UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ - UTFPR
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
PROFMAT

MARCIA ENI VOELZ

UTILIZAÇÃO DOS MÉTODOS VIETA JUMPING E DESCIDA INFINITA NA SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIOFANTINAS E PROBLEMAS ENVOLVENDO DIVISIBILIDADE

CURITIBA

2018

MARCIA ENI VOELZ

UTILIZAÇÃO DOS MÉTODOS VIETA JUMPING E DESCIDA INFINITA NA SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIOFANTINAS E PROBLEMAS ENVOLVENDO DIVISIBILIDADE

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Tecnológica Federal do Paraná em Curitiba - PROFMAT-UTCT como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre.
Orientador: Prof. Dr. Ronie Peterson Dario

CURITIBA

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

V874u Voelz, Marcia Eni
2018 Utilização dos métodos Vieta jumping e descida infinita na solução de equações diofantinas e problemas envolvendo divisibilidade / Marcia Eni Voelz.-- 2018.
41 f.: il.; 30 cm.

Disponível também via World Wide Web.
Texto em português com resumo em inglês.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Curitiba, 2018.
Bibliografia: f. 40-41.

1. Olimpíada Internacional de Matemática - Problemas, questões, exercícios. 2. Equações diofantinas. 3. Divisão. 4. Fermat, Último teorema de. 5. Aprendizagem. 6. Prática de ensino. 7. Matemática - Competições. 8. Matemática – Dissertações. I. Dario, Ronie Peterson, orient. II. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

CDD: Ed. 23 – 510

Biblioteca Central do Câmpus Curitiba – UTFPR
Bibliotecária: Luiza Aquemi Matsumoto CRB-9/794

TERMO DE APROVAÇÃO DE DISSERTAÇÃO Nº 53

A Dissertação de Mestrado intitulada "Utilização dos métodos Vieta-Jumping e descida infinita na solução de equações diofantinas", defendida em sessão pública pela candidata Marcia Eni Voelz, no dia 31 de agosto de 2018, foi julgada para a obtenção do título de Mestre, área de concentração Matemática, e aprovada em sua forma final, pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional.

BANCA EXAMINADORA:

Prof(a). Dr(a). Márcio Rostirolla Adames - Presidente – UTFPR

Prof(a). Dr(a). Andre Fabiano Steklain Lisboa – UTFPR

Prof(a). Dr(a). Moiseis Cecconello - UFMT

A via original deste documento encontra-se arquivada na Secretaria do Programa, contendo a assinatura da Coordenação após a entrega da versão corrigida do trabalho.

Curitiba, 31 de agosto de 2018.

Carimbo e Assinatura do(a) Coordenador(a) do Programa

AGRADECIMENTOS

A Deus, alicerce da minha caminhada.

Ao meu esposo Mauro, que soube ser paciente e companheiro, mostrando que quanto mais dificuldades a vida impõe, mais forças Deus nos dá para transpô-las.

Ao Prof. Ronie Peterson Dario pelo incentivo, pela paciência e orientação.

Aos membros da banca examinadora, pelas contribuições que ajudaram a melhorar a qualidade e a redação final do texto.

Aos colegas de curso, em especial, à Paula, Regina, Sílvia e Sônia, pela amizade e companheirismo.

À CAPES, pela recomendação do PROFMAT por meio do parecer do Conselho Técnico Científico da Educação Superior e pelo incentivo financeiro.

À Sociedade Brasileira de Matemática que na busca da melhoria do ensino de Matemática na Educação Básica viabilizou a implementação do PROFMAT.

"De tudo, ficaram três coisas:
A certeza de que estávamos começando,
a certeza de que é preciso continuar...
A certeza de que podemos ser interrompidos antes de terminar.
Fazer da queda um passo de dança; do medo uma escada;
do sonho uma ponte; da procura, um encontro.
Fica a promessa do reencontro...
Fica o desejo de boa sorte...
Fica a vontade de que lutem e vençam sempre."
(Fernando Sabino)

# RESUMO

VOELZ, Marcia Eni. UTILIZAÇÃO DOS MÉTODOS VIETA JUMPING E DESCIDA INFINITA NA SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIOFANTINAS E PROBLEMAS ENVOLVENDO DIVISIBILIDADE 41 f. Dissertação - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2018.

O trabalho explora a matemática envolvida nos métodos da Descida Infinita de Fermat e Vieta Jumping para problemas de equações diofantinas e de divisibilidade. O objetivo principal é estruturar os conceitos e resultados dos métodos, propondo a utilização adequada dos mesmos na abordagem de problemas clássicos e em especial, na abordagem de problemas das Olimpíadas Internacionais de Matemática. O intuito é facilitar a utilização por estudantes e professores de programas como OBMEP e PROFMAT, especialmente aqueles envolvidos com Olimpíadas de Matemática.

Palavras-chave: equações diofantinas, divisibilidade, Vieta Jumping, Descida Infinita de Fermat.

ABSTRACT

VOELZ, Marcia Eni. THE INFINITE DESCENT AND VIETA JUMPING METHODS OS SOLVING DIOPHANTINE EQUATIONS AND PROBLEMS INVOLVING DIVISIBILITY 41 pg. Dissertation - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2018

The dissertation explores the mathematical concepts and results of the Infinite Descent and Vieta Jumping methods for solving Diophantine equations and problems concerning divisibility. The main objective is to structure the results, proposing their proper use in the approach to classical problems and in the approach to problems of the International Mathematical Olympiads. The aim is to facilitate the use by students and teachers of programs such as OBMEP and PROFMAT, specially those involved in Mathematics Olympiads.

Keywords: Diophantine equations, divisibility, Vieta Jumping, Fermat Infinite descent.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Diofanto de Alexandria, matemático grego do século II a.C., se dedicou ao estudo de equações da forma

$$f(X_1, X_2, ..., X_n) = 0 \tag{1}$$

onde f é uma função polinomial nas variáveis $X_1, \ldots, X_n$ e cujos coeficientes e soluções são números inteiros. Estas equações são hoje conhecidas como **equações diofantinas**.

O assunto sempre interessou David Hilbert. Em sua famosa palestra no Segundo Congresso Internacional de Matemáticos na cidade de Paris em 1900, Hilbert distribuiu uma lista aos participantes contendo 23 problemas. No problema 10 ele lançou um desafio a respeito da Equação 1:

Estabelecer um procedimento que decida, através de um número finito de operações, se a equação tem solução no conjunto dos números inteiros.

Somente após 70 anos, Martin Davis, Yuri Matiyasevich, Hilary Putnam e Julia Robinson provaram que não existe tal algoritmo (MATIYASEVICH, 1999). O argumento baseia-se no fato de que há mais exemplos de equações diofantinas do que algoritmos para resolvê-las. Uma boa exposição sobre a inexistência da solução pode ser vista em (FERREIRA, 2010).

A resolução do problema no contexto geral não desmotiva a questão de estabelecer procedimentos ou técnicas para determinar a não resolubilidade de tipos particulares de equações diofantinas.

Nesse sentido, Pierre de Fermat desenvolveu uma técnica conhecida desde a época de Euclides (em outros contextos) e aplicou-a à certas equações diofantinas. Posteriormente, a técnica ficou conhecida como Descida Infinita de Fermat. Trata-se de um tipo particular de demonstração por contradição que utiliza o Princípio da Boa Ordem do Conjunto dos Números Naturais. Uma variação do método de Fermat ficou conhecido como Vieta Jumping, por fazer uso das Fórmulas de Viète.

O Método Vieta Jumping ficou bastante conhecido a partir da 29ª Olimpíada Internacional de Matemática (IMO) realizada na Austrália em 1988. A questão número 6 da prova era:

Problema 0.1 (Problema 6 da IMO 1988)**.** *Sejam a, b inteiros positivos tais que $ab + 1$ divide $a^2 + b^2$. Mostre que*

$$\frac{a^2 + b^2}{ab + 1}$$

é um quadrado perfeito.

O problema foi considerado um dos mais difíceis (ou o mais difícil) das olimpíadas de matemática, ao menos em aritmética. Segundo (ENGEL, 1997):

> *Nenhum dos seis membros do comitê australiano responsável pelos problemas da prova conseguiu resolvê-lo. Dois dos membros eram George e Esther Szekeres (marido e mulher) ambos famosos por resolverem e criarem problemas matemáticos. Como era um problema de Teoria dos Números, ele foi proposto aos quatro mais renomados matemáticos australianos que trabalhavam com Teoria dos Números e lhes foi proposto resolver o problema em seis horas. Nenhum deles conseguiu resolver neste tempo. O comitê então submeteu o problema ao juri da 29ª IMO marcando-o com um duplo asterisco, que significava que era um problema extremamente difícil, possivelmente muito difícil para incluir na prova. Após longa discussão, o juri finalmente teve a coragem de escolher o problema, que tornou-se o último da lista de problemas da competição. Onze estudantes apresentaram soluções perfeitas.*

Há alguma abordagem dos dois métodos no livro Tópicos da Teoria dos Números do programa Mestrado Profissional de Matemática PROFMAT (MOREIRA C.G., 2012) e no material da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas OBMEP (MOREIRA, 2012). Desta forma, o assunto desperta o interesse dos estudantes e professores destes programas.

Nosso trabalho explora a matemática envolvida nos métodos da Descida Infinita e Vieta Jumping. O objetivo principal é estruturar os conceitos e resultados, propondo a utilização dos mesmos da forma que consideramos mais adequada, classificando os argumentos no intuito de facilitar a utilização por estudantes e professores, especialmente aqueles envolvidos com olimpíadas de matemática. Vamos nos restringir aos problemas envolvendo equações diofantinas e divisibilidade.

Outro objetivo é levantar outros problemas de olimpíadas cuja resolução faça uso dos métodos, explorando a forma de resolução. Em particular, divulgar a história da prova da IMO 1998, levantando as resoluções conhecidas da Questão 6. Isto foi também motivado pela questão natural de saber se existe alguma solução da Questão 6 sem a utilização dos métodos aqui abordados.

Desde que a abordagem da equação diofantina geral (Equação 1) pode ser bastante complicada, explicitar soluções ou mostrar que as mesmas não existem é viável no caso em que o grau da equação é baixo (no máximo 4) e o número de variáveis é pequeno (no máximo 3). Todos os exemplos no trabalho terão estas limitações.

A solução de equações diofantinas de duas variáveis ainda tem sido objeto de extensa pesquisa. Alguns artigos como (HALTER-KOCH, 2011), (OZKOÇ A., 2009), (ADREESCU T., 2015) e (KESKIN R., 2013) demonstram a complexidade dessas resoluções.

Na sequência expomos algumas equações diofantinas usuais que eventualmente serão citadas no decorrer do trabalho.

A **Equação Diofantina Linear Geral** tem a forma

$$a_0X_0 + a_1X_1 + ... + a_nX_n = b$$

com $a_0, a_1, ..., a_n, b \in \mathbb{Z}$. A condição necessária e suficiente para que a equação admita soluções é que cada inteiro que divide todos os coeficientes $a_0, a_1, ..., a_n$ também divida b. Se há uma solução, então há infinitas soluções.

Um caso particular importante encontrado em (HEFEZ, 2013) é apresentado no teorema a seguir :

Teorema 0.2. *A equação*

$$aX + bY = c$$

com $a, b, c \in \mathbb{Z}$ admite solução se, e somente se, mdc(a, b) divide c.

Uma solução particular (x_0, y_0) pode ser determinada intuitivamente, ou usando o algoritmo da divisão de Euclides, ou ainda, por congruências. A partir de uma solução particular podemos determinar a solução geral da equação (HEFEZ, 2013):

Proposição 0.3. *Seja (x_0, y_0) uma solução de $aX + bY = c$, onde mdc$(a, b) = 1$. Todas as soluções (x, y) da equação, com $x, y \in \mathbb{Z}$ podem ser escritas na forma*

$$\begin{cases} x = x_0 + tb \\ y = y_0 - ta \end{cases}$$

onde $t \in \mathbb{Z}$.

As soluções da equação quadrática

$$X^2 + Y^2 = Z^2 \tag{2}$$

são conhecidas como **triplas pitagóricas**, pois estão relacionadas aos comprimentos laterais de triângulos retos. Se esses lados forem números naturais coprimos, o triângulo será denominado **triângulo pitagórico primitivo** e a tripla que representa esses lados será chamada de **tripla pitagórica primitiva**, pois dá origem a outras triplas pitagóricas. A mais famosa tripla pitagórica primitiva é $X = 3$, $Y = 4$ e $Z = 5$, conhecida como triângulo de ouro. Para referência futura, vamos explicitar as triplas pitagóricas, conforme (HEFEZ, 2013, Teorema 5.21).

Teorema 0.4. *As soluções em $\mathbb{N}$ da equação 2 expressam-se de modo único, a menos de ordem de X e Y , como*

$$\begin{cases} X = u(n^2 - m^2) \\ Y = 2unm \\ Z = u(n^2 + m^2), \end{cases}$$

onde $u, m, n \in \mathbb{N}$, com mdc$(m, n) = 1$ e m, n de paridades distintas. Reciprocamente, toda tripla desta forma é uma tripla pitagórica.

Demonstração Seja (x, y, z) uma tripla primitiva da equação 2. Como x, y, z são coprimos, temos que $(x, y) = (x, z) = (y, z) = 1$. Logo, devemos ter dois números ímpares. Como a soma de dois quadrados ímpares não é um quadrado (HEFEZ, 2013, Problema 3.S.7), x e y tem paridades distintas, ou seja, z terá que ser ímpar. Sem perda de generalidade, podemos supor x e z ímpares e y par. Reescrevendo $x^2 + y^2 = z^2$ como $z^2 - x^2 = y^2$ obtemos $(z + x)(z - x) = y^2$, ou seja,

$$\frac{z + x}{2}\frac{z - x}{2} = \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

onde $\frac{z+x}{2}$, $\frac{z-x}{2}$ são números inteiros positivos e primos entre si. Como $\frac{z+x}{2}\frac{z-x}{2}$ é um quadrado, tanto $\frac{z+x}{2}$ como $\frac{z-x}{2}$ são quadrados (HEFEZ, 2013, Lema 5.20). Logo, existem números naturais m e n, com mdc$(m, n) = 1$ e m, n de paridades distintas, tais que

$$\frac{z + x}{2} = n^2, \frac{z - x}{2} = m^2,$$

ou seja, $x = n^2 - m^2$, $y = 2nm$, $z = n^2 + m^2$, é uma tripla pitagórica primitiva. Dado um número natural u, as demais triplas podem ser escritas como segue:

$$\begin{cases} x = u(n^2 - m^2) \\ y = 2unm \\ z = u(n^2 + m^2), \end{cases}$$

Reciprocamente, dado $x = n^2 - m^2$, $y = 2nm$ e $z = n^2 + m^2$, é imediato verificar que $x^2 + y^2 = (n^2 - m^2)^2 + (2mn)^2 = (n^2 + m^2)^2 = z^2$

□

A **Equação de Fermat**

$$X^n + Y^n = Z^n, \text{ onde } n \geq 3$$

proposta por Fermat em 1637, afirma que não há soluções inteiras para essa equação, com $n > 2$. Esta afirmação foi provada somente em 1994, pelo matemático britânico Andrew Wiles. No caso $n = 3$, o problema foi resolvido por Euler e utilizam-se as técnicas que estudamos (Veja o Teorema 1.3).

Assim, no capitulo 1 estudamos o método da Descida Infinita e no capítulo 2, o método Vieta Jumping, voltados às equações diofantinas e divisibilidade. No Capítulo 3 fizemos uma introdução histórica sobre as Olimpíadas Internacionais de Matemática, apresentamos as soluções de problemas de olimpíadas que fazem uso dos métodos.

Durante o decorrer do trabalho faremos uso de resultados básicos de aritmética que podem ser encontradas em (HEFEZ, 2013).

1 O MÉTODO DA DESCIDA INFINITA DE FERMAT

Pierre de Fermat nasceu em 17 de agosto de 1601 em Beaumont-de-Lomagne na França, e faleceu em Castres em 12 de janeiro de 1665. Durante sua vida Fermat tornou-se advogado e membro do parlamento de Toulouse.

Fermat estudava Matemática por lazer, respondendo a cartas de outros matemáticos e desafiando-os também com problemas. Não chegou a publicar nenhuma obra, apenas fazendo anotações em livros de outros matemáticos e nas próprias cartas que enviava aos matemáticos.

Contribuiu na área da geometria analítica, desenvolvendo equações gerais da reta, circunferência, e equações mais simples para parábolas, elipses e hipérboles. Esse trabalho foi descrito no manuscrito Introdução aos Lugares Geométricos Planos e Sólidos, em 1629. O método para estabelecer tangentes serviu de base para os estudos de Isaac Newton. Desenvolveu junto com Blaise Pascal as regras essenciais da Teoria da Probabilidade, ao resolver problemas que lhe eram propostos nas cartas enviadas por Pascal. Na Teoria dos Números, criou jogos com números e enviava a outros matemáticos para que os resolvessem. Iniciou o estudo de eixos perpendiculares, base das coordenadas cartesianas, cujo feito é atribuído à René Descartes.

Sua herança mais famosa é a afirmação que ficou conhecida como Último Teorema de Fermat: para um número natural $n > 2$, a equação $x^n + y^n = z^n$ não admite solução no conjunto dos números inteiros.

Alguns matemáticos brilhantes, como Euler e Gauss, se empenharam em achar uma solução para tal anotação. Mas somente após 358 anos, Andrew Wiles demonstrou a veracidade desse teorema.

Ao analisar as equações propostas por Diofanto, Fermat desenvolveu um método que serve para mostrar que algumas equações diofantinas não possuem solução.

Vimos na Introdução que a impossibilidade da solução do décimo problema de Hilbert implica que não existe um algoritmo para determinar se a equação diofantina geral possui ou não solução. No entanto, através do Método da Descida Infinita de Fermat é possível mostrar que algumas equações diofantinas não possuem soluções inteiras positivas.

O método faz uso direto do Princípio da Boa Ordenação (HEFEZ, 2013, p. 12).

Teorema 1.1 (Princípio da Boa Ordenação)**.** *Todo subconjunto não vazio dos números naturais possui um elemento mínimo.*

De maneira mais precisa:

Dado $A \subseteq \mathbb{N}$, $A \neq \emptyset$, existe $a_0 \in A$, tal que $a_0 \leq a$, para todo $a \in A$.

A rigor, o método é matematicamente simples e pode ser considerado como uma variação do método de redução ao absurdo, envolvendo números naturais. Para afirmações genéricas, podemos sintetizá-lo nos seguintes passos:

(1) Considere uma afirmação da forma $P(n)$, com $n \in A \subseteq \mathbb{N}$.

(2) Suponha que exista um subconjunto S de $\mathbb{N}$ tal que $P(n)$ seja verdadeira. Pelo Teorema 1.1 existe um número natural mínimo $s \in S$ tal que $P(s)$ é verdadeira.

(3) A partir do número s obtido no item anterior, obtenha um número natural $t < s$ tal que $P(t)$ seja verdadeira, contradizendo assim a minimalidade de s.

Vejamos como utilizar a mesma ideia no caso da equação diofantina (Equação 1). Seja $\mathbb{Z}^n = \mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}$ o conjunto das n-uplas com entradas inteiras.

Consideremos o conjunto de soluções

$$A = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{Z}^n \mid f(X_1, X_2, ..., X_n) = 0\}.$$

Conforme o item (2), assumimos a existência de uma solução inteira $s = (a_1, \ldots, a_n)$ não nula da equação, que tenha uma propriedade $P(s)$ de minimalidade conveniente na equação. Na sequência, obtemos outra solução t tal que $P(t) < P(s)$. Este argumento é contraditório, pois constrói-se uma sequência decrescente de valores a partir do valor mínimo assumido. A contradição decorre do fato de supor-se que o problema possui uma solução mínima e, por redução ao absurdo, o problema não possui solução.

Fermat utilizou este método para mostrar que não existe uma tripla pitagórica cujos catetos sejam quadrados perfeitos, conforme o teorema a seguir. A exposição abaixo está baseada em (MOREIRA C.G., 2012, Exemplo 4.40).

Teorema 1.2. *A equação $X^4 + Y^4 = Z^2$ não possui solução não trivial no conjuntos dos números inteiros.*

Demonstração Primeiramente observe que basta mostrar que a equação não possui solução composta por três números positivos. Vamos então aplicar o método exposto anteriormente. Suponha que existam inteiros positivos x, y, z tais que $x^4 + y^4 = z^2$. Pelo Teorema 1.1 existe uma solução (a, b, c) na qual c é mínimo. Note que $\mathrm{mdc}(a, b) = 1$, ou seja, a, b são primos entre si. De fato, se $d = \mathrm{mdc}(a, b) > 1$, teremos que $\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}, \frac{c}{d^2}\right)$ também é uma solução e $\frac{c}{d^2}$ é menor que c. Logo, pela minimalidade de c, temos $d = 1$. Deste fato e notando que $(a^2)^2 + (b^2)^2 = c^2$ tem-se que (a^2, b^2, c) é uma tripla pitagórica primitiva. Pelo Teorema 0.4, existem inteiros positivos m e n primos relativos tais que

$$a^2 = m^2 - n^2, b^2 = 2mn \text{ e } c = m^2 + n^2.$$

Da primeira equação (a, n, m) é uma tripla pitagórica primitiva e portanto m é ímpar (pelo Teorema 0.4). Segue de $b^2 = 2mn$ que b e n são pares. Como $b^2 = (2n)m$ é um quadrado perfeito com mdc$(2n, m) = 1$, temos que $2n$ e m são quadrados perfeitos. Logo existem inteiros positivos s e t tais que

$$2n = 4s^2 \text{ e } m = t^2.$$

Novamente pelo Teorema 0.4, como $a^2 + n^2 = m^2$, existem inteiros positivos i e j, primos entre si, tais que

$$a = i^2 - j^2, n = 2ij \text{ e } m = i^2 + j^2.$$

Portanto $s^2 = \dfrac{n}{2} = ij$, logo i e j serão quadrados perfeitos, isto é, $i = u^2$ e $j = v^2$. Juntando todas as informações, temos

$$t^2 = u^4 + v^4,$$

isto é, (u, v, t) é outra solução da equação original. Porém $t \leq t^2 = m \leq m^2 < m^2 + n^2 = c$ e $t \neq 0$ porque m é diferente de 0. Isto contradiz a minimalidade de c, o que conclui a demonstração.

□

Conforme a demonstração, a equação $X^4 + Y^4 = Z^2$ não possui soluções inteiras positivas. Então a equação $x^{4n} + y^{4n} = z^{4n}$, para todo número natural $n \geq 1$, não possui solução não trivial no conjuntos dos números inteiros.

Euler resolveu um caso particular da afirmação do Último Teorema de Fermat usando as mesmas ideias do método. A exposição abaixo segue (MARTINEZ F., 2009).

Teorema 1.3 (Euler)**.** *A equação diofantina $x^3 + y^3 = z^3$ não possui uma solução inteira (x, y, z) tal que $xyz \neq 0$.*

Para demonstrar esse teorema, é necessário antes demonstrarmos os lemas na sequência.

Lema 1.4. *Se $x, y \in \mathbb{Z}$, não ocorre $2x^3 = z^3$.*

Demonstração Seja $z = 2^n k$ tal que $2 \nmid k$ e seja $x = 2^m u$, tal que $2 \nmid u$. Então

$$2x^3 = z^3 \Rightarrow 2^{3m+1}u^3 = 2^{3n}k^3. \tag{1.1}$$

O número primo 2 aparece um número diferente de vezes nos dois lados da igualdade em (1.1). Isto contradiz o Teorema Fundamental da Aritmética (HEFEZ, 2013, Teorema 7.3), que afirma que todo número natural maior do que 1 ou é primo ou se escreve de modo único como um produto de números primos.

□

Lema 1.5. *Sejam $x, y \in \mathbb{Z}$ ímpares e primos relativos. Existem p, q inteiros positivos, primos relativos, de diferente paridade, tais que*

$$\begin{cases} x = p + q \\ y = p - q \end{cases}$$

Demonstração Considere $p, q \in \mathbb{Z}$, $p, q > 0$.Tome $p = \dfrac{x+y}{2}$ e $q = \dfrac{x-y}{2}$. Então é fácil ver que $x = p + q$ e $y = p - q$. Vejamos que $\mathrm{mdc}(p, q) = 1$. É um exercício básico em aritmética mostrar que $\mathrm{mdc}(x + y, x - y) \in \{1, 2\}$ (HEFEZ, 2013, p.99) . Assim, $\mathrm{mdc}(x + y, x - y) = \mathrm{mdc}(2p, 2q) = 2$. Portanto, $\mathrm{mdc}(p, q) = 1$. Resta mostrar que p e q tem paridades distintas. Eles não são ambos pares porque $\mathrm{mdc}(p, q) = 1$. Se forem ambos ímpares, isto é, $p = 2u + 1$ e $q = 2v + 1$, para $u, v \in \mathbb{Z}$, então $x = p + q = 2u + 1 + 2v + 1 = 2(u + v + 1)$ é par, contradição com a hipótese que x é ímpar.

□

Para demonstrar o Lema 1.6 a seguir necessitamos enunciar a Lei da Reciprocidade Quadrática, que está relacionada com a possibilidade de solucionar duas congruências quadráticas simultaneamente:

$$x^2 \equiv p \bmod q$$

$$y^2 \equiv q \bmod p$$

onde p e q são números primos ímpares.
O enunciado pode ser simplificado pela utilização do símbolo de Legendre:

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \begin{cases} 1, & \text{se } p \text{ é resíduo quadrático mod } q \text{ e } p \not\equiv 0 \bmod q \\ -1, & \text{se } p \text{ não é resíduo quadrático mod } q \\ 0, & \text{se } \quad p \equiv 0 \bmod q \end{cases}$$

Ou seja, se a congruência $x^2 \equiv p \bmod q$ possui solução e $p \not\equiv 0 \bmod q$ então $\left(\frac{p}{q}\right) = 1$. Caso $x^2 \equiv p \bmod q$ não possui solução então $\left(\frac{p}{q}\right) = -1$. E se $p \equiv 0 \bmod q$, então $\left(\frac{p}{q}\right) = 0$. Logo, o enunciado da lei consiste no seguinte:

Sejam p e q dois números primos ímpares distintos. Tem-se que

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}$$

Lema 1.6. *(MARTINEZ F., 2009, Lema 4.24) Todas as soluções de $s^3 = a^2 + 3b^2$ em inteiros positivos tais que $\mathrm{mdc}(a, b) = 1$ e s é ímpar são dadas por*

$$s = m^2 + 3n^2, \quad a = m^3 - 9mn^2, \quad b = 3m^2n - 3n^3$$

com $m + n$ *ímpar e* $mdc(m, 3n) = 1$.

Demonstração É facil verificar que os números s, a, b são soluções da equação, e além disso,

$$\text{mdc}(a, b) = \text{mdc}(m(m^2 - 9n^2), 3n(m^2 - n^2)) = \text{mdc}(m^2 - 9n^2, m^2 - n^2) =$$
$$\text{mdc}(8n^2, m^2 - n^2) = 1.$$

Suponhamos agora que (s, a, b) é solução da equação. Seja p um número primo tal que $p \mid s$. Como $\text{mdc}(a, b) = 1$ e s é ímpar, $p \nmid a, p \nmid b$ e $p > 3$. Então $a^2 \equiv -3b^2 \mod p$ e como b é invertível módulo p temos

$$\left(\frac{-3}{p}\right) = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{p}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow p \equiv 1 \mod 6$$

pela Lei de Reciprocidade Quadrática. Por (MARTINEZ F., 2009, Exemplo 4.8, p.144) existem inteiros m_1 e n_1 tais que $p = m_1^2 + 3n_1^2$. Logo $p^3 = c^2 + 3d^2$, onde $c = m_1^3 - 9m_1n_1^2$ e $d = 3m_1^2n_1 - 3n_1^3$. Segue que $\text{mdc}(p, m_1)$ =mdc$(p, n_1) = 1$ e $p > 3$, logo $\text{mdc}(p, c)$ =mdc$(p, d) = 1$. Aplicando o método de indução sobre o número de divisores primos de s temos o resultado óbvio quando $s = 1$. Se s tem um divisor primo, o resultado é igual ao anterior. Suponha que o resultado valha para todo s que tenha k fatores primos (não necessariamente distintos). Se s tem $k + 1$ fatores primos, digamos $s = pt$ com p primo $p > 3$ então,

$$t^3p^6 = s^3p^3 = (a^2 + 3b^2)(c^2 + 3d^2) = (ac \pm 3bd)^2 + 3(ad \mp bc)^2.$$

Como,

$$(ad + bc)(ad - bc) = (ad)^2 - (bc)^2 = d^2(a^2 + 3b^2) - b^2(c^2 + 3d^2) = p^3(t^3d^2 - b^2)$$

$$\Rightarrow p^3 \mid (ad + bc)(ad - bc) \Rightarrow p \mid ad \quad \text{e} \quad p \mid bc \Rightarrow p \mid a \quad \text{e} \quad p \mid b$$

o que contradiz a hipótese de $\text{mdc}(ab) = 1$. Assim, p^3 divide exatamente um dos fatores, portanto,

$$u = \frac{ac \pm 3bd}{p^3}, \quad v = \frac{ad \mp bc}{p^3}$$

são inteiros tais que $t^3 = u^2 + 3v^2$. Como t tem k fatores primos segue por hipótese de indução que

$$t = m_2^2 + 3n_2^2, \quad u = m_2^3 - 9m_2n_2^2, \quad v = 3m_2^2n_2 - 3n_2^3.$$

Dado que $a = uc + 3vd$ e $b = \pm(ud - vc)$, substituindo t, u, v, c, d em termos de m_i e n_i $(i = 1, 2)$ em s, a, b e fazendo $m = m_1m_2 + 3n_1n_2$, $n = m_1n_2 - m_2n_1$, concluindo assim a demonstração.

$\square$

Finalmente podemos demonstrar o Teorema 1.3.

Demonstração (do Teorema 1.3) Suponha que a equação $x^3 + y^3 = z^3$ possua uma solução (x, y, z) com $x, y, z > 0$, de modo que xyz seja mínimo. Considere ainda que qualquer fator comum de dois destes números é também fator do terceiro, ou seja, x, y, z são coprimos dois a dois. Pelo Lema 1.4, não é possível termos uma solução com $x = y$. Sem perda de generalidade, vamos assumir $x > y$. Supondo que x e y são ímpares e z é par, então pelo Lema 1.5, temos

$$z^3 = x^3+y^3 = (x+y)(x^2-xy+y^2) = 2p((p+q)^2-(p+q)(p-q)+(p-q)^2) = 2p(p^2+3q^2).$$

Do mesmo modo, quando z é ímpar, podemos supor sem perda de generalidade que x é par e y é ímpar. Substituindo $z = q + p$ e $y = q - p$, temos

$$x^3 = z^3-y^3 = (z-y)(z^2+zy+y^2) = 2p((q+p)^2+(q+p)(q-p)+(q-p)^2) = 2p(p^2+3q^2).$$

Pelo Lema 1.5, como $p^2 + 3q^2$ é ímpar e $2p(p^2 + 3q^2)$ é cubo perfeito temos que p será par. Assim,

$$\text{mdc}(p, p^2 + 3q^2) = \text{mdc}(p, 3q^2) = \text{mdc}(p, 3).$$

Logo $\text{mdc}(p, 3) = 1$ ou $\text{mdc}(p, 3) = 3$. No primeiro caso, existem naturais a e b tais que $a^3 = 2p$ e $b^3 = p^2 + 3q^2$. Nesse caso, pelo Lema 1.6, existem $m, n \in \mathbb{Z}$ de diferente paridade e primos relativos, tais que

$$b = m^2 + 3n^2, \quad p = m^3 - 9mn^2, \quad q = 3m^2n - 3n^3.$$

Logo, $a^3 = 2m(m-3n)(m+3n)$, onde $2m, m-3n, m+3n$ são primos relativos. Assim, existem inteiros e, f, g tais que $2m = e^3$, $m - 3n = f^3$ e $m + 3n = g^3$. Teremos então $f^3 + g^3 = e^3$. Como

$$efg = a^3 = 2p \leq x + y < xyz$$

teremos uma solução menor, o que contradiz a escolha de x, y, z. No segundo caso, $p = 3r$ com $\text{mdc}(p, r) = 1$. Logo $z^3 = 18r(3r^2 + q^2)$ ou $x^3 = 18r(3r^2 + q^2)$ e portanto existem inteiros positivos a e b tais que $18r = a^3$ e $3r^2 + q^2 = b^3$. Novamente pelo Lema 1.6, existem m e n tais que

$$b = m^2 + 3n^2, \quad q = m^3 - 9mn^2, \quad r = 3m^2n - 3n^3.$$

Segue que $a^3 = 27(2n)(m - n)(m + n)$ onde $2n, m - n, m + n$ são primos relativos, portanto existem inteiros positivos e, f, g tais que

$$2n = e^3, \quad m - n = f^3 \quad \text{e} \quad m + n = g^3.$$

Teremos então $e^3 + f^3 = g^3$, que contradiz a minimalidade da solução (x, y, z).

□

Exemplo 1.7. *Sejam a e b inteiros positivos tais que $b < 2a+1$. Então a equação $bx^2 - 2axy - y^2 = 0$ não possui soluções inteiras positivas.*

Solução Considere (m, n) uma solução inteira positiva da equação, com n mínimo. Logo,

$$bm^2 - 2amn - n^2 = 0 \Rightarrow n^2 + 2amn = bm^2 \Rightarrow n^2 + 2amn + a^2m^2 = bm^2 + a^2m^2$$

Como $b < 2a + 1$ temos,

$$\Rightarrow (n + am)^2 = (b + a^2)m^2 < (a^2 + 2a + 1)m^2 = (a + 1)^2m^2 = (am + m)^2$$

Assim, $n + am < am + m \Rightarrow n < m$. Como $bm^2 - 2amn = n^2 \Rightarrow m(bm - 2an) = n^2$ temos que $m|n^2$, logo $n^2 = mq$, onde $0 < q < n < m$, e $bm^2 - 2amn = n^2 \Rightarrow bm = q + 2an$. Multiplicando a equação original por b obtemos

$$0 = bn^2 + 2anbm - (bm)^2 = bn^2 + 2an(q + 2an) - (q + 2an)^2 = bn^2 - 2anq - q^2.$$

Logo (n, q) é solução da equação , o que contradiz a minimalidade da solução anterior.

No Capítulo 3 iremos abordar exemplos que apareceram nas olímpiadas de matemática cuja solução pode também ser obtida pelo Método da Descida Infinita de Fermat.

2 MÉTODO VIETA JUMPING

Vieta Jumping é uma variação do Método da Descida Infinita de Fermat, baseando-se também na técnica de obter uma contradição a partir de certa hipótese sobre a solução do problema proposto. De acordo com (GE, 2007), geralmente é usado para resolver problemas que envolvem a divisibilidade de dois números inteiros positivos, ou uma equação diofantina (ou sistema de equações, congruências ou desigualdades), cujas soluções têm alguma estrutura recursiva.

Inicialmente faremos uma breve exposição do Teorema Fundamental da Álgebra e das Fórmulas de Viète, que são indispensáveis no estudo do método e suas aplicações.

2.1 O TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA

O Teorema Fundamental da Álgebra foi demonstrado em 1799 pelo matemático alemão Karl Friedrich Gauss. Uma demonstração completa pode ser encontrada em (HEFEZ A., 2012).

Teorema 2.1 (Teorema Fundamental da Álgebra)**.** *Toda equação polinomial*

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0,$$

com coeficientes $a_i \in \mathbb{C}$, $i = 0, 1, 2, ..., n$, admite pelo menos uma raiz complexa.

Como corolário, obtêm-se que qualquer polinômio com coeficientes complexos pode ser decomposto em fatores de primeiro grau. Para isto precisamos lembrar da Divisão Euclidiana para polinômios: dados $f(x)$ e $g(x)$ polinômios, existem $q(x)$ e $r(x)$, tais que

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x),$$

tais que o grau de $r(x)$ é menor que o grau de $g(x)$.

Corolário 2.2. *O polinômio*

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0,$$

com $a_i \in \mathbb{C}$, $i = 0, \ldots, n$, $a_n \neq 0$, fatora-se na forma

$$p(x) = a_n(x - u_1)(x - u_2)...(x - u_n),$$

onde $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{C}$ são suas raízes.

Demonstração Vamos utilizar indução sobre $n =$ grau de $p(x)$. Se $n = 1$, a afirmação é imediata. Pelo Teorema 2.1 pode-se afirmar que $p(x)$ possui pelo menos uma raiz u, isto é, $p(u) = 0$. Pela divisão euclidiana, se $p(u) = 0$, então $p(x)$ é divisível por $x - u$, resultando em um quociente $q(x)$, que é um polinômio de grau $n - 1$, ou seja, $p(x) = q(x)(x - u)$.
Pela hipótese de indução, $q(x)$ decompõe-se em fatores de primeiro grau.

□

Como exemplo, considere um polinômio $p(x)$ de grau 5 com $a_n = 1$, tal que suas raízes sejam -1, 2, 3, -2 e 4. Pelo Corolário 2.2,

$$p(x) = (x+1)(x-2)(x-3)(x+2)(x-4) = x^5 - 6x^4 + x^3 + 36x^2 - 20x - 48.$$

2.2 AS FÓRMULAS DE VIÈTE

François Viète nasceu em Fontenay-le-Comte em 1540, falecendo em Paris em 13 de dezembro de 1603. Estudou Direito, tornando-se advogado, membro do Parlamento da Bretanha no reinado de Carlos IX e conselheiro dos reis Henrique III e Henrique IV. Decifrou os códigos que os espanhóis usavam em suas mensagens durante a guerra com a França. Participou também da montagem do calendário.

Viéte não era matemático, mas escreveu importantes obras na área de aritmética, álgebra, trigonometria e geometria, contribuindo para a transição do período Renascentista para o período Moderno.

Em *Artem Analyticum Isagoge*, publicado em 1591, abordou a álgebra, usando vogais para representar incógnitas e consoantes para representar constantes. Para as potências diferentes de uma quantidade, Viète usava a mesma letra devidamente qualificada, ou seja, escrevia *A, A quadratum, A cubum*, para indicar A, A^2, A^3. Desenvolveu algumas relações entre coeficientes e raízes de uma equação, considerando apenas coeficientes ou raízes positivas. Ao aplicar álgebra à trigonometria e à geometria em *Supplementum geometriae* , de 1593, contribuiu para a resolução dos três problemas clássicos da matemática grega. Segundo ele, tanto a trissecção do ângulo como a duplicação do cubo dependem da resolução de uma equação cúbica; mostrou ainda como construir a tangente em qualquer ponto da espiral de Arquimedes.

Viète descobriu essas fórmulas para o caso das raízes positivas. O caso geral foi apresentado pela primeira vez pelo matemático francês Albert Girard, no século XVII.

As fórmulas de Viète relacionam os coeficientes de um polinômio com a soma e produto de suas raízes.

Teorema 2.3. *Seja $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0$ um polinômio de grau n onde os coeficientes $a_n, a_{n-1}, ..., a_0$ são números reais ou complexos, com $a_n \neq 0$, sendo $r_1, ..., r_n$ suas raízes. A relação entre soma e produto das raízes com os coeficientes é dada por:*

$$\begin{cases} r_1 + r_2 + ... + r_n = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n} \\ (r_1r_2 + r_1r_3 + ... + r_1r_n) + (r_2r_3 + r_2r_4 + ... + r_2r_n) + ... + r_{n-1}r_n = \dfrac{a_{n-2}}{a_n} \\ r_1r_2r_3...r_n = (-1)^n \dfrac{a_0}{a_n} \end{cases}$$

Demonstração Pelo Teorema 2.1, o polinômio pode ser escrito como

$$p(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2).....(x - r_n).$$

Desenvolvendo-se, temos

$$p(x) = a_n x^n - a_n(r_1+r_2+...+r_n)x^{n-1} + a_n(r_1r_2+r_1r_3+...+r_{n-1}r_n)x^{n-2} + ... + (-1)^n a_n r_1 r_2 ... r_n.$$

Igualando os coeficientes com a primeira expressão de $p(x)$, obtemos o resultado.

$\square$

Exemplo 2.4. *Seja $ax^2 + bx + c = 0$ um polinômio de grau 2, com raízes r_1 e r_2 . Pela fatoração, obtemos*

$$ax^2 + bx + c = a(x - r_1)(x - r_2) = ax^2 - a(r_1 + r_2)x + ar_1r_2.$$

Assim,

$$b = -\frac{(r_1 + r_2)}{a} \text{ e } c = \frac{r_1r_2}{a}.$$

Exemplo 2.5. *Considere $r_1, r_2,$ e r_3 as três raízes de $P(x) = x^3 + 3x^2 + 4x - 4$. Assim*

$$x^3+3x^2+4x-4 = (x-r_1)(x-r_2)(x-r_3) = x^3-(r_1+r_2+r_3)x^2+(r_1r_2+r_1r_3+r_2r_3)x-r_1r_2r_3.$$

Igualando os coeficientes tem-se $\begin{cases} r_1 + r_2 + r_3 = -3 \\ r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 = 4 \\ r_1r_2r_3 = 4 \end{cases}$

Uma das soluções é $r_1 = 2$, $r_2 = -\dfrac{\sqrt{7}i - 1}{2}$ e $r_3 = \dfrac{\sqrt{7}i + 1}{2}$.

2.3 O MÉTODO VIETA JUMPING

Como citamos na Introdução, a utilização mais conhecida deste método foi na resolução da Questão 6 da prova da IMO 1988, num problema envolvendo divisibilidade.

De forma resumida, trata-se de um método de demonstração por contradição, baseado no Método da Descida Infinita, mas que faz uso das Fórmulas de Viète, conforme seção anterior.

Em geral, no Vieta Jumping, há três etapas básicas na aplicação do método em um dado problema:

(1) Visando obter uma contradição, assumir que existe alguma solução do problema que viola as hipóteses.

(2) Escollher uma solução s mínima sob algum aspecto de minimalidade $A(s)$.

(3) A partir de (2), mostrar que existe uma solução menor, isto é, uma solução s' tal que $A(s') < A(s)$, obtendo assim uma contradição.

Para resolução de problemas de divisibilidade, que são comuns nas olimpíadas de matemática, utilizam-se o exposto nas seções anteriores.

Vejamos então a aplicação detalhada do método no caso de um problema de divisibilidade cujo enunciado é uma afirmação

$$A(x, y)$$

que em geral envolve uma função

$$f(x, y) \tag{2.1}$$

onde $f(x, y)$ é uma função racional de segundo grau, isto é, $f(x, y) = \dfrac{p(x, y)}{q(x, y)}$, onde p e q são funções polinomiais limitadas até o quarto grau, conforme a introdução.

A premissa básica é que existe um par de números inteiros (x, y) tais que $A(x, y)$ é verdadeira, isto é, o conjunto

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid A(x, y) \text{ é V}\}$$

é não vazio. Isto em geral vem das hipóteses do problema. Então segue-se:

1. Seja $(a, b) \in S$. Fixando uma das variáveis, digamos $Y = b$, obtêm-se uma equação quadrática
$$f(X, b) = k$$
na variável X. Uma das raízes desta equação é $x_1 = a$. A outra raiz x_2 é determinada usando as Fórmulas de Viète.

2. Mostra-se que $A(x_1, x_2)$ é verdadeira e que $0 < x_2 < b$.

3. Pelo argumento da Descida Infinita ou assumindo a minimalidade da primeira solução, obter uma contradição.

Vejamos dois exemplos que ilustram o método. No próximo capítulo vamos abordar o problema 6 da IMO 1988 entre outros problemas, conforme citamos na Introdução.

Exemplo 2.6. *Se x e y são inteiros positivos tais que xy divide $x^2 + y^2 + 1$, então*

$$\frac{x^2 + y^2 + 1}{xy} = 3.$$

Solução Seja

$$k = \frac{x^2 + y^2 + 1}{xy}. \tag{2.2}$$

Entre todos os pares de inteiros positivos (x, y) que satisfazem a Equação 2.2, tomamos um par (a, b) que minimize a soma $x + y$. Afirmamos que $a = b$. Buscando uma contradição, assumimos $a > b$. Fixando $y = b$ na Equação 2.2 obtemos

$$k = \frac{x^2 + b^2 + 1}{xb},$$

donde vem a a equação quadrática na variável x

$$x^2 - kbx + b^2 + 1 = 0.$$

Por hipótese, uma raiz é $x_1 = a$. Pelas Fórmulas de Viète, a outra raiz x_2 satisfaz

$$\begin{cases} a + x_2 = -\dfrac{-kb}{1} \Rightarrow x_2 = kb - a \\ ax_2 = \dfrac{b^2+1}{1} \Rightarrow x_2 = \dfrac{b^2+1}{a} \end{cases}$$

A primeira equação mostra que x_2 é uma raiz inteira, e a segunda equação, que x_2 é positiva. Como $a > b \geq 1$, temos

$$x_2 = \frac{b^2+1}{a} < \frac{(b+1)^2}{a} \leq \frac{a^2}{a} = a,$$

contradizendo a minimalidade de $a + b$. Portanto, $a = b$ e daí a temos $ka^2 = 2a^2 + 1$, isto é, a^2 divide $2a^2 + 1$. Segue que $a = b = 1$. Portanto, $k = 3$.

□

Exemplo 2.7. *Se a e b são inteiros positivos, tais que $\dfrac{a^2+b^2}{ab-1} = k$ é um inteiro, então $k = 5$.*

Vamos dividir a solução desse exemplo em dois lemas auxiliares, antes da argumentação final.

Lema 2.8. *Suponha que um determinado par de inteiros (a, b) seja solução para a equação*

$$\frac{x^2+y^2}{xy-1} = n \tag{2.3}$$

onde n é um número inteiro positivo fixado. Então o par $\left(b, \dfrac{b^2+n}{a}\right)$ também é uma solução inteira para a Equação 2.3.

Demonstração Fixando $y = b$, considere a equação $x^2 - nbx + (b^2 + n) = 0$. Temos que a é uma das raízes. Pelas Fórmulas de Viète, a outra raiz é $\dfrac{b^2+n}{a}$. Note que

$$\frac{1}{a}(b^2+n) = \frac{1}{a}\left(b^2 + \frac{a^2+b^2}{ab-1}\right) = \frac{a^2+ab^3}{a(ab-1)}.$$

O numerador é divisível por $ab - 1$ (uma vez que n é um inteiro) e também é divisível por a. Como mdc$(a, ab - 1) = 1$, o numerador também é divisível por $a(ab - 1)$. Logo, a raiz encontrada é um número inteiro. Assim, $\left(b, \dfrac{b^2+n}{a}\right)$ é uma solução inteira para a equação.

□

Lema 2.9. *Se a, b são inteiros com $a > b \geq 3$, então $\dfrac{b^2+n}{a} < b$.*

Demonstração Pelo Lema 2.8 temos que uma solução é $\left(b, \dfrac{b^2+n}{a}\right)$. Substituindo na expressão $\dfrac{a^2+ab^3}{a(ab-1)}$, obtemos $\dfrac{b^3+b}{b^2-1} = b + \dfrac{2b}{b^2-1}$. Como $b \geq 3$, segue-se que $\dfrac{2b}{b^2-1} < 1$. Logo

$$\frac{b^3+b}{b^2-1} = b + \frac{2b}{b^2-1} < b+1 \leq a,$$

Observando que $b^3 + b < ab^2 - a$, $a + b^3 < ab^2 - b$ segue que $\dfrac{a+b^3}{ab-1} < b$, e pelo Lema 2.8, $\dfrac{b^2+n}{a} < b$.

□

Finalmente obtemos a solução do Exemplo 2.7.

Solução Agora, seja (a, b) a solução de $k = \dfrac{a^2+b^2}{ab-1}$ com b mínimo e k inteiro positivo. Pelos Lemas 2.8 e 2.9, temos que $0 \leq b \leq 2$. Caso contrário, pelo Lema 2.9 teríamos uma contradição, obtendo um valor menor de b. De fato,

- se $b = 0$ então $k = -a^2 \leq 0$.
- se $b = 1$ então $k = \dfrac{a^2+1}{a-1} = a + 1 + \dfrac{2}{a-1}$. Logo, $a = 0, 2, 3$ e $k = -1, 5, 5$, respectivamente. Como queremos $k > 0$ a solução $a = 0$ não é válida.
- se $b = 2$ temos $k = \dfrac{a^2+4}{2a-1}$. Portanto $4k = \dfrac{4a^2+16}{2a-1} = 2a + 1 + \dfrac{17}{2a-1}$. Segue que $2a - 1$ é um divisor de 17. Assim, $a = 1, 9$ e $k = 5$ para ambos os casos.

Portanto, em todos os casos aceitáveis, $k = 5$.

□

3 AS OLIMPÍADAS INTERNACIONAIS DE MATEMÁTICA

A Matemática sempre se fez presente na história, principalmente durante a época do Renascentismo, nos séculos XV, XVI e XVII, quando houve um avanço significativo nas teorias matemáticas.

Nos séculos XIX e XX começaram a ser organizadas Olimpíadas de Matemática com o objetivo de divulgar e compartilhar o conhecimento matemático. Cada país organizava sua competição até que em 1959 foi realizada a Primeira Olimpíada Internacional, com a finalidade de descobrir, encorajar e desafiar jovens matemáticos (alunos do Ensino Médio) em todos os países, promover relações amigáveis entre os competidores internacionais, criar oportunidades para a troca de informações e práticas entre escolas do mundo, além de popularizar a matemática.

Este capítulo tem como tema a história das Olimpíadas Internacionais de Matemática (IMO - International Mathematical Olympiad), dando ênfase a questão seis da IMO 1988, o primeiro problema da competição que foi resolvido pelos métodos estudados anteriormente.

3.1 HISTÓRIA

O fascínio do homem pela Matemática resultou na organização de competições matemáticas. De acordo com www.maa.org (2018), já na Grécia Antiga tentavam resolver problemas de Geometria. Na Itália, no século XVI, resolviam-se polinômios de 3º grau e no século XVIII há registros de que os franceses também realizavam competições.

A partir do século XIX as competições começaram a tomar a forma atual, de acordo com (KENDEROV, 2009). Ele cita que em 1885 na cidade de Bucareste, Romênia, foi realizada uma competição com 70 alunos de uma escola primária. Uma competição para alunos da escola secundária em 1894, realizada na cidade de Eötvös, na Hungria pode ser considerada como precursora das atuais Olimpíadas de Matemática onde três problemas deveriam ser resolvidos em quatro horas.

Dois jornais, **KöMal** da Hungria (1894) e **Gazeta Matematica** da Romênia (1895), tinham por objetivo preparar os alunos para competições.

Em 1934 B.N. Delone e G.M. Frijtengolts organizaram a primeira Olimpíada de Matemática na cidade de Leningrado (atual São Petersburgo - Rússia). De 21 de julho a 31 de julho de 1959 foi realizada a Primeira Olimpíada Internacional de Matemática na cidade de Brasov na Romênia, contando com a participação de 7 equipes: Bulgaria, Tchecoslováquia, República Democrática da Alemanha, Hungria, Polônia, Romênia, e União Soviética (URSS).

Cada país enviou oito competidores, com exceção da URSS que enviou apenas quatro. Seis questões foram propostas aos competidores com pontuações diferentes (P1 = 5, P2 = 8, P3 = 7, P4 = 5, P5 = 8, P6 = 7). Bohuslav Divis da Tchecoslováquia foi o único a alcançar 40 pontos. Foram distribuídas três medalhas de ouro, três de prata e três de bronze, sendo que a equipe romena sagrou-se campeã neste ano.

A Mongólia integrou o grupo de participantes em 1964 e a Finlândia, em 1965. O primeiro país americano a participar foi Cuba, em 1971. A África iniciou sua participação com a equipe da Argélia em 1977. O Brasil enviou sua primeira equipe em 1979 e com a inclusão da Austrália em 1981 todos os continentes passaram a ter representantes na Olimpíada. O recorde de participação aconteceu em 2017 (de 12 a 23 de julho) na cidade do Rio de Janeiro, quando 111 países enviaram 615 competidores na 58ª edição da Olimpíada.

Desde 1959, A IMO é realizada anualmente. Apenas em 1980 não houve edição da Olimpíada Internacional, devido as sanções políticas decorrentes da invasão do Afeganistão pela URSS e conflitos internos na Mongólia. Outras competições não oficiais foram realizadas na Europa naquele ano: Olimpíada Áustria-Polônia, Merch - Luxemburgo e Mariehamn, na Finlândia.

A cada ano a competição é sediada em um país diferente. Com a realização da IMO na África do Sul em 2014, todos os continentes sediaram a competição.

A partir de 1981 foi adotada a mesma pontuação (sete) para as seis questões da Olimpíada, totalizando 42 pontos. Em 1983 as equipes passaram a ter seis competidores, configuração adotada até hoje.

De acordo com www.imoofficial.org (2018), o maior medalhista da história das Olimpíadas até a atualidade é Zhuo Qun (Alex) Song do Canadá com 196 pontos, num total de 5 medalhas de ouro (2011 a 2015) e uma de bronze(2010) em 5 participações.

A pontuação por país é extra-oficial. O ranking geral por país aponta a China em primeiro lugar, seguido de Rússia, Estados Unidos, Hungria, Romênia, Alemanha, Coreia do Sul, Bulgária, República Tcheca e Irã que ocupam respectivamente, do segundo ao décimo lugares.

Com 39 participações até 2018, a delegação brasileira conquistou até agora 10 medalhas de ouro, 43 de prata, 77 de bronze e 33 menções honrosas. Sua melhor classificação foi o 15º lugar em 2016.

Em 1995 na Olimpíada Internacional de Matemática do Canadá foi instituído o símbolo da competição. É formado por uma circunferência e o símbolo do infinito, e as cores representam os continentes:

Azul: Europa

Preto: Africa

Vermelho: América

Amarelo: Ásia

Verde: Oceania

Figura 1 – Símbolo da Olimpíada Internacional de Matemática - Fonte: www.imo-official.org

No mesmo ano também foi criada a bandeira na cor branca, com o símbolo da Olimpíada ao centro. Na cerimônia de encerramento da competição a bandeira é passada para o próximo país-sede.

3.2 REGULAMENTOS

Os regulamentos da competição podem ser encontrados em www.imoofficial.org (2018).

A delegação do país é composta por, no máximo, seis competidores, um líder e um adjunto e no máximo três observadores.

Os competidores não podem ter mais do que 20 anos completos até primeiro de julho do ano da competição e precisam estar frequentando uma escola, seja no Ensino Fundamental ou no Ensino Médio após primeiro de dezembro do ano anterior. Não podem estar matriculados ou ter diploma de curso superior. Apesar de estarem representando seu país, as pontuações são individuais.

A seleção dos participantes depende de país para país. No leste da Ásia, os candidatos são submetidos a testes cujo grau de dificuldade é superior ao da Olimpíada. Competidores chineses passam por um período de isolamento concentrados na resolução de listas de problemas. Nos Estados Unidos, os candidatos são submetidos a uma série de competições nacionais com grau crescente de dificuldade. Os candidatos com as maiores pontuações são escolhidos e recebem um treinamento isolado. A União Soviética e alguns países europeus selecionam competidores com alguns anos de antecedência, treinando-os especificamente para a Olimpíada. Na Ucrânia, verifica-se o desempenho do competidor nas últimas quatro Olimpíadas. Na Índia, os candidatos realizam um teste regional. Então alguns são escolhidos para participar da Olimpíada Nacional de Matemática. Finalmente, são escolhidos em torno de 35 candidatos que são submetidos a um treinamento rigoroso. Destes 35 são escolhidos os 6 competidores que representarão o país na competição.

No Brasil, a seleção inicia com as Olimpíadas Estaduais. Os classificados realizam a Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM). Medalhistas de ouro, prata, bronze e menções honrosas do ano anterior ao processo de seleção passam para a fase de treinamento. Competidores que tenham alcançado melhor pontuação na OBM, nas provas de seleção e nas listas de treinamento são selecionados por uma comissão. Essa lista é analisada pela Comissão de Olimpíadas que pode aprová-la ou sugerir modificações.

A prova da IMO é composta por seis questões a nível de Ensino Médio, que abordam assuntos nas áreas de álgebra, geometria, análise combinatória e teoria dos números. Não é necessário conhecimentos de cálculo ou análise para a resolução dos problemas. Inequações algébricas, números complexos e construções geométricas não foram abordados nos últimos anos. As soluções na maioria das vezes são curtas e elementares. Cada questão vale 7 pontos, totalizando 42 pontos.

Cada país participante pode enviar questões com pelo menos quatro meses de antecedência para o Comitê de Seleção de Problemas do país-sede da competição, que fará uma seleção prévia, reduzindo a quantidade de problemas a uma lista com 30 questões.

Os líderes das equipes participantes reúnem-se com antecedência no país-sede, formando o juri da IMO, para dirimir sobre assuntos formais da competição. Uma das obrigações desse juri é a escolha das seis questões da competição e a classificação das mesmas pelo grau crescente de dificuldade. Devem identificar e excluir problemas muito usados em livros ou em programas de treinamento.

Cabe ao juri verificar se os problemas foram traduzidos apropriadamente para os idiomas oficiais da IMO (inglês, francês, alemão, russo e espanhol), bem como para alguma língua solicitada por algum líder da competição. Por conhecerem as questões da prova, esses líderes ficam isolados e são monitorados até o término do segundo dia das provas.

A Olimpíada acontece durante nove dias. Para que os competidores se adaptem ao país-sede, as provas são realizadas geralmente no quarto e quinto dia do encontro. No primeiro dia são resolvidas 3 questões. Os competidores tem quatro horas e meia para resolvê-las, o mesmo acontecendo no segundo dia. As provas são escritas em até 3 idiomas conforme solicitado na inscrição. Tão somente, é permitido usar régua e compasso.

Enquanto as provas são corrigidas, os competidores participam de palestras, estudos, socializações, além de conhecerem pontos estratégicos do país-sede da Olimpíada.

Inicialmente, a correção é feita pelo próprio líder da equipe, devido a grande quantidade de idiomas da competição. No entanto, ele não pode alterar a prova, apenas traduzi-la. Em seguida, a prova é submetida a um grupo de coordenadores escolhidos durante a competição. Líderes e coordenadores dever acordar em relação a resolução, para que possa ser publicada no livro oficial da competição. Caso haja divergência, o Chefe dos Coordenadores deve mediar a questão. Se ainda não houver consenso, o juri internacional deverá solucionar o impasse.

A última atividade da competição é a entrega das premiações e um coquetel.

A premiação depende exclusivamente da pontuação individual do competidor. A quantidade de medalhas distribuídas aos competidores que apresentarem as maiores pontuações equivale a até pouco menos da metade dos participantes. A proporção para medalhas de ouro, prata e bronze equivale respectivamente a 1 : 2 : 3. Caso haja uma grande quantidade de participantes em uma Olimpíada, o número de medalhas pode ser reduzido proporcionalmente a essa quantidade. Competidores que não ganham medalha, mas que atingem a pontuação máxima na solução de algum problema, recebem menção honrosa. Aos competidores que apresentarem uma solução elegante ou com boa generalização para a algum problema recebem prêmio especial.

3.3 A 29ª OLIMPÍADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA

A Austrália sediou em 1988 a 29ª edição da competição com a seguinte logomarca:

Figura 2 – Símbolo da IMO 1988. Fonte:www.imo-official.org

O evento aconteceu na cidade de Camberra, de 09 de julho a 21 de julho e contou com a participação de 49 países (25 não-europeus e 24 europeus), 268 competidores, dos quais 17 do sexo feminino. A prova ocorreu nos dias 15 e 16 de julho (sexta-feira e sábado) daquele ano, no período matutino.

Cento e vinte competidores foram premiados com medalhas (17 de ouro, 38 de prata e 65 de bronze). Nessa edição, houve também a entrega do prêmio especial para o competidor búlgaro Emanouil Atanassov, pela elegante resolução de uma das questões da prova.

De acordo com (HALLORAN, 1988),foi a partir desta edição que os competidores passaram a receber a Menção Honrosa.

Noventa e quatro questões foram submetidas a análise do Comitê de Questões, das quais o juri escolheu as seis que formaram a prova, sendo considerada a mais difícil das últimas edições.

O Comitê de Questões foi presidido por David Hunt e composta por cinco matemáticos de Sidney, mais George e Esther Szekeres, matemáticos famosos por sua capacidade em resolverem problemas. P. J. O'Halloran presidiu o Comitê de Organização da IMO.

O Brasil participou com seis competidores: Lenilson Barreira de Morais (menção honrosa), Jun Takakura (menção honrosa), Alberto Adami, Song San Woei, Maria Célia Paiva de Freitas, Walfredo da Costa Cirne Filho, ficando na 38ª posição do ranking da competição naquele ano.

Os dez primeiros colocados da 29ª IMO foram:

Hongyu He, da China, com 42 pontos,

Nicusor Dan, romeno, com 42 pontos,

Adrian Vasiu, romeno, com 42 pontos,

Nicolai Filonov, da União Soviética, com 42 pontos,

Ngo Bau Chau, do Vietnã, com 42 pontos,

Xi Chen, chinês, com 41 pontos,

Sergei Ivanov, da União Soviética, com 41 pontos,

Ravi Vakil, canadense, com 40 pontos,

Julien Cassaigne, da França, com 40 pontos,

Dimitri Tuliakov, da União Soviética, com 37 pontos.

Na classificação extraoficial por país, a União Soviética, ficou em primeiro lugar, seguido da China e da Romênia em segundo lugar. Alemanha, Vietnã, Estados Unidos, Republica Democrática Alemã, Bulgária e França classificaram -se, respectivamente, do quarto ao décimo lugares.

As questões da prova descritas a seguir também podem ser encontradas em (HALLORAN, 1988).

(1) Considere 2 círculos coplanares de raios R e r $(R > r)$ concêntricas. Seja P um ponto fixo na circunferência de raio r e seja B um ponto variável na circunferência de raio R. A reta BP encontra o círculo maior em C. A reta ℓ perpendicular à BP em P encontra o círculo menor em A (se ℓ é tangente ao círculo em P, então $A = P$).

   (a) Encontre o conjunto de valores de $BC^2 + CA^2 + AB^2$.

   (b) Encontre o lugar do ponto médio de AB.

(2) Seja n um inteiro positivo e seja $A_1, A_2, ..., A_{2n+1}$, subconjuntos de um conjunto B. Suponha que:

(i) cada A_i tem exatamente $2n$ elementos.

(ii) cada $A_i \cap A_j (1 \leq i < j \leq 2n+1)$ possui exatamente um elemento e,

(iii) todos os elementos de B pertencem a pelo menos dois subconjuntos A_i.

Para quais valores de n podem ser atribuídos a cada elemento de B um dos números zero e um, de tal maneira que cada elemento de A tem o zero atribuído exatamente a n de seus elementos.

(3) Uma função f é definida nos inteiros positivos por

$f(1) = 1, f(3) = 3, f(2n) = n,$

$f(4n+1) = 2f(2n+1) - f(n),$

$f(4n+3) = 3f(2n+1) - 2f(n)$

para todo inteiro positivo n.

Determine o número de inteiros positivos n, menores ou iguais a 1988, tal que $f(n) = n$

(4) Mostre que o conjunto dos números reais x que satisfaz a desigualdade

$$\sum_{k=1}^{10} \frac{k}{x-k} \geq \frac{5}{4}$$

é uma união de intervalos disjuntos, cuja soma é 1988.

(5) ABC é um triângulo retângulo em A, e D é o pé da altura em relação a A. A reta que intersecta o incentro dos triângulos ABD, ACD intersecta os lados AB, AC nos pontos K, L respectivamente. S e T denotam as áreas dos triângulos ABC e AKL, respectivamente. Mostre que $S \geq 2T$.

(6) Sejam a e b inteiros positivos, tal que $ab+1$ divide a^2+b^2. Mostre que

$$\frac{a^2+b^2}{ab+1}$$

é o quadrado de um inteiro.

3.4 A QUESTÃO 6 DA IMO 1988

Segundo (ENGEL, 1997), após analisarem as questões pré selecionadas pelo Comitê, os membros do juri decidiram que a questão apresentada pela Alemanha Oriental, proposta por Stephan Beck deveria ser a última questão da prova, devido ao grau de dificuldade da resolução.

De acordo com www.imoofficial.org (2018), onze competidores apresentaram uma solução perfeita para a questão:

Hongyu He,

Nicusor Dan,

Adrian Vasiu,

Nicolai Filonov,

Ngo Bau Chau,

Xi Chen,

Sergei Ivanov,

Ravi Vakil,

Wolfgang Stocher,

todos esses medalhistas de ouro, mais

Emanouil Atanassov e

Zvezdelina Stankova,

medalhistas de prata.

Terence Tao, australiano, um dos matemáticos mais importantes da atualidade e vencedor da Medalha Fields (equivalente ao Prêmio Nobel de Matemática, concedida a matemáticos com menos de 40 anos de idade) em 2006, estava na sua terceira participação sendo medalhista de ouro aos 13 anos de idade. Terence Tao conseguiu alcançar apenas um ponto na questão 6.

O artigo de (ROSADO, 2010) apresenta a resolução baseada nos métodos descritos nos capítulos 1 e 2, além das resoluções de dois competidores que participaram da IMO 1988, a resolução do matemático australiano Dr. John Campbell e uma solução geométrica.

Vamos expor na sequência versões adaptadas destas resoluções.

Problema 3.1. *Sejam a e b inteiros positivos, tal que $ab+1$ divide a^2+b^2. Mostre que*

$$\frac{a^2+b^2}{ab+1}$$

é o quadrado de um inteiro.

Para todas as soluções definimos

$$k=\frac{a^2+b^2}{ab+1}.$$

Solução 1 [Pelo Método Descida Infinita de Fermat] Inicialmente, se $a=1$, temos $b^2+1=k(b+1)$. Subtraindo b^2-1 nos dois lados da equação, obtemos $2=(b+1)(k-b+1)$. Como $b\geq 1$, podemos afirmar que $b=1=a=k$. Assim, $\frac{1^2+1^2}{1^2+1}=1$ que é um quadrado perfeito. De modo geral, se $a=b$, então $2a^2=k(1+a^2)$. Como $1+a^2$ é primo com a^2, $1+a^2$ divide 2. Logo, obtemos $a=1=b=k$.
Como a equação é simétrica em a e b, vamos supor que $a>b>1$. O valor de k não pode ser

igual a 2 pois teríamos $2 = \dfrac{a^2+b^2}{ab+1} = (a-b)^2$. Podemos então assumir que $k \geq 3$.
A igualdade $a^2 + b^2 = k + kab$ admite solução se $a = bk$ e $b^2 = k$. De fato, essa igualdade gera uma família infinita de soluções quando $b = b; k = b^2; a = b^3$.
Reescrevendo a equação original como $x^2 - kyx + y^2 - k = 0$, temos uma equação de segundo grau em x (ou em y). Neste contexto, a outra letra, como também o k, agem como parâmetros. Considerado como uma equação em x, seu discriminante vale:

$$(-ky)^2 - 4(y^2 - k) = (k^2 - 4)y^2 + 4k > 0, \text{ pois } k > 2.$$

Fixando y, existem duas soluções, x', $x'' = ky - x'$, onde a soma das raízes vale ky. Existem pares (a, b) de números inteiros que são soluções, com $a > b$. Definimos $a = x'; b = y$. A partir dessa solução, definiremos o par (x'', y), ou seja, $(kb - a, b)$. A expressão $kb - a$ é inteira e não pode ser negativa porque (a', b), com $a' = kb - a$, é uma solução e b é positivo, pois caso contrário, o segundo membro da equação escrito como $k(1 + a'b)$ é uma soma de quadrados: se um produto de inteiros for negativo, será menor ou igual a -1, uma contradição.
O número $kb - a$ pode ser igual a 0. Se é nulo, provamos que k é um quadrado: basta substituir kb por a na equação original.
Se $a' = kb - a$ não é zero, (a', b) é outra solução para o problema inicial. Vamos mostrar que $a' < b$. Do mesmo modo, do par (b, a'), podemos formar o par $(ka' - b, a')$, onde $a'' = ka' - b < a'$. Provaremos que $a' = kb - a < b$. Construindo desigualdades equivalentes, começando com a que queremos provar:

$$kb < a + b \Leftrightarrow kab < a^2 + ab \Leftrightarrow kab + k < a^2 + ab + k$$

mas como $a^2 + b^2 = k + kab$, se tem $a^2 + b^2 < a^2 + ab + k \leftrightarrow b^2 < ab + k$ e esta última afirmação é verdade porque $a > b$. Definimos

$$a_0 = a; a_1 = b; a_{n+1} = ka_n - a_{n-1},$$

para todo n, o par $(a_n, a_n + a_{n+1})$ é uma solução da equação. Se para todo n tivéssemos $a_n \neq 0$, a sucessão (a_n) seria uma sequência estritamente decrescente de números inteiros positivos, o que é impossível, pelo Princípio da Boa Ordem. Portanto, existe n tal que $a_n = 0$, e $k = a_{n-1}^2$ é efetivamente um quadrado.

$\square$

Solução 2 [Pelo Método Vieta Jumping] Se $a = 0$ temos que b^2 é a solução da equação. Analogamente, se $b = 0$, então a^2 resolve. Agora suponha que existe uma ou mais soluções para determinado k fixo, para as quais k não é um quadrado perfeito. Para esse valor de k, seja (a, b) a solução para esta equação que minimize o valor de $a + b$. Sem perda de generalidade, assumiremos $a \geq b$. Substituindo a por uma variável x, podemos rearranjar a equação de modo que ela resulte em

$$x^2 - (kb)x + (b^2 - k) = 0$$

Uma raiz dessa equação é $x_1 = a$ pois (a, b) é uma solução . Pelas Fórmulas de Viète, a outra raiz pode ser calculada como segue:

$$a + x_2 = \frac{kb}{1} \Rightarrow x_2 = kb - a$$

e

$$ax_2 = \frac{b^2 - k}{1} \Rightarrow x_2 = \frac{b^2 - k}{a}.$$

A primeira expressão mostra que x_2 é um inteiro, enquanto a segunda expressão implica $x_2 \neq 0$, já que k não é um quadrado perfeito. De $\frac{x_2^2 + b^2}{x_2 b + 1} = k > 0$, tem-se que x_2 é positivo, pois $x_2 b$ é produto de inteiros e diferente de -1. Finalmente, $a \geq b$ implica que $x_2 = \frac{b^2 - k}{a} < \frac{b^2}{a} < \frac{a^2}{a} = a$. Portanto, (x_2, b)´é uma solução, com $x_2 + b < a + b$, que contradiz a minimalidade de (a, b).

□

A solução abaixo pode ser considerada a mais precisa, pois determina exatamente o valor de k em função de a e b. Ela foi obtida pelo matemático John Campbell, professor da Universidade de Canberra, Austrália (ROSADO, 2010). Campbell provou que

$$k = \text{mdc}(a, b)^2.$$

Solução 3 [Campbell] Se $ab = 0$, então $a = 0$ ou $b = 0$, o resultado é imediato.
Se $ab > 0$, podemos supor (pela simetria do problema) que $a \leq b$; e o resultado $k = \text{mdc}(a, b)^2$ está provado para ab mínimo.
Devemos encontrar um inteiro c tal que $k = \frac{a^2 + c^2}{ac + 1}$ e que atenda $0 \leq c < b$.
Usando indução (desde que $ac < ab$) queremos provar que $k = \mathrm{mdc}(a, c)^2$.
Para obter c, resolvemos:

$$\frac{a^2 + b^2}{ab + 1} = \frac{a^2 + c^2}{ac + 1} = k$$

Como as razões são as mesmas, subtrairemos numeradores e denominadores na proporção, e isso resulta $k = \frac{b^2 - c^2}{ab - ac} = \frac{(b + c)(b - c)}{a(b - c)} = \frac{b + c}{a}$, de modo que $c = ak - b$. Note que c é inteiro, e que mdc$(a, c) =$ mdc(a, b). Portanto, a prova estará concluída se pudermos provar que $0 \leq c < b$. Temos

$$k = \frac{a^2 + b^2}{ab + 1} < \frac{a^2 + b^2}{ab} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$$

no que resulta $ak < \frac{a^2}{b} + b \leq \frac{b^2}{b} + b = 2b$ (já que $a \leq b$) , ou seja, $ak - b < b$, isto é, $c < b$.
Por outro lado, $k = \frac{a^2 + c^2}{ac + 1}$ implica $ac + 1 > 0$. Daí, $c > -\frac{1}{a}$ implica $c \geq 0$ (c é inteiro)

□

Solução 4 [Competidor Emanouil Atanassov (Bulgária)] Suponhamos que $\frac{a^2+b^2}{ab+1} = k$ seja um inteiro. Então,

$$a^2 - kab + b^2 = k. \tag{3.1}$$

A partir de agora vamos assumir que k não é um quadrado. Toda solução de 3.1 tem

$$a, b > 0 \quad \text{ou} \quad a, b < 0 \tag{3.2}$$

(com $a, b \neq 0$, e caso $ab < 0$, então $a^2 - kab + b^2 > k$). Consideremos uma solução (a, b) de 3.1 com $a \geq b > 0$, supondo a mínimo. Observe que $b < a$; se $b = a$, então $(2-k)a^2 = k$, mas o primeiro membro não é positivo. Consideremos 3.1 como uma equação quadrática em a, com duas raízes: a e a_1. Temos $a + a_1 = kb$; então a_1 é um inteiro. Por 3.2, já que $b > 0$, temos $a_1 > 0$. Também, $aa_1 = b^2 - k$. Logo,

$$a_1 = \frac{b^2-k}{a} < \frac{a^2-1}{a} < a$$

O par (a_1, b) satisfaz 3.1 e $a_1 > 0; b > 0; a_1 < a; b < a$, o que contradiz a minimalidade de a.

$\square$

Solução 5 [Competidor Adrian Vasiu (Romênia)] Embora a solução de Vasiu também seja por redução ao absurdo, em um dado momento utiliza a decomposição em fatores de um número na forma $N = n^4 + 1$.

Suponhamos que existem pares (a, b) de números naturais, tais que

$$\frac{a^2+b^2}{ab+1} = q \in \mathbb{N}^*$$

onde q não é um quadrado perfeito. Considere um desses pares com a mínimo. Então:

$$\frac{a^2+b^2}{ab+1} = q \Rightarrow \frac{a^4+a^2b^2}{ab+1} = a^2q \in \mathbb{N}^*$$

$$\Rightarrow ab - 1 + \frac{a^4+1}{ab+1} \in \mathbb{N}^*$$

$$\Rightarrow \frac{a^4+1}{ab+1} = c \in \mathbb{N}^* \Rightarrow a^4 + 1 = c(ab+1) \Rightarrow a^4 - abc = c - 1$$

$$\Rightarrow a | c - 1 \Rightarrow c = ad + 1.$$

Se $d = 0$, então $c = 1 \Rightarrow a^4 + 1 = ab + 1 \Rightarrow a^3 = b \Rightarrow q = a^2$, contradição.

Logo $d \neq 0$. Então $a^4 + 1 = (ab+1)(ad+1) \Rightarrow ad + 1 | a^4 + 1 \Rightarrow ad + 1 | a^2d^2 + a^4$

Do fato que mdc $(ad + 1, a^2) = 1$ e que $ad + 1 | a^2(a^2 + d^2)$ resulta $ad + 1 | a^2 + d^2$. Também,

$$ad + 1 = \frac{a^4+1}{ab+1} \leq \frac{a^4+1}{a^2+1} < a^2 + 1 \Rightarrow 0 < d < a$$

Como $\dfrac{a^2+d^2}{ad+1} = \dfrac{a^2+b^2}{ab+1}$ tem-se

$$\frac{a^4+a^2b^2}{ab+1} = ab - 1 + c = ab - 1 + ad = ad - 1 + \frac{a^4+1}{ad+1} = \frac{a^4+a^2d^2}{ad+1}$$

Assim, $d < a$, mas a era mínimo, logo q é um quadrado perfeito, contradição.

$\square$

A solução desta questão também pode ser representada geometricamente.

Solução 6 [Solução geométrica]
Seja $\dfrac{a^2+b^2}{ab+1} = k$ e fixe o valor de k.
O ponto (a, b) representa um ponto de rede na hipérbole H definida pela equação $a_2 + b_2 - kab - k = 0$. Se $a = b$, então temos $a = b = k = 1$, solução que satisfaz a equação.
Seja (x, y) um ponto que pertence a um ramo da hipérbole H, e assuma que $x < y$ de modo que esteja no ramo mais alto.
Ao aplicar as fórmulas de Viéte, definimos $(x, kx - y)$ como um ponto no ramo inferior de H. Então, por reflexão $(kx - y, x)$ é um ponto no ramo superior. Este novo ponto tem menor valor para a ordenada y, e, portanto, está abaixo do ponto original. Como este ponto está no ramo superior, ainda está acima de $y = x$.
Este processo pode ser repetido, inúmeras vezes, sem incluir os pontos do segundo quadrante. Portanto, deve terminar em $x = 0$ e por substituição, $y^2 = q$ é um quadrado, conforme a hipótese.

$\square$

3.5 OUTRAS QUESTÕES

Na Olimpíada Internacional de Matemática de 2003, foi apresentado um problema cuja solução necessitava do método descida infinita de Fermat.

Exemplo 3.2. *Determine todos os pares de inteiros positivos* (a, b) *para os quais* $\dfrac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1}$ *é um inteiro positivo.*

Solução Seja (a, b) uma solução inteira positiva de $\dfrac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1} = k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad k > 0.$
Logo $2ab^2 - b^3 + 1 \geq 1 \Rightarrow 2ab^2 \geq b^3 \Rightarrow a \geq \dfrac{b}{2}$.
No caso $a = \dfrac{b}{2}$ obtém-se uma solução se b é par.
Para qualquer outra solução, $a > \dfrac{b}{2}$ e nesse caso $a^2 \geq 2ab^2 - b^3 + 1 = b^2(2a - b) + 1 > b^2$. Daí

$a > b$.

Agora se $\dfrac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1} \in \mathbb{N}$ então a é a raiz do polinômio com coeficientes inteiros $x^2 - 2kb^2x + k(b^3 - 1) = 0$. Este polinômio possui outra solução inteira $a_1 = 2kb^2 - a = \dfrac{k(b^3 - 1}{a} \geq 0$, assim (a_1, b) também é solução do problema se $b > 1$.

Supondo que a é a maior raiz, de $a \geq a_1$ teremos que $a \geq kb^2$ e assim

$$a_1 = \frac{k(b^3 - 1)}{a} \leq \frac{k(b^3 - 1)}{kb^2} < b.$$

Dessa forma , ou $b = 0$ ou $a_1 = \dfrac{b}{2}$ e neste último caso $k = \dfrac{b^4}{4}$ e $a = \dfrac{b^4}{2} - \dfrac{b}{2}$.

Portanto as soluções do problema são $(a, b) = (l, 2l), (2l, 1)$ ou $(8l^4 - l, 2l)$, com $l \in \mathbb{N}$.

$\square$

O problema 5 da IMO de 2007 também utiliza o método Vieta Jumping na resolução.

Exemplo 3.3. *Sejam a e b inteiros positivos. Mostre que se $4ab - 1$ divide $(4a^2 - 1)^2$, então $a = b$.*

Solução Pela hipótese, $4ab - 1 \mid (4a^2 - 1)^2$, então, $4ab - 1 \mid b^2(4a^2 - 1)^2 - (4ab - 1)(4a^3b - 2ab + a^2) = a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$.

Suponha que existam inteiros positivos distintos a e b tais que $4ab - 1 \mid (a - b)^2$. Seja $k = \dfrac{(a - b)^2}{4ab - 1} > 0$. Fixe k e considere $S = \left\{(a, b) : (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid \dfrac{(a - b)^2}{4ab - 1} = k\right\}$.

Considere $(a, b) \in S$ um par que minimize a soma $a + b$. Sem perda de generalidade suponha que $a > b$. Considere agora a equação quadrática $\dfrac{(x - b)^2}{4xb - 1} = k$. Assim, $x^2 - (2b - 4kb)x + b^2 + k = 0$ tem raízes $x_1 = a$ e x_2. Pelas fórmulas de Viète, $x_2 = 2b + 4kb - a = \dfrac{b^2 + k}{a}$.

Isto implica que x_2 é um inteiro positivo e $(x_2, b) \in S$. Pela minimalidade de $a + b$, obtem-se $x_2 \geq a$, isto é, $\dfrac{b^2 + k}{a} \geq a$, portanto, $k \geq a^2 - b^2$ e $\dfrac{(a - b)^2}{4ab - 1} = k \geq a^2 - b^2$.

Segue-se que $a - b \geq (a + b)(4ab - 1) \geq a + b$, uma contradição.

$\square$

Em 1981, o exemplo seguinte foi aplicado na 22ª edição da IMO, realizada nos Estados Unidos. A resolução também baseia-se no Método da Descida Infinita de Fermat.

Exemplo 3.4. *Encontrar todas as soluções inteiras positivas da equação*

$$m^2 - mn - n^2 = \pm 1.$$

Solução Seja (m, n) a solução da equação $m^2 - mn - n^2 = \pm 1$ com m, n inteiros positivos. Observe que $m^2 = n^2 + mn \pm 1 \geq n^2 \Rightarrow m \geq n$. A igualdade é válida se , e somente se, $(m, n) = (1, 1)$, que é claramente uma solução.

Considere então $m > n$. Vamos demonstrar que $(n, m - n)$ também é solução. De fato,

$$n^2 - n(m-n) - (m-n)^2 = n^2 - nm + n^2 - m^2 + 2mn - n^2 = -(m^2 - nm - n^2) = \mp 1$$

Assim, se temos uma solução (m, n), podemos encontrar uma cadeia descendente de soluções e este processo parará quando atingirmos uma solução (a, b) com $a = b$, ou seja, a solução $(1, 1)$. A partir de uma solução (m, n) e invertendo o processo, encontraremos todas as soluções $(m + n, m)$. Portanto todas as soluções positivas são

$$(1, 1), (2, 1), (3, 2), \ldots, (F_{n+1}, F_n), \ldots$$

onde F_n representa o n-ésimo termo da sequência de Fibonacci.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A Matemática é uma ciência fascinante. Quanto mais se pesquisa, mais se descobrem particularidades a serem exploradas e divulgadas. Esse talvez tenha sido um dos motivos para que alguns problemas e teoremas tenham demorado anos e até séculos para serem demonstrados.

A grande quantidade de conhecimento matemático já divulgado pode colocar os matemáticos em situações inusitadas, fazendo-os não perceber alguma particularidade indispensável na resolução de um problema. Esse pode ter sido um dos motivos para que a questão 6 da IMO 1988 tenha ficado tão famosa. Devido a esse problema, o regulamento das Olimpíadas Internacionais de Matemática, no tocante a premiação, recebeu importantes contribuições.

Ainda em relação a questão 6, existem várias soluções para esse problema, mas todas elas estão baseadas no método da Descida Infinita de Fermat. Até mesmo a solução geométrica baseia-se nesse método. Isso nos leva a concluir que no universo matemático existem problemas e situações com soluções estritamente limitadas, isto é, ou segue-se certo caminho, ou não resolve-se jamais o problema.

Davi Hilbert percebeu essa lacuna ao propor o desafio de encontrar um único algoritmo que possa ser aplicado para resolução de todas as equações diofantinas. Posteriormente, foi provado que esse algoritmo não existe. Isso reforça a ideia de que determinados problemas necessitam de um método específico para serem solucionados.

Sobre o método da Descida Infinita citado anteriormente, às vezes é necessário fazer algumas adaptações para aplicá-lo na resolução de problemas, desde que mantenha a sua essência. Uma das variações desse método é conhecido como Vieta Jumping.

Inúmeras publicações encontram-se disponíveis abordando desses dois métodos. Destacamos as relacionadas às olimpíadas de matemática (MOREIRA, 2012) e ao mestrado profissional Profmat (MOREIRA C.G., 2012) cuja apresentação é um tanto formal. Como o objetivo deste trabalho é o de apresentar os métodos de maneira mais acessível a estudantes e professores, exploramos a resolução de algumas questões, de modo a identificar os argumentos e as etapas da resolução, donde concluímos que:

- Vieta Jumping é uma variação de do método Descida Infinita. Ambos usam contradição.
- O método Descida Infinita aplica-se a equações gerais, enquanto o método Vieta Jumping é especifico para determinadas equações envolvendo divisibilidade.
- O método Descida Infinita utiliza a minimalidade da variável, enquanto Vieta Jumping usa a minimalidade de uma relação entre as variáveis.
- Descida Infinita usa triplas pitagóricas e Vieta Jumping usa Fórmulas de Viète.

Esses métodos costumam ser utilizados na solução de problemas propostos em olimpíadas de matemática. As escolas brasileiras quer sejam públicas ou privadas, incentivam seus alunos a participar dessas olimpíadas de Matemática, sendo as mais importantes a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas e Privadas OBMEP e a Olimpíada Brasileira de Matemática OBM.

Algumas escolas estão estruturadas com laboratórios de matemática onde os alunos tem acesso a materiais disponibilizados pela própria OBMEP e OBM, a fim de se prepararem para as competições. O Instituto de Matemática Pura e Aplicada também mantém um programa chamado Pólos Olímpicos de Treinamento Intensivo POTI, com o objetivo de abordar conteúdos que normalmente não são ensinados em sala de aula, como no caso dos métodos acima citados.

Diante do atual quadro da educação brasileira, com um IDEB tão baixo, seria uma utopia apresentar esses métodos para a resolução de equações nas salas de aula no Ensino Médio. A maioria dos alunos da escola pública não tem base matemática suficiente para tal. O sistema de educação precisa ser revisto para que o quadro de educação no Brasil comece a evoluir. Programas como as Olimpíadas de Matemática (para os alunos) e o Mestrado Profissional em Matemática PROFMAT (para os professores) tem como um dos objetivos ajudar a mudar este cenário.

No entanto, consideramos que as equações diofantinas podem ser adaptadas para o ensino médio, incluindo-as nas funções do primeiro grau, funções do segundo grau, teorema de Pitágoras, etc.

REFERÊNCIAS

ADREESCU T., A. D. **Chapter 1: Why Quadratic Diophantine Equations?** Disponível em: https://www.springer.com/cda/.../9780387351568-c1.pdf?...0...Acesso em: 06 jun. 2018, 2015.

ENGEL, A. **Problem-Solving Strategies**. New York: Springer, 1997.

FERREIRA, M. **O Décimo Problema de Hilbert**. Disponível em: https://repositorio.ufu.br/bitstream/123456789/16784/1/Diss%20Marcelo.pdf. Acesso em: 21 mai. 2018, 2010.

GE, Y. **The Method of Vieta Jumping**. Mathematical Reflections 5.Disponível em: https://blogs.sch.gr/sotskot/files/2011/01/Vieta_Jumping.pdf. Acesso em: 25 fev. 2018, 2007.

HALLORAN, P. A report on the 29th imo (9 - 21 july, 1988). **Journal of the World Federation of National Mathematics Competitions**, AMT Publishing, v. 1, n. 2, p. 18–28, 1988.

HALTER-KOCH, F. **Diophantine equations of Pellian Type**. Journal of Number Theory n.131 pp. 1597–1615, Elsevier, USA, 2011.

HEFEZ, A. **Aritmética**. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

HEFEZ A., V. M. **Polinômios e Equações Algébricas**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

KENDEROV, P. S. A short history of the world federation of national mathematics competitions,. **Journal of the World Federation of National Mathematics Competitions**, AMT Publishing, v. 22, n. 2, p. 14–31, 2009.

KESKIN R., S. Z. K. O. **On The Diophantine Equation** $x^2 - kxy + y^2 - 2^n = 0$. Czechoslovak Mathematical Journal, n. 63 , pp. 783–797, 2013.

MARTINEZ F., M. C. S. N. T. E. **Teoria dos Números: um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro**. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.

MATIYASEVICH, Y. **HILBERT'S TENTH PROBLEM: What can we do with Diophantine Equations?** Disponível em: https://logic.pdmi.ras.ru/ yumat/personaljournal/.../H10histe.pdf. Acesso em: 21 mai. 2018, 1999.

MOREIRA, C. **Descenso Infinito de Fermat**. Polos Olímpicos de Treinamento. Curso de Teoria dos Números. Nível 3 - aula 12. Disponível em https://sites.google.com/site/apoiopot/arquivos. Acesso em: 06 abr. 2018, 2012.

MOREIRA C.G., M. F. S. N. **Tópicos da Teoria dos Números**. Rio de Janeiro:SBM, 2012.

OZKOÇ A., T. **Quadratic Diophantine Equation** $x^2 - (t^2 - t)y^2 - (4t - 2)x + (4t^2 - 4t)y = 0$**.** Disponível em: ftp://ftp.gwdg.de/pub/EMIS/journals/2009-04-003_R1.pdf. Acesso em: 06 jun. 2018, 2009.

ROSADO, F. B. Famosos problemas de la i.m.o. **Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática**, Centro de Altos Estudios Universitarios de la OEI, v. 411, n. diciembre 2010 – febrero 2011, p. 1–10, 2010.

WWW.IMOOFFICIAL.ORG. **International Mathemathical Olympiad**. 2018. Disponível em: <https://www.imo-official.org/>.

WWW.MAA.ORG. **Mathematical Assosiation of America - History of the IMO**. 2018. Disponível em: <https://www.maa.org/math-competitions/history-of-the-imo>.