCHETTI, 2007).

Os *encoders* podem ser classificados em dois tipos: os incrementais e absolutos. Os *encoder* incrementais podem ser comparados a basicamente uma régua linear ou disco, o qual é acoplado ao sistema que se deseja “medir” (PALLÁS-ARENY et al, 1991). O princípio de funcionamento deste sensor consiste em um disco que deve possuir uma trilha com dois tipos de setores que tenham uma propriedade que permita diferenciá-los, geralmente equidistantes e com diferenciação baseada em transparência e opacidade. Um feixe de luz é posicionado a fim de atravessar os setores, caso uma mudança na propriedade seja percebida por um dispositivo de leitura, então um incremento na posição resultará em pulso na saída (TURCHETTI, 2007). Este *encoder* com forma de leitura por disco e meio de leitura ótica são os *encoders* ópticos incrementais. Por fim, os *encoders* absolutos medem a posição baseados em leitura de código único para cada posição.

Os *encoder* utilizados no trabalho são ambos incrementais. Um deles se encontra acoplado ao eixo do motor, com resolução de 16 pulsos por revolução (ppr)

por canal. A caixa de redução do motor de 18,75:1 permite uma resolução no eixo da saída da caixa de redução de $16 \text{ (ppr)} \times 18,75 \text{ (relação de redução)} = 300 \text{ (contagens por revolução)}$.

O outro *encoder* utilizado foi posicionado para a leitura da posição angular do pêndulo. Para esta leitura foi considerado um *encoder* com maior precisão devido à possível sensibilidade do sistema de controle. Assim, foi utilizado um *encoder* giratório ótico 5-24V E38-S6-600-2-N-24 de 600 ppr.

Figura 2: Encoder giratório ótico 5-24V E38-S6-600-2-N-24.



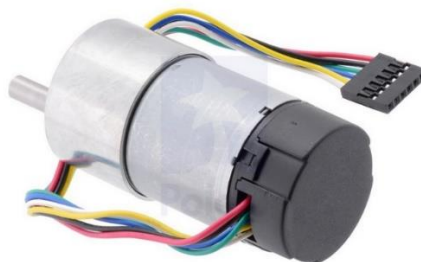
Fonte: Aatoria própria.

2.3 Motor

A seleção do motor foi baseada em fatores de funcionalidade do sistema, na qual este deve possuir torque suficiente para rotacionar o braço do pêndulo a uma velocidade aceitável para que o sistema de controle trabalhe de forma estável.

O motor escolhido foi o da marca Pololu®, trata-se de um motor de corrente contínua de tensão 12V, metálico 19:1 37Dx52L mm com *encoder*. O sensor acoplado ao eixo funciona a partir do efeito Hall e a velocidade do motor em giro livre é de 500 rotações por minuto (RPM) a uma corrente de 300 mA. Com relação ao torque, com o rotor bloqueado o torque corresponde a 5 kgxcm com corrente de pico de 5 A.

Figura 3: Motor metálico 19:1 37Dx52L mm com *encoder*.



Fonte: <https://multilogica-shop.com/motor-met%C3%A1lico-191-37dx52l-mm-com-encoder>.

A escolha do motor também foi baseada no trabalho de Bruno Augusto Angélico (ANGÉLICO, 2017), onde o torque aplicado pelo motor no braço, descrito pela Equação (1), que depende dos parâmetros do motor. Neste trabalho foram utilizados os mesmos valores dos parâmetros do motor extraído por Bruna Augusto Angélico descritos na Tabela 1.

Tabela 1: Parâmetros do motor.

	Parâmetro	Valor
K_t	Constante de torque [Nm/A]	0,118
K_e	Constante de força contra-eletromotriz [Vs/rad]	0,229
R	Resistência do motor [Ω]	3,6
n	Relação de engrenagens	18,75

Fonte: Autoria própria.

$$T = \frac{K_t}{R} (12. PWM - K_e \dot{\alpha}) \quad (1)$$

2.4 Fonte Colmeia

A fonte colmeia é utilizada para transformar tensão de rede comum em tensões menores para o uso de diversos aparelhos. A fonte chaveada estabiliza a alimentação eletrônica através do chaveamento, onde é possível controlar a corrente a fim de estabilizar a tensão de saída.

Neste projeto foram utilizados dispositivos que necessitam da alimentação por corrente contínua (CC), portanto foi decidido o uso de uma fonte colmeia. As características foram analisadas baseando-se na necessidade do projeto. O dispositivo em questão foi o motor acoplado no eixo do braço, a qual tem tensão de pico de 12V. Desta forma, a fonte escolhida para utilizar todo o potencial do motor foi uma fonte de tensão e corrente de saída de 12V e 10A, respectivamente.

Figura 4: Fonte colmeia 12V/10A.



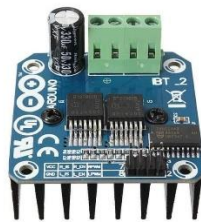
Fonte: <https://www.cftvclube.com.br/fonte-colmeia-chaveada-bivolt-cftv-12v-10a>.

2.5 Módulo Driver Ponte H

A Ponte-H é um circuito conhecido e comumente usados para o acionamento de componentes que precisam de inversão do sentido da passagem de corrente durante seu funcionamento, como motores elétricos (ANGÉLICO et al, 2017).

Para este projeto foi selecionado um módulo driver ponte H – BTS7960 com tensão de alimentação de 5-35 Vdc e máxima corrente contínua de 43A. Estes parâmetros estão acima dos necessários para o projeto, entretanto, em função da disponibilidade no mercado, custo e qualidade optou-se por este modelo.

Figura 5: Módulo driver ponte H – BTS7960.



Fonte: <https://www.curtocircuito.com.br/driver-ponte-h-43a-bts7960-ibt-2.html>.

2.6 Software

Simulações em projetos são uma das ferramentas mais importantes na educação em engenharia. O MATLAB® é um *software* interativo de alta performance para cálculo numérico. Em um ambiente de engenharia é importante permitir a comunicação e tradução de procedimentos matemáticos em simulação e análise, portanto, a utilização desta ferramenta possibilita a expressão natural de matrizes e programações vetorizadas e simulação em plataforma Simulink®. Outra vantagem do *software* é de possuir uma interface interativa e *toolboxes* que possibilitam a utilização de forma mais fácil e familiar de funções que interligam diretamente com as funcionalidades requeridas na engenharia. Desta forma, o MATLAB®/Simulink® foi a ferramenta computacional de processamento escolhida para realizar a análise e comunicação entre o módulo didático e o computador, como também no processamento de dados para a implementação do sistema de controle.

2.7 Estruturação do módulo

Com base nos componentes e ferramentas listadas nos tópicos anteriores foi feita a construção do módulo didático Pêndulo de Furuta. A seguir é detalhado na Tabela 2 os componentes adicionais utilizados na construção do módulo.

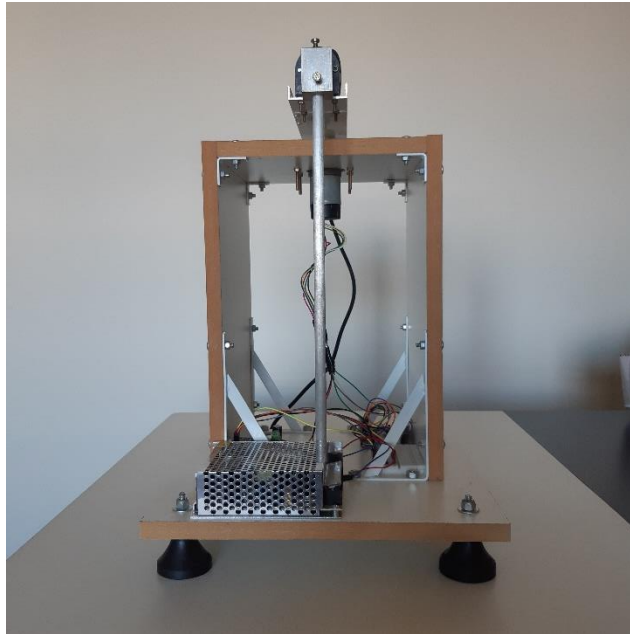
Tabela 2: Materiais utilizados na construção do módulo.

Descrição	Quantidade
Base 1 [30 cm × 30 cm × 1,5 cm]	1
Base 2 [20 cm × 20 cm × 1,5 cm]	1
Chapas de suporte [20 cm × 33,5 cm × 1,5 cm]	2
Bases de borracha com <i>stopper</i>	4
Suporte em L (Pequeno)	4
Suporte em L (Grande)	4
Acoplador para eixo 6 mm	1
Suporte para motor 37 mm	1

Fonte: Autoria própria.

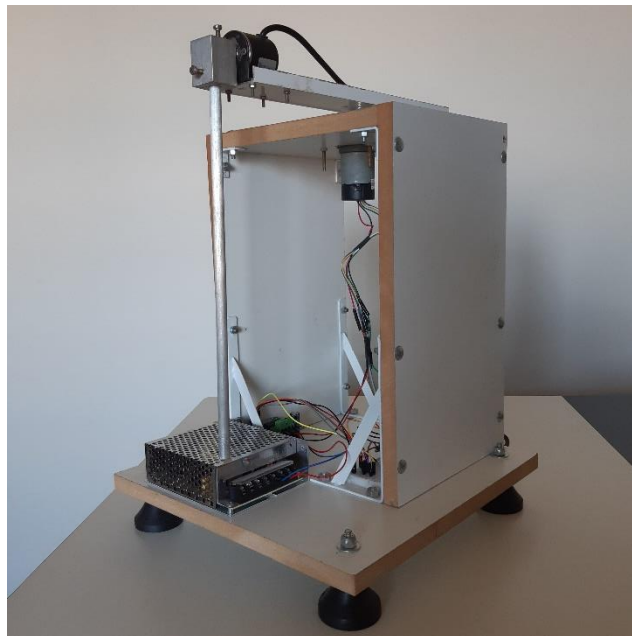
O produto final obtido após construção do módulo é mostrado nas Figuras de 6 a 11, abaixo.

Figura 6: Visão frontal do Pêndulo de Furuta.



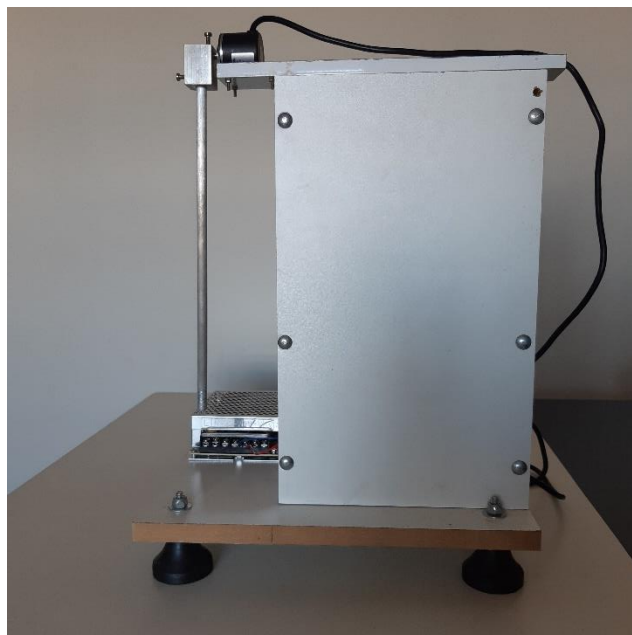
Fonte: Autoria própria.

Figura 7: Visão em perfil do Pêndulo de Furuta.



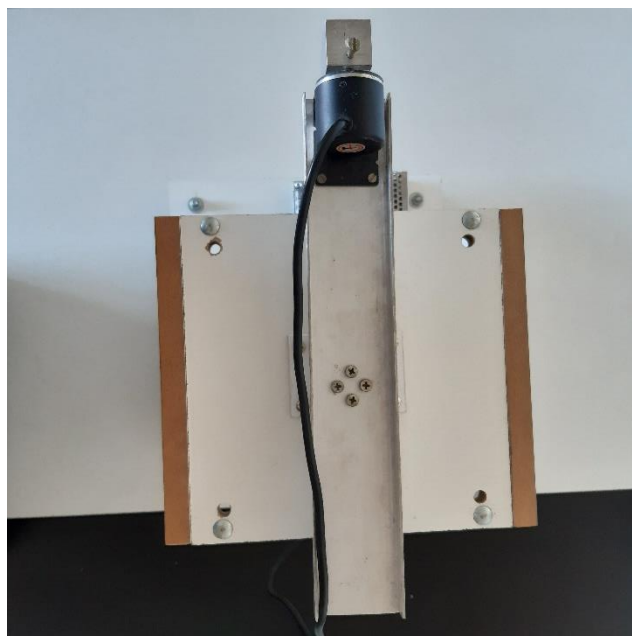
Fonte: Autoria própria.

Figura 8: Visão lateral do Pêndulo de Furuta.



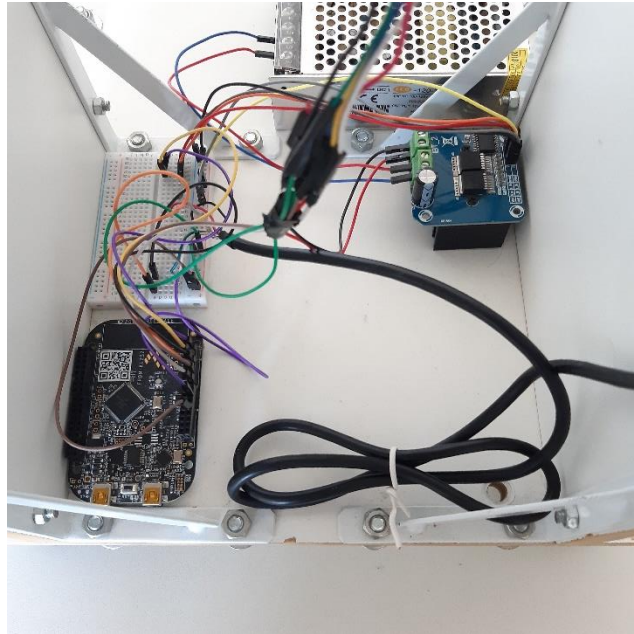
Fonte: Autoria própria.

Figura 9: Visão superior do Pêndulo de Furuta.



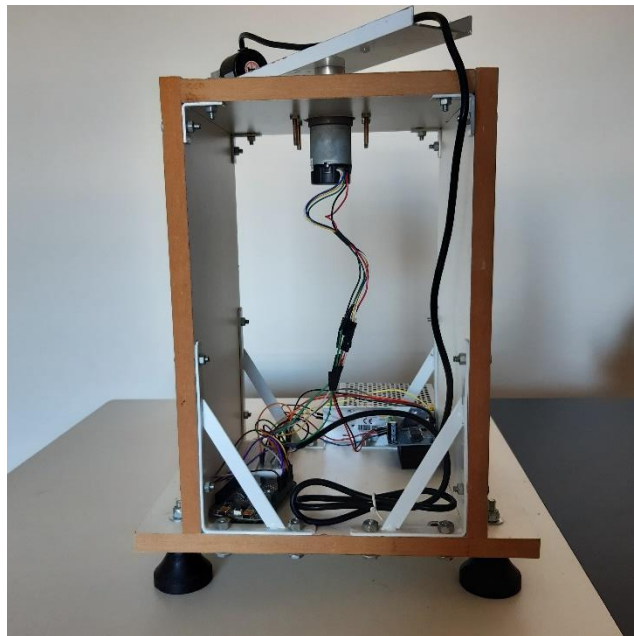
Fonte: Autoria própria.

Figura 10: Distribuição dos componentes do módulo.



Fonte: Autoria própria.

Figura 11: Visão posterior do Pêndulo de Furuta.



Fonte: Autoria própria.

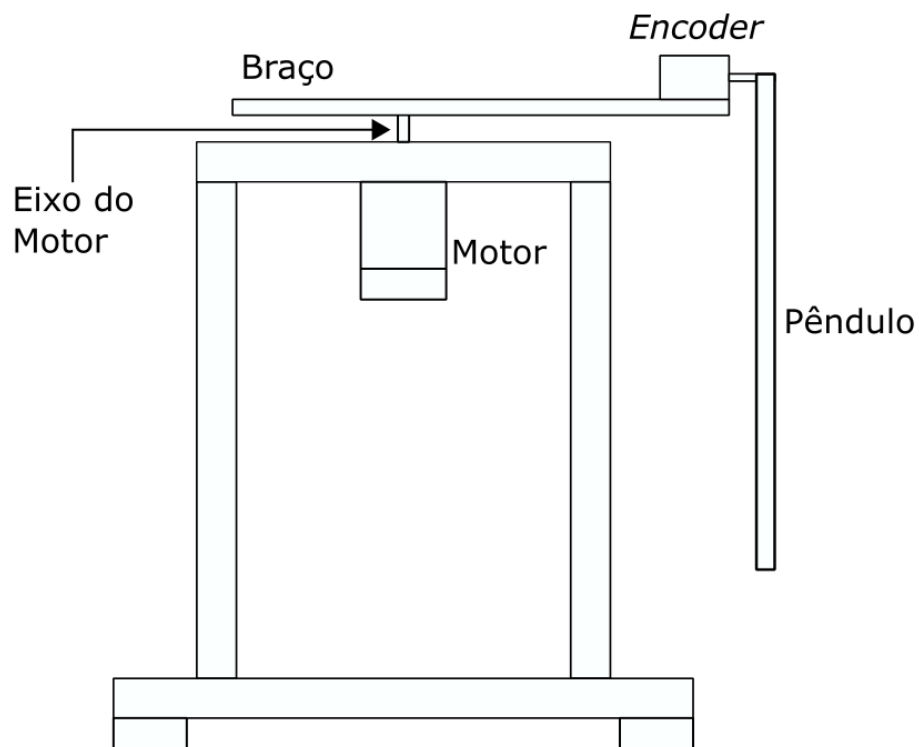
É importante ressaltar a escolha e descrição de alguns materiais dispostos na Tabela 2.

- Base e estrutura do módulo: utilização de madeira compensada. A escolha deste material é em função da escolha de um material que desenvolva uma construção mais rígida e que possa resistir ao peso dos materiais que serão colocados sobre ele, além de proporcionar estabilidade de movimento do módulo;
- Braço: a haste horizontal, ou o braço, foi escolhido uma barra fina de alumínio. Este material foi escolhido com o intuito de evitar um material pesado sobre o módulo, desta forma, não sendo necessário esforço adicional do motor para realizar movimento;
- Pêndulo: para o pêndulo foi selecionado também um material de alumínio. Assim como o braço, foi utilizado tal material afim de garantir o controle do pêndulo com menores reações em função do peso e dimensão do corpo (pêndulo);
- Bases de borracha: A seleção deste componente foi realizada durante o processo de construção. Durante os testes foi verificado que o módulo apresentava muita instabilidade estrutural devido a pequenas deformidades da base. Desta forma foi utilizada tal base para manter o módulo estável e, se for necessário, o possível reajuste de altura das bases.

A construção do módulo é baseada nas duas bases de madeira (Base 1 e Base 2), dispostas paralelamente no plano horizontal. A Base 2 é apoiada por meio das duas chapas de madeira de suporte (Chapas de suporte), dispostas paralelamente no plano vertical. Sendo os dois conjuntos de chapas de madeira fixados por meio dos Suportes L. As bases de borracha estão posicionadas nas extremidades dos vértices da Base 1. O motor, como verificado na Figura 11, está posicionado com eixo direcionado para cima e fixado por meio de uma placa de alumínio centralizado no centro da Base 2. Instalado neste eixo está o braço e o *encoder* responsável por verificar a posição angular do pêndulo posicionado no extremo do braço. E, por fim, o pêndulo se localiza acoplado no eixo de leitura do *encoder* por meio de acoplador L construído pelo autor utilizando um bloco de alumínio. As Figuras 12 e 13, bem

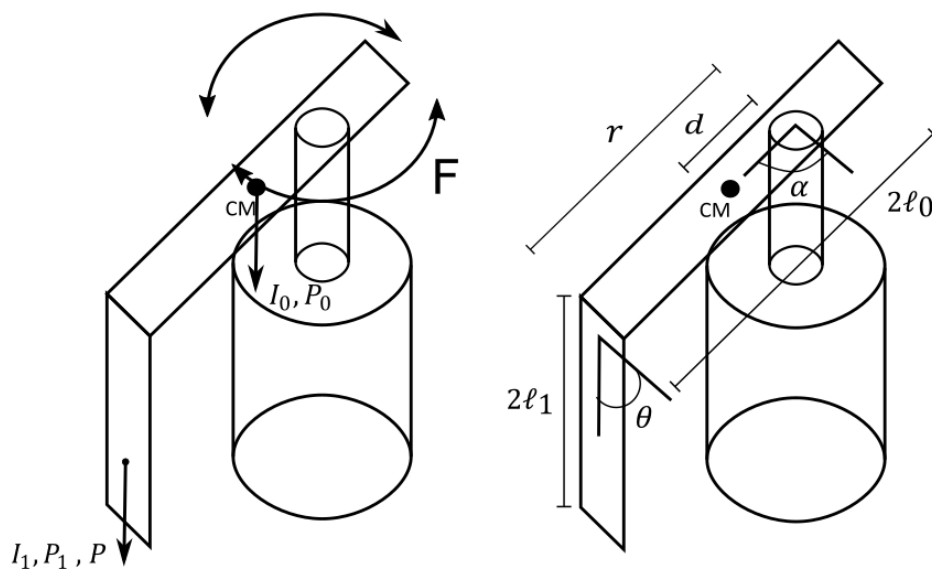
como a Tabela 3, adicionam informações importantes para ilustrar melhor a construção do módulo didático.

Figura 12: Esquemático da posição da estrutura do módulo didático.



Fonte: Autoria própria.

Figura 13: Descrição das medidas e parâmetros do pêndulo invertido rotacional.



Fonte: Autoria própria.

Tabela 3: Parâmetros do sistema e suas medidas.

	Parâmetros	Valor
m_0	Massa do braço [kg]	0,228 kg
m_1	Massa do pêndulo [kg]	0,152 kg
$2\ell_0$	Comprimento do braço [m]	0,3 m
$2\ell_1$	Comprimento do pêndulo [m]	0,3 m
r	Distância eixo base até pêndulo [m]	0,17 m
d	Distância eixo base até centro de massa [m]	0,02 m
α	Posição angular da haste horizontal (braço)	-
θ	Posição angular da haste vertical (pêndulo)	-

Fonte: Autoria própria.

3. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A dinâmica de muitos sistemas mecânicos, elétricos, térmicos, econômicos, biológicos ou outros pode ser descrita em termos de equações diferenciais (OGATA, 2011). Baseando-se no estudo do sistema em termos de equações diferenciais é possível verificar a veracidade e factibilidade do modelo desenvolvido em comparação com a representação matemática do sistema de acordo com a modelagem do sistema por representação de espaços de estado. O modelo fiel do sistema é essencial para a representação em forma de algoritmo do comportamento real do sistema na simulação e reflete diretamente nos resultados na implementação do sistema de controle.

3.1 Espaço de Estados

Utilizando-se a notação vetorial-matricial, uma equação diferencial de ordem n pode ser representada por uma equação diferencial vetorial-matricial de primeira ordem. Se n elementos do vetor formam um conjunto de variáveis de estado, então a equação diferencial vetorial-matricial é uma equação de *estado* (OGATA, 2011).

Podemos generalizar que a estrutura geral de um sistema contínuo e invariante no tempo pode ser descrita como um conjunto de equações diferenciais de primeira ordem, com m entradas externas. Genericamente é feita a notação para n variáveis de estado e m variáveis de entrada, obtendo:

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m; t) \quad i = 1, \dots, n \quad (2)$$

É também definido um conjunto de k equações de saída:

$$y_i(t) = g_i(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m; t) \quad i = 1, \dots, k \quad (3)$$

O modelo no espaço de estados geral é definido então por uma equação de estado e uma equação de saída:

$$\dot{x}(t) = f(x, u, t) \quad (4)$$

$$y(t) = g(x, u, t) \quad (5)$$

Sendo que é considerado para modelagem o sistema linear e invariante no tempo, ou seja, seus coeficientes são constantes, temos que:

$$f_i(x, u) = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n + b_{i1}u_1 + \dots + b_{im}u_m \quad , \quad i = 1, \dots, n \quad (6)$$

$$g_i(x, u) = c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2 + \dots + c_{in}x_n + d_{i1}u_1 + \dots + d_{im}u_m \quad , \quad i = 1, \dots, k \quad (7)$$

Em que a_{ij} , b_{ij} , c_{ij} e d_{ij} são coeficientes constantes.

Definindo a equação de estados em espaço de estados do sistema invariante no tempo, ou seja, em forma matricial, tem-se:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (8)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (9)$$

As matrizes A , B , C e D são: matriz de estado ($n \times n$), matriz de entrada ($n \times m$), matriz de saída ($k \times n$) e matriz de avanço ($k \times m$). Sendo u o vetor de entrada e y o vetor de saída.

3.2 Mecânica de Lagrange

O formalismo lagrangeano permite obter as equações de movimento de um sistema através de um modo elegante e sistemático (CARVALHO e MATOS, 2001/2). Este método não exige que sejam identificadas todas as forças envolvidas, simplificando o tratamento do sistema, permitindo que seja feita a análise somente das forças relevantes ao movimento das partículas em questão.

Na formulação da mecânica lagrangeana, cada sistema mecânico é caracterizado por uma determinada função (CARVALHO e MATOS, 2001/2). Em geral, essa função depende das coordenadas generalizadas (q), das suas derivadas temporais (\dot{q}) e do tempo (t). Assim, representa-se a lagrangeana por $L(q, \dot{q}, t)$.

A lagrangeana pode ser escrita na forma:

$$L = K - P \quad (10)$$

Onde K é a soma das energias cinéticas das partículas do sistema e P é a soma das energias potenciais nas mesmas.

Para um sistema com n graus de liberdade e coordenadas generalizadas q_1, q_2, \dots, q_n , é possível representar as lagrangeanas obtidas por meio de conjunto de equações diferenciais, denominadas equações de Lagrange.

$$Q_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (11)$$

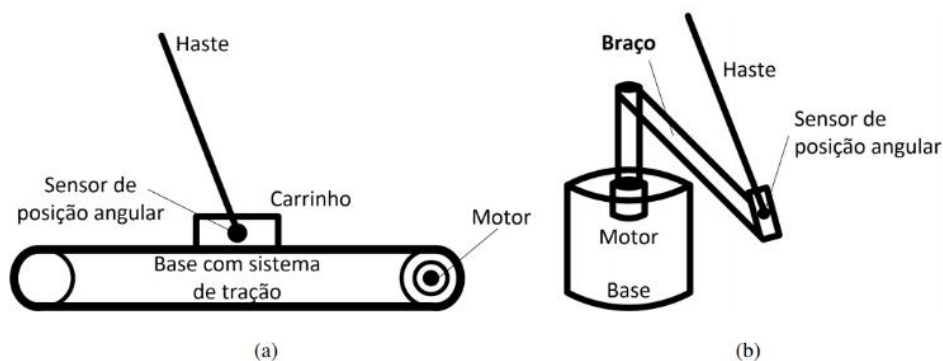
Onde Q_i é a componente i da força generalizada no local da partícula.

3.3 Pêndulo Rotacional Invertido

O pêndulo invertido rotacional (Figura 14b), ou pêndulo de Furuta, apresenta uma ação sub-atuada no pêndulo, tal que este se encontra ligado a um braço que rotaciona em torno de um eixo. O atuador do sistema, um motor, é então posicionado neste eixo e o monitoramento de posições, para a atuação do sistema de controle, se encontra no deslocamento angular deste eixo e no deslocamento resultante no eixo de ligamento entre o braço e o pêndulo. Assim, esse sistema tem como características ser um sistema sub-atuado e fortemente não linear devido a sua dinâmica interna.

A estrutura do módulo, Figura (14b), é diferenciada do modelo mais conhecido, pêndulo translacional Figura (14a), devido à inexistência de trilhos. Porém, em relação à complexidade são equivalentes, diferenciando somente na natureza da força que atua no pêndulo.

Figura 14: (a) Pêndulo translacional; (b) Pêndulo rotacional



Fonte: ANGÉLICO et al 2017.

3.3.1 Modelagem

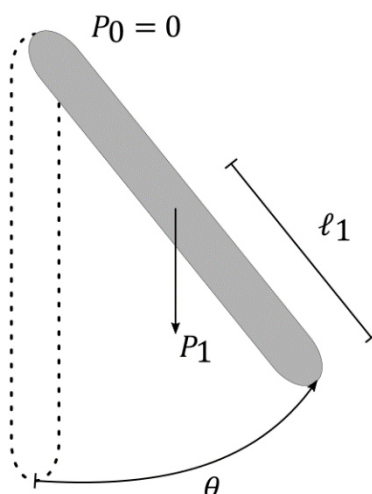
A aplicação bem-sucedida das equações de equilíbrio requer uma especificação completa de todas as forças externas conhecidas e desconhecidas que atuam sobre o corpo (HIBBELER, 2010). Com o auxílio da representação das forças

externas atuantes no sistema da Figura 13, é realizado o equacionamento das energias externas para a derivação da representação em espaços de estados por meio da modelagem por Lagrange.

Baseando-se nos parâmetros listados no Tabela 3 e na estrutura dinâmica do sistema da Figura 13 foi realizado o equacionamento das energias externas para a derivação da representação em espaços de estados por meio da modelagem por Lagrange.

A energia potencial obtida através do equacionamento em relação às suas componentes no plano horizontal e vertical P_0 e P_1 , respectivamente.

Figura 15: Estudo da energia potencial.

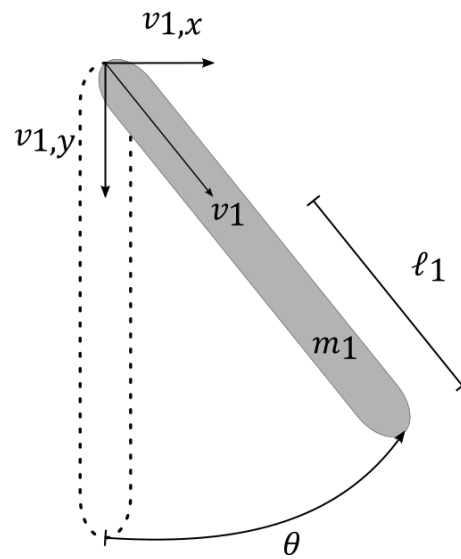


Fonte: Autoria própria.

$$P = P_0 + P_1 = m_1 g l_1 \cos \theta \quad (12)$$

Como verificado na Figura 15 a energia potencial referente ao braço é nula, isto é, em função da estrutura realizar movimento exclusivamente no plano horizontal, assim não influenciando no estudo do movimento do pêndulo.

Figura 16: Estudo da energia cinética.



Fonte: Autoria própria.

$$K_0 = \frac{I_0 \dot{\alpha}^2}{2} \quad (13)$$

$$I_0 = \frac{m_0(2\ell_0)^2}{2} + m_0 d^2 \quad (14)$$

Na Equação (13), I_0 representa o momento de inércia do braço.

$$K_1 = \frac{m_1(\ell_1 \dot{\theta} \cos \theta - r \dot{\alpha})^2}{2} + \frac{m_1(-\ell_1 \dot{\theta} \sin \theta)^2}{2} + \frac{I_1 \dot{\theta}^2}{2}$$

$$K_1 = -m_1 \ell_1 r \dot{\theta} \dot{\alpha} \cos \alpha + \frac{m_1 r^2 \dot{\alpha}^2}{2} + \frac{2m_1 \ell_1^2 \dot{\theta}^2}{3} \quad (15)$$

$$I_1 = \frac{m_1(2\ell_1)^2}{12} \quad (16)$$

Já para o estudo da energia cinética das duas estruturas é necessário levar em consideração ambas. Na Figura 16 é representado a quebra da componente velocidade v_1 nos planos x e y , sendo importante analisar a energia cinética translacional dos dois planos e também a energia cinética rotacional do pêndulo. Com relação ao plano x foi levado em consideração no equacionamento não somente o centro de massa do pêndulo mas também a translação da base do pêndulo provocado pela rotação do braço.

Substituindo a energia potencial e cinética obtida a partir do estudo do sistema é então obtida a função lagrangeana L .

$$L = \frac{I_0 \dot{\alpha}^2}{2} - m_1 \ell_1 r \dot{\theta} \dot{\alpha} \cos \theta + \frac{m_1 r^2 \dot{\alpha}^2}{2} + \frac{2m_1 \ell_1^2 \dot{\theta}^2}{3} - m_1 g \ell_1 \cos \theta \quad (17)$$

Seguindo a modelagem lagrangeana são definidas duas de equações Lagrange.

$$Q_0 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \alpha} = T \quad (18)$$

$$Q_1 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad (19)$$

Sendo que T representa o torque aplicado pelo motor no braço, onde este depende dos parâmetros do motor K_t , K_e e da resistência R e do sinal de entrada PWM descritos na Equação (1) previamente introduzido no Tópico 2 sobre Materiais e Métodos.

Devido a não linearidade do sistema, obtido pela componente trigonométrica em seu modelo, é considerado, a fim de trabalhar com o sistema de forma linear, o comportamento linear do sistema em pequenos ângulos, considerando a aproximação $\sin(\theta) \approx 0$.

Realizando as devidas substituições são então obtidas as matrizes referentes ao sistema em espaço de estados. Baseando que os parâmetros são ordenados por:

$$x = (\alpha \quad \theta \quad \dot{\alpha} \quad \dot{\theta})^T \quad (20)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & 0 \\ 0 & a_{42} & a_{43} & 0 \end{pmatrix} \quad (21)$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b_{31} \\ b_{41} \end{pmatrix} \quad (22)$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (23)$$

Onde as variáveis escalares são dadas por:

$$\begin{aligned} a_{42} &= \frac{3 \cdot g \cdot (3 \cdot m_0 d^2 + m_0 \cdot \ell_0^2 + 3 \cdot m_1 \cdot r^2)}{\ell_1 \cdot (12 \cdot m_0 d^2 + 4 \cdot m_0 \cdot \ell_0^2 + 3 \cdot m_1 \cdot r^2)^2} \\ a_{32} &= \frac{9 \cdot g \cdot m_1 r}{12 \cdot m_0 d^2 + 4 \cdot m_0 \ell_0^2 + 3 \cdot m_1 \cdot r^2} \\ a_{33} &= -\frac{12 \cdot K_e \cdot K_t}{R \cdot (12 \cdot m_0 \cdot d^2 + 4 \cdot m_0 \cdot \ell_0^2 + 3 \cdot m_1 \cdot r^2)} \\ a_{43} &= -\frac{9 \cdot K_e \cdot K_t \cdot r}{R \cdot \ell_1 \cdot (12 \cdot m_0 \cdot d^2 + 4 \cdot m_0 \cdot \ell_0^2 + 3 \cdot m_1 \cdot r^2)} \\ b_{31} &= \frac{144 \cdot K_t}{R \cdot (12 \cdot m_0 \cdot d^2 + 4 \cdot m_0 \cdot \ell_0^2 + 3 \cdot m_1 \cdot r^2)} \\ b_{41} &= \frac{108 \cdot K_t \cdot r}{R \cdot \ell_1 \cdot (12 \cdot m_0 \cdot d^2 + 4 \cdot m_0 \cdot \ell_0^2 + 3 \cdot m_1 \cdot r^2)} \end{aligned} \quad (24)$$

Vale ressaltar que a modelagem realizada foi linearizada em torno de 0° , porém, como a sintonia do controlador não foi baseado no modelo obtido, na implementação do sistema por meio dos ensaios usou-se como ponto de referência a posição angular do pêndulo de 180° , ou seja, posição espelhada de 0° . Isto se dá devido ao ponto inicial de leitura do sensor, ao iniciar o ensaio a leitura de 0° se encontra na posição pendente para baixo, tornando a posição pendente para cima de 180° como posição de interesse para estabilidade do pêndulo.

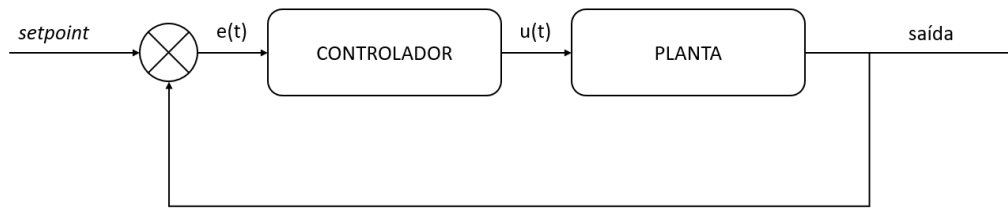
3.4 Método de Controle de Sistema

O controle de um pêndulo invertido é um dos problemas e alvos de estudo clássico da engenharia. O objetivo previsto no desenvolvimento de um controlador para este módulo é a capacidade do sistema manter o pêndulo estabilizado na posição vertical para cima.

3.4.1 Controlador Proporcional Integral Derivativo (PID)

A finalidade do controlador é comparar o valor real da saída da planta com a entrada de referência, e fornecer um sinal de controle que reduzirá o erro a zero ou ao mais próximo de zero possível (OGATA, 2011). Assim, como descrito neste trecho, a ideia da implementação do controlador em um sistema consiste, basicamente, da soma dos sinais de saída e de entrada. Esta soma gera uma comparação, denominada erro $e(t)$, na qual será utilizada para determinar a ação de controle. O controlador então funciona como um dispositivo que tem como entrada o sinal de erro e gera como saída um sinal de controle $u(t)$ a ser aplicado na planta com o intuito de atender a determinado objetivo. A disposição do sistema com o controlador está descrita na Figura 17.

Figura 17: Diagrama geral do sistema em malha fechada com controlador.



Fonte: Autorial Própria.

A utilidade dos controladores PID está em sua aplicação, este apresenta características generalistas com relação aos sistemas. Sendo uma aplicação recorrente onde o modelo matemático da planta é desconhecido, podendo ser implementado uma ação de controle geral, possibilitando o controle satisfatório do sistema (OGATA, 2011).

Os três modos básicos implementados no controle por esta técnica, envolvendo o sistema em malha fechada, são os termos Proporcional (P), Integral (I) e Derivativo (D).

3.4.1.1 Proporcional (P)

O controle proporcional é o modo mais simples de controle desta técnica (SMITH, 1998). Sendo descrito pela Equação (25).

$$u(t) = K_p e(t) \quad (25)$$

Com $e(t)$ representando o erro, ou seja, a diferença entre o *set point* e a saída do sistema e $u(t)$ representando o sinal de controle.

Em alguns casos, a ação proporcional é acrescida de um termo constante, chamado de *bias* ou *offset*. Desta forma, a equação passa a ser representada por:

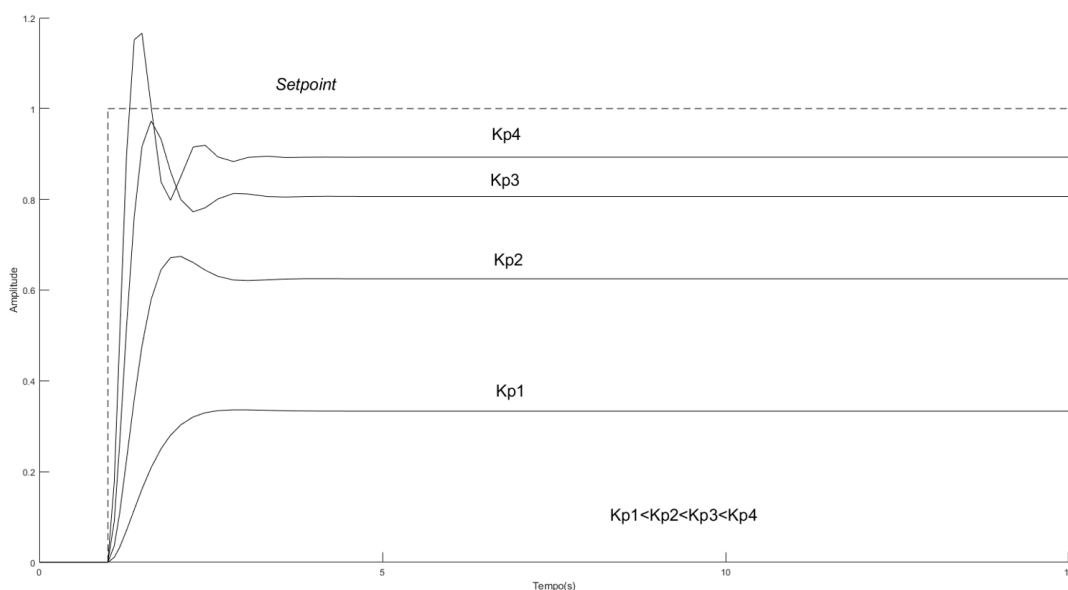
$$u(t) = \bar{u} + K_p e(t) \quad (26)$$

A Equação (25) demonstra o comportamento do controlador no sistema, onde a proporcionalidade esperada do controlador é dada pela constante K_p . Sendo a constante calculada pela Equação (27) a seguir.

$$K_p = \frac{u(t)}{e(t)} \quad (27)$$

Pela interpretação desta equação pode-se ver que quando há um aumento no erro, $e(t)$, resulta no aumento proporcional do sinal de controle, $u(t)$. Portanto, o controlador reduz sua ação de controle quando há um aumento da variável controlada. Esta ação é denominada de reversa. Por outro lado, K_p é negativo, quando há o aumento da variável controlada, há um aumento da saída do sistema. Esta ação é chamada de ação direta (SMITH, 1998).

Figura 18: Respostas típicas de nível para diferentes valores de parâmetro proporcional.



Fonte: Autoria Própria.

O ganho proporcional determina o quanto a saída irá variar com um determinado erro do sistema. Como verificado na Figura 18, quanto maior K_p , maior será a variação esperada da saída para determinado erro. Sendo assim, é um parâmetro de sensibilidade de mudança da saída para mudanças no erro (SMITH, 1998).

A vantagem deste modo de controle é sua simplicidade, já que este somente depende de uma variável a ser ajustada. Entretanto, uma de suas desvantagens é sua incapacidade de eliminar erros estacionários que surgem após mudanças de *set point* ou devido a uma perturbação constante na saída (SMITH, 1998).

3.4.1.2 Proporcional-Integral (PI)

Como verificado na ação proporcional, o *offset* que não é possível ser eliminado por este método pode ser prejudicial para certos processos. Desta forma, uma solução é a inserção da ação integral neste modo (SMITH, 1998).

$$u(t) = K_p e(t) + \frac{K_p}{T_I} \int e(t) dt \quad (28)$$

com T_I sendo o tempo integral, com dimensão de tempo.

Assim, para verificar o comportamento do sistema com tal controlador, interpreta-se a componente integral da Equação (28). Considerando que o sistema esteja em regime estacionário, ou seja, tanto o sinal de erro $e(t)$, quanto o sinal de controle $u(t)$ são constantes. Porém, neste modo o termo integral mostra que há variação do sinal de controle até que o erro seja nulo. De forma geral, quanto menor T_I , mais rápido será a reação do controle integral.

Este modo descrito envolvendo os ganhos proporcional e integral é mais comumente utilizado devido a inviabilidade do uso somente do ganho integral. A ação proporcional gera um sinal onde o erro passa a persistir por um tempo e o ganho

integral atuado simultaneamente realiza uma ação corretiva tão logo um erro seja detectado.

Uma desvantagem do uso da ação integral é que ela tende a produzir respostas oscilatórias e, portanto, reduz a estabilidade do sistema (SMITH, 1998). Além de ser um modo mais difícil de ser sintonizado devido a presença de duas variáveis a serem sintonizadas, comparado ao modo proporcional.

3.4.1.3 Proporcional-Integral-Derivativo (PID)

Como mencionado no tópico anterior, a sintonia utilizando o ganho integral tende a produzir respostas oscilatórias e, portanto, reduz a estabilidade do sistema. Uma solução para este problema é a adição ao modo um ganho derivativo.

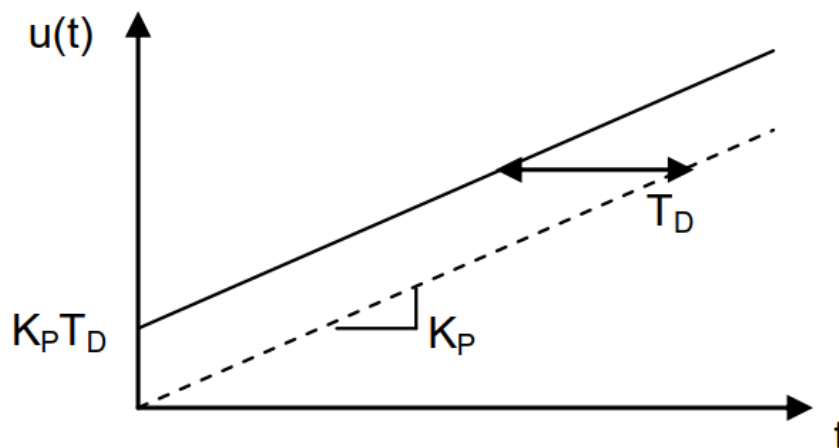
A ação de controle derivativa tem caráter antecipatório, sendo sua função reagir antecipadamente ao comportamento futuro do sinal de erro com base na sua taxa de variação (SMITH, 1998). A Equação (29) descreve o controlador PID.

$$u(t) = K_p e(t) + \frac{K_p}{T_I} \int e(t) dt + K_p T_D \frac{de(t)}{dt} \quad (29)$$

com T_D representando o tempo derivativo e com dimensão de tempo.

A implementação do ganho derivativo, como verificado na Equação (29), representa uma resposta antecipatória do controlador no sistema.

Figura 19: Ação derivativa em uma resposta de rampa.



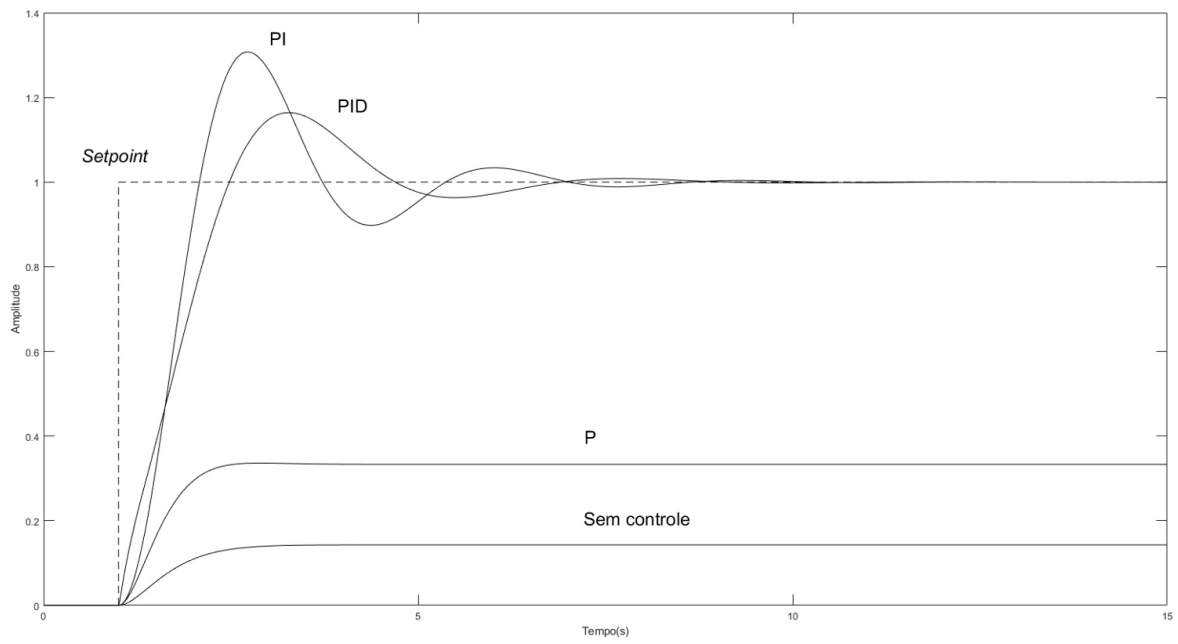
Fonte: SMITH, 1998.

Como pode ser observado na Figura 19, o comportamento de um sistema com resposta de saída em rampa (reta pontilhada), ao ser adicionado o ganho derivativo este resulta em um adiantamento de T_D unidades de tempo.

Ao incorporar um caráter antecipatório à ação de controle, o modo derivativo tende a estabilizar o sistema. O controle derivativo também tende a diminuir o erro estacionário e melhorar a resposta dinâmica do sistema (SMITH, 1998). Entretanto, para uma saída afetada por ruídos, este ganho derivativo acaba amplificando consideravelmente este ruído, podendo ser inviável sua aplicação e necessitando que seja realizado uma filtragem prévia.

É importante verificar a necessidade e viabilidade da implementação de cada tipo de controlador mencionado. A seguir na Figura 20 é ilustrado um exemplo dos efeitos qualitativos de cada modo.

Figura 20: Respostas típicas de cada modo do controlador PID.



Fonte: Autoria Própria.

4. RESULTADOS

Neste capítulo, serão apresentados os resultados obtidos na modelagem matemática do sistema baseando-se nos parâmetros medidos das componentes que foram utilizadas na construção do módulo didático Pêndulo de Furuta, como também os resultados dos experimentos para obtenção dos ganhos do controlador PID por meio de método de sintonia empírica.

4.1 Modelo do sistema

Conforme descrito na Subseção 3.3.1, a modelagem do módulo didático foi equacionada por meio do método de Lagrange. Após o procedimento do método foi então obtido as Equações (24), que representam as componentes da representação em espaço de estados modelada nas Equações (20), (21), (22) e (23). A seguir, são substituídas nessas equações os parâmetros respectivos do módulo que estão descritos nas Tabelas 1 e 3.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 65.6430 & -2.5917 & 0 \\ 0 & 104.8465 & -2.2029 & 0 \end{pmatrix} \quad (30)$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 135.8083 \\ 115.4370 \end{pmatrix} \quad (30)$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (32)$$

É destacado que a partir da modelagem feita não foi possível representar fielmente o módulo didático em questão, já que foram desconsiderados alguns parâmetros, como os atritos do motor e da junção do pêndulo, devido a sua complexidade de serem calculados e a extração dos parâmetros do motor. Estes seriam fatores que entrariam no cálculo das equações de Lagrange. Outro fator que torna a modelagem menos precisa é devido a detalhes a serem considerados na estrutura do módulo, devido a não uniformidade da haste horizontal e o posicionamento do *encoder* sobre a mesma haste, acaba tornando o equacionamento envolvendo o centro de massa e o momento de inércia complexos para serem calculados, necessitando de maior detalhamento e estudo estrutural.

4.2 Sintonia do Controlador

Como mencionado anteriormente, a sintonia do controlador foi realizada por meio de um método de sintonia empírica. Realizando a modelagem do sistema em formato característico a ser implementado na plataforma Simulink®, a taxa de amostragem dos *encoders*, do motor e do pêndulo foram ajustadas para uma taxa de amostragem de 4000 *amostras/segundos*. Este valor foi obtido por meio de testes realizados para leitura, e foi verificado que para taxas de amostragem menores a leitura dos sensores não foi fiel, gerando erro de leitura. Adicionalmente, como este trabalho não envolveu o procedimento de subida do pêndulo a partir da posição pendente para baixo, ou seja, o processo de *Swing up*, foi estabelecido um faixa de funcionamento do controlador de $\pm 10^\circ$ em relação ao *setpoint* (180°), sendo a posição pendente inicial considerada de 0° , assim, os parâmetros a serem analisados serão todos com referência ao ponto que o pêndulo atinge a posição de controle, ou seja, $\pm 170^\circ$. Adicionalmente, para evitar que o controlador realize a rotação do braço indefinidamente, com intuito de controle e podendo prejudicar o equipamento, foi estabelecido um limite de rotação de $\pm 360^\circ$ do braço. O procedimento para o posicionamento do pêndulo até o período de funcionamento do controlador foi feito manualmente.

O método utilizado para obtenção dos ganhos do controlador PID é dada nos passos extraídos da página *Control Tutorial for Matlab® & Simulink®*, a seguir.

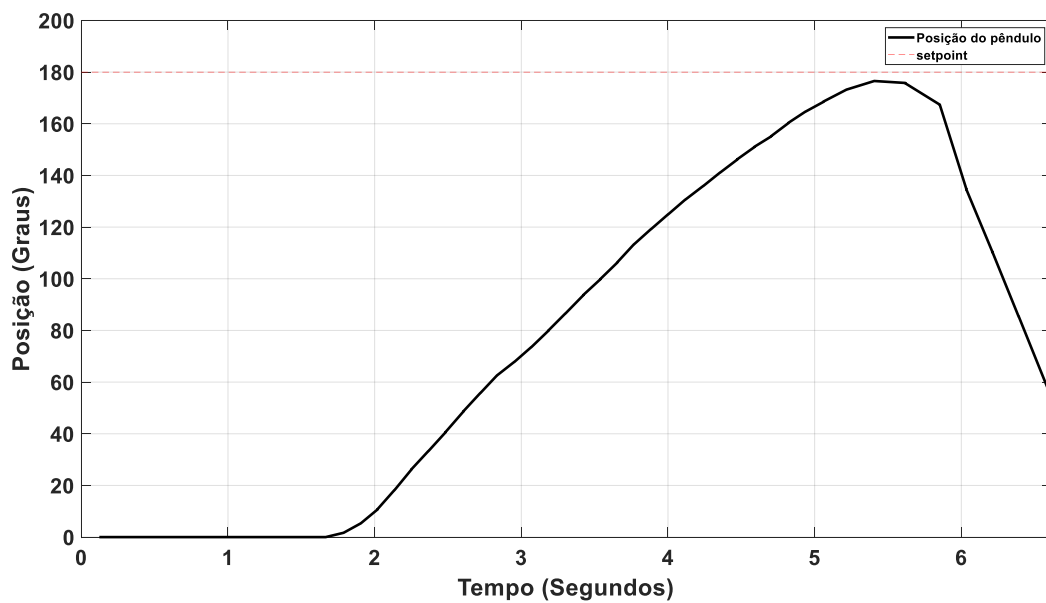
É disposto, inicialmente, a malha do sistema com os ganhos do controlador PID ajustados para um, ou seja, $K_P = 1$, $K_I = 1$ e $K_D = 1$. A partir disto, é iniciado a sintonia do controlador verificando a resposta transitória do pêndulo, sendo ajustado os ganhos baseados nesta resposta e nos conhecimentos da contribuição de cada ganho no controle do sistema, podendo ser resumido no Quadro 1, a seguir. Como informações adicionais também são levadas em consideração a distância percorrida pelo braço para estabilizar o pêndulo, denotada por D_p e dada em graus, e o tempo para que o braço entre em oscilação constante, denotada por $Temp_b$ e dada em segundos.

Quadro 1: Efeitos dos ganhos do controlador PID separadamente.

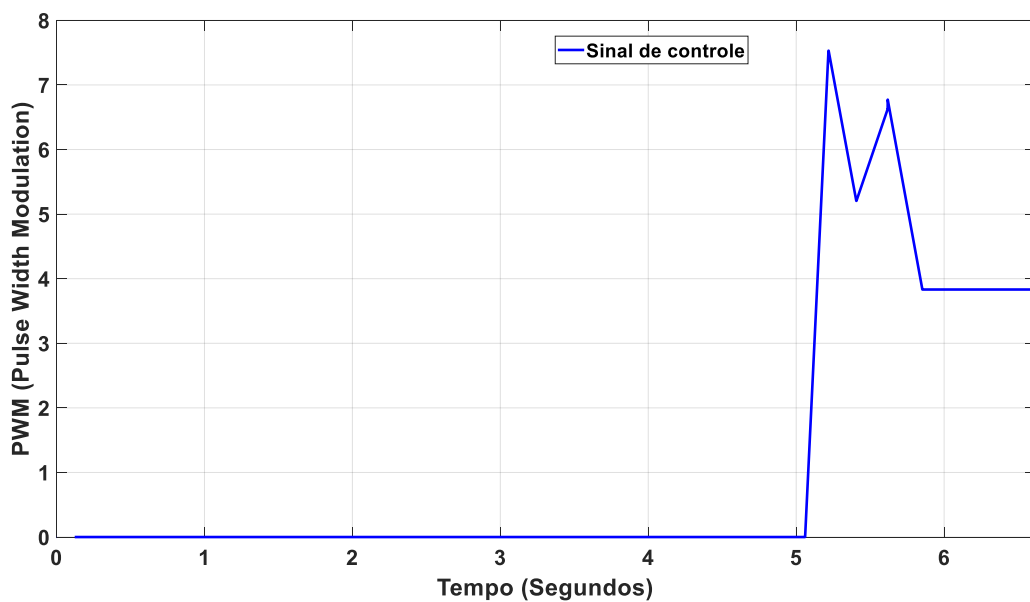
Parâmetros	Tempo Subida	Overshoot (M_o)	Tempo Assentamento	Erro Estacionário	Estabilidade
K_P	Diminui	Aumenta	Muda pouco	Diminui	Degrada
K_I	Diminui	Aumenta	Aumenta	Elimina	Degrada
K_D	Muda pouco	Diminui	Diminui	Sem Efeito	Melhora

Fonte: Autoria própria.

Assim, interpretando a resposta transitória obtida na Figura 21 e o sinal de controle da Figura 22, é evidenciado que o sistema ainda se encontra instável. Ao atingir o ângulo de 170° , alcançado aos 5s, o controlador reagiu para tentar controlar o pêndulo, entretanto, a resposta não foi rápida o suficiente, corrigindo até 176.5° aos 5.4s. Sendo perceptível também resíduos da componente integrativa mantendo o sinal de controle não nulo.

Figura 21: Posição angular do pêndulo (P=1, I=1, D=1).

Fonte: Autoria Própria.

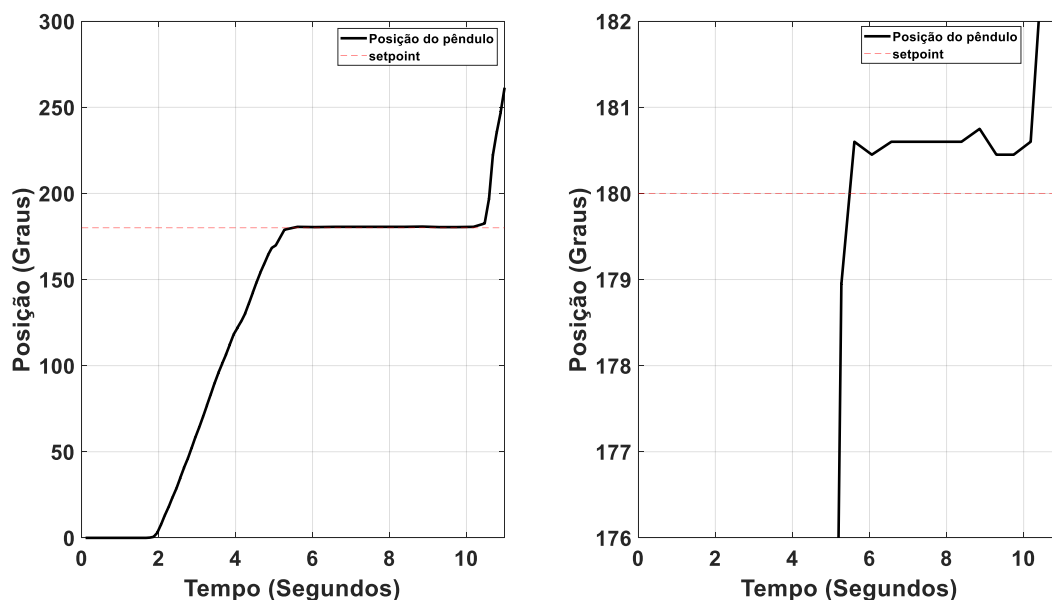
Figura 22: Sinal de controle (P=1, I=1, D=1).

Fonte: Autoria Própria.

O próximo passo é aumentar o ganho proporcional para verificar qual o efeito do aumento deste ganho ocasiona no sistema.

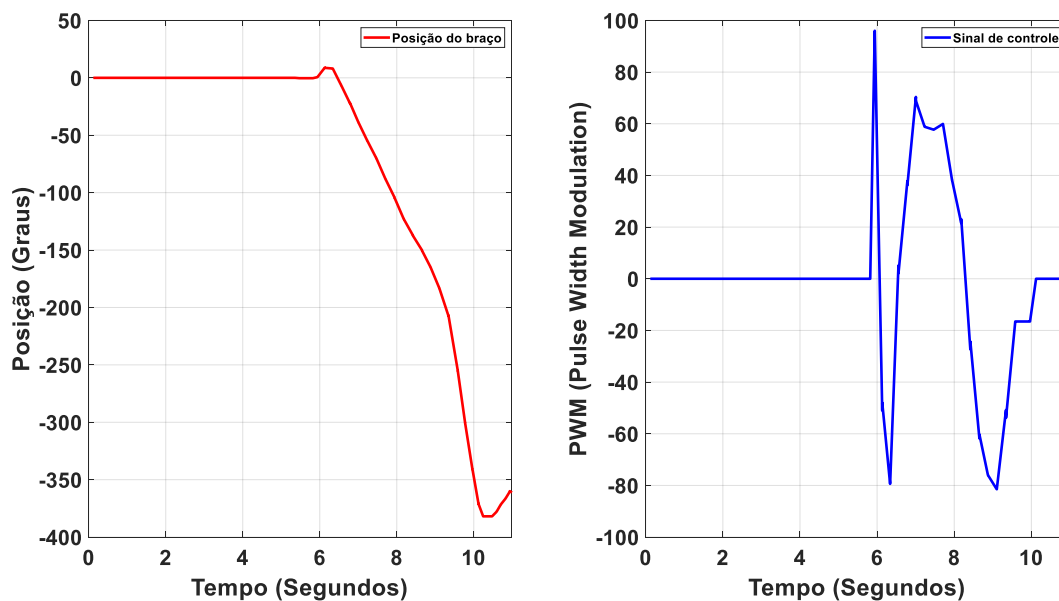
Aumentando o ganho proporcional para $K_p = 10$ foi possível obter os gráficos das Figuras 23 e 24. Como verificado, a resposta já apresenta estabilidade e com *overshoot* nulo. Porém, com erro estacionário de $0,6^\circ$, D_p de 9° e entrando em instabilidade aos 10,18s, quando o braço atinge os 360° de rotação.

Figura 23: Posição angular do pêndulo (esquerda) e sua visualização ampliada ao redor do *setpoint* (direita) ($P=10$, $I=1$, $D=1$).



Fonte: Autoria Própria.

Figura 24: Posição angular do braço e sinal de controle (P=10, I=1, D=1).

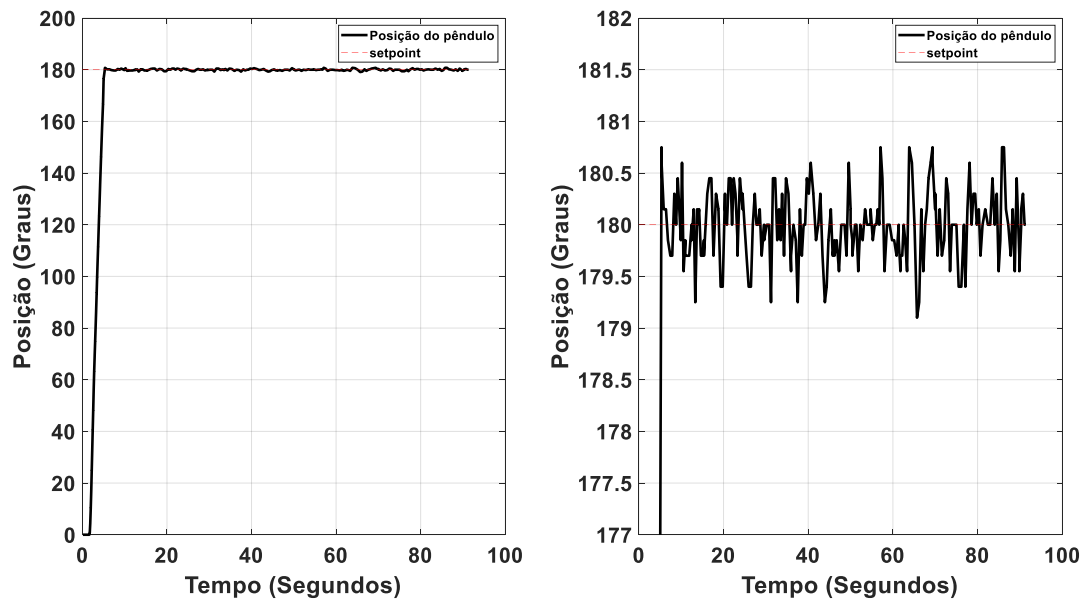


Fonte: Autoria Própria.

Como próximo passo, aumenta-se o ganho integral gradativamente para eliminar tal erro.

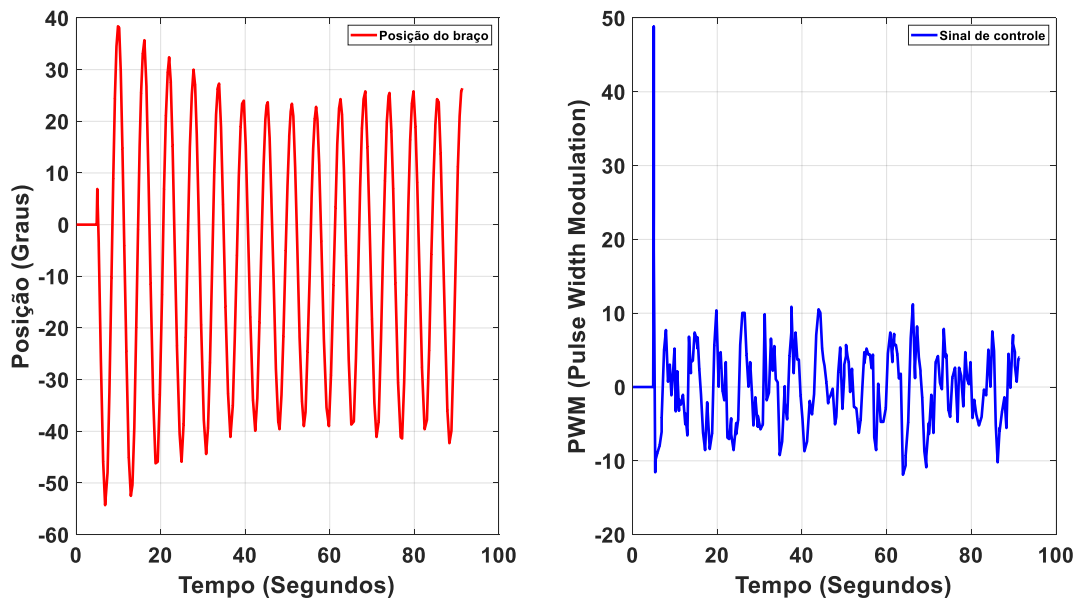
Após vários ajustes no ganho integral foi então verificado que o ganho de $K_I = 45$ obteve os melhores resultados, visto nas Figuras 25 e 26, eliminando o erro estacionário e, por consequência, foi possível manter o braço em estado oscilatório com $D_p = 6,9^\circ$ e $Temp_b = 36,51s$.

Figura 25: Posição angular do pêndulo (esquerda) e sua visualização ampliada ao redor do *setpoint* (direita) ($P=10$, $I=45$, $D=1$).



Fonte: Autoria Própria.

Figura 26: Posição angular do braço e sinal de controle ($P=10$, $I=45$, $D=1$).

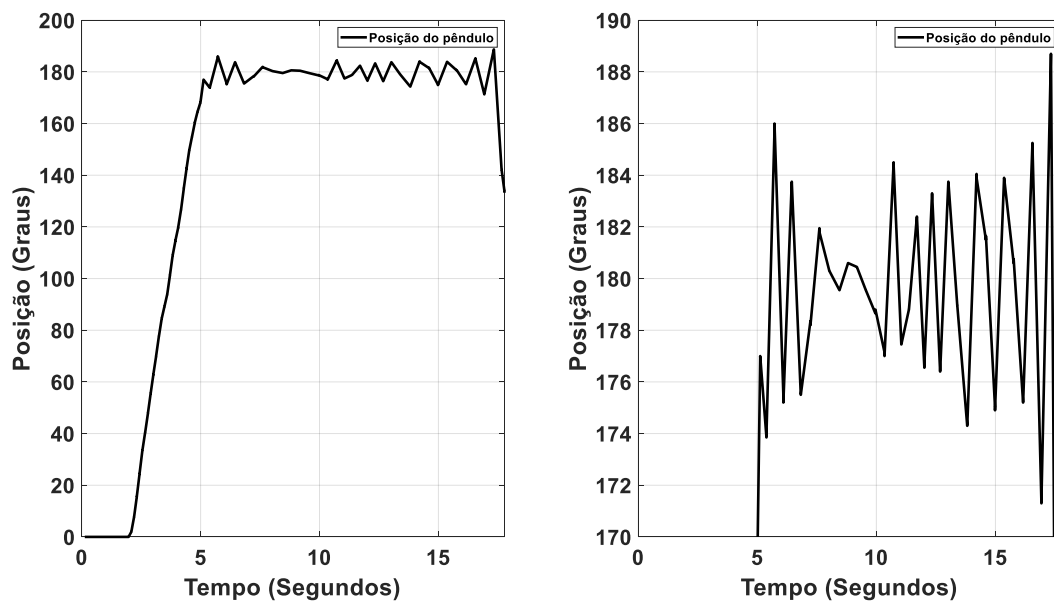


Fonte: Autoria Própria.

Como é verificado que não há um *overshoot* representativo que possa prejudicar o funcionamento do módulo, *overshoot* de $M_o = 0,38\%$, foi então testado qual o comportamento do sistema caso implementado o controlador sem o ganho derivativo, levantando a questão de que se é possível controlar o sistema com um controlador PI.

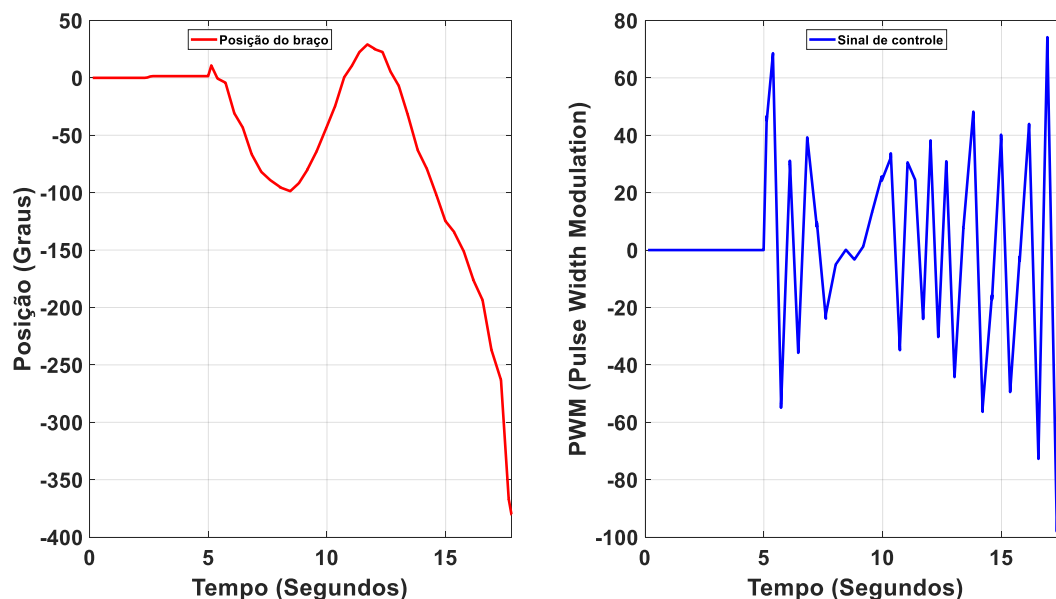
Considerando o ganho derivativo nulo é visto, nas Figuras 27 e 28, que o controlador não consegue estabilizar o sistema, logo não consegue-se controlar o módulo. Foi verificado um *overshoot* de $M_o = 3,33\%$ e D_p igual a $10,8^\circ$. Assim, é constatado que a presença do ganho derivativo é essencial para o controle do sistema, não sendo suficiente a partir dos ganhos proporcional e integral empregados, a implementação de um controlador PI que estabilize o sistema.

Figura 27: Posição angular do pêndulo (esquerda) e sua visualização ampliada ao redor do *setpoint* (direita) (P=10, I=45, D=0).



Fonte: Autoria Própria.

Figura 28: Posição angular do braço e sinal de controle (P=10, I=45, D=0).



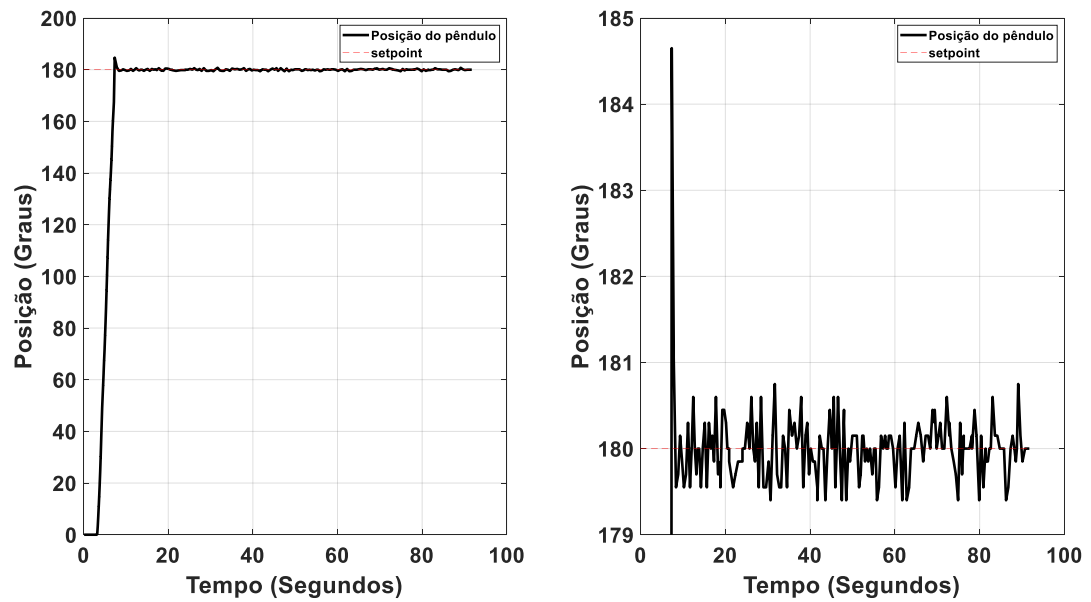
Fonte: Autoria Própria.

Vale ressaltar que em função da metodologia de sintonia empírica, o reajuste dos ganhos que foram verificados eficientes nos passos anteriores não é reavaliado. Assim, a sintonia empregada neste trabalho não trata de ajuste específico para um controlador PI.

Analisando novamente os resultados obtidos no experimento com os ganhos $K_p = 10$, $K_I = 45$ e $K_D = 1$, é aferido que para estabilizar inicialmente o pêndulo a haste horizontal percorre um ângulo relativamente extenso com $D_p = 6,9^\circ$ e um $Temp_b = 36,51s$ relativamente demorado. Dessa forma, é considerado aumentar gradativamente o ganho derivativo para verificar o comportamento da variação na resposta transitória.

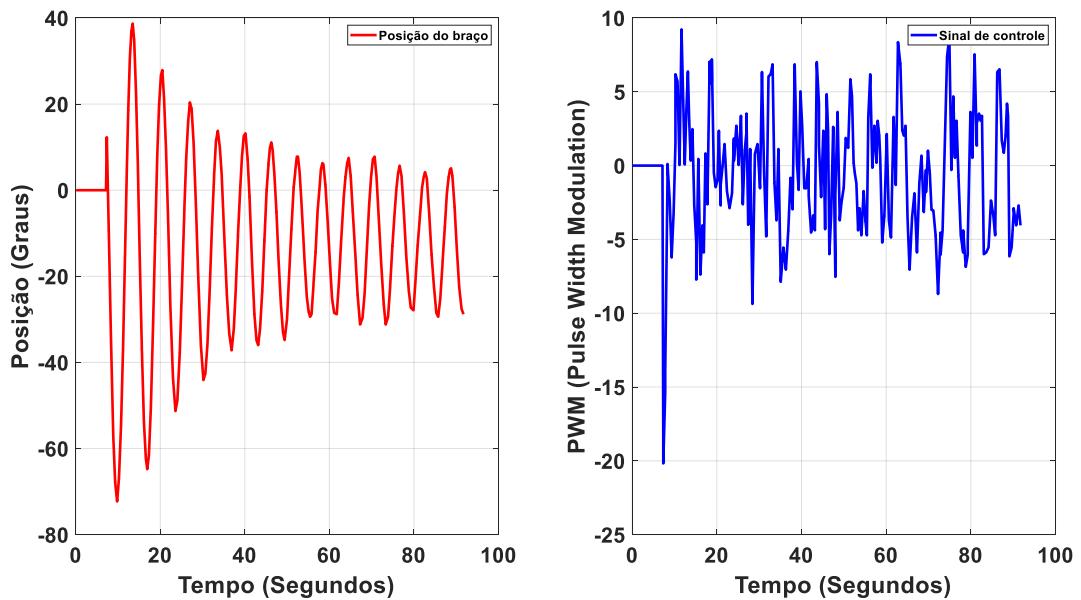
Nas Figuras 29 e 30 são vistos os resultados dos experimentos do controlador PID com o aumento do ganho derivativo para $K_D = 5$. É averiguado que houve um aumento no *overshoot* inicial para $M_o = 2,56\%$, a distância percorrida pelo braço até controlar o pêndulo foi de $D_p = 12,3^\circ$ e o tempo para atingir a oscilação constante do braço foi de $Temp_b = 29,54s$.

Figura 29: Posição angular do pêndulo (esquerda) e sua visualização ampliada ao redor do *setpoint* (direita) ($P=10$, $I=45$, $D=5$).



Fonte: Autoria Própria.

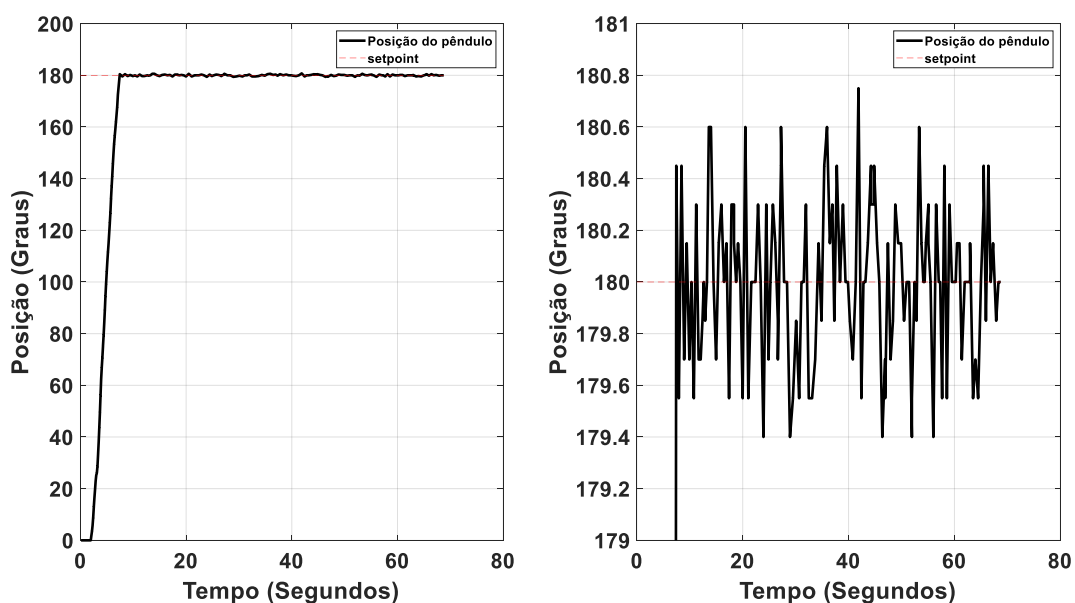
Figura 30: Posição angular do braço e sinal de controle ($P=10$, $I=45$, $D=5$).



Fonte: Autoria Própria.

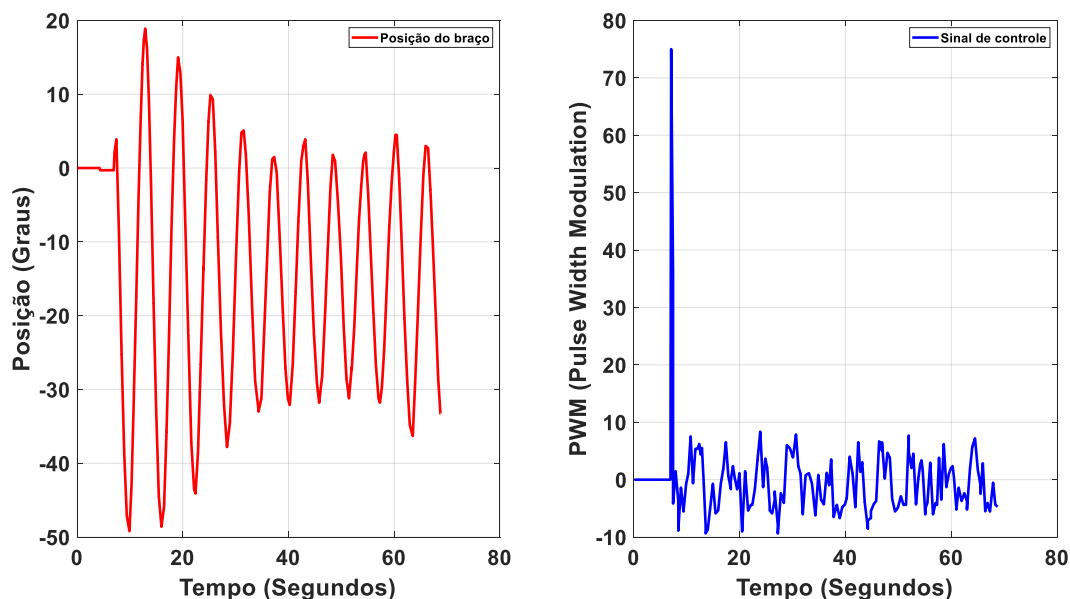
Para melhorar o resultado, então, foi considerado diminuir o ganho derivativo entre 1 e 5. Após várias implementações foi verificado que o ganho derivativo $K_D = 3$ obteve os melhores resultados, dados pelas Figuras 31 e 32. É observado um menor *overshoot* de $M_o = 0,22\%$, a distância percorrida até o controle do pêndulo diminuiu para $D_p = 3,9^\circ$ e o tempo até a oscilação do braço foi reduzido para $Temp_b = 26,59s$.

Figura 31: Posição angular do pêndulo (esquerda) e sua visualização ampliada ao redor do *setpoint* (direita) (P=10, I=45, D=3).



Fonte: Autoria Própria.

Figura 32: Posição angular do braço e sinal de controle (P=10, I=45, D=3).



Fonte: Autoria Própria.

Neste ponto já é comprovado que foi possível realizar a sintonia do controlador PID por método empírico com sucesso. Entretanto, como é verificado, mesmo com o melhor resultado obtido não foi possível eliminar o estado oscilatório do braço. Isto acontece, evidentemente, devido ao braço não estar sendo considerado na parametrização do controlador no sistema. Para eliminar tal oscilação do braço é considerado realizar um novo procedimento, a combinação de outro controlador. Para tanto é combinado a saída de dois controladores, o controlador PID sintonizado anteriormente e um novo controlador, com o objetivo de eliminar ou diminuir a oscilação do braço (PATHAK, 2017). O procedimento é dado na Equação (33) e Equação (34).

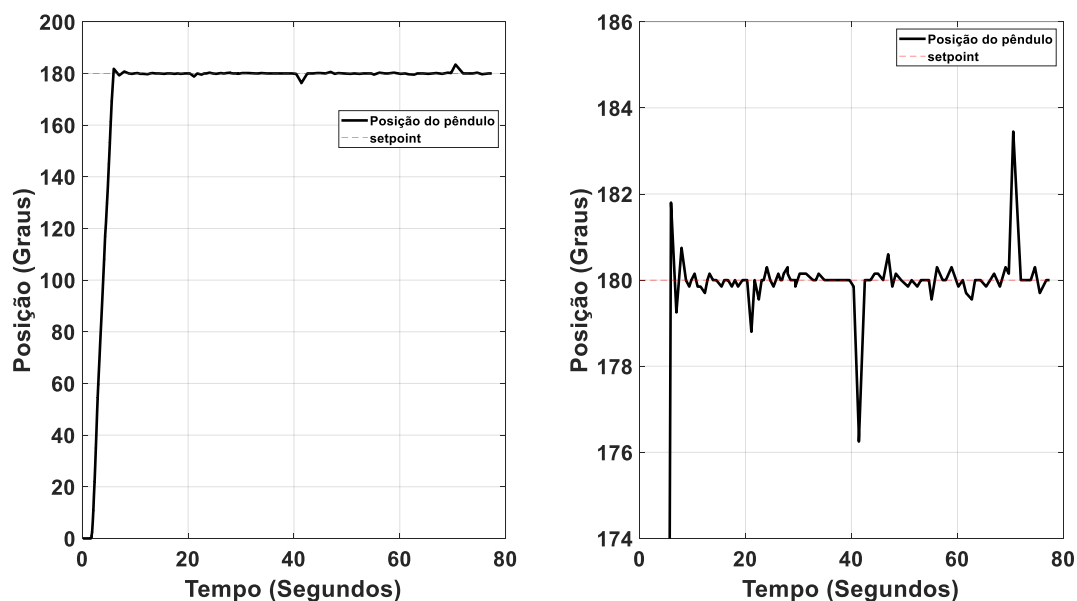
$$PID_{total} = Controlador_{p\grave{e}ndulo} + Controlador_{bra\c{c}o} \quad (33)$$

$$u_{total}(t) = \left(K_P e_p(t) + \frac{K_P}{T_I} \int e_p(t) dt + K_P T_D \frac{de_p(t)}{dt} \right) + (K_{pb} e_b(t)) \quad (34)$$

Sendo que o controlador do pêndulo é dado pelos ganhos obtidos na sintonia empírica anteriormente e sintonizados em relação ao erro da posição angular do pêndulo, denotado por e_p , e para o controlador do braço foi empregado um controlador proporcional, sintonizado em relação ao erro da posição angular do braço, denotado por e_b .

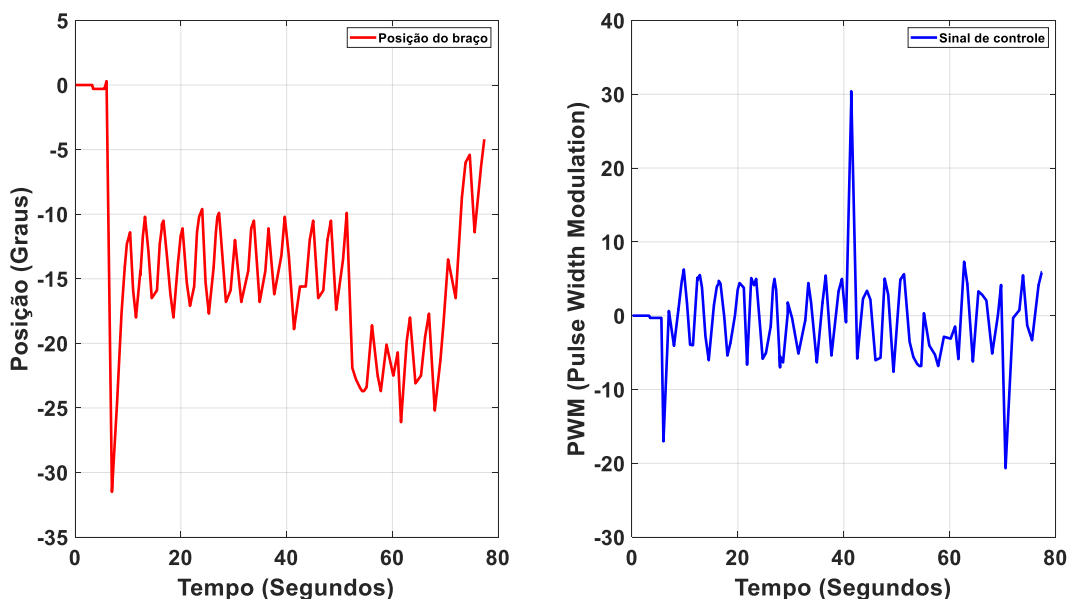
Como pode-se notar na Figura 34 foi possível, com um certo sucesso, diminuir a oscilação do braço drasticamente evidenciando um pequeno período de variação. Sendo somente implementado um controlador proporcional com ganho $K_{pb} = 1$ para o braço. Para verificar o funcionamento e performance do controlador foram aplicados distúrbios externos de amplitudes diferentes durante o experimento.

Figura 33: Posição angular do pêndulo (esquerda) e sua visualização ampliada ao redor do setpoint (direita) ($P=10$, $I=45$, $D=3$, $P_b=1$).



Fonte: Autoria Própria.

Figura 34: Posição angular do braço e sinal de controle (P=10, I=45, D=3, Pb=1).



Fonte: Autoria Própria.

É apurado que o controlador apresentou resultados satisfatórios, visto nas Figuras 33 e 34. Nas marcas de 21 segundos, 41 segundos, 52 segundos e 71 segundos foram aplicados distúrbios externos, e com êxito o controlador conseguiu manter o pêndulo estável. Sendo destacado somente que nas marcas de 52 segundos e 71 segundos os distúrbios aplicados provocaram o deslocamento do ponto oscilatório do braço. Apesar de aumentar o *overshoot* para $M_o = 1\%$ para o controle do pêndulo, a estabilidade geral do sistema foi aprimorada, verificando mais estabilidade no pêndulo e menores oscilações no braço, com $D_p = 0,6^\circ$ e $Temp_p = 2,83s$.

Vale ressaltar que resquícios oscilatórios do braço ou do pêndulo podem ser causados devido a estrutura instável do módulo, falta de nivelamento do braço, atritos intrínsecos do motor e das junções do braço com o eixo e do pêndulo com o braço, e vibrações causadas pelo motor. Além de ter sido realizado ensaios com outros valores do ganho K_{pb} para controle do braço, entretanto, foi verificado que o aumento acima do ganho $K_{pb} = 1$ apresentou respostas bruscas do braço, instabilizando o sistema e causando conflito entre os controladores do pêndulo e do braço. Estes problemas

ocasionam a instabilidade indesejada no pêndulo e são alvos futuros para melhorias no módulo.

A seguir é apresentado uma tabela com o resumo dos resultados obtidos a partir das modificações para a sintonia do controlador.

Tabela 4: Resumo dos resultados obtidos.

<i>Ganhos</i>	M_o (%)	D_p (°)	$Temp_b$ (segundos)	<i>Erro estacionário</i> (°)
$K_P = 10, K_I = 1, K_D = 1$	0%	9°	–	0,6°
$K_P = 10, K_I = 45, K_D = 1$	0,38%	6,9°	36,51s	0°
$K_P = 10, K_I = 45, K_D = 0$	3,33%	10,8°	–	–
$K_P = 10, K_I = 45, K_D = 5$	2,56%	12,3°	29,54s	0°
$K_P = 10, K_I = 45, K_D = 3$	0,22%	3,9°	26,89s	0°
$K_P = 10, K_I = 45, K_D = 3, K_{pb} = 1$	1%	0,6°	2,83s	0°

Fonte: Autoria própria.

5. CONCLUSÃO

O objetivo principal deste trabalho foi o desenvolvimento, modelagem e implementação de técnicas de controle PID em um módulo didático de um pêndulo invertido rotacional. Assim como validar os resultados a partir da análise das respostas transitórias reais do sistema controlado.

Com o intuito de desenvolver um pêndulo invertido rotacional não somente funcional, mas também com a possibilidade de replicação, de fácil acessibilidade e com preço viável, adquiriu-se materiais de baixo custo relativo para a construção do módulo. Porém, visto os resultados obtidos pode-se cogitar a construção de um protótipo com menores proporções, diminuindo possíveis complicações com materiais adicionais, podendo facilitar a obtenção de um modelo matemático do sistema. No presente trabalho, devido à sua complexidade, foi desconsiderado alguns parâmetros na modelagem e, após análise dos gráficos obtidos nos resultados dos experimentos, pôde ser visto que os equipamentos que não foram acoplados ou junções feitas proporcionaram distúrbios externos que comprometeram parcialmente os resultados. Porém, foi verificado que a estrutura construída, a escolha dos materiais e dos componentes periféricos adequaram-se de forma satisfatória.

O controlador implementado foi um controlador Proporcional Integral Derivativo, mais conhecido como controlador PID, por meio do método de sintonia empírica. Testes computacionais não foram empregados neste trabalho em função da imprecisão vista na modelagem matemática do sistema, sendo as diferenças significativas e provocadas por motivos como os parâmetros não considerados na modelagem, os atritos do motor e das junções da haste horizontal e do pêndulo, e possíveis problemas envolvendo a dinâmica estrutural do módulo didático. Entretanto, foi visto que a sintonia do controlador pelo método empregado obteve bons resultados.

Por fim, o trabalho exposto possui perspectivas para futuros aprimoramentos, particularmente uma possível análise da estrutura do módulo e diminuição da proporção do mesmo; análise mais detalhada dos equipamentos e da estrutura do módulo para possibilitar a modelagem mais precisa do sistema, considerando os parâmetros de atrito do motor e atrito do pêndulo, como também a extração dos parâmetros corretos do motor empregado. Por meio da modelagem mais precisa do

sistema, possibilita a implementação de técnicas de controle robusto que necessitam desse detalhamento, tais como o controle ótimo pelas normas H_2 e H_∞ , controladores LQR, entre outras.

REFERÊNCIAS

ANGÉLICO, Bruno A.; et al.. **Apostila do curso PTC3471: Práticas de Projeto de sistemas de controle**. Escola Politécnica da USP. Edição 2017. Disponível em:

<https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/3996762/mod_resource/content/6/PTC3471_V0.4.pdf>

BAITI, A. A.; MASHOEDAH, Mashoedah; ZAKARIJAH, M; SUPRAPTO; AHWAN, N.. **The Design of Inverted Pendulums as Learning Sources of Adaptive Control**. 2019. Journal of Physics: Conference Series. 1413. 012009. 2019.

BOUBAKER, O.. **The inverted pendulum: A fundamental benchmark in control theory and robotics**. Education and e-Learning Innovations (ICEELI). 2012. International Conference on, ACM. New York, NY, USA. Jul. 2012.

CARVALHO, Maria I. B. de; MATOS, Aníbal C. C. de.. **Mecânica Lagrangeana. Apontamentos para a disciplina Introdução à Mecânica Clássica**. Licenciatura em Engenharia Electrotécnica e de Computadores, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto. 2001/2.

CONTROL TUTORIALS FOR MATLAB & SIMULINK. **Inverted Pendulum: PID controller Design**. Disponível em:

<<https://ctms.engin.umich.edu/CTMS/index.php?example=InvertedPendulum§ion=ControlPID>>

HIBBELER, Russell C.. **Mecânica – Estática**. Décima segunda edição, Pearson, São Paulo. Edição 2010.

IQBAL, Jamshed; et al.. **Nonlinear control systems – A brief overview of historical and recent advances**. Nonlinear Engineering. Ago. 2017. Disponível em:

<https://www.researchgate.net/publication/317399603_Nonlinear_control_systems_-_A_brief_overview_of_historical_and_recent_advances>

KOLARIJANI, M. Amin Sharifi.. **Design, Build and control of single rotacional inverted pendulum**. University of Tehran. Final project of Mechatronics. 2010. Disponível em:

<<https://docplayer.net/22450662-Design-build-and-control-of-a-single-rotacional-inverted-pendulum.html>>

MATHEW, Navin J.; RAO, K. Koteswara; SIVAKUMARAN, N.. **Swing up and stabilization control of rotary inverted pendulum**. 10th Internation Symposium on Dynamics and Control of Process Systems. Mumbai, India. Dez. 2013. Disponível em:

<<http://folk.ntnu.no/skoge/prost/proceedings/dycops2013-and-cab2013/media/DYCOPS/files/0128.pdf>>

OGATA, K.. **Engenharia de controle moderno**. 5^a Edição, Pearson. Edição 2011.

OLIVEIRA, Janaína G.; et al.. **Controle de um pêndulo invertido: Uma proposta para motivação de equipes discentes**. XXXIII – Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia. Campina Grande, Paraíba. Set. 2005.

PALLÁS-ARENY, R.; WEBSTER, J. G.. **Sensors and Signal Conditioning**. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1991, pp.1-4, 300-309.

PATHAK, V. K., PALIWAL, S.. **Analysis & Control of Inverted Pendulum System Using PID Controller**. Journal of Engineering Research and Application, Vol. 7, Issue5, Part 4. Mai. 2017,pp 01-04.

SMITH, C.A.; CORRIPIO, A.B.. **Principles and practice of automatic process control**. 2a Edição, 1998.

TURCHETTI, Victor A.. **Estudo de encoders ópticos baseados no efeito moiré e projeto de um kit de encoder didático**. 2007. 152 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia de Controle e Automação) – Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2007.