UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO ENSINO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
DOUTORADO EM ENSINO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

RONALDO THEODOROVSKI

E-BOOK

O CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL E AS OPORTUNIDADES DE APRENDIZAGEM PROFISSIONAL DO FUTURO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

Produto Educacional da tese de doutorado intitulada "O Cálculo Diferencial e Integral e as Oportunidades de Aprendizagem Profissional do Futuro Professor de Matemática", do programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciência e Tecnologia, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor.

Orientador: Prof. Dr. André Luis Trevisan.

PONTA GROSSA
2025

E-BOOK

O CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL E AS OPORTUNIDADES DE APRENDIZAGEM PROFISSIONAL DO FUTURO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

Ronaldo Theodorovski
André Luis Trevisan

Por que este material foi pensado? E para quem?

Apresentamos a você este Produto Educacional, construído com o propósito de fortalecer a formação de professores que ensinam Matemática, especialmente no desafio de aproximar o Cálculo da universidade dos conteúdos trabalhados na Educação Básica. A proposta busca contribuir, sobretudo, com professores em formação inicial, ao promover conexões entre os conhecimentos acadêmicos e as práticas de sala de aula. Ao mesmo tempo, pode interessar a docentes que já atuam na Educação Básica e desejam explorar maneiras de tratar o Cálculo em diálogo com o currículo.

Este material foi pensado como resposta à conhecida "dupla descontinuidade" apontada por Klein (2009) e discutida por diversos autores, entre eles Giraldo (2018) e Broetto e Santos-Wagner (2019), que mostram como os futuros professores de Matemática muitas vezes vivenciam um distanciamento entre a matemática aprendida na universidade e aquela que deverão ensinar na escola. Mais do que reconhecer essa ruptura, buscamos oferecer caminhos que ajudem a reduzir esse afastamento.

Nosso foco está nas Tarefas de Aprendizagem Profissional (TAP), inspiradas em Ball e Cohen (1999), Smith (2001) e Ribeiro e Ponte (2020), concebidas para proporcionar oportunidades de aprendizagem vinculadas às demandas reais da sala de aula. Por meio de TAP que aproximam conceitos do Cálculo (como limite, derivada e integral definida) dos conteúdos da Educação Básica, pretendemos incentivar discussões que mobilizem o Conhecimento Matemático para o Ensino (Ball; Thames; Phelps, 2008).

Não basta conhecer o conteúdo matemático: é preciso refletir sobre como ele se apresenta no currículo escolar, de que maneira os estudantes da Educação Básica se relacionam com os conceitos de Cálculo, e como o professor pode mediar esse encontro. Assim, este material propõe a análise de episódios de ensino, estratégias de estudantes e possibilidades de intervenção docente, buscando favorecer o raciocínio profissional do futuro professor.

Por que este material foi pensado? E para quem?

Ao compartilhar estas TAP, buscamos dialogar com aqueles que, como nós, atuam entre a universidade e a escola, interessados em aproximar o ensino de Cálculo da formação de professores e dos desafios presentes na sala de aula. Valorizamos a colaboração como parte essencial desse processo formativo, reconhecendo a importância do diálogo e da troca de experiências entre os diferentes envolvidos com o ensino de Matemática. Como afirmam Santana, Serrazina e Nunes (2019, p. 15), é preciso "promover culturas de ações colegiadas, em que possamos contar com o diálogo e a troca de experiências entre os diferentes atores do cenário escolar."

Voltando às perguntas que dão título a este texto (por que este material foi pensado? E para quem?), porque ainda é necessário aproximar o Cálculo dos conteúdos da Educação Básica e provocar discussões sobre o que significa ensiná-lo na formação de quem vai atuar na escola. Este material é voltado ao professor da universidade, ao professor da Educação Básica e ao futuro professor, que compartilham o compromisso com uma Educação Matemática que construa pontes entre esses espaços.

Seja bem-vindo à leitura — e que ela ajude a construir novas possibilidades no ensino de Matemática.

Sumário

5

A FORMAÇÃO DE PROFESSORES

A Formação de Professores e a Importância da Prática

O desenvolvimento profissional é tratado como parte essencial da formação docente, indo além da aquisição de técnicas. Para Garcia (1999; 2009), trata-se de um processo de estruturação pessoal, sustentado por experiências e aprendizagens. Nóvoa (2009; 2017) destaca que a formação deve estar ligada à prática da profissão. Nessa direção, Papi (2014) e Ponte (1998; 2014) entendem o desenvolvimento profissional como um processo contínuo, que valoriza o que o professor realiza, em contraste com a formação voltada apenas ao que lhe falta. Crecci e Fiorentini (2013) também criticam a redução da formação a eventos pontuais, defendendo um processo mais amplo, que envolva reflexão, prática e contexto (Richit, Ponte e Quaresma, 2021).

Born (2019) aponta três tendências na formação de professores: uma técnica, baseada no comportamentalismo, que enfatiza a repetição de métodos; outra cognitivista, centrada na acumulação de conhecimento teórico; e uma terceira, de orientação sociocultural, que valoriza a aprendizagem a partir da prática, com análise de artefatos reais, como trabalhos de alunos e vídeos de aula. No Brasil, ainda prevalece a abordagem cognitivista, voltada à transmissão teórica. Em sentido oposto, Garcia (2009) propõe uma formação construtivista, que entende o profissional da educação como alguém que aprende ao ensinar, avaliar e refletir continuamente sobre suas próprias ações.

Serrazina e Monteiro (2004), Nacarato e Paiva (2008), Fiorentini (2013) e Ponte (2012) reforçam a importância do registro e da análise do trabalho docente. Para Cochran-Smith e Lytle (1999), isso envolve três dimensões: o conhecimento **para a prática**, vinculado a teorias que orientam o trabalho do professor; o conhecimento **na prática**, que surge no momento da ação, quando ele interpreta, ajusta e responde ao que acontece; e o conhecimento **da prática**, construído ao analisar o próprio trabalho em diálogo com outros profissionais, levantando questões mais amplas sobre ensino, currículo e o papel do professor.

6

A FORMAÇÃO DE PROFESSORES

O CDI na formação de professores de Matemática

Na formação de professores de Matemática, é recorrente a constatação da distância entre a matemática ensinada nas universidades e aquela exigida nas práticas realizadas nas escolas. Jaworski (2006), Reis (2001) e Ávila (2002) indicam que o ensino do Cálculo nas Licenciaturas, muitas vezes estruturado de forma formal e voltada à demonstração, não dialoga com as exigências da atuação do professor. Esse questionamento remonta à proposta de Felix Klein, que já no início do século XX defendia uma articulação entre matemática escolar e universitária (Klein, 1927 apud Miranda, 2004).

David, Moreira e Tomaz (2013) distinguem três formas de conhecimento matemático: a matemática escolar, a acadêmica e a vinculada ao cotidiano, ressaltando a importância de reconhecer as diferenças e desafios existentes entre elas para que a formação acompanhe as demandas reais da sala de aula. Contudo, como mostram Moreira e David (2005; 2008), as licenciaturas continuam a tratar conteúdo específico e pedagógico de maneira paralela, sem integração.

A pesquisa de Gereti (2018) discute a distância entre o Cálculo ensinado na universidade e as demandas da Educação Básica. Ao relatar uma situação em que teve dificuldade para explicar a uma estudante da Educação Básica a ideia de infinito, a autora evidencia o desafio de transformar conceitos acadêmicos em algo compreensível, mostrando que aprender matemática é diferente de saber ensiná-la. Esse episódio amplia o debate sobre formação, indicando que a Educação Básica pode dialogar com ideias do Ensino Superior.

A pesquisa de Mumcu (2018) investigou como licenciandos em Matemática compreendem e mobilizam o conceito de derivada em diferentes contextos. Por meio de um teste, foi analisada a relação que os participantes estabeleciam entre a derivada e outras representações, incluindo sua definição por limite. Embora muitos soubessem aplicar regras de derivação, poucos associaram o conceito ao seu significado geométrico. No contexto do ensino, essa limitação é preocupante, pois dificulta que o futuro professor explique o porquê de certos procedimentos, restringindo-se apenas ao “como fazer”.

7

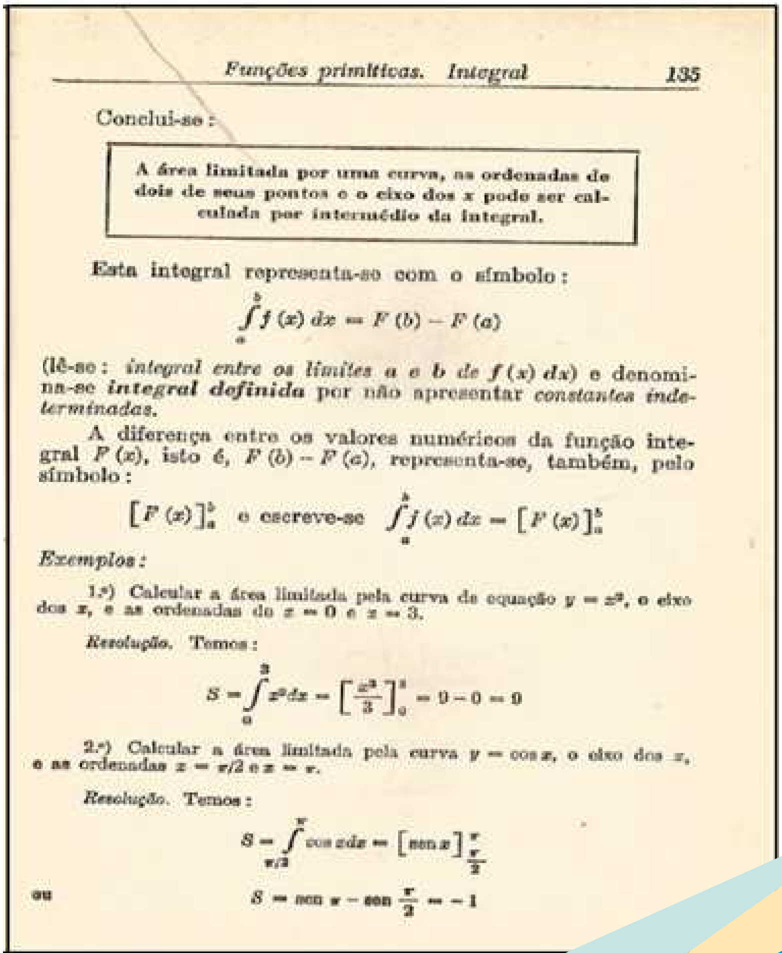
A FORMAÇÃO DE PROFESSORES

O CDI na formação de professores de matemática

A introdução precoce de limites definidos por ε e δ, quando centrada apenas no rigor formal, tende a afastar a formação das demandas do ensino na Educação Básica. Fontes e Gontijo (2022) analisaram livros de Cálculo amplamente utilizados na licenciatura e apontaram que, mesmo com tentativas de contextualização, prevalece uma abordagem técnica. Dörr (2017) destacou a importância de considerar o currículo da Educação Básica ao discutir o lugar do Cálculo na formação. Essa separação também se expressa na lógica do modelo 3+1, ainda presente na organização dos cursos, com conteúdos matemáticos e pedagógicos desenvolvidos de forma isolada (Moreira, 2012).

Um exemplo histórico de maior aproximação entre o Ensino Médio e o Ensino Superior aparece na Figura 1, que reproduz uma página do livro de Ary Quintella (1965 apud Souza, 2019), destinada ao Ensino Médio, na qual se explora o estudo de integrais definidas, em uma proposta influenciada pela Matemática Moderna (Chaquiam, 2017).

Figura 1 – Integrais no Ensino Médio (década de 1960)



Funções primitivas. Integral 135

Conclui-se:

> **A área limitada por uma curva, as ordenadas de dois de seus pontos e o eixo dos x pode ser calculada por intermédio da integral.**

Esta integral representa-se com o símbolo:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

(lê-se: *integral entre os limites a e b de f (x) dx*) e denomina-se ***integral definida*** por não apresentar *constantes indeterminadas*.

A diferença entre os valores numéricos da função integral $F(x)$, isto é, $F(b) - F(a)$, representa-se, também, pelo símbolo:

$$[F(x)]_a^b \quad \text{e escreve-se} \quad \int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b$$

Exemplos:

1.º) Calcular a área limitada pela curva de equação $y = x^2$, o eixo dos x, e as ordenadas de $x = 0$ e $x = 3$.

Resolução. Temos:

$$S = \int_0^3 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = 9 - 0 = 9$$

2.º) Calcular a área limitada pela curva $y = \cos x$, o eixo dos x, e as ordenadas $x = \pi/2$ e $x = \pi$.

Resolução. Temos:

$$S = \int_{\pi/2}^{\pi} \cos x\,dx = [\operatorname{sen} x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

ou

$$S = \operatorname{sen} \pi - \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = -1$$

Fonte: Souza (2019)

8

A FORMAÇÃO DE PROFESSORES

O CDI na formação de professores de matemática

A chegada do Movimento da Matemática Moderna (MMM) ao Brasil levou a uma reformulação curricular que aproximou a matemática escolar da matemática pura. No entanto, a proposta mostrou-se inviável no Ensino Médio, especialmente no ensino de Cálculo, excluído do currículo pelo excesso de formalismo e linguagem abstrata (Soares; Dassie; Rocha, 2004). Gatti (2017) aponta desafios como a fragmentação da formação, a falta de articulação entre suas etapas e a ausência de políticas consistentes, além da dificuldade em construir currículos que contemplem as exigências da profissão.

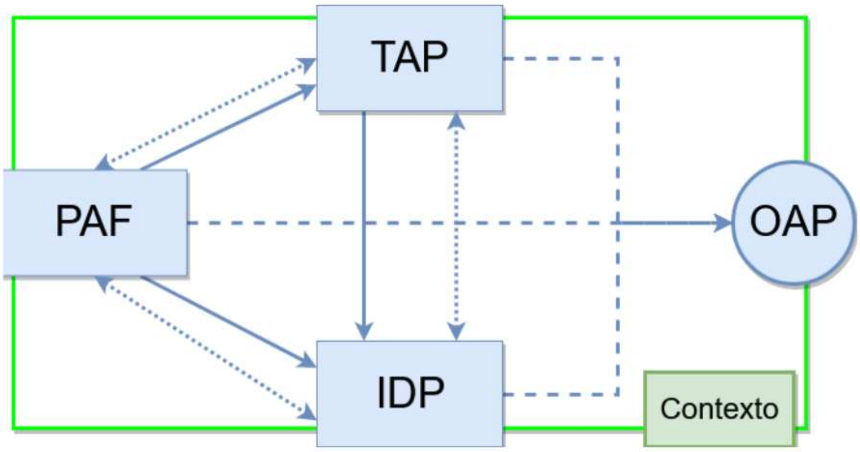
A proposta deste material não é retomar o formalismo característico do MMM, nem defender a antecipação de conteúdos avançados. O que se propõe é que conceitos como o de integral possam ser abordados a partir do currículo da Educação Básica, mantendo o rigor conceitual, mas com o apoio de estratégias didáticas mais adequadas. Nessa perspectiva, o Ensino Exploratório (Ponte, 2005) aparece como uma alternativa promissora. Repensar o ensino de Cálculo, nesse contexto, significa ampliar as possibilidades formativas e construir relações mais sólidas entre os conhecimentos da universidade e a prática profissional docente.

9

O MODELO PLOT

Para compreender a proposta formativa em questão, é essencial conhecer o modelo PLOT (Ribeiro; Ponte, 2020), pois é dentro dessa estrutura que as Tarefas de Aprendizagem Profissional assumem sentido e relevância. O modelo PLOT (Professional Learning Opportunities for Teachers) organiza processos formativos por meio de três domínios interligados: TAP (Tarefas de Aprendizagem Profissional), PAF (Papel e Ações do Formador) e IDP (Interações Discursivas entre os Participantes). Esses domínios funcionam de forma integrada e interativa para promover Oportunidades de Aprendizagem Profissional (OAP) no contexto do ensino de Matemática e da prática em sala de aula.

Figura 2 – Modelo PLOT



Fonte: Ribeiro e Ponte (2020)

Tipo de Flecha	Fase	Significado principal
➡️ Linha contínua	Organização	Formador planeja o processo formativo e estrutura as TAP e possíveis IDP.
↔️ Linha pontilhada	Desenvolvimento	Interação entre participantes (IDP) e formador (PAF) por meio das TAP.
➡️ Linha tracejada	Finalização	Síntese das dimensões, gerando a OAP

10

TAREFAS DE APRENDIZAGEM PROFISSIONAL (TAP)

Segundo Ball e Cohen (1999), as TAP são tarefas que colocam os professores em situações de ensino, com objetivos específicos de aprendizagem do professor, considerando seus conhecimentos prévios e experiências profissionais.

Para Smith (2001), são construídas a partir de amostras autênticas da prática, como tarefas matemáticas utilizadas, diálogos em sala, protocolos de resolução e planejamentos. Esses materiais ajudam os professores a compreender conteúdos, aspectos pedagógicos e modos de aprendizagem dos alunos.

As amostras precisam ser organizadas com um objetivo formativo para se tornarem TAP. Uma forma de estruturá-las é considerando o ciclo: planejar, desenvolver, analisar e replanejar uma aula. Nesse processo, questões norteadoras orientam a análise dos registros (Smith, 2001).

Estrutura das TAP

- Começam com uma tarefa matemática destinada a estudantes da Educação Básica (Stein; Smith, 1998)
- São elaboradas para contextos que incentivam o Ensino Exploratório (Jaworski; Huang, 2014; Ponte; Quaresma, 2016).

Registros da Prática

Materiais gerados a partir da aplicação da tarefa matemática, como vídeos, relatos docentes, produções de alunos e trechos de propostas curriculares e/ou planos de ensino. (Ball; Ben-Peretz; Cohen, 2014)

Finalidade dos Registros

Elaborar questionamentos que incentivem a reflexão, promovam discussões sobre o conhecimento matemático e didático, e contribuam para a aprendizagem profissional. (Ribeiro; Ponte, 2019)

Análise de Episódios de Aula

Permite compreender como os alunos respondem às propostas, observar a dinâmica da aula e refletir sobre a prática docente. (Ball; Cohen, 1999; Smith, 2001).

11

ENSINO EXPLORATÓRIO

O Ensino Exploratório é uma prática complexa para muitos professores de Matemática, especialmente pela exigência de conduzir e gerir discussões coletivas. Seu caráter interativo o distingue do ensino direto, no qual a teoria é apresentada antes e os alunos apenas depois realizam tarefas sobre o conteúdo. No Ensino Exploratório, segundo Ponte (2005), essa ordem se inverte: os alunos começam por resolver uma situação que exige compreensão, e a teoria é construída a partir desse processo.

AS 4 ETAPAS DE UMA AULA COM ENSINO EXPLORATÓRIO
(OLIVEIRA, MENEZES E CANAVARRO, 2013)

12

ENSINO EXPLORATÓRIO

① INTRODUÇÃO DA TAREFA

O professor apresenta o problema, esclarece o enunciado e motiva os alunos. O objetivo é garantir que todos compreendam o desafio e estejam preparados para começar.

② RESOLUÇÃO PELOS ALUNOS

Os alunos trabalham individualmente ou em grupo. O professor observa, faz perguntas e mantém o desafio cognitivo, valorizando a autonomia e o raciocínio.

③ DISCUSSÃO COLETIVA

Busca-se garantir a qualidade das apresentações, organizando a discussão e as interações entre os alunos em um ambiente propício à participação.

④ SISTEMATIZAÇÃO DAS APRENDIZAGENS

O professor formaliza os conhecimentos matemáticos construídos, relacionando-os a aprendizagens anteriores e assegurando que os alunos registrem as ideias principais.

13

ENSINO EXPLORATÓRIO

As tarefas cognitivamente desafiadoras (Stein et al., 2009) exigem dos alunos formas elaboradas de pensamento, como construir argumentos, identificar padrões, desenvolver estratégias e formular hipóteses. Diferem da repetição de procedimentos, pois promovem engajamento reflexivo com os conceitos matemáticos por meio de propostas abertas e investigativas. Durante as discussões, os alunos compartilham ideias, expõem conjecturas, justificam respostas e se questionam mutuamente. O professor contribui esclarecendo conceitos, avaliando argumentos e incentivando a construção coletiva de significados (Ponte, 2005).

14

AS TAREFAS MATEMÁTICAS

Com a intenção de contribuir para práticas de ensino mais investigativas e de aproximar o estudo do Cálculo do currículo da Educação Básica, são apresentadas propostas de tarefas matemáticas pensadas, principalmente, para o Ensino Médio. Elas abordam ideias iniciais de limites, derivadas e integrais, e foram elaboradas com base na perspectiva do Ensino Exploratório (Ponte, 2005), que valoriza a formulação de conjecturas, a argumentação e o envolvimento dos estudantes com as ideias matemáticas.

Essas propostas também podem ser reorganizadas para o Ensino Fundamental – anos finais (6.º ao 9.º ano), desde que estejam alinhadas ao Currículo da Rede Estadual Paranaense (CREP, 2021), bem como à Base Nacional Comum Curricular (BNCC, Brasil, 2018), conforme os objetivos de aprendizagem envolvidos.

No Quadro 1, são sintetizadas quatro tarefas matemáticas, denominadas TM1, TM2, TM3 e TM4, com indicação dos conceitos de Cálculo mobilizados e dos objetivos educacionais que orientaram sua construção. Essas tarefas foram elaboradas pelo pesquisador e validadas no âmbito do grupo de pesquisa no qual este trabalho foi desenvolvido.

Foram aplicadas com turmas do Ensino Médio, integrando um conjunto articulado de ações que envolveram a participação dos estudantes, a atuação do professor, a mediação didática e os processos de aprendizagem em torno de ideias fundamentais do Cálculo. Ainda que todas possam funcionar como referência para a atuação de outros professores da Educação Básica interessados em propostas investigativas, neste estudo elas cumprem, principalmente, a função de compor cenários de sala de aula que subsidiam a construção das TAP.

Quadro 1 – Tarefas matemáticas, conceitos de Cálculo e Objetivos Educacionais

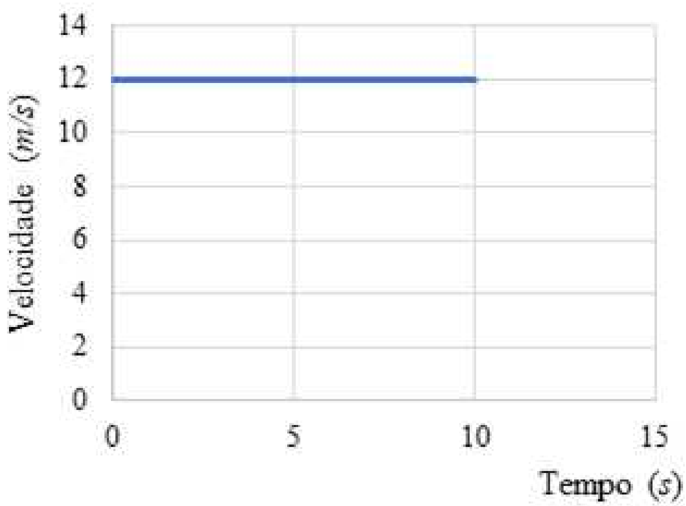
Tarefa Matemática	Conceito de Cálculo	Objetivos Educacionais
TM1 – Viagem com Pedro e Theo	Integral definida	1. Investigar relações entre velocidade, tempo e deslocamento a partir de gráficos do tipo velocidade-tempo, considerando trajetórias com velocidade constante e variável. 2. Explorar diferentes estratégias para estimar deslocamentos em movimentos variáveis, articulando representações gráficas, tabelas e médias aritméticas ou áreas como formas de aproximação.
TM2 – Área sob $f(x) = x^2$ com PG	Limites e integral	1. Explorar como a soma das áreas de retângulos com bases em progressão geométrica pode aproximar a área sob a curva da função quadrática no intervalo de 0 a 1. 2. Investigar o comportamento da aproximação da área à medida que a razão da progressão geométrica se aproxima de 1, estabelecendo relações entre sequências e integrais.
TM3 – Polígonos regulares inscritos	Limite e integral	1. Compreender como variações no número de lados de um polígono regular inscrito afetam a aproximação da área do círculo, utilizando relações geométricas e trigonométricas. 2. Perceber regularidades na formação de triângulos isósceles a partir do centro da circunferência e levantar hipóteses sobre o comportamento da área total à medida que o número de lados aumenta.
TM4 – Coroa circular (Ana e Felipe)	Derivada	1. Investigar relações entre os raios de cada circunferência que forma a coroa circular e sua área, reconhecendo como essa área varia de acordo com a diferença entre eles. 2. Explorar situações em que os raios são muito próximos para estabelecer relações entre a área da coroa circular e a de um retângulo, considerando o comprimento da circunferência interna e a diferença entre os raios como dimensões do retângulo.

Fonte: Autoria própria (2025)

16

TAREFA MATEMÁTICA 1 - TM1

1) Pedro e Theo resolveram fazer um passeio em um parque de diversões que fica em uma cidade próxima. Em alguns momentos da viagem, Theo, que não estava dirigindo, fez anotações da velocidade indicada no velocímetro do carro (convertendo km/h em m/s). Em um trecho da avenida, Theo percebeu que, entre uma placa e um radar, Pedro dirigiu com uma velocidade constante de 12 m/s, durante os instantes t = 0 e t = 10 segundos. Calcule, em metros, a distância percorrida nesse intervalo de tempo. Qual é a relação do gráfico com o resultado encontrado?



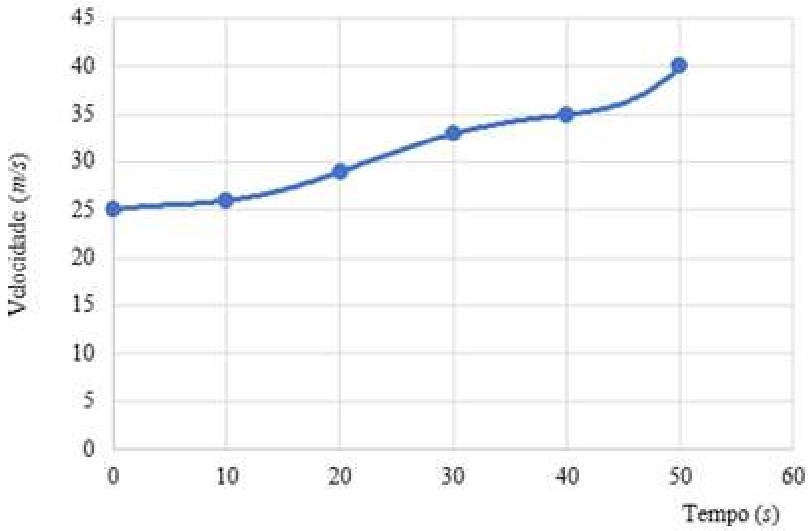
2) Ainda, durante a viagem de carro em um longo trecho retilíneo, ao cruzar em frente a um posto de combustível, Theo, que é fascinado por números, começou a anotar, a cada 10 segundos, a velocidade indicada no velocímetro do carro de Pedro, fazendo isso até passar em frente a um restaurante à beira da rodovia. Após alguns cálculos de conversão de km/h para m/s, Theo obteve o seguinte quadro:

s	0	10	20	30	40	50
m/s	25	26	29	33	35	40

17

TAREFA MATEMÁTICA 1 - TM1

a) A partir dos dados do quadro, foi representado no plano cartesiano um possível gráfico: tempo versus velocidade (t×v). Como Pedro não manteve velocidade constante, explique uma maneira de calcular a distância aproximada entre o posto de combustível e o restaurante.

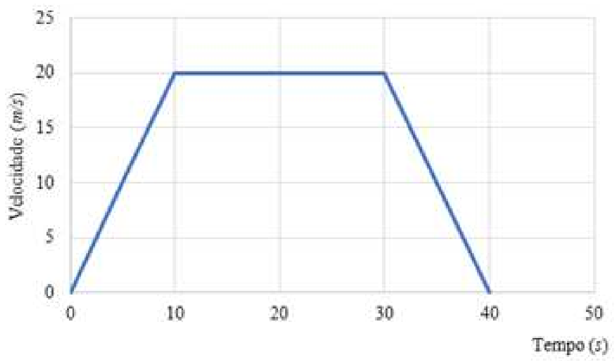


b) Qual sugestão você daria ao Theo para que você pudesse encontrar essa distância mais aproximada possível?

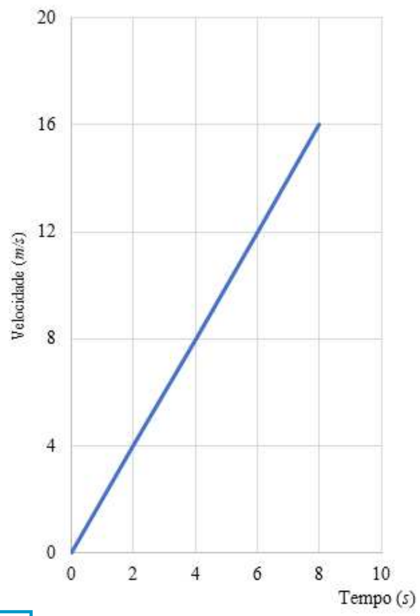
18

TAREFA MATEMÁTICA 1 - TM1

3) Das anotações de Theo, ele construiu um gráfico que representa o comportamento da velocidade, em função do tempo, no intervalo entre o instante que um semáforo abre e o veículo percorre um trecho retilíneo, até se aproximar de outro semáforo, no qual é obrigado a parar. Observando o gráfico, qual a distância entre esses dois semáforos?



4) Um motorista dirige seu carro ao longo de uma estrada retilínea. Sua velocidade varia de acordo com o tempo, conforme indicado no gráfico.



Encontre a distância percorrida pelo carro nos seguintes intervalos de tempo:

a) De 0 até 2 segundos.

b) De 0 até 4 segundos.

c) De 0 até 6 segundos.

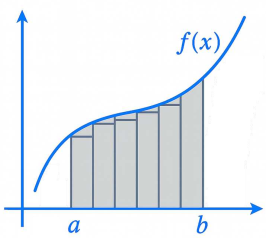
d) Com base nas distâncias obtidas, escreva a função que relaciona o tempo (em segundos) à distância percorrida (em metros).

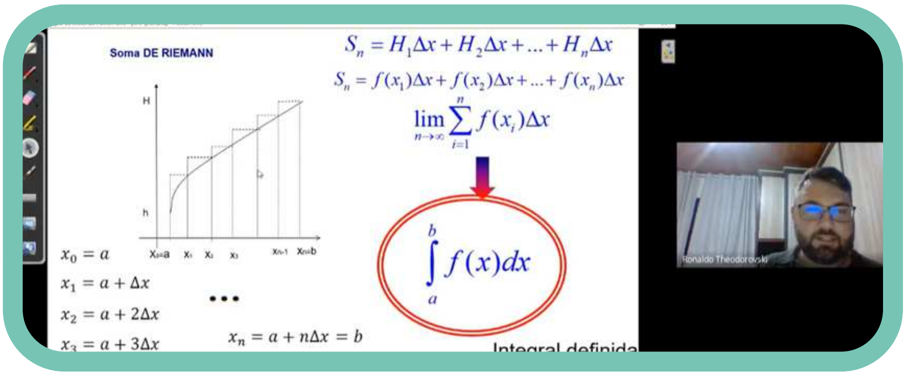
TAREFA MATEMÁTICA 1 - TM1

COMENTÁRIOS DA TM1:

A TM1 propõe estimar a distância percorrida por um móvel com base na relação entre o gráfico de uma função e a área delimitada por ele e o eixo dos tempos. De forma intuitiva, os estudantes são introduzidos ao conceito de integral definida, por meio da Soma de Riemann, utilizando figuras simples (retângulos, triângulos ou trapézios) para aproximar a área sob a curva. Alternativamente, podem empregar a média aritmética das velocidades em diferentes intervalos de tempo, o que permite estabelecer conexões com o Teorema do Valor Médio para integrais (Bongarti; Lozada-Cruz, 2021).

Na TM1, essas ideias são trabalhadas intuitivamente, permitindo aos alunos construir significados a partir da interpretação das informações apresentadas. A percepção de que a estimativa da distância melhora com intervalos menores — como observado na questão 2, item b — contribui para a compreensão do processo de aproximação da área. Na questão 4, ao calcular a área sob a função f(x) = 2x em determinados intervalos, os alunos desenvolvem, de forma natural, o raciocínio necessário para compreender a integral ∫2x dx, mesmo sem recorrer à notação formal.

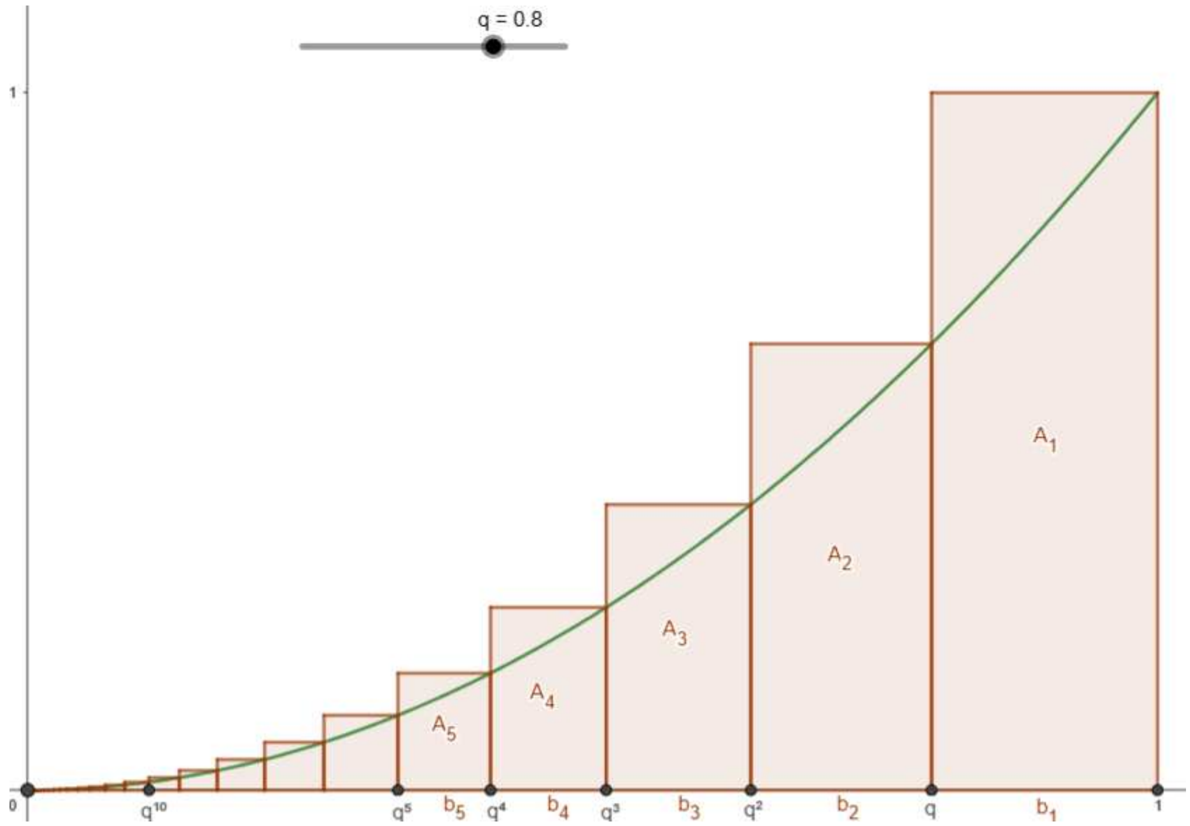




20

TAREFA MATEMÁTICA 2 - TM2

1) Use retângulos para estimar a área sob a parábola $f(x)=x^2$ de 0 até 1.



Para isso considere as abscissas que formam uma progressão geométrica (PG) infinita de razão q (0 < q < 1).

$$(1, q, q^2, ..., q^{n-1}, q^n, ...)$$

Onde os termos da PG coincidem com os vértices da base de cada retângulo construído.

a) Encontre os cinco primeiros termos da PG se a razão for q = 0,8.

b) Encontre os primeiros termos da sequência que formam a base de cada retângulo:

$$(b_1, b_2, b_3, b_4,...)$$

O que você pode dizer sobre essa sequência?

c) Como pode ser calculada a altura de cada retângulo? Represente as alturas como uma sequência escrevendo os primeiros termos.

$$(h_1, h_2, h_3, h_4,...)$$

O que você pode dizer sobre essa sequência?

21

TAREFA MATEMÁTICA 2 - TM2

d) Considere a sequência infinita (A_1, A_2, A_3, A_4,..., A_n, ...), onde os termos representam a área de cada retângulo construído, por exemplo, A_1 é o retângulo de base b_1 e altura h_1. O que você pode dizer sobre a sequência (A_1, A_2, A_3, A_4,..., A_n, ...)? Se possível, calcule a soma de todos os termos dessa sequência.

e) Se você encontrou uma fórmula para o cálculo da área, comente sobre o valor de *q* para ter uma melhor aproximação da área sob a parábola.

Veja a situação no GeoGebra: https://www.geogebra.org/m/hrwvacjg

22

TAREFA MATEMÁTICA 2 - TM2

COMENTÁRIOS DA TM2:

Na TM2, ao responder as questões, o aluno deve ser levado a perceber que cada sequência numérica solicitada forma uma nova PG. Avançando para o item (e), será possível encontrar uma fórmula para o cálculo da área desses retângulos. A sequência das áreas dos retângulos forma uma PG de razão q^3, sendo essa razão um número positivo menor que 1. Com base nas somas dos termos de uma PG, a área de todos esses retângulos é expressa pela Eq.1:

$$S = \frac{1-q}{1-q^3} \qquad (1)$$

Dessa forma, é esperado que os alunos do Ensino Médio possam estimar a área sob a parábola no intervalo solicitado, encontrando um valor numérico ao fazer substituições na expressão algébrica que representa a soma *S*, aproximando *q* de 1, por exemplo, utilizando uma calculadora para substituir q = 0,999 na Eq. 1.

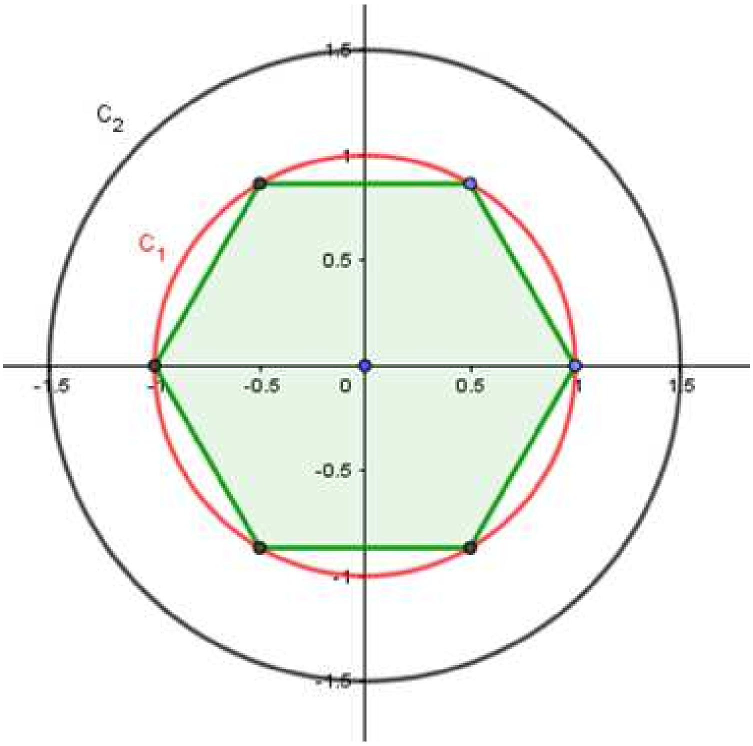
Em linguagem matemática, usando limites, tem-se:

$$\lim_{q \to 1} \frac{1-q}{1-q^3} = \frac{1}{3} \qquad (2)$$

23

TAREFA MATEMÁTICA 3 - TM3

1) Uma pista circular delimitada por duas circunferências concêntricas foi construída. Na circunferência interna da pista, de raio 1 hectômetro (1 hm), deverá ser escolhido pontos igualmente espaçados para construir polígonos regulares com a finalidade de plantar grama em toda a região interna do polígono.



Investigue qual será a área a ser gramada, nos casos em que polígono é:

a) Um triângulo

b) Um quadrado

c) Um hexágono

d) Um polígono qualquer.

Observação: Se o grupo encontrou uma fórmula para a área do polígono regular inscrito na circunferência de raio 1 hm, em função do número *n* de lados, podem avançar para a questão 3. Caso contrário, resolvam a questão 2.

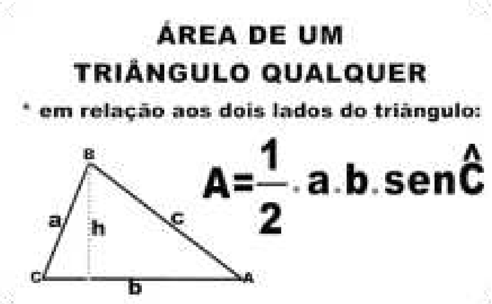
24

TAREFA MATEMÁTICA 3 - TM3

2) Imagine um polígono regular de 5 lados inscrito em uma circunferência, ligando todos os vértices do polígono ao centro da circunferência, obteremos um total de 5 triângulos isósceles.

a) Conhecendo as medidas dos dois lados congruentes e o ângulo α entre esses lados, qual será a área de cada triângulo? (considere α em radianos)

Lembre-se:



b) Agora, conclua qual será a área do polígono de *n* lados.

3) Se *n* crescer cada vez mais, o que acontece com a área do polígono inscrito na circunferência de raio *r*?

Para uma melhor visualização, acesse o recurso no GeoGebra:
https://www.geogebra.org/m/stsssxte

TAREFA MATEMÁTICA 3 - TM3

COMENTÁRIOS DA TM3:

A situação-problema proposta na TM3 conduz o estudante a perceber, de forma intuitiva, que à medida que o número de lados do polígono inscrito aumenta, sua área se aproxima da área do círculo. Essa construção permite visualizar que o contorno do polígono se torna progressivamente mais semelhante à circunferência. Trata-se de uma introdução ao conceito matemático de limite, em que uma sequência de áreas associadas a polígonos se aproxima de um valor específico *L*, que, nesse caso, corresponde a πr^2, a área do círculo.

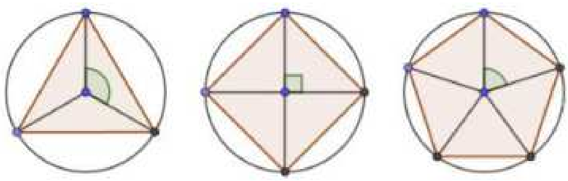
Nas questões da TM3, espera-se que os alunos consigam determinar a área de cada triângulo formado ao inscrever um polígono regular em uma circunferência. Para isso, devem observar que, ao ligar cada vértice do polígono ao centro do círculo, obtêm-se triângulos isósceles cujos os dois lados iguais têm comprimento igual ao raio *r* e o ângulo entre esses lados é $\alpha = (2\pi/n)$ *rad*. Usando esse raciocínio, é possível chegar à expressão da área do polígono:

$$A_n = n\frac{r^2}{2} sen\left(\frac{2\pi}{n}\right) \qquad (3)$$

Nesse caso, quando *n* é muito grande, se aproxima da área do círculo. Ou seja,

$$\lim_{n\to\infty} n\frac{r^2}{2} sen\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \pi r^2 \qquad (4)$$

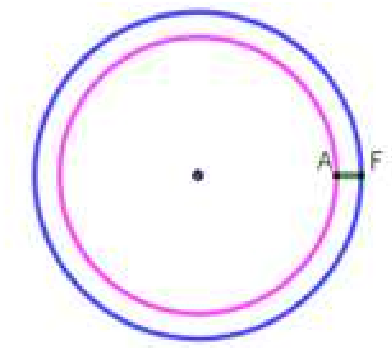
A TM3 permite introduzir, de forma acessível e visual no Ensino Médio, a ideia da área do círculo, aproximando os estudantes dos conceitos de limite e de integral definida por meio da decomposição do círculo em triângulos.



26

TAREFA MATEMÁTICA 4 - TM4

Ana e Felipe, um casal de namorados, estão caminhando de mãos dadas ao redor de uma pista circular. Enquanto Ana percorre a circunferência interna da pista, Felipe mantém sempre uma mesma distância de sua namorada. Por ser muito apaixonado, Felipe deseja caminhar o mais próximo possível de Ana o tempo todo. Na representação ao lado, o trajeto que Ana percorre está representado de cor rosa e o trajeto de Felipe de cor azul.



1) Encontre a área da coroa circular limitada pelas circunferências correspondentes ao trajeto desse casal, considerando que Felipe se encontra a uma distância h de Ana.

a) h = 0,01 hm   b) h = 0,005 hm   c) h = 0,001 hm

2) É possível fazer uma estimativa da área da coroa circular por meio de uma relação entre o comprimento da circunferência interna e a distância h? Explore um procedimento distinto do utilizado na questão 1.

3) Apresente a condição matemática para calcular o comprimento da circunferência interna de raio r, comparando as duas maneiras de calcular a área da coroa circular.

Para uma melhor visualização, acesse o recurso no GeoGebra:
https://www.geogebra.org/m/y7qme9fj

TAREFA MATEMÁTICA 4 - TM4

COMENTÁRIOS DA TM4:

Nessa tarefa, é importante tratar a área do círculo como uma função. A área da coroa circular (A_{coroa}) é calculada fazendo a diferença entre a área do círculo de raio maior A(R), e a área do círculo de raio menor, A(r). Vale destacar que R = r+h, logo: $\mathbf{A_{coroa} = A(r+h) - A(r)}$.

No entanto, a situação problema apresentada na tarefa incentiva o aluno a considerar valores de h cada vez menores. Dessa forma, é possível aproximar a área da coroa circular a área de um retângulo, tendo como dimensões o comprimento da circunferência interna (C) e a distância h (valor extremamente pequeno, $h \to 0$). Com essa condição, é possível escrever: $\mathbf{A_{coroa} \approx C \cdot h}$.

Dessa maneira, o comprimento da circunferência está relacionado ao conceito de derivada por definição,

$$C = \lim_{h \to 0} \frac{A(r+h) - A(r)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\pi(r+h)^2 - \pi r^2}{h} = 2\pi r \qquad (5)$$

A TM4 representa uma oportunidade valiosa de introduzir, de forma acessível e intuitiva, uma ideia central do Cálculo: a derivada da função $f(x) = \pi x^2$, que resulta em $f'(x) = 2\pi x$. Ao utilizar analogias com a área do círculo ($A = \pi r^2$) e o comprimento da circunferência ($C = 2\pi r$), a tarefa permite que o estudante perceba, ainda na Educação Básica, como a variação da área em função do raio se relaciona diretamente ao comprimento da circunferência do círculo. Com isso, amplia-se a compreensão da derivada e criam-se oportunidades para explorar, de modo acessível, ideias do Cálculo no currículo escolar.

TAREFA MATEMÁTICA E CURRÍCULO

Ao explorar noções como área de retângulos, propriedades da área do círculo, da coroa circular e o comprimento da circunferência, os alunos desenvolvem habilidades previstas na BNCC e no Referencial Curricular do Paraná. Essas construções dialogam com as competências específicas da Matemática para o Ensino Médio, especialmente a competência 4 (uso flexível de diferentes representações matemáticas) e a competência 5 (formulação de conjecturas a partir de padrões e experimentações).

A articulação com o currículo também se evidencia nos objetivos destacados no Quadro 1, que estão alinhados à habilidade EM13MAT505 da BNCC, que propõe a resolução de problemas com ladrilhamentos e a generalização de padrões (BRASIL, 2018), e ao objetivo do Currículo do Paraná (Ensino Médio), que propõe: “Aprofundar o conceito e os procedimentos de cálculo de volume, perímetro e área das figuras geométricas, inclusive a área do círculo, coroa circular e setor circular na resolução de problemas em contextos diversos” (PARANÁ, 2021, p. 11). Parte-se da compreensão de que os conteúdos do Cálculo não devem ser tratados como exclusivos do Ensino Superior, mas reconhecidos em sua presença ao longo da Educação Básica, com diferentes abordagens e níveis de formalização.

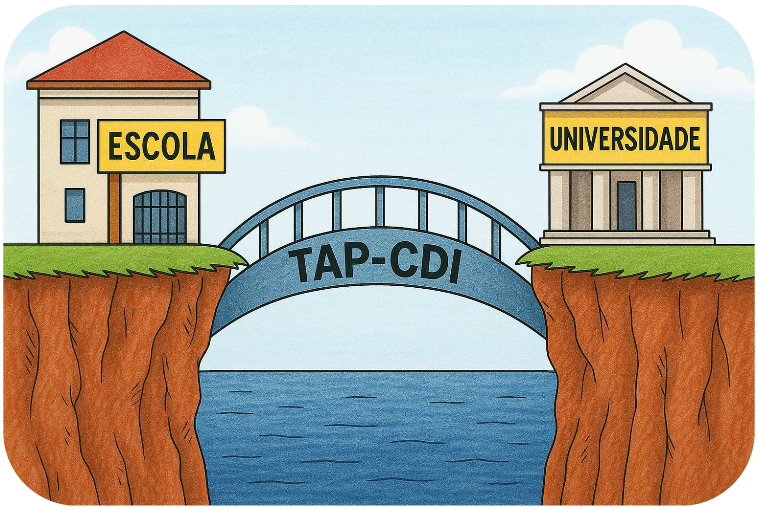
REFERENCIAL CURRICULAR DO PARANÁ

BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR

TRÊS TAREFAS DE APRENDIZAGEM PROFISSIONAL

Como parte deste material, serão apresentadas três Tarefas de Aprendizagem Profissional (TAP): TAP1, TAP2 e TAP3. Essas propostas foram construídas a partir de amostras autênticas do ensino de Matemática, com base em registros de práticas realizadas com uma turma do 3.º ano do Ensino Médio da rede pública do Paraná. Tratam-se de aulas remotas realizadas em 2021, durante a pandemia de coronavírus. Os estudantes mantinham um forte envolvimento com o estudo da Matemática e, com frequência, se preparavam para participar da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), com o objetivo de avançar para as fases seguintes. O perfil dos estudantes indicava interesse por tarefas matemáticas desafiadoras, que envolvessem exploração, levantamento de hipóteses, justificativas e diferentes formas de resolução.

As três TAP foram aplicadas junto a turmas do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Centro-Oeste (Unicentro), campus Irati/Paraná, com a finalidade de promover Oportunidades de Aprendizagem Profissional (OAP) voltadas ao desenvolvimento do Conhecimento Matemático para o Ensino (MKT), conforme proposto por Ball, Thames e Phelps (2008).



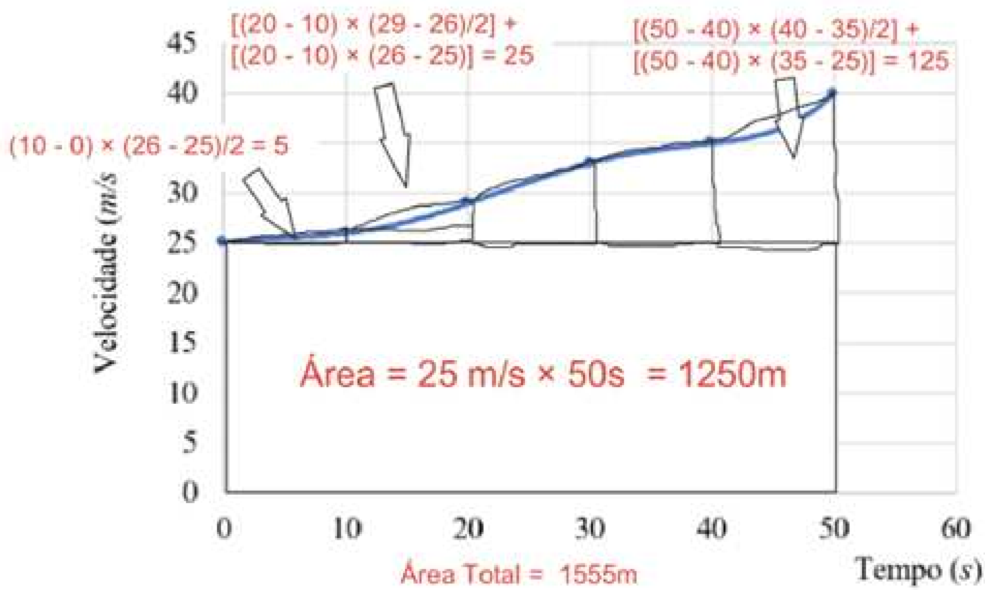
30

TAP 1: INTEGRAL DEFINIDA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Contexto: Um grupo de nove estudantes do Ensino Médio participou ativamente da resolução da Tarefa Matemática “Viajando com Pedro e Theo” [TM1]. Organizados em três grupos, os alunos se engajaram em discussões colaborativas em torno das questões propostas. Ao longo da aula, foram selecionados momentos relevantes, com registros que incluem protocolos escritos de resolução, gravações das discussões em grupo e vídeos da plenária com a participação do professor e dos estudantes. Considere os momentos destacados e responda às questões seguintes, justificando suas interpretações.

1) Com a realização da Tarefa Matemática, os alunos dos grupos 2 e 3 conseguem perceber a ideia geométrica da distância percorrida por um móvel, fazendo a relação com a área sob o gráfico. Esses grupos encontraram o mesmo valor para a distância solicitada na segunda questão - item (a), conforme os registros a seguir.

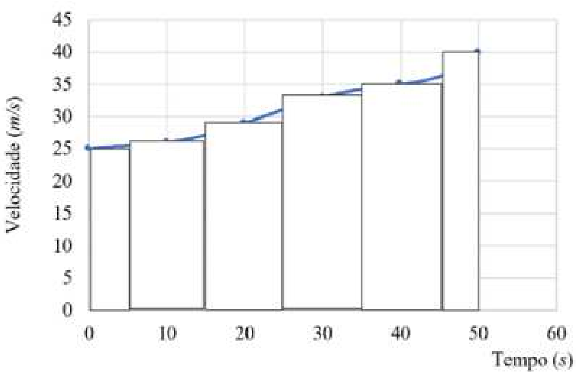
GRUPO 2



31

TAP 1: INTEGRAL DEFINIDA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

GRUPO 3



Multiplica-se o primeiro retângulo que vale 25m/s por 5s, como ilustrado no gráfico, em seguida, se multiplica 26, o 29, 33 e o 35 pelo 10, e por último, multiplica o 40 por 5, resultante em ordem crescente em 125, 260, 290, 330, 350, 200, após, soma-se todos estes valores, resultando em 1555 metros, distância percorrida do posto de combustível até o restaurante.

a) Quais semelhanças e diferenças você estabelece entre os procedimentos utilizados?

b) Nessa mesma questão da tarefa matemática houve necessidade do cálculo da área de uma região curva. Os alunos dos grupos 2 e 3 sugeriram subdividir a figura em retângulos, triângulos e trapézios, para obter uma melhor aproximação da área sob o gráfico. Conseguem fornecer outros exemplos em que a decomposição ou subdivisão em partes menores pode ser útil para a compreensão de conceitos matemáticos? Isso pode se aplicar a problemas geométricos, algébricos, aritméticos, entre outras áreas da matemática.

TAP 1: INTEGRAL DEFINIDA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

2) Durante a plenária, os estudantes apresentaram suas soluções para o professor. Em relação ao grupo 1 na questão 2(a), nota-se que os alunos não relacionaram a distância percorrida com o cálculo de área conforme os grupos 2 e 3. Veja o vídeo desse momento:

https://www.youtube.com/watch?v=YKtCBGQ9f_o

O professor dedicou mais tempo aos procedimentos utilizados pelos grupos 2 e 3 em comparação com o procedimento utilizado pelo grupo 1. No entanto, considerando que o grupo 1 resolveu o problema de uma forma diferente, como futuros professores, vocês avaliam o procedimento do grupo 1 como válido? No lugar do professor, como vocês explorariam esse procedimento?

3) A tarefa matemática foi aplicada em uma turma do Ensino Médio. No entanto, considerando as orientações da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) ou do Currículo do Estado do Paraná (CREP), é possível desenvolvê-la já no Ensino Fundamental? Quais as possibilidades ou limitações para isso, considerando as habilidades e os conteúdos previstos do 6º ao 9º ano?

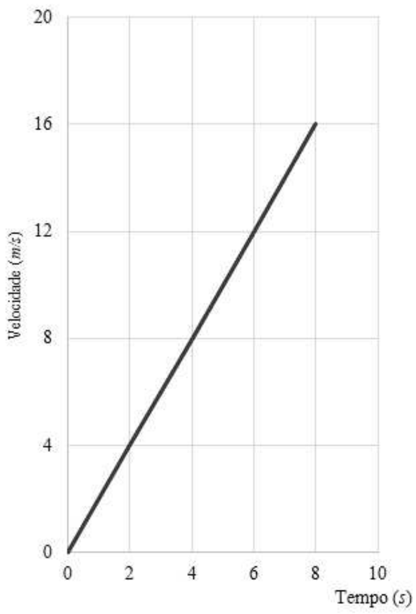
4) Analisando os protocolos dos três grupos, identifique elementos matemáticos que se relacionam com a definição de integrais definidas. Como você utilizaria esses protocolos para generalizar a distância percorrida do móvel para uma função e um intervalo qualquer.

33

TAP 2: A INTEGRAL DEFINIDA PELO TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO?

Contexto: Um grupo de nove estudantes do Ensino Médio participou ativamente da resolução da Tarefa Matemática “Viajando com Pedro e Theo” [TM1]. Organizados em três grupos, os alunos se engajaram em discussões colaborativas em torno das questões propostas. Ao longo da aula, foram selecionados momentos relevantes, com registros que incluem protocolos escritos de resolução, gravações das discussões em grupo e vídeos da plenária com a participação do professor e dos estudantes. Considere os momentos destacados e responda às questões seguintes, justificando suas interpretações.

1) Com base na questão 4 Tarefa Matemática [TM1], conforme ilustrado na imagem abaixo:



Encontre a distância percorrida pelo carro nos seguintes intervalos de tempo:

a) De 0 até 2 segundos.

b) De 0 até 4 segundos.

c) De 0 até 6 segundos.

d) Com base nas distâncias obtidas, escreva a função que relaciona o tempo (em segundos) à distância percorrida (em metros).

TAP 2: A INTEGRAL DEFINIDA PELO TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO?

Os alunos do grupo 1 apresentaram a seguinte resolução para a questão:

4. a)

Considerando que a área entre o grafico e o eixo t é equivalente ao deslocamento temos que:

d=(4*2)/2

d=8/2

d=4m

logo a distancia percorrida pelo veiculo em 2 segundo é 4 metros

4. b)

Considerando que a área entre o grafico e o eixo t é equivalente ao deslocamento temos que:

d=(8*4)/2

d=32/2

d=16m

logo a distancia percorrida pelo veiculo em 4 segundo é 16 metros

4. c)

Considerando que a área entre o grafico e o eixo t é equivalente ao deslocamento temos que:

d=(6*12)/2

d=72/2

d=36m

logo a distancia percorrida pelo veiculo em 6 segundo é 36 metros

4. d)

A distância é a área do gráfico, que nesse caso como é um triângulo

(B . h) : 2 ou (V . t) : 2

como a velocidade é sempre o dobro do tempo

(2t . t) : 2

simplificando

t . t ou t^2

ou

S = S0 + V0.t + a.t^2/2

S = S0 + 0.t + 2.t^2/2

S - S0 = t^2

A distância é igual ao quadrado do tempo.

35

TAP 2: A INTEGRAL DEFINIDA PELO TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO?

Além disso, esses alunos também desenvolveram o seguinte diálogo (transcrições de gravações de discussões realizadas em grupos):

> Aluno 1: Por ter a reta, dá para achar a área usando a fórmula da área do triângulo.
>
> Aluno 2: Dá para usar a fórmula do sorvetão [$S = S_0 + v_0t + (at^2)/2$] da física aqui também.
>
> Aluno 3: De que jeito?
>
> Aluno 2: Em $v = 2t$ a aceleração é 2 [$2m/s^2$] e a velocidade inicial é 0.

Com relação a esses protocolos apresentados:

a) Considerando o diálogo entre os alunos, em que utilizam a área do triângulo e mencionam a fórmula do "sorvetão", seria possível deduzir ou demonstrar a equação $S = S_0 + v_0t + (at^2)/2$ com base nos conteúdos previstos na BNCC ou no CREP?

b) Nesses protocolos dos alunos, é possível identificar, ainda que de forma intuitiva, a ideia expressa pela equação

$$\int_{t_0}^{t} v(u)du = s(t) - s(t_0)$$

ou seja, a relação entre a variação da posição e a área sob o gráfico da função velocidade? Que indícios nos registros apontam para essa articulação?

TAP 3: A INTEGRAL DE $F(X) = X^2$ NA ESCOLA

Contexto: Um grupo de nove estudantes do Ensino Médio participou ativamente da resolução da Tarefa Matemática “Área sob f(x) = x² com PG” [TM2]. Organizados em três grupos, os alunos se engajaram em discussões colaborativas em torno das questões propostas. Ao longo da aula, foram selecionados momentos relevantes, com registros que incluem protocolos escritos de resolução, gravações das discussões em grupo e vídeos da plenária com a participação do professor e dos estudantes. Considere os momentos destacados e responda às questões seguintes, justificando suas interpretações.

1) Com base na Tarefa Matemática: A área sob a parábola, cuja finalidade era encontrar a área sob a função $f(x) = x^2$ de 0 até 1. Qual é a avaliação do grupo em relação à utilização da linguagem algébrica apresentada no texto dessa tarefa? Como vocês descrevem a familiaridade desses alunos com o uso de notações matemáticas?

Protocolo 1 (escrito): Resolução do final da letra (a) e solução completa do item (b).	Protocolo 2 (vídeos)
q5=0,4096 Q=[1; 0,8; 0,64; 0,512; 0,4096] b) b1=q1-q2 b1=1-0,8 b1=0,2 b2=q2-q3 b2=0,16 b3=q3-q4 b3=0,128 b4 = q4-q5 b4 = 0,512-0,4096 b4 = 0,1024 B=[0,2; 0,16; 0,128; 0,1024] Obs: A diferença entre dois termos de uma PG gera outra PG.	Vídeo 1: O uso das notações nos itens (a) e (b). https://youtu.be/ALfHOEhwRfo?si=cplS9STJn26GyLau Vídeo 2: Sequências numéricas e a altura do retângulo do item (c). https://youtu.be/zLYTAlzmRpE?si=6yByLy1Hsqh_n8vk

TAP 3: A INTEGRAL DE $F(X) = X^2$ NA ESCOLA

2) Com base nos protocolos acima (1ª coluna), se a Tarefa Matemática solicitasse os próximos termos da sequência, por exemplo, b_5, b_6 e b_7, como vocês acham que os alunos procederiam para descobrir?

3) Qual é a importância de incluir o estudo de sequências numéricas na abordagem dos conteúdos matemáticos na Educação Básica?

4) Os alunos dos três grupos conseguem avançar até a questão da letra (d) da Tarefa Matemática, na qual precisam chegar à fórmula que calcula a área de todos os retângulos. Qual é o papel dos casos particulares na construção de fórmulas matemáticas e como esse tipo de abordagem pode dialogar com diferentes funções e intervalos?

5) Durante a resolução da letra (d) (veja os protocolos 3 e 4), um aluno se depara com duas fórmulas diferentes para a soma de uma PG e escolhe utilizar uma delas. Como vocês avaliam o diálogo do professor com o aluno nesse momento? O professor busca usar ideias do Cálculo para ajudar o estudante a entender melhor de onde vem e quando usar a segunda fórmula?

Protocolo 3 (escrito): Fórmulas da soma PG	Protocolo 4 (vídeo): Fórmulas da soma PG
$Soma\ finita: S_n = a_1 \dfrac{1-q^n}{1-q}$ (1) $Soma\ infinita: S_\infty = \dfrac{a_1}{1-q}$ (2)	https://youtu.be/Qx6vwkZ_IWA?si=k4T9JVCMsSZthmKk

TAP 3: A INTEGRAL DE $F(X) = X^2$ NA ESCOLA

6) Em relação aos protocolos escritos de resolução, nota-se que os alunos dos três grupos conseguiram obter satisfatoriamente a fórmula da soma das áreas dos retângulos. Abaixo são apresentados dois protocolos.

Protocolo 5 (escrito): Resolução da questão (e) - Fórmula

Conforme q se aproxima de 1, a soma das áreas se aproxima cada vez mais da área real da função. Porém, se q se tornar 1, a base dos retângulos se anulam. Por tanto q deve se aproximar de 1 sem se equivaler a 1.

$$A = \frac{1-q}{1-q^3}$$

Protocolo 6 (escrito): Aproximando q de 1

Se q=0,99:

A = 1-0,99/(1-0,99^3)

A = 0,01/1-0,970299

A = 0,01/0,029701

A = 0,336689

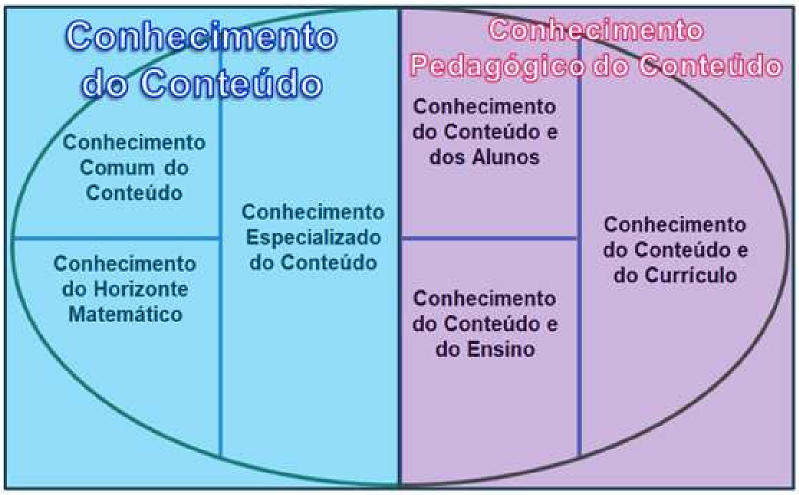
Quanto mais próximo de 1 for a razão, mais aproximado será o valor da área abaixo da parábola

Como vocês avaliam o avanço dos alunos, dos conteúdos do Fundamental e Médio até a expressão que aproxima a área sob a parábola? De que forma isso se relaciona com os conceitos estudados em Cálculo?

O CONHECIMENTO MATEMÁTICO PARA O ENSINO (MKT)

As três tarefas TAP 1, TAP 2 e TAP 3 tiveram como finalidade criar oportunidades de aprendizagem profissional para acadêmicos de um curso de Licenciatura em Matemática, voltadas à mobilização do Conhecimento Matemático para o Ensino, conforme proposto por Ball, Thames e Phelps (2008). Esses autores organizam esse conhecimento em dois grandes domínios: o Conhecimento do Conteúdo e o Conhecimento Pedagógico do Conteúdo. Cada um desses domínios é subdividido, totalizando seis subdomínios, conforme ilustrado na Figura 3. Essa estrutura permite analisar com mais precisão os conhecimentos profissionais mobilizados por futuros professores ao se envolverem com situações que articulam conteúdos matemáticos do Cálculo e práticas de sala de aula.

Figura 3 - Domínios do MKT



Fonte: Ball, Thames e Phelps (2008, p. 403)

40

O CONHECIMENTO MATEMÁTICO PARA O ENSINO (MKT)

Conhecimento do Conteúdo		Exemplo de OAP (Ribeiro; Ponte, 2020) com integral definida
Conhecimento comum do conteúdo (CC)	Refere-se ao conhecimento de conceitos e procedimentos que não são exclusivos da docência, podendo ser utilizados por qualquer pessoa. Envolve operar corretamente com ideias básicas da disciplina. Importância: Essencial, mas precisa ser complementado por conhecimentos específicos do ensino.	Calcular $d = v \cdot t$ na questão 1 (TM1), com $v = 12$ m/s e $t = 10$ s, obtendo $d = 120$ m. Trata-se de um cálculo direto e objetivo, que pode ser realizado por qualquer pessoa com domínio básico de matemática.
Conhecimento especializado de conteúdo (CEC)	Refere-se ao conhecimento matemático necessário exclusivamente ao professor para o ensino. Envolve identificar diferentes formas de representação e resolução de um mesmo problema, analisar estratégias matematicamente válidas (ou não) e compreender as estruturas conceituais que sustentam essas estratégias. Importância: Fundamental para lidar com as demandas específicas do ensino e promover uma compreensão flexível e aprofundada dos conteúdos.	Calcular a distância em contextos de velocidade variável. Reconhecer que a distância pode ser obtida por meio da decomposição do gráfico em figuras geométricas simples, como retângulos e triângulos, o que se aproxima da ideia de soma de Riemann. Além disso, compreender que é possível modelar funções e aplicar técnicas de integração para o mesmo fim, mesmo que esse não seja o foco do trabalho com alunos da Educação Básica.
Conhecimento do horizonte matemático (CHM)	Consiste na capacidade de perceber conexões amplas dentro da matemática, entendendo como ideias específicas se relacionam com conceitos anteriores ou futuros no desenvolvimento do conteúdo ao longo do tempo. Implica uma visão longitudinal e integrada do currículo. Importância: Ajuda o professor a planejar o ensino com visão de continuidade e progressão, conectando diferentes etapas da aprendizagem.	Entender que o cálculo de distância por meio da integral definida, presente no Ensino Médio (como a fórmula $S = S_0 + v_0t + (at^2)/2$), está relacionado a experiências anteriores dos alunos com gráficos de velocidade × tempo e estudo de áreas de figuras planas no Ensino Fundamental. Reconhecer que, ao longo da escolaridade, os alunos passam de estratégias como contar quadradinhos e decompor áreas com figuras simples, para procedimentos mais formais, como soma de Riemann e uso da notação integral (somatório, por exemplo). Essa visão longitudinal permite planejar o ensino de forma a construir significados progressivamente.

O CONHECIMENTO MATEMÁTICO PARA O ENSINO (MKT)

Conhecimento Pedagógico do Conteúdo		Exemplo de OAP (Ribeiro; Ponte, 2020) com integral definida
Conhecimento do conteúdo e dos alunos (CCA)	Refere-se ao conhecimento que o professor possui sobre como os alunos geralmente compreendem determinados conteúdos, incluindo concepções comuns, erros frequentes e formas de raciocínio típicas de diferentes faixas etárias. Importância: Essencial para planejar estratégias de ensino eficazes, antecipar obstáculos à aprendizagem e promover avanços significativos no entendimento dos alunos.	Antecipar que alguns alunos podem utilizar a média aritmética das velocidades para estimar a distância ou considerar, de forma equivocada, que ela pode ser obtida diretamente por um segmento de reta no gráfico, ignorando que a informação relevante é o valor numérico da área sob a curva. Em tarefas como a TM1, é comum que os alunos desconsiderem a unidade de medida composta, como m/s × s = m. Reconhecer essas estratégias e erros como manifestações iniciais de compreensão da relação entre grandezas variáveis e da interpretação de gráficos.
Conhecimento do conteúdo e do ensino (CCE)	Diz respeito à capacidade de representar o conteúdo de forma didática, utilizando exemplos, analogias e estratégias de ensino adequadas às características da turma e ao conteúdo trabalhado. Importância: Facilita a comunicação clara dos conceitos e favorece o envolvimento dos alunos com o conteúdo.	Apresentar a integral definida por meio de situações contextualizadas, como o movimento com velocidade variável, utilizando estratégias visuais e geométricas antes da sistematização. Favorecer a compreensão por meio de representações múltiplas, como gráficos, tabelas, decomposição de figuras e linguagem verbal, possibilitando ao aluno comparar procedimentos, identificar relações entre grandezas e construir interpretações com base nas diferentes formas de representação.
Conhecimento do Conteúdo e do Currículo (CCC)	Abrange o entendimento das expectativas curriculares, a progressão dos conteúdos ao longo dos anos escolares, o alinhamento com outras disciplinas e o uso adequado de materiais didáticos e programáticos. Importância: Sustenta o planejamento de aulas coerentes com o currículo, facilita a articulação entre etapas e áreas do conhecimento, e contribui para um ensino contínuo e integrado.	Conhecer o lugar da integral definida no currículo do Ensino Médio, conforme previsto na BNCC, reconhecendo sua relação com conteúdos como funções, variações e gráficos. Planejar intervenções que respeitem os conhecimentos prévios dos alunos e estabeleçam conexões com habilidades desenvolvidas no Ensino Fundamental, como leitura de gráficos, cálculo de áreas com figuras planas e estudo de sequências numéricas e padrões.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este Produto Educacional é voltado à formação inicial de professores de Matemática, com o objetivo de aproximar conceitos do Cálculo (como limite, derivada e integral definida) dos conteúdos e práticas presentes na Educação Básica. A partir de situações contextualizadas e inspiradas em cenários de sala de aula, o material permite que licenciandos explorem formas de tratar esses temas com maior clareza e alinhamento aos objetivos da Educação Básica.

As TAP, organizadas conforme o modelo PLOT (Ribeiro; Ponte, 2020) e sustentadas pelo referencial do Conhecimento Matemático para o Ensino (Ball; Thames; Phelps, 2008), envolvem os futuros professores em análises de propostas didáticas, estratégias de estudantes e possibilidades de mediação docente. Esse processo favorece uma aproximação entre a matemática estudada na universidade e aquela ensinada nas escolas.

Este material convida professores em formação, formadores e também docentes que já atuam na Educação Básica a repensar o papel do Cálculo no Ensino Fundamental e no Ensino Médio. As TAP apresentadas têm o potencial de mobilizar o MKT, especialmente por promover uma leitura mais atenta do currículo da Educação Básica. Ao se envolverem com registros de práticas, os futuros professores passam a reconhecer que ideias relacionadas ao Cálculo não estão ausentes dessa etapa de ensino, mesmo que nem sempre sejam nomeadas de forma explícita.

Em muitos casos, como na abordagem da área do círculo, está implícito o conceito de integral definida, sustentado pela ideia da soma de Riemann. Reconhecer essas conexões permite ampliar o olhar sobre o que já está presente no currículo e explorar caminhos didáticos que valorizem essas ideias, sem recorrer a formalismos excessivos. Ao tratar esses conteúdos com representações ajustadas ao nível de compreensão dos estudantes. Logo, haverá uma formação mais conectada com a matemática que se aprende e a qual se ensina nas escolas.

REFERÊNCIAS

ÁVILA, G. O ensino do cálculo e da análise. **Revista Matemática Universitária**, n. 33, p. 83-95, 2002.

BALL, D. L.; COHEN, D. K. Developing practice, developing practitioners: toward a practice-based theory of professional education. In: SYKES, G.; DARLING-HAMMOND, L. (Eds.). **Teaching as the learning profession:** handbook of policy and practice. San Francisco: Jossey-Bass, 1999. p. 3-32.

BALL, D. L.; BEN-PERETZ, M.; COHEN, R. B. Records of practice and the development of collective professional knowledge. **British Journal of Educational Studies**, v. 62, n. 3, p. 317-335, 2014.

BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content knowledge for teaching: what makes it special? **Journal of Teacher Education**, v. 59, n. 5, p. 389-407, 2008.

BONGARTI, M.; LOZADA-CRUZ, G. Alguns teoremas do tipo valor médio: de Lagrange a Malesevic. R**evista Matemática Universitária**, v. 1, e20215, 2021. Disponível em: https://doi.org/10.21711/26755254/rmu20215.

BORN, B. Transformar a formação de professores pela prática: um desafio possível. In: INSTITUTO PENÍNSULA; PROFISSÃO DOCENTE (Orgs.). **O papel da prática na formação inicial** docente. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2019.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Ministério da Educação, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/.

BROETTO, G. C.; SANTOS-WAGNER, V. M. P. O ensino de números irracionais na educação básica e na licenciatura em matemática: um círculo vicioso está em curso? **Bolema - Boletim de Educação Matemática,** v. 33, n. 64, p. 728-747, 2019. Disponível em: https://www.scielo.br/j/bolema/a/MtpgMFQwZXKxQVWffL9hDCG/.

CHAQUIAM, M. **Ensaios temáticos**: história e matemática em sala de aula. Belém (PA): SBEM, 2017.

REFERÊNCIAS

COCHRAN-SMITH, M.; LYTLE, S. L. Relationships of knowledge and practice: teacher learning in communities. **Review of Research in Education**, v. 24, p. 249-305, 1999.

CRECCI, V.; FIORENTINI, D. Desenvolvimento profissional docente: um termo guarda-chuva ou um novo sentido à formação? **Formação Docente**, v. 5, n. 8, p. 11-23, 2013.

CREP. Currículo da Rede Estadual Paranaense. Paraná: Secretaria de Estado da Educação e do Esporte, 2021.

DAVID, M. M.; MOREIRA, P. C.; TOMAZ, V. S. Matemática escolar, matemática acadêmica e matemática do cotidiano: uma teia de relações sob investigação. **Acta Scientiae**, v. 15, n. 1, p. 42-60, 2013.

DÖRR, R. C. **Análises de aprendizagens em cálculo diferencial e integral**: um estudo de caso de desenvolvimento de conceitos e procedimentos algébricos em uma universidade pública brasileira. 2017. Tese (Doutorado) – Universidade de Brasília, Brasília, 2017.

GARCIA, C. M. **Formação de professores**: para uma mudança educativa. Porto (POR): Porto Editora, 1999.

GARCIA, C. M. Desenvolvimento profissional docente: passado e futuro. Sísifo. R**evista de Ciências da Educação**, n. 8, p. 7-22, 2009.

GATTI, B. A. Formação de professores, complexidade e trabalho docente. **Revista Diálogo Educaciona**l, v. 17, n. 53, p. 721-737, 2017.

GERETI, L. C. V. **Delineando uma pesquisa:** legitimidades para a disciplina de cálculo na formação do professor de matemática. 2018. Tese (Doutorado) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2018.

GIRALDO, V. Formação de professores de matemática: Para uma abordagem problematizada. **Ciência e Cultura,** v. 70, n. 1, p. 37-42, 2018.

JAWORSKI, B. Theory and practice in mathematics teaching development: critical inquiry as a mode of learning in teaching. **Journal of Mathematics Teacher Education**, v. 9, n. 1, p. 187-211, 2006.

REFERÊNCIAS

JAWORSKI, B.; HUANG, R. Teachers and didacticians: key stakeholders in the processes of developing mathematics teaching. **ZDM Mathematics Education**, v. 46, n. 2, p. 173-188, 2014.

KLEIN, F. **Matemática elementar de um ponto de vista superior.** Lisboa: Sociedade Portuguesa de Matemática, 2009. (v. 1, pt. 1: Aritmética).

MIRANDA, G. A. **Silvanus Philips Thompson e a desmistificação do cálculo**: resgatando uma história esquecida. 2004. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2004.

MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. **A formação matemática do professor:** licenciatura e prática docente escolar. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. Academic mathematics and mathematical knowledge needed in school teaching practice: some conflicting elements. J**ournal of Mathematics Teacher Education**, v. 11, p. 23-40, 2008.

MOREIRA, P. C.; FERREIRA, M. C. C. O que é número real? Os números reais na formação do professor da educação básica. In: CURY, H. N.; VIANNA, C. R. (Orgs.). **Formação do professor de matemática:** reflexões e propostas. São Paulo: IPR, 2012. p. 49-54.

MUMCU, H. Y. Matematiksel ilişkilendirme becerisinin kuramsal boyutta incelenmesi: Türkev kavrami örneği. **Turkish Journal of Computer and Mathematics Education**, v. 9, n. 3, p. 1-20, 2018.

NACARATO, A. M.; PAIVA, M. A. V. (Orgs.). **A formação do professor que ensina matemática**: perspectivas de pesquisa. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

NÓVOA, A. **Professores**: imagens do futuro presente. São Paulo: Educa, 2009.

NÓVOA, A. Firmar a posição como professor, afirmar a profissão docente. **Cadernos de Pesquisa**, v. 47, n. 166, p. 1106-1133, 2017.

REFERÊNCIAS

OLIVEIRA, H.; MENEZES, L.; CANAVARRO, A. P. Conceptualizando o ensino exploratório da matemática: contributos da prática de uma professora do 3.º ciclo para a elaboração de um quadro de referência. **Quadrante**, v. 22, n. 2, p. 1-24, 2013.

PAPI, S. O. G. Professoras iniciantes: formação, experiência e desenvolvimento profissional. **Pro-Posições**, v. 25, n. 1, p. 199-218, 2014.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. **Currículo para o Ensino Médio do Paraná**: Área de Matemática e suas Tecnologias. Curitiba: SEED, Departamento de Desenvolvimento Curricular – DDC, 2021.

PONTE, J. P. Da formação ao desenvolvimento profissional. In: PROFMAT, **Actas** [...],1998. Lisboa: Associação dos Professores de Matemática, 1998. p. 27-44.

PONTE, J. P. Gestão curricular em matemática. In: GTI (Org.). **O professor e o desenvolvimento curricular**. Lisboa: APM, 2005. p. 11-34.

PONTE, J. P. Estudiando el conocimiento y el desarrollo profesional del profesorado de matemáticas. In: PLANAS, N. (Ed.). **Educação matemática**: teoría, crítica y práctica. Barcelona: Graó, 2012. p. 83-98.

PONTE, J. P.; OLIVEIRA, H. Remar contra a maré: a construção do conhecimento e da identidade profissional na formação inicial. **Revista de Educação**, v. 11, n. 2, p. 145-163, 2002.

RIBEIRO, A. J.; PONTE, J. P. M. Um modelo teórico para organizar e compreender as oportunidades de aprendizagem de professores para ensinar matemática. **Zetetiké**, v. 28, p. 1-20, 2020.

RICHIT, A.; PONTE, J. P.; QUARESMA, M. Aprendizagens profissionais de professores evidenciadas em pesquisas sobre estudos de aula. **Bolema**, v. 35, n. 70, p. 1107-1137, 2021.

SANTANA, E. R. S.; SERRAZINA, L.; NUNES, T. Contribuições de um processo formativo para o desenvolvimento profissional dos professores envolvidos. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, v. 22, n. 1, p. 11-38, 2019.

REFERÊNCIAS

SERRAZINA, L.; MONTEIRO, C. **Professores e novas competências em matemática no 1º ciclo**: projeto competências de cálculo e sentido do número no primeiro ciclo. 2004.

SMITH, M. S. **Practice-based professional development for teachers of mathematics**. Reston (VA): National Council of Teachers of Mathematics, 2001.

SOARES, F. S.; DASSIE, B. B.; ROCHA, M. M. Ensino de matemática no século XX: da reforma Francisco Campos à matemática moderna. **Revista Horizontes**, v. 22, n. 1, p. 7-15, 2004.

SOUZA, J. F. **Cálculo diferencial: uma proposta de abordagem no ensino médio**. 2019. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Sergipe, 2019.

STEIN, M. K.; SMITH, M. S. Selecting and creating mathematical tasks: from research to practice. **Mathematics Teaching in the Middle School**, v. 3, p. 268-275, 1998.

STEIN, M. K.; et al. **Implementing standards-based mathematics instruction**: a casebook for professional development. New York: Teachers College Press, 2009.