

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ  
CÂMPUS CORNÉLIO PROCÓPIO  
ENGENHARIA DE CONTROLE E AUTOMAÇÃO

MARIA LUIZA BOTELHO DE OLIVEIRA

**CONTROLE ROBUSTO LPV APLICADO À PLANTA DIDÁTICA  
FESTO**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

CORNÉLIO PROCÓPIO  
2021

**MARIA LUIZA BOTELHO DE OLIVEIRA**

**CONTROLE ROBUSTO LPV APLICADO À PLANTA DIDÁTICA FESTO**

Trabalho de conclusão de curso de Graduação apresentada como requisito para obtenção do título de Bacharel em Engenharia de Controle e Automação da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).

Orientador: Prof. Dr. Cristiano Marcos Agulhari.

**CORNÉLIO PROCÓPIO**

**2021**



[4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.pt_BR)

[https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.pt\\_BR](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.pt_BR)

Esta licença permite download e compartilhamento do trabalho desde que sejam atribuídos créditos ao(s) autor(es), sem a possibilidade de alterá-lo ou utilizá-lo para fins comerciais. Conteúdos elaborados por terceiros, citados e referenciados nesta obra não são cobertos pela licença.



**Universidade Tecnológica Federal do Paraná**  
**Campus Cornélio Procópio**  
**Departamento Acadêmico de Elétrica**  
**Curso de Engenharia de Controle e Automação**



## **FOLHA DE APROVAÇÃO**

**Maria Luiza Botelho de Oliveira**

**Controle Robusto LPV aplicado à planta didática FESTO**

Trabalho de conclusão de curso apresentado às 16:00hs do dia 10/12/2021 como requisito parcial para a obtenção do título de Engenheiro de Controle e Automação no programa de Graduação em Engenharia de Controle e Automação da Universidade Tecnológica Federal do Paraná. O candidato foi arguido pela Banca Avaliadora composta pelos professores abaixo assinados. Após deliberação, a Banca Avaliadora considerou o trabalho aprovado.

---

Prof(a). Dr(a). Cristiano Marcos Agulhari - Presidente (Orientador)

---

Prof(a). Dr(a). Wagner Endo - (Membro)

---

Prof(a). Dr(a). Emerson Ravazzi Pires da Silva - (Membro)

A folha de aprovação assinada encontra-se na coordenação do curso.

## **DEDICATÓRIA**

Dedico meu trabalho à todas as pessoas que convivem com ansiedade e, assim como eu, sofreram para colocar as palavras no papel.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha mãe, Rosemeire, por todo incentivo, por sua paciência incansável, por ouvir minhas lamentações, por me consolar e tranquilizar nos momentos de desespero. Obrigada por ser minha base e exemplo.

Agradeço ao meu irmão, José Otávio, por me motivar todas as vezes em que pensei que não iria dar conta, por manter minha autoestima em dia, por ser companheiro nas ideias mais doidas, por me ajudar a encher a paciência da mãe. Você é o melhor irmão que eu poderia ter, obrigada por tanto.

Agradeço ao meu pai, que apesar de tudo, contribuiu para que eu chegasse até aqui.

Agradeço ao meu orientador Prof. Dr. Cristiano, por todo o apoio, paciência e sabedoria com que me guiou nesta trajetória. Espero que após todo esse processo, possamos manter uma amizade de boas risadas e cafés.

Agradeço ao Miguel, que se tornou meu companheiro durante a graduação, aguentou surtos, choros e mais surtos. Obrigada por todo o carinho, por não me deixar desistir, por me apoiar em cada decisão e ser tão presente na minha vida. Torço para estar ao seu lado em suas conquistas.

Aos meus amigos, em especial a Republica Repilek que me aceitou como agregada e se tornou minha família em Cornélio. Ao João Paulo, que mesmo se aproximando de mim no final da graduação, me deu todo o apoio para continuar. Às minhas amigas Carolina, Tamires, Mayara e Ana Clara, que me aguentaram enchendo o saco durante a graduação. E aos amigos da minha cidade, em especial ao Vitor que me suporta desde o cursinho.

À equipe Furiosos Cheerleading, na qual aprendi muito sobre confiança, união e persistência. Vocês marcaram meu coração com esse esporte lindo.

Ao DAELT, que me ajudou no meu desenvolvimento humano e profissional.

A Secretaria do Curso, pela cooperação.

A Universidade, por toda a estrutura fornecida para meu aprendizado.

A Deus, pela minha vida, pela minha saúde e por me capacitar em todo o caminho.

Obrigada a todos que me ajudaram de alguma forma, vocês são incríveis!

## RESUMO

Oliveira, Maria L. B. **CONTROLE ROBUSTO LPV APLICADO À PLANTA DIDÁTICA FESTO**. 2021. 42 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Engenharia de Controle e Automação. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2021.

Os sistemas físicos são, em geral, modelados de forma linear, implicando em imprecisões no sistema de controle. As técnicas de controle robusto visam mensurar as variações e garantir que o sistema respeitará os critérios de resposta, de modo a aprimorar a performance e estabilidade do mesmo. Neste sentido, o presente trabalho tem por objetivo a síntese de um controlador robusto, baseado em teorias de controle, que busca a estabilidade em um sistema de controle de nível, sujeito a perturbações definidas pelo usuário. Os fundamentos utilizados para o desenvolvimento incluem as técnicas baseadas nas normas  $H_\infty$  e  $H_2$ , sistemas lineares de parâmetro variante no tempo, desigualdades matriciais lineares, dentre outros. Para a análise de desempenho do controle, o mesmo foi sujeito a seis simulações com condições de priorização diferentes. O sistema foi controlado de forma satisfatória, tendo seu melhor desempenho com a priorização da economia de energia de controle.

**Palavras-chave:** Controle-robusto. Desempenho. Parâmetros-variantes. Norma- $H_2$ . Norma- $H_{\infty}$ .

## ABSTRACT

Oliveira, Maria L. B. **ROBUST LPV CONTROL APPLIED TO THE FESTO TEACHING PLAN**. 2021. 42 f. Graduation work– Control and Automation Engineering. Federal Technological University of Paraná. Cornélio Procópio, 2021.

Physical systems are, in general, modeled linearly, implying inaccuracies in the control system. Robust control techniques aim to measure variations and ensure that the system will meet the response criteria, in order to improve the performance and stability. In this sense, the present work aims to obtain a synthesis of a robust controller, based on control theories, seeking stability in a level control system, subject to user-defined disturbances. The fundamentals used for development include techniques based on  $H_\infty$  and  $H_2$  standards linear systems of variant parameter in time, linear matrix inequalities, among others. For the control performance analysis, the system was subject to six simulations with different prioritization conditions. The system was controlled satisfactorily, having its best performance with the prioritization of energy saving control.

**Keywords:** Robust-control. Performance. Variable-parameters. Norm-H2. Norma-Hinf

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	<b>10</b>
1.1 OBJETIVOS GERAIS .....	11
1.1.1 Objetivos específicos .....	11
<b>2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b> .....	<b>12</b>
2.1 SISTEMAS DINÂMICOS NÃO-LINEARES .....	12
2.2 LINEARIZAÇÃO DE SISTEMAS NÃO-LINEARES.....	12
2.3 SISTEMAS LINEARES DE PARÂMETRO VARIÁVEL.....	13
2.4 SISTEMA DE NÍVEL .....	14
2.6 ESTABILIDADE QUADRÁTICA .....	15
2.7 NORMAS DE SISTEMAS.....	17
2.7.1 Norma $H_2$ .....	18
2.7.1 Norma $H_\infty$ .....	19
<b>3 MODELAGEM DO SISTEMA LPV</b> .....	<b>21</b>
<b>4 SÍNTESE DO CONTROLADOR</b> .....	<b>23</b>
4.1 SISTEMA DE CONTROLE ROBUSTO MISTO $H_2/H_\infty$ .....	23
<b>5 RESULTADOS E DISCUSSÕES</b> .....	<b>26</b>
5.1 PRIORIZAÇÃO DA VELOCIDADE DE RESPOSTA E SEM DISTÚRBO NO SISTEMA.....	26
5.2 PRIORIZAÇÃO DA VELOCIDADE DE RESPOSTA E COM DISTÚRBO NO SISTEMA.....	27
5.3 VELOCIDADE E ECONOMIA COM PONDERAÇÃO IGUAL E SEM DISTÚRBO NO SISTEMA .....	29
5.4 VELOCIDADE E ECONOMIA COM PONDERAÇÃO IGUAL E COM DISTÚRBO NO SISTEMA .....	31
5.5 PRIORIZAÇÃO DA ECONOMIA DE CONTROLE E SEM DISTÚRBO NO SISTEMA.....	32
5.6 PRIORIZAÇÃO DA ECONOMIA DE CONTROLE E COM DISTÚRBO NO SISTEMA.....	33
<b>6 CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> .....	<b>36</b>
6.1 CONTINUIDADE DO TRABALHO.....	36
<b>REFERÊNCIAS</b> .....	<b>37</b>
<b>ANEXO A – Código para obtenção do Controle Misto</b> .....	<b>40</b>
<b>ANEXO B – Código para simulação do Controle Misto</b> .....	<b>44</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Uma das maiores dificuldades nas aplicações das teorias de controle está nas imperfeições dos sistemas físicos ao serem modelados como sistemas lineares. Devido à necessidade de precisão nos sistemas dinâmicos, é desejado que a performance e sua estabilidade sejam tolerantes às imperfeições (MAZONI, A. F., 2008). Neste sentido, as técnicas de controle robusto visam mensurar as variações e garantir que o sistema respeitará aos critérios de resposta.

Os métodos de controle  $H_\infty$  e  $H_2$  são duas principais correntes na teoria de controle robusto. A principal vantagem do uso desses métodos é a possibilidade do acréscimo de incertezas na planta, possibilitando o projeto de um controlador mais robusto e menos conservador, ao mesmo tempo que um certo critério de desempenho é otimizado (ZHOU; DOYLE, 1998).

A técnica de desigualdades matriciais lineares (LMIs) tem sido muito utilizada nos sistemas de controle para a solução de problemas de otimização. Com a utilização das LMIs, uma grande quantidade de problemas decorrentes da teoria de sistemas de controle podem ser descritos e reduzidos para poucos padrões de otimização convexa ou quase-convexa, o que justifica o grande interesse e crescimento na sua utilização (FARHOODI; BEHESHTI, 2008; BOYD et al., 1994; GHAOUI; NICULESCU, 2000).

A popularização das LMIs possibilitou o desenvolvimento de diferentes abordagens para modelagem de sistemas. Dentre elas, se destaca a modelagem LPV (*Linear Parameter Varying*), em que elementos variantes no tempo, ou mesmo não-linearidades, podem ser representados como um conjunto parametrizado de sistemas lineares e invariantes no tempo (CHEN; WEN, 2013). Com isso, é possível utilizar condições convexas de síntese, criadas originalmente para sistemas lineares e invariantes no tempo, para lidar com sistemas com complexidade mais elevada.

Neste sentido, o trabalho desenvolvido apresenta a forma em que será abordado um problema de controle de nível em uma planta didática a partir de seu modelo matemático. Seu desenvolvimento consiste em uma pesquisa de embasamento teórico dos conceitos necessários, para em seguida desenvolver uma modelagem matemática LPV que aproxime a não-linearidade do sistema de um sistema linear.

Ao final serão apresentados os resultados obtidos a partir das simulações realizadas com o controle desenvolvido. Além disso, será proposta uma continuidade de trabalho baseada neste controle.

## 1.1 OBJETIVOS GERAIS

O trabalho tem por objetivo geral a obtenção de um modelo matemático e a proposição de uma síntese de controlador robusto utilizando conceitos LPV, de modo a realizar o controle de nível da planta didática de forma simulada.

### 1.1.1 Objetivos específicos

Os objetivos específicos estão descritos da seguinte maneira:

- Realizar revisões bibliográficas;
- Realizar a modelagem do sistema dinâmico de nível utilizando os conceitos LPV;
- Elaborar uma proposta de síntese de controle robusto;
- Analisar os resultados obtidos e sugerir melhorias.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo será apresentada a fundamentação teórica que foi utilizada como base de estudo para o desenvolvimento do sistema. Serão apresentados conceitos de sistemas dinâmicos não-lineares, linearização de sistemas não lineares, sistemas lineares de parâmetro variável, estabilidade quadrática, condições LMIs, controle utilizando as normas  $H_\infty$  e  $H_2$ .

### 2.1 SISTEMAS DINÂMICOS NÃO-LINEARES

Seja  $\mathcal{G}\{u(t)\}$  uma representação geral de um sistema com entradas  $u(t)$ . Um sistema dinâmico é dito linear caso respeite o Princípio da Superposição demonstrado na Equação (1), caso contrário o mesmo é dito não-linear.

$$\mathcal{G}\{e_1 u_1(t) + e_2 u_2(t)\} = e_1 \mathcal{G}\{u_1(t)\} + e_2 \mathcal{G}\{u_2(t)\} \quad (1)$$

Na pratica, todos os sistemas dinâmicos são não-lineares até certo ponto (GOLNARAGHI, 1961), e há duas formas para descrever este tipo de sistema como mostrados nas Equações (2) e (3) (BRUZELIUS, 2004).

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t), x(t_0) = x_0 \quad (2)$$

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), x(t_0) = x_0 \quad (3)$$

Nas equações  $x$  é o vetor de estados,  $t$  é a variável independente do tempo,  $x_0$  é a condição inicial e  $f$  é uma função que, para a Equação (2), é variante no tempo. Para a Equação (3),  $f$  é dita uma função invariante no tempo.

### 2.2 LINEARIZAÇÃO DE SISTEMAS NÃO-LINEARES

O processo de linearização de sistemas não-lineares consiste em encontrar um sistema linear e invariante no tempo equivalente, de modo a aproximar o

comportamento do sistema em torno de seus pontos de equilíbrio. Este tipo de procedimento é comumente utilizado visto que grande parte das técnicas de controle foi desenvolvida considerando sistemas lineares (CHEN; WEN, 2013).

O passo inicial para a linearização é a obtenção dos pontos de equilíbrio. Estes são os pontos de operação cuja derivada dos estados são zero. Logo após, a Matriz Jacobiana que representa os estados deve ser calculada. Desta forma, teremos uma linearização modelada em espaço de estados, resultando no sistema linear e invariante no tempo mostrado em (4) e (5) (CHEN, 1995):

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (4)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (5)$$

Na representação mostrada  $A$  é a representação da matriz de estados,  $B$  a matriz de entradas,  $C$  é a matriz de saídas e  $D$  é a matriz de transmissão direta.

A linearização é a aproximação em torno de um ponto de operação, sendo assim, ela leva somente à predição do comportamento local. Ou seja, nenhum outro comportamento, não-local ou global, pode ser predito pelo modelo (KHALIL; GRIZZLE, 2002). Desta forma, faz-se necessário o uso de outras técnicas como, por exemplo, a análise por meio dos Sistemas LPV.

### 2.3 SISTEMAS LINEARES DE PARÂMETRO VARIÁVEL

Sistemas lineares de parâmetro variável (LPV) são sistemas lineares onde os coeficientes são funções de um sinal que varia no tempo, chamada de variável de escalonamento (TÓTH, 2017).

Segundo Moreira (2008), um sistema LPV pode ser descrito pelas seguintes equações:

$$\dot{x}(t) = A(\theta(t))x(t) + B(\theta(t))u(t) \quad (6)$$

$$y(t) = C(\theta(t))x(t) + D(\theta(t))u(t) \quad (7)$$

em que  $\theta(t)$  é o parâmetro variante, tornando as matrizes  $A, B, C$  e  $D$  dependentes de  $\theta$ .

De forma geral, quando o vetor de parâmetros  $\theta$  é caracterizado como exógeno, então sua dinâmica depende apenas do tempo e independe das variáveis de estado (CHEN; WEN, 2013). Quando  $\theta(t)$  possui elementos cuja variação depende, além do tempo, de um ou mais estados do sistema, configura-se uma não-linearidade no sistema, fazendo com que o termo *quasi*-LPV seja mais adequado. Desta forma (MOREIRA, 2008):

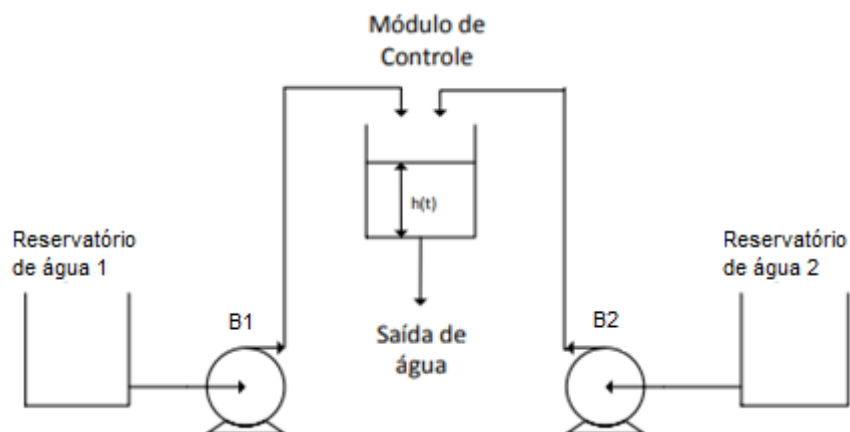
$$\theta(t) = [\theta_x^T(x(t)) \theta_p^T(t)] \quad (8)$$

em que  $\theta_x^T(x(t))$  é o conjunto de variáveis endógenas e  $\theta_p^T(t)$  é o conjunto de variáveis exógenas.

## 2.4 SISTEMA DE NÍVEL

O trabalho é baseado no controle de nível  $h(t)$  da planta didática disponível no laboratório LPROT, seu módulo de controle é mostrado na Figura 1.

Figura 1 – Módulo de controle de nível



Fonte: Autoria própria

É possível observar que o nível do módulo de controle depende da vazão de duas bombas, B1 e B2, que inserem água no módulo. Segundo o princípio de conservação de massa, a massa presente no reservatório de controle consiste na diferença da taxa mássica de entrada e de saída (SMITH; CORRIPIO, 1997). As

Equações (9) e (10) demonstram respectivamente a representação para o nível do sistema de controle e a vazão de saída do sistema (ANDRADE, 2016).

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{S} \left( u_{a1}(t) + u_{a2}(t) - C_v \sqrt{h(t)} \right) \quad (9)$$

$$f_s(t) = C_v \sqrt{h(t)} \quad (10)$$

Nas equações, considera-se  $f_s(t)$  a vazão de saída do sistema,  $S$  a área do módulo de controle,  $C_v$  o coeficiente da válvula,  $h(t)$  o nível do módulo de controle,  $u_{a1}(t)$  a vazão da bomba 1 de água em função do tempo e  $u_{a2}(t)$  a vazão da bomba 2 de água em função do tempo.

A partir das equações é possível identificar a não linearidade do sistema, que está contida em  $\sqrt{h(t)}$ .

## 2.5 DESIGUALDADES MATRICIAIS LINEARES

Genericamente, toda LMI pode ser escrita por (BOYD et al., 1994; GHAOUI; NICULESCU, 2000)

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^n x_i F_i > 0 \quad (18)$$

sendo  $x \in \mathfrak{R}^n$  as variáveis do problema e  $F_i \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  matrizes desconhecidas. A LMI descrita em (18) é uma condição convexa em  $x$ , ou seja, o conjunto  $F(x) > 0$  é convexo. A desigualdade (18) pode ser usada para representar uma ampla variedade de restrições convexas em  $x$ , tais como desigualdades lineares, desigualdades quadráticas, desigualdades na forma matricial e restrições utilizadas em teoria de controle (FREIRE, 2014).

## 2.6 ESTABILIDADE QUADRÁTICA

A teoria de Lyapunov pode ser utilizada para determinar a estabilidade de um ponto de equilíbrio. A função de Lyapunov pode ser entendida como a função de energia de um sistema dinâmico, sendo que, se esta função é sempre não negativa e decrescente com relação ao tempo, as trajetórias do sistema tendem ao ponto de equilíbrio (KHALIL; GRIZZLE., 2002).

A teoria de Lyapunov garante que o ponto de equilíbrio é assintoticamente estável, para sistemas lineares invariantes no tempo, se existir uma função escalar  $v(x)$  que satisfaça as condições expostas nas Equações (11) e (12) (SILVA et al., 2009).

$$v(x) > 0 \quad \forall x \neq 0 \in B_x \quad (11)$$

$$\dot{v}(x) < 0 \quad \forall x \neq 0 \in B_x \quad (12)$$

onde  $B_x$  caracteriza uma região da vizinhança do ponto de equilíbrio.

Uma maneira mais simples para se obter uma função de Lyapunov que seja adequada para representar a estabilidade de um sistema dinâmico, é a utilização das funções quadráticas como mostrado em (12).

$$v(x) = x'Px \quad (13)$$

em que  $P$  é uma matriz constante, real, positiva definida e simétrica.

Um exemplo da obtenção de uma condição necessária e suficiente para a estabilidade de um sistema LTI, considerar o sistema:

$$\dot{x} = Ax \quad (14)$$

onde  $x$  são os estados do sistema e  $A$  uma matriz constante. Considerando uma função de Lyapunov  $v(x) = x'Px$  e o sistema da Equação (14), podemos escrever  $\dot{v}(x)$  como:

$$\dot{v}(x) = \dot{x}'Px + x'P\dot{x} = x'(A'P + PA)x \quad (15)$$

Sendo assim, podemos escrever:

$$v(x) > 0 \Leftrightarrow \exists P = P' > 0 \quad e \quad \dot{v}(x) < 0 \Leftrightarrow (A'P + PA) < 0 \quad (16)$$

Logo, uma condição necessária e suficiente para este sistema ser globalmente quadraticamente estável é:

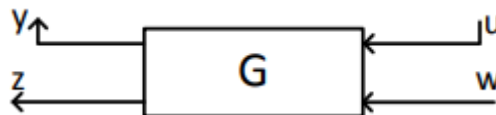
$$\exists P = P' > 0 \quad : \quad (A'P + PA) < 0 \quad (17)$$

A relação descrita acima é conhecida na literatura como Inequação de Lyapunov para sistemas lineares, tornando-se a primeira motivação documentada para a aplicação de LMIs (AGULHARI,2013).

## 2.7 NORMAS DE SISTEMAS

A Figura 2 ilustra um sistema Linear invariante no tempo,  $G$ , no qual há ação de uma perturbação externa.

**Figura 2 - Diagrama de blocos de um sistema de controle com perturbação externa.**



Fonte: ANDRADE, 2016.

O modelo do sistema da Figura 2 é dado por:

$$G(t) \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_w w(t) + B_u u(t) \\ z(t) = C_z x(t) + D_{zw} w(t) + D_{zu} u(t) \end{cases} \quad (19)$$

onde  $x(t) \in \mathfrak{R}^n$  o vetor de estados,  $u(t) \in \mathfrak{R}^m$  a entrada de controle,  $w(t) \in \mathfrak{R}^r$  a entrada exógena e  $z(t) \in \mathfrak{R}^d$  a saída controlada.

Para esse sistema a função de transferência  $G_{wz}(s)$  pode ser escrita como:

$$G_{wz}(s) = C_z(sI - A)^{-1}B_w + D_{zw} \quad (20)$$

Desta forma, o desempenho do sistema varia de acordo com a relação entre  $w(t)$  e  $z(t)$ , descrito em  $G_{wz}$ , cujo valor pode estar ligado a alguma medida de energia que se deseja otimizar ou à robustez do sistema. Existem algumas formas para quantificar este valor para sistemas, sendo a norma  $\mathcal{H}_2$  para critérios de desempenho relativos ao sistema e  $\mathcal{H}_\infty$  para garantir a robustez em situações de pior caso.

### 2.7.1 Norma $\mathcal{H}_2$

Considere que o sistema mostrado na Figura 2 seja excitado por sinais impulsivos  $w(t)$  e  $z(t)$  sendo uma saída controlada. A norma  $\mathcal{H}_2$  do operador  $G_{wz}$  é definida como a energia da resposta ao impulso de entrada à saída, como apresentado na Definição 1 (PAGANINI; FERON, 1999). É importante ressaltar que a energia do sistema só será finita se assumirmos que o sistema é estritamente próprio e estável, sendo assim, a matriz  $A$  deve ser Hurwitz e  $D_{zw} = 0$  (TROFINO; BARBOSA; COUTINHO, 2000; YEDAVALLI, 2014).

**Definição 1** (Norma  $\mathcal{H}_2$ ) A norma  $\mathcal{H}_2$  de um sistema (19), é definida como

$$\|G_{wz}\|_2 = \sqrt{\int_0^\infty \text{traço}[g(t)'g(t)]dt} \quad (21)$$

onde  $g(t)$  é a resposta impulsiva do sistema (19) sendo que  $A$  é Hurwitz,  $D_{zw} = 0$  e  $g(t) = 0$  para  $-\infty < t < 0$ .

Estando a norma  $\mathcal{H}_2$  relacionada com a teoria de estabilidade de Lyapunov, pode-se calcular a norma  $\|G_{wz}\|_2$  por meio de condições LMI (TROFINO; BARBOSA; COUTINHO, 2000).

Considere a condição de estabilidade (17) para sistemas LTI reescrita da seguinte forma:

$$Q = Q' > 0 \quad \exists P = P' > 0 \quad : \quad (A'P + PA) = -Q \quad (22)$$

A solução para a equação acima, conhecida como a equação de Lyapunov para sistemas lineares, é dada por (BLANCHINI; MIANI, 2008):

$$P = \int_0^{\infty} e^{A't} Q e^{At} dt \quad (23)$$

Segundo definição, o operador entrada/saída  $G_{wz}(s) = C(sI - A)^{-1}B_w + D_{zw}$  e sua resposta impulsiva dada por  $g(t) = C e^{At} B_w(t)$ . Então, podemos escrever que

$$\|G_{wz}\|_2^2 = \int_0^{\infty} \text{traço}[B_w' e^{A't} C_z' C_z e^{At} B_w] dt = \text{traço}[B_w' (\int_0^{\infty} e^{A't} C_z' C_z e^{At} dt) B_w] \quad (24)$$

Note que  $\int_0^{\infty} e^{A't} C_z' C_z e^{At} dt$ , conhecido como Gramiano de Observabilidade, é uma solução para a equação de Lyapunov (22) com  $Q = C_z' C_z \geq 0$ . Logo, a norma  $\mathcal{H}_2$  pode ser determinada por (HINAMOTO et al., 2002):

$$\|G_{wz}\|_2^2 = \int_0^{\infty} \text{traço}[C(e^{At} B_w B_w' e^{A't} dt) C_z'] = \text{traço}[C_z P_c C_z'] \quad (25)$$

onde  $P_c$  é a solução da equação  $AP_c + P_c A' + B_w B_w' = 0$ .

A determinação da norma  $\mathcal{H}_2$  pode ser obtida por meio de um problema de otimização convexa. Por exemplo, considerando o Gramiano de observabilidade, se  $P_0$  satisfaz  $A'P_0 + P_0 A + C_z' C_z = 0$  e existe uma matriz  $P = P' > 0: A'P + PA + C_z' C_z < 0$  então  $P > P_0$  e, com a minimização,  $P \rightarrow P_0$ . Sendo assim, a norma  $\mathcal{H}_2$  pode ser calculada mediante a resolução do problema de otimização na forma de LMI (MACKENROTH, 2013; TROFINO; BARBOSA; COUTINHO, 2000).

$$\|G_{wz}\|_2^2 < \text{traço}[B_w' P B_w]: \begin{cases} P = P' > 0 \\ A'P + PA + C_z' C_z < 0 \end{cases} \quad (26)$$

### 2.7.1 Norma $\mathcal{H}_\infty$

A norma  $\mathcal{H}_\infty$  está associada ao maior ganho que pode existir entre a(s) entrada(s) e a(s) saída(s) de um determinado sistema (AGULHARI, 2013).

Considerando o sistema apresentado na Figura 2 cujo índice de desempenho é dado por  $G_{wz}$  sua definição pode ser dada como:

**Definição 2** (Norma  $\mathcal{H}_\infty$ ) A norma  $\mathcal{H}_\infty$  de um sistema representado pela Figura 2 é o valor máximo resultante da relação entre a energia dos sinais de saída  $z(t)$  e de entrada  $w(t)$  de energia limitada, ou seja

$$\|G_{wz}\|_\infty = \max_{w(t) \in L_2} \frac{\|z(t)\|_2}{\|w(t)\|_2}, w \neq 0 \quad (27)$$

A norma atingiu um grande nível de importância dentro da teoria de controle robusto principalmente devido ao sucesso de sua aplicabilidade como um índice de desempenho na presença de incertezas, para análise e síntese de controle de sistemas lineares invariantes no tempo Freire (2014), Oliveira (2006), Doyle et al. (1989). Esta norma é comumente usada como medida de robustez.

Suponha que  $w(t)$  seja um sinal de ruído e  $z(t)$  a saída controlada. Pela Equação (27) é possível notar que minimizar a norma  $\mathcal{H}_\infty$  equivale a minimizar a energia do ruído que afeta a saída controlada. Sendo assim, quanto menor a norma  $\mathcal{H}_\infty$ , maior a robustez do sistema ao ruído  $w(t)$ .

O Lema 2.1, conhecido por *Bounded Real Lemma*, apresenta uma condição para o cálculo do limitante da norma  $\mathcal{H}_\infty$  para um dado sistema.

**Lema 2** (*Bounded Real Lemma*) (BOYD et al., 1994): O sistema (19) é assintoticamente estável e a norma  $\mathcal{H}_\infty$  é menor que um escalar  $\gamma > 0$  se, e somente se, existir uma matriz  $P = P' \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  definida positiva tal que

$$\begin{bmatrix} A'P + PA + C_z' C_z & P B_w + C_z' D_{zw} \\ B_w' P + D_w' C_z & D_{zw}' D_{zw} - \gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (28)$$

### 3 MODELAGEM DO SISTEMA LPV

Como comentado na Seção 2.3, para a determinação do sistema LPV, optou-se pelo método de substituição algébrica de modo a eliminar a não linearidade contida em  $\sqrt{h}$ , Equação (9). Esta substituição caracteriza um sistema *quasi*-LPV. O seguinte parâmetro foi escolhido para a substituição:

$$\theta_1(h, t) = \frac{1}{\sqrt{h}} \quad (29)$$

Como a variável de nível possui um intervalo de aproximadamente  $[1 \ 200] \text{ mm}$ , o intervalo de  $\theta$  é definido da seguinte forma:

$$\theta_m \leq \theta \leq \theta_M \rightarrow 0,070711 \leq \theta_1 \leq 1 \quad (30)$$

Desta forma, a Equação (9) em função do parâmetro  $\theta(h, t)$  pode ser escrita como:

$$\dot{h} = \frac{1}{s} \left( \frac{u_{a1}(t)}{c_1} + \frac{u_{a2}(t)}{c_2} - C_v \theta h(t) \right) \quad (31)$$

Logo, as matrizes de estados e entradas do sistema em função do parâmetro  $\theta$  são:

$$A(\theta) = \left[ -\frac{C_v \theta}{s} \right] \quad (32)$$

$$B(\theta) = \begin{bmatrix} \frac{1}{c_1 s} & \frac{1}{c_2 s} \end{bmatrix} \quad (33)$$

De modo a garantir a convergência do sistema em qualquer ponto de operação com a utilização do conjunto de LMIs escolhidas, faz-se necessário que o parâmetro  $\theta$  varie dentro de um polítopo convexo. Um meio de garantir esta variação é a utilização de simplex unitários  $(\alpha_1, \alpha_2)$  como mostrado abaixo (OLIVEIRA;

BLIMAN; PERES, 2008; FRANKE; KRAUS, 2014). Sendo que os parâmetros  $\alpha$  valem entre  $[0, 1]$  e  $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ .

$$\begin{aligned}\theta &= \alpha_1 \theta_m + \alpha_2 \theta_M \\ \alpha_2 &= 1 - \alpha_1\end{aligned}\tag{34}$$

Desta forma, a matriz A passa a ser definida como:

$$A(\theta) = \alpha_1 \left[ \frac{C_v \theta_m}{s} \right] + \alpha_2 \left[ \frac{C_v \theta_M}{s} \right]\tag{35}$$

Para a realização da síntese do controlador, os valores utilizados foram extraídos de (ANDRADE, 2016) sendo  $C_v = 5,150 \cdot 10^3 (mm^2/s)$ ,  $s = 40,832 (mm^2)$ ,  $C_1 = 1,045$ ,  $C_2 = 1,05$ ,  $u_{a1} = 36,237 \cdot 10^3 V_{a1}$  e  $u_{a2} = 41,012 \cdot 10^3 V_{a2}$ . Sendo  $V_{a1}$  e  $V_{a2}$  as tensões das bombas 1 e 2 respectivamente.

## 4 SÍNTESE DO CONTROLADOR

### 4.1 SISTEMA DE CONTROLE ROBUSTO MISTO $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$

Considerando um sistema LPV descrito como:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\alpha_1, \alpha_2)x(t) + B(\alpha_1, \alpha_2)u(t) + B_w(\alpha_1, \alpha_2)w(t) \\ z(t) = C_z(\alpha_1, \alpha_2)x(t) + D_{zu}(\alpha_1, \alpha_2)u(t) + D_{zw}(\alpha_1, \alpha_2)w(t) \\ y(t) = C(\alpha_1, \alpha_2)x(t) \end{cases} \quad (36)$$

sendo  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  os estados,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  as entradas,  $w(t) \in \mathbb{R}^q$  as entradas exógenas e  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  as saídas do sistema.

Considerando que o objetivo do sistema seja seguir um sinal de referência mesmo estando sujeito a perturbações externas, optou-se pela inclusão de um integrador na estrutura. Dessa forma, a dinâmica do controle é dada por:

$$\begin{bmatrix} \dot{h} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\alpha_1, \alpha_2) & 0 \\ -C(\alpha_1, \alpha_2) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h(t) \\ q(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B(\alpha_1, \alpha_2) \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} B_w(\alpha_1, \alpha_2) \\ 0 \end{bmatrix} w(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(t) \quad (37)$$

$$z(t) = C_z(\alpha_1, \alpha_2) \begin{bmatrix} h(t) \\ q(t) \end{bmatrix} + D_{zu}(\alpha_1, \alpha_2)u(t) + D_{zw}(\alpha_1, \alpha_2)w(t) \quad (38)$$

$$y(t) = [C \ 0](\alpha_1, \alpha_2) \begin{bmatrix} h(t) \\ q(t) \end{bmatrix} \quad (39)$$

Como apresentado nas Equações (37) a (39), estão presentes as matrizes  $B_w$ ,  $C_z$ ,  $D_{zu}$  e  $D_{zw}$  que devem ser determinadas para ambas as normas  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$ . A variável de estado  $q(t)$  representa a saída do integrador inserido na dinâmica.

Para a norma  $\mathcal{H}_\infty$  foi utilizada a LMI apresentada no Teorema 1, que é baseada nas aplicações do Lema de Finsler nas condições básicas de estabilidade (OLIVEIRA; GEROMEL; BERNUSSOU, 2002; GEROMEL; KOROGUI; BERNUSSOU, 2007). Os elementos denotados como \* correspondem aos blocos simétricos.

**Teorema 1** Se existirem matrizes  $P_\infty(\alpha_1, \alpha_2) = P_\infty(\alpha_1, \alpha_2)' > 0$ ,  $Z(\alpha_1, \alpha_2)$ ,  $G$ ,  $H(\alpha_1, \alpha_2)$  e um escalar  $\xi_\infty$  tais que



$$\begin{bmatrix} B_{w2}(\alpha_1, \alpha_2)H(\alpha_1, \alpha_2) \\ 0 \\ I + H(\alpha_1, \alpha_2) + H'(\alpha_1, \alpha_2) \end{bmatrix} < 0$$

então o ganho de realimentação  $K(\alpha_1, \alpha_2) = Z(\alpha_1, \alpha_2)G^{-1}$  estabiliza o sistema e garante uma norma  $\mathcal{H}_2$  menor que  $\mu$ .

Para o sistema em estudo, utilizando os valores citados na Seção 3 e considerando uma entrada como entrada de controle e outra como perturbação, obtivemos as seguintes matrizes:

$$B_u = B_{w2} = \begin{bmatrix} 850,093 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (44)$$

$$B_{w\infty} = \begin{bmatrix} 956,579 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (45)$$

$$C_{z\infty} = [0 \ 0] \quad D_{zu\infty} = [0] \quad D_{zw\infty} = [1] \quad (46)$$

$$C_{z2} = [1 \ 1] \quad D_{zu2} = [1] \quad (47)$$

As variáveis  $G$ ,  $Z$ ,  $P_i$ ,  $H_i$ ,  $P_2$ ,  $H_2$  são determinadas através dos pacotes YALMIP e ROLMIP do software MATLAB®, e  $\xi_i$ ,  $\xi_2$  são definidas arbitrariamente. Para o sistema em estudo o ganho de realimentação de estados  $K(\alpha_1, \alpha_2)$  é dado por:

$$K(\alpha_1, \alpha_2) = \alpha_1 K_1 + \alpha_2 K_2 \quad (48)$$

## 5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Para a análise do desempenho do controlador desenvolvido, foram propostas seis simulações diferentes cujos resultados são apresentados a seguir.

### 5.1 PRIORIZAÇÃO DA VELOCIDADE DE RESPOSTA E SEM DISTÚRBO NO SISTEMA

Sabe-se que a matriz  $C_{z2}$  esta relacionada com a velocidade de resposta dos estados do sistema, sendo essa relação diretamente proporcional. Ou seja, aumentando o valor do termo da matriz relacionado a um determinado estado, este responderá mais rapidamente do que os demais, e diminuindo, a resposta do mesmo será mais lenta. Já a matriz  $D_{zu2}$  está relacionada com a energia de controle aplicada em cada uma das entradas do sistema, sendo essa relação inversamente proporcional, ou seja, ao aumentar o valor do termo da matriz relacionado a uma das entradas, a energia de controle da mesma é atenuada, e diminuindo, é liberada uma maior energia de controle para a mesma. Sendo assim, utilizou-se:

$$C_{z2} = [5 \ 5] \quad D_{zu2} = [1] \quad (49)$$

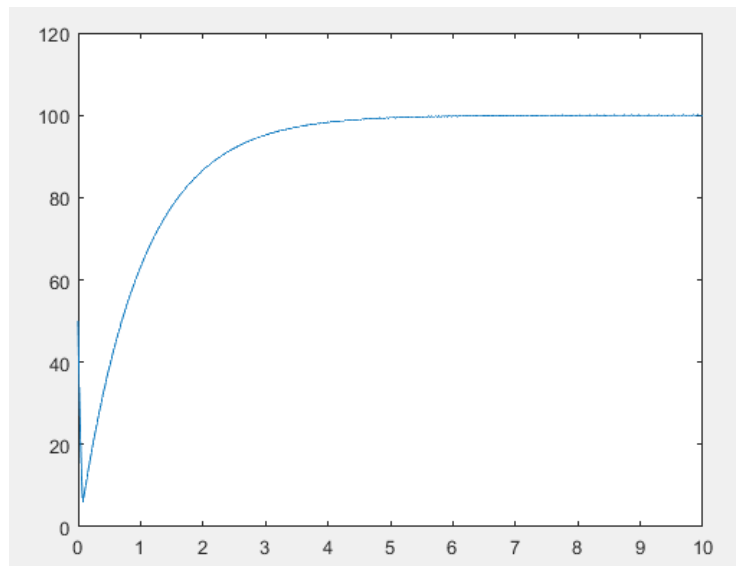
Utilizando a referência como  $100mm$ ,  $\gamma = 9,09$ ,  $\xi_1 = 10$ ,  $\xi_2 = 0,001$  e o distúrbio  $w = 0$  o resultado do controle misto foi satisfatório, factível, sendo os ganhos  $K_1$  e  $K_2$ :

$$K_1 = [-5,0023 \ 5,097] \quad (50)$$

$$K_2 = [-5,002 \ 5,0216] \quad (51)$$

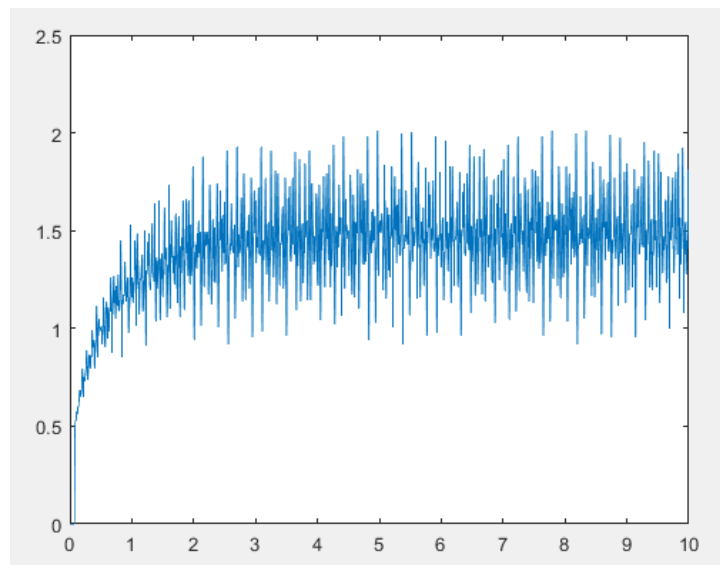
O comportamento do sistema ao controle está representado nas Figuras 3 e 4.

**Figura 3 – Sinal de resposta ao controle com priorização de velocidade e sem distúrbio.**



Fonte: Autoria Própria.

**Figura 4 – Sinal de controle com priorização de velocidade e sem distúrbio.**



Fonte: Autoria Própria

## 5.2 PRIORIZAÇÃO DA VELOCIDADE DE RESPOSTA E COM DISTÚRBO NO SISTEMA

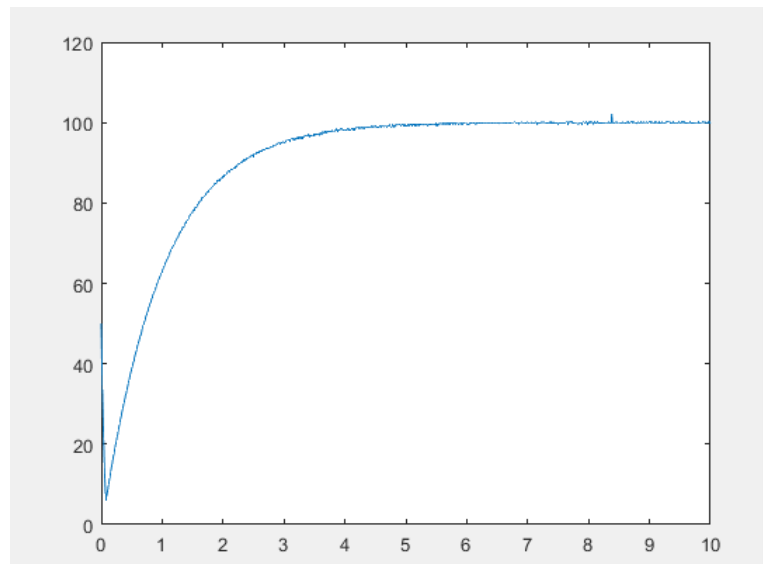
Como dito em 5.1, a matriz  $C_{z2}$  esta relacionada com a velocidade de resposta dos estados do sistema, sendo essa relação diretamente proporcional, e a

matriz  $D_{zu2}$  está relacionada com a energia de controle aplicada em cada uma das entradas do sistema, sendo esta relação inversamente proporcional. Portanto, as matrizes utilizadas são iguais as apresentadas na Equação (49).

Utilizando a referência como  $100mm$ ,  $\gamma = 9,09$ ,  $\xi_1 = 10$ ,  $\xi_2 = 0,001$  e o distúrbio  $w$  sendo uma variável aleatória com distribuição gaussiana, de média 0,11 e desvio padrão 1. O resultado do controle misto foi satisfatório, factível, sendo os ganhos  $K_1$  e  $K_2$  similares aos apresentados em (50) e (51), respectivamente.

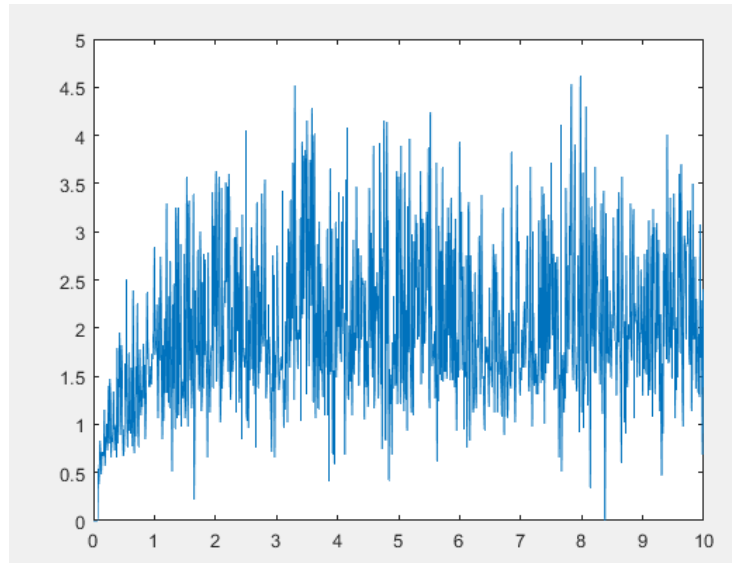
O comportamento do sistema ao controle está representado nas Figuras 5 e 6.

**Figura 5 -Sinal de resposta ao controle com priorização de velocidade e com distúrbio.**



Fonte: Autoria Própria.

Figura 6 – Sinal de controle com priorização de velocidade e com distúrbio.



Fonte: Autoria Própria.

### 5.3 VELOCIDADE E ECONOMIA COM PONDERAÇÃO IGUAL E SEM DISTÚRBIO NO SISTEMA

Para esta simulação, o valor das matrizes  $C_{z2}$  e  $D_{zu2}$  são mantidos como mostrado em (47), de modo que o sistema pondera igualmente os critérios de velocidade de resposta e energia de controle.

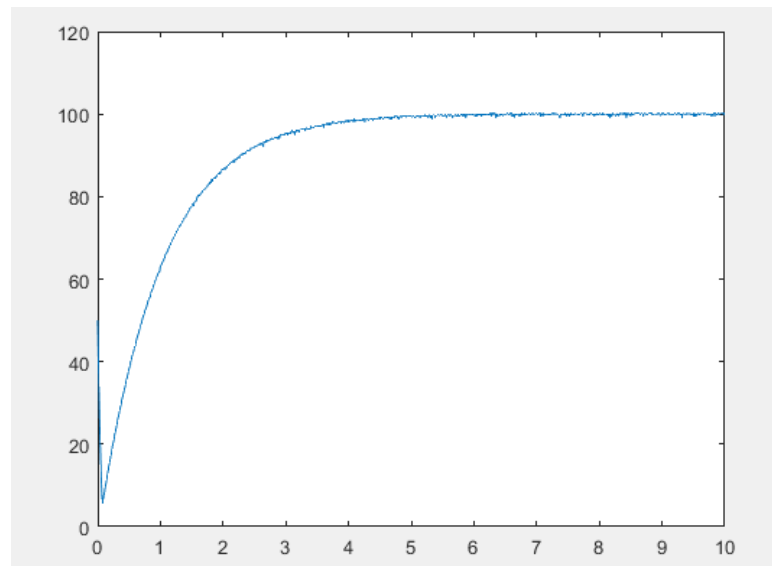
Utilizando a referência como  $100mm$ ,  $\gamma = 9,09$ ,  $\xi_1 = 10$ ,  $\xi_2 = 0,001$  e o distúrbio  $w = 0$  o resultado do controle misto é factível, sendo os ganhos  $K_1$  e  $K_2$ :

$$K_1 = [-1,0023 \quad 1,0271] \quad (52)$$

$$K_2 = [-1,0021 \quad 0,97846] \quad (53)$$

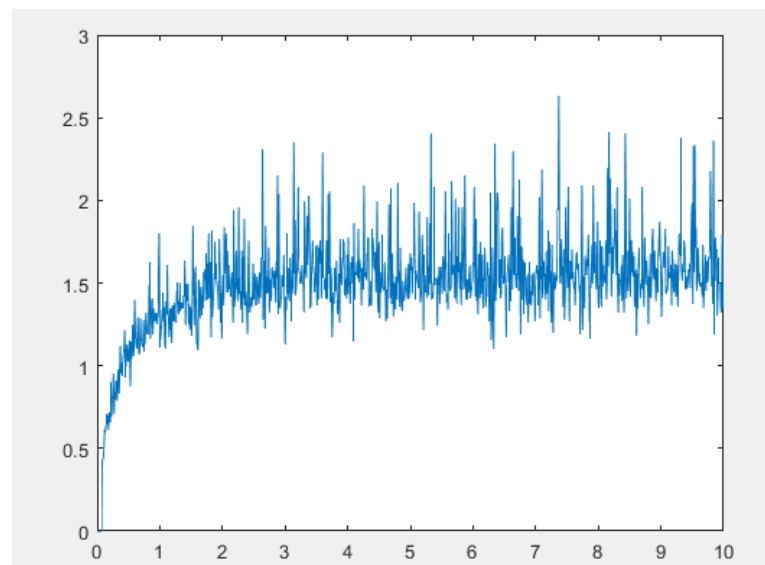
O comportamento do sistema ao controle está representado nas Figuras 7 e 8.

**Figura 7 - Sinal de resposta ao controle sem ponderação e sem distúrbio.**



Fonte: Autoria Própria.

**Figura 8 – Sinal de controle sem ponderação e sem distúrbio.**



Fonte: Autoria Própria.

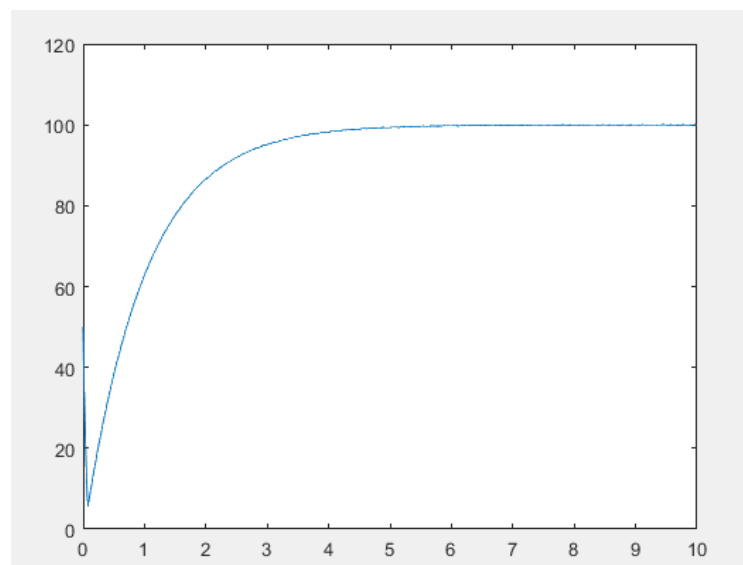
#### 5.4 VELOCIDADE E ECONOMIA COM PONDERAÇÃO IGUAL E COM DISTÚRBIO NO SISTEMA

Para esta simulação, o valor das matrizes  $C_{z2}$  e  $D_{zu2}$  são mantidos como mostrado em (47).

Utilizando a referência como  $100mm$ ,  $\gamma = 9,09$ ,  $\xi_i = 10$ ,  $\xi_2 = 0,001$  e o distúrbio  $w$  sendo uma variável aleatória com distribuição gaussiana, de média 0,11 e desvio padrão 1. O resultado do controle misto é factível, sendo os ganhos  $K_1$  e  $K_2$  apresentados em (52) e (53), respectivamente.

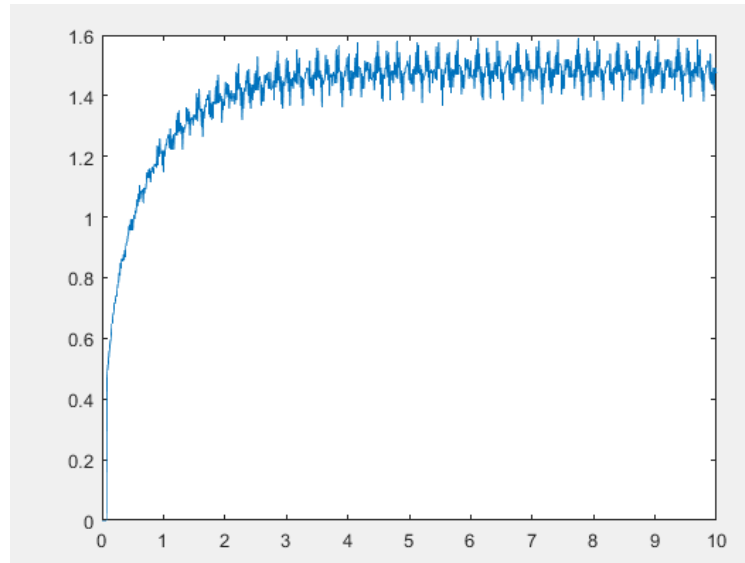
O comportamento do sistema ao controle está representado nas Figuras 9 e 10.

**Figura 9 - Sinal de resposta ao controle sem ponderação e com distúrbio.**



Fonte: Autoria Própria.

**Figura 10 – Sinal de controle sem ponderação e com distúrbio.**



Fonte: Autoria Própria.

## 5.5 PRIORIZAÇÃO DA ECONOMIA DE CONTROLE E SEM DISTÚRBO NO SISTEMA

Como dito em 5.1, a matriz  $C_{z2}$  esta relacionada com a velocidade de resposta dos estados do sistema, sendo essa relação diretamente proporcional, e a matriz  $D_{zu2}$  está relacionada com a energia de controle aplicada em cada uma das entradas do sistema, sendo esta relação inversamente proporcional. Portanto, as matrizes utilizadas são:

$$C_{z2} = [1 \quad 1] \quad D_{zu2} = [10] \quad (54)$$

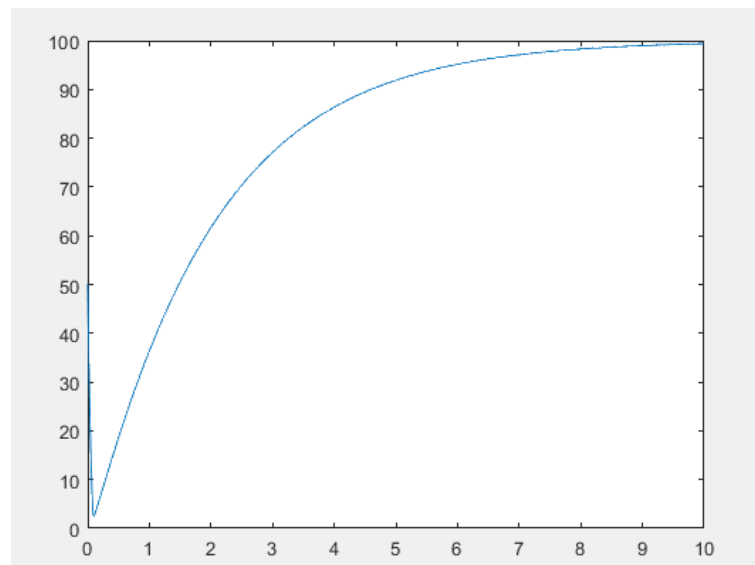
Utilizando a referência como  $100mm$ ,  $\gamma = 9,09$ ,  $\xi_1 = 10$ ,  $\xi_2 = 0,001$  e o distúrbio  $w = 0$  o resultado do controle misto foi satisfatório, factível, sendo os ganhos  $K_1$  e  $K_2$ :

$$K_1 = [-0,10475 \quad 0,058317] \quad (55)$$

$$K_2 = [-0,10098 \quad 0,066048] \quad (56)$$

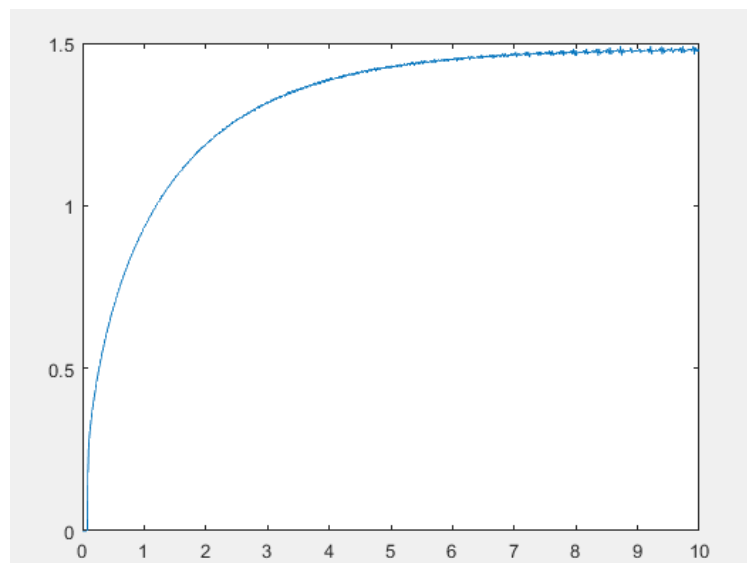
O comportamento do sistema ao controle está representado nas Figuras 11 e 12.

**Figura 11 -Sinal de resposta ao controle com priorização de economia e sem distúrbio.**



Fonte: Autoria Própria.

**Figura 12 – Sinal de controle com priorização de economia e sem distúrbio.**



Fonte: Autoria Própria.

## 5.6 PRIORIZAÇÃO DA ECONOMIA DE CONTROLE E COM DISTÚRBO NO SISTEMA

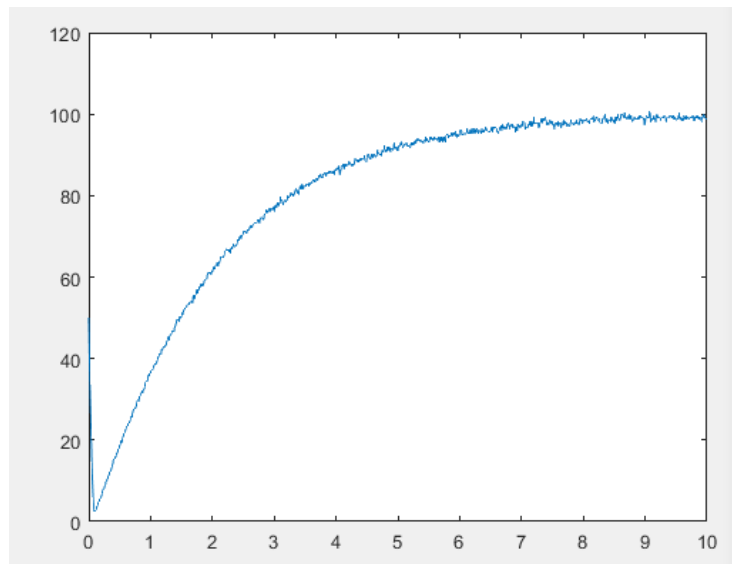
Como dito em 5.1, a matriz  $C_{z2}$  esta relacionada com a velocidade de resposta dos estados do sistema, sendo essa relação diretamente proporcional. e a matriz  $D_{zu2}$  está relacionada com a energia de controle aplicada em cada uma das

entradas do sistema, sendo esta relação inversamente proporcional. Portanto, as matrizes utilizadas são similares as apresentadas em (54).

Utilizando a referência como  $100mm$ ,  $\gamma = 9,09$ ,  $\xi_i = 10$ ,  $\xi_2 = 0,001$  e o distúrbio  $w$  sendo uma variável aleatória com distribuição gaussiana, de média  $0,11$  e desvio padrão  $1$ . O resultado do controle misto foi satisfatório, factível, sendo os ganhos  $K_1$  e  $K_2$  iguais aos apresentados em (55) e (56), respectivamente.

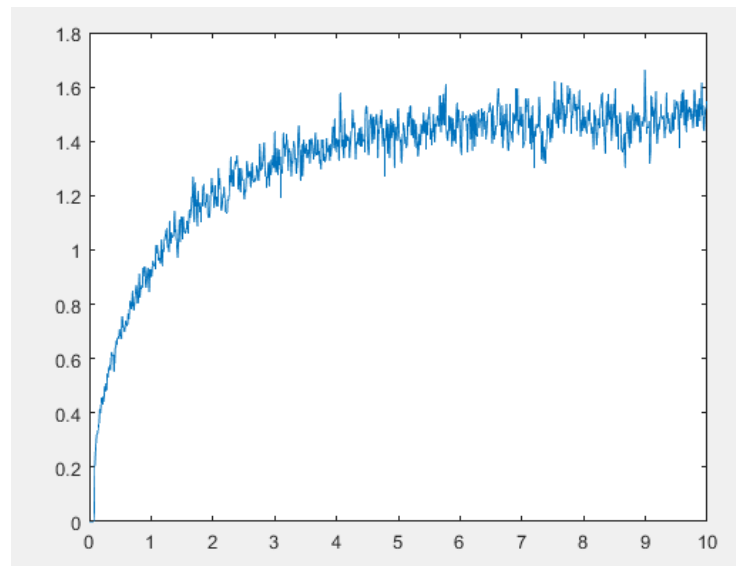
O comportamento do sistema ao controle está representado nas Figuras 13 e 14.

**Figura 13 -Sinal de resposta ao controle com priorização de economia e com distúrbio.**



**Fonte: Aatoria Própria.**

**Figura 12 – Sinal de controle com priorização de economia e com distúrbio.**



**Fonte: Autoria Própria.**

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

No trabalho foi realizada uma investigação e síntese de um controle robusto misto  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  para estabilização de um sistema de nível não linear sujeito à uma perturbação. De modo a contextualizar o tema, foi apresentada uma revisão bibliográfica contendo as principais teorias e ferramentas utilizadas. Os resultados foram apresentados nos Capítulos 4 e 5 abrangendo, respectivamente, a síntese do controle misto  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  e as simulações do sistema.

A análise das simulações referentes ao controle  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ , permitiu verificar que o mesmo estabilizou o sistema no ponto de operação definido (100 mm). Para os casos em que a priorização da velocidade foi utilizada, Seções 5.1 e 5.2, nota-se que o controle é mais suscetível a variações quando uma perturbação é aplicada ao sistema. Em contrapartida, para os casos onde não há nenhum tipo de ponderação ou se prioriza a economia, o controle apresentou um resultado satisfatório e com pequenas variações ao sinal de perturbação.

Desta forma, os objetivos propostos foram atingidos e a realização do trabalho contribuiu para a obtenção de um modelo de controle robusto misto que poderá servir como suporte para a elaboração de trabalhos.

### 6.1 CONTINUIDADE DO TRABALHO

Para continuidade do trabalho propõe-se a aplicação do modelo de controle misto  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  na planta física, de modo a estudar seu comportamento dinâmica real e validá-lo em prática. Além disso, pode-se levantar informações relevantes para o aprimoramento do controle, como as fontes de perturbação do sistema.

## REFERÊNCIAS

- AGULHARI, C. M. **Estabilidade e Controle de Sistemas Lineares e Variantes no Tempo com Parâmetros Incertos**. 222 p. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, Brasil, 2013.
- ANDRADE, L. H. S. **Técnicas de Controle Robusto Misto  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  Aplicadas a um Sistema Multivariável Não-Linear** (Tese – Mestrado). Cornélio Procópio, 2016.
- BLANCHINI, F.; MIANI, S. **Set-theoretic methods in control**. [S.l.]: Springer, 2008.
- BOYD, S. P.; GHAOUI, L. E.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. **Linear matrix inequalities in system and control theory**. [S.l.]: SIAM, 1994.
- BRUZELIUS, F. **Linear Parameter-Varying Systems: an approach to gain scheduling**. Goteborg, Sweden, 2004.
- CHEN, C.-T. **Linear system theory and design**. 3rd. ed. [S.l.]: Oxford University Press, Inc., 1995.
- CHEN, N.; WEN, J. T. **LPV model identification for motion control systems**. In: IEEE. American Control Conference (ACC), 2013. [S.l.], 2013. p. 6823–6828.
- CORNIELES, E.; SAAD, M.; GAUTHIER, G.; SALIAH-HASSANE, H. **Modeling and simulation of a multivariable process control**. In: IEEE. Industrial Electronics, 2006 IEEE International Symposium on. [S.l.], 2006. v. 4, p. 2700–2705.
- DOYLE, J. C.; GLOVER, K.; KHARGONEKAR, P. P.; FRANCIS, B. et al. **State-space solutions to standard  $h_2$  and  $h_\infty$  control problems**. Automatic Control, IEEE Transactions on, IEEE, v. 34, n. 8, p. 831–847, 1989.
- FARHOODI, M.; BEHESHTI, M. T. **Extended linear matrix inequality approach to multiobjective output feedback controller design**. In: IEEE. India Conference, 2008. INDICON 2008. Annual IEEE. [S.l.], 2008. v. 2, p. 542–547.
- FRANKE, D.; KRAUS, F. **Design Methods of Control Systems: Selected Papers from the IFAC Symposium, Zurich, Switzerland, 4-6 September 1991**. [S.l.]: Elsevier, 2014.
- FREIRE, V. **Controle Quantizado Há via Realimentação de Estados**. 56 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Cornélio Procópio, PR, Brasil, 2014.
- GEROMEL, J. C.; KOROGUI, R. H.; BERNUSSOU, J.  **$H_2$  and  $h_\infty$  robust output feedback control for continuous time polytopic systems**. Control Theory & Applications, IET, IET, v. 1, n. 5, p. 1541–1549, 2007.
- GHAOUI, L. E.; NICULESCU, S.-I. **Advances in linear matrix inequality methods in control**. [S.l.]: Siam, 2000.
- GOLNARAGHI, F.; KUO, B. C. **Automatic Control Systems**. 9th. Ed. John Wiley & Sons, Inc. 1962.

- HINAMOTO, T.; YOKOYAMA, S.; INOUE, T.; ZENG, W.; LU, W.-S. **Analysis and minimization of  $H_2$ -sensitivity for linear systems and two-dimensional state-space filters using general controllability and observability gramians**. *Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, IEEE Transactions on, IEEE, v. 49, n. 9, p. 1279–1289, 2002.
- KHALIL, H. K.; GRIZZLE, J. **Nonlinear systems**. [S.l.]: Prentice hall New Jersey, 2002.
- MOREIRA, C. W. J. **Identificação linear a parâmetros variantes no tempo de sistemas não-lineares**. Tese (Doutorado) — Instituto Militar de Engenharia, 2008.
- NELLES, O. **Nonlinear system identification: from classical approaches to neural networks and fuzzy models**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013.
- OLIVEIRA, M. C. D.; GEROMEL, J. C.; BERNUSSOU, J. **Extended  $H_2$  and  $H_\infty$  norm characterizations and controller parametrizations for discrete-time systems**. *International Journal of Control*, Taylor & Francis, v. 75, n. 9, p. 666–679, 2002.
- OLIVEIRA, R. **Estudo de Robustez em Sistemas Lineares por Meio de Relações em Termos de Desigualdades Matriciais Lineares**. 222 p. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, Brasil, 2006.
- OLIVEIRA, R. C.; BLIMAN, P.-A.; PERES, P. L. **Robust  $H_\infty$  with parameters in multisimplex: Existence of solutions and applications**. In: IEEE. *Decision and Control*, 2008. CDC 2008. 47th IEEE Conference on. [S.l.], 2008. p. 2226–2231
- PAGANINI, F.; FERON, E. **Linear matrix inequality methods for robust  $H_2$  analysis: a survey with comparisons**. In: SOCIETY FOR INDUSTRIAL AND APPLIED MATHEMATICS. *Advances in linear matrix inequality methods in control*. [S.l.], 1999. p. 129–151.
- PETRECKZY, M., Toth, R., & Mercere, G. (2017). **Realization theory for LPV state-space representations with affine dependence**. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 62(9), 4667-4674. [7745910]. DOI: 10.1109/TAC.2016.2629989.
- SALA, Antonio. **Multivariable control systems: an engineering approach**. London, GB: Springer-Verlag, c2004. xviii, 340 p.
- SASTRY, S. **Nonlinear systems: analysis, stability, and control**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013.
- SILVA, F. H.; GUEDES, R. B.; ALBERTO, L. F.; BRETAS, N. G. **Função energia generalizada de controle para estabilização de sistemas não lineares**. *Sba: Controle & Automação Sociedade Brasileira de Automatica, SciELO Brasil*, v. 20, n. 2, p. 133–145, 2009.
- SMITH, C. A.; CORRIPIO, A. B. **Principles and practice of automatic process control**. [S.l.]: Wiley New York, 1997.

TROFINO, A.; BARBOSA, K.; COUTINHO, D. **Controle robusto. Apostila da disciplina de controle robusto do curso de pós-graduação de engenharia elétrica da UFSC**, 2000.

YEDAVALLI, R. K. **Robust control of uncertain dynamic systems**. AMC, Springer, v. 10, p. 12, 2014

ZUBEN, F. J. **Técnicas de Linearização de sistemas**. Disponível em:<  
[ftp://ftp.dca.fee.unicamp.br/pub/docs/vonzuben/ea619\\_1s09/topico3\\_04.pdf](ftp://ftp.dca.fee.unicamp.br/pub/docs/vonzuben/ea619_1s09/topico3_04.pdf)>.  
Acesso em: 14 out. 2018.

## **ANEXO A – Código para obtenção do Controle Misto**

```

A1 = [-126.127*0.070711 0;-1 0];
A2 = [-126.127 0;-1 0];
A = rolmipvar([A1 A2], 'A', 2, 1);
Bu = [850.093;0];
Czinf = [0 0];
Dzuinf = [0];
Dzwinf = [1];
Bw2 = Bu;
Bwinf = [956.579;0];

%Priorizando velocidade
Cz2 = 5*[1 1];
Dzu2 = [1];

% %Ponderacao igual
% Cz2 = [1 1];
% Dzu2 = [1];

% %Priorizando economia
% Cz2 = [1 1];
% Dzu2 = 10*[1];

I = [1 0; 0 1];

P2 = rolmipvar(2,2, 'P', 'sym', 2, 1);
Pinf = rolmipvar(2,2, 'P', 'sym', 2, 1);
Z = rolmipvar(1,2, 'Z', 'full', 2, 1);
G = rolmipvar(2,2, 'G', 'full', 0, 0);
V2 = rolmipvar(1,1, 'V', 'full', 2, 1);
Vinf = rolmipvar(1,1, 'V', 'full', 2, 1);

```

```

Xsdp = sdpvar(1,1,'sym');
X = rolmipvar(Xsdp,'X',0,0);
gamaquad = 9.09^2;

zetainf = 10; %chute
zeta2 = 0.001; %chute

H11 = -X;
H12 = Cz2*G + Dzu2*Z;
H22 = P2 - G - G';

H = [H11 H12; H12' H22]

T11 = A*G + Bu*Z + G'*A' + Z'*Bu';
T12 = P2 - G' + zeta2*(A*G + Bu*Z);
T13 = Bw2*V2;
T22 = zeta2*(-G-G');
T23 = zeros(2,1);
T33 = eye(1) - V2 - V2';

T = [T11 T12 T13; ...
     T12' T22 T23; ...
     T13' T23' T33];

J11 = A*G + G'*A' + Bu*Z + Z'*Bu';
J21 = Pinf - G + zetainf*(A*G + Bu*Z)';
J22 = -zetainf*(G+G');
J31 = Czinf*G + Dzuinf*Z;
J32 = zetainf*(Czinf*G + Dzuinf*Z);
J33 = -gamaquad*eye(1);

```

```

J41 = -Vinf'*Bwinf';
J42 = zeros(1,2);
J43 = -Vinf'*Dzwinf';
J44 = eye(1) + Vinf + Vinf';

J = [J11 J21' J31' J41';...
     J21 J22 J32' J42';...
     J31 J32 J33 J43';...
     J41 J42 J43 J44];

LMIs = [P2 > 0, Pinf > 0, H < 0, T < 0, J < 0];
solvesdp(LMIs,trace(Xsdp), sdpsettings('solver','sedumi'));
[p,d] = checkset (LMIs);

if (min(p) >0)
    disp('Factivel')
    K= double(Z)*inv(double(G))
    %eig(A+Bu*K)
    Kcoefs = coefs(K);
    K1 = Kcoefs{1}; K2 = Kcoefs{2};
    save controle K1 K2;
else
    disp('Infactivel')
end
end

```

## **ANEXO B – Código para simulação do Controle Misto**

```
function simulacao
load controle;
[tout,xout] = ode45(@(t,x) sistema(t,x,K1,K2),0:0.01:10,[50;0]);
```

```

    for cont=1:length(tout)
        [~,u(cont)] = sistema(tout(cont),xout(cont,:),K1,K2);
    end
plot(tout,xout(:,1));

figure
plot(tout,u);
return

function [dx,u] = sistema(t,x,K1,K2)
if (t >= 2.93)
    t;
end
ref = 100;
if (x(1) > 0)
    theta = 1/sqrt(x(1));
else
    theta = 1;
end

if (theta < 0.070711)
    theta = 0.070711;
end
if (theta > 1)
    theta = 1;
end

alfa1 = (theta-1)/(0.070711-1);

```

```
alfa2 = 1-alfa1;
K = alfa1*K1 + alfa2*K2;
u = K*x;

if (u < 0)
    u = 0;
end

w = 0;%0.11*randn(1,1);

dx(1,1) = -126.127*theta*x(1) + 850.093*u + 956.579*w;
dx(2,1) = ref - x(1);

return
```