

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ - UTFPR
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
PROFMAT

RODRIGO CESAR LAGO

**QUADRILÁTEROS INSCRITÍVEIS E OS TEOREMAS DE
SIMSON-WALLACE E DE STEINER-LEHMUS**

DISSERTAÇÃO

CURITIBA

2018

RODRIGO CESAR LAGO

**QUADRILÁTEROS INSCRITÍVEIS E OS TEOREMAS DE
SIMSON-WALLACE E DE STEINER-LEHMUS**

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Tecnológica Federal do Paraná em Curitiba - PROFMAT-UTCT como requisito parcial para obtenção do grau de “Mestre”.

Orientador: Prof. Dr. Rudimar Luiz Nós

CURITIBA

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

L177q Lago, Rodrigo Cesar
2018 Quadriláteros inscritíveis e os teoremas de Simson-Wallace
 e de Steiner-Lehmus / Rodrigo Cesar Lago.-- 2018.
 143 f.: il.; 30 cm.

Disponível também via World Wide Web.
Texto em português com resumo em inglês.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Tecnológica Federal do
Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em
Rede Nacional, Curitiba, 2018.
Bibliografia: f. 131-133.

1. Geometria euclidiana. 2. Quadrilátero. 3. Triângulo.
4. Demonstração automática de teoremas. 5. Matemática – Estudo
e ensino. 6. Prática de ensino. 7. Professores de matemática –
Formação. 8. GeoGebra (Programa de computador). 9. Software
educacional. 10. Matemática - Dissertações. I. Nós, Rudimar Luiz,
orient. II. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa
de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. III.
Título.

CDD: Ed. 23 – 510

Biblioteca Central do Câmpus Curitiba – UTFPR
Bibliotecária: Luiza Aquemi Matsumoto CRB-9/794

TERMO DE APROVAÇÃO DE DISSERTAÇÃO Nº 54

A Dissertação de Mestrado intitulada “Quadriláteros inscritíveis e os teoremas de Simson-Wallace e de Steiner-Lehmus”, defendida em sessão pública pelo candidato Rodrigo Cesar Lago, no dia 27 de setembro de 2018, foi julgada para a obtenção do título de Mestre, área de concentração Matemática, e aprovada em sua forma final, pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional.

BANCA EXAMINADORA:

Prof(a). Dr(a). Rudimar Luiz Nós - Presidente – UTFPR

Prof(a). Dr(a). Neusa Nogas Tocha – UTFPR

Prof(a). Dr(a). Yuri Dumaresq Sobral - UNB

A via original deste documento encontra-se arquivada na Secretaria do Programa, contendo a assinatura da Coordenação após a entrega da versão corrigida do trabalho.

Curitiba, 27 de setembro de 2018.

Carimbo e Assinatura do(a) Coordenador(a) do Programa

Dedico este trabalho a Deus e a toda minha família que, com muito apoio e carinho, não mediram esforços para que eu concluísse esta etapa da minha vida.

AGRADECIMENTOS

- Agradeço em primeiro lugar a Deus, pela força, coragem e conforto nas horas difíceis.
- A toda minha família, pelo apoio afetivo e paciência, facilitando assim essa caminhada.
- À minha querida esposa Agnes e aos meus filhos, Gabriel e Lucas, pela paciência e compreensão nos momentos de ausência e pelo incentivo durante a realização do curso.
- Aos meus colegas de turma, pelo convívio inspirador e conhecimentos compartilhados no decorrer do curso.
- A todos os professores de Matemática da UTFPR que, direta ou indiretamente, colaboram com o PROFMAT.
- Ao meu orientador, Prof. Dr. Rudimar Luiz Nós, pela paciência, dedicação e confiança, e cuja orientação foi de extrema importância à elaboração deste trabalho.
- À UTFPR - Câmpus Curitiba, instituição pela qual tenho enorme carinho, respeito e admiração desde a época de estudante do curso técnico em Eletrotécnica do então antigo CEFET-PR.
- À CAPES, pela recomendação do PROFMAT por meio do parecer do Conselho Técnico Científico da Educação Superior e pelo incentivo financeiro.
- À Sociedade Brasileira de Matemática que, na busca da melhoria do ensino de matemática na Educação Básica, viabilizou a implementação do PROFMAT.

Sem conhecer geometria, a leitura interpretativa do mundo torna-se incompleta, a comunicação das ideias fica reduzida e a visão da matemática torna-se distorcida.

Sérgio Lorenzato

Professor pesquisador em Educação Matemática com ênfase em metodologia de ensino, aprendizagem e formação de professores.

A geometria faz com que possamos adquirir o hábito de raciocinar, e esse hábito pode ser empregado, então, na pesquisa da verdade e ajudar-nos na vida.

Jacques Bernoulli (1654-1705)

Matemático suíço nascido na Basileia.

Contribuiu para o desenvolvimento do cálculo infinitesimal, teoria das probabilidades e da geometria analítica.

RESUMO

LAGO, Rodrigo Cesar. **Quadriláteros inscritíveis e os teoremas de Simson-Wallace e de Steiner-Lehmus**. 143 f. Dissertação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR. Curitiba, 2018.

Apresentamos neste trabalho diferentes estratégias para demonstrar os teoremas de Simson-Wallace e de Steiner-Lehmus, este último não abordado nas referências de geometria utilizadas no PROFMAT e com raras abordagens nos livros de geometria em Português. Enfatizamos nas demonstrações as propriedades dos quadriláteros inscritíveis e discorremos sobre provas diretas e provas por contradição do teorema de Steiner-Lehmus. Sugerimos também atividades investigativas para os professores de matemática do Ensino Fundamental e do Ensino Médio. Nessas atividades, exploramos a demonstração dos teoremas de Simson-Wallace e de Steiner-Lehmus empregando o GeoGebra, um software gratuito de geometria dinâmica.

Palavras-chave: Geometria Euclidiana, quadriláteros, triângulos isósceles, teoremas geométricos, GeoGebra.

ABSTRACT

LAGO, Rodrigo Cesar. **Inscribed quadrilaterals and Simson-Wallace and Steiner-Lehmus theorems.** 143 f. Dissertação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR. Curitiba, 2018.

We present in this work different strategies to demonstrate Simson-Wallace and Steiner-Lehmus theorems, the latter not approached in references of geometry used in PROFMAT and with rare approaches in geometry books in Portuguese. We emphasize in the demonstrations the properties of inscribed quadrilaterals and we discuss about direct proofs and proofs by contradiction of Steiner-Lehmus theorem. We also suggest investigative activities for mathematics teachers in Elementary and High School. In these activities, we explore the demonstration of Simson-Wallace and Steiner-Lehmus theorems using GeoGebra, a free software of dynamic geometry.

Keywords: Euclidean geometry, quadrilaterals, isosceles triangles, geometric theorems, GeoGebra.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1.1 – Quadrilátero $ABCD$ inscrito em uma circunferência (UNICAMP, 2017)	17
FIGURA 1.2 – (a) A reta de Simson-Wallace; (b) as bissetrizes congruentes de um triângulo isósceles	18
FIGURA 2.1 – Ângulo central \widehat{BCA} e o arco correspondente \widehat{AB}	23
FIGURA 2.2 – Ângulo inscrito \widehat{BDA} e o ângulo central correspondente \widehat{BCA}	23
FIGURA 2.3 – Semirreta DC e o ponto de intersecção E com a circunferência	24
FIGURA 2.4 – Ângulo de segmento \widehat{BVA} e o ângulo central correspondente \widehat{VCA}	25
FIGURA 2.5 – Ângulo excêntrico interior \widehat{DVE} e os arcos \widehat{AB} e \widehat{DE}	26
FIGURA 2.6 – Ângulo excêntrico exterior \widehat{BVA} e os arcos \widehat{AB} e \widehat{DE}	27
FIGURA 2.7 – Ângulo externo θ do triângulo ABC	28
FIGURA 2.8 – Triângulo ABC inscrito em uma circunferência	29
FIGURA 2.9 – Triângulo ABC inscrito em uma circunferência de diâmetro \overline{AD}	30
FIGURA 2.10– Quadriláteros: (a) convexo; (b) não convexo	32
FIGURA 2.11– Quadrilátero inscrito em uma circunferência	33
FIGURA 2.12– Quadrilátero $ABCD$ inscrito em uma circunferência de centro O	33
FIGURA 2.13– Ponto C interior à circunferência α	35
FIGURA 2.14– Ponto C exterior à circunferência α	35
FIGURA 2.15– Quadrilátero $ABCD$: (a) inscrito em uma circunferência; (b) não inscrito em uma circunferência	36
FIGURA 2.16– Mediatrizes dos lados do quadrilátero inscrito $ABCD$	37
FIGURA 2.17– Cláudio Ptolomeu (WIKIPÉDIA, 2017b)	38
FIGURA 2.18– Quadrilátero $ABCD$ inscrito em uma circunferência e as diagonais \overline{AC} e \overline{BD}	39
FIGURA 2.19– Brahmagupta (WIKIPÉDIA, 2017a)	40
FIGURA 2.20– Diagonais m e n de um quadrilátero $ABCD$ inscrito em uma circunferência de centro O e raio R	41
FIGURA 2.21– Diagonais m e n de um quadrilátero $ABCD$ inscrito em uma circunferência	42
FIGURA 2.22– Raio R do quadrilátero $ABCD$ inscrito na circunferência de centro O	44
FIGURA 2.23– Quadrilátero $ABCD$, de diagonal $\overline{BD} = m$ e lados a, b, c e d , inscrito em uma circunferência de centro O e raio R	47
FIGURA 2.24– Quadrilátero $ABCD$ inscrito na circunferência e o ponto médio M do arco CD	49
FIGURA 2.25– Diagonais \overline{AQ} e \overline{BP} do quadrilátero $ABQP$	50
FIGURA 2.26– Triângulos equiláteros ABD e ACE	51
FIGURA 2.27– Triângulo ABC e os ângulos $\widehat{DNM} = \alpha$ e $\widehat{EDN} = \beta$	53
FIGURA 2.28– Triângulo acutângulo ABC inscrito na circunferência de centro O	54
FIGURA 2.29– Triângulo equilátero ABC inscrito em uma circunferência	55
FIGURA 3.1 – Robert Simson (UK, 2018a)	57
FIGURA 3.2 – William Wallace (UK, 2018b)	58
FIGURA 3.3 – Triângulo pedal DEF do ponto P em relação ao triângulo ABC	59

FIGURA 3.4 – Hipóteses e tese do Teorema 3.1	60
FIGURA 3.5 – Hipóteses e tese do Teorema 3.2	62
FIGURA 3.6 – Ponto P pertencente à circunferência que circunscreve o triângulo ABC .	63
FIGURA 3.7 – Retas paralelas DE e GA	65
FIGURA 3.8 – Ângulo de segmento $F\hat{P}A$ relativo à circunferência α	66
FIGURA 3.9 – Segmento AQ paralelo à reta r de Simson-Wallace	68
FIGURA 3.10– Reta AQ paralela à reta de Simson-Wallace	69
FIGURA 3.11– (a) Ângulo formado entre as retas r e s de Simson-Wallace; (b) segmentos PD e QE perpendiculares ao lado \overline{BC} do triângulo ABC	70
FIGURA 3.12– Relação entre o ortocentro H do triângulo ABC e a reta r de Simson-Wallace	71
FIGURA 3.13– Segmento PH e a reta r de Simson-Wallace	72
FIGURA 3.14– Reta r de Simson-Wallace e a reta s de Steiner	73
FIGURA 3.15– A desigualdade de Ptolomeu	74
FIGURA 3.16– Circunferência de nove pontos	76
FIGURA 3.17– Trapézio isósceles de bases \overline{DM} e $\overline{M_1M_2}$	77
FIGURA 3.18– Triângulo AHB , ponto médio P e o triângulo APM_1	77
FIGURA 3.19– Retas r e s de Simson-Wallace e a circunferência de nove pontos λ	78
FIGURA 3.20– Circunferência de nove pontos e a intersecção das retas r e s de Simson-Wallace	79
FIGURA 3.21– Curva hipociclóide de três cúspides gerada pelo envelope das retas de Simson-Wallace	80
FIGURA 3.22– Curvas: (a) ciclóide (TEMPO, 2018); (b) epiciclóide (YOUTUBE, 2018)	81
FIGURA 3.23– Curvas hipociclóides: (a) deltóide de Steiner; (b) hipotrocóide (PLAN-TAO, s.d.)	81
FIGURA 3.24– Envelope das retas de Simson-Wallace	82
FIGURA 3.25– Triângulo qualquer ABC e o triângulo equilátero $A''B''C''$	83
FIGURA 3.26– Retângulo $EPFO$ ampliado	86
FIGURA 3.27– Circunferência geratriz ω , circunferência diretriz λ e o triângulo equilátero ABC inscrito na circunferência γ	86
FIGURA 3.28– Triângulo equilátero ABC , triângulo equilátero DEF , reta r de Simson-Wallace e a curva deltóide ϕ	87
FIGURA 4.1 – Jacob Steiner (WIKIPÉDIA, 2017c)	90
FIGURA 4.2 – Daniel C. L. Lehmus (ABEBOOKS, 2017)	90
FIGURA 4.3 – Euclides de Alexandria e seu livro “Os elementos” (GENIAIS, 2018) ..	91
FIGURA 4.4 – Triângulos isósceles: (a) retângulo; (b) acutângulo; (c) obtusângulo	92
FIGURA 4.5 – Triângulo isósceles ABC e as bissetrizes internas \overline{BE} e \overline{CD}	92
FIGURA 4.6 – Triângulo isósceles ABC	93
FIGURA 4.7 – Triângulo ABC não isósceles e as bissetrizes $\overline{CD} \equiv \overline{BE}$	94
FIGURA 4.8 – Triângulo não isósceles ABC e suas medidas	95
FIGURA 4.9 – Triângulos formados pela abertura de uma porta (GOOGLE, 2018)	97
FIGURA 4.10– Triângulos ABC e DEF e os lados $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$ e $\overline{BC} \equiv \overline{EF}$	97
FIGURA 4.11– Triângulos congruentes QBC e DEF	98
FIGURA 4.12– Triângulos BCD e BCE e o lado comum \overline{BC}	99
FIGURA 4.13– Ponto G de intersecção da bissetriz \overline{CD} com a ceviana \overline{BF}	100
FIGURA 4.14– Casos de congruência: (a) LAL ; (b) ALA ; (c) LLL ; (d) LAA_o	101
FIGURA 4.15– Critério LLA : (a) triângulo acutângulo ABC ; (b) triângulo acutângulo $A'B'C'$ congruente a ABC e o triângulo $A''B''C''$ não congruente a ABC	102

FIGURA 4.16–	Triângulo obtusângulo DEF	103
FIGURA 4.17–	Triângulo obtusângulo $D'E'F'$ congruente a DEF	103
FIGURA 4.18–	Ponto F exterior ao triângulo ABC	104
FIGURA 4.19–	Triângulos congruentes CBF e FEC	105
FIGURA 4.20–	Ângulos alternos internos determinados por $r \parallel s$ e t	109
FIGURA 4.21–	Reta u , distinta da reta r , que passa pelo ponto A	109
FIGURA 4.22–	Triângulo ABC e os ângulos internos α , β e θ	110
FIGURA 5.1 –	Interface do software GeoGebra 2D	112
FIGURA 5.2 –	Menu principal do software GeoGebra	113
FIGURA 5.3 –	Barra de ferramentas do GeoGebra	113
FIGURA 5.4 –	Entrada de comandos do GeoGebra	113
FIGURA 5.5 –	Interação entre as janelas do GeoGebra	114
FIGURA 5.6 –	Ângulos internos do quadrilátero $ABCD$	116
FIGURA 5.7 –	Quadrilátero $ABCD$ e a circunferência λ	116
FIGURA 5.8 –	Comando “RELAÇÃO ENTRE OBJETOS” na barra de ferramentas ...	117
FIGURA 5.9 –	Valores aleatórios dos ângulos β e δ no quadrilátero $ABCD$	117
FIGURA 5.10–	Ângulos suplementares β e δ do quadrilátero $ABCD$	118
FIGURA 5.11–	Exemplo de um triângulo ABC inscrito na circunferência λ	119
FIGURA 5.12–	Triângulo ABC inscrito na circunferência λ e a reta l	120
FIGURA 5.13–	A reta sw de Simson-Wallace	121
FIGURA 5.14–	Triângulo pedal EFG	122
FIGURA 5.15–	Triângulo pedal degenerado EFG	122
FIGURA 5.16–	Envelope das retas de Simson-Wallace e o deltóide de Steiner	123
FIGURA 5.17–	Reta de Simson-Wallace sw e o ponto médio I	124
FIGURA 5.18–	As retas sw e ws de Simson-Wallace	126
FIGURA 5.19–	Ângulo inscrito \widehat{DBJ} e o ângulo formado pelas retas sw e ws	126
FIGURA 5.20–	Retas suportes f e g das bissetrizes internas relativas aos ângulos da base do triângulo ABC	128
FIGURA 5.21–	Bissetrizes internas \overline{BE} e \overline{CD} do triângulo ABC	128
FIGURA 5.22–	Triângulo isósceles ABC e as bissetrizes internas \overline{BE} e \overline{CD}	129
FIGURA A.1 –	Reta s e reta orientada r	134
FIGURA A.2 –	Comprimento algébrico do segmento orientado AB	134
FIGURA A.3 –	Razão orientada positiva	135
FIGURA A.4 –	Razão orientada negativa	135
FIGURA A.5 –	Triângulo ABC e os pontos colineares D , E e F	135
FIGURA A.6 –	Feixe de retas paralelas à reta r	136
FIGURA A.7 –	Triângulo ABC e os pontos colineares D , E e F'	137
FIGURA A.8 –	Triângulo ABC e a bissetriz interna \overline{AD}	138
FIGURA A.9 –	Triângulo ABC , a bissetriz interna \overline{AD} e a reta CE	139
FIGURA A.10–	Triângulo isósceles AEC	139
FIGURA A.11–	Circunferências α e β	140
FIGURA A.12–	Circunferência de nove pontos centrada em O' e a circunferência circuns- crita ao triângulo ABC centrada em O	141
FIGURA A.13–	Segmento HX	142
FIGURA A.14–	Circunferência α , segmento HX e a circunferência β	142
FIGURA A.15–	Circunferência de nove pontos do triângulo ABC de raio R' e a circunfe- rência circunscrita a ABC de raio $\overline{OA} = R$	143

LISTA DE SÍMBOLOS

\neq	não é igual a
$>$	maior do que
$<$	menor do que
\geq	maior ou igual do que
\nlessgtr	não é maior ou igual do que
\in	pertence
\notin	não pertence
\cap	intersecta com
\equiv	congruente a
\sim	semelhante a
\parallel	paralela a
\forall	para todo ou para qualquer
\implies	condicional, implica, se...então
\iff	bicondicional, equivale, se e somente se
$ x $	módulo ou valor absoluto do número real x
\sphericalangle	região angular
$]a, b[$	intervalo aberto de extremos a e b
\overline{AB}	segmento de reta de extremos nos pontos A e B ou o comprimento do segmento AB
\widehat{AB}	arco de circunferência de extremos nos pontos A e B
\widehat{ACB}	arco de circunferência de extremos nos pontos A e B e que passa por C
\overrightarrow{AB}	semirreta de origem no ponto A e que passa pelo ponto B
\overleftrightarrow{AB}	reta que passa pelos pontos A e B
\widehat{AVB}	ângulo de vértice V e lados VA e VB
\widehat{A}	ângulo do vértice A
\widehat{rs}	ângulo entre as retas r e s
$\triangle ABC$	triângulo de vértices A , B e C
$\mathcal{A}(\triangle ABC)$	área do triângulo ABC
$\mathcal{A}(ABCD)$	área do quadrilátero $ABCD$
p	semiperímetro
$2p$	perímetro
$m : n$	razão entre os números reais m e n
$\text{sen}\widehat{A}$	seno do ângulo de vértice A
$\text{sen}(\widehat{AVB})$	seno do ângulo de vértice V e lados VA e VB
$t(A, v)$	transformação dada pelo vetor v

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	16
1.1 JUSTIFICATIVA	16
1.2 OBJETIVO	19
1.2.1 Objetivo geral	19
1.2.2 Objetivos específicos	19
1.3 METODOLOGIA E ESTRUTURA DO TRABALHO	19
2 QUADRILÁTEROS INSCRITÍVEIS	22
2.1 ÂNGULOS NA CIRCUNFERÊNCIA	22
2.1.1 Ângulo central	22
2.1.2 Ângulo inscrito	23
2.1.3 Ângulo de segmento	25
2.1.4 Ângulo excêntrico interior	26
2.1.5 Ângulo excêntrico exterior	27
2.2 TRIÂNGULOS	27
2.3 QUADRILÁTEROS	32
2.4 O TEOREMA DE PTOLOMEU	38
2.5 O TEOREMA DE BRAHMAGUPTA	40
2.6 APLICAÇÕES	48
3 O TEOREMA DE SIMSON-WALLACE	57
3.1 ROBERT SIMSON	57
3.2 WILLIAM WALLACE	58
3.3 DEMONSTRAÇÕES	58
3.3.1 Via quadrilátero inscritível	60
3.3.2 Via Teorema de Menelaus	63
3.3.3 Via paralelismo entre retas	64
3.4 PROPRIEDADES DA RETA DE SIMSON-WALLACE	67
3.4.1 Ângulo entre duas retas de Simson-Wallace	68
3.4.2 Ortocentro do triângulo inscrito	71
3.4.3 A reta de Steiner	72
3.5 APLICAÇÕES	73
3.5.1 A desigualdade de Ptolomeu	74
3.5.2 A circunferência de Feuerbach	75
3.5.3 Envelope das retas de Simson-Wallace	79
3.5.4 Demonstração do envelope das retas de Simson-Wallace.	81
4 O TEOREMA DE STEINER-LEHMUS	89
4.1 JACOB STEINER	89
4.2 DANIEL CHRISTIAN LUDOLPH LEHMUS	90
4.3 EUCLIDES E O TRIÂNGULO ISÓSCELES	91
4.4 DEMONSTRAÇÕES	93
4.4.1 Via quadrilátero inscritível	93
4.4.2 Via recursos trigonométricos	94

4.4.3	Via teorema da dobradiça	96
4.4.4	Via semelhança de triângulos	100
4.4.5	Via caso especial LLA de congruência de triângulos	101
4.5	PROVAS DIRETAS E PROVAS POR CONTRADIÇÃO	105
4.5.1	Demonstração por contradição	106
4.5.2	Demonstração direta	107
4.5.3	A prova indireta da soma dos ângulos internos de um triângulo	108
5	INVESTIGAÇÃO COM RECURSOS COMPUTACIONAIS	111
5.1	INVESTIGAÇÃO EM MATEMÁTICA	111
5.2	O SOFTWARE GEOGEBRA	112
5.3	INVESTIGAÇÃO COM O SOFTWARE GEOGEBRA	114
5.4	PRIMEIRA ATIVIDADE INVESTIGATIVA	115
5.5	SEGUNDA ATIVIDADE INVESTIGATIVA	118
5.5.1	A reta de Simson-Wallace	118
5.5.2	A reta de Simson-Wallace e o ortocentro do triângulo	123
5.5.3	O ângulo formado por duas retas de Simson-Wallace	125
5.6	TERCEIRA ATIVIDADE INVESTIGATIVA	127
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	130
	REFERÊNCIAS	131
	Apêndice A – TEOREMAS AUXILIARES	134
A.1	O TEOREMA DE MENELAUS	134
A.2	O TEOREMA DA BISSETRIZ INTERNA DE UM TRIÂNGULO	138
A.3	PROPRIEDADES DA CIRCUNFERÊNCIA DE NOVE PONTOS	140

1 INTRODUÇÃO

1.1 JUSTIFICATIVA

O ensino de geometria na Educação Básica e nos cursos de nível superior apresenta atualmente um cenário preocupante no Brasil. Ao longo dos anos, diversas pesquisas foram realizadas com o intuito de identificar e alertar para as reais causas desse abandono geométrico nos currículos de matemática, nos livros didáticos e nas salas de aula.

Em um artigo publicado no final da década de oitenta, intitulado “O abandono da geometria: uma visão histórica”, Pavanello (1989) alertava:

Embora a matemática seja, cada vez mais, imprescindível às atividades humanas, seu ensino, no entanto apresenta-se hoje como um dos principais problemas da escola, já que, muitas pessoas, mesmo aquelas bem dotadas intelectualmente, depois de estudarem essa disciplina por muitos anos, ainda encontram dificuldades nas questões que envolvem noções elementares. Quanto ao ensino de geometria, o problema se torna ainda mais grave: constata-se que ele vem gradualmente desaparecendo do currículo real das escolas (PAVANELLO, 1989).

De acordo com (PASSOS, 2000), apesar da grande importância da geometria na formação do cidadão, pesquisas realizadas no Brasil e no exterior têm mostrado que o ensino de geometria está sendo colocado em segundo plano. Ainda segundo (PASSOS, 2000), a geometria é um campo do conhecimento indispensável para a descrição e a interrelação do homem com o meio em que vive, faz parte da matemática intuitiva, concreta e ligada com a realidade, sendo fundamental na formação do estudante.

Lorenzato (1995) ainda destaca:

Sem estudar geometria as pessoas não desenvolvem o pensar geométrico ou o raciocínio visual e, sem essa habilidade, elas dificilmente conseguirão resolver as situações de vida que forem geometrizadas; também não poderão se utilizar da geometria como fator altamente facilitador para a compreensão e resolução de questões de outras áreas do conhecimento humano. Sem conhecer geometria, a leitura interpretativa do mundo torna-se incompleta, a comunicação das idéias fica reduzida e a visão da matemática torna-se distorcida (LORENZATO, 1995).

Diversas pesquisas e discussões justificam a importância e apontam as principais causas do enfraquecimento da geometria, tanto no âmbito bibliográfico como em sala de aula. Entre os pesquisadores, existe um certo consenso de que o estudo geométrico deve começar nas séries iniciais da Educação Infantil, isto é, quando a criança ingressa na escola, porém ocorrem divergências em relação aos conteúdos e aos métodos de ensino aplicados. Dentre as inúmeras razões para essas discordâncias estaria a variedade de tópicos relativos ao seu conteúdo e sua peculiar complexidade, sendo, portanto, difícil definir um caminho linear, desde os fundamentos elementares até as abstrações e axiomas (PASSOS, 2000).

De acordo com (VIEIRA, 2013), o ensino tradicional de geometria promove lacunas no conhecimento, pois se manifesta basicamente apenas em aulas expositivas, fórmulas e conceitos prontos e determinados. Além disso, recentes pesquisas, como as realizadas por (GRILLO, 2014), demonstram que existe uma tendência na Educação Básica de omitir determinados conteúdos de geometria ou deixá-los para o final do período letivo. Outros pesquisadores, tais como (LORENZATO, 1995), (PAVANELLO, 1989) e (PEREZ, 1991), apontam que essa realidade do ensino de geometria é um problema antigo no Brasil e que ainda não foi superado.

Entre os inúmeros conteúdos de geometria presentes no currículo de matemática da Educação Básica, destacamos a inscrição de um quadrilátero convexo em uma circunferência, ilustrada na Figura 1.1. A condição de inscrição na circunferência apresentada por determinados quadriláteros convexos, denominados cíclicos ou inscritíveis, possui uma enorme quantidade de aplicações, que vão desde a solução de exercícios simples até a demonstração de teoremas engenhosos.

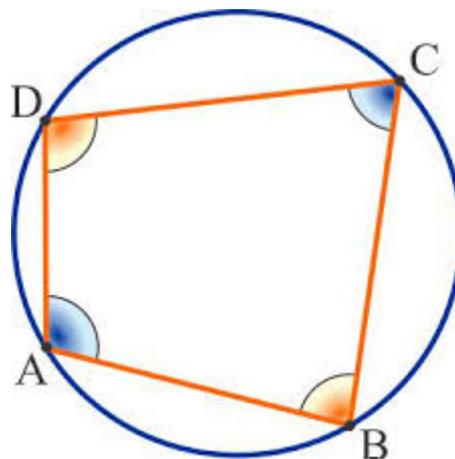


Figura 1.1: Quadrilátero $ABCD$ inscrito em uma circunferência (UNICAMP, 2017)

Além do tratamento inexpressivo dado aos quadriláteros inscritíveis, principalmente na Educação Básica, uma outra realidade educacional presente no ensino de geometria é a exclusão

de determinados teoremas nos livros didáticos de matemática e nos livros de geometria. Mesmo quando presentes, teoremas geométricos são meramente apresentados aos estudantes, sem uma motivação adequada que permita explorar a parte axiomática e as aplicações.

Dentre os teoremas excluídos da maioria dos livros de geometria, optamos por resgatar dois resultados interessantíssimos, com demonstração pautada na condição de inscrição de quadriláteros convexos na circunferência. São eles: o teorema de Simson-Wallace, habitualmente conhecido como a reta de Simson, e o teorema de Steiner-Lehmus, este com pouquíssimas referências em livros, revistas ou sites em Português, omitido inclusive na referência básica da disciplina Geometria I do PROFMAT. A Figura 1.2 ilustra as premissas desses dois teoremas.

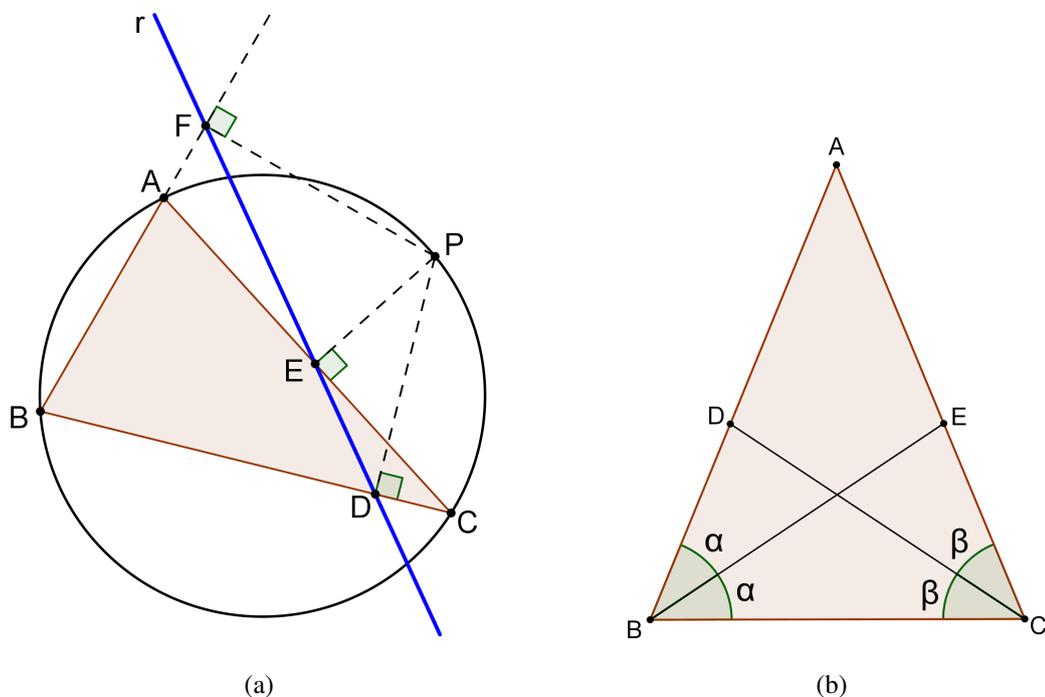


Figura 1.2: (a) A reta de Simson-Wallace; (b) as bissetrizes congruentes de um triângulo isósceles

Desta forma, demonstramos neste trabalho teoremas, lemas e propriedades, de forma direta e indireta, possibilitando assim, segundo (RODRIGUES, 2008), a compreensão da natureza da matemática, ciência cujas teorias são comprovadas não pela experimentação, mas sim pela demonstração.

Diante dos questionamentos anteriormente expostos sobre o ensino de geometria, a escolha do tema “quadriláteros inscritíveis e os teoremas de Simson-Wallace e de Steiner-Lehmus” contribui de maneira significativa à produção em geometria, preenchendo algumas das lacunas existentes no cenário nacional carente de produções geométricas.

1.2 OBJETIVO

1.2.1 OBJETIVO GERAL

Estudar as condições de inscrição de um quadrilátero convexo em uma circunferência e aplicá-las na demonstração dos teoremas de Simson-Wallace e de Steiner-Lehmus.

1.2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1. Demonstrar as condições de inscrição de um quadrilátero convexo em uma circunferência.
2. Demonstrar os teoremas de Ptolomeu e de Brahmagupta, evidenciando as propriedades dos quadriláteros inscritíveis.
3. Exemplificar o estudo de quadriláteros inscritíveis com questões da disciplina Geometria I (MA13) do PROFMAT (MATEMÁTICA, 2010).
4. Demonstrar de diferentes maneiras o teorema de Simson-Wallace, destacando as propriedades da reta de Simson-Wallace e suas aplicações.
5. Demonstrar de diferentes maneiras o teorema de Steiner-Lehmus.
6. Estabelecer para o teorema de Steiner-Lehmus um comparativo entre provas diretas e provas indiretas por contradição.
7. Propor uma sequência didática de construção e investigação da condição de inscrição de quadriláteros convexos na circunferência e dos teoremas de Simson-Wallace e de Steiner-Lehmus, empregando nas atividades o GeoGebra.

1.3 METODOLOGIA E ESTRUTURA DO TRABALHO

Inicialmente, realizamos uma pesquisa bibliográfica em livros de geometria, dissertações de mestrado e teses de doutorado, artigos acadêmicos, sites especializados em geometria e revistas. Na pesquisa, constatamos que há pouquíssimas referências em Português que abordam quadriláteros inscritíveis e os teoremas de Simson-Wallace e de Steiner-Lehmus, o que nos motivou a estudar o tema.

Uma vez definido o tema, tínhamos que definir também o aplicativo gráfico a ser empregado na construção das figuras. Optamos pelo GeoGebra, por este ser um aplicativo/software

gratuito. Assim, todas as figuras que ilustram as demonstrações de lemas e teoremas, bem como definições e postulados, foram construídas com o software de geometria dinâmica GeoGebra.

O presente trabalho está dividido em seis capítulos, estruturados e desenvolvidos de maneira sequencial para que o leitor compreenda gradualmente os objetivos propostos. Neste primeiro capítulo, apresentamos a justificativa para a escolha do tema, os objetivos, a metodologia e a estrutura do trabalho.

No segundo capítulo, abordamos os quadriláteros inscritíveis e uma série de definições e teoremas fundamentais para o perfeito entendimento do principal teorema do capítulo, que estabelece a condição de inscrição de um quadrilátero convexo em uma circunferência. Em seguida, demonstramos dois teoremas clássicos da geometria creditados a Ptolomeu e a Brahmagupta. Na parte final do capítulo, resolvemos cinco questões sobre quadriláteros inscritíveis. Essas questões foram selecionadas do banco nacional de questões da disciplina Geometria I (MA13) do PROFMAT (MATEMÁTICA, 2010).

Iniciamos o terceiro capítulo com um breve contexto histórico de Robert Simson e William Wallace, protagonistas do teorema que leva os seus nomes. Na sequência, definimos um triângulo pedal, conceito este fundamental para o entendimento da primeira demonstração do teorema de Simson-Wallace. Posteriormente, apresentamos o recíproco do teorema de Simson-Wallace e mais duas demonstrações que utilizam o teorema de Menelaus e o paralelismo entre duas retas. Em seguida, demonstramos o teorema que estabelece o ângulo entre duas retas de Simson-Wallace, o teorema que mostra a relação existente entre o ortocentro de um triângulo e a reta de Simson-Wallace e o teorema que estabelece a existência da reta paralela à reta de Simson-Wallace, denominada reta de Steiner. Finalizamos o capítulo mencionando três aplicações do teorema de Simson-Wallace: a desigualdade de Ptolomeu, a circunferência de nove pontos e o deltóide de Steiner.

O quarto capítulo é inteiramente dedicado ao teorema de Steiner-Lehmus. Iniciamos expondo um breve histórico de Jacob Steiner e de Daniel Christian Ludolph Lehmus. Em seguida, demonstramos o recíproco do teorema de Steiner-Lehmus e comentamos uma anotação histórica do acontecimento. Continuando, apresentando cinco demonstrações do teorema de Steiner-Lehmus: via quadriláteros inscritíveis; via recursos trigonométricos; via teorema da dobradiça; via semelhança de triângulos; via caso especial de congruência de triângulos. Encerramos o capítulo discorrendo sobre demonstrações diretas e indiretas.

No quinto capítulo, propomos uma sequência didática de construção e investigação com o software GeoGebra. Começamos com uma explanação sobre o que é investigação em matemática e, em seguida, apresentamos o software Geogebra. Finalizamos descrevendo três

atividades investigativas com o Geogebra: a primeira abordando quadriláteros inscritíveis; a segunda, o teorema de Simson-Wallace; a terceira, o teorema de Steiner-Lehmus e seu recíproco.

No sexto capítulo, apresentamos as considerações finais sobre a realização deste trabalho. No apêndice, demonstramos teoremas e propriedades relevantes às demonstrações presentes nos capítulos três e quatro.

2 QUADRILÁTEROS INSCRITÍVEIS

Neste capítulo, abordamos os quadriláteros inscritíveis, também conhecidos como cíclicos. De maneira geral, apenas triângulos e polígonos regulares possuem a propriedade de serem inscritíveis em uma circunferência. A inscrição de um quadrilátero em uma circunferência, segundo (GARBI, 2010), acarreta grandes restrições sobre as medidas métricas e angulares do polígono.

Iniciamos o capítulo discutindo algumas definições e teoremas sobre ângulos na circunferência e triângulos. Em seguida, apresentamos dois importantes teoremas sobre quadriláteros inscritíveis e um teorema proposto como exercício em (NETO, 2013). Ainda, apresentamos dois teoremas clássicos sobre propriedades de um quadrilátero inscritível: o teorema de Ptolomeu e o teorema de Brahmagupta, este último pouco explorado nos livros de geometria. Finalizamos o capítulo analisando cinco questões sobre quadriláteros inscritíveis, retiradas do banco de provas nacionais da disciplina Geometria I (MA13) do PROFMAT (MATEMÁTICA, 2010).

2.1 ÂNGULOS NA CIRCUNFERÊNCIA

Quando definimos um ângulo em uma circunferência, temos quatro possíveis situações a considerar: o vértice do ângulo está no centro da circunferência; o vértice está no interior ou no exterior da circunferência; o vértice está na própria circunferência. Nesta seção, demonstramos apenas os resultados pertinentes às demais seções e capítulos.

2.1.1 ÂNGULO CENTRAL

Definição 2.1. *Denomina-se ângulo central todo ângulo cujo vértice é o centro de uma circunferência e cujos lados intersectam a circunferência.*

Segundo (DOLCE; POMPEO, 2005), considerando como unidade de arco (arco unitário) o arco definido na circunferência por um ângulo central unitário, temos que a medida de

um arco \widehat{AB} da circunferência de centro C é igual à medida do ângulo central \widehat{BCA} correspondente, ou seja, $\widehat{BCA} = \widehat{AB}$. A Figura 2.1 ilustra um ângulo central e o arco da circunferência correspondente.

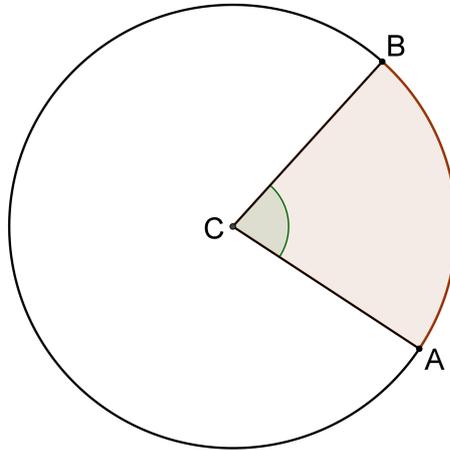


Figura 2.1: Ângulo central \widehat{BCA} e o arco correspondente \widehat{AB}

2.1.2 ÂNGULO INSCRITO

Definição 2.2. Denomina-se *ângulo inscrito* todo ângulo cujo vértice está sobre uma circunferência e cujos lados intersectam a circunferência.

A Figura 2.2 mostra um ângulo inscrito e o ângulo central correspondente.

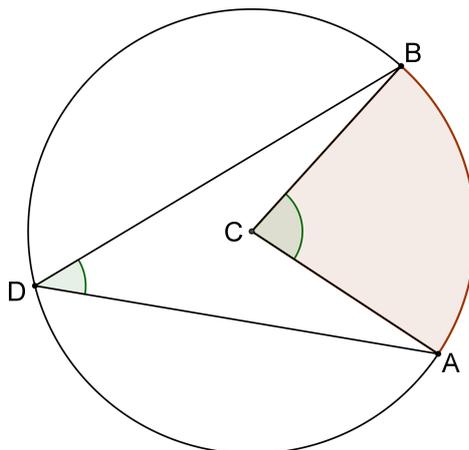


Figura 2.2: Ângulo inscrito \widehat{BDA} e o ângulo central correspondente \widehat{BCA}

Teorema 2.1. Se um ângulo está inscrito em uma circunferência, então sua medida é congruente à metade da medida do ângulo central correspondente ao arco determinado pelos pontos da circunferência pelos quais passam os lados do ângulo inscrito.

Demonstração.

Sejam: a circunferência de centro C , raio R , ângulo inscrito \widehat{BDA} e ângulo central correspondente \widehat{BCA} ; a semirreta DC e o ponto E , intersecção de \overrightarrow{DC} com a circunferência, conforme mostra a Figura 2.3. Queremos mostrar que $\widehat{BDA} = \frac{\widehat{BCA}}{2}$.

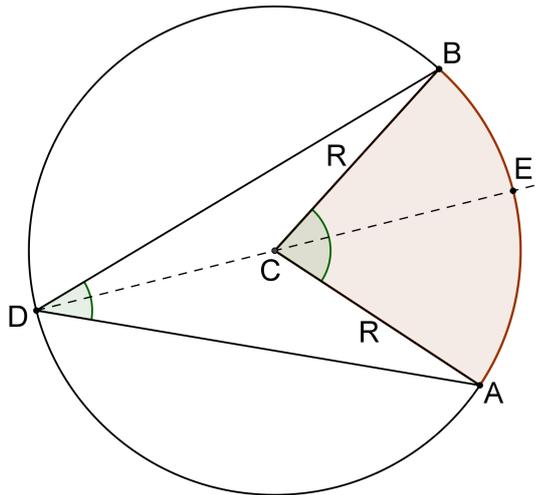


Figura 2.3: Semirreta DC e o ponto de intersecção E com a circunferência

No triângulo ACD , \widehat{ACE} é um ângulo externo e, pelo Teorema 2.5, $\widehat{ACE} = \widehat{CDA} + \widehat{CAD}$. Como o triângulo ACD é isósceles, visto que $\overline{CD} \equiv \overline{AC} = R$, então $\widehat{CDA} = \widehat{CAD}$ e, portanto:

$$\widehat{ACE} = 2 \cdot \widehat{CDA}. \quad (2.1)$$

Ainda, temos que \widehat{BCE} é um ângulo externo do triângulo BCD . Novamente, pelo Teorema 2.5, $\widehat{BCE} = \widehat{BDC} + \widehat{CBD}$. Como o triângulo BCD é isósceles, uma vez que $\overline{DC} \equiv \overline{BC} = R$, então $\widehat{BDC} = \widehat{CBD}$ e, conseqüentemente:

$$\widehat{BCE} = 2 \cdot \widehat{BDC}. \quad (2.2)$$

Somando as igualdades (2.1) e (2.2), concluímos que:

$$\begin{aligned} \widehat{ACE} + \widehat{BCE} &= 2 \cdot \widehat{CDA} + 2 \cdot \widehat{BDC}; \\ \widehat{BCA} &= 2 \cdot (\widehat{CDA} + \widehat{BDC}); \\ \widehat{BCA} &= 2 \cdot \widehat{BDA}; \\ \widehat{BDA} &= \frac{\widehat{BCA}}{2}. \end{aligned}$$

□

2.1.3 ÂNGULO DE SEGMENTO

Definição 2.3. Denomina-se *ângulo de segmento*, ou *ângulo semi-inscrito*, todo ângulo cujo vértice está sobre uma circunferência e cujas retas suportes dos lados são, uma tangente à circunferência, e a outra secante à circunferência.

A Figura 2.4 ilustra um ângulo semi-inscrito e o ângulo central correspondente.

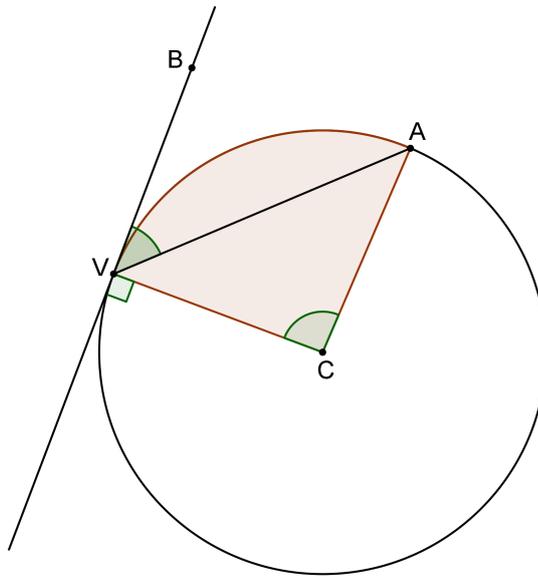


Figura 2.4: Ângulo de segmento \widehat{BVA} e o ângulo central correspondente \widehat{VCA}

Teorema 2.2. Se um ângulo é semi-inscrito em uma circunferência, então sua medida equivale à metade da medida do ângulo central correspondente.

Demonstração.

Sejam \widehat{BVA} um ângulo semi-inscrito em uma circunferência de centro C e raio R e \widehat{VCA} o ângulo central correspondente, ambos representados na Figura 2.4. Temos que provar que $\widehat{BVA} = \frac{\widehat{VCA}}{2}$.

Como $\overline{CV} \equiv \overline{CA} = R$, temos que o triângulo ACV é isósceles de base \overline{AV} . Assim:

$$\widehat{CVA} = \widehat{CAV}. \quad (2.3)$$

Em torno do ponto V , determinamos as seguintes relações angulares:

$$\begin{aligned} \widehat{BVA} + \widehat{CVA} + 90^\circ &= 180^\circ; \\ \widehat{CVA} &= 90^\circ - \widehat{BVA}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Por outro lado, a soma dos ângulos internos do triângulo ACV é 180° . Logo:

$$\widehat{VCA} + \widehat{CVA} + \widehat{CAV} = 180^\circ. \quad (2.5)$$

Substituindo (2.3) e (2.4) em (2.5), concluímos que:

$$\begin{aligned} \widehat{VCA} + 90^\circ - \widehat{BVA} + \widehat{CVA} &= 180^\circ; \\ \widehat{VCA} + 90^\circ - \widehat{BVA} + 90^\circ - \widehat{BVA} &= 180^\circ; \\ \widehat{BVA} &= \frac{\widehat{VCA}}{2}. \end{aligned}$$

□

2.1.4 ÂNGULO EXCÊNTRICO INTERIOR

Definição 2.4. Denomina-se *ângulo excêntrico interior*, ou *ângulo ex-inscrito interno*, todo ângulo cujo vértice está no interior de uma circunferência e cujas retas suportes dos lados intersectam a circunferência, cada uma em dois pontos distintos.

Na Figura 2.5, indicamos um ângulo excêntrico interior e destacamos os arcos da circunferência subentendidos por ele.

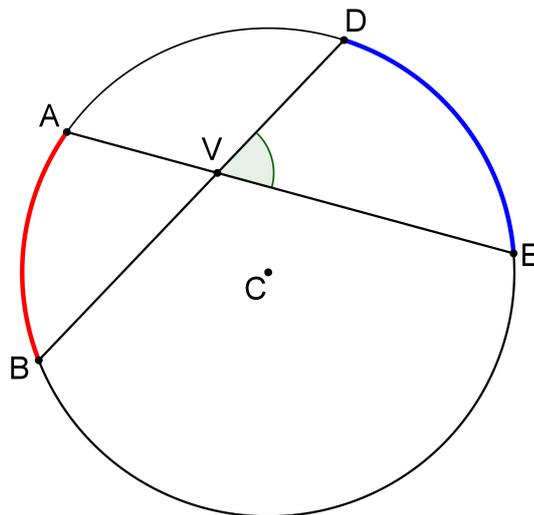


Figura 2.5: Ângulo excêntrico interior \widehat{DVE} e os arcos \widehat{AB} e \widehat{DE}

Teorema 2.3. A medida do ângulo excêntrico interior é igual à média aritmética dos arcos da circunferência subentendidos por ele.

De acordo com o Teorema 2.3¹, temos na Figura 2.5 que $D\widehat{V}E = \frac{\widehat{DE} + \widehat{AB}}{2}$.

2.1.5 ÂNGULO EXCÊNTRICO EXTERIOR

Definição 2.5. Denomina-se *ângulo excêntrico exterior*, ou *ângulo ex-inscrito externo*, todo ângulo cujo vértice está no exterior de uma circunferência e cujos lados intersectam a circunferência, cada um em dois pontos distintos.

A Figura 2.6 ilustra um ângulo excêntrico exterior e os arcos da circunferência subentendidos por ele.

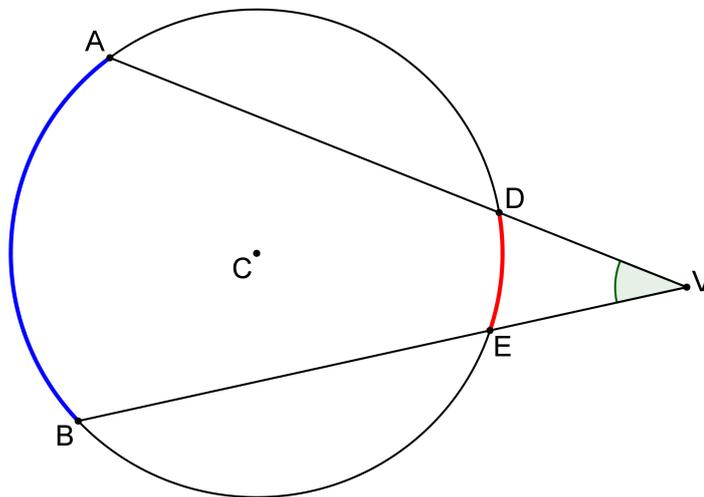


Figura 2.6: Ângulo excêntrico exterior $B\widehat{V}A$ e os arcos \widehat{AB} e \widehat{DE}

Teorema 2.4. A medida do ângulo excêntrico exterior é igual à metade do módulo da diferença entre os arcos da circunferência subentendidos por ele.

Segundo o Teorema 2.4², temos na Figura 2.6 que $B\widehat{V}A = \frac{|\widehat{AB} - \widehat{DE}|}{2}$.

2.2 TRIÂNGULOS

Nesta seção, apresentamos três teoremas relacionados a triângulos: o teorema do ângulo externo, a inscrição de triângulos na circunferência e a lei dos senos.

¹A demonstração do teorema pode ser encontrada em (DOLCE; POMPEO, 2005).

²A demonstração do teorema pode ser encontrada em (DOLCE; POMPEO, 2005).

Teorema 2.5 (Ângulo externo). *Em todo triângulo, a medida de um ângulo externo é igual à soma das medidas dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.*

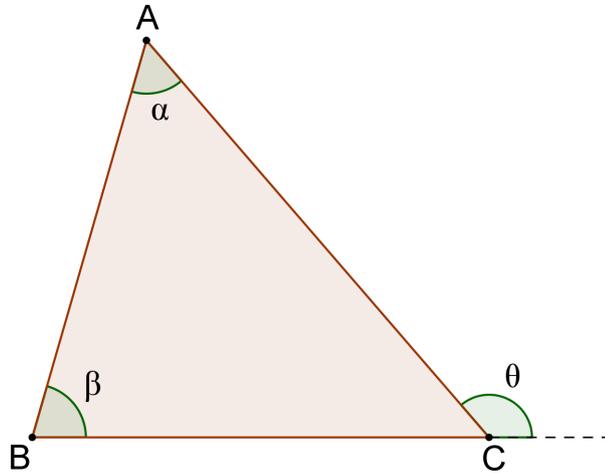


Figura 2.7: Ângulo externo θ do triângulo ABC

Demonstração.

Seja o triângulo ABC , onde θ é um ângulo externo e $\widehat{BAC} = \alpha$ e $\widehat{ABC} = \beta$ são os ângulos internos de ABC não adjacentes a θ , como mostra a Figura 2.7.

O ângulo \widehat{BCA} é o suplemento de θ , isto é,

$$\widehat{BCA} = 180^\circ - \theta. \quad (2.6)$$

Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° , temos no triângulo ABC que:

$$\alpha + \beta + \widehat{BCA} = 180^\circ. \quad (2.7)$$

Substituindo (2.6) em (2.7), concluímos que:

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + 180^\circ - \theta &= 180^\circ; \\ \theta &= \alpha + \beta. \end{aligned}$$

□

Teorema 2.6. *Todo triângulo é inscritível em uma circunferência.*

Demonstração.

Sejam um triângulo ABC qualquer, a reta r perpendicular ao lado \overline{BC} de ABC no ponto

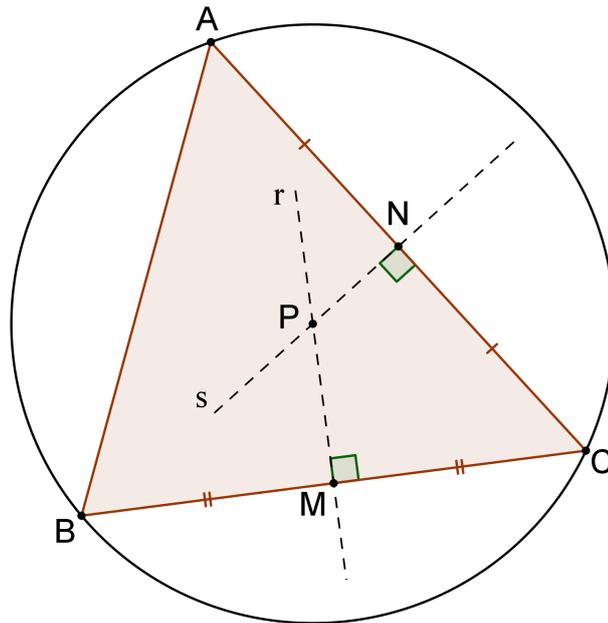


Figura 2.8: Triângulo ABC inscrito em uma circunferência

médio M de \overline{BC} , a reta s perpendicular ao lado \overline{AC} de ABC no ponto médio N de \overline{AC} , e P o ponto de intersecção de r e s , conforme ilustrado na Figura 2.8.

Como r e s são respectivamente as mediatrizes dos segmentos BC e AC , então todo ponto que pertence a essas retas é equidistante, respectivamente, de B e C ou de A e C . Sendo o ponto P comum a ambas as retas, então P equidista de A , B e C , ou seja, $\overline{PA} \equiv \overline{PB} \equiv \overline{PC}$. Portanto, P é o centro da circunferência que passa por A , B e C .

□

O Teorema 2.6 pode ser enunciado, de maneira equivalente, como o Teorema 2.7.

Teorema 2.7. *Três pontos não colineares determinam uma única circunferência.*

Teorema 2.8 (Lei dos senos). *Se R é o raio da circunferência circunscrita a um triângulo ABC de lados $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$, $\overline{AB} = c$ e ângulos internos \widehat{A} , \widehat{B} e \widehat{C} , então:*

$$\frac{a}{\widehat{\text{sen}}\widehat{A}} = \frac{b}{\widehat{\text{sen}}\widehat{B}} = \frac{c}{\widehat{\text{sen}}\widehat{C}} = 2R.$$

Demonstração.

Sejam \overline{AD} e \overline{BD} duas cordas da circunferência circunscrita ao triângulo ABC , sendo que a corda \overline{AD} passa pelo centro da circunferência, isto é, \overline{AD} é um diâmetro da circunferência, conforme ilustra a Figura 2.9. Assim, segundo o Teorema 2.1, $\widehat{ABD} = 90^\circ$.

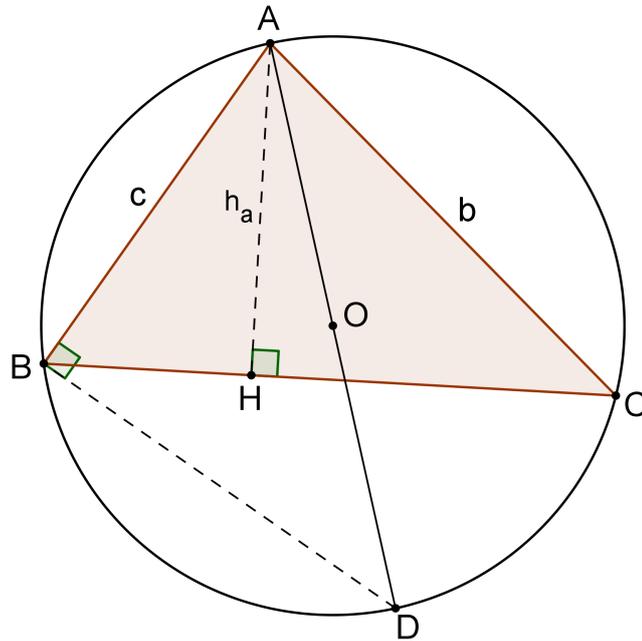


Figura 2.9: Triângulo ABC inscrito em uma circunferência de diâmetro \overline{AD}

Consideremos $\overline{AH} = h_a$ como sendo a altura de ABC relativa ao lado \overline{BC} . Dessa forma, os triângulos AHC e ABD são retângulos e, como pelo Teorema 2.1 os ângulos inscritos \widehat{ADB} e \widehat{ACB} são congruentes, os triângulo AHC e ABD são semelhantes pelo caso AA (ângulo-ângulo). Disto decorre que:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{AH}}{\overline{AC}} &= \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}}; \\ \frac{h_a}{b} &= \frac{c}{2R}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

No triângulo retângulo AHC temos que:

$$\operatorname{sen}\widehat{C} = \frac{h_a}{b}. \quad (2.9)$$

Substituindo (2.9) em (2.8), obtemos:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\widehat{C} &= \frac{\overline{AH}}{\overline{AC}} = \frac{c}{2R}; \\ \frac{c}{\operatorname{sen}\widehat{C}} &= 2R. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Analogamente, considerando as alturas h_b e h_c relativas, respectivamente, aos lados \overline{AC} e \overline{AB} de ABC , demonstramos que:

$$\frac{b}{\widehat{\text{sen}B}} = 2R; \quad (2.11)$$

$$\frac{a}{\widehat{\text{sen}A}} = 2R. \quad (2.12)$$

Comparando (2.10), (2.11) e (2.12), concluímos que:

$$\frac{a}{\widehat{\text{sen}A}} = \frac{b}{\widehat{\text{sen}B}} = \frac{c}{\widehat{\text{sen}C}} = 2R.$$

□

Corolário 2.1. *Se R é o raio da circunferência circunscrita a um triângulo ABC de lados $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$, então:*

$$\mathcal{A}(\Delta ABC) = \frac{abc}{4R},$$

onde $\mathcal{A}(\Delta ABC)$ representa a área do triângulo ABC .

Demonstração.

Na Figura 2.9, os triângulos retângulos AHC e ABD são semelhantes pelo caso AA (ângulo-ângulo). Disto resulta que:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{AH}}{\overline{AB}} &= \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}}; \\ \frac{h_a}{c} &= \frac{b}{2R}; \\ h_a &= \frac{bc}{2R}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

A área $\mathcal{A}(\Delta ABC)$ do triângulo ABC é dada por:

$$\mathcal{A}(\Delta ABC) = \frac{1}{2}\overline{BC} \cdot \overline{AH} = \frac{1}{2}a \cdot h_a. \quad (2.14)$$

Substituindo (2.13) em (2.14), concluímos que:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\Delta ABC) &= \frac{1}{2}a \frac{bc}{2R}; \\ \mathcal{A}(\Delta ABC) &= \frac{abc}{4R}. \end{aligned}$$

□

2.3 QUADRILÁTEROS

Nesta seção, apresentamos as condições que permitem inscrever um quadrilátero convexo em uma circunferência. Essas propriedades, inerentes a somente alguns quadriláteros, têm uma grande quantidade de aplicações, seja na solução de problemas ou na demonstração de teoremas. Empregaremos essas propriedades nos capítulos três e quatro para demonstrar os teoremas de Simson-Wallace e de Steiner-Lehmus.

Segundo (DOLCE; POMPEO, 2005), um quadrilátero é a reunião de quatro segmentos de reta determinados por quatro pontos distintos, coplanares e não colineares três a três, de tal maneira que os segmentos se intersectam somente nas extremidades. Se a reta suporte de qualquer um dos lados de um quadrilátero deixa os demais lados em um mesmo semiplano, o quadrilátero é denominado convexo; caso contrário, é denominado não convexo.

A Figura 2.10 ilustra quadriláteros convexos e não convexos.

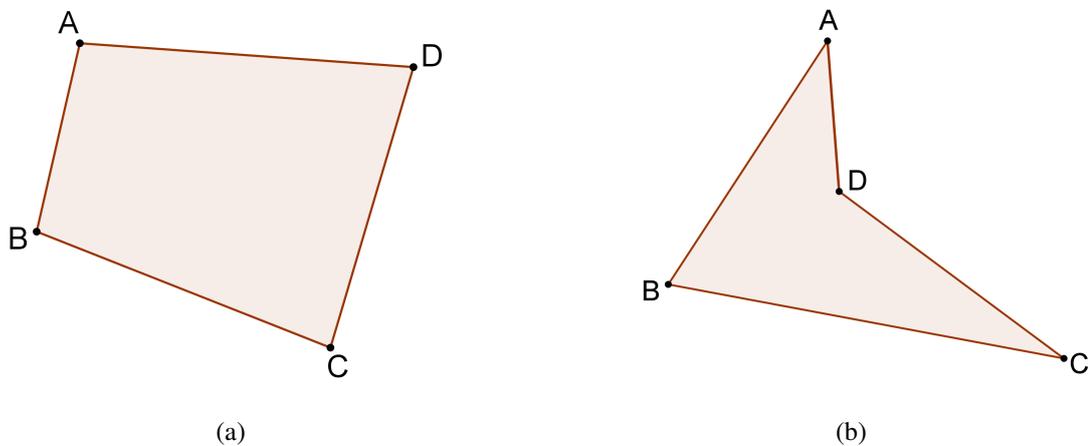


Figura 2.10: Quadriláteros: (a) convexo; (b) não convexo

Definição 2.6. *Um quadrilátero é inscritível quando todos os seus vértices pertencem a uma única circunferência.*

A Figura 2.11 ilustra um quadrilátero inscrito em uma circunferência.

Teorema 2.9. *Um quadrilátero é inscritível em uma circunferência se, e somente se, possui um par de ângulos opostos suplementares.*

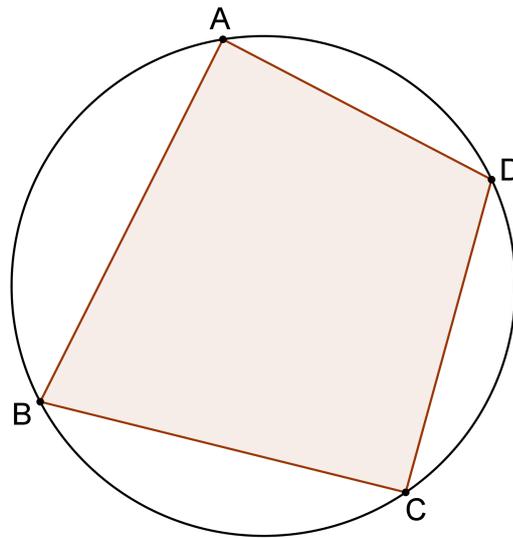


Figura 2.11: Quadrilátero inscrito em uma circunferência

Demonstração.

Seja $ABCD$ um quadrilátero. Suponhamos inicialmente que $ABCD$ é inscritível na circunferência de centro O e, conseqüentemente, \widehat{BAD} e \widehat{BCD} estão inscritos na mesma circunferência, como ilustra a Figura 2.12. Sejam ainda \widehat{BOD}_1 e \widehat{BOD}_2 os ângulos correspondentes, respectivamente, aos arcos \widehat{BAD} e \widehat{BCD} determinados pelos pontos B e D .

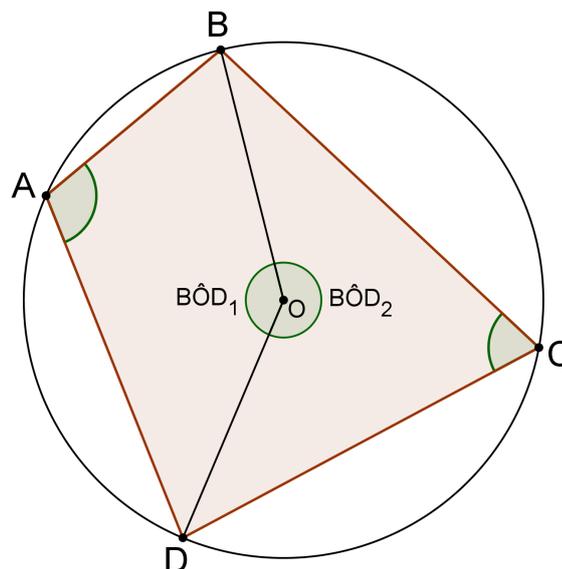


Figura 2.12: Quadrilátero $ABCD$ inscrito em uma circunferência de centro O

Por definição, temos que a medida angular de um arco da circunferência é congruente ao ângulo central correspondente. Logo,

$$\widehat{BAD} \equiv \widehat{BOD}_1 \quad (2.15)$$

e, pelo Teorema 2.1,

$$\widehat{BOD}_1 = 2 \cdot \widehat{BCD}. \quad (2.16)$$

Analogamente, temos que:

$$\widehat{BCD} \equiv \widehat{BOD}_2; \quad (2.17)$$

$$\widehat{BOD}_2 = 2 \cdot \widehat{BAD}. \quad (2.18)$$

Ainda, como a união dos arcos \widehat{BAD} e \widehat{BCD} é a circunferência de centro O , ou seja,

$$\widehat{BAD} + \widehat{BCD} = 360^\circ, \quad (2.19)$$

constatamos, substituindo (2.15) e (2.17) em (2.19), que:

$$\widehat{BOD}_1 + \widehat{BOD}_2 = 360^\circ. \quad (2.20)$$

Finalmente, substituindo (2.16) e (2.18) em (2.20), concluímos que:

$$2 \cdot \widehat{BCD} + 2 \cdot \widehat{BAD} = 360^\circ;$$

$$\widehat{BAD} + \widehat{BCD} = 180^\circ.$$

A recíproca também é verdadeira. Sejam: $ABCD$ um quadrilátero; \widehat{BAD} e \widehat{BCD} ângulos opostos suplementares, isto é, $\widehat{BAD} + \widehat{BCD} = 180^\circ$; α a circunferência circunscrita ao triângulo BAD . Se $C \notin \alpha$, temos duas condições a considerar.

1. C pertence ao interior de α

Seja $\overrightarrow{DC} \cap \alpha = \{E\}$. Assim, $ABED$ está inscrito em α , conforme mostra a Figura 2.13, e isto implica que $\widehat{BAD} + \widehat{BED} = 180^\circ$. Por hipótese, temos que $\widehat{BAD} + \widehat{BCD} = 180^\circ$. Logo, concluímos que $\widehat{BAD} + \widehat{BCD} = \widehat{BAD} + \widehat{BED}$ e, portanto, $\widehat{BCD} \equiv \widehat{BED}$, o que é um absurdo pois E e C são distintos. Logo, o ponto C não é interior à circunferência α .

2. C pertence ao exterior de α

O quadrilátero $ABCD$ tem um par de ângulos opostos \widehat{BAD} e \widehat{BCD} suplementares, isto é, $\widehat{BAD} + \widehat{BCD} = 180^\circ$. Consequentemente, $\widehat{CBA} + \widehat{CDA} = 180^\circ$. Seja \overline{AC} uma diagonal

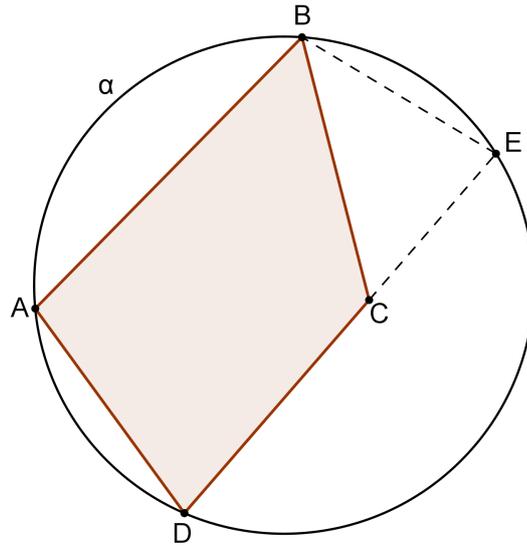


Figura 2.13: Ponto C interior à circunferência α

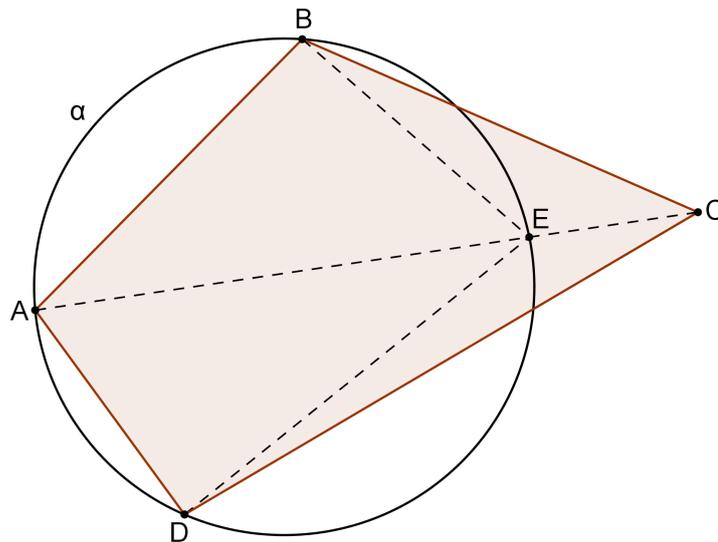


Figura 2.14: Ponto C exterior à circunferência α

de $ABCD$ tal que $\overline{AC} \cap \alpha = \{E\}$, conforme mostra a Figura 2.14. Como o quadrilátero $ABED$ está inscrito na circunferência α , seus ângulos opostos são suplementares. Assim, $\widehat{BAD} + \widehat{BED} = 180^\circ$. Por hipótese, sabemos que $\widehat{BAD} + \widehat{BCD} = 180^\circ$. Dessa forma, $\widehat{BED} \equiv \widehat{BCD}$. Pelo Teorema 2.5, temos que $\widehat{BEA} > \widehat{BCE} \equiv \widehat{BCA}$ e $\widehat{AED} > \widehat{ECD} \equiv \widehat{ACD}$. Concluimos então que $\widehat{BEA} + \widehat{AED} > \widehat{BCA} + \widehat{ACD}$ e isto implica em $\widehat{BED} > \widehat{BCD}$, o que é um absurdo visto que $\widehat{BED} \equiv \widehat{BCD}$. Logo, o ponto C não é exterior à circunferência α . Concluimos a partir de (1) e (2) que o ponto C pertence à circunferência α , ou seja, o quadrilátero $ABCD$ é inscritível.

Teorema 2.10. *Um quadrilátero é inscrito se, e somente se, o ângulo formado entre um lado e uma diagonal é congruente ao ângulo entre o lado oposto e a outra diagonal.*

Demonstração.

Seja o quadrilátero $ABCD$, inscrito em uma circunferência, como indicado na Figura 2.15(a). Assim, pelo Teorema 2.1, $\widehat{BAC} \equiv \widehat{BDC} = \frac{\widehat{CB}}{2}$.

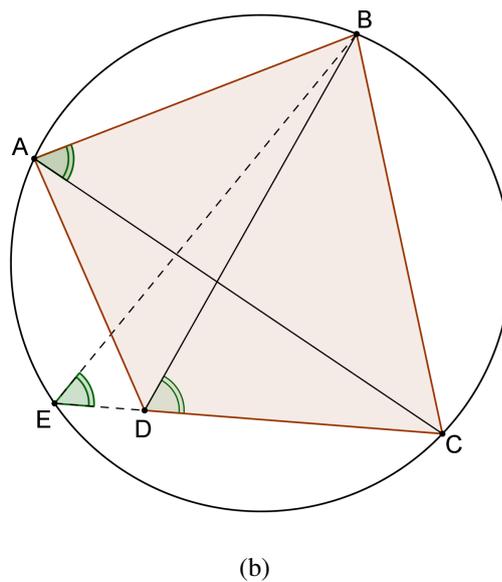
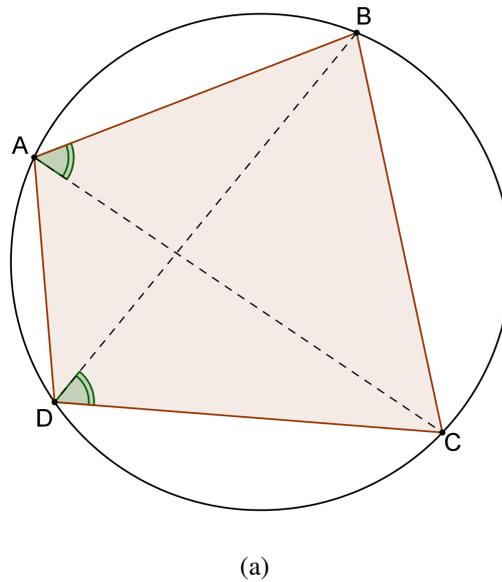


Figura 2.15: Quadrilátero $ABCD$: (a) inscrito em uma circunferência; (b) não inscrito em uma circunferência

A recíproca também é verdadeira. Consideremos um quadrilátero $ABCD$ não inscri-

vel, tal que o ponto D não pertence à circunferência e $\widehat{BAC} \equiv \widehat{BDC}$. Seja E o ponto de intersecção do prolongamento do segmento CD com a circunferência circunscrita ao triângulo ABC , conforme ilustrado na Figura 2.15(b). Desta forma, o quadrilátero $ABCE$ está inscrito e, como provado anteriormente, temos $\widehat{BAC} \equiv \widehat{BEC}$, o que implica em $\widehat{BDC} \equiv \widehat{BEC}$, o que é um absurdo, porque contraria o Teorema 2.5, pelo qual $\widehat{BDC} = \widehat{BEC} + \widehat{DBE}$. Logo, o ponto D pertence à circunferência e conseqüentemente o quadrilátero $ABCD$ está inscrito.

□

Teorema 2.11. *Um quadrilátero é inscritível se, e somente se, as mediatrizes de seus lados se intersectam no circuncentro³ do quadrilátero.*

Demonstração.

Sejam: o quadrilátero $ABCD$, inscrito em uma circunferência de raio R ; r, s, t e u as mediatrizes dos lados \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} e \overline{AD} respectivamente; O o ponto de intersecção das mediatrizes r e s , como ilustra a Figura 2.16.

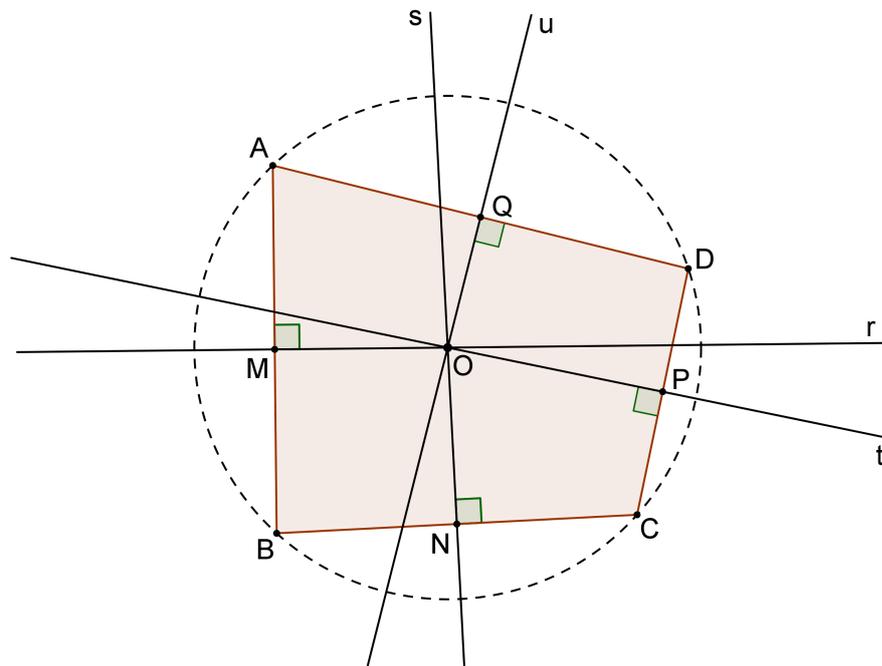


Figura 2.16: Mediatrizes dos lados do quadrilátero inscrito $ABCD$

Como a mediatriz de um segmento é o lugar geométrico dos pontos do plano que equidistam dos extremos do segmento, temos em relação à r que $\overline{OA} \equiv \overline{OB}$, e em relação à s que $\overline{OB} \equiv \overline{OC}$. Por transitividade, $\overline{OA} \equiv \overline{OC}$, ou seja, O é o centro da circunferência que passa por A, B e C . O Teorema 2.7 garante que a circunferência que passa por A, B, C é

³Ponto que equidista dos vértices de um polígono convexo inscritível em uma circunferência.

única, portanto o ponto D pertence à circunferência que circunscreve o triângulo ABC , pelo fato do quadrilátero $ABCD$ ser inscrito. Disto decorre que $\overline{OC} \equiv \overline{OD}$, isto é, O é um ponto da mediatriz t do segmento \overline{CD} . Por outro lado, $\overline{OA} \equiv \overline{OD}$ e isto implica que O pertence à mediatriz u do segmento \overline{AD} . Temos então que $\overline{OD} \equiv \overline{OC} \equiv \overline{OA} \equiv \overline{OB} = R$ e, conseqüentemente, que O é um ponto comum às quatro mediatrizes r, s, t e u . Logo, O é o circuncentro do quadrilátero $ABCD$.

A recíproca também é verdadeira. Sejam $ABCD$ um quadrilátero qualquer e r, s, t e u as mediatrizes dos lados $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ e \overline{AD} , respectivamente, de $ABCD$. Suponhamos que as mediatrizes se intersectam em um único ponto O . Segue então pela definição de mediatriz como lugar geométrico que $\overline{OA} \equiv \overline{OB} \equiv \overline{OC} \equiv \overline{OD}$, ou seja, o ponto O equidista dos pontos A, B, C e D ou, equivalentemente, O é o centro da circunferência que passa por A, B, C e D . Logo, o quadrilátero $ABCD$ é inscrito.

□

2.4 O TEOREMA DE PTOLOMEU

Klaudios Ptolemeios, conhecido na nossa literatura como Cláudio Ptolomeu ou simplesmente Ptolomeu, viveu no antigo Egito por volta do ano 150 da era cristã. É considerado por muitos historiadores como o último dos grandes sábios posteriores a Euclides e um dos maiores geométricos que atuaram na famosa Universidade de Alexandria.



Figura 2.17: Cláudio Ptolomeu (WIKIPÉDIA, 2017b)

Ptolomeu é conhecido por seus trabalhos em astronomia, em especial pela Teoria Geocêntrica, segunda a qual equivocadamente se considerava a Terra como o centro do Universo. Essa teoria foi aceita pela Igreja Católica e permaneceu como um dogma por cerca de 1.400 anos, sendo a responsável pelo julgamento de Galileu Galilei (1564-1642), outro grande astrônomo, no Tribunal da Santa Inquisição.

No campo da geometria Euclidiana, Ptolomeu desenvolveu notáveis trabalhos que estão presentes em sua obra denominada *Almagesto*, também conhecida como *Síntese matemática*. Em particular, um dos grandes trabalhos relacionados a Ptolomeu é a relação estabelecida entre os lados e as diagonais de um quadrilátero inscrito, conhecido na literatura como o teorema de Ptolomeu. Contudo, segundo (GARBI, 2010), esse teorema recebeu o nome de Ptolomeu porque ele o

empregou em vários trabalhos; é muito provável que o verdadeiro descobridor tenha sido o geômetra e astrônomo Hiparco (190 a.C.-120 a.C.), nascido em Nicéia e que também trabalhou na Universidade de Alexandria.

Teorema 2.12 (Ptolomeu). *Em um quadrilátero inscrito, o produto das medidas das diagonais é igual à soma dos produtos das medidas dos lados opostos.*

Demonstração.

Sejam o quadrilátero $ABCD$ inscrito em uma circunferência e o ponto E da diagonal \overline{BD} tal que $\widehat{BAE} \equiv \widehat{CAD}$, conforme ilustrado na Figura 2.18.

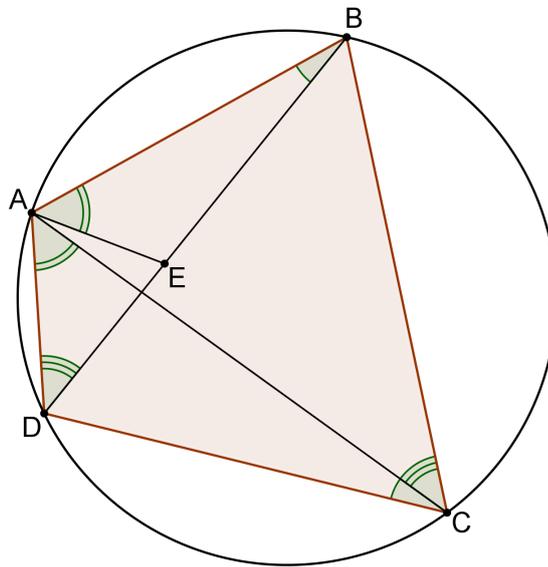


Figura 2.18: Quadrilátero $ABCD$ inscrito em uma circunferência e as diagonais \overline{AC} e \overline{BD}

De acordo com o Teorema 2.1, $\widehat{ACD} \equiv \widehat{ABD}$ e, portanto, os triângulos ACD e ABE são semelhantes pelo caso AA (ângulo-ângulo). Decorre disto que:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{CD}}{\overline{BE}} &= \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}; \\ \overline{AC} \cdot \overline{BE} &= \overline{AB} \cdot \overline{CD}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Por outro lado, os triângulos DAE e CAB também são semelhantes, porque $\widehat{ADE} \equiv \widehat{ACB}$ pelo Teorema 2.1, e $\widehat{DAE} \equiv \widehat{CAB}$ por construção. Logo:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} &= \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}}; \\ \overline{AC} \cdot \overline{DE} &= \overline{AD} \cdot \overline{BC}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Como $\overline{BE} + \overline{DE} = \overline{BD}$, somando (2.21) e (2.22) concluímos que:

$$\overline{AC} \cdot \overline{BE} + \overline{AC} \cdot \overline{DE} = \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC};$$

$$\overline{AC} \cdot (\overline{BE} + \overline{DE}) = \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC};$$

$$\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC}.$$

□

2.5 O TEOREMA DE BRAHMAGUPTA



Figura 2.19: Brahmagupta (WIKIPÉDIA, 2017a)

Brahmagupta nasceu na Índia no ano 598 da era cristã e viveu na cidade de Ujain, onde desenvolveu vários trabalhos relacionados à astronomia, aritmética e geometria. Segundo (GARBI, 2010), Brahmagupta foi um matemático notável e um dos precursores da álgebra ao solucionar equações do segundo grau por um método análogo ao utilizado cinco séculos depois por Bhaskara (1114-1185).

Brahmagupta escreveu quatro livros sobre astronomia e matemática ao longo da vida, sendo *Brahmasphutasiddhanta* (A abertura do universo) o principal e pelo qual é reconhecido atualmente. Nessa obra, descreveu uma relação geométrica considerada até os dias de hoje a principal descoberta da geometria hindu: o cálculo da área de um quadrilátero inscrito em uma circunferência em função da medida dos lados, uma generalização para quadriláteros do teorema de Heron para o cálculo da área de um triângulo em função das medidas dos lados.

Existem diversas demonstrações para o teorema de Brahmagupta. Apresentamos a seguir uma demonstração puramente algébrica, porém antes é necessário demonstrar três lemas.

Lema 2.1. *Em todo quadrilátero inscritível em uma circunferência, a razão entre as medidas das diagonais é igual à razão entre as somas dos produtos das medidas dos pares de lados que partem de cada um dos vértices opostos.*

Demonstração.

Sejam: o quadrilátero $ABCD$, inscrito em uma circunferência de centro O e raio R ; m e n as medidas das diagonais \overline{BD} e \overline{AC} , respectivamente, de $ABCD$; os triângulos ABD e BCD

inscritos na circunferência de centro O e raio R , como na Figura 2.20.

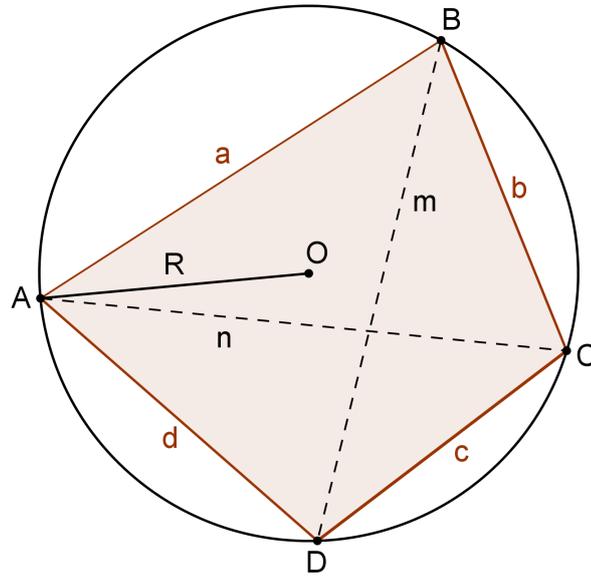


Figura 2.20: Diagonais m e n de um quadrilátero $ABCD$ inscrito em uma circunferência de centro O e raio R

Nos triângulos ABD e BCD , temos, de acordo com o Corolário 2.1, respectivamente que:

$$adm = 4R \cdot \mathcal{A}(\triangle ABD); \quad (2.23)$$

$$bcm = 4R \cdot \mathcal{A}(\triangle BCD). \quad (2.24)$$

Os triângulos ABC e ACD também estão inscritos na circunferência de centro O e raio R . Assim, pelo Corolário 2.1, temos respectivamente que:

$$abn = 4R \cdot \mathcal{A}(\triangle ABC); \quad (2.25)$$

$$cdn = 4R \cdot \mathcal{A}(\triangle ACD). \quad (2.26)$$

Somando (2.23) e (2.24), obtemos:

$$\begin{aligned} adm + bcm &= 4R \cdot \mathcal{A}(\triangle ABD) + 4R \cdot \mathcal{A}(\triangle BCD); \\ m(ad + bc) &= 4R (\mathcal{A}(\triangle ABD) + \mathcal{A}(\triangle BCD)). \end{aligned} \quad (2.27)$$

Agora, somando (2.25) e (2.26), temos que:

$$\begin{aligned} abn + cdn &= 4R \cdot \mathcal{A}(\triangle ABC) + 4R \cdot \mathcal{A}(\triangle ACD); \\ n(ab + cd) &= 4R (\mathcal{A}(\triangle ABC) + \mathcal{A}(\triangle ACD)). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Como $\mathcal{A}(\triangle ABD) + \mathcal{A}(\triangle BCD) = \mathcal{A}(\triangle ABC) + \mathcal{A}(\triangle ACD)$, igualando (2.27) e (2.28) concluimos que:

$$\begin{aligned} m(ad + bc) &= n(ab + cd); \\ \frac{m}{n} &= \frac{ab + cd}{ad + bc}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

□

Lema 2.2. Se $ABCD$ é um quadrilátero inscrito em uma circunferência, de lados de medidas a , b , c e d e diagonais m e n , então a medida de cada diagonal, em função dos lados, é dada por $m = \sqrt{\frac{(ab + cd)(ac + bd)}{ad + bc}}$ e $n = \sqrt{\frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}}$.

A Figura 2.21 ilustra as hipóteses do Lema 2.2.

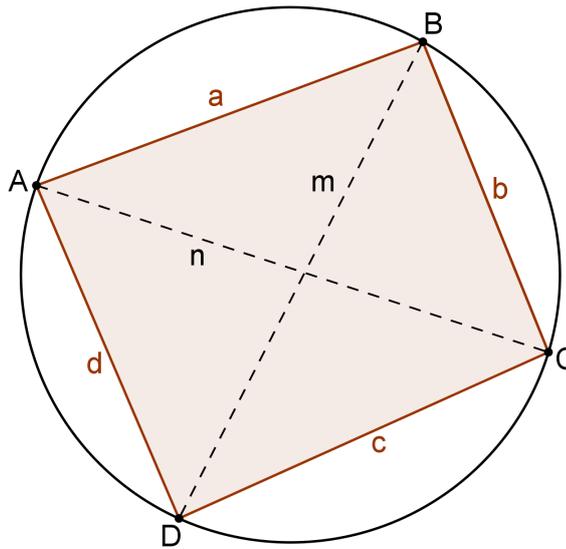


Figura 2.21: Diagonais m e n de um quadrilátero $ABCD$ inscrito em uma circunferência

Demonstração.

O Teorema 2.12 garante que:

$$mn = ac + bd. \quad (2.30)$$

Porém, pelo Lema 2.1, temos que:

$$\frac{m}{n} = \frac{ab + cd}{ad + bc}. \quad (2.31)$$

Multiplicando membro a membro as igualdades (2.30) e (2.31), obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{m}{n} \cdot m \cdot n &= \frac{ab+cd}{ad+bc}(ac+bd); \\ m^2 &= \frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}; \\ m &= \sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}}.\end{aligned}\tag{2.32}$$

Substituindo (2.32) em (2.29), concluímos que:

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}}(ad+bc) &= n(ab+cd); \\ \frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}(ad+bc)^2 &= n^2(ab+cd)^2; \\ n^2 &= \frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}; \\ n &= \sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}}.\end{aligned}\tag{2.33}$$

□

Lema 2.3. *Se $ABCD$ é um quadrilátero inscrito em uma circunferência de raio R , cujos lados têm medidas a, b, c e d e cuja diagonal \overline{BD} tem medida m , então a medida do raio R , em função dos lados, é dada por*

$$R = \sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}{(a+b+c-d)(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)}}.$$

Demonstração.

Sejam $ABCD$ um quadrilátero, inscrito em uma circunferência de centro O e raio de medida R , e \overline{BE} o segmento perpendicular ao prolongamento do lado \overline{AD} de $ABCD$, conforme mostra a Figura 2.22.

Denotando $\overline{BE} = h$ e $\overline{AE} = k$, aplicando o teorema de Pitágoras nos triângulos retângulos AEB e BED , obtemos, respectivamente:

$$k = \sqrt{a^2 - h^2};\tag{2.34}$$

$$m^2 = h^2 + (d+k)^2.\tag{2.35}$$

Substituindo (2.34) em (2.35), temos que:

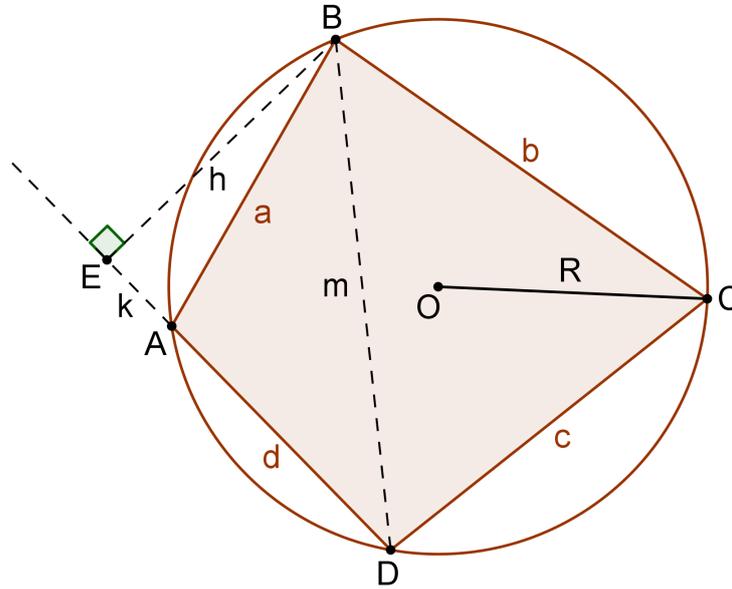


Figura 2.22: Raio R do quadrilátero $ABCD$ inscrito na circunferência de centro O

$$\begin{aligned}
 m^2 &= h^2 + [d + (\sqrt{a^2 - h^2})]^2; \\
 m^2 &= h^2 + d^2 + 2d\sqrt{a^2 - h^2} + a^2 - h^2; \\
 m^2 &= d^2 + 2d\sqrt{a^2 - h^2} + a^2; \\
 m^2 - d^2 - a^2 &= 2d\sqrt{a^2 - h^2}; \\
 (m^2 - d^2 - a^2)^2 &= 4d^2 a^2 - 4d^2 h^2.
 \end{aligned} \tag{2.36}$$

Ainda, no triângulo ABD temos, de acordo com o Corolário 2.1, que:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}(\Delta ABD) &= \frac{adm}{4R}; \\
 \frac{dh}{2} &= \frac{adm}{4R}; \\
 h &= \frac{am}{2R}; \\
 2Rh &= am; \\
 4R^2 h^2 &= a^2 m^2; \\
 h^2 &= \frac{a^2 m^2}{4R^2}.
 \end{aligned} \tag{2.37}$$

Substituindo (2.37) em (2.36), obtemos:

$$\begin{aligned}
(m^2 - d^2 - a^2)^2 &= 4d^2a^2 - 4d^2h^2; \\
(m^2 - d^2 - a^2)^2 &= 4d^2a^2 - 4d^2\frac{a^2m^2}{4R^2}; \\
(m^2 - d^2 - a^2)^2 &= \frac{4R^2d^2a^2 - d^2a^2m^2}{R^2}; \\
R^2(m^2 - d^2 - a^2)^2 &= 4R^2d^2a^2 - d^2a^2m^2; \\
R^2[(m^2 - d^2 - a^2)^2 - 4d^2a^2] &= -d^2a^2m^2; \\
R^2 &= \frac{a^2d^2m^2}{4d^2a^2 - (m^2 - d^2 - a^2)^2}. \tag{2.38}
\end{aligned}$$

Como já demonstrado no Lema 2.2, $m^2 = \frac{(ab + cd)(ac + bd)}{ad + bc}$. Porém, antes de substituirmos m^2 em (2.38), vamos manipular algebricamente o denominador w de (2.38) a fim de simplificar os cálculos. Primeiramente, observamos que o denominador de (2.38) é uma diferença de dois quadrados. Assim:

$$\begin{aligned}
w = 4d^2a^2 - (m^2 - d^2 - a^2)^2 &= [2da - (m^2 - d^2 - a^2)] \cdot [2da + (m^2 - d^2 - a^2)] \\
&= [-m^2 + d^2 + a^2 + 2da] \cdot [2da + m^2 - d^2 - a^2] \\
&= [-m^2 + (a + d)^2] \cdot [m^2 - (a - d)^2]. \tag{2.39}
\end{aligned}$$

Substituindo $m^2 = \frac{(ab + cd)(ac + bd)}{ad + bc}$ no fator $-m^2 + (a + d)^2$ de (2.39), obtemos:

$$\begin{aligned}
-m^2 + (a + d)^2 &= -\frac{(ac + bd)(ab + cd)}{ad + bc} + (a + d)^2 \\
&= \frac{-a^2bc - ac^2d - ab^2d - bcd^2 + (ad + bc)(a^2 + 2ad + d^2)}{ad + bc} \\
&= \frac{-a^2bc - ac^2d - ab^2d - bcd^2 + a^3d}{ad + bc} + \\
&\quad + \frac{2a^2d^2 + ad^3 + a^2bc + 2abcd + bcd^2}{ad + bc} \\
&= \frac{-ac^2d - ab^2d + a^3d + 2a^2d^2 + ad^3 + 2abcd}{ad + bc} \\
&= \frac{ad(-c^2 - b^2 + a^2 + 2ad + d^2 + 2bc)}{ad + bc} \\
&= \frac{ad[-(c - b)^2 + (a + d)^2]}{ad + bc} \\
&= \frac{ad[(a + d + c - b)(a + d - c + b)]}{ad + bc}. \tag{2.40}
\end{aligned}$$

Substituindo $m^2 = \frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}$ no fator $m^2 - (a-d)^2$ de (2.39), obtemos:

$$\begin{aligned}
m^2 - (a-d)^2 &= \frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc} - (a-d)^2 \\
&= \frac{a^2bc + ac^2d + ab^2d + bcd^2 + (ad+bc)(-a^2 + 2ad - d^2)}{ad+bc} \\
&= \frac{a^2bc + ac^2d + ab^2d + bcd^2 - a^3d}{ad+bc} + \\
&+ \frac{2a^2d^2 - ad^3 - a^2bc + 2abcd - bcd^2}{ad+bc} \\
&= \frac{ac^2d + ab^2d - a^3d + 2a^2d^2 - ad^3 + 2abcd}{ad+bc} \\
&= \frac{ad(c^2 + b^2 - a^2 + 2ad - d^2 + 2bc)}{ad+bc} \\
&= \frac{ad[(c+b)^2 - (a-d)^2]}{ad+bc} \\
&= \frac{ad[(c+b+a-d)(c+b-a+d)]}{ad+bc}. \tag{2.41}
\end{aligned}$$

Substituindo (2.40) e (2.41) em (2.39), temos que:

$$\begin{aligned}
w &= \frac{ad[(c+b+a-d)(c+b-a+d)]ad[(a+d+c-b)(a+d-c+b)]}{(ad+bc)(ad+bc)} \\
&= \frac{a^2d^2[(c+b+a-d)(c+b-a+d)(a+d+c-b)(a+d-c+b)]}{(ad+bc)^2}. \tag{2.42}
\end{aligned}$$

Por fim, substituindo $m^2 = \frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}$ e (2.42) em (2.38), concluimos que:

$$\begin{aligned}
R^2 &= \frac{a^2d^2 \frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}}{\frac{a^2d^2[(c+b+a-d)(c+b-a+d)(a+d+c-b)(a+d-c+b)]}{(ad+bc)^2}}; \\
R^2 &= \frac{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}{[(c+b+a-d)(c+b-a+d)(a+d+c-b)(a+d-c+b)]}; \\
R &= \sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}{[(a+b+c-d)(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)]}}. \tag{2.43}
\end{aligned}$$

□

Com base nos lemas demonstrados, vamos provar o resultado principal desta seção.

Teorema 2.13. (*Brahmagupta*) Se $ABCD$ é um quadrilátero inscrito em uma circunferência, de lados de medidas a, b, c e d , então a área de $ABCD$ é dada por

$$\mathcal{A}(ABCD) = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

onde p é o semiperímetro de $ABCD$.

Demonstração.

Sejam $ABCD$ um quadrilátero inscrito em uma circunferência de centro O e raio R , cujos lados medem a, b, c e d e cuja diagonal \overline{BD} mede m , como ilustra a Figura 2.28.

Conforme demonstrado no Lema 2.1, especificamente em (2.27), temos que:

$$m(ad + bc) = 4R(\mathcal{A}(\triangle ABD) + \mathcal{A}(\triangle BCD));$$

$$m(ad + bc) = 4R \cdot \mathcal{A}(ABCD); \quad (2.44)$$

$$\mathcal{A}(ABCD) = \frac{1}{4} \frac{m(ad + bc)}{R}. \quad (2.45)$$

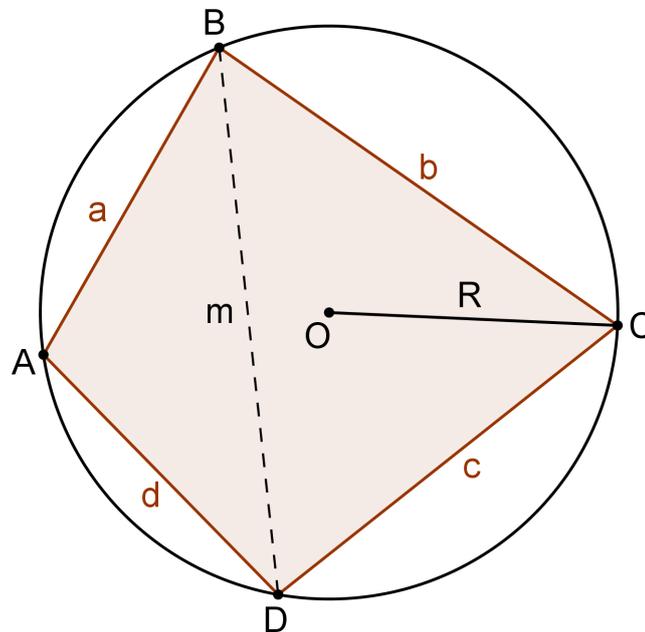


Figura 2.23: Quadrilátero $ABCD$, de diagonal $\overline{BD} = m$ e lados a, b, c e d , inscrito em uma circunferência de centro O e raio R

Substituindo (2.32) e (2.43) em (2.45), obtemos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(ABCD) &= \frac{1}{4} \frac{\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}}(ad+bc)}{\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}{[(a+b+c-d)(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)]}}} \\
&= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\frac{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)^2}{ad+bc}}{\frac{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}{[(a+b+c-d)(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)]}}} \quad (2.46) \\
&= \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c-d)(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)}. \quad (2.47)
\end{aligned}$$

Denotando o perímetro de $ABCD$ por $2p = a + b + c + d$, concluímos, a partir de (2.47), que:

$$\mathcal{A}(ABCD) = \frac{1}{4} \sqrt{(2p-2d)(2p-2a)(2p-2b)(2p-2c)}$$

$$\mathcal{A}(ABCD) = \frac{1}{4} \sqrt{2^4(p-d)(p-a)(p-b)(p-c)} \quad (2.48)$$

$$= \frac{1}{4} \cdot 4 \sqrt{(p-d)(p-a)(p-b)(p-c)} \quad (2.49)$$

$$= \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}. \quad (2.50)$$

□

2.6 APLICAÇÕES

Selecionamos cinco questões que abordam as propriedades dos quadriláteros inscritíveis. Essas questões foram extraídas do banco de questões das provas nacionais da disciplina Geometria I (MA13) do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROF-MAT (MATEMÁTICA, 2010).

1. Questão 1

(MA13- AV1 - 2013 - Q4) O quadrilátero $ABCD$ está inscrito em uma circunferência. Seja M o ponto médio do arco CD , como mostra a Figura 2.24. Os segmentos MA e MB cortam o lado \overline{CD} em P e Q , respectivamente.

(a) Mostre que o quadrilátero $ABQP$ é inscritível.

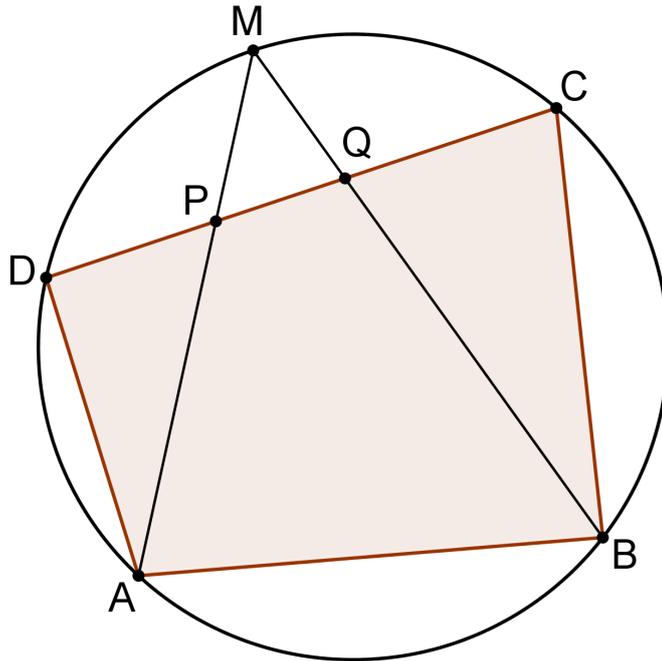


Figura 2.24: Quadrilátero $ABCD$ inscrito na circunferência e o ponto médio M do arco CD

(b) Mostre que os ângulos \widehat{DAQ} e \widehat{PBC} são iguais.

Solução

(a) Como M é ponto médio do arco CD , temos que os arcos MD e MC são congruentes. Assim, de acordo com o Teorema 2.1, $\widehat{MAD} \equiv \widehat{MBC} = \alpha$, conforme mostra a Figura 2.25.

Os ângulos \widehat{MQP} e \widehat{CQB} são opostos pelo vértice e, portanto, são congruentes. Considerando $\widehat{MQP} \equiv \widehat{CQB} = \beta$ e $\widehat{BCQ} = \gamma$, temos no triângulo BCQ que:

$$\begin{aligned}\alpha + \beta + \gamma &= 180^\circ; \\ \gamma &= 180^\circ - \alpha - \beta.\end{aligned}\tag{2.51}$$

Ainda, o quadrilátero $ABCD$ está inscrito na circunferência. Dessa forma, seus ângulos opostos são, segundo o Teorema 2.9, suplementares. Assim, considerando $\widehat{MAQ} = \theta$ e $\widehat{BAQ} = \omega$, temos em $ABCD$ que:

$$\gamma + \alpha + \theta + \omega = 180^\circ.\tag{2.52}$$

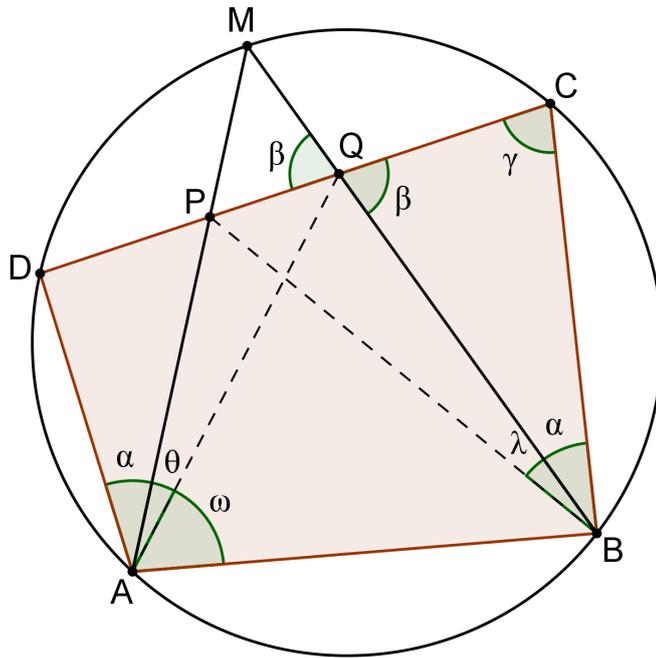


Figura 2.25: Diagonais \overline{AQ} e \overline{BP} do quadrilátero $ABQP$

Substituindo (2.51) em (2.52), obtemos:

$$\begin{aligned} 180^\circ - \alpha - \beta + \alpha + \theta + \omega &= 180^\circ; \\ \beta &= \theta + \omega. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Por fim, como \widehat{PQB} é o suplemento de $\widehat{CQB} = \beta$, temos que:

$$\widehat{PQB} = 180^\circ - \beta. \quad (2.54)$$

Somando os ângulos opostos \widehat{PAB} e \widehat{PQB} do quadrilátero $ABQP$, concluímos, usando (2.53) e (2.54), que:

$$\begin{aligned} \widehat{PAB} + \widehat{PQB} &= \theta + \omega + 180^\circ - \beta; \\ \widehat{PAB} + \widehat{PQB} &= \beta + 180^\circ - \beta; \\ \widehat{PAB} + \widehat{PQB} &= 180^\circ. \end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema 2.9, o quadrilátero $ABQP$ é inscritível.

- (b) Sejam $\widehat{DAQ} = \alpha + \theta$ e $\widehat{PBC} = \alpha + \lambda$. Conforme demonstrado em (a), o quadrilátero $ABQP$ é inscritível e, segundo o Teorema 2.10, $\theta = \lambda$. Concluímos assim que $\widehat{DAQ} = \alpha + \theta$ e $\widehat{PBC} = \alpha + \lambda$ são ângulos congruentes.

2. Questão 2

(MA13-AV1-Q3-2013) Seja ABC um triângulo qualquer. Desenhe exteriormente a ABC os triângulos equiláteros ABD e ACE .

- Mostre que $\overline{DC} \equiv \overline{BE}$.
- Sendo F o ponto de intersecção de \overline{DC} e \overline{BE} , mostre que o quadrilátero $ADBF$ é inscrito.
- Mostre que $\widehat{AFB} \equiv \widehat{BFC} \equiv \widehat{CFA} = 120^\circ$.

Solução

A Figura 2.26 ilustra a construção dos triângulos equiláteros ABD e ACE .

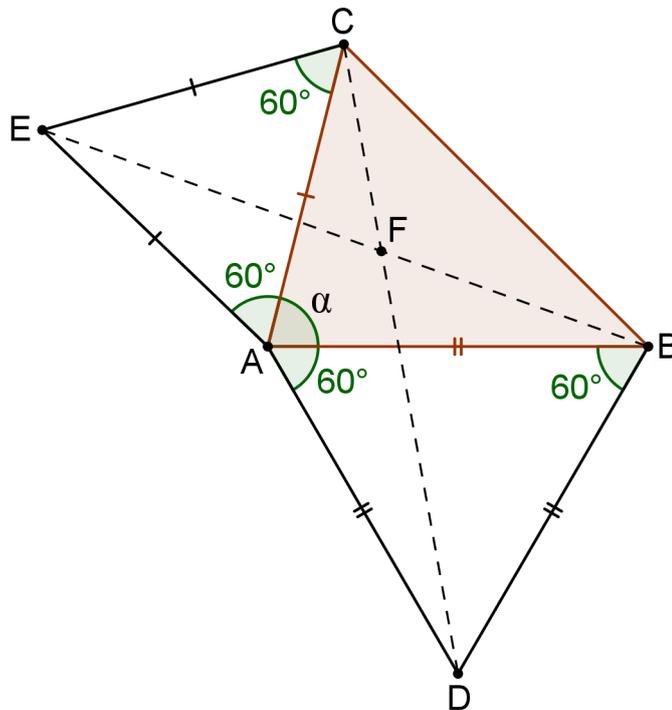


Figura 2.26: Triângulos equiláteros ABD e ACE

- Seja $\widehat{BAC} = \alpha$. Dessa forma, como os triângulo ACE e ABD são equiláteros e seus ângulos internos são todos iguais a 60° , os triângulos CDA e EBA são congruentes pelo caso LAL (lado-ângulo-lado), uma vez que $\overline{AB} \equiv \overline{AD}$, $\widehat{EAB} \equiv \widehat{CAD} = 60^\circ + \alpha$ e $\overline{AC} \equiv \overline{AE}$. Da congruência decorre que $\overline{DC} \equiv \overline{BE}$.
- Do item (a), temos que os triângulos CDA e EBA são congruentes, o que implica em $\widehat{EBA} \equiv \widehat{ADC}$. Assim, como \overline{AB} e \overline{DF} são as diagonais do quadrilátero $ADBF$, pelo Teorema 2.10 o quadrilátero $ADBF$ é inscrito em uma circunferência.

- (c) Como o quadrilátero $ADBF$ é inscrito, segundo o Teorema 2.9 seus ângulos opostos são suplementares. Assim:

$$\begin{aligned} \widehat{ADB} + \widehat{AFB} &= 180^\circ; \\ 60^\circ + \widehat{AFB} &= 180^\circ; \\ \widehat{AFB} &= 180^\circ - 60^\circ; \\ \widehat{AFB} &= 120^\circ. \end{aligned} \tag{2.55}$$

Os ângulos \widehat{AEB} e \widehat{ACF} são congruentes, pois os triângulos CDA e EBA são congruentes. Como os segmentos \overline{AC} e \overline{EF} são as diagonais do quadrilátero $AECF$, temos pelo Teorema 2.10 que $AECF$ é inscrito. Logo, pelo Teorema 2.9 temos que:

$$\begin{aligned} \widehat{AEC} + \widehat{CFA} &= 180^\circ; \\ 60^\circ + \widehat{CFA} &= 180^\circ; \\ \widehat{CFA} &= 180^\circ - 60^\circ; \\ \widehat{CFA} &= 120^\circ. \end{aligned} \tag{2.56}$$

Em torno do ponto F temos

$$\widehat{AFB} + \widehat{CFA} + \widehat{BFC} = 360^\circ. \tag{2.57}$$

Substituindo (2.55) e (2.56) em (2.57), obtemos:

$$\widehat{BFC} = 120^\circ. \tag{2.58}$$

De (2.55), (2.56) e (2.58), concluímos que $\widehat{AFB} \equiv \widehat{BFC} \equiv \widehat{CFA} = 120^\circ$.

3. Questão 3

(MA13-AV1-Q4-2011) No triângulo ABC , $\widehat{B} = 68^\circ$ e $\widehat{C} = 40^\circ$, \overline{AD} e \overline{BE} são alturas, M é médio de \overline{BC} e N é médio de \overline{AC} . Calcule os ângulos \widehat{DNM} e \widehat{EDN} .

Solução

Como M e N são os pontos médios de \overline{BC} e \overline{AC} , respectivamente, \overline{MN} é a base média do triângulo ABC , ou seja, $\overline{MN} \parallel \overline{AB}$ e conseqüentemente os triângulos CMN e CBA são semelhantes. Logo, $\widehat{NMC} = 68^\circ$, portanto, $\widehat{MNC} \equiv \widehat{BAE} = 180^\circ - 68^\circ - 40^\circ = 72^\circ$. O segmento \overline{DN} é a mediana relativa à hipotenusa \overline{AC} do triângulo ADC e, portanto, $\widehat{DN} \equiv \widehat{AN} \equiv \widehat{CN}$ e o triângulo DNC é isósceles de base \overline{DC} . Disto resulta que $\widehat{NDC} \equiv \widehat{NCD} = 40^\circ$. Ainda, como $\widehat{NMC} = 68^\circ$ é um ângulo externo do triângulo DNM , temos

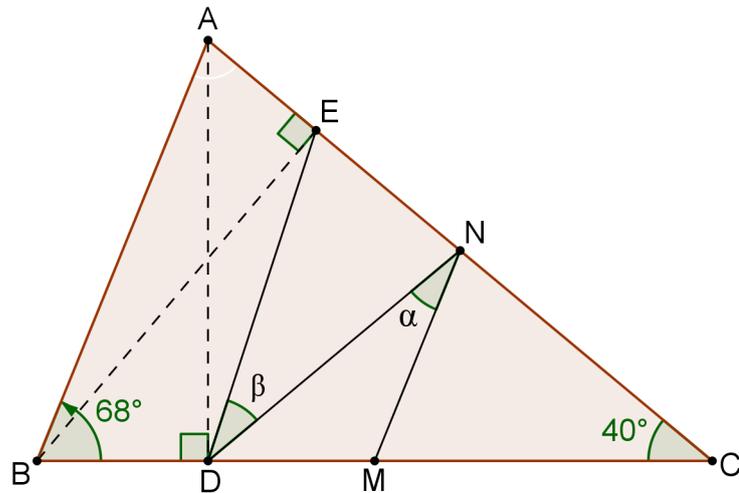


Figura 2.27: Triângulo ABC e os ângulos $\widehat{DNM} = \alpha$ e $\widehat{EDN} = \beta$

pele Teorema 2.5 que:

$$\widehat{DNM} + \widehat{NDC} = \widehat{NMC};$$

$$\widehat{DNM} + 40^\circ = 68^\circ;$$

$$\widehat{DNM} = 68^\circ - 40^\circ;$$

$$\widehat{DNM} = 28^\circ.$$

Por outro lado, o quadrilátero $AEDB$ é inscritível pelo Teorema 2.10 e isto implica em $\widehat{ABE} \equiv \widehat{ADE}$. Temos então no triângulo BAE que:

$$\widehat{ABE} \equiv \widehat{ADE} = 180^\circ - 90^\circ - 72^\circ;$$

$$\widehat{ADE} = 18^\circ. \quad (2.59)$$

Por fim, temos que:

$$\widehat{ADE} + \widehat{EDN} + 40^\circ = 90^\circ. \quad (2.60)$$

Substituindo (2.59) em (2.60), obtemos:

$$18^\circ + \widehat{EDN} + 40^\circ = 90^\circ;$$

$$\widehat{EDN} = 90^\circ - 40^\circ - 18^\circ;$$

$$\widehat{EDN} = 32^\circ.$$

Concluimos então que $\widehat{DNM} = 28^\circ$ e $\widehat{EDN} = 32^\circ$.

4. Questão 4

(MA13-AV1-Q5-2012) A Figura 2.28 mostra o triângulo acutângulo ABC inscrito na circunferência de centro O . A reta BD é perpendicular em D a \overline{AC} e encontra a circunferência em M . A reta CE é perpendicular em E a \overline{AB} e encontra a circunferência em N . As alturas \overline{BD} e \overline{CE} intersectam-se em H , ortocentro do triângulo.

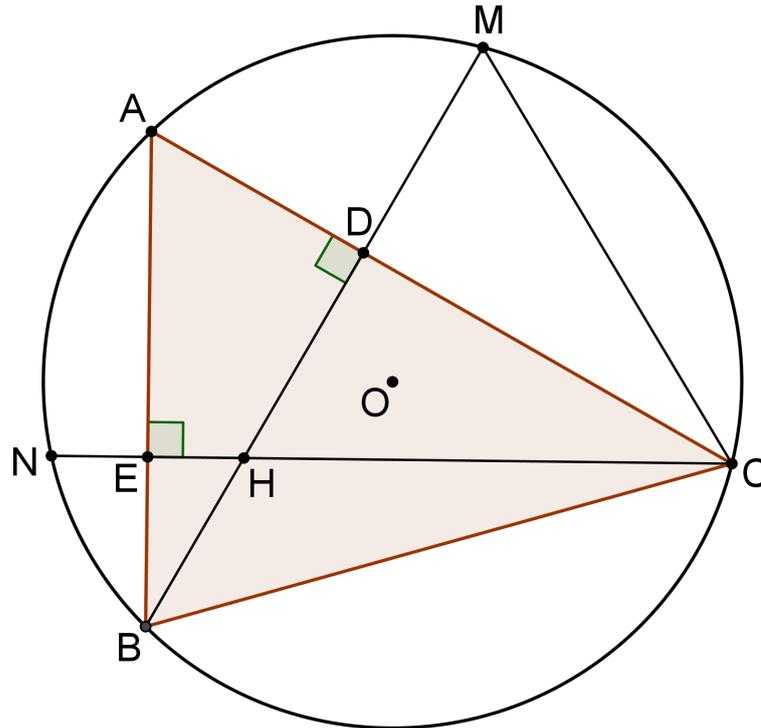


Figura 2.28: Triângulo acutângulo ABC inscrito na circunferência de centro O

- (a) Mostre que $\overline{HD} \equiv \overline{DM}$.
 (b) Mostre que \overline{MN} é perpendicular a \overline{OA} .

Solução

- (a) Primeiramente, o quadrilátero $ABCM$ está inscrito na circunferência. Logo, $\widehat{ABM} \equiv \widehat{ACM}$ e os triângulos BEH e MDC são semelhantes pelo caso AA (ângulo-ângulo), o que implica em $\widehat{EHB} \equiv \widehat{DMC}$. Como os ângulos \widehat{EHB} e \widehat{DHC} são opostos pelo vértice, temos que $\widehat{EHB} \equiv \widehat{DHC}$. Disto concluímos que os triângulos retângulos HCD e CDM são congruentes pelo caso ALA_o (ângulo-lado-ângulo oposto) e, consequentemente, $\overline{HD} \equiv \overline{DM}$.
- (b) Como os arcos AN e AM subentendem ângulos inscritos congruentes, segue que $\overline{AN} \equiv \overline{AM}$. Logo, o ponto A equidista de M e N assim como o ponto O , centro da

circunferência. Portanto, A e O pertencem à mediatriz do segmento MN , isto é, \overline{OA} é perpendicular a \overline{MN} .

5. Questão 5

(MA13-AV1-Q5-2011) O triângulo equilátero ABC está inscrito em uma circunferência e P é um ponto qualquer do menor arco BC . Prove que $\overline{PA} = \overline{PB} + \overline{PC}$ (isto é, que a distância de P ao ponto A é igual à soma das distâncias de P aos pontos B e C).

Sugestão: Considere um ponto D sobre \overline{PA} tal que $\overline{PD} \equiv \overline{PB}$.

Solução

Como o quadrilátero $PBAC$ está inscrito na circunferência, conforme ilustrado na Figura 2.29, aplicando o Teorema 2.12 (Ptolomeu) obtemos:

$$\overline{PB} \cdot \overline{AC} + \overline{PC} \cdot \overline{AB} = \overline{PA} \cdot \overline{BC}. \quad (2.61)$$

Porém o triângulo ABC é equilátero, ou seja, $\overline{AC} \equiv \overline{AB} \equiv \overline{BC}$. Desse modo, podemos reescrever (2.61) como:

$$\begin{aligned} \overline{BC} (\overline{PB} + \overline{PC}) &= \overline{PA} \cdot \overline{BC}; \\ \overline{PA} &= \overline{PB} + \overline{PC}. \end{aligned}$$

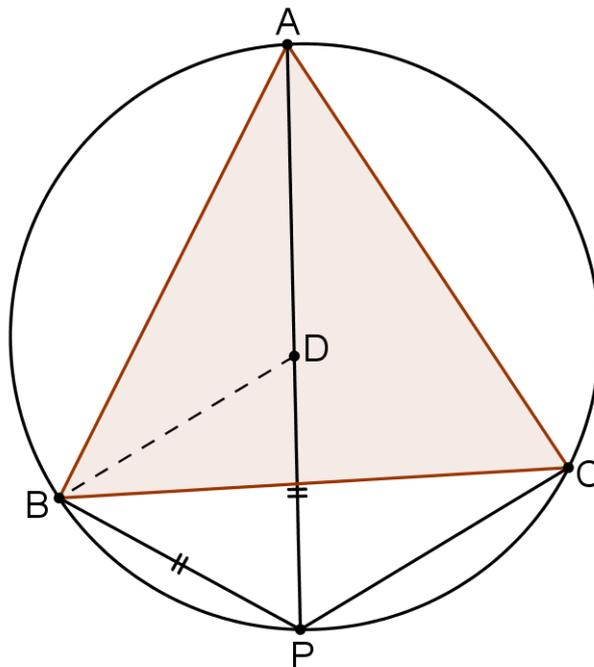


Figura 2.29: Triângulo equilátero ABC inscrito em uma circunferência

Solução Alternativa

Seja o ponto D pertencente a \overline{PA} tal que $\overline{PD} \equiv \overline{PB}$, como na Figura 2.29.

Temos assim que $\overline{PA} = \overline{PD} + \overline{AD}$. O triângulo ABC é equilátero e está inscrito na circunferência. Isto implica que $\widehat{ACB} = 60^\circ$ e, conseqüentemente, $\widehat{BPA} = 60^\circ$ de acordo com o Teorema 2.1. No triângulo BPD , $\overline{PB} \equiv \overline{PD}$ e $\widehat{BPA} = 60^\circ$, tem-se que o triângulo PBD é equilátero. Como \widehat{BDA} é o suplemento de \widehat{BDP} , segue então que $\widehat{BDA} = 120^\circ$. Por outro lado, pelo Teorema 2.1, temos que $\widehat{APC} \equiv \widehat{ABC} = 60^\circ$ e $\widehat{PCB} \equiv \widehat{PAB}$. Assim, $\widehat{ABD} \equiv \widehat{PBC}$ e os triângulos CPB e ADB são congruentes pelo caso ALA (ângulo-lado-ângulo). Disto resulta que $\overline{AD} \equiv \overline{PC}$ e que $\overline{PA} = \overline{PD} + \overline{AD} = \overline{PB} + \overline{PC}$.

3 O TEOREMA DE SIMSON-WALLACE

Neste capítulo, exploramos o teorema de Simson-Wallace, também conhecido na literatura como a reta de Simson. Para tanto, descrevemos inicialmente um pouco da história de Robert Simson (1687-1768) e de William Wallace (1768-1843) e, em seguida, demonstramos o teorema de três maneiras diferentes: utilizando quadriláteros inscritíveis, o teorema de Menelaus e o paralelismo entre retas. Para finalizar, apresentamos algumas propriedades interessantes da reta de Simson-Wallace e três aplicações: a desigualdade de Ptolomeu, a circunferência de Feuerbach e o deltóide de Steiner.

3.1 ROBERT SIMSON



Figura 3.1: Robert Simson (UK, 2018a)

Nascido em West Kilbride, Escócia, em 14 de outubro de 1687 e falecido em 1 de outubro de 1768 em Glasgow, Escócia. Simson ingressou na Universidade de Glasgow como estudante aos quatorze anos, desenvolvendo seus estudos em teologia, línguas orientais e botânica. Contudo, para o jovem Simson, esses eram ramos do conhecimento inconcludentes e especulativos.

Simson supostamente frequentou a universidade como estudante por aproximadamente oito anos, de 1702 a 1710, e foi nesse período que conheceu uma das obras primas da matemática: o livro “Os elementos” de Euclides. Em 1710, foi convidado a assumir o cargo de professor na Universidade de Glasgow, porém, antes disso, viajou para Londres na Inglaterra, onde manteve contato com importantes matemáticos da época, dentre eles Edmond Halley (1656-1742), o qual sugeriu a Simson que dedicasse seus talentos a restaurar trabalhos antigos de geomêtras gregos, tais como Euclides e Apolônio de Perga.

Segundo (COXETER, 1969), Robert Simson contribuiu significativamente para a geometria, mas não há nenhum registro em seus escritos sobre a reta que leva o seu nome. Ainda

de acordo com (COXETER, 1969), a reta conhecida como reta de Simson foi descoberta por William Wallace em 1797.

3.2 WILLIAM WALLACE



Figura 3.2: William Wallace (UK, 2018b)

Nascido em 1768 na cidade escocesa de Dysart, Wallace trabalhou como encadernador, e até completar onze anos, não possuía uma escolaridade formal, apenas conseguia realizar operações aritméticas básicas ensinadas por seu pai.

Em 1789, mudou-se, juntamente com sua família, para a capital Edimburgo e lá, apesar de não ser aluno, participava de aulas de matemática na Universidade de Edimburgo, onde se observou que Wallace tinha um grande talento para a matemática. Somente em 1819 foi nomeado professor de matemática na Universidade de Edimburgo, sendo que entre sua chegada à cidade e a ocupação de uma cadeira na universidade, Wallace trabalhou como professor de matemática em diversos locais.

3.3 DEMONSTRAÇÕES

Definição 3.1 (Triângulo pedal). *Sejam ABC um triângulo qualquer, P um ponto não pertencente às retas suportes dos lados de ABC , e D , E e F os pés das perpendiculares baixadas de P sobre as retas suportes dos lados \overline{BC} , \overline{AC} e \overline{AB} , respectivamente. O triângulo de vértices D , E e F é o triângulo pedal de P em relação a ABC .*

A Figura 3.3 ilustra o triângulo pedal construído segundo a Definição 3.1.

Segundo (NETO, 2013), um triângulo é degenerado quando seus vértices são colineares. Particularmente, o triângulo pedal DEF é degenerado quando os pontos D , E e F são colineares.

Proposição 3.1. *Sejam um triângulo ABC e um ponto P não situado sobre as retas suportes dos lados de ABC . Se DEF é o triângulo pedal de P em relação ao triângulo ABC , então:*

$$\overline{DE} = \overline{PC} \cdot \text{sen}(\widehat{BCA});$$

$$\overline{EF} = \overline{PA} \cdot \text{sen}(\widehat{BAC});$$

$$\overline{FD} = \overline{PB} \cdot \text{sen}(\widehat{CBA}).$$

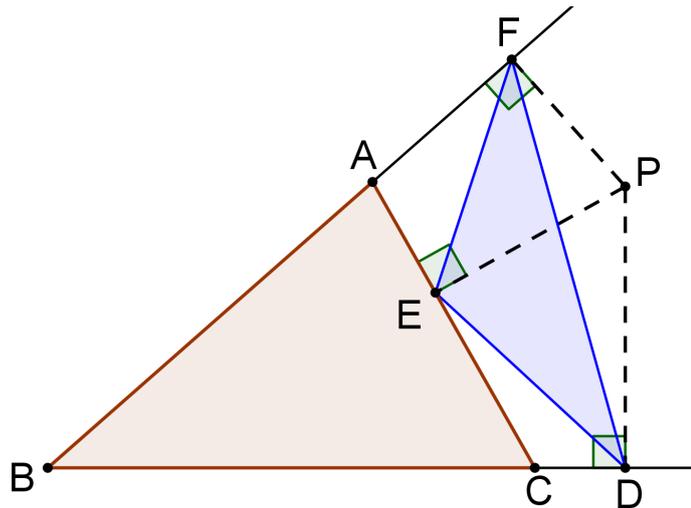


Figura 3.3: Triângulo pedal DEF do ponto P em relação ao triângulo ABC

Demonstração.

Temos duas situações distintas a considerar: P pertence ao exterior do triângulo ABC ou P se encontra no interior do triângulo ABC . Sem perda de generalidade, vamos analisar o caso em que P é exterior ao triângulo ABC e está na região angular $\angle ABC$, conforme a Figura 3.3, sendo a demonstração dos demais casos inteiramente análoga.

No quadrilátero $PECD$, temos que $\widehat{PEC} \equiv \widehat{PDC} = 90^\circ$. Logo, \overline{PC} é um diâmetro da circunferência que circunscreve o triângulo ECD e, conforme o Teorema 2.9, $PECD$ é inscrito nessa mesma circunferência. Aplicando o Teorema 2.8 no triângulo DEC , obtemos:

$$\frac{\overline{DE}}{\text{sen}(\widehat{ECD})} = \overline{PC}. \quad (3.1)$$

Como $\widehat{ECD} = 180^\circ - \widehat{BCA}$, temos que:

$$\text{sen}(\widehat{ECD}) = \text{sen}(\widehat{BCA}). \quad (3.2)$$

Substituindo (3.2) em (3.1), concluímos que $\overline{DE} = \overline{PC} \cdot \text{sen}(\widehat{BCA})$.

A demonstração dos casos $\overline{EF} = \overline{PA} \cdot \text{sen}(\widehat{BAC})$ e $\overline{FD} = \overline{PB} \cdot \text{sen}(\widehat{CBA})$ é análoga.

□

Teorema 3.1 (Simson-Wallace). *Sejam um triângulo ABC e um ponto P não situado sobre as retas suportes de seus lados. Se o ponto P pertence à circunferência que circunscreve o triângulo ABC , então o triângulo pedal de P em relação a ABC é degenerado.*

A Figura 3.4 ilustra as hipóteses e a tese do Teorema 3.1. Nessa figura, a reta s que passa pelos vértices D , E e F do triângulo pedal degenerado é denominada *reta de Simson-Wallace* de polo P em relação ao triângulo ABC .

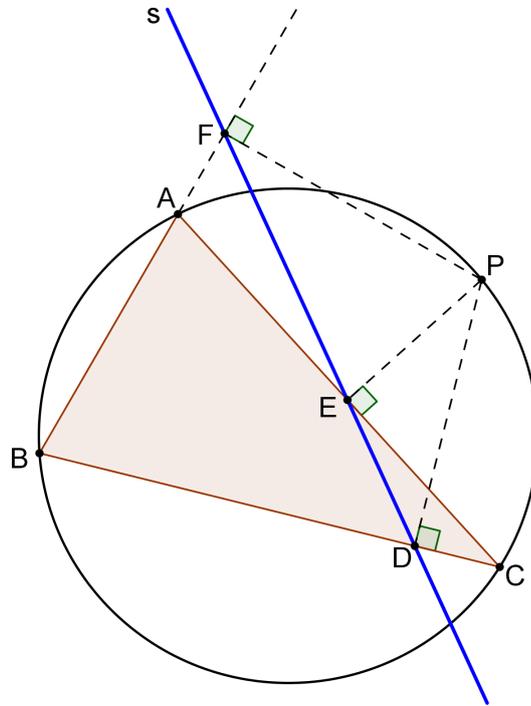


Figura 3.4: Hipóteses e tese do Teorema 3.1

3.3.1 VIA QUADRILÁTERO INSCRITÍVEL

A primeira demonstração do teorema de Simson-Wallace que apresentamos é a demonstração clássica baseada nas condições de inscrição de um quadrilátero em uma circunferência - Teoremas 2.9 e 2.10.

Demonstração.

Suponhamos, sem perda de generalidade, que o ponto P está situado na região angular $\angle ABC$, conforme ilustrado na Figura 3.4. Sejam D , E e F os pés das perpendiculares baixadas de P aos lados \overline{BC} , \overline{AC} e \overline{AB} , respectivamente. Como $\widehat{PFA} + \widehat{PEA} = 180^\circ$, então, segundo o Teorema 2.9, o quadrilátero $PFAE$ é inscritível em uma circunferência. Por outro lado, como $\widehat{PEC} \equiv \widehat{PDC} = 90^\circ$, o Teorema 2.10 garante que o quadrilátero $PEDC$ também é inscritível. Ainda, como P pertence à circunferência que circunscreve o triângulo ABC , temos em torno do ponto P , as seguintes relações angulares:

$$\widehat{APC} = \widehat{APD} + \widehat{DPC}; \quad (3.3)$$

$$\widehat{DPF} = \widehat{APD} + \widehat{APF}. \quad (3.4)$$

Subtraindo (3.4) de (3.3), obtemos:

$$\begin{aligned} \widehat{APC} - \widehat{DPF} &= \widehat{APD} + \widehat{DPC} - \widehat{APD} - \widehat{APF}; \\ \widehat{APC} - \widehat{DPF} &= \widehat{DPC} - \widehat{APF}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

De acordo com o Teorema 2.10, temos nos quadriláteros inscritíveis $PEDC$ e $PFAE$ que

$$\widehat{DPC} \equiv \widehat{DEC} \quad (3.6)$$

e

$$\widehat{APF} \equiv \widehat{AEF}. \quad (3.7)$$

Substituindo (3.6) e (3.7) em (3.5), temos que:

$$\widehat{APC} - \widehat{DPF} = \widehat{DEC} - \widehat{AEF}. \quad (3.8)$$

Como o quadrilátero $ABCP$ está inscrito na circunferência que circunscribe o triângulo ABC , temos pelo Teorema 2.9 que:

$$\widehat{APC} + \widehat{ABC} = 180^\circ. \quad (3.9)$$

Analogamente, o quadrilátero $BFPD$ é inscritível e

$$\widehat{DPF} + \widehat{ABC} = 180^\circ. \quad (3.10)$$

De (3.9) e (3.10) concluímos que \widehat{APC} e \widehat{DPF} possuem o mesmo suplemento \widehat{ABC} , sendo, portanto, congruentes. Em (3.8), $\widehat{APC} \equiv \widehat{DPF}$ implica em $\widehat{DEC} \equiv \widehat{AEF}$. Assim, \widehat{DEC} e \widehat{AEF} são ângulos opostos pelo vértice e, portanto, D , E e F são colineares.

□

Teorema 3.2 (Recíproco do teorema de Simson-Wallace). *Em um triângulo ABC , se os pés das perpendiculares baixadas de um ponto P , não pertencente às retas suportes dos lados de ABC , aos três lados de ABC são colineares, então o ponto P pertence à circunferência circunscrita a ABC .*

Demonstração.

Sejam D , E e F os pés das perpendiculares traçadas a partir do ponto P respectiva-

mente aos lados \overline{AC} , \overline{BC} , \overline{AB} do triângulo ABC e $\overline{CG} \parallel \overline{EP}$, conforme mostra a Figura 3.5. O quadrilátero $PFAD$ é, de acordo com o Teorema 2.9, inscrito em uma circunferência. Logo,

$$\widehat{APF} \equiv \widehat{ADF} = \beta. \quad (3.11)$$

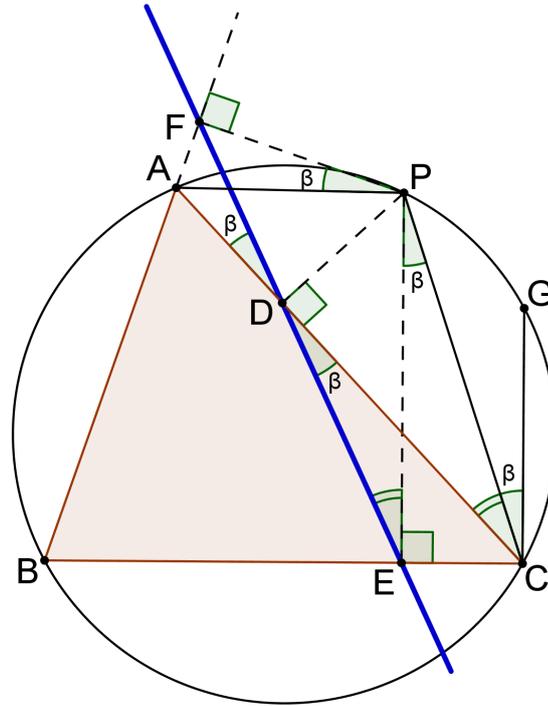


Figura 3.5: Hipóteses e tese do Teorema 3.2

Ainda, o quadrilátero $PDEC$ é, conforme o Teorema 2.10, inscrito e, portanto,

$$\widehat{EDC} \equiv \widehat{EPC}. \quad (3.12)$$

Como, por hipótese, os pontos D , E e F são colineares, temos então que \widehat{ADF} e \widehat{EDC} são ângulos opostos pelo vértice D e

$$\widehat{ADF} \equiv \widehat{EDC} = \beta. \quad (3.13)$$

De (3.11), (3.12) e (3.13) decorre que $\widehat{APF} \equiv \widehat{EDC} \equiv \widehat{EPC} = \beta$. Assim,

$$\widehat{BAP} = 180^\circ - (90^\circ - \beta) = 90^\circ + \beta$$

e

$$\widehat{BCP} = 180^\circ - (90^\circ + \beta) = 90^\circ - \beta.$$

Logo, \widehat{BAP} e \widehat{BCP} são ângulos suplementares e, portanto, pelo Teorema 2.9, o quadrilátero $BAPC$ é inscritível, isto é, o ponto P pertence à circunferência circunscrita ao triângulo ABC .

□

3.3.2 VIA TEOREMA DE MENELAUS

De acordo com (KAY, 2011), muitos teoremas da geometria não podem ser desenvolvidos adequadamente sem o conhecimento de um resultado creditado a Menelaus de Alexandria por volta de 100 d.C. Esse resultado diz respeito à colinearidade de pontos e atualmente é conhecido como teorema de Menelaus. Nesta segunda demonstração do teorema de Simson-Wallace, apesar do uso fortemente presente da condição de inscrição de um quadrilátero, o teorema de Menelaus desempenha um papel fundamental na abordagem final da prova. Apresentamos o teorema de Menelaus - Teorema A.1 - no Apêndice deste trabalho.

Demonstração.

Seja o ponto P pertencente à circunferência que circunscreve o triângulo ABC . A partir de P , baixamos as perpendiculares $\overline{PD} = a$, $\overline{PE} = b$ e $\overline{PF} = c$, relativas respectivamente aos lados \overline{BC} , \overline{AB} e \overline{AC} do triângulo ABC , conforme ilustra a Figura 3.6.

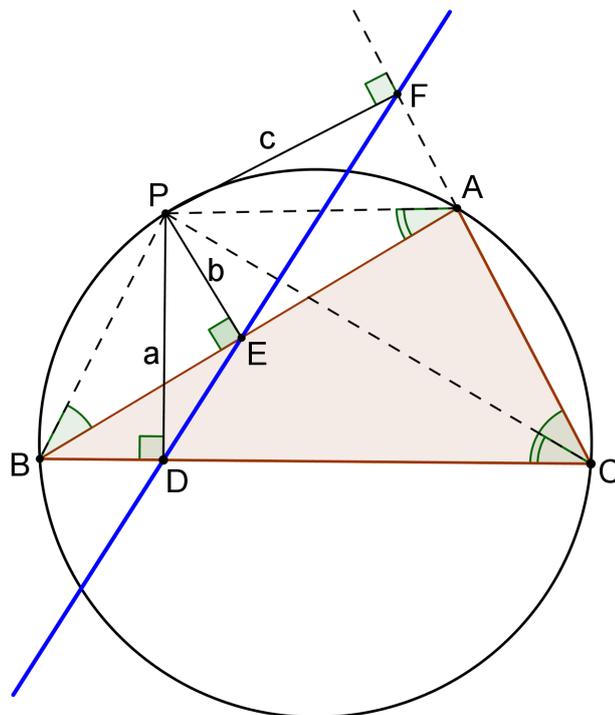


Figura 3.6: Ponto P pertencente à circunferência que circunscreve o triângulo ABC

Como o quadrilátero $PACB$ está inscrito na circunferência, o Teorema 2.9 garante que os ângulos opostos desse quadrilátero são suplementares. Em particular,

$$\widehat{PBC} + \widehat{PAC} = 180^\circ. \quad (3.14)$$

Contudo,

$$\widehat{PAC} = 180^\circ - \widehat{PAF}. \quad (3.15)$$

Substituindo (3.15) em (3.14), concluímos que $\widehat{PBC} \equiv \widehat{PAF}$.

Ainda, pelo Teorema 2.10 temos que $\widehat{PBA} \equiv \widehat{PCF}$ e $\widehat{PCB} \equiv \widehat{PAB}$. Assim, pelo caso de semelhança de triângulos AA (ângulo-ângulo) e adotando como direção positiva aquela que percorre o perímetro do triângulo ABC de A para B , B para C e de C para A , constatamos que:

$$\triangle PDC \sim \triangle PEA \implies \frac{\overline{PD}}{\overline{PE}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{AE}} = \frac{a}{b}; \quad (3.16)$$

$$\triangle PFA \sim \triangle PDB \implies \frac{\overline{PF}}{\overline{PD}} = \frac{\overline{FA}}{\overline{DB}} = \frac{c}{a}; \quad (3.17)$$

$$\triangle PBE \sim \triangle PFC \implies \frac{\overline{PE}}{\overline{PF}} = \frac{\overline{EB}}{\overline{FC}} = -\frac{b}{c}. \quad (3.18)$$

Empregando (3.16), (3.17) e (3.18), concluímos que:

$$\frac{\overline{DC}}{\overline{AE}} \cdot \frac{\overline{FA}}{\overline{DB}} \cdot \frac{\overline{EB}}{\overline{FC}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{a} \cdot \left(-\frac{b}{c}\right) = -1,$$

ou seja, o teorema de Menelaus - Teorema A.1 - é satisfeito e, portanto, os pontos D , E , e F são colineares.

□

3.3.3 VIA PARALELISMO ENTRE RETAS

Nesta terceira e última demonstração do teorema de Simson-Wallace, faremos uso de vários resultados do segundo capítulo deste trabalho e, como nas provas anteriores, a utilização do quadrilátero inscritível se encontra presente. Apresentamos a seguir duas formas para a demonstração via paralelismo.

Forma 1

Demonstração.

Seja o ponto P pertencente à circunferência que circunscreve o triângulo ABC . A partir

do ponto P , baixamos as perpendiculares \overline{PD} , \overline{PE} e \overline{PF} , relativas respectivamente aos lados \overline{BC} , \overline{AC} e \overline{AB} do triângulo ABC , conforme mostra a Figura 3.7.

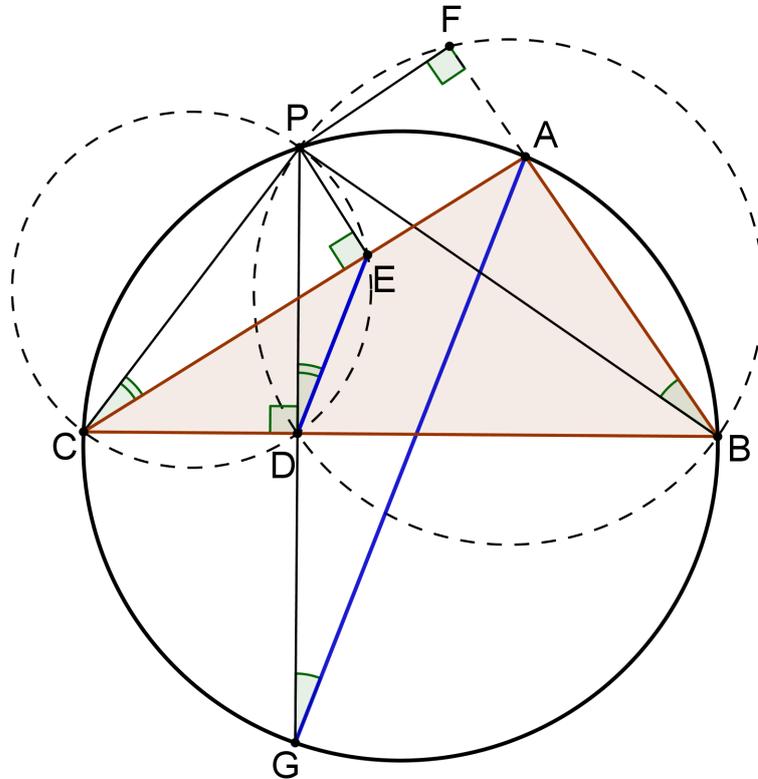


Figura 3.7: Retas paralelas DE e GA

Como os ângulos \widehat{PEC} e \widehat{PDC} são retos, temos, pelo Teorema 2.10, que $PCDE$ é inscritível e \overline{PC} é um diâmetro da circunferência que passa pelos pontos D e E . Os ângulos inscritos \widehat{PCE} e \widehat{PDE} subentendem o mesmo arco PE da circunferência que circunscreve o triângulo PCE . Logo,

$$\widehat{PCE} \equiv \widehat{PDE}. \quad (3.19)$$

Por outro lado, os ângulos \widehat{PCE} e \widehat{PGA} , onde G é o ponto de intersecção do prolongamento do segmento PD com a circunferência que circunscreve o triângulo ABC , subentendem o mesmo arco PA da circunferência circunscrita ao triângulo ABC , como mostra a Figura 3.7. Assim,

$$\widehat{PCE} \equiv \widehat{PGA}. \quad (3.20)$$

De (3.19) e (3.20), temos que $\widehat{PDE} \equiv \widehat{PGA}$. Dessa forma, as retas DE e GA são paralelas, pois intersectadas pela reta PG formam ângulos correspondentes congruentes.

Ainda, o quadrilátero $PABG$ está inscrito na circunferência que circunscreve o triângulo

ABC . Então, conforme o Teorema 2.10,

$$\widehat{PGA} \equiv \widehat{PBA} \equiv \widehat{PBF}. \quad (3.21)$$

Porém, temos segundo o Teorema 2.9 que o quadrilátero $PDBF$ também é inscrito, o que implica em

$$\widehat{PBF} \equiv \widehat{PDF}. \quad (3.22)$$

De (3.21) e (3.22), temos que $\widehat{PDF} \equiv \widehat{PGA}$. Logo, as retas DF e GA são paralelas porque formam ângulos correspondentes congruentes quando intersectadas pela reta PG .

Como $\overrightarrow{DE} \parallel \overrightarrow{GA}$ e $\overrightarrow{DF} \parallel \overrightarrow{GA}$, concluímos então que os pontos D, E e F são colineares.

□

Forma 2

Demonstração.

Suponhamos que o ponto P pertença à circunferência α que circunscreve o triângulo ABC e que a reta PD seja tangente a α em P e perpendicular em D ao prolongamento do lado \overline{BC} , conforme ilustra a Figura 3.8. Sejam D, G e H os pés das perpendiculares baixadas do ponto P , respectivamente aos lados $\overline{BC}, \overline{AC}$ e \overline{AB} do triângulo ABC . Como os ângulos \widehat{PDC} e \widehat{PGC} são retos, então, de acordo com o Teorema 2.10, os pontos D e G estão na mesma circunferência λ de diâmetro \overline{PC} .

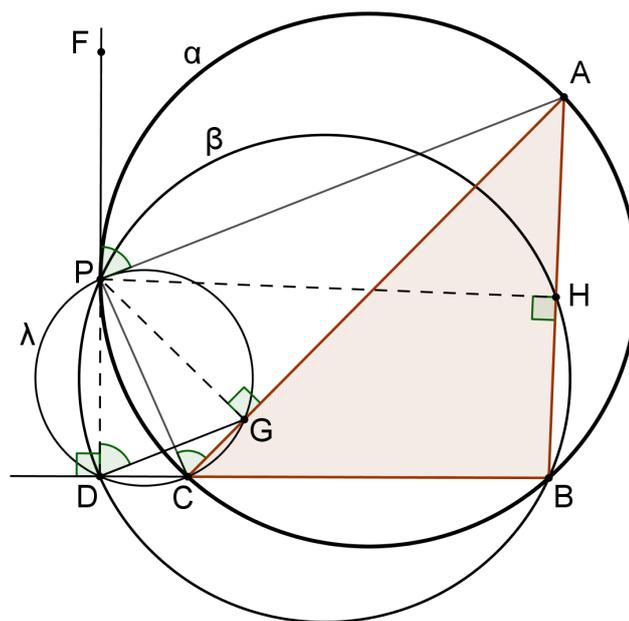


Figura 3.8: Ângulo de segmento $F\widehat{P}A$ relativo à circunferência α

Agora, consideremos na reta PD um ponto F distinto de P e de D . Conforme ilustrado na Figura 3.8, o ângulo $F\widehat{P}A$ é um ângulo de segmento relativo à circunferência α e, de acordo com o Teorema 2.2, sua medida é igual à metade da medida do ângulo central definido pelo arco menor AP . Por outro lado, o ângulo $P\widehat{C}A$ é um ângulo inscrito na circunferência α e também tem abertura igual ao arco menor AP . Assim,

$$F\widehat{P}A \equiv P\widehat{C}A. \quad (3.23)$$

Na circunferência λ , os ângulos inscritos $P\widehat{C}A$ e $P\widehat{D}G$ subentendem o mesmo arco PG . Logo,

$$P\widehat{C}A \equiv P\widehat{D}G. \quad (3.24)$$

Comparando (3.23) e (3.24), concluímos que $F\widehat{P}A \equiv P\widehat{D}G$ e, portanto, as retas PA e DG são paralelas porque determinam ângulos correspondentes congruentes com a reta PD .

Por fim, como o quadrilátero $PHBD$ está, segundo o Teorema 2.9, inscrito na circunferência β , segue pelo Teorema 2.1 que:

$$P\widehat{D}H \equiv P\widehat{B}H \equiv P\widehat{B}A. \quad (3.25)$$

Por outro lado, temos na circunferência α que $P\widehat{B}A$ é um ângulo inscrito que subentende o arco menor AP e $F\widehat{P}A$ é um ângulo de segmento que também subentende o menor arco AP . Assim,

$$P\widehat{B}A \equiv F\widehat{P}A. \quad (3.26)$$

Comparando (3.25) e (3.26), concluímos que $P\widehat{D}H \equiv F\widehat{P}A$, ou seja, as retas PA e DH são paralelas porque determinam ângulos correspondentes congruentes com a reta FD .

Como $\overleftrightarrow{PA} \parallel \overleftrightarrow{DG}$ e $\overleftrightarrow{PA} \parallel \overleftrightarrow{DH}$, concluímos então que os pontos D , G e H são colineares.

□

3.4 PROPRIEDADES DA RETA DE SIMSON-WALLACE

Nesta seção apresentamos três importantes teoremas relacionados à reta de Simson-Wallace: o primeiro trata do ângulo formado entre duas retas de Simson-Wallace; o segundo mostra a relação existente entre o ortocentro de um triângulo inscrito em uma circunferência e a reta de Simson-Wallace; o terceiro define a reta de Steiner, paralela à reta de Simson-Wallace.

3.4.1 ÂNGULO ENTRE DUAS RETAS DE SIMSON-WALLACE

Lema 3.1. *Sejam P um ponto pertencente à circunferência circunscrita a um triângulo ABC e r a reta de Simson-Wallace que possui P como polo e intersecta o lado \overline{BC} de ABC no ponto X . Se o prolongamento do segmento PX intersecta a circunferência no ponto Q , então $\overline{AQ} \parallel r$.*

A Figura 3.9 ilustra as hipóteses e a tese do Lema 3.1.

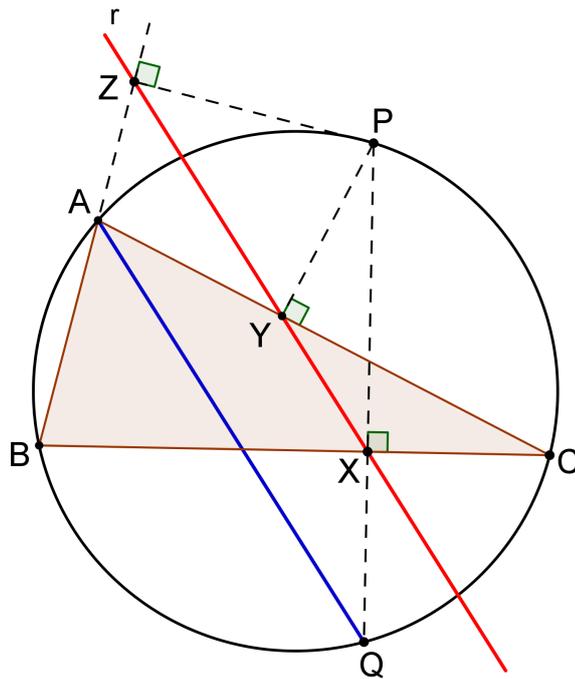


Figura 3.9: Segmento AQ paralelo à reta r de Simson-Wallace

Demonstração.

Sejam os pontos X , Y e Z os pés das perpendiculares baixadas do ponto P respectivamente aos lados \overline{BC} , \overline{AC} e \overline{AB} do triângulo ABC , como na Figura 3.10.

No quadrilátero $PXBZ$, $\widehat{PZB} + \widehat{PXB} = 180^\circ$. Assim, de acordo com o Teorema 2.9, $PXBZ$ é inscritível. Como os pontos P , X , B e Z pertencem à mesma circunferência, segue do Teorema 2.1 que

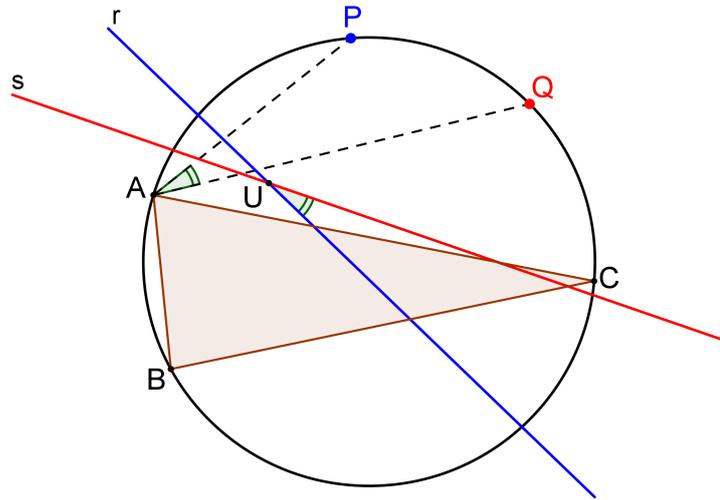
$$\widehat{PBZ} \equiv \widehat{P\hat{X}Z}. \quad (3.27)$$

Observando agora a circunferência circunscrita ao triângulo ABC , temos, de acordo com o Teorema 2.1, que

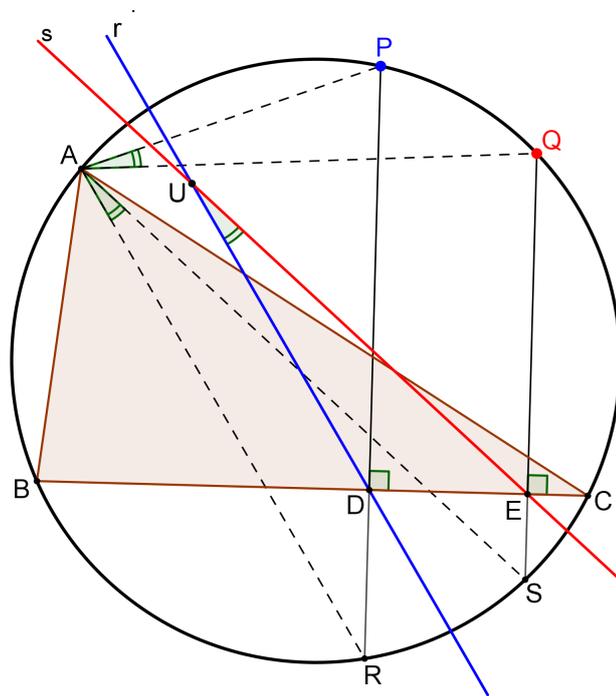
$$\widehat{PBA} \equiv \widehat{PQA}. \quad (3.28)$$

Simson-Wallace com polo em Q é paralela ao segmento AS .

Temos então, pelas propriedades de retas paralelas intersectadas por uma reta transversal, que $\widehat{E\hat{U}D} \equiv \widehat{R\hat{A}S}$. Como \overline{PR} e \overline{QS} são cordas da circunferência, com $\overline{PR} \parallel \overline{QS}$, concluímos que os arcos PQ e RS são congruentes e, portanto, $\widehat{R\hat{A}S} \equiv \widehat{P\hat{A}Q} \equiv \widehat{E\hat{U}D}$.



(a)



(b)

Figura 3.11: (a) Ângulo formado entre as retas r e s de Simson-Wallace; (b) segmentos PD e QE perpendiculares ao lado \overline{BC} do triângulo ABC

□

Corolário 3.1 (Teorema 3.3). *Duas retas de Simson-Wallace para um determinado triângulo*

são perpendiculares se, e somente se, os seus polos estão em extremidades opostas de um diâmetro da circunferência circunscrita ao triângulo.

3.4.2 ORTOCENTRO DO TRIÂNGULO INSCRITO

Teorema 3.4. *Se H é o ortocentro de um triângulo ABC e P é um ponto da circunferência circunscrita a ABC , então o ponto médio do segmento PH pertence à reta de Simson-Wallace do triângulo ABC com polo em P .*

A Figura 3.12 ilustra as hipóteses e a tese do Teorema 3.4.

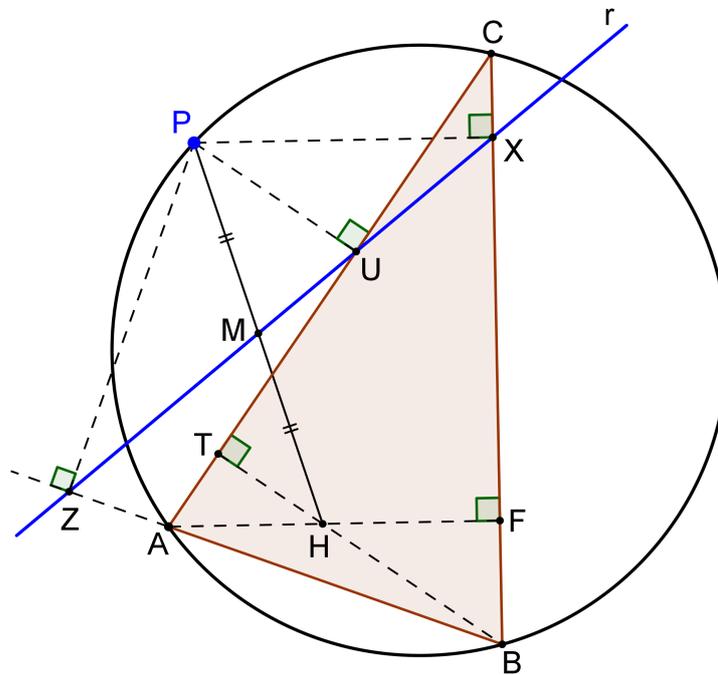


Figura 3.12: Relação entre o ortocentro H do triângulo ABC e a reta r de Simson-Wallace

Demonstração.

Sejam \overline{AF} e \overline{BT} as alturas do triângulo ABC relativas, respectivamente, aos lados \overline{BC} e \overline{AC} , e X o pé da perpendicular baixada do ponto P ao lado \overline{BC} de ABC . A reta r de Simson-Wallace com polo em P intersecta \overline{PH} em M . Prolongando \overline{AF} e \overline{PX} , estes intersectam a circunferência em E e Q , respectivamente, conforme mostra a Figura 3.13.

Além disso, traçamos a corda \overline{PE} que intersecta o lado \overline{BC} do triângulo em D e prolongamos \overline{HD} até a intersecção com a reta PQ em R . Como F é o pé da perpendicular da altura \overline{AF} , segue que F pertence à circunferência de nove pontos - Teorema 3.7. Assim, pelo Teorema A.4, F é o ponto médio do segmento \overline{HE} , pois a circunferência de nove pontos é o lugar geométrico

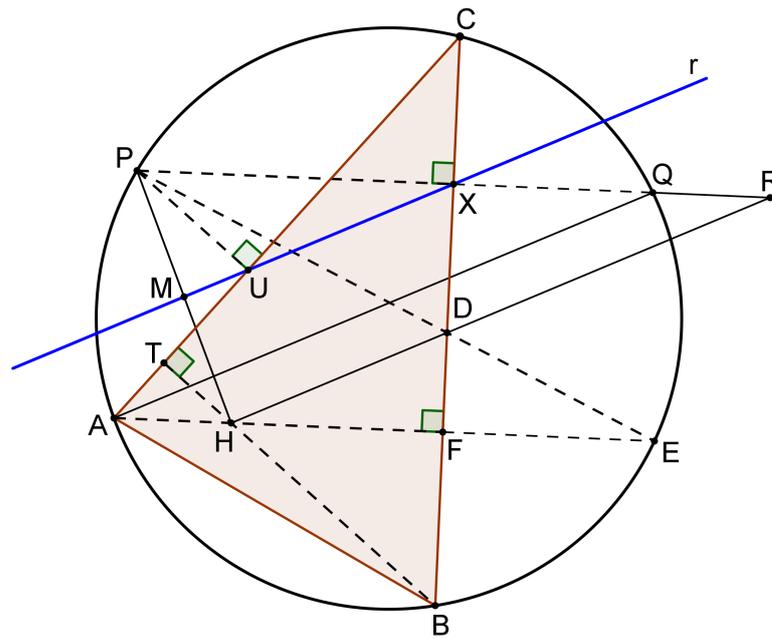


Figura 3.13: Segmento PH e a reta r de Simson-Wallace

formado por todos os pontos médios dos segmentos de extremos no ortocentro do triângulo ABC e na circunferência que circunscreve ABC . Desta forma, o triângulo HDE é isósceles de base \overline{HE} . Como \widehat{PQA} e \widehat{PEA} subentendem o mesmo arco PA , $\widehat{PQA} \equiv \widehat{PEA}$, e $\widehat{RHE} \equiv \widehat{PRH}$, pois são ângulos alternos internos em relação à reta HR .

A reta de Simson-Wallace com polo em P é, segundo o Lema 3.1, paralela a \overline{AQ} . Segue então que $\widehat{RHE} \equiv \widehat{PQA} \equiv \widehat{PXM}$, isto é, $\overline{HR} \parallel \overline{AQ}$ e, assim, temos que $\overline{HR} \parallel \overline{XM}$. Ainda, observamos que os triângulos XPD e XRD são congruentes pelo caso ALA_o (ângulo-lado-ângulo oposto) e, portanto, $\overline{XP} \equiv \overline{XR}$, ou seja, X é ponto médio de \overline{PR} . Por fim, os triângulos PXM e PHR são semelhantes pelo caso AA (ângulo-ângulo) na razão $1 : 2$ e disso segue imediatamente que $\overline{PM} = \frac{\overline{PH}}{2}$, ou equivalentemente, M é ponto médio de \overline{PH} .

□

3.4.3 A RETA DE STEINER

Teorema 3.5 (A reta de Steiner). *Os pontos simétricos de um ponto P , pertencente à circunferência circunscrita a um triângulo ABC , em relação aos lados desse triângulo, são colineares e pertencem à reta de Steiner, paralela à reta de Simson-Wallace com polo em P .*

Demonstração.

Sejam P um ponto da circunferência circunscrita ao triângulo ABC e D, E, F os pés

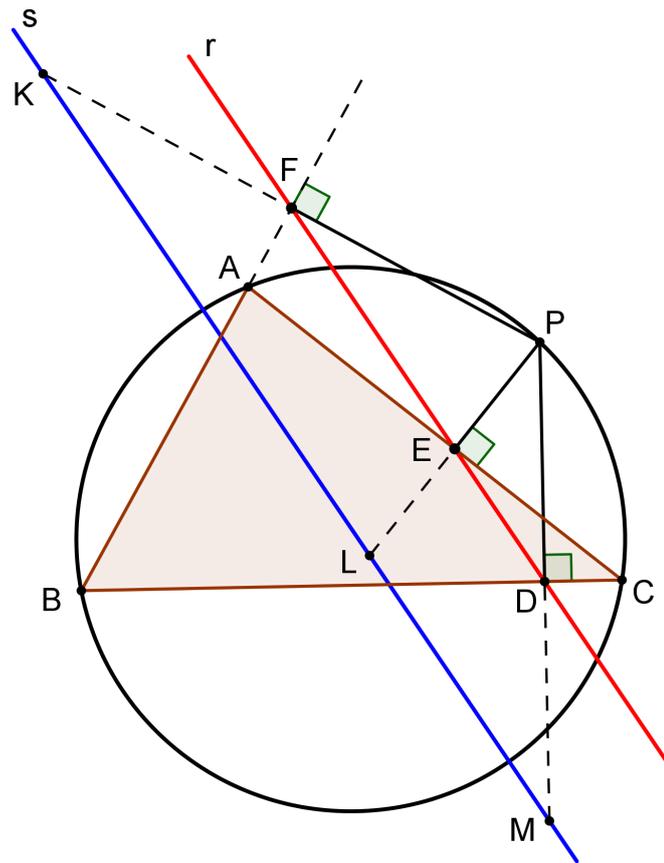


Figura 3.14: Reta r de Simson-Wallace e a reta s de Steiner

das perpendiculares baixadas de P respectivamente aos lados \overline{BC} , \overline{AC} e \overline{AB} de ABC . Como já demonstrado no Teorema 3.1, os pontos D , E e F são colineares. A reta r que passa por esses pontos é a reta de Simson-Wallace.

Consideremos os pontos K , L e M , simétricos do ponto P em relação aos lados \overline{AB} , \overline{AC} e \overline{BC} do triângulo ABC , conforme ilustra a Figura 3.14. Como os pontos F , E e D são pontos médios dos segmentos PK , PL e PM , respectivamente, então \overline{ED} é a base média do triângulo PLM e, portanto, $\overline{ED} \parallel \overline{LM}$. Analogamente, \overline{FE} é a base média do triângulo PKL e disso resulta $\overline{FE} \parallel \overline{KL}$. Concluímos então que os pontos K , L e M são colineares e a reta s que passa pelos mesmos é paralela à reta r de Simson-Wallace.

□

3.5 APLICAÇÕES

Para finalizar o capítulo, elencamos três importantes aplicações do teorema de Simson-Wallace.

3.5.1 A DESIGUALDADE DE PTOLOMEU

No segundo capítulo deste trabalho, demonstramos o Teorema 2.12, uma consequência imediata dos quadriláteros inscritíveis, conhecido como o teorema de Ptolomeu. Demonstramos agora a generalização do teorema de Ptolomeu fazendo uso do teorema de Simson-Wallace.

Teorema 3.6 (A desigualdade de Ptolomeu). *Se $ABCD$ é um quadrilátero de diagonais \overline{AC} e \overline{BD} , então*

$$\overline{AC} \cdot \overline{BD} \leq \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC},$$

ocorrendo a igualdade somente se o quadrilátero $ABCD$ estiver inscrito em uma circunferência.

Demonstração.

Sejam os pontos E , F e G os pés das perpendiculares baixadas do vértice D respectivamente à diagonal \overline{AC} , ao prolongamento do lado \overline{AB} e ao lado \overline{BC} , conforme mostra a Figura 3.15.

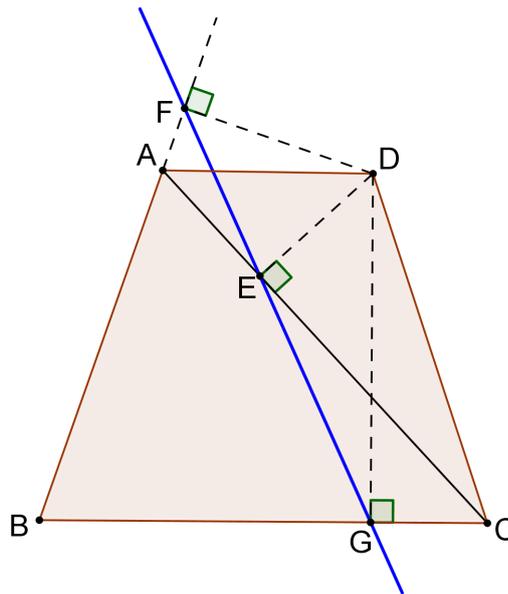


Figura 3.15: A desigualdade de Ptolomeu

Temos da Proposição 3.1 que

$$\frac{\overline{GE}}{\text{sen}(\widehat{BCA})} = \overline{CD}, \quad (3.30)$$

e, aplicando o Teorema 2.8 ao triângulo ABC , obtemos

$$\frac{\overline{AB}}{\text{sen}(\widehat{BCA})} = 2R, \quad (3.31)$$

sendo R o raio da circunferência circunscrita ao triângulo ABC . Assim, como $\text{sen}(\widehat{BCA})$ é um termo comum às igualdades (3.30) e (3.31), temos que:

$$\overline{GE} = \frac{\overline{CD} \cdot \overline{AB}}{2R}. \quad (3.32)$$

Analogamente, concluímos que

$$\overline{EF} = \frac{\overline{AD} \cdot \overline{BC}}{2R} \quad (3.33)$$

e

$$\overline{GF} = \frac{\overline{BD} \cdot \overline{AC}}{2R}. \quad (3.34)$$

Supondo que o quadrilátero $ABCD$ é inscrito, de acordo com o Teorema 3.1 os pontos E , F , e G são colineares. Logo:

$$\overline{GF} = \overline{EF} + \overline{GE}. \quad (3.35)$$

Substituindo (3.32), (3.33) e (3.34) em (3.35), concluímos que:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{BD} \cdot \overline{AC}}{2R} &= \frac{\overline{AD} \cdot \overline{BC}}{2R} + \frac{\overline{CD} \cdot \overline{AB}}{2R}; \\ \overline{AC} \cdot \overline{BD} &= \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC}. \end{aligned}$$

Caso contrário, isto é, se o quadrilátero $ABCD$ não for inscrito, os pontos E , F e G não são colineares e então, pela desigualdade triangular, temos que:

$$\begin{aligned} \overline{GF} &< \overline{EF} + \overline{GE}; \\ \frac{\overline{BD} \cdot \overline{AC}}{2R} &< \frac{\overline{AD} \cdot \overline{BC}}{2R} + \frac{\overline{CD} \cdot \overline{AB}}{2R}; \\ \overline{AC} \cdot \overline{BD} &< \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC}. \end{aligned}$$

□

3.5.2 A CIRCUNFERÊNCIA DE FEUERBACH

Uma importante relação existente entre duas retas de Simson-Wallace é que o ponto de intersecção dessas retas, quando existe, se encontra exatamente na circunferência de nove pontos, também conhecida como circunferência de Feuerbach em homenagem a Karl Wilhelm von Feuerbach (1800-1834).

Teorema 3.7 (Circunferência de nove pontos). *Em um triângulo ABC , os pés das alturas, os pontos médios dos lados e os pontos médios dos segmentos que têm por extremidades os vértices e o ortocentro de ABC , pertencem a uma mesma circunferência, denominada circunferência de nove pontos.*

Demonstração.

Sejam: M , M_1 e M_2 os pontos médios dos lados \overline{BC} , \overline{AB} e \overline{AC} , respectivamente, do triângulo ABC ; D , E , F os pés das alturas relativas aos lados \overline{BC} , \overline{AB} e \overline{AC} , respectivamente; P , Q e R os pontos médios dos segmentos AH , BH e CH , respectivamente; H o ortocentro do triângulo ABC , conforme ilustra a Figura 3.16. Temos então os nove pontos P , E , M_1 , Q , D , M , R , M_2 e F e precisamos provar que todos pertencem a uma mesma circunferência.

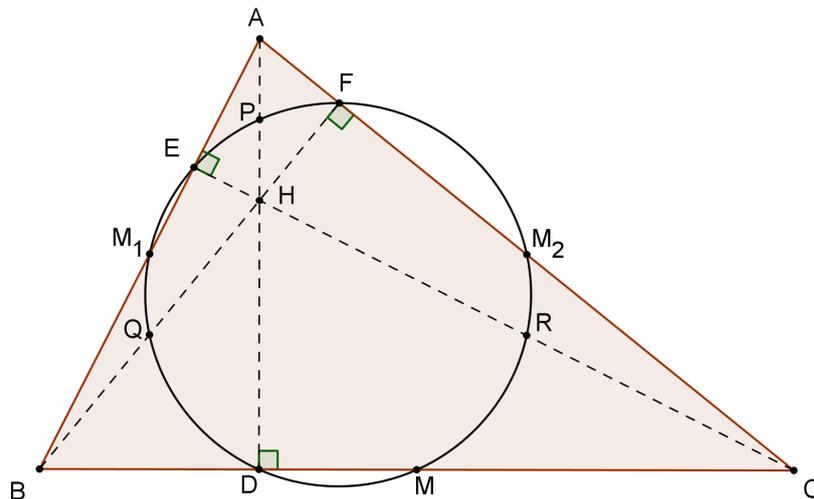


Figura 3.16: Circunferência de nove pontos

Primeiramente, conforme já demonstrado no Teorema 2.7, existe uma única circunferência que passa pelos pontos M , M_1 e M_2 . Como M e M_2 são pontos médios dos lados \overline{BC} e \overline{AC} , respectivamente, segue que os triângulos CMM_2 e CBA são semelhantes na razão $1 : 2$ e o segmento MM_2 é paralelo ao lado \overline{AB} . Assim, $\overline{MM_2} \equiv \overline{BM_1}$. No triângulo retângulo ADB , $\overline{DM_1}$ é a mediana relativa à hipotenusa. Logo, $\overline{DM_1} \equiv \overline{BM_1}$ e, conseqüentemente, $\overline{DM_1} \equiv \overline{MM_2}$. Assim, o quadrilátero DMM_2M_1 é um trapézio isósceles de bases \overline{DM} e $\overline{M_1M_2}$, conforme mostra a Figura 3.17.

Como os ângulos opostos são suplementares, o trapézio DMM_2M_1 é, conforme o Teorema 2.9, inscritível e, portanto, o ponto D pertence à circunferência que passa pelos pontos M , M_1 e M_2 . Podemos provar de forma análoga que os pontos E e F , pés das outras duas alturas do triângulo ABC , também pertencem a essa circunferência.

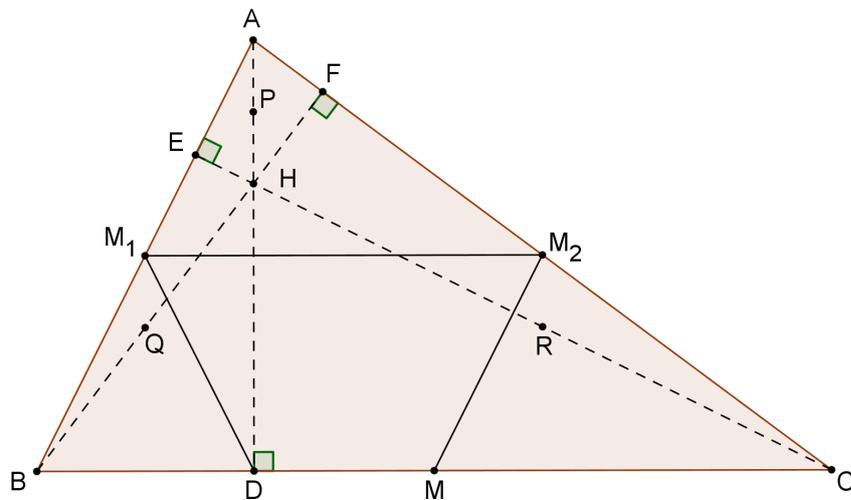


Figura 3.17: Trapézio isósceles de bases \overline{DM} e $\overline{M_1M_2}$

Resta-nos demonstrar que os pontos P , Q e R também pertencem a essa circunferência. No triângulo ABH , o ponto P é o ponto médio do lado \overline{AH} e o ponto M_1 é o ponto médio do lado \overline{AB} , como ilustra a Figura 3.18.

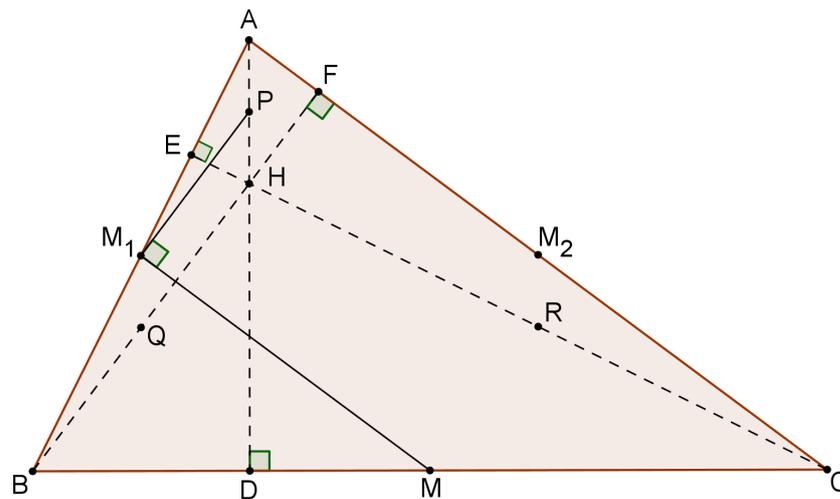


Figura 3.18: Triângulo AHB , ponto médio P e o triângulo APM_1

Dessa forma, como PM_1 é a base média do triângulo ABH , os triângulos AM_1P e ABH são semelhantes e $\overline{PM_1} \parallel \overline{BH}$. Analogamente, $\overline{MM_1} \parallel \overline{AC}$ no triângulo ABC . Temos então que $\widehat{MM_1P} \equiv \widehat{AFB}$, isto é, $\widehat{MM_1P} = 90^\circ$. Pelo Teorema 2.10, concluímos que o quadrilátero MDM_1P é inscritível, pois o ângulo formado entre o lado $\overline{PM_1}$ e a diagonal $\overline{MM_1}$ é congruente ao ângulo formado pela diagonal \overline{PD} e o lado \overline{DM} , ambos ângulos retos. Assim, os pontos M , D , M_1 e P pertencem à mesma circunferência. Empregando o mesmo raciocínio, podemos demonstrar que os pontos Q e R também pertencem a essa circunferência. Logo, os nove pontos

$P, E, M_1, Q, D, M, R, M_2$ e F pertencem a uma mesma circunferência, a circunferência de nove pontos ou circunferência de Feuerbach.

□

Teorema 3.8. *Se ABC é um triângulo e os pontos P e Q são as extremidades de um diâmetro da circunferência circunscrita a ABC , então as retas r e s de Simson-Wallace do triângulo ABC com polos em P e Q , respectivamente, intersectam-se na circunferência de nove pontos do triângulo ABC .*

A Figura 3.19 ilustra as hipóteses e a tese do Teorema 3.8.

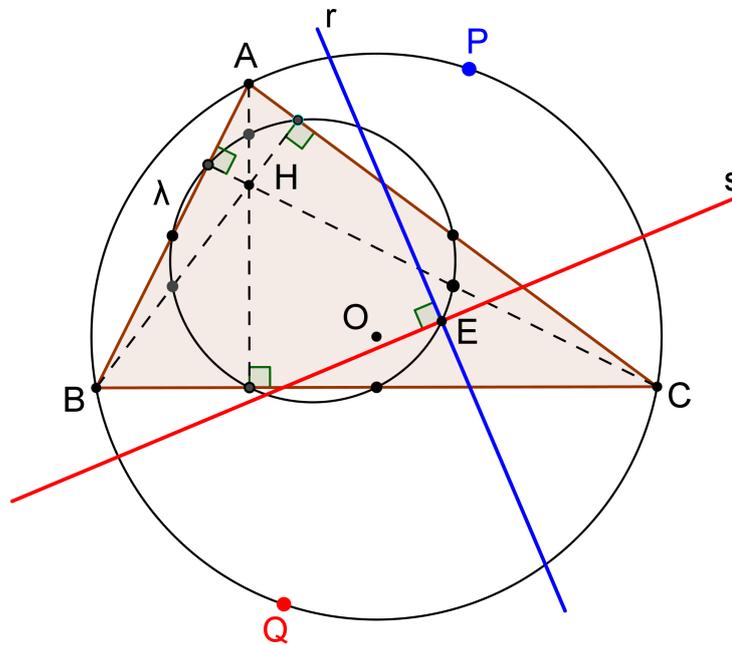


Figura 3.19: Retas r e s de Simson-Wallace e a circunferência de nove pontos λ

Demonstração.

Sejam E o ponto de intersecção das retas r e s de Simson-Wallace com polos nos pontos P e Q , respectivamente, e H o ortocentro do triângulo ABC . Conforme já demonstrado no Teorema 3.4, a reta r de Simson-Wallace com polo em P intersecta \overline{PH} no ponto médio M , enquanto que a reta s de Simson-Wallace com polo em Q intersecta \overline{QH} no ponto médio N , conforme ilustrado na Figura 3.20.

Como \overline{PQ} é um diâmetro da circunferência circunscrita ao triângulo ABC e, além disso, P e Q são polos das retas r e s de Simson-Wallace, então temos pelo Corolário 3.1 que $\widehat{MEN} = 90^\circ$. No triângulo PQH , M e N são os pontos médios dos lados \overline{PH} e \overline{QH} , respectivamente. Assim, os triângulos HNM e HPQ são semelhantes na razão $1 : 2$, pois \overline{MN} é a base média do

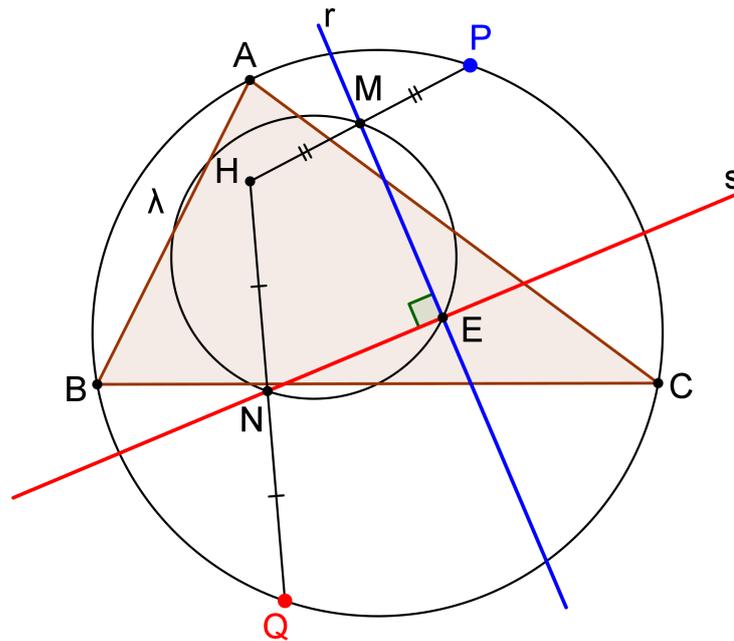


Figura 3.20: Circunferência de nove pontos e a intersecção das retas r e s de Simson-Wallace

triângulo PHQ . Temos então que $\overline{MN} = \frac{\overline{PQ}}{2}$ e, como em qualquer triângulo a circunferência de nove pontos possui diâmetro igual ao raio da circunferência circunscrita - Teorema A.5, segue que \overline{MN} é um diâmetro da circunferência de nove pontos λ . Por fim, como $\widehat{MEN} = 90^\circ$ e \overline{MN} é um diâmetro da circunferência λ , concluímos que o ponto E pertence a λ (arco capaz) e, portanto, as retas r e s de Simson-Wallace se intersectam na circunferência de nove pontos.

□

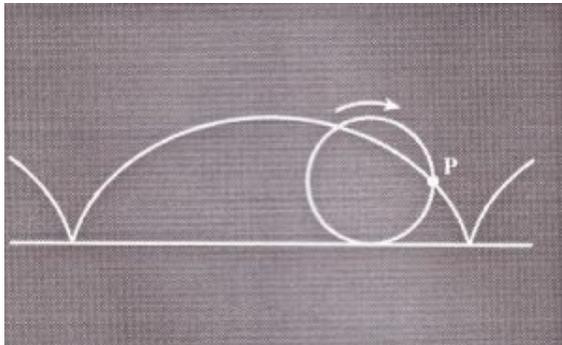
3.5.3 ENVELOPE DAS RETAS DE SIMSON-WALLACE

Em 1856, Jacob Steiner (1796-1863) demonstrou que, ao traçarmos todas as retas de Simson-Wallace com polos nos pontos da circunferência circunscrita a um triângulo, essa família de retas, ou envelope de retas de Simson-Wallace, descreve uma curva cíclica denominada hipociclóide de três cúspides ou, como é originalmente conhecida, deltóide de Steiner. Segundo (COXETER, 1969), a reta de Simson-Wallace se transforma em uma outra correspondente, sobre um centro de rotação em constante mudança; as retas de Simson-Wallace envolvem a curva deltóide e são tangentes à mesma.

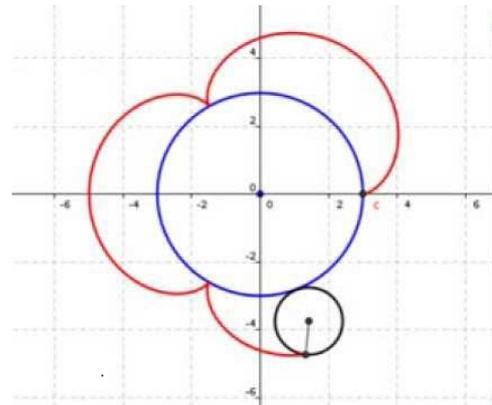
Atualmente, é possível visualizar o envelope das retas de Simson-Wallace e, consequentemente, o deltóide de Steiner, com o emprego de diversos softwares de geometria dinâmica. Na Figura 3.21, ilustramos a construção do deltóide de Steiner com o GeoGebra.

Definição 3.2 (Curvas cíclicas). *Ao considerarmos um plano com duas curvas tangentes, uma*

A Figura 3.22(b) ilustra uma curva epiciclóide.



(a)

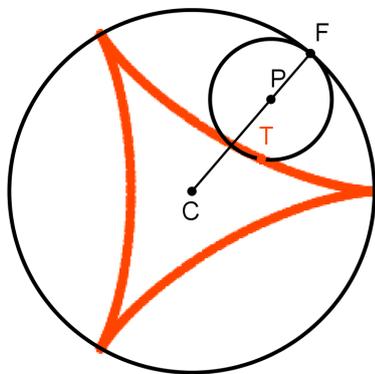


(b)

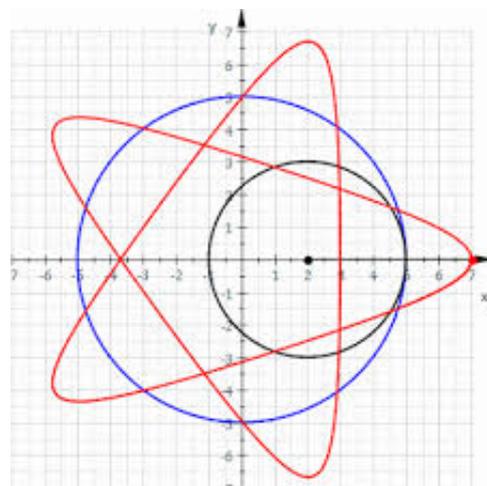
Figura 3.22: Curvas: (a) cicloide (TEMPO, 2018); (b) epiciclóide (YOUTUBE, 2018)

Definição 3.5 (Hipociclóide). *A curva gerada por um ponto da circunferência (geratriz) que rola sem deslizar dentro de uma outra circunferência (diretriz) é denominada hipociclóide.*

A Figura 3.23 ilustra curvas hipociclóides.



(a)



(b)

Figura 3.23: Curvas hipociclóides: (a) deltóide de Steiner; (b) hipotrocóide (PLANTAO, s.d.)

3.5.4 DEMONSTRAÇÃO DO ENVELOPE DAS RETAS DE SIMSON-WALLACE.

A identificação do envelope das retas de Simson-Wallace com o deltóide de Steiner é uma demonstração elaborada e engenhosa. No decorrer dos anos, muitas demonstrações a respeito foram publicadas, porém grande parte dessas provas possui um caráter analítico (trigonométrico, por exemplo). Uma dessas demonstrações pode ser encontrada em (DORRIE, 1965).

Fundamentados em (GUZMÁN, 2001), fazemos nesta seção a identificação do envelope das retas de Simson-Wallace com a curva hipociclóide tricúspide. Para tanto, enunciaremos e demonstramos três lemas: o Lema 3.2 estabelece que, para todo triângulo inscrito em uma circunferência, o envelope das retas de Simson-Wallace pode ser obtido através de uma transformação simples sobre o triângulo original; o Lema 3.3 estabelece a transformação de um triângulo qualquer em um triângulo equilátero, visto que a identificação do envelope das retas de Simson-Wallace com um triângulo equilátero é mais simples; o Lema 3.4 estabelece a identificação do envelope das retas de Simson-Wallace para um triângulo equilátero com a curva hipociclóide tricúspide (deltóide).

Lema 3.2. *Sejam: um triângulo qualquer ABC inscrito em uma circunferência; o triângulo $A'B'C'$ inscrito na mesma circunferência com $A \equiv A'$ e $\overline{B'C'} \parallel \overline{BC}$; $\overline{SS'}$ a distância de $\overline{B'C'}$ a \overline{BC} ; v um vetor perpendicular ao lado \overline{BC} de tal modo que uma transformação paralela determinada por v leve \overline{BC} em $\overline{B'C'}$. Assim, se P é um ponto da circunferência, então a reta de Simson-Wallace com polo P em relação ao triângulo $A'B'C'$ é determinada por meio de uma transformação obtida pelo vetor v da reta de Simson-Wallace com polo P em relação ao triângulo ABC , ou seja, o envelope das retas de Simson-Wallace com polo P em relação ao triângulo $A'B'C'$ é obtido pela transformação paralela determinada pelo vetor v a partir do envelope das retas de Simson-Wallace com polo P em relação ao triângulo ABC .*

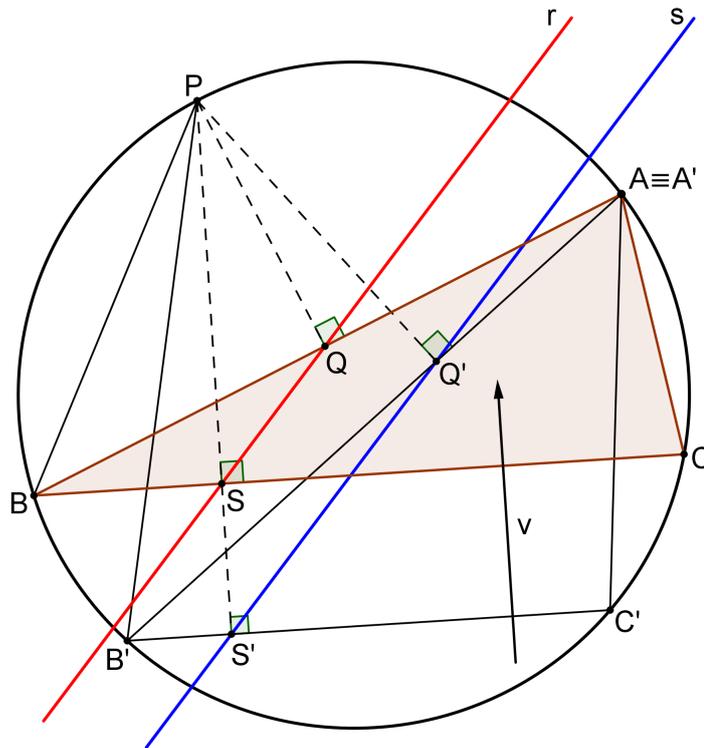


Figura 3.24: Envelope das retas de Simson-Wallace

Demonstração.

Sejam Q e Q' os pés das perpendiculares baixadas do ponto P respectivamente aos lados \overline{AB} e $\overline{A'B'}$, r a reta de Simon-Wallace com polo P referente ao triângulo ABC e s a reta de Simon-Wallace com polo P em relação ao triângulo $A'B'C'$, conforme mostra a Figura 3.24.

Como $\widehat{PQB} \equiv \widehat{PSB} = 90^\circ$, o quadrilátero $PQSB$ é inscrito segundo o Teorema 2.10. Logo, $\widehat{PBQ} \equiv \widehat{PSQ}$. De forma análoga, o quadrilátero $PQ'S'B'$ é inscrito e, portanto, $\widehat{PS'Q'} \equiv \widehat{PB'Q'}$. Porém, \widehat{PBQ} e $\widehat{PB'Q'}$ são ângulos inscritos que subentendem o mesmo arco PA na circunferência que circunscreve os triângulos ABC e $A'B'C'$. Assim, $\widehat{PBQ} \equiv \widehat{PB'Q'}$. Concluimos então que $\widehat{PBQ} \equiv \widehat{PS'Q'}$ e $\widehat{PS'Q'} \equiv \widehat{PSQ}$. Desta forma, a reta s é obtida por meio de uma transformação paralela do vetor v .

□

Lema 3.3. *Se ABC é um triângulo qualquer e $t(A, v)$ transforma ABC em um triângulo $A'B'C'$, então $t(B', w)$ transforma $A'B'C'$ em um triângulo equilátero $A''B''C''$.*

Demonstração.

Sejam os arcos $BB' = 2m$, $AA'' = 2n$ e $C''C' = 2n$, obtidos através das transformações $t(A, v)$ e $t(B', w)$, indicadas na Figura 3.25.

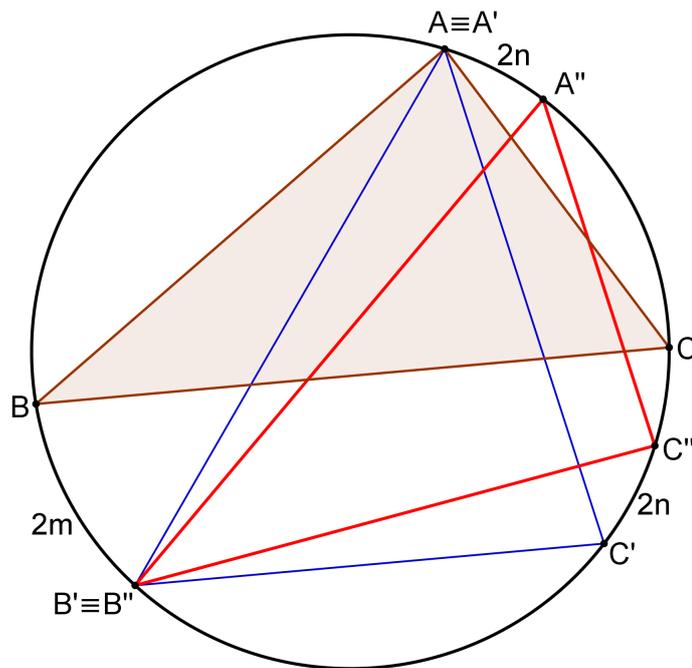


Figura 3.25: Triângulo qualquer ABC e o triângulo equilátero $A''B''C''$

De acordo com o Teorema 2.1, podemos estabelecer as seguintes relações para os ângulos internos do triângulo ABC :

$$\widehat{A} = \frac{\widehat{BC}}{2} = \frac{2m + \widehat{B'C'} + 2m}{2} = 2m + \frac{\widehat{B'C'}}{2} = 2m + \widehat{A'} \Rightarrow \widehat{A'} = \widehat{A} - 2m; \quad (3.36)$$

$$\widehat{B} = \frac{\widehat{AC}}{2} = \frac{\widehat{A'C'} - 2m}{2} = \frac{\widehat{A'C'}}{2} - m = \widehat{B'} - m \Rightarrow \widehat{B'} = \widehat{B} + m; \quad (3.37)$$

$$\widehat{C} = \frac{\widehat{AB}}{2} = \frac{\widehat{A'B'} - 2m}{2} = \frac{\widehat{A'B'}}{2} - m = \widehat{C'} - m \Rightarrow \widehat{C'} = \widehat{C} + m. \quad (3.38)$$

No triângulo $A''B''C''$, temos que:

$$\widehat{A''} = \frac{\widehat{B''C''}}{2} = \frac{\widehat{B'C'} + 2n}{2} = \frac{2\widehat{A'} + 2n}{2} = \widehat{A'} + n. \quad (3.39)$$

Substituindo (3.36) em (3.39), obtemos:

$$\widehat{A''} = \widehat{A} - 2m + n. \quad (3.40)$$

Raciocinando de maneira análoga, estabelecemos que:

$$\widehat{B''} = \frac{\widehat{A''C''}}{2} = \frac{\widehat{A'C'} - 4n}{2} = \frac{2\widehat{B'} - 4n}{2} = \widehat{B'} - 2n. \quad (3.41)$$

Substituindo (3.37) em (3.41), obtemos:

$$\widehat{B''} = \widehat{B} + m - 2n. \quad (3.42)$$

Por fim, no vértice C'' , temos que:

$$\widehat{C''} = \frac{\widehat{A''B''}}{2} = \frac{\widehat{A'B'} + 2n}{2} = \frac{2\widehat{C'} + 2n}{2} = \widehat{C'} + n. \quad (3.43)$$

Substituindo (3.38) em (3.43), obtemos:

$$\widehat{C''} = \widehat{C} + m + n. \quad (3.44)$$

Queremos demonstrar que é possível determinar um triângulo equilátero $A''B''C''$ através de duas transformações sucessivas em um triângulo qualquer ABC . Para tanto, temos que mostrar que existem m e n reais tais que $\widehat{A''} \equiv \widehat{B''} \equiv \widehat{C''} = \frac{\pi}{3}$.

Igualando (3.40) e (3.44), temos que:

$$\begin{aligned}
 \widehat{A}'' &\equiv \widehat{C}''; \\
 \widehat{A} - 2m + n &= \widehat{C} + m + n; \\
 \widehat{A} - \widehat{C} &= 3m; \\
 m &= \frac{\widehat{A} - \widehat{C}}{3}.
 \end{aligned} \tag{3.45}$$

Igualando (3.42) e (3.44), obtemos:

$$\begin{aligned}
 \widehat{B}'' &\equiv \widehat{C}''; \\
 \widehat{B} + m - 2n &= \widehat{C} + m + n; \\
 \widehat{B} - \widehat{C} &= 3n; \\
 n &= \frac{\widehat{B} - \widehat{C}}{3}.
 \end{aligned} \tag{3.46}$$

Finalmente, substituindo (3.45) e (3.46) em (3.40), concluímos que:

$$\begin{aligned}
 \widehat{A} - 2m + n &= \frac{\pi}{3}; \\
 \widehat{A} - 2\frac{\widehat{A} - \widehat{C}}{3} + \frac{\widehat{B} - \widehat{C}}{3} &= \frac{\pi}{3}; \\
 \frac{3\widehat{A} - 2\widehat{A} + 2\widehat{C} + \widehat{B} - \widehat{C}}{3} &= \frac{\pi}{3}; \\
 \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} &= \pi.
 \end{aligned} \tag{3.47}$$

Como a expressão (3.47) é verdadeira (soma dos ângulos internos de um triângulo), há m e n reais, dados respectivamente por (3.45) e (3.46), tais que $\widehat{A}'' \equiv \widehat{B}'' \equiv \widehat{C}'' = \frac{\pi}{3}$.

□

Lema 3.4. *O envelope das retas de Simson-Wallace para um triângulo equilátero ABC é uma curva hipociclóide tricúspide, cujos vértices são os vértices de um triângulo equilátero concêntrico com o triângulo ABC , com lados paralelos à ABC e cujo perímetro é $\frac{3}{2}$ do perímetro de ABC .*

Demonstração.

Consideremos um retângulo $EPFO$ de diagonal $\overline{OP} = 2m$. Ampliamos este retângulo, conforme ilustrado na Figura 3.26, definindo o retângulo $QGJH$. Seja $\widehat{JHG} = \alpha$. Como o triângulo HOL é isósceles, temos pelo Teorema 2.5 que $F\widehat{OP} = 2\alpha$.

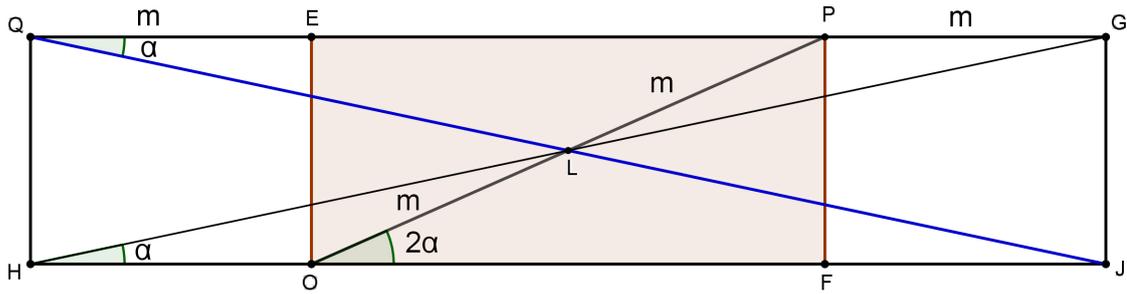


Figura 3.26: Retângulo *EPFO* ampliado

Construímos agora a circunferência γ , de centro O e raio $2m$, e a circunferência λ também com centro em O , porém com raio $3m$, como na Figura 3.27.

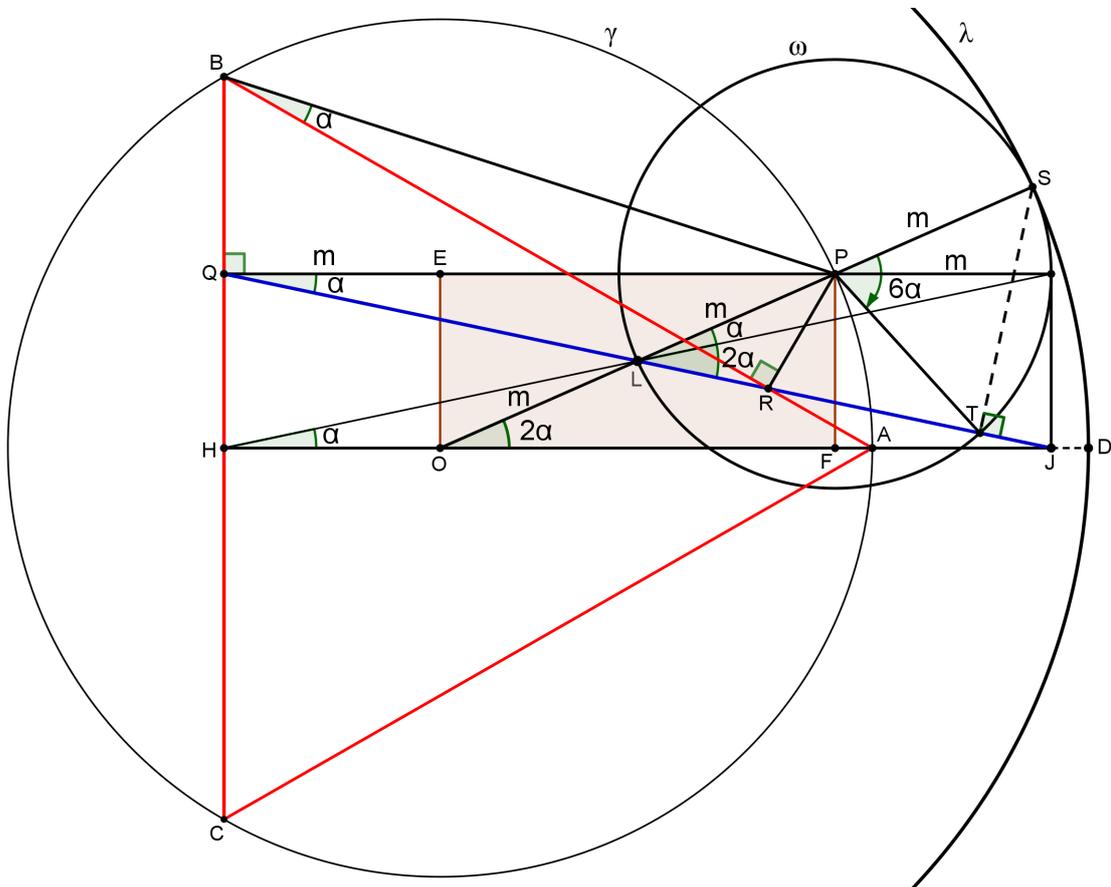


Figura 3.27: Circunferência geratriz ω , circunferência diretriz λ e o triângulo equilátero *ABC* inscrito na circunferência γ

Além disso, sejam o triângulo equilátero *ABC*, inscrito na circunferência γ , e os pontos de intersecção T e L da circunferência ω , com centro em P e raio igual a m , com a diagonal \overline{QJ} . Como \widehat{PLT} é um ângulo inscrito na circunferência ω , $\widehat{PLT} = 3\alpha$. Pelo Teorema 2.1, temos que $\widehat{SPT} = 6\alpha$, isto é, T é o ponto da hipociclóide gerada por ω quando rola dentro da circunferência fixa λ .

Ainda, como $\widehat{STQ} = 90^\circ$ e o segmento ST é o raio de rotação instantâneo da circunferência ω quando esta realiza o movimento de rolamento dentro da circunferência λ , concluímos que o segmento QT é tangente à hipociclóide em T . Além disso, temos que a reta QT é uma reta de Simson-Wallace com polo P relativa ao triângulo equilátero ABC . De fato, \overline{PQ} é perpendicular ao lado \overline{BC} e \overline{PR} é perpendicular ao lado \overline{AB} do triângulo ABC , devido ao fato do quadrilátero $BPRQ$ ser inscritível. Temos então que a reta QT de Simson-Wallace tangencia a curva hipociclóide em T .

Finalizando, as circunferências γ e λ são concêntricas de centro O . Logo, o triângulo equilátero ABC inscrito em γ possui lados paralelos ao triângulo equilátero DEF inscrito em λ , como mostra a Figura 3.28. Além disso, temos que o ponto O coincide com os baricentros G_1 e G_2 respectivamente dos triângulos ABC e DEF . Entretanto, triângulos equiláteros são semelhantes pelo caso AA (ângulo-ângulo). Dessa forma, os triângulos ABC e DEF são semelhantes com razão de semelhança $k = \frac{DG_2}{AG_1}$ ou, equivalentemente, $k = \frac{3m}{2m} = \frac{3}{2}$.

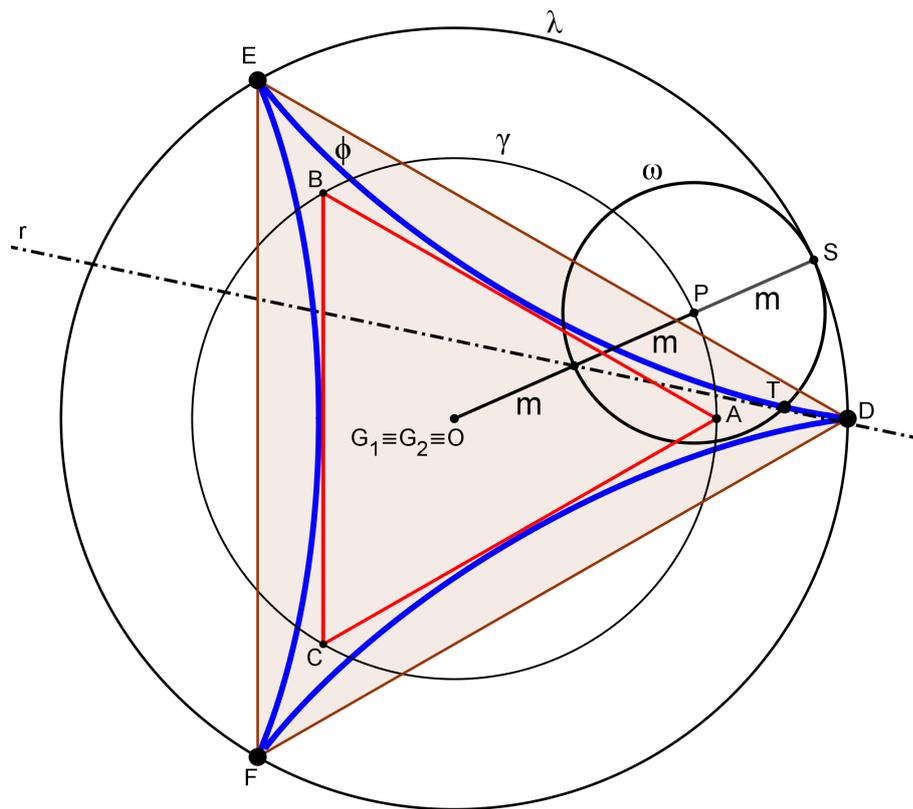


Figura 3.28: Triângulo equilátero ABC , triângulo equilátero DEF , reta r de Simson-Wallace e a curva deltóide ϕ

□

Após a demonstração dos Lemas 3.2, 3.3 e 3.4, enunciamos o resultado principal sem demonstrá-lo, visto que a declaração do teorema é apenas uma recapitulação dos três lemas.

Teorema 3.9. *Se ABC é um triângulo qualquer inscrito em uma circunferência de raio R , então o envelope das retas de Simson-Wallace de ABC é uma curva hipociclóide de três cúspides.*

A Figura 3.28 ilustra as hipóteses e a tese do Teorema 3.9.

4 O TEOREMA DE STEINER-LEHMUS

Na geometria Euclidiana há uma variedade de teoremas fascinantes. Segundo (GREITZER; COXETER, 1967), essa característica peculiar da geometria promoveu o desenvolvimento de diversos ramos da matemática, pois na tentativa de demonstrar esses teoremas, construções geométricas, definições e novos teoremas foram concebidos.

Neste capítulo, abordamos um desses teoremas, conhecido como o teorema de Steiner-Lehmus. A declaração simples, porém desafiadora desse teorema, atraiu a atenção de muitos matemáticos desde a sua formulação em 1840. De acordo com (GARDNER, 2013), aproximadamente oitenta demonstrações por contradição já foram publicadas e, além disso, há uma grande discussão sobre a existência de uma prova direta do teorema.

Iniciamos o estudo relatando brevemente a biografia dos personagens centrais do teorema: Jacob Steiner (1796-1863) e Daniel Christian Ludolph Lehmus (1780-1863). Posteriormente, abordamos o recíproco do teorema de Steiner-Lehmus e apresentamos uma coletânea de cinco demonstrações: usando o teorema do quadrilátero inscritível, foco principal deste trabalho; utilizando recursos trigonométricos; empregando o teorema da dobradiça, pouco explorado nos currículos de matemática; usando uma construção geométrica e, finalmente, empregando um caso particular de congruência em triângulos obtusângulos. No encerramento do capítulo, discutimos sobre provas diretas e por contradição, estabelecendo um paralelo com o teorema de Steiner-Lehmus.

4.1 JACOB STEINER

Nascido em 18 de março de 1796 na cidade de Utzenstorf, na Suíça, e falecido em 1 de abril de 1863 na capital Berna. Passou seus primeiros anos de vida ajudando seus pais em uma pequena fazenda localizada ao norte de Berna e, com aproximadamente dezoito anos, saiu de casa para começar a estudar na escola de Johann Heinrich Pestalozzi (1746-1827) em Yverdon. Com métodos de ensino inovadores para os padrões da época, o ensino da escola de Pestalozzi teve uma grande influência nas atitudes do jovem Steiner, pois tratava as verdades matemáticas

como objetos de reflexão independente e isto possibilitou a Steiner desenvolver uma base sólida em matemática.



Figura 4.1: Jacob Steiner (WIKIPÉDIA, 2017c)

No ano de 1818, Steiner deixou Yverdon e viajou para a Alemanha, onde trabalhou como professor particular de matemática na cidade de Heidelberg e posteriormente na capital Berlim. Na Alemanha, Steiner lecionou em duas escolas: Werder Gymnasium e na Escola Técnica de Berlim. Em ambas, enfrentou dificuldades devido ao fato de não conseguir se adaptar aos métodos de ensino empregados. Steiner acreditava fielmente na pedagogia de Pestalozzi. Ainda em Berlim, Steiner fez grandes amigos, entre eles Carl Gustav Jakob Jacobi (1804-1851), Niels Abel (1802-1829) e August Crelle (1780-1855), este último fundador do famoso *Jornal für die reine und angewandte Mathematik*, conhecido como Crelle's Jornal, no qual Steiner

publicou inúmeros artigos.

De acordo com (CAJORI, 1909), em 1832 Steiner publicou seu primeiro livro intitulado *Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander*, dando uma abordagem significativa para a geometria. No decorrer de sua vida, Steiner recebeu várias homenagens por suas notáveis conquistas no campo da matemática, particularmente em geometria.

4.2 DANIEL CHRISTIAN LUDOLPH LEHMUS



Figura 4.2: Daniel C. L. Lehmus (ABEBOOKS, 2017)

Nascido em Soest, na Alemanha, em 1780, neto do grande poeta alemão Johann Adam Lehmus (1707-1788), faleceu em 1863 na capital Berlim. Seu pai sempre apoiou seus estudos, incentivando e acompanhando o jovem Lehmus, que em 1811 concluiu o seu doutorado. Em Berlim, Lehmus trabalhou como professor de matemática em diversas escolas e instituições de ensino, além de realizar palestras em universidades.

Lehmus foi muito ativo e escreveu inúmeros artigos para revistas de matemática e jornais científicos, inclusive para a primeira edição do *Jornal für die reine und angewandte Mathematik*, o Crelle's Jornal, considerado um importante meio de divulgação de trabalhos

científicos àquela época.

No ano de 1840, Lehmus escreveu uma carta ao matemático suíço Charles François Sturm (1803-1855), solicitando uma prova da seguinte declaração matemática: “*Qualquer triângulo com duas bissetrizes de comprimentos iguais é isósceles*”. Essa declaração é conhecida como o teorema de Steiner-Lehmus, pois Sturm enviou o teorema a diversos matemáticos da época, dentre eles o grande geômetra Jacob Steiner (1796-1863), o qual forneceu a primeira prova do teorema. Em 1850, o próprio Lehmus provou e publicou sua prova e a partir daí uma série de demonstrações do teorema foram propostas.

4.3 EUCLIDES E O TRIÂNGULO ISÓSCELES

A geometria estudada nos currículos de matemática foi sistematizada axiomáticamente a partir de Euclides de Alexandria, por volta de 300 a.C. Em seu livro “Os elementos”, ilustrado na Figura 4.3, Euclides colecionou, em treze volumes, definições, postulados e teoremas, estabelecendo as diretrizes da geometria. Segundo (ROQUE, 2012):

Os elementos de Euclides representam o resultado dos esforços de formalização da matemática para apresentar uma geometria consistente e unificada que se aplique a grandezas quaisquer, comensuráveis ou incommensuráveis.

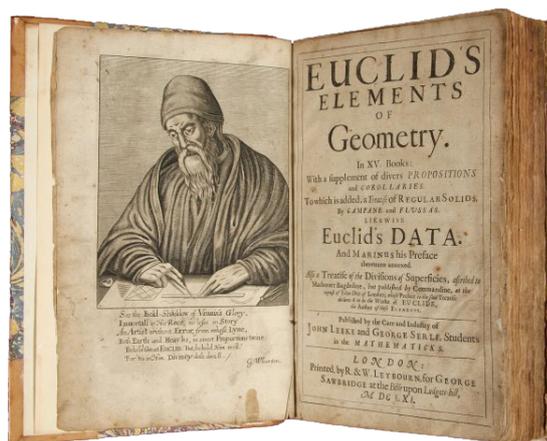


Figura 4.3: Euclides de Alexandria e seu livro “Os elementos” (GENIAIS, 2018)

Para (GARDNER, 2013), o tratamento axiomático dado à geometria por Euclides gerou críticas, sugestões e desconfianças. Contudo, teoremas foram provados, definições e postulados aceitos e, assim, a obra “Os elementos” se consolidou como o principal referencial teórico para a geometria.

A obra de Euclides traz inúmeros teoremas rigorosamente provados. Em particular, destacamos o teorema que estabelece a congruência das bissetrizes internas de um triângulo isósceles, demonstrado no primeiro volume de (BICUDO, 2009). A Figura 4.4 ilustra alguns triângulos isósceles.

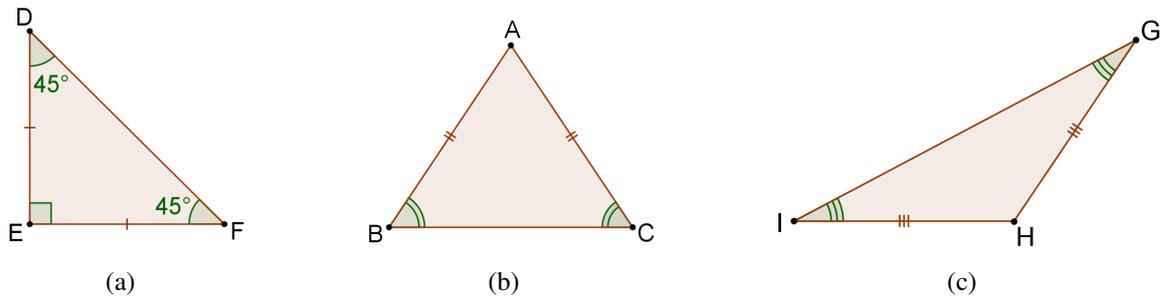


Figura 4.4: Triângulos isósceles: (a) retângulo; (b) acutângulo; (c) obtusângulo

Teorema 4.1. *Se ABC é um triângulo isósceles de base \overline{BC} com bissetrizes internas \overline{BE} e \overline{CD} , então $\overline{BE} \equiv \overline{CD}$.*

Demonstração.

Seja o triângulo isósceles ABC , de base \overline{BC} e bissetrizes internas \overline{BE} e \overline{CD} , ilustrado na Figura 4.5. Em ABC , $\widehat{ABC} \equiv \widehat{ACB} = 2\alpha$ e, como \overline{BE} e \overline{CD} são bissetrizes, $\widehat{BCD} \equiv \widehat{CBE} = \alpha$. Sendo \overline{BC} um lado comum aos triângulos CBD e BCE , temos, pelo caso de congruência ALA (ângulo-lado-ângulo), que os triângulos CBD e BCE são congruentes. Logo, $\overline{BE} \equiv \overline{CD}$, ou seja, as bissetrizes internas \overline{BE} e \overline{CD} são congruentes.

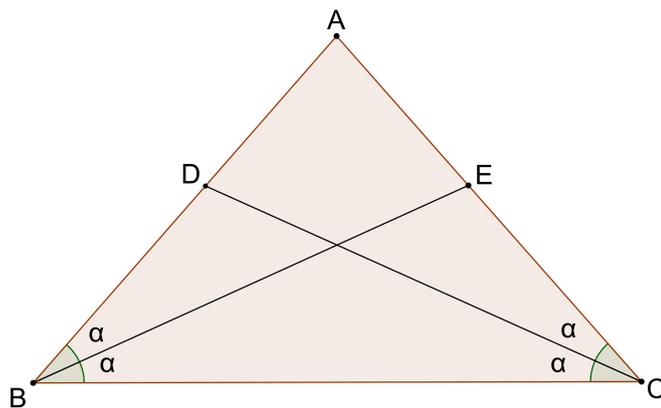


Figura 4.5: Triângulo isósceles ABC e as bissetrizes internas \overline{BE} e \overline{CD}

□

De acordo com (GARDNER, 2013), Euclides detalhou todos os elementos de um triângulo, seja ele escaleno, isósceles ou equilátero, sendo assim inconcebível alguma propriedade referente a triângulos não estar presente em seu livro. Um fato bastante intrigante é que,

ao pensarmos no recíproco do Teorema 4.1, continuamos a ter ainda um teorema de declaração simples, mas que curiosamente não foi mencionado por Euclides em “Os elementos”. Essa propriedade inerente a triângulos isósceles é conhecida na literatura como o teorema de Steiner-Lehmus.

Teorema 4.2 (Steiner-Lehmus). *Seja ABC um triângulo qualquer, de base \overline{BC} e bissetrizes internas \overline{BE} e \overline{CD} . Se $\overline{BE} \equiv \overline{CD}$, então o triângulo ABC é isósceles.*

A Figura 4.6 ilustra as hipóteses e a tese do Teorema 4.2.

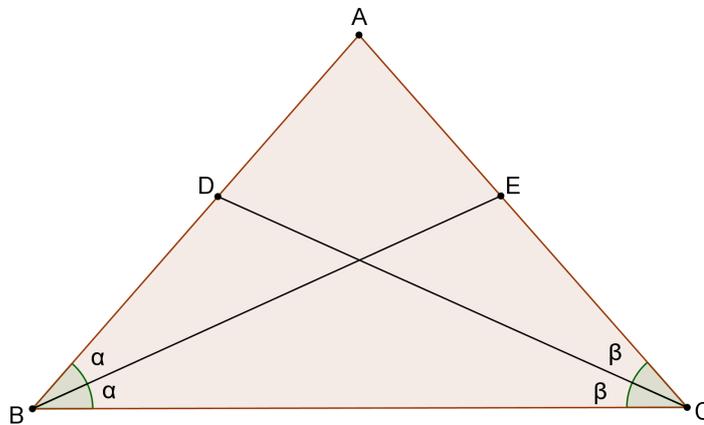


Figura 4.6: Triângulo isósceles ABC

4.4 DEMONSTRAÇÕES

4.4.1 VIA QUADRILÁTERO INSCRITÍVEL

Conforme (GREITZER; COXETER, 1967), a demonstração do teorema de Steiner-Lehmus através da condição de inscrição de um quadrilátero apresenta forte semelhança com a prova original proposta por Lehmus em 1850. Nessa demonstração, o uso da propriedade de quadriláteros inscritíveis, além de essencial, transforma a prova em uma das mais belas e elegantes do referido teorema.

Demonstração.

Seja um triângulo ABC , de base \overline{BC} e bissetrizes internas \overline{BE} e \overline{CD} , tal que $\widehat{ABC} = 2\alpha$ e $\widehat{BCD} = \beta$, como mostra a Figura 4.7.

Suponhamos que as bissetrizes \overline{BE} e \overline{CD} são congruentes e que o triângulo ABC não é isósceles. Sem perda de generalidade, consideremos $\overline{AC} < \overline{AB}$. Assim, pelo Teorema 4.3, temos que $\widehat{CBA} = 2\alpha < \widehat{BCA}$.

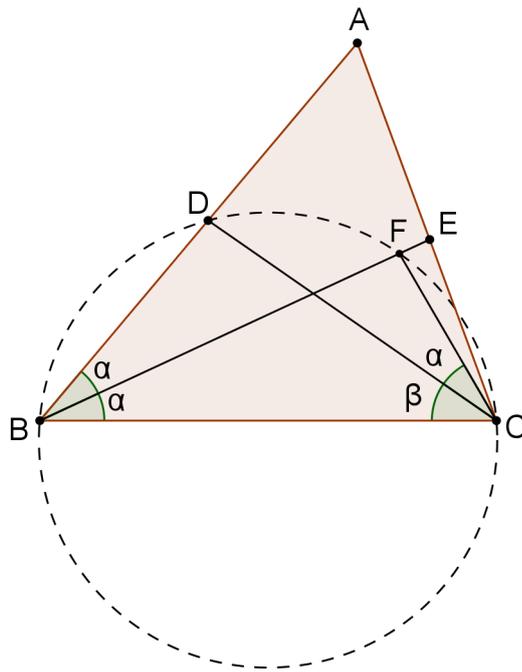


Figura 4.7: Triângulo ABC não isósceles e as bissetrizes $\overline{CD} \equiv \overline{BE}$

Construímos agora o segmento \overline{CF} de tal forma que $\widehat{FCD} = \alpha$. Como $\widehat{FCD} \equiv \widehat{FBD}$, o Teorema 2.10 garante que o quadrilátero $BDFC$ é inscritível. Ainda, $\alpha < \beta$ e, portanto, $\alpha + \alpha < \beta + \alpha$, o que implica em $\overline{DC} < \overline{BF}$. Por outro lado, $\overline{BF} < \overline{BE}$ por construção. Logo, por transitividade, $\overline{DC} < \overline{BE}$, o que contradiz a hipótese $\overline{BE} \equiv \overline{DC}$. Concluimos assim que a tese é verdadeira, ou seja, o triângulo ABC é isósceles. O caso $\overline{AC} > \overline{AB}$ é inteiramente análogo.

□

4.4.2 VIA RECURSOS TRIGONOMÉTRICOS

O teorema de Steiner-Lehmus apresenta uma variedade de demonstrações baseadas na trigonometria. Nesta seção, escolhemos uma demonstração trigonométrica um pouco mais suscinta em relação às demais, mas não menos rigorosa nas relações trigonométricas aplicadas. A demonstração selecionada é, segundo (GARDNER, 2013), devida a Mowaffaq Hajja (1946-...) e foi publicada em um artigo intitulado *Short Trigonometric Proof of the Steiner-Lehmus Theorem*. Basicamente, essa prova utiliza dois teoremas muito conhecidos da geometria: a lei dos senos e o teorema da bissetriz interna de um triângulo.

Demonstração.

Suponhamos que o triângulo ABC , de base \overline{BC} , não é isósceles e que as bissetrizes \overline{BE} e \overline{CD} são congruentes. Conforme definido na Figura 4.8, temos que: $\overline{AD} = x$, $\overline{AE} = y$, $\overline{BD} = w$,

$\overline{CE} = z$, $\overline{BC} = a$, $\overline{AB} = c$ e $\overline{AC} = b$. Sem perda de generalidade, consideremos $\overline{AC} > \overline{AB}$, ou equivalentemente, $b > c$.

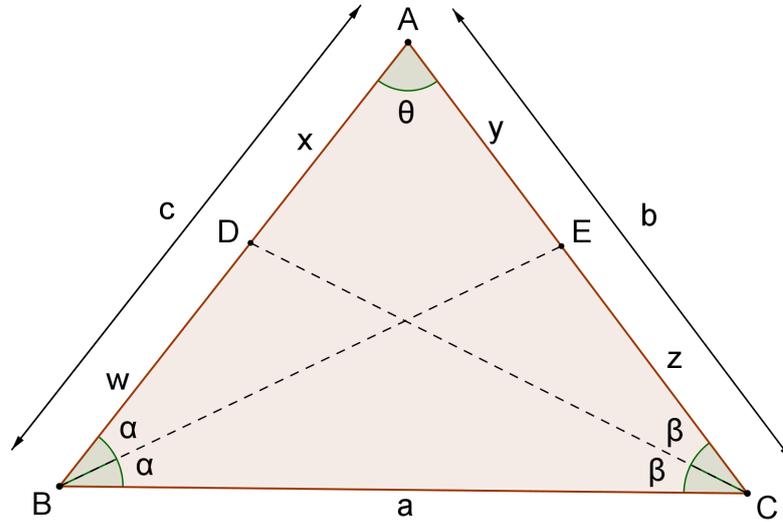


Figura 4.8: Triângulo não isósceles ABC e suas medidas

Aplicando o teorema da bissetriz interna - Teorema A.3, no triângulo ABC em relação às bissetrizes \overline{BE} e \overline{CD} , obtemos, respectivamente:

$$\frac{c}{a} = \frac{y}{z}; \quad (4.1)$$

$$\frac{b}{a} = \frac{x}{w}. \quad (4.2)$$

Como assumimos $\overline{AC} = b > \overline{AB} = c$, segue imediatamente que:

$$\frac{b}{a} > \frac{c}{a}. \quad (4.3)$$

Substituindo (4.1) e (4.2) em (4.3), e observando as medidas do triângulo ABC na Figura 4.8, temos que:

$$\frac{x}{w} > \frac{y}{z} \iff \frac{w}{w} + \frac{x}{w} > \frac{z}{z} + \frac{y}{z} \iff \frac{c}{w} > \frac{b}{z} \iff \frac{c}{w} - \frac{b}{z} > 0. \quad (4.4)$$

Por outro lado, $\widehat{ABC} = 2\alpha > \widehat{ACB} = 2\beta$, isto é, $\alpha > \beta$. Como os ângulos α , β e $\widehat{BAC} = \theta$ pertencem ao intervalo $]0, \pi[$, a função cosseno é decrescente e a função seno assume valores positivos. Assim, $\cos \alpha \cdot \text{sen} \theta < \cos \beta \cdot \text{sen} \theta$. Por hipótese, as bissetrizes internas \overline{BE} e \overline{CD} são congruentes. Logo:

$$\frac{\cos \alpha \cdot \text{sen} \theta}{\overline{BE}} < \frac{\cos \beta \cdot \text{sen} \theta}{\overline{CD}}. \quad (4.5)$$

No triângulo ABE , aplicando o Teorema 2.8, obtemos:

$$\frac{\text{sen}\theta}{BE} = \frac{\text{sen}\alpha}{y}. \quad (4.6)$$

Do mesmo modo, temos no triângulo ADC que:

$$\frac{\text{sen}\theta}{CD} = \frac{\text{sen}\beta}{x}. \quad (4.7)$$

Substituindo (4.6) e (4.7) em (4.5), obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\cos\alpha \cdot \text{sen}\alpha}{y} < \frac{\cos\beta \cdot \text{sen}\beta}{x} &\iff \frac{2 \cdot \cos\alpha \cdot \text{sen}\alpha}{y} < \frac{2 \cdot \cos\beta \cdot \text{sen}\beta}{x} \iff \\ \iff \frac{\text{sen}(2\alpha)}{y} < \frac{\text{sen}(2\beta)}{x} &\iff \frac{\text{sen}(2\alpha)}{\text{sen}(2\beta)} < \frac{y}{x}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Por fim, aplicando o Teorema 2.8 no triângulo ABC , temos que:

$$\frac{\text{sen}(2\alpha)}{b} = \frac{\text{sen}(2\beta)}{c} \iff \frac{\text{sen}(2\alpha)}{\text{sen}(2\beta)} = \frac{b}{c}. \quad (4.9)$$

De (4.8) e (4.9), e usando as medidas da Figura 4.8, concluímos que:

$$\begin{aligned} \frac{\text{sen}(2\alpha)}{\text{sen}(2\beta)} = \frac{b}{c} < \frac{y}{x} &\iff \frac{b}{c} < \frac{b-z}{c-w} \iff \frac{b}{b-z} < \frac{c}{c-w} \iff bc - bw < bc - cz \iff \\ \iff -bw < -cz &\iff \frac{c}{w} < \frac{b}{z} \iff \frac{c}{w} - \frac{b}{z} < 0. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Comparando (4.4) e (4.10), temos uma contradição. Logo, \overline{AC} não é maior do que \overline{AB} . Se considerarmos \overline{AC} menor do que \overline{AB} , constataremos, de forma análoga ao caso \overline{AC} maior do que \overline{AB} , uma contradição. Dessa forma, $\overline{AC} \equiv \overline{AB}$ e a tese é verdadeira, isto é, o triângulo ABC é isósceles.

□

4.4.3 VIA TEOREMA DA DOBRADIÇA

Um teorema pouco explorado nos currículos de matemática é o teorema da dobradiça, também conhecido como o teorema da boca aberta. Esse teorema é equivalente à proposição vinte e quatro do livro de Euclides, possui uma declaração simples, sendo de fundamental importância à próxima demonstração que faremos do teorema de Steiner-Lehmus. Intuitivamente, o teorema da dobradiça é de fácil compreensão.

Na Figura 4.9, observamos a mesma porta com diferentes aberturas. Quanto menor for

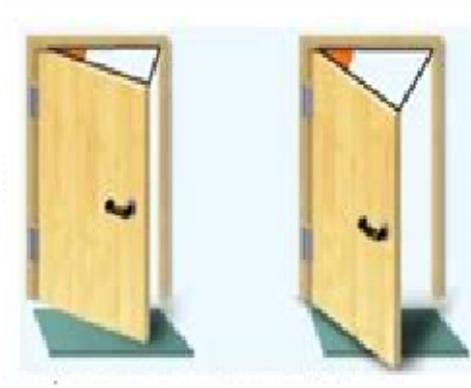


Figura 4.9: Triângulos formados pela abertura de uma porta (GOOGLE, 2018)

o ângulo de abertura, menor será a distância entre a porta e a parede. Contrariamente, se aumentarmos o ângulo de abertura, o distanciamento entre a porta e a parede também aumentará. A relação existente entre os triângulos formados pela abertura da porta é definida pelo Teorema 4.3.

Teorema 4.3 (Dobradiça). *Sejam ABC e DEF dois triângulos quaisquer, com $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$ e $\overline{BC} \equiv \overline{EF}$. Se o ângulo $\widehat{ABC} > \widehat{DEF}$, então $\overline{AC} > \overline{DF}$.*

A Figura 4.3 ilustra as hipóteses e a tese do Teorema 4.3.

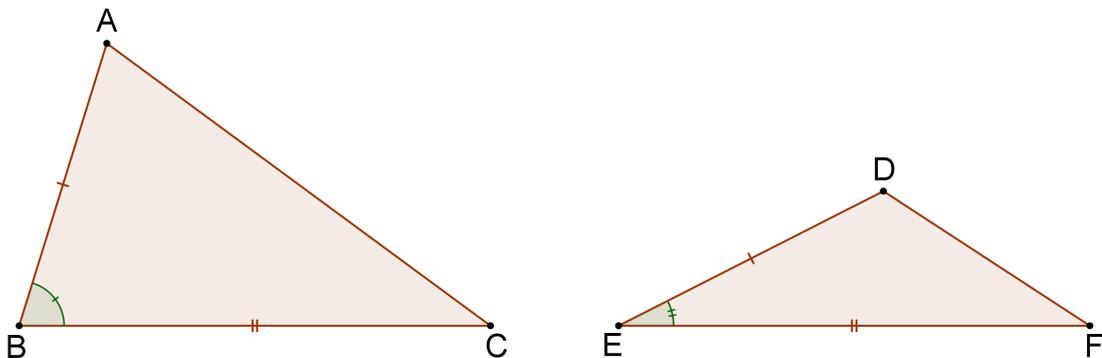


Figura 4.10: Triângulos ABC e DEF e os lados $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$ e $\overline{BC} \equiv \overline{EF}$

Demonstração.

Seja a semirreta BS que intersecta em P o lado \overline{AC} do triângulo ABC , tal que $\widehat{PBC} \equiv \widehat{DEF}$, conforme mostra a Figura 4.11. Consideremos o ponto $Q \in \overline{BS}$ de tal modo que $\overline{QB} \equiv \overline{DE}$. Dessa forma, os triângulos QBC e DEF são congruentes pelo caso LAL (lado-ângulo-lado) e, assim,

$$\overline{QC} \equiv \overline{DF}. \quad (4.11)$$

Se $Q \in \overline{AC}$, então $Q \equiv P$ e uma vez que $\overline{QC} < \overline{AC}$, temos que $\overline{DF} < \overline{AC}$.

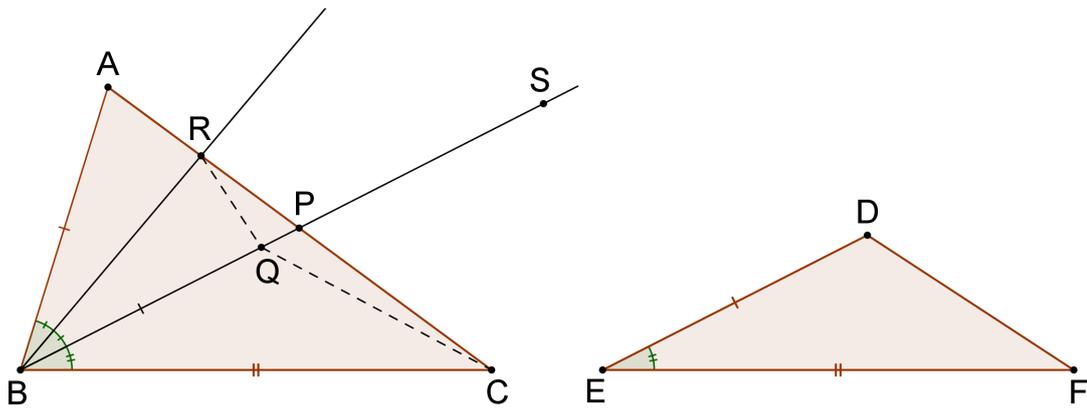


Figura 4.11: Triângulos congruentes QBC e DEF

Analisemos agora o caso em que $Q \notin AC$. Consideremos um ponto $R \in \overline{AC}$, tal que a semirreta BR seja a bissetriz de \widehat{PBA} . Assim, os triângulos ABR e QBR são congruentes pelo caso LAL (lado-ângulo-lado) e

$$\overline{AR} \equiv \overline{QR}. \quad (4.12)$$

No triângulo ABC temos que

$$\overline{AC} \equiv \overline{AR} + \overline{CR}, \quad (4.13)$$

e aplicando a desigualdade triangular no triângulo CQR temos que

$$\overline{QC} < \overline{QR} + \overline{CR}. \quad (4.14)$$

Substituindo (4.11), (4.12) e (4.13) em (4.14), concluímos que $\overline{DF} < \overline{AC}$.

□

Teorema 4.4 (Recíproco do teorema da dobradiça). *Sejam ABC e DEF dois triângulos quaisquer com $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$ e $\overline{BC} \equiv \overline{EF}$. Se $\overline{AC} > \overline{DF}$, então $\widehat{ABC} > \widehat{DEF}$.*

Demonstração.

Suponhamos que $\widehat{ABC} < \widehat{DEF}$. Assim, conforme o Teorema 4.3, $\overline{AC} < \overline{DF}$. Isto é um absurdo porque contradiz a hipótese $\overline{AC} > \overline{DF}$. Agora, se $\widehat{ABC} \equiv \widehat{DEF}$, temos pelo caso LAL (lado-ângulo-lado) que os triângulos ABC e DEF são congruentes e, portanto, $\overline{AC} \equiv \overline{DF}$. Novamente, temos uma contradição com a hipótese $\overline{AC} > \overline{DF}$. Concluímos então que $\widehat{ABC} > \widehat{DEF}$.

□

Após a demonstração do teorema da dobradiça, estamos prontos para demonstrar o teorema de Steiner-Lehmus. De acordo com (GARDNER, 2013), a demonstração que apresentamos a seguir, além de fazer uso do teorema da dobradiça, está pautada em construções geométricas e na análise de ângulos internos de triângulos.

Demonstração.

Suponhamos, por contradição, que o triângulo ABC de base \overline{BC} não é isósceles e $\overline{AB} > \overline{AC}$, isto é, $\widehat{BCA} = 2\beta > \widehat{CBA} = 2\alpha$, ou equivalentemente, $\beta > \alpha$. Analisando os triângulos BCD e BCE , ilustrados na Figura 4.12, observamos que \overline{BC} é um lado comum, $\overline{BE} \equiv \overline{CD}$ por hipótese e $\beta > \alpha$. Logo, pelo Teorema 4.3, podemos afirmar que:

$$\overline{BD} > \overline{CE}. \quad (4.15)$$

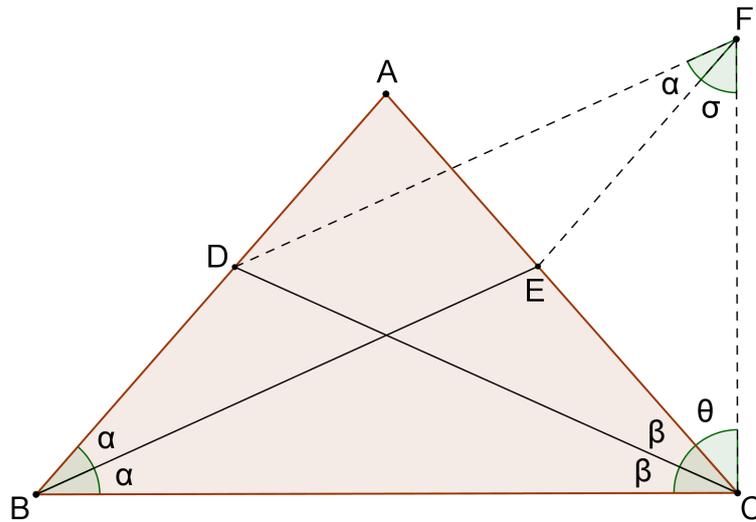


Figura 4.12: Triângulos BCD e BCE e o lado comum \overline{BC}

Ainda, seja o ponto F tal que $\overline{DF} \equiv \overline{BE}$ e $\overline{DF} \parallel \overline{BE}$. Como temos um par de segmentos congruentes e paralelos, o quadrilátero $BDFE$ é um paralelogramo e

$$\overline{BD} \equiv \overline{EF}. \quad (4.16)$$

De (4.15) e (4.16), concluímos que $\overline{EF} > \overline{CE}$. Logo, temos que, no triângulo CEF , $\widehat{ECF} = \theta > \widehat{EFC} = \sigma$, ou equivalentemente, $\theta > \sigma$.

Por fim, como $\overline{DF} \equiv \overline{BE}$ por construção e $\overline{CD} \equiv \overline{BE}$ por hipótese, então $\widehat{DCF} = \beta + \theta$

e $\widehat{DFC} = \alpha + \sigma$ são ângulos congruentes. Portanto,

$$\beta + \theta = \alpha + \sigma \quad (4.17)$$

e o triângulo CDF é isósceles. Contudo, como $\beta > \alpha$ por hipótese e $\theta > \sigma$ por construção, temos uma contradição em (4.17) e, conseqüentemente, $\overline{AB} \not\equiv \overline{AC}$. O caso $\overline{AB} < \overline{AC}$ possui demonstração inteiramente análoga. Dessa forma, concluímos que, no triângulo ABC , $\overline{AB} \equiv \overline{AC}$, isto é, ABC é um triângulo isósceles de base \overline{BC} .

□

4.4.4 VIA SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

Nesta seção, abordamos uma demonstração elaborada por (BERELE; GOLDMAN, 2000). O desenvolvimento da prova é caracterizado por conceitos elementares de geometria Euclidiana, dentre os quais destacamos a semelhança de triângulos. É uma demonstração sucinta se comparada com as inúmeras provas existentes do teorema.

Demonstração.

Sejam \overline{BE} e \overline{CD} respectivamente as bissetrizes dos ângulos $\widehat{CBA} = 2\alpha$ e $\widehat{BCA} = 2\beta$ de um triângulo ABC , como ilustrado na Figura 4.13. Suponhamos que $\overline{BE} \equiv \overline{CD}$ e que o triângulo ABC não é isósceles. Sem perda de generalidade, assumimos que $\overline{AC} > \overline{AB}$, o que implica em $\widehat{CBA} = 2\alpha > \widehat{BCA} = 2\beta$, ou equivalentemente, em $\alpha > \beta$.

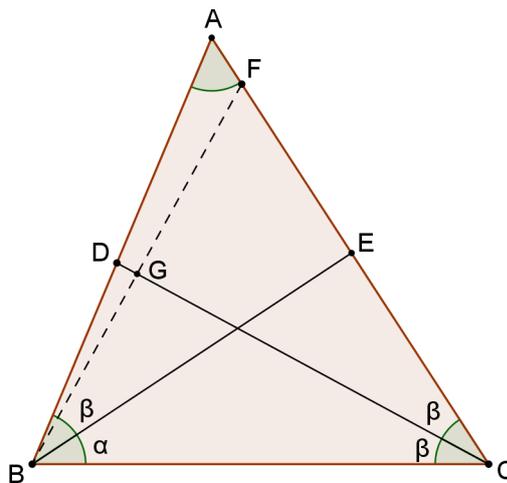


Figura 4.13: Ponto G de intersecção da bissetriz \overline{CD} com a ceviana \overline{BF}

Consideramos agora um ponto $F \in \overline{AC}$ de tal maneira que $\widehat{FBE} = \frac{\widehat{BCA}}{2} = \beta$. Seja G o

ponto de intersecção da bissetriz \overline{CD} com a ceviana¹ \overline{BF} . Como os triângulos FBE e FCG são semelhantes pelo caso AA (ângulo-ângulo), então $\frac{\overline{CG}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{CF}}{\overline{BF}}$. Contudo, $\overline{BE} \equiv \overline{CD}$ por hipótese e $\overline{CD} = \overline{CG} + \overline{DG}$. Logo, $\frac{\overline{CG}}{\overline{CG} + \overline{DG}} = \frac{\overline{CF}}{\overline{BF}} < 1$. Portanto, $\overline{CF} < \overline{BF}$ e, conseqüentemente, temos que, no triângulo FBC , $\beta + \alpha < 2\beta$, ou equivalentemente, $\alpha < \beta$. Temos assim uma contradição, pois assumimos como hipótese que $\alpha > \beta$. Logo, \overline{AC} não é maior do que \overline{AB} . A demonstração assumindo que $\overline{BE} \equiv \overline{CD}$ e que $\overline{AB} > \overline{AC}$ é inteiramente análoga. Concluímos então que $\overline{AB} \equiv \overline{AC}$, isto é, o triângulo ABC é isósceles.

□

4.4.5 VIA CASO ESPECIAL LLA DE CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS

Na geometria Euclidiana, dois triângulos são congruentes quando os lados e os ângulos internos de um estão em correspondência com os lados e com os ângulos internos do outro, de tal maneira que os lados e os ângulos internos correspondentes sejam congruentes. Nesse sentido, de acordo com (DOLCE; POMPEO, 2005), ao analisarmos a congruência entre dois triângulos, observamos seis elementos (três lados e três ângulos internos) e comparamos as suas medidas.

Existem condições mínimas para se estabelecer a congruência de triângulos, denominadas critérios de congruência. Estes critérios são, segundo (DOLCE; POMPEO, 2005): *LAL* (lado-ângulo-lado), *ALA* (ângulo-lado-ângulo), *LLL* (lado-lado-lado), *LAA_o* (lado-ângulo-ângulo oposto). A Figura 4.14 exemplifica cada um dos quatro critérios.

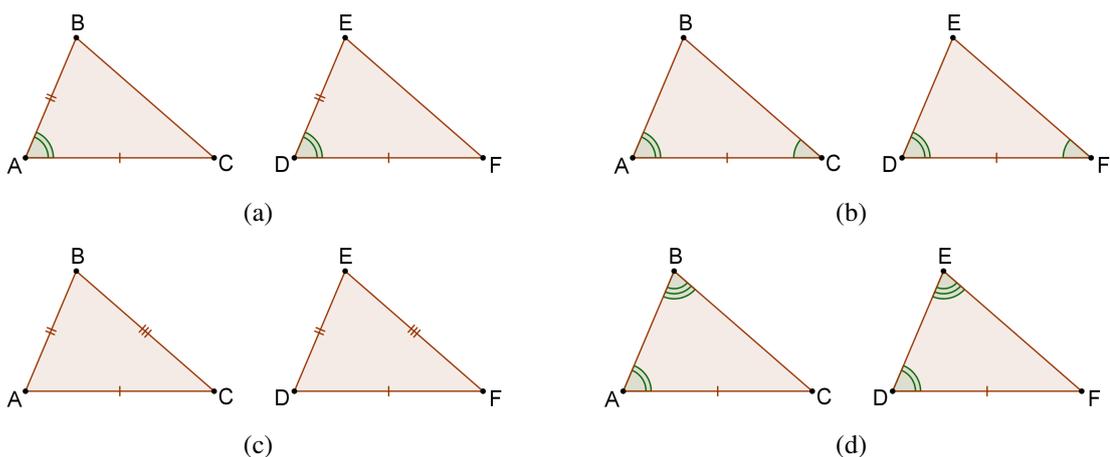


Figura 4.14: Casos de congruência: (a) *LAL*; (b) *ALA*; (c) *LLL*; (d) *LAA_o*

Porém, há um quinto critério de congruência pouco discutido nas aulas de matemática

¹Segmento de reta que tem por extremos um vértice do triângulo e um ponto do lado oposto, ou seu prolongamento, a esse ângulo.

no Ensino Fundamental, no Ensino Médio e nos cursos de geometria plana do Ensino Superior: o caso *LLA* (lado-lado-ângulo) ou *ALL* (ângulo-lado-lado). Na verdade, apenas triângulos retângulos ou obtusângulos satisfazem esse critério.

Iniciemos a discussão do critério de congruência de triângulos *LLA* com o triângulo acutângulo representado na Figura 4.15(a).

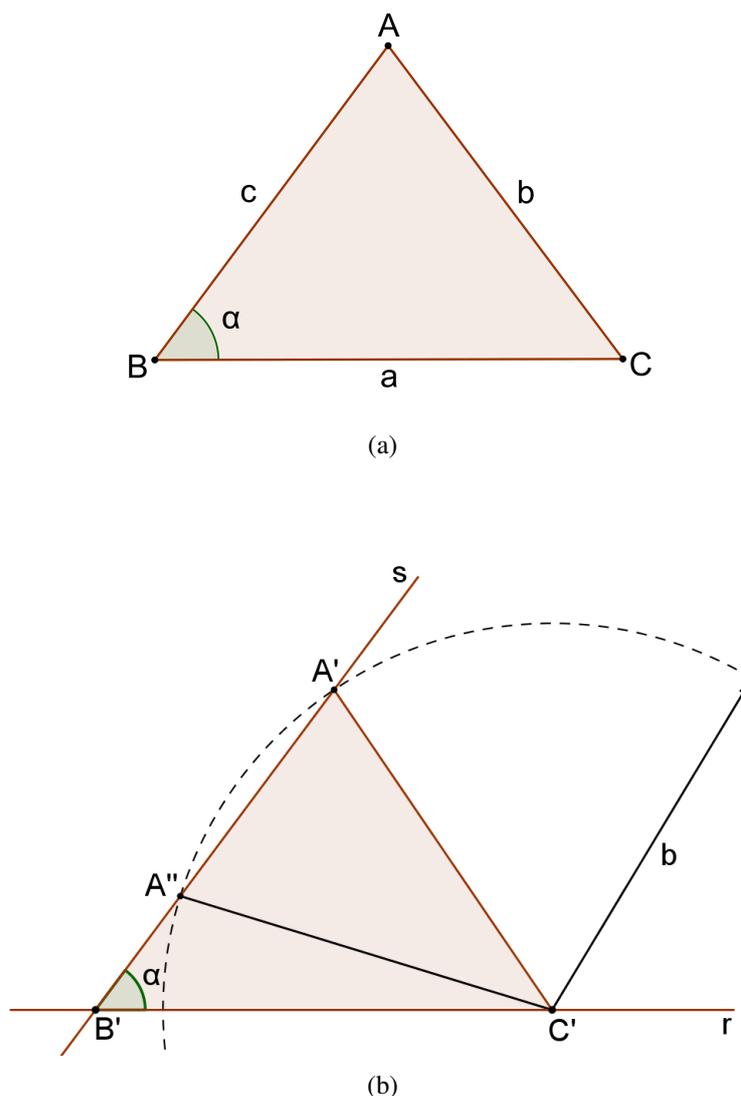


Figura 4.15: Critério *LLA*: (a) triângulo acutângulo ABC ; (b) triângulo acutângulo $A'B'C'$ congruente a ABC e o triângulo $A''B'C'$ não congruente a ABC

Para construir geometricamente um triângulo congruente a ABC empregando o critério *LLA*, consideremos $\overline{B'C'} \equiv \overline{BC} = a$ na reta suporte r e $\overline{A'B'} \equiv \overline{AB} = c$ na reta suporte s , de tal forma que $\widehat{C'B'A'} \equiv \widehat{CBA} = \alpha$, conforme ilustra a Figura 4.15(b). Considerando o ponto C' como sendo o centro da circunferência de raio $\overline{AC} = b$, temos que esta intersecta $\overline{A'B'}$ nos pontos A' e A'' . Determinamos assim dois triângulos: $A'B'C'$, congruente a ABC , e $A''B'C'$, não congruente a ABC . Logo, o critério *LLA* não determina apenas triângulos congruentes ao triângulo ABC se

este for acutângulo.

Consideremos agora o triângulo obtusângulo DEF ilustrado na Figura 4.16.

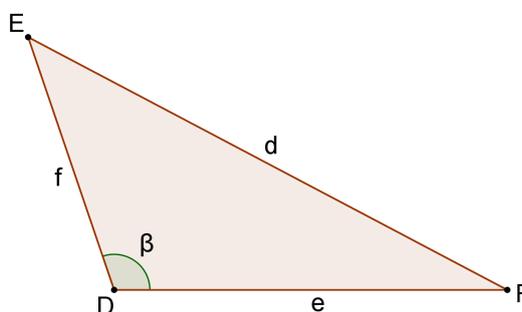


Figura 4.16: Triângulo obtusângulo DEF

Para construir geometricamente um triângulo congruente a DEF empregando o critério LLA , consideremos $\overline{D'F'} \equiv \overline{DF}$ na reta suporte r e $\overline{D'E'} \equiv \overline{DE}$ na semirreta $D'E'$. Sejam ainda $E'\widehat{D'}F' \equiv E\widehat{D}F = \beta$ e F' o centro da circunferência com raio $\overline{EF} = d$, conforme mostra a Figura 4.17. Como a circunferência intersecta a semirreta $D'E'$ apenas no ponto E' , temos que o triângulo $D'E'F'$ é único e congruente a DEF . A análise para um triângulo retângulo é análoga a esta.

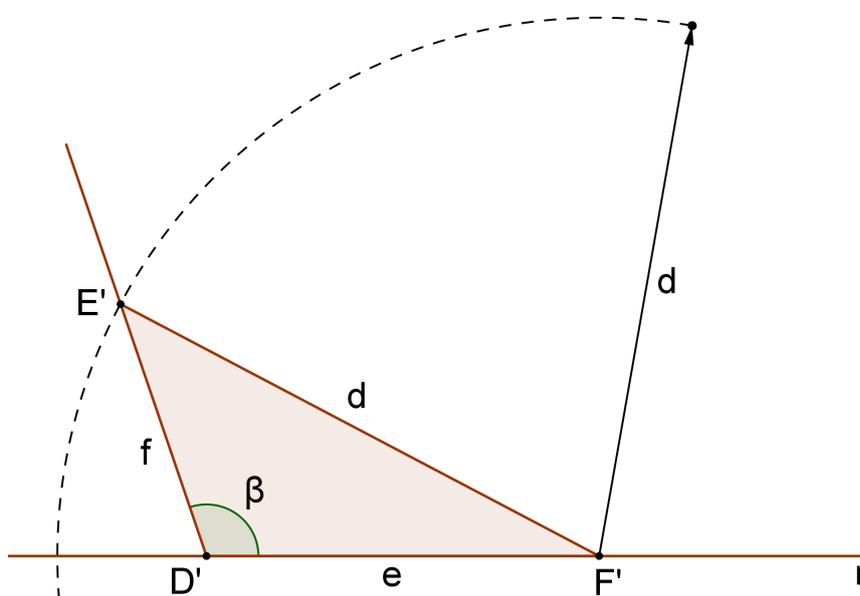


Figura 4.17: Triângulo obtusângulo $D'E'F'$ congruente a DEF

Após essa análise do critério de congruência de triângulos LLA (lado-lado-ângulo), estamos aptos a empregá-lo para demonstrar o teorema de Steiner-Lehmus. A demonstração que faremos a seguir, de acordo com (GARDNER, 2013), pode ser encontrada em (BERAN, 1992).

Demonstração.

Sejam: um triângulo ABC qualquer, onde \overline{BE} e \overline{CD} são as bissetrizes internas de $\widehat{CBA} = 2\alpha$ e $\widehat{BCA} = 2\beta$, respectivamente; F um ponto exterior a ABC tal que $\overline{EF} \equiv \overline{CB}$ e $\widehat{BEF} \equiv \widehat{BCD} = \beta$; $\widehat{BAC} = \theta$; $\widehat{DBF} = \lambda$; $\widehat{BEC} = \delta$, conforme ilustra a Figura 4.18.

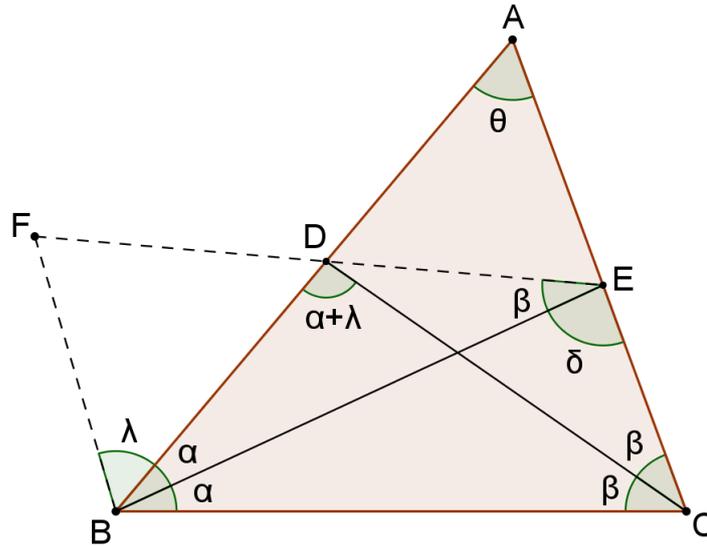


Figura 4.18: Ponto F exterior ao triângulo ABC

Dessa forma, como $\overline{EF} \equiv \overline{CB}$ por construção e $\overline{BE} \equiv \overline{CD}$ por hipótese, segue pelo caso LAL (lado-ângulo-lado) que os triângulos BEF e DCB são congruentes e, conseqüentemente, $\overline{BF} \equiv \overline{BD}$, $\widehat{EBF} \equiv \widehat{BDC} = \alpha + \lambda$ e $\widehat{BFD} \equiv \widehat{CBD} = 2\alpha$.

Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° , podemos estabelecer as seguintes igualdades em relação aos triângulos ABC e BDC e ABC e CEB , respectivamente:

$$\theta + 2\alpha + 2\beta = \alpha + \lambda + 2\alpha + \beta;$$

$$\theta + \beta = \alpha + \lambda; \quad (4.18)$$

$$\theta + 2\alpha + 2\beta = \alpha + 2\beta + \delta;$$

$$\theta = \delta - \alpha. \quad (4.19)$$

Substituindo (4.19) em (4.18), temos que:

$$\delta - \alpha + \beta = \alpha + \lambda;$$

$$\delta = 2\alpha + \lambda - \beta. \quad (4.20)$$

Na Figura 4.18, observamos que:

$$\widehat{C\hat{E}F} = \beta + \delta; \quad (4.21)$$

$$\widehat{C\hat{B}F} = 2\alpha + \lambda. \quad (4.22)$$

Assim, substituindo (4.20) em (4.21), obtemos:

$$\widehat{C\hat{E}F} = \beta + 2\alpha + \lambda - \beta;$$

$$\widehat{C\hat{E}F} = 2\alpha + \lambda. \quad (4.23)$$

De (4.22) e (4.23), concluímos que $\widehat{C\hat{B}F} \equiv \widehat{C\hat{E}F}$ e, como \overline{CF} é lado comum - Figura 4.19, os triângulos CBF e FEC são congruentes pelo caso *LLA* (lado-lado-ângulo). Segue então que $\overline{BF} \equiv \overline{CE}$. Contudo, $\overline{BF} \equiv \overline{BD}$. Logo, por transitividade, temos que $\overline{BD} \equiv \overline{CE}$. Disto decorre que os triângulos CDB e BEC são congruentes pelo caso *LLL* (lado-lado-lado), pois $\overline{BE} \equiv \overline{CD}$ por hipótese, $\overline{BD} \equiv \overline{CE}$ por construção e \overline{BC} é um lado comum. Assim, $\widehat{C\hat{B}A} \equiv \widehat{B\hat{C}A}$ ou, equivalentemente, $2\alpha = 2\beta$ e, portanto, o triângulo ABC é isósceles.

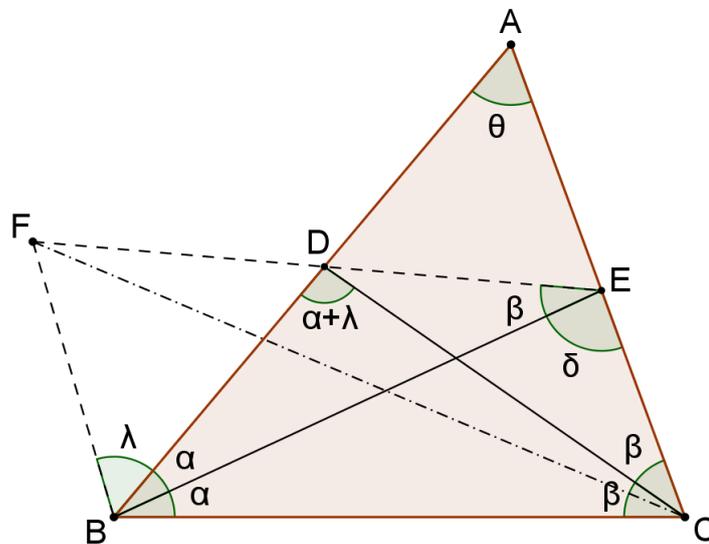


Figura 4.19: Triângulos congruentes CBF e FEC

□

4.5 PROVAS DIRETAS E PROVAS POR CONTRADIÇÃO

Neste capítulo, abordamos cinco provas do teorema de Steiner-Lehmus de um universo estimado em aproximadamente oitenta demonstrações (GARDNER, 2013). Não é comum um teorema despertar tanto o interesse do público acadêmico, gerando assim uma enorme variedade

de artigos e publicações a respeito, mas o teorema de Steiner-Lehmus possui essa característica peculiar. Segundo (GREITZER; COXETER, 1967), a maior parte das demonstrações do teorema de Steiner-Lehmus é indireta e as provas consideradas diretas apresentam teoremas em sua composição que são demonstrados apenas indiretamente.

Das cinco demonstrações do teorema de Steiner-Lehmus apresentadas: via quadrilátero inscritível, via recursos trigonométricos, via teorema da dobradiça, via semelhança de triângulos e pelo caso especial *LLA* de congruência de triângulos, as quatro primeiras são claramente demonstrações indiretas (provas por contradição), enquanto que a quinta e última tem um caráter construtivo e direto.

Nosso objetivo neste capítulo não é discutir a existência de uma demonstração direta para o teorema de Steiner-Lehmus, mas sim evidenciar a discussão existente no meio acadêmico acerca do uso de provas diretas ou indiretas na demonstração do referido teorema.

4.5.1 DEMONSTRAÇÃO POR CONTRADIÇÃO

A demonstração por contradição, também conhecida como redução ao absurdo, é uma técnica indireta e não construtiva, caracterizada por manter as hipóteses e negar a tese (o que se quer provar), recaíndo assim em uma contradição. Segundo (GREITZER; COXETER, 1967):

Nas palavras do grande matemático inglês Godfrey Harold Hardy (1877-1947): “A redução ao absurdo que Euclides tanto amava, é uma das melhores armas do matemático. É uma técnica muito mais fina do que qualquer jogada do xadrez, pois um jogador de xadrez pode oferecer o sacrifício de uma peça, mas um matemático oferece o jogo todo”.

Em notação lógica, uma proposição condicional *se p então q*, representada simbolicamente por $p \implies q$, apresenta *p* como hipótese (ou hipóteses), sendo *q* a tese. Logo, para demonstrar por contradição a veracidade de uma proposição condicional, devemos manter a hipótese *p* e negar a tese *q*, recaíndo então em uma contradição.

Exemplificando com o teorema de Steiner-Lehmus: “Se um triângulo possui duas bissetrizes de igual comprimento, então é isósceles”, temos como hipótese *p* o fato das duas bissetrizes terem igual comprimento e, como tese *q*, o fato do triângulo ser isósceles. Neste caso, para provar o teorema por contradição, afirmamos que o triângulo não é isósceles (negação da tese), porém apresenta as bissetrizes internas congruentes (conservação da hipótese). A negação da tese deve conduzir a um absurdo ou contradição.

Analisamos a seguir cada uma das demonstrações indiretas do teorema de Steiner-Lehmus apresentadas anteriormente.

1. Via quadrilátero inscritível

Nessa demonstração, negamos a tese, isto é, supomos que um triângulo ABC não é isósceles e constatamos que $\overline{DC} < \overline{BE}$, o que contradiz a hipótese $\overline{DC} \equiv \overline{BE}$. Concluimos então que o triângulo ABC é isósceles.

2. Via recursos trigonométricos

Novamente, negamos a tese, ou seja, supomos que o triângulo ABC não é isósceles e, sem perda de generalidade, assumimos que $\overline{AC} > \overline{AB}$. Aplicando o teorema da bissetriz interna de um triângulo obtivemos, através de manipulações algébricas, que $\frac{c}{w} - \frac{b}{z} > 0$. Por outro lado, usando a lei dos senos e algumas manipulações algébricas, constatamos que $\frac{c}{w} - \frac{b}{z} < 0$, o que contradiz a desigualdade anterior. Logo, \overline{AC} não é maior do que \overline{AB} . Analogamente, também podemos mostrar que \overline{AC} não é menor do que \overline{AB} . Assim, concluimos que $\overline{AC} \equiv \overline{AB}$, ou seja, o triângulo ABC é isósceles.

3. Via teorema da dobradiça

Negamos a tese mais uma vez, isto é, supomos o triângulo ABC não isósceles, assumindo que $\overline{AB} > \overline{AC}$. A partir de uma construção geométrica conveniente e usando o teorema da dobradiça - Teorema 4.3, constatamos que \overline{AB} não é maior do que \overline{AC} . Analogamente, também podemos mostrar que \overline{AB} não é menor do que \overline{AC} . Concluimos então que o triângulo ABC deve ser isósceles.

4. Via semelhança de triângulos

Negamos a tese admitindo que o triângulo ABC não é isósceles e, sem perda de generalidade, assumimos que $\overline{AC} > \overline{AB}$. Através de uma construção geométrica e analisando triângulos semelhantes, mostramos que \overline{AC} não é maior do que \overline{AB} . Analogamente, também podemos mostrar que \overline{AC} não é menor do que \overline{AB} . Dessa forma, concluimos que o triângulo ABC é isósceles.

Essas quatro demonstrações exemplificam claramente o método da contradição, sendo similares no desenvolvimento e na conclusão final.

4.5.2 DEMONSTRAÇÃO DIRETA

A demonstração de uma proposição de forma direta parte do princípio de que devemos assumir as hipóteses como verdadeiras e a partir delas provar a tese. Em notação lógica proposicional, p representa as hipóteses e q a tese. Assim, a condicional $p \implies q$ e a bicondicional $p \iff q$ são proposições que podem ser demonstradas de forma direta.

Em particular, ao assumirmos uma demonstração direta do teorema de Steiner-Lehmus, partimos do pressuposto de que duas bissetrizes internas do triângulo são congruentes e, de maneira construtiva, com o auxílio de teoremas já demonstrados, provamos que o triângulo deve ser isósceles. Segundo (FOSSA, 2009), o emprego de teoremas já demonstrados como verdadeiros é perfeitamente aceitável em uma demonstração matemática, criando assim uma relação de dependência, ou seja, cada teorema é uma consequência lógica de vários outros teoremas.

Nas demonstrações do teorema de Steiner-Lehmus apresentadas neste capítulo, foi necessário utilizar diversos teoremas auxiliares. Para uma grande parcela da comunidade acadêmica, se os teoremas auxiliares têm demonstração indireta, então a prova do teorema principal, mesmo que construtiva, não pode ser considerada direta.

Analisemos, então, a demonstração do teorema de Steiner-Lehmus via caso especial *LLA* (lado-lado-ângulo) de congruência de triângulos. Para (GARDNER, 2013), nessa demonstração a tese não é negada. Pelo contrário, as hipóteses são assumidas como verdadeiras e empregadas, de maneira construtiva, para demonstrar o teorema. Temos assim, para uma parte da comunidade acadêmica, uma demonstração essencialmente direta. Porém, outra parcela dessa comunidade rejeita essa prova como sendo direta, devido ao fato de que teoremas auxiliares empregados são demonstrados por contradição.

O caráter direto da quinta demonstração (via caso especial *LLA* de congruência de triângulos) deve-se ao fato de considerarmos $\overline{BE} \equiv \overline{CD}$ e um ponto F de modo que $\overline{EF} \equiv \overline{BC}$ para mostrar que os triângulos BEF e BCD são congruentes. Contudo, a partir do momento que utilizamos o teorema da soma dos ângulos internos de um triângulo, a demonstração assume um caráter indireto, pois a demonstração desse teorema está baseada no Lema 4.1 que é demonstrado por contradição, como mostramos na próxima seção. De acordo com (GREITZER; COXETER, 1967):

Uma demonstração não pode apropriadamente ser direta se qualquer um dos teoremas auxiliares tem uma prova indireta. Como alguns dos mais simples teoremas têm provas indiretas, conseqüentemente, se insistirmos em completa objetividade, nosso universo de teoremas seria reduzido a meras trivialidades.

4.5.3 A PROVA INDIRETA DA SOMA DOS ÂNGULOS INTERNOS DE UM TRIÂNGULO

Postulado 4.1. *Por um ponto passa uma única reta paralela a uma reta dada.*

Lema 4.1. *Se duas retas paralelas distintas são intersectadas por uma reta transversal, então os ângulos alternos internos são congruentes.*

A Figura 4.20 ilustra as hipóteses e a tese do Lema 4.1.

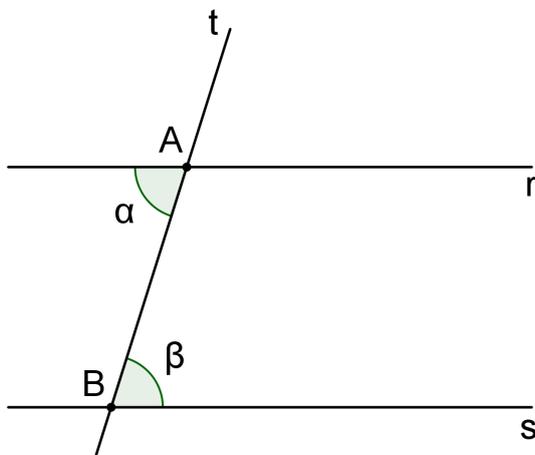


Figura 4.20: Ângulos alternos internos determinados por $r \parallel s$ e t

Demonstração.

Suponhamos que $\hat{r}t = \alpha$ e $\hat{s}t = \beta$ não sejam congruentes. Assim, existe uma reta u distinta de r que passa por A , tal que $\hat{u}t = \beta$, como ilustra a Figura 4.21.

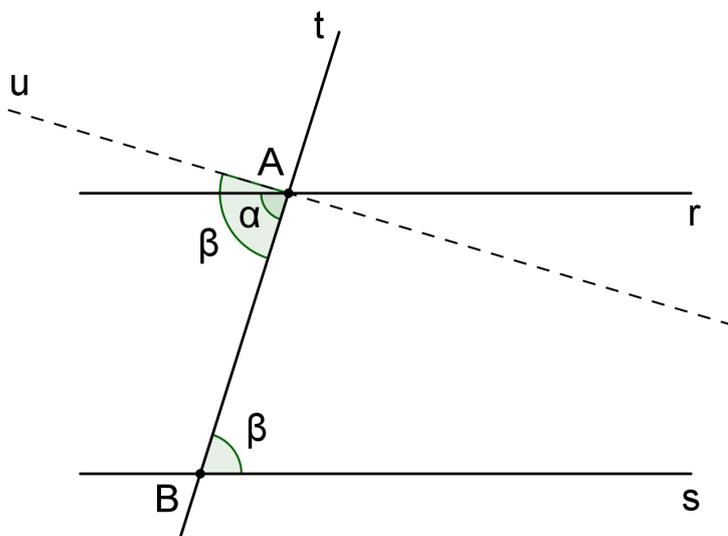


Figura 4.21: Reta u , distinta da reta r , que passa pelo ponto A

Como a reta transversal t determina com u e s ângulos correspondentes congruentes de medida β , então $u \parallel s$. Dessa forma, há duas retas distintas u e r que passam por A , ambas paralelas à reta s . Isto contradiz o Postulado 4.1 da unicidade da paralela. Concluimos então que $\beta = \alpha$.

□

Teorema 4.5. A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° .

Demonstração.

Sejam ABC um triângulo qualquer e α , β e θ as medidas dos ângulos internos de ABC , conforme mostra a Figura 4.22.

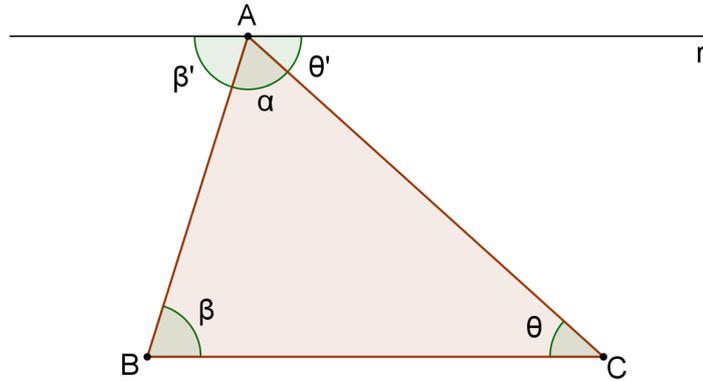


Figura 4.22: Triângulo ABC e os ângulos internos α , β e θ

Consideremos a reta r , paralela ao lado \overline{BC} do triângulo ABC , passando pelo ponto A . De acordo com o Lema 4.1, temos que os ângulos β' e θ' são congruentes, respectivamente, aos ângulos β e θ . Como β' , θ' e α são suplementares, concluímos que:

$$\beta' + \theta' + \alpha = \beta + \theta + \alpha = 180^\circ.$$

□

5 INVESTIGAÇÃO COM RECURSOS COMPUTACIONAIS

No decorrer deste trabalho, apresentamos teoremas que geralmente não são objeto de estudo na Educação Básica e no Ensino Superior. Contudo, os recursos geométricos empregados, assim como as definições e teoremas auxiliares, fazem parte dos currículos de matemática. Neste capítulo, abordamos dinamicamente, usando o software gratuito GeoGebra, três desses teoremas: quadriláteros inscritíveis, Simson-Wallace e Steiner-Lehmus. Nas abordagens, propomos para os professores de matemática atividades de investigação geométrica. Antes disso, discorreremos sobre investigação em matemática e investigação com recursos tecnológicos e detalhamos o software utilizado no processo investigativo.

5.1 INVESTIGAÇÃO EM MATEMÁTICA

Progressivamente, os currículos de matemática estão incluindo atividades de caráter investigativo. Essa concepção de currículo propicia aos estudantes o aprimoramento do raciocínio lógico e a capacidade de trabalhar de maneira autônoma. De acordo com (PONTE et al., 2006):

Em contextos de ensino e aprendizagem, investigar não significa necessariamente lidar com problemas muito sofisticados na fronteira do conhecimento. Significa, tão só, que formulamos questões que nos interessam, para as quais não temos resposta pronta, e procuramos essa resposta de modo tanto quanto possível fundamentado e rigoroso.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (Ministério da Educação, 1998), atividades investigativas no ensino de matemática contribuem à formação do cidadão, desenvolvem metodologias que enfatizam a construção de estratégias, a comprovação e justificativa de resultados, a criatividade, a iniciativa pessoal, o trabalho coletivo e a autonomia, advinda da confiança na própria capacidade para enfrentar desafios.

Para (PONTE et al., 2006), na investigação de um determinado assunto em matemática o estudante assume uma postura científica, de pesquisador, formulando conjecturas acerca do que está investigando. Desse modo, o ato de investigar envolve naturalmente conceitos, proce-

dimentos e representações, mas o que realmente caracteriza uma investigação matemática é o estilo de conjecturar, testar os resultados obtidos e finalmente demonstrá-los. Considerando a investigação como um problema em aberto, o desenvolvimento e a busca por resultados ocorre de forma diferente do que na resolução de um simples exercício. Em um contexto investigativo, o objeto não é explicitamente exposto pelo professor, somente o método de investigação é explicado.

5.2 O SOFTWARE GEOGEBRA

Desenvolvido por Markus Hohenwarter, um professor de matemática austríaco, o GeoGebra é um software de licença livre para o desenvolvimento tanto profissional quanto didático da geometria, apresentando uma interface simples de fácil manipulação por parte do usuário.

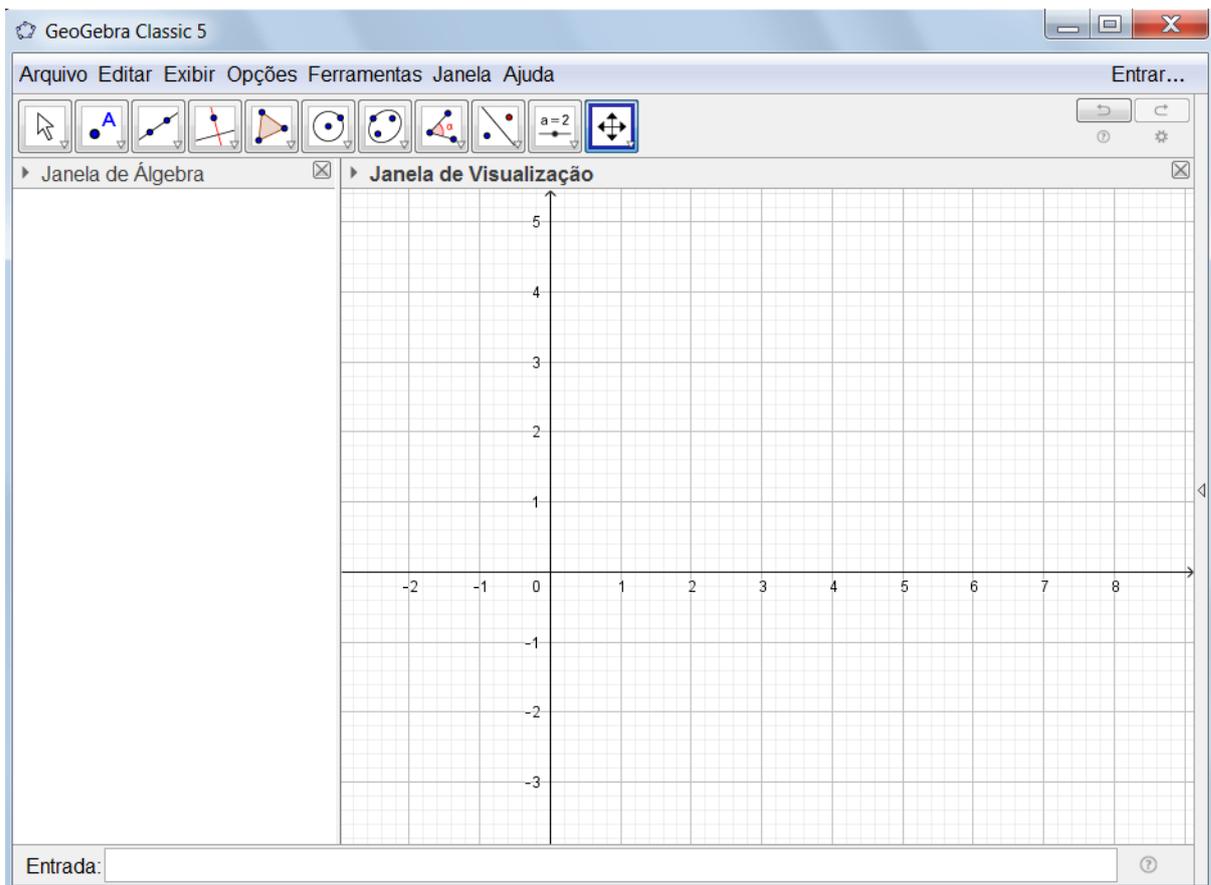


Figura 5.1: Interface do software GeoGebra 2D

Escrito na linguagem de programação Java, o GeoGebra pode ser operado em diversas plataformas e no decorrer dos anos foi aperfeiçoado por inúmeras versões. A interface de trabalho do GeoGebra, conforme ilustra a Figura 5.1, é composta por campos bem definidos: do lado esquerdo temos a janela de álgebra e do lado direito os eixos coordenados na janela

de visualização 2D. Além disso, encontramos na parte superior o menu principal e a barra de ferramentas de desenho, enquanto que no rodapé da janela temos o campo denominado entrada.

O menu principal, ilustrado na Figura 5.2, tem uma aparência muito similar aos softwares que funcionam no ambiente Windows: há sete ícones que possibilitam o acesso a uma série de novos comandos.



Figura 5.2: Menu principal do software GeoGebra

Já a barra de ferramentas, representada na Figura 5.3, é composta por onze ícones que permitem acessar uma grande variedade de comandos. Ao clicarmos em um desses ícones, uma paleta de comandos é aberta e, ao posicionarmos o cursor do mouse sobre o ícone desejado, o GeoGebra exibe o nome do objeto e como devemos proceder para desenhá-lo na janela de visualização 2D.



Figura 5.3: Barra de ferramentas do GeoGebra

Na parte inferior da tela do GeoGebra, no campo denominado "Entrada", ilustrado na Figura 5.4, podemos digitar os comandos ao invés de selecioná-los através dos ícones.



Figura 5.4: Entrada de comandos do GeoGebra

As janelas de álgebra e de visualização 2D, ilustradas na Figura 5.1, permitem que um mesmo objeto seja mostrado em diferentes representações. Exemplificando, quando representamos graficamente pontos, retas, circunferências etc, na janela de visualização 2D, a janela de álgebra automaticamente mostra as coordenadas cartesianas dos pontos, as equações associadas às retas, às circunferências etc. O GeoGebra é uma notável ferramenta para o desenho geométrico justamente devido à interação entre essas duas janelas, ou seja, um objeto criado via janela de visualização 2D automaticamente já está relacionado na janela de álgebra e vice-versa. Na Figura 5.5, mostramos a interação entre as janelas de visualização 2D e de álgebra.

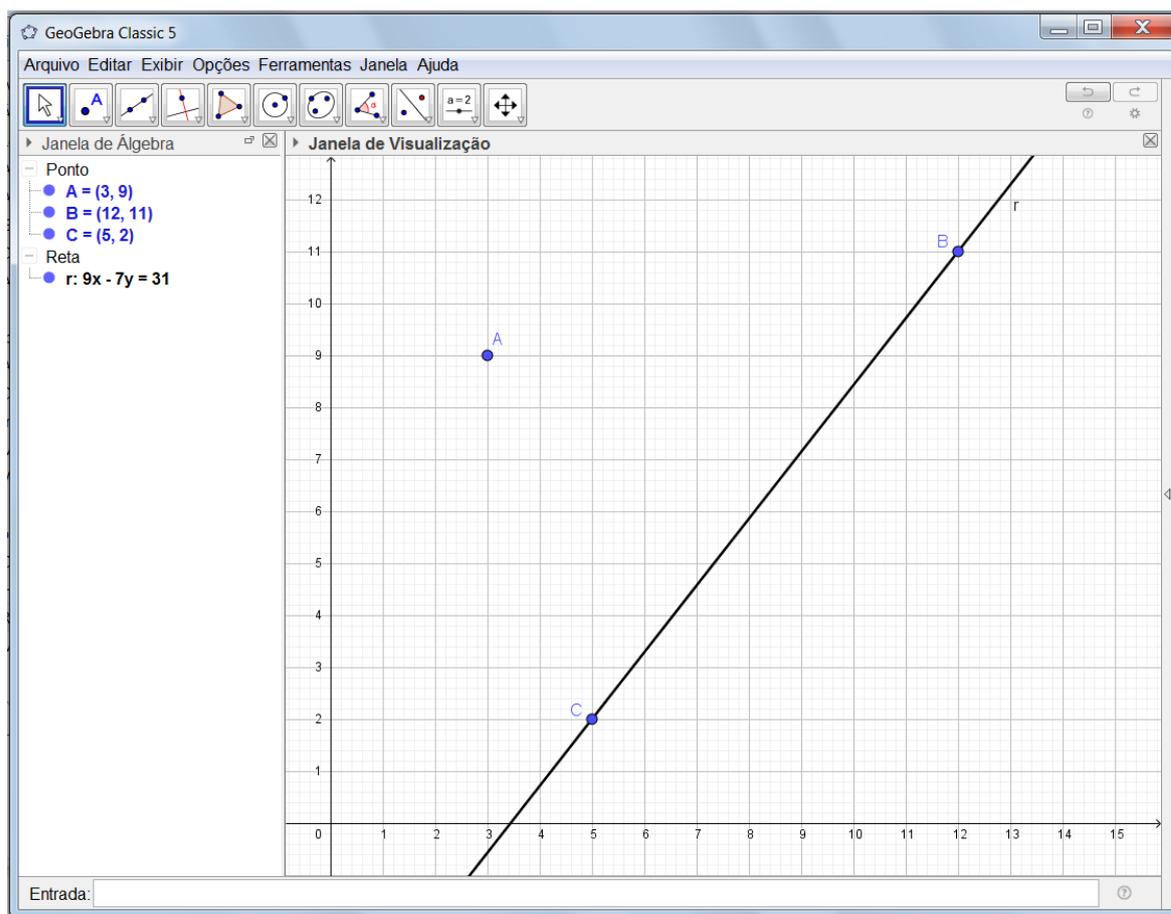


Figura 5.5: Interação entre as janelas do GeoGebra

5.3 INVESTIGAÇÃO COM O SOFTWARE GEOGEBRA

O GeoGebra pode substituir satisfatoriamente um caderno de desenho geométrico, sendo uma das suas inúmeras vantagens a possibilidade de manipulação da construção sem a perda do vínculo geométrico (GERÔNIMO et al., 2010).

De acordo com (VAZ, 2011), o GeoGebra permite uma boa interatividade, possibilitando a releitura de teoremas, o teste de hipóteses e a construção de conjecturas; a interação entre as janelas de álgebra e de visualização 2D permite ao usuário relacionar as várias faces de um mesmo objeto matemático.

Nas atividades de investigação que propomos a seguir, utilizamos a versão GeoGebra Classic 5.0.423.0-d. O atalho para o download do software bem como informações sobre o mesmo podem ser obtidos em (INSTITUTE, 2018).

5.4 PRIMEIRA ATIVIDADE INVESTIGATIVA

Uma condição necessária e suficiente para um quadrilátero ser inscrito é possuir ângulos opostos suplementares (DOLCE; POMPEO, 2005). Nesta primeira atividade, representamos um quadrilátero graficamente e investigamos a inscrição do mesmo em uma circunferência, condição esta demonstrada no segundo capítulo deste trabalho, mais especificamente no Teorema 2.9.

Desenvolvimento da atividade

1. Abra um novo arquivo no GeoGebra, selecione a opção “GRAVAR” no menu principal e nomeie como Atividade 1.
2. Na barra de ferramentas, selecione o botão “PONTO” e marque na janela de visualização $A = (4, 3)$, $B = (6, 7)$, $C = (12, 7)$ e $D = (11, 2)$.
3. Selecione a ferramenta “POLÍGONO” e desenhe o quadrilátero $ABCD$. Com o botão direito do mouse, clique sobre cada um dos lados, selecione a opção “EXIBIR RÓTULO” e desmarque a , b , c , d .
4. Com a ferramenta “ÂNGULO”, determine a medida de cada ângulo interno do quadrilátero $ABCD$, como na Figura 5.6. Importante: selecione os pontos no sentido horário.
5. Agora selecione “CÍRCULO DEFINIDO POR TRÊS PONTOS” e marque os pontos A , B e D , definindo assim a circunferência λ , conforme ilustrado na Figura 5.7.
6. Usando o botão “RELAÇÃO ENTRE OBJETOS”, indicado na Figura 5.8, verifique que o ponto C não pertence à circunferência λ .
7. No menu principal, selecione em “EXIBIR” o item PLANILHA e clique com o botão direito do mouse no ângulo $\beta = \widehat{ABC}$ e escolha a opção “GRAVAR PARA A PLANILHA DE CÁLCULO”. Repita o procedimento para o ângulo $\delta = \widehat{ADC}$. Observe que os valores de β aparecem na coluna A e os de δ na coluna B.
8. Movimente os pontos A e C aleatoriamente e observe, na planilha, os valores de β e δ .
9. Na coluna C da planilha, digite na célula C2 o comando, $=SOMA(A2 : B2)$ e arraste verticalmente para baixo. Na Figura 5.9, temos um exemplo do rol de valores dos ângulos β e δ .

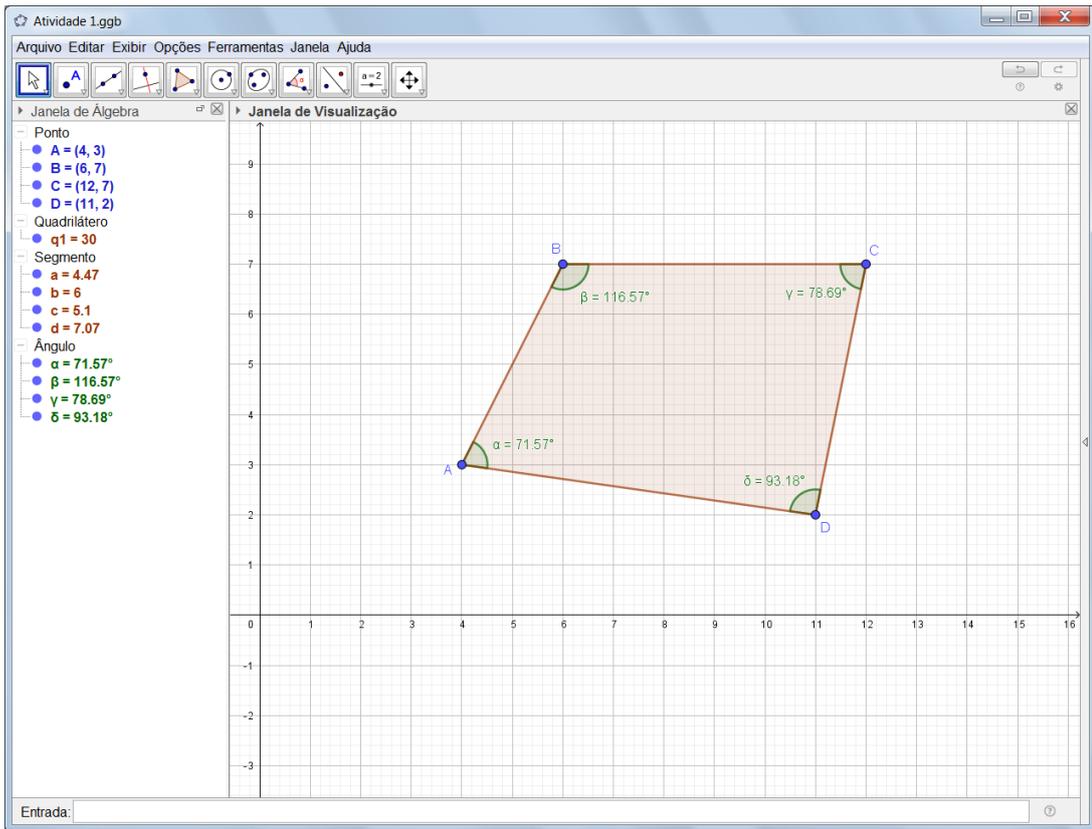


Figura 5.6: Ângulos internos do quadrilátero ABCD

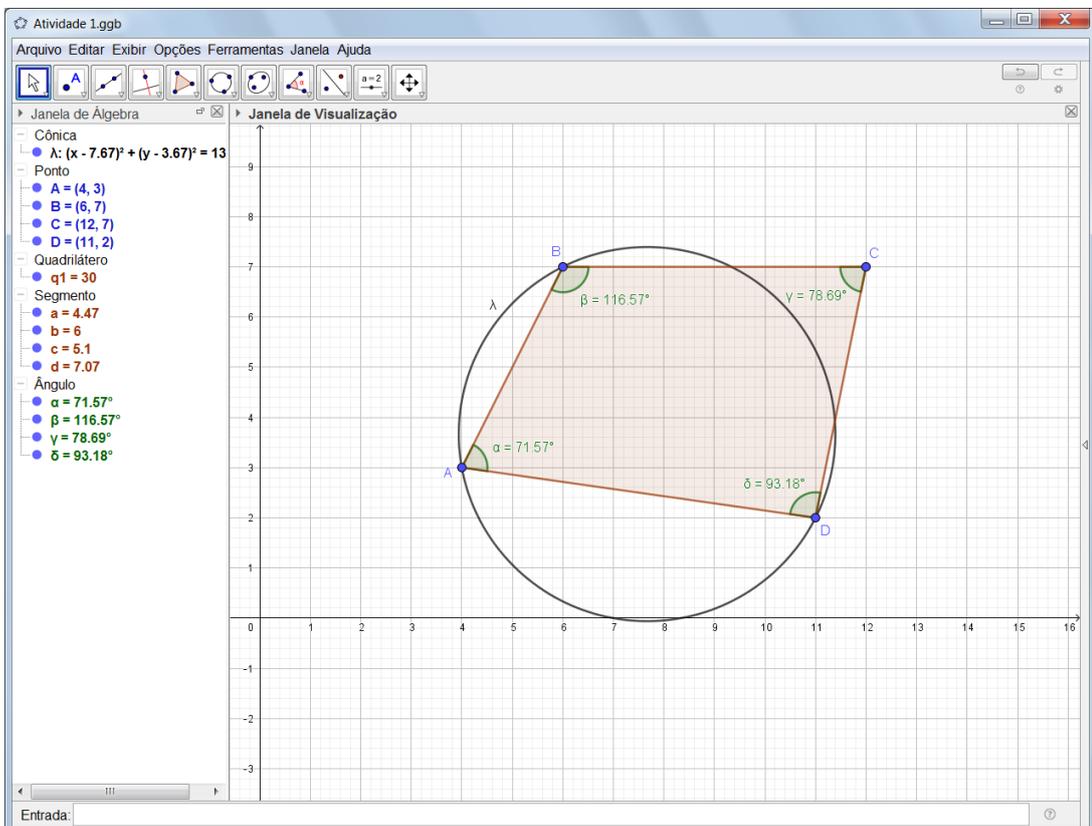


Figura 5.7: Quadrilátero ABCD e a circunferência λ



Figura 5.8: Comando “RELAÇÃO ENTRE OBJETOS” na barra de ferramentas

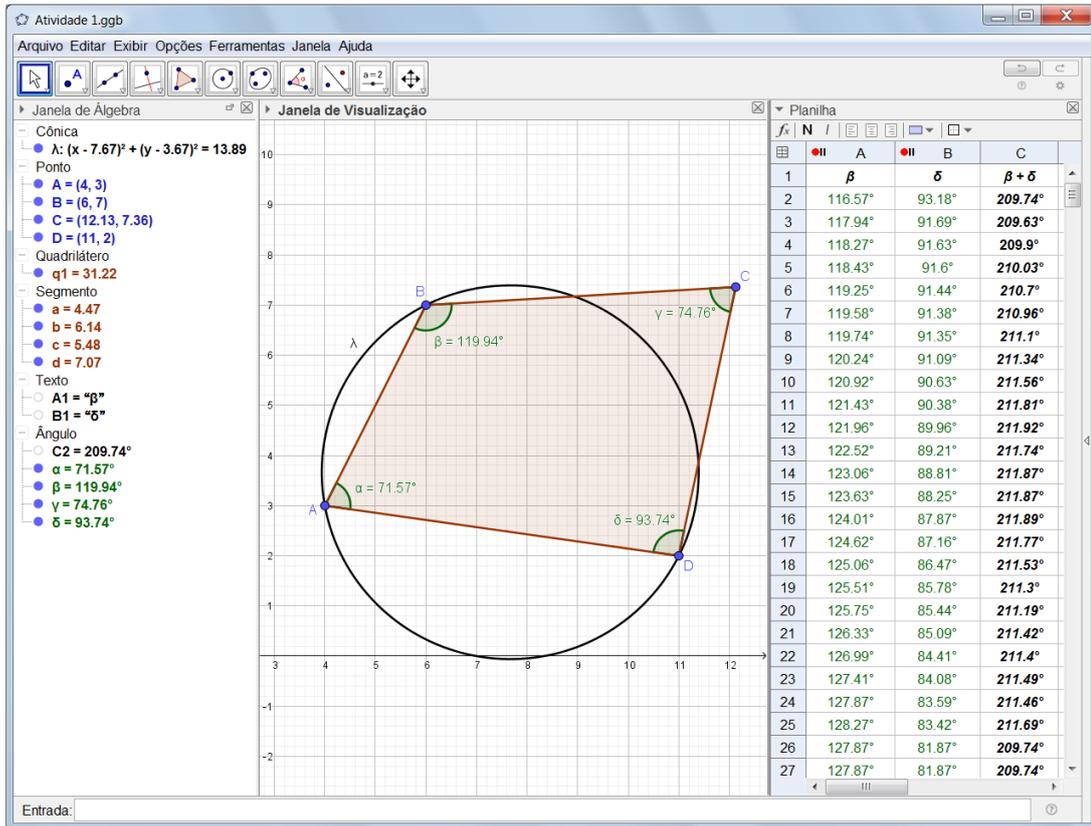


Figura 5.9: Valores aleatórios dos ângulos β e δ no quadrilátero $ABCD$

10. Nessa condição, os ângulos internos β e δ do quadrilátero $ABCD$ são suplementares?
11. Escolha agora a ferramenta “VINCULAR/DESVINCULAR PONTO”, selecione o ponto C e a circunferência λ . Com o botão direito do mouse clique no ponto C , escolha a opção “PROPRIEDADES” e marque a opção “DEFINIR COMO OBJETO AUXILIAR”.
12. Na planilha, apague os dados das colunas A e B clicando com o botão direito do mouse sobre a coluna e escolhendo a opção “APAGAR OBJETOS”.
13. Por fim, movimente o ponto C e observe as medidas dos ângulos β e δ sendo compiladas na planilha, como mostra a Figura 5.10.
14. Nesse caso, quanto vale a soma dos ângulos opostos β e δ do quadrilátero $ABCD$?

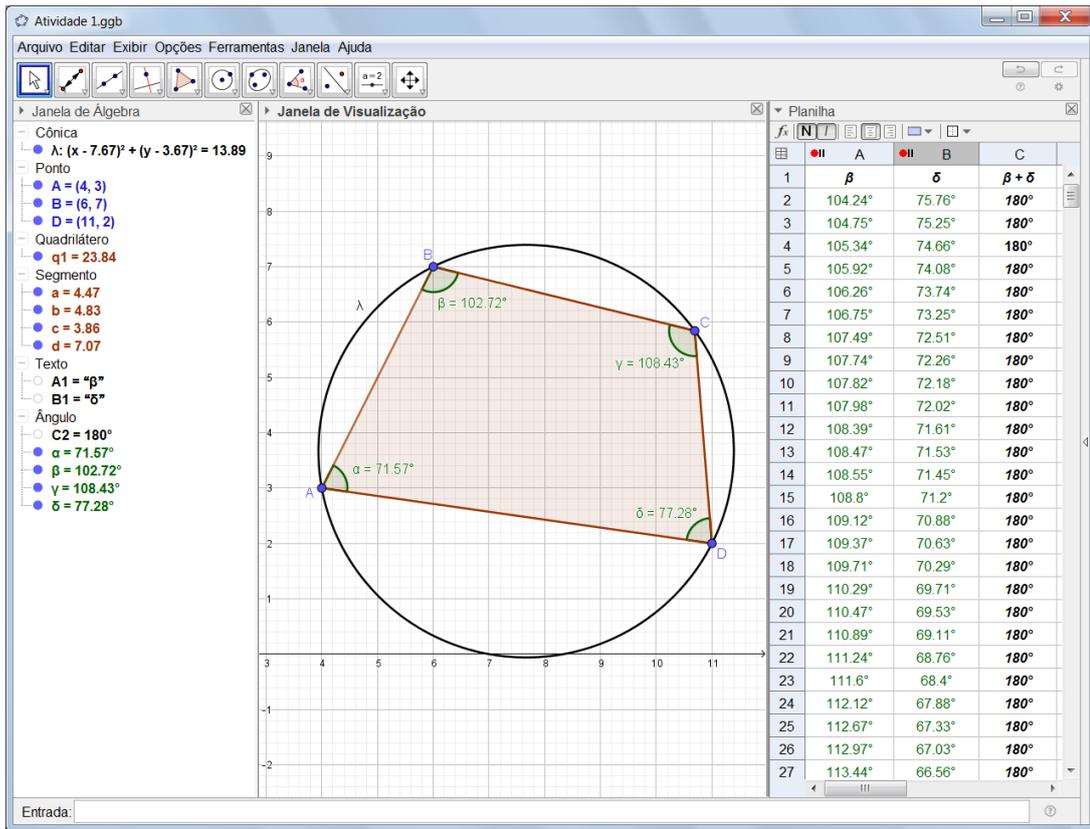


Figura 5.10: Ângulos suplementares β e δ do quadrilátero $ABCD$

5.5 SEGUNDA ATIVIDADE INVESTIGATIVA

O objetivo principal desta atividade é construir e explorar dinamicamente a reta de Simson-Wallace e suas propriedades, demonstradas no terceiro capítulo deste trabalho.

5.5.1 A RETA DE SIMSON-WALLACE

Desenvolvimento da atividade

1. Abra um novo arquivo no GeoGebra e o nomeie como Atividade 2.
2. Na barra de ferramentas, selecione o botão “PONTO” e marque na janela de visualização três pontos não colineares A , B e C . Em seguida, escolha a ferramenta “RETA” e trace nessa ordem as retas $AB = f$, $AC = g$ e $BC = h$.
3. Selecione o botão “CÍRCULO DEFINIDO POR TRÊS PONTOS” e marque os vértices A , B e C do triângulo, determinando então a circunferência λ circunscrita a ABC . Oculte os eixos coordenados e a malha na janela de visualização selecionando os botões

“EXIBIR OU ESCONDER OS EIXOS COORDENADOS” e “EXIBIR OU ESCONDER MALHA”. Na Figura 5.11, exemplificamos uma possível construção do triângulo ABC .

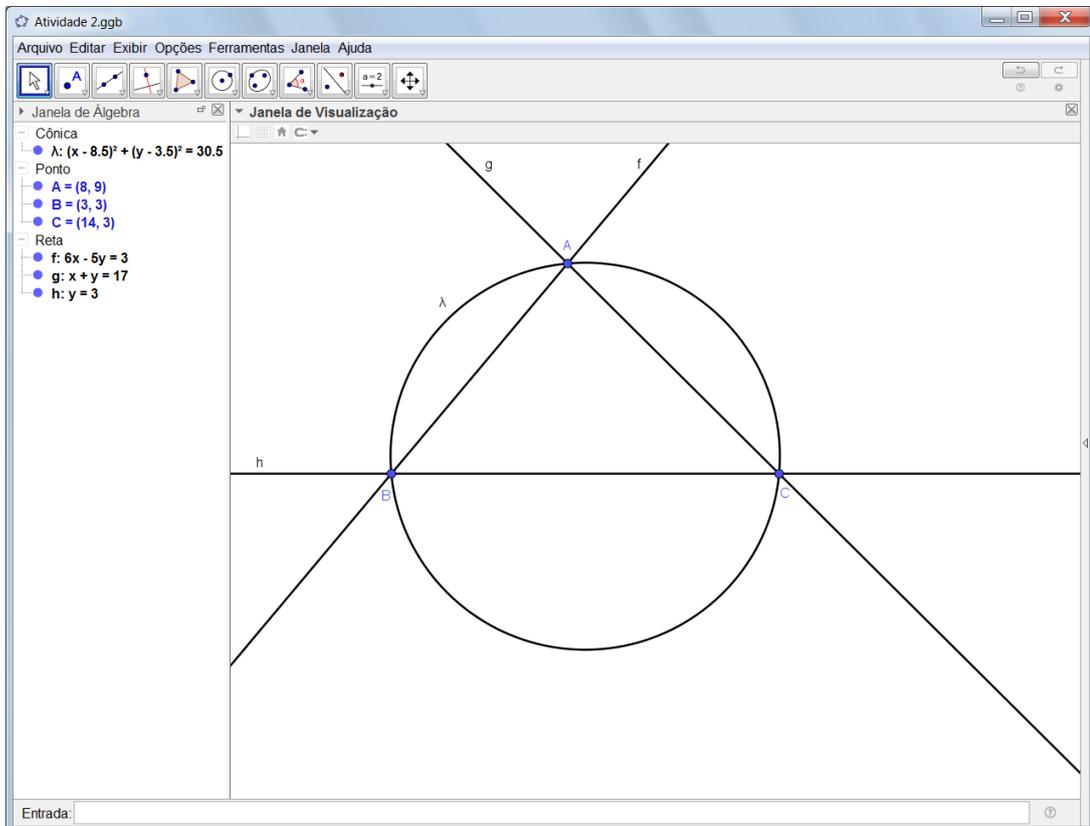


Figura 5.11: Exemplo de um triângulo ABC inscrito na circunferência λ

4. Selecione a ferramenta “PONTO EM OBJETO” e marque na circunferência λ o ponto D diferente de A , B e C .
5. Agora selecione o botão “PERPENDICULAR” e trace, por D , perpendiculares relativas às retas f , g e h nessa ordem.
6. Com o botão “INTERSECÇÃO ENTRE DOIS OBJETOS”, marque a intersecção das perpendiculares i , j e k com as retas f , g e h respectivamente nessa ordem, definindo assim os pontos E , F e G .
7. Com o botão “RETA”, selecione os pontos E , F e G e trace a reta l que passa por eles.
8. Para uma melhor visualização da construção geométrica, selecione com o botão direito do mouse cada uma das retas f , g , h , i , j e k e desmarque a opção “EXIBIR OBJETO”.
9. Com a ferramenta “POLÍGONO”, desenhe o triângulo ABC e, com o botão direito do mouse, selecione os segmentos AB , BC e AC e desmarque a opção “EXIBIR RÓTULO”. Temos na Figura 5.12 um exemplo de toda a construção geométrica até então realizada.

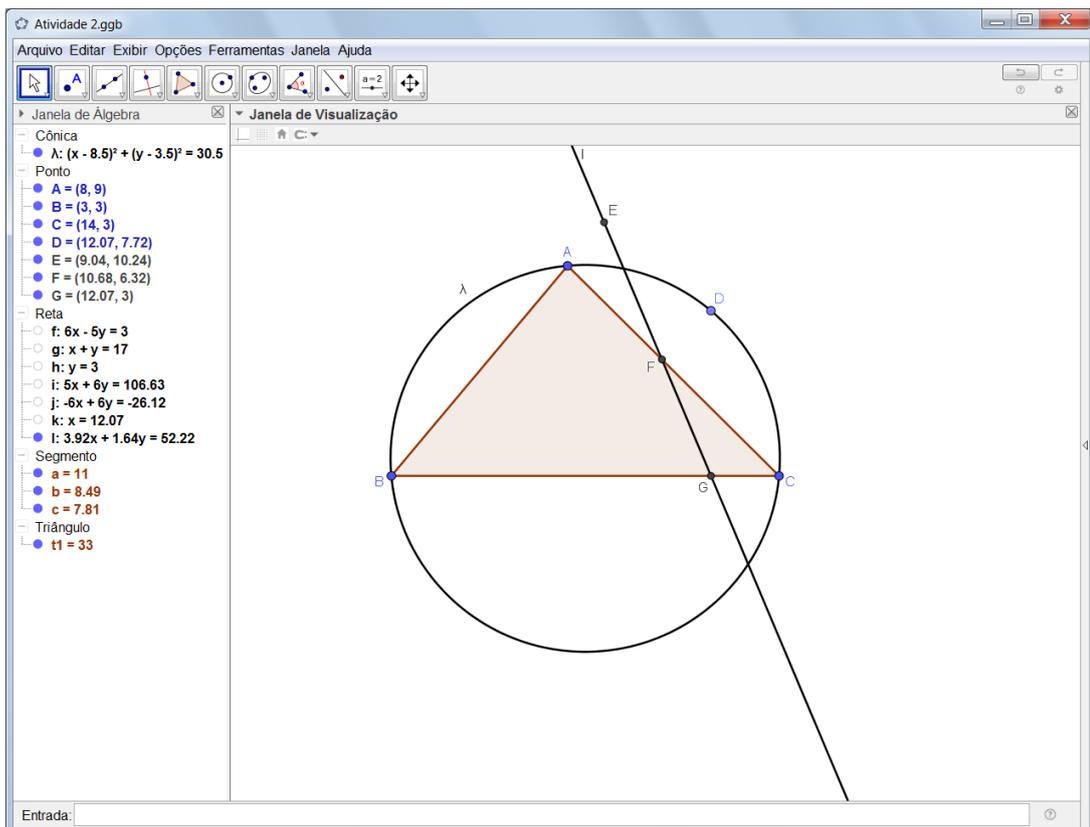


Figura 5.12: Triângulo ABC inscrito na circunferência λ e a reta l

10. Selecione o botão “SEGMENTO” e determine os segmentos DG , DF , DE e AE . Com o botão direito do mouse, clique em cada um dos segmentos DG , DF , DE e AE e desmarque a opção “EXIBIR RÓTULO”. Novamente com o botão direito do mouse, selecione “PROPRIEDADES” e, em seguida, “ESTILO” e modifique para tracejado cada um desses segmentos.
11. Com o botão “ÂNGULO”, selecione no sentido horário e na sequência os pontos A , E e D , em seguida C , F e D e por fim C , G e D . Com o botão direito do mouse, selecione os ângulos \widehat{AED} , \widehat{CFD} e \widehat{CGD} e desmarque a opção “EXIBIR RÓTULO”.
12. Renomeie a reta l para sw clicando com o botão direito do mouse e selecionando a opção “RENOMEAR”. A reta sw é a reta de Simson-Wallace e a construção assim definida está ilustrada na Figura 5.13.
13. Movimente o ponto D sobre a circunferência λ e observe o comportamento dos ângulos retos \widehat{AED} , \widehat{CFD} e \widehat{CGD} . Ocorre alguma modificação na medida desses ângulos ao movimentarmos o ponto D ? Movimentando os vértices A , B e C do triângulo, a reta sw de Simson-Wallace se mantém?

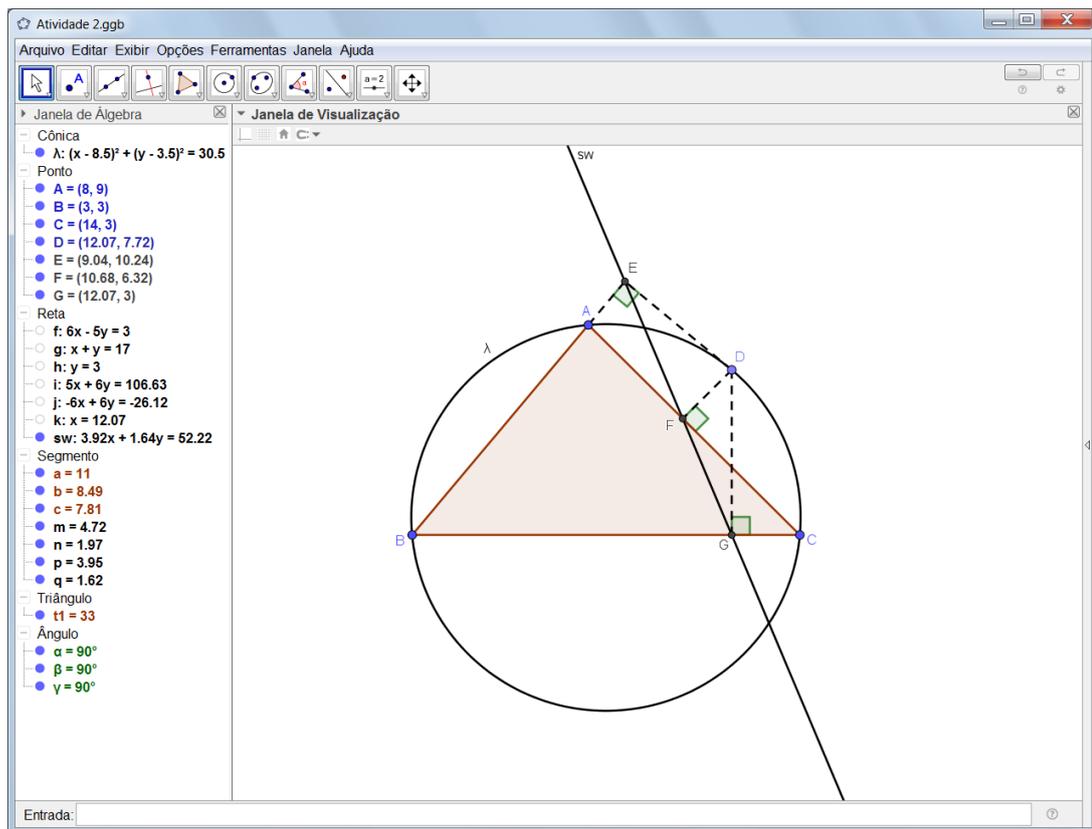


Figura 5.13: A reta sw de Simson-Wallace

14. Agora com a ferramenta “POLÍGONO”, selecione sequencialmente os pontos E , F , G e E . Com o botão direito do mouse, clique sobre e , f_1 e g_1 (rótulos que aparecem na janela de álgebra quando usamos a ferramenta “POLÍGONO”) e desmarque a opção “EXIBIR RÓTULO”.
15. Clique com o botão direito do mouse sobre o triângulo t_2 na janela de álgebra ou sobre EFG na janela de visualização, e selecione em “PROPRIEDADES” a opção “COR” e modifique.
16. Com a opção “VINCULAR / DESVINCULAR PONTO”, desvincule o ponto D da circunferência λ e observe o triângulo pedal EFG , conforme mostra a Figura 5.14. Movimente o ponto D e observe outros triângulos pedais.
17. Vinculando novamente o ponto D à circunferência λ , obtemos o triângulo pedal EFG degenerado. A Figura 5.15 mostra o triângulo pedal EFG degenerado na janela de visualização e $t_2 = EFG$ na janela de álgebra.
18. Aproveitando a característica dinâmica do GeoGebra, desmarque na janela de álgebra o triângulo $EFG = t_2$, selecione com o botão direito do mouse o ponto D e escolha a opção “ANIMAR”. Na janela de visualização há um botão de *play* - *pause* no canto inferior es-

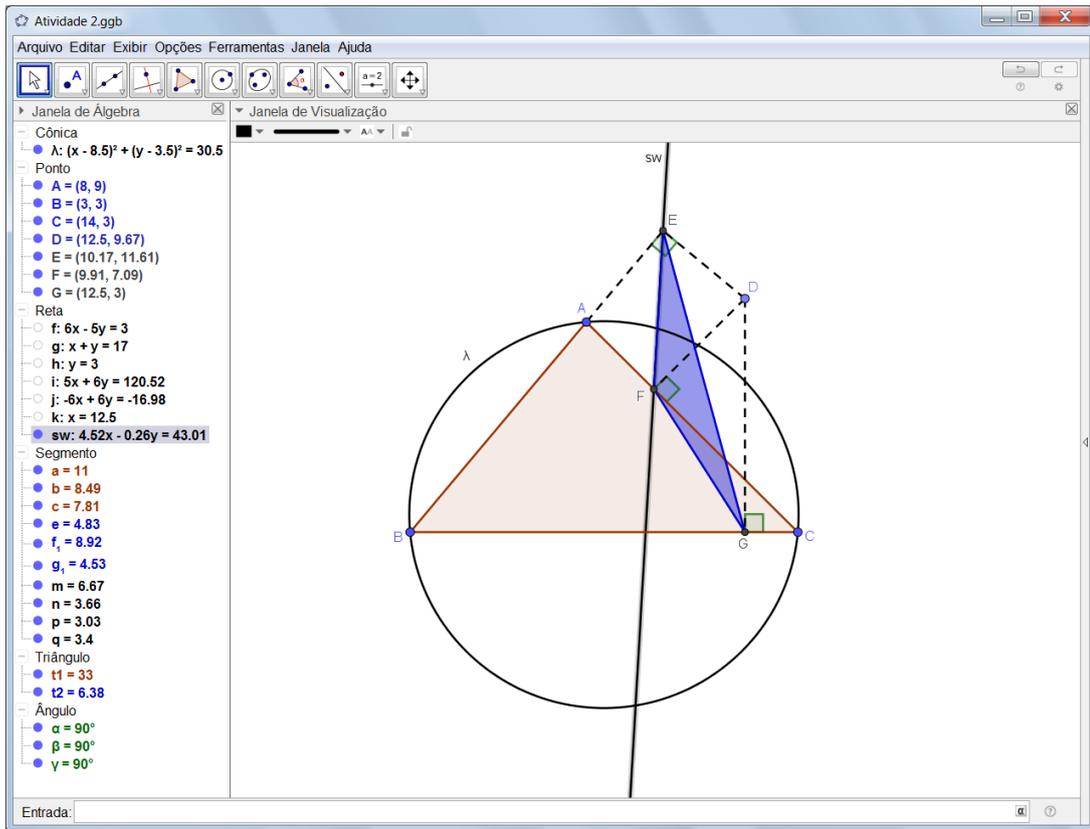


Figura 5.14: Triângulo pedal EFG

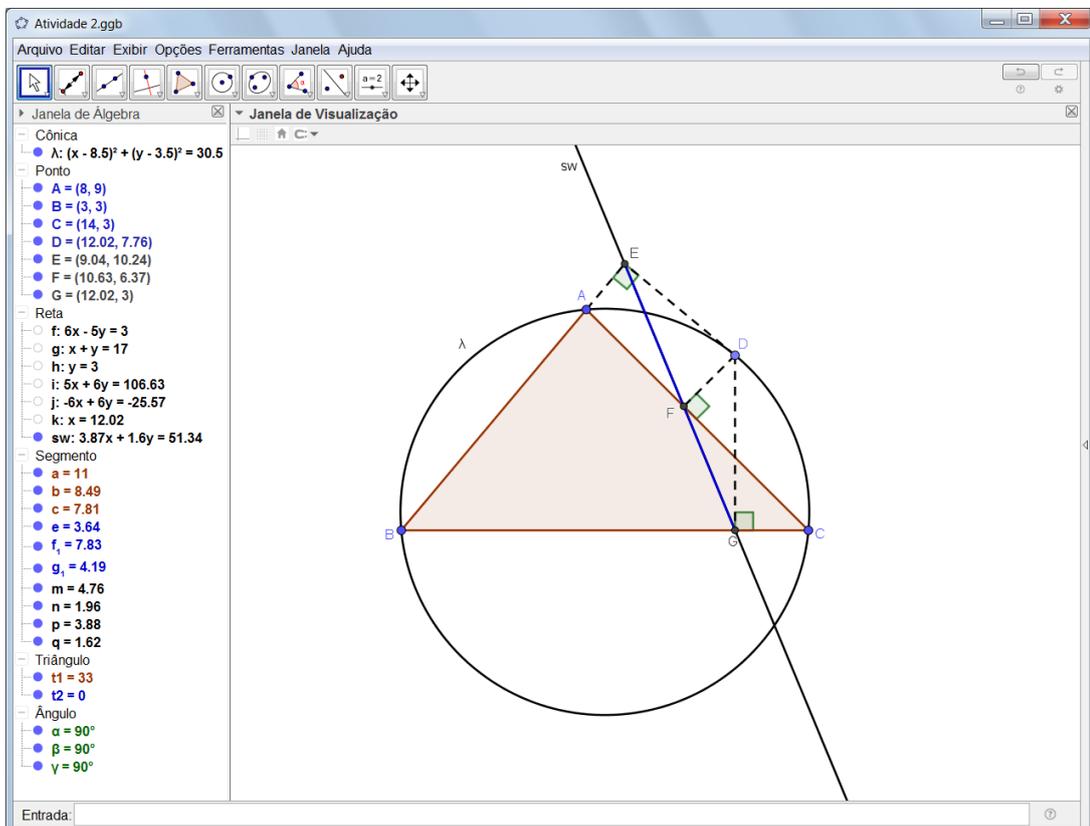


Figura 5.15: Triângulo pedal degenerado EFG

querdo. Clique nesse botão e manipule o movimento da reta sw de acordo com a maneira que desejar.

19. Pause a animação e marque a opção “HABILITAR RASTRO”, clicando com o botão direito do mouse sobre sw .
20. Em seguida, clique no botão *play* e deixe o ponto D se movimentar na circunferência λ , pause novamente a animação e observe o envelope das retas de Simson-Wallace formando a curva denominada deltóide de Steiner. Na Figura 5.16, optamos por modificar a cor e a espessura da reta sw para uma melhor visualização. Para fazer o mesmo, marque a reta sw com o botão direito do mouse, selecione “PROPRIEDADES” e em seguida “COR” e “ESTILO”. Salve e feche o arquivo.

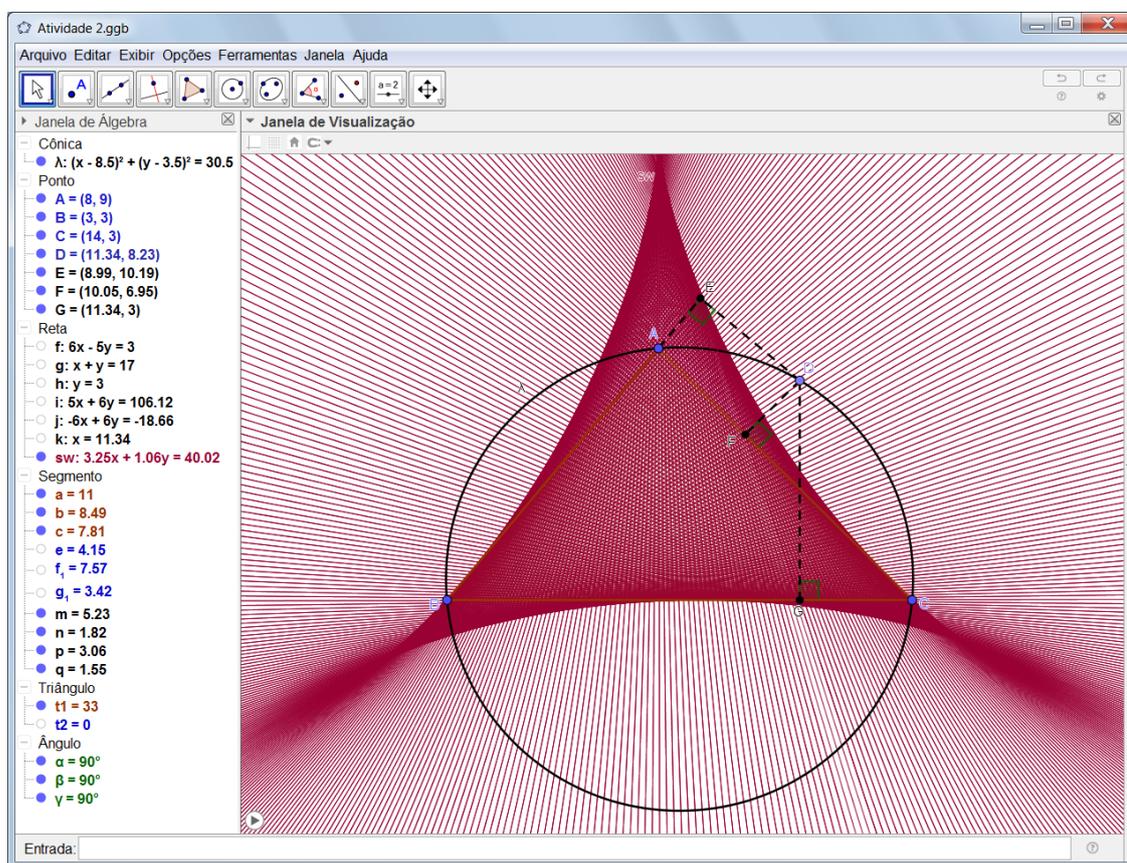


Figura 5.16: Envelope das retas de Simson-Wallace e o deltóide de Steiner

5.5.2 A RETA DE SIMSON-WALLACE E O ORTOCENTRO DO TRIÂNGULO

Exploramos agora o Teorema 3.4, que relaciona o ortocentro do triângulo inscrito ABC e a reta de Simson-Wallace.

Desenvolvimento da atividade

1. Abra o arquivo Atividade 2.ggb e grave como Atividade 2a.ggb.
2. Com o botão “RETA PERPENDICULAR”, trace a perpendicular ao segmento BC passando por A e a perpendicular passando por C relativa ao lado \overline{AB} . Em “INTERSECÇÃO ENTRE DOIS OBJETOS”, determine o ponto H , ortocentro do triângulo ABC .
3. Com o botão “SEGMENTO”, trace o segmento HD e, com o botão “INTERSECÇÃO ENTRE DOIS OBJETOS”, defina o ponto I de intersecção entre a reta sw e o segmento HD .
4. Para finalizar, selecione “DISTÂNCIA” e determine o comprimento dos segmentos HI e ID , confirmando assim que I é o ponto médio do segmento HD .
5. Selecione com o botão direito do mouse as perpendiculares r e l e oculte essas retas com a opção “EXIBIR OBJETO”. Ainda com o botão direito do mouse, marque o segmento HD e retire o rótulo s com “EXIBIR RÓTULO”.
6. Movimentando o ponto D , observe que o ponto I se mantém como ponto médio. A Figura 5.17 ilustra um exemplo de configuração da reta sw , do ponto médio I e do segmento HD .

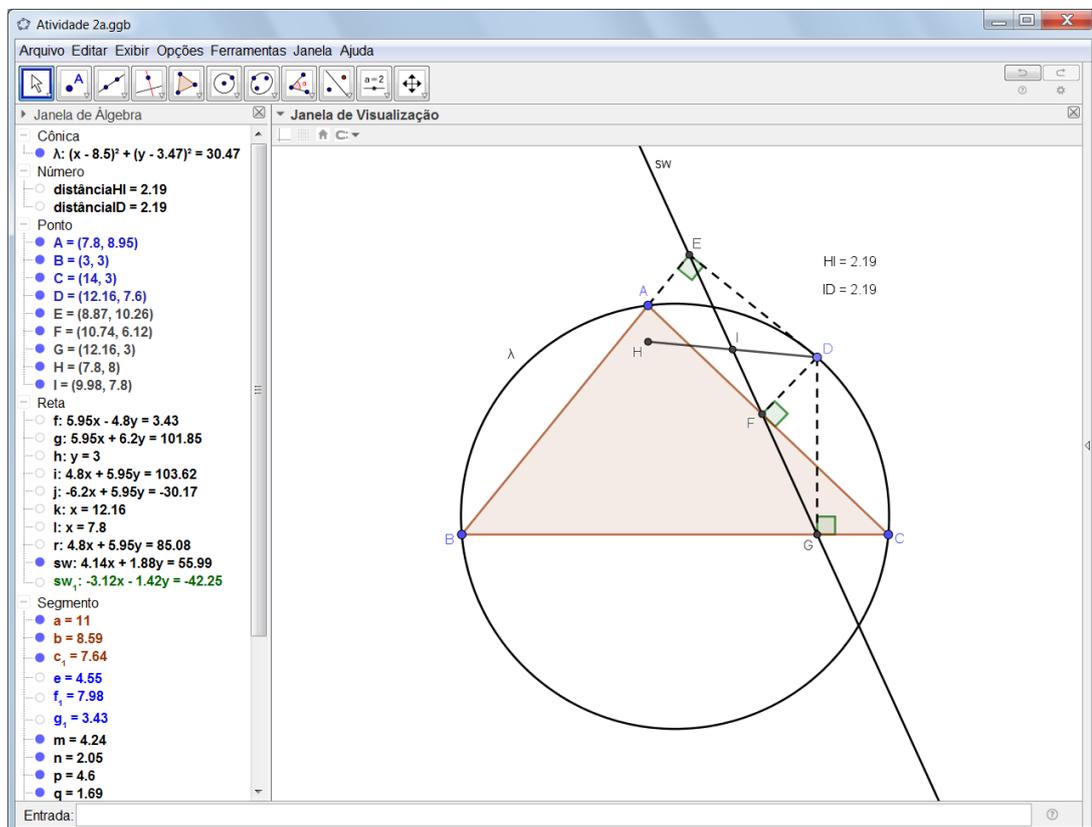


Figura 5.17: Reta de Simson-Wallace sw e o ponto médio I

Salve e feche o arquivo.

5.5.3 O ÂNGULO FORMADO POR DUAS RETAS DE SIMSON-WALLACE

Investigamos nesta atividade o Teorema 3.3, que relaciona o ângulo formado por duas retas de Simson-Wallace e o ângulo inscrito na circunferência que circunscreve um triângulo ABC .

Desenvolvimento da atividade

1. Abra o arquivo Atividade 2a.ggb e grave como Atividade 2b.ggb.
2. Escolha o botão “PONTO SOBRE UM OBJETO” e defina o ponto J pertencente à circunferência λ .
3. Com o botão “RETA PERPENDICULAR”, trace por J as perpendiculares relativas aos lados \overline{AB} e \overline{BC} nessa ordem.
4. Marque a intersecção das perpendiculares que passam por J com os lados do triângulo ABC , começando pelo segmento AB e em seguida o segmento BC . Utilize o botão “INTERSECÇÃO DE DOIS OBJETOS”. Em seguida, oculte essas perpendiculares desmarcando-as na janela de álgebra ou clicando com o botão direito do mouse sobre cada perpendicular e escolhendo a opção “EXIBIR OBJETO”.
5. Selecione a ferramenta “SEGMENTO” e defina os segmentos JK e JL . Logo em seguida, clique com o botão direito do mouse e desmarque a opção “EXIBIR RÓTULO” e modifique o “ESTILO” de cada um desses segmentos para tracejado.
6. Com o botão “ÂNGULO”, no sentido horário, determine os ângulos retos \widehat{AKJ} e \widehat{JLB} . Em cada ângulo, selecione a opção “EXIBIR RÓTULO” e retire o rótulo.
7. Por fim, selecione “RETA” e trace a reta de Simson-Wallace que passa por L e K . Renomeie essa reta como ws e com o botão “INTERSECÇÃO DE DOIS OBJETOS” selecione sw e ws definindo assim o ponto de intersecção M , conforme ilustrado na Figura 5.18.
8. Com o botão “ÂNGULO”, defina o ângulo entre as retas sw e ws , selecionando nesta ordem os pontos K , M e E .
9. A partir do vértice B , trace os segmentos BJ e BD . Com o botão “ÂNGULO”, defina o ângulo \widehat{DBJ} .

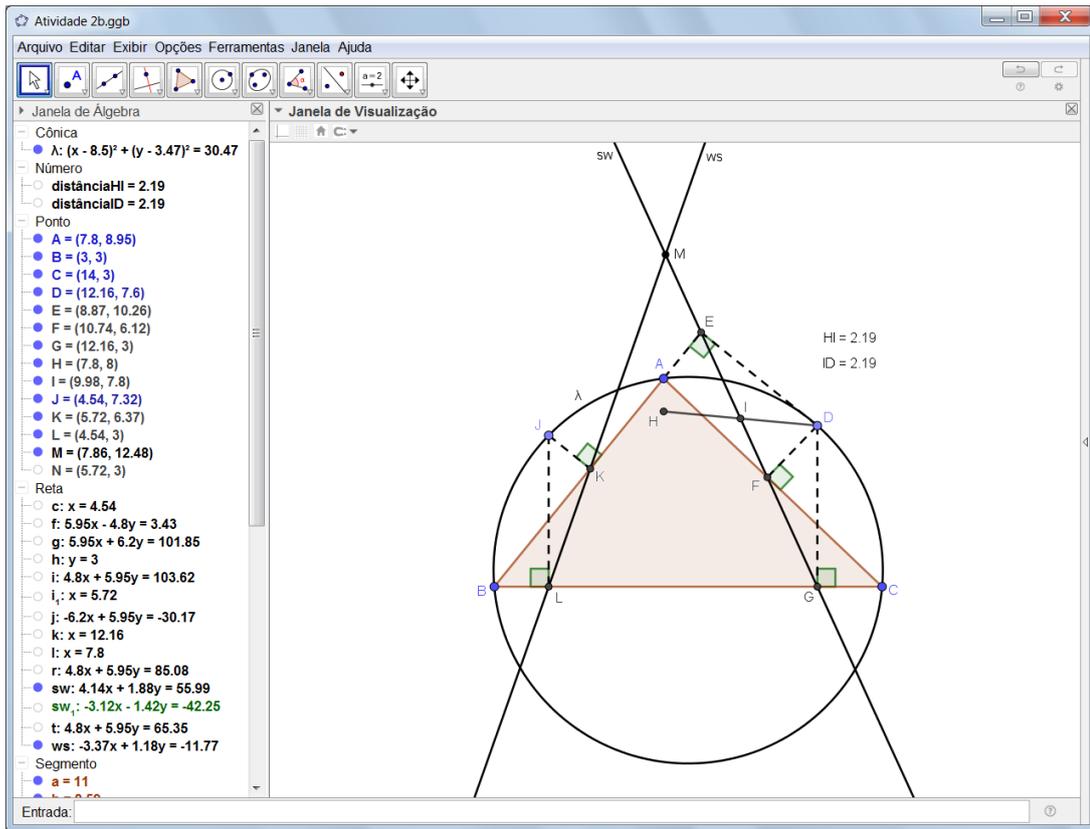


Figura 5.18: As retas *sw* e *ws* de Simson-Wallace

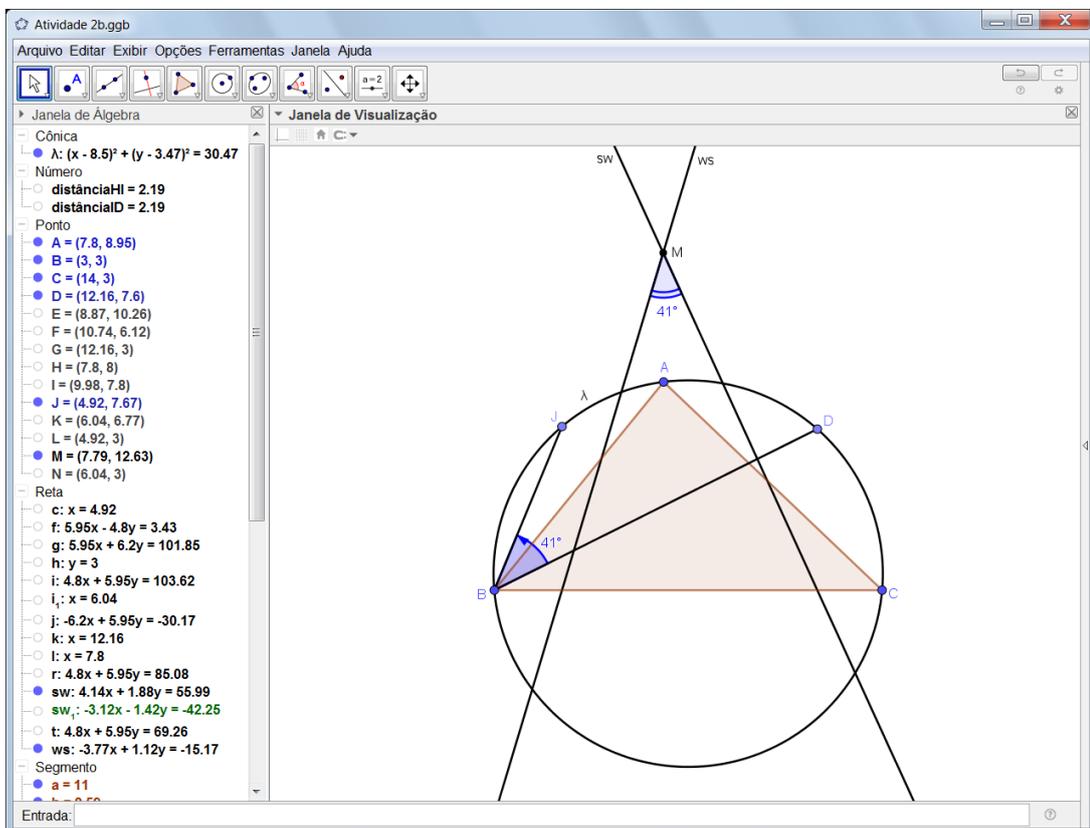


Figura 5.19: Ângulo inscrito \hat{DBJ} e o ângulo formado pelas retas *sw* e *ws*

10. Para melhorar a visualização, mantenha apenas o triângulo ABC , a circunferência λ , os segmentos BJ e BD e as retas sw e ws . Oculte os demais objetos, clicando com o botão direito do mouse e escolhendo a opção “EXIBIR OBJETO”.
11. Se julgar necessário, clique com o botão direito do mouse sobre o ângulo inscrito \widehat{DBJ} , selecione “PROPRIEDADES” e edite o ângulo. O mesmo procedimento pode ser realizado para o ângulo entre as retas sw e ws , obtendo assim uma construção similar à ilustrada na Figura 5.19.

5.6 TERCEIRA ATIVIDADE INVESTIGATIVA

Nesta terceira atividade, abordamos o teorema de Steiner-Lehmus e o seu recíproco, estudados no quarto capítulo. A declaração simples porém desafiadora do teorema pode ser comprovada com certa facilidade no GeoGebra.

Desenvolvimento da atividade

1. Abra um novo arquivo no GeoGebra e o nomeie como Atividade 3.
2. Selecione o botão “POLÍGONO” e desenhe um triângulo ABC de base $\overline{BC} = 12$.
3. Clique com o botão direito do mouse e desmarque “EXIBIR RÓTULO” para cada um dos segmentos AB , AC e BC .
4. Agora, com o botão “BISSETRIZ”, construa as duas bissetrizes internas f e g relativas aos ângulos da base \overline{BC} , conforme ilustrado na Figura 5.20.
5. Selecione o botão “INTERSECÇÃO ENTRE DOIS OBJETOS” e determine o ponto D de intersecção entre o lado \overline{AB} e a bissetriz do ângulo \widehat{ACB} , assim como o ponto E de intersecção entre o lado \overline{AC} e a bissetriz do ângulo \widehat{ABC} .
6. Na janela de álgebra, oculte as retas f e g .
7. Com a ferramenta “SEGMENTO”, construa os segmentos BE e CD , clique com o botão direito em \overline{BE} e em “PROPRIEDADES”, selecione “EXIBIR RÓTULO” e modifique o estilo do segmento para tracejado. Repita o mesmo procedimento para o segmento CD .
8. Usando a ferramenta “DISTÂNCIA”, determine o comprimento das bissetrizes \overline{BE} e \overline{CD} . Uma possível configuração da construção geométrica até então realizada é ilustrada na Figura 5.21.

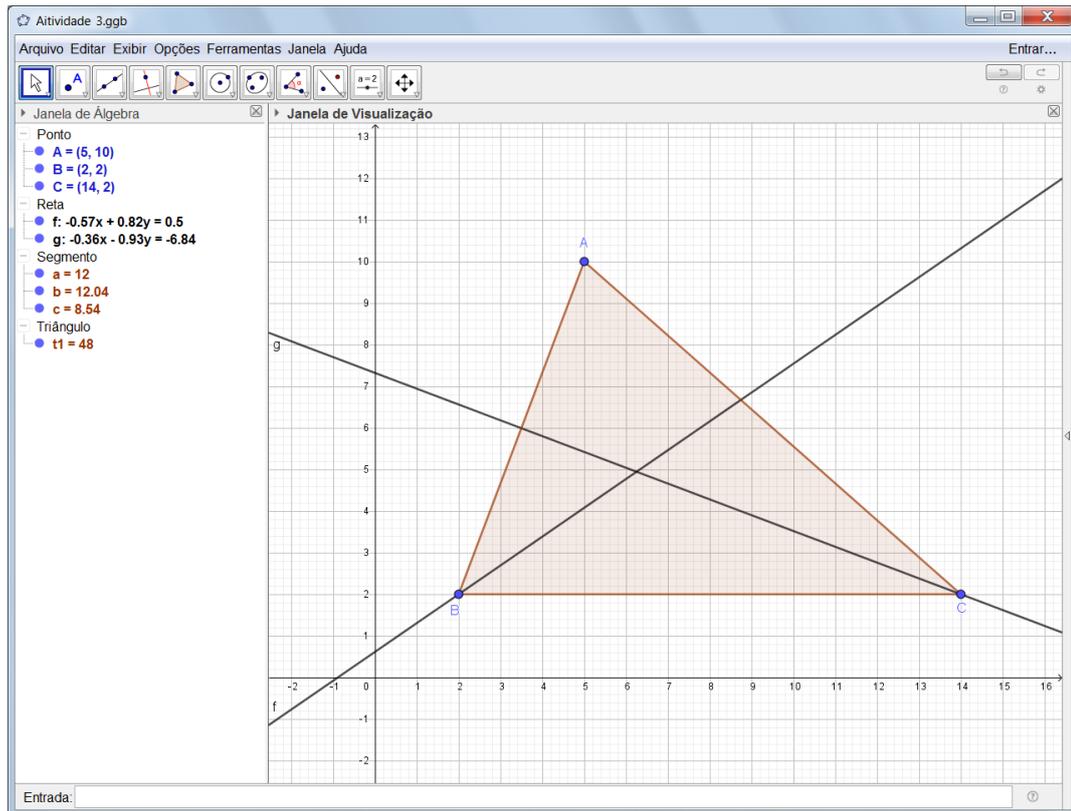


Figura 5.20: Retas suportes f e g das bissetrizes internas relativas aos ângulos da base do triângulo ABC

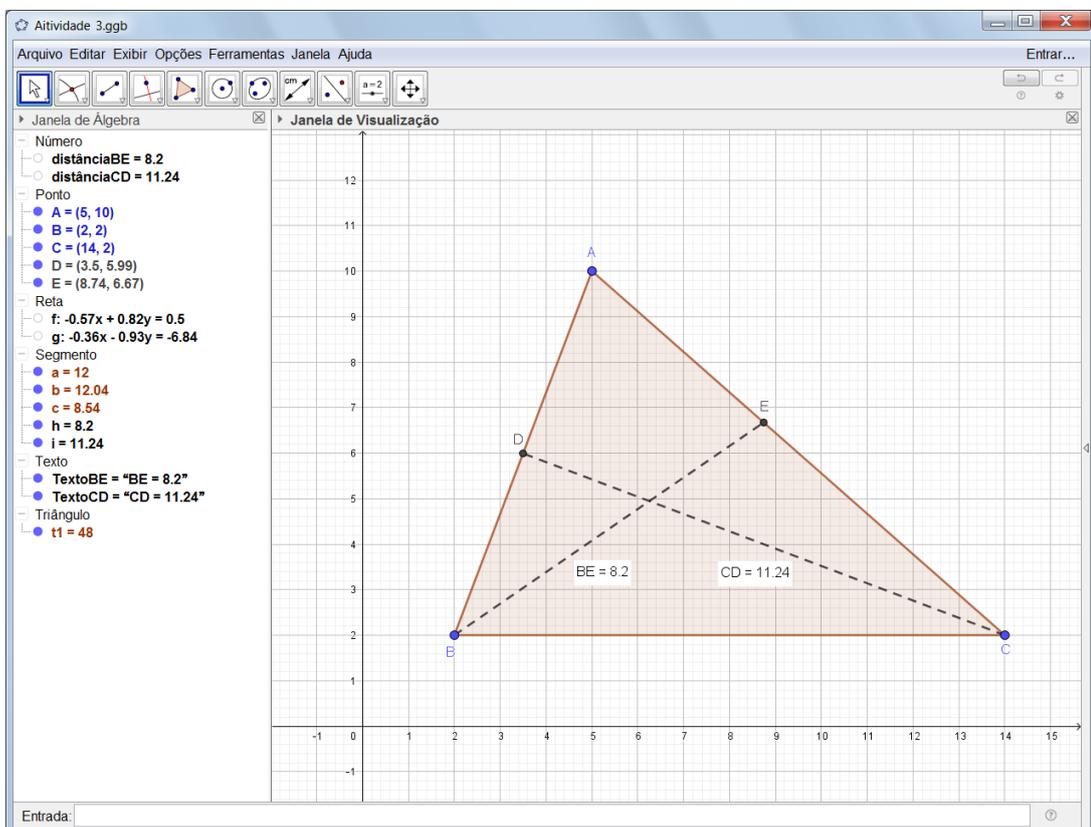


Figura 5.21: Bissetrizes internas \overline{BE} e \overline{CD} do triângulo ABC

9. Movimente o vértice A do triângulo ABC de tal maneira que as bissetrizes \overline{BE} e \overline{CD} se mantenham congruentes.
10. Novamente com a ferramenta “DISTÂNCIA”, defina o comprimento dos lados \overline{AB} e \overline{AC} do triângulo ABC .
11. Movimente o vértice A mantendo as bissetrizes \overline{BE} e \overline{CD} congruentes e comprove a verdade do teorema de Steiner-Lehmus e do seu recíproco.
12. Na Figura 5.22, ilustramos um exemplo de movimento para o vértice A . Observe a formação de um triângulo ABC isósceles.

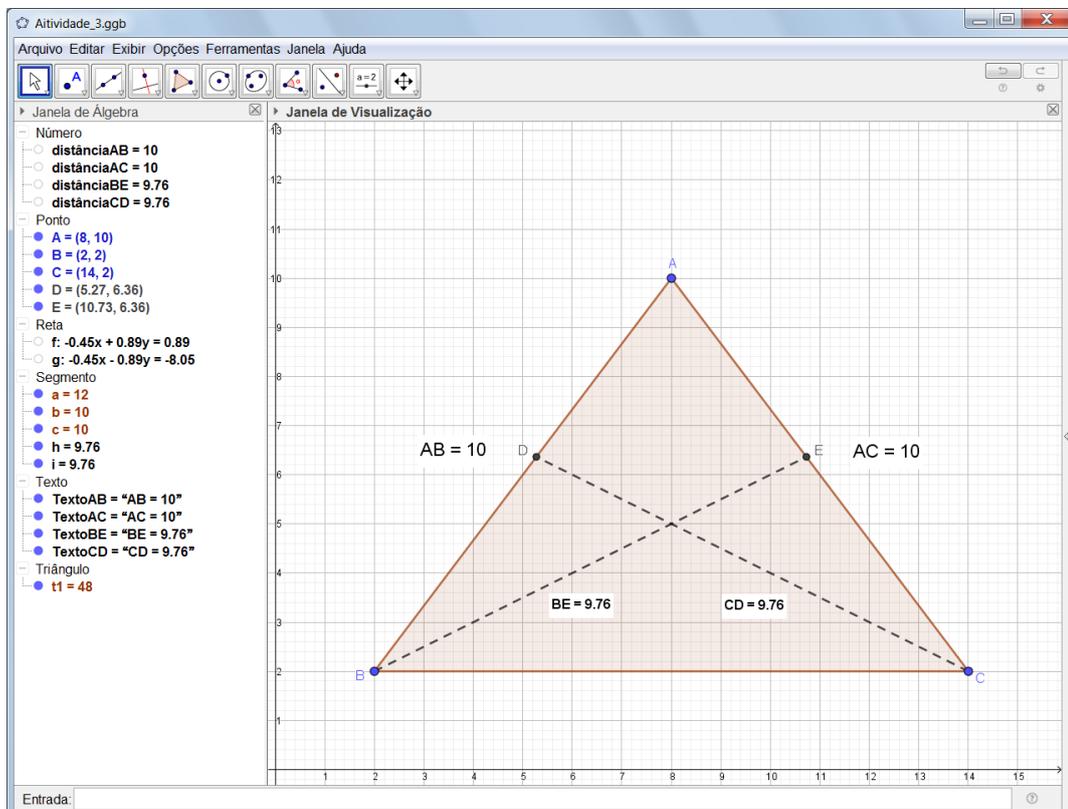


Figura 5.22: Triângulo isósceles ABC e as bissetrizes internas \overline{BE} e \overline{CD}

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Apresentamos neste trabalho diferentes estratégias para demonstrar os teoremas de Simson-Wallace e de Steiner-Lehmus, enfatizando nas demonstrações as propriedades dos quadriláteros convexos inscritíveis na circunferência. Propomos ainda três atividades investigativas com o software gratuito Geogebra, direcionadas aos professores de matemática que atuam na Educação Básica e no Ensino Superior. Nas atividades, exploramos a construção/investigação dos três teoremas que são os objetos de estudo deste trabalho: a condição de inscrição de quadriláteros convexos na circunferência, a reta de Simson-Wallace e suas propriedades e o teorema de Steiner-Lehmus.

Na pesquisa bibliográfica que efetuamos, constatamos que o tema quadriláteros inscritíveis é pouco explorado nos livros didáticos de matemática da Educação Básica e, mesmo quando abordado, as demonstrações e as aplicações são omitidas. Quanto aos teoremas de Simson-Wallace e de Steiner-Lehmus, apesar das declarações simples de ambos, com demonstrações fundamentadas em conteúdos de geometria elementar, há pouquíssimas referências em Português. Particularmente, não empregamos nenhuma bibliografia em Português para discorrer sobre o teorema de Steiner-Lehmus. As principais referências empregadas neste trabalho são: (COXETER, 1969), (GREITZER; COXETER, 1967), (ISAACS, 2001) e (GARDNER, 2013).

Finalizando, acreditamos que este trabalho acrescenta às referências em Português, principalmente àquelas utilizadas na disciplina Geometria I do PROFMAT, uma fonte de pesquisa de teoremas geométricos, além de servir de estímulo para futuras pesquisas na área. Esperamos que o trabalho seja útil aos estudantes do curso de Licenciatura em Matemática e do PROFMAT, especificamente na disciplina de geometria plana, e também aos professores de matemática da Educação Básica no sentido de valorizar/resgatar a geometria enquanto componente do currículo de matemática.

REFERÊNCIAS

- ABEBOOKS. **Lehmus**. 2017. Disponível em: <https://pictures.abebooks.com/BIERL/15108948043.jpg>. Acesso em: 8 de novembro de 2017.
- BERAN, D. **SSA and the Steiner-Lehmus theorem**. Dissertação (Mestrado) — University of Wisconsin, 1992.
- BERELE, A.; GOLDMAN, J. **Geometry: theorems and constructions**. 1. ed. New Jersey: Prentice Hall, 2000.
- BICUDO, I. **Os elementos**. 1. ed. São Paulo: UNESP, 2009.
- CAJORI, F. **A history of mathematics**. 6. ed. New York: The Macmillan Company, 1909.
- COXETER, H. S. M. **Introduction to geometry**. 2. ed. Toronto: University of Toronto, 1969.
- DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de matemática elementar: geometria plana**. 8. ed. São Paulo: Atual, 2005.
- DORRIE, H. **100 great problems of elementary mathematics**. New York: Dover, 1965.
- FOSSA, J. A. **Introdução às técnicas de demonstração na matemática**. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009.
- GARBI, G. G. **C.Q.D Explicações e demonstrações sobre conceitos, teoremas e fórmulas essenciais da geometria**. 1. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2010.
- GARDNER, S. R. **A variety of proofs of the Steiner-Lehmus theorem**. Dissertação (Mestrado) — East Tennessee State University, 2013.
- GENIAIS, I. **Postulados de Euclides**. 2018. Disponível em: <https://alguimaraes.files.wordpress.com/2013/08/euclides-4.png>. Acesso em: 02 de junho de 2018.
- GERÔNIMO, J. R.; BARROS, R. M. de O.; FRANCO, V. S. **Geometria Euclidiana plana: um estudo com o software GeoGebra**. 1. ed. Maringá: UEM, 2010.
- GOOGLE. **The Hinge theorem**. 2018. Disponível em: <http://tse2.mm.bing.net/th?id=OIP.G55KQie7tNVytLqHh3XaAHaFj>. Acesso em: 05 de junho de 2018.
- GREITZER, S. L.; COXETER, H. S. M. **Geometry revisited**. 1. ed. Washington, DC: The Mathematical Association of America, 1967.
- GRILLO, J. D. **Atividades e problemas de geometria espacial para o ensino médio**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de São Carlos, 2014.

GUZMÁN, M. de. The envelope of the wallace-simson lines of a triangle - a simple proof of the steiner theorem on the deltoid. **Rev. R. Acad. Cien. Serie A. Mat.**, v. 95, n. 1, p. 57–64, 2001. Disponível em: <<https://pdfs.semanticscholar.org/8bb7/3cb01144172573f4e99c37c13e085a321cd8.pdf>>. Acesso em: 8 de agosto de 2018.

INSTITUTE, I. G. **Geogebra**. 2018. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/download>>. Acesso em: 12 de março de 2018.

ISAACS, I. M. **Geometry for college students**. 1. ed. Madison: University of Wisconsin, 2001.

KAY, D. C. **College geometry: a unified development**. 1. ed. North Carolina: University of North Carolina, 2011.

LORENZATO, S. A. **Por que não ensinar geometria?** Blumenau, 1995.

MATEMÁTICA, S. B. de. **Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional**. Rio de Janeiro: SBM, 2010. Disponível em: <<http://www.profmat-sbm.org.br/provas-nacionais/>>. Acesso em: 12 de janeiro de 2018.

Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais: terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental**. Brasília: [s.n.], 1998. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>>. Acesso em: 11 de julho de 2018.

NETO, A. C. M. **Geometria**. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

PASSOS, C. L. B. **Representações, interpretações e prática pedagógica: a geometria na sala de aula**. Campinas, 2000.

PAVANELLO, R. M. **O abandono da geometria: uma visão histórica**. Campinas, 1989.

PEREZ, G. **Pressupostos e reflexões teóricas e metodológicas da pesquisa participante no ensino de geometria para as camadas populares**. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas, 1991.

PLANTAO, M. de. **Como se constrói um hipotrocóide**. s.d. Disponível em: <<http://matecurso2013.blogspot.com/p/quem-somos.html>>. Acesso em: 07 de agosto de 2018.

PONTE, J. P.; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

RANGEL, A. P. **Curvas**. 1. ed. Rio de Janeiro: Universidade Federal do Rio de Janeiro, 1974.

RODRIGUES, M. M. A. T. **A demonstração na prática social da aula de matemática**. Lisboa, 2008.

ROQUE, T. **História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. 1. ed. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor Ltda, 2012.

SILVA, V. do N. **Teorema de Tales e suas aplicações**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2015.

TEMPO, M. e as ciências do nosso. **Ciclóide**. 2018. Disponível em: <http://2.bp.blogspot.com/ofc9vJoG0ns/S6FVixBoI/AAAAAAAAACdo/Z1gPaSh1B9I/s320/1.jpg>. Acesso em: 04 de maio de 2018.

UK, A. **Simson**. 2018a. Disponível em: <https://artuk.org/discover/artworks/robert-simson-16871768-155874>. Acesso em: 05 de maio de 2018.

UK, A. **Wallace**. 2018b. Disponível em: <https://www.artuk.org/discover/artworks/william-wallace-ma-professor-of-mathematics-at-the-university-of-edinburgh-18191837-186131>. Acesso em: 3 de maio de 2018.

UNICAMP. **Geometria plana e analítica**. 2017. Disponível em: https://www.ime.unicamp.br/chico/ma092/ma092_7_geo_ang_circ_tales.pdf. Acesso em: 08 de julho de 2018.

VAZ, D. A. de F. **Experimentando, conjecturando, formalizando e generalizando: articulando investigação matemática com o GeoGebra**. Goiânia, 2011.

VIEIRA, M. A. **Construções geométricas e os problemas de Apolônio**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Goiás, 2013.

WIKIPÉDIA. **Brahmagupta**. 2017a. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Brahmagupta>. Acesso em: 20 de agosto de 2017.

WIKIPÉDIA. **Ptolomeu**. 2017b. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Ptolemeu>. Acesso em: 04 de agosto de 2017.

WIKIPÉDIA. **Steiner**. 2017c. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Jakobsteiner/media/File:JakobSteiner.jpg>. Acesso em: 05 de novembro de 2017.

YOUTUBE. **Epicyclóide**. 2018. Disponível em: <https://i.ytimg.com/vi/1LaIpL9zitY/hqdefault.jpg>. Acesso em: 05 de maio de 2018.

APÊNDICE A – TEOREMAS AUXILIARES

No terceiro capítulo deste trabalho, demonstramos o Teorema 3.1 fazendo uso de um importante resultado de colinearidade conhecido como teorema de Menelaus, em homenagem à Menelaus de Alexandria, nascido por volta do ano 70 d.C. no antigo Egito.

A.1 O TEOREMA DE MENELAUS

Para compreendermos amplamente o teorema de Menelaus, são necessárias algumas definições.

Definição A.1. *Uma reta é dita orientada quando fixamos um sentido de percurso. Por convenção, o sentido fixado apresenta sinal positivo e o sentido contrário sinal negativo.*



Figura A.1: Reta s e reta orientada r

Definição A.2. *Dados dois pontos distintos A e B pertencentes a uma reta orientada r , denotamos o comprimento do segmento com origem em A e extremidade B com um número real positivo se a orientação do segmento AB concorda com o sentido positivo da reta. Caso contrário, denotamos o comprimento com um número real negativo. Em particular, seja u a unidade de comprimento. Assim, para o segmento AB ilustrado na Figura A.2, temos que $\overline{AB} = 3u$ e $\overline{BA} = -3u$ ou, equivalentemente, $\overline{AB} = -\overline{BA}$.*

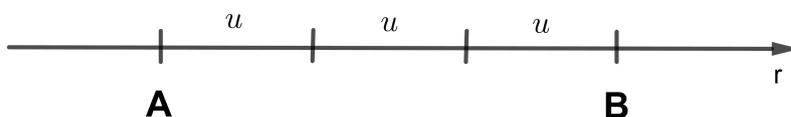


Figura A.2: Comprimento algébrico do segmento orientado AB

Definição A.3. Consideremos uma reta r orientada e os pontos A e B , distintos, pertencentes a r . Seja $P \in r$ um ponto distinto de A e de B .

1. Se P pertence ao exterior do segmento AB , como mostra a Figura A.3, então $\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} > 0$.



Figura A.3: Razão orientada positiva

2. Se P pertence ao interior do segmento AB , como ilustra a Figura A.4, então $\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} < 0$.



Figura A.4: Razão orientada negativa

Teorema A.1 (Menelaus - versão completa). Se ABC é um triângulo qualquer e D , E e F são pontos distintos dos vértices, situados respectivamente sobre os lados \overline{AB} , \overline{BC} e \overline{AC} de ABC , então

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} \cdot \frac{\overline{BE}}{\overline{EC}} \cdot \frac{\overline{CF}}{\overline{FA}} = -1,$$

se, e somente se, D , E e F são colineares.

A Figura A.5 ilustra as hipóteses do Teorema A.1.

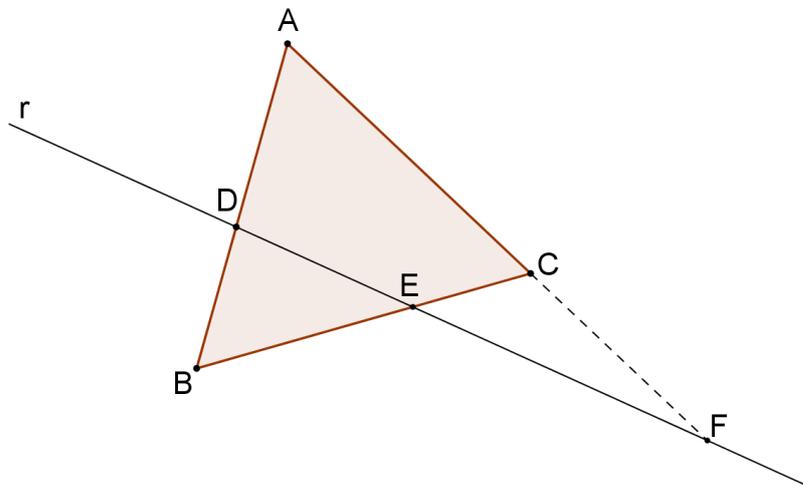


Figura A.5: Triângulo ABC e os pontos colineares D , E e F

Demonstração.

Sejam: ABC um triângulo qualquer; D , E e F pontos colineares situados sobre os lados \overline{AB} , \overline{BC} e \overline{AC} (ou seus prolongamentos), respectivamente, de ABC ; r a reta que passa por D , E e F . Pelos vértices A , B e C de ABC , traçamos retas paralelas à reta r , e prolongamos o lado \overline{BC} até este intersectar em G a reta que passa por A , como na Figura A.6.

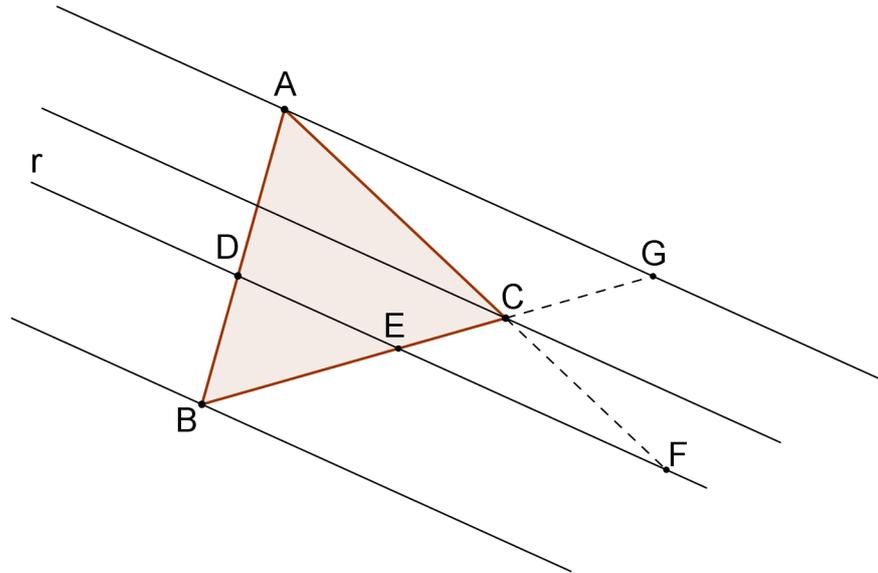


Figura A.6: Feixe de retas paralelas à reta r

Temos assim um feixe de quatro retas paralelas cortadas pelas transversais \overleftrightarrow{AB} , \overleftrightarrow{BC} e \overleftrightarrow{AC} . Usando o teorema de Tales¹, estabelecemos as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{AD}}{\overline{GE}} &= \frac{\overline{DB}}{\overline{EB}}; \\ \overline{GE} &= \frac{\overline{AD} \cdot \overline{EB}}{\overline{DB}}; \end{aligned} \tag{A.1}$$

$$\begin{aligned} \frac{\overline{FC}}{\overline{EC}} &= \frac{\overline{FA}}{\overline{EG}}; \\ \overline{EG} &= \frac{\overline{EC} \cdot \overline{FA}}{\overline{FC}}. \end{aligned} \tag{A.2}$$

De (A.1) e (A.2), considerando a orientação dos segmentos, temos que:

$$\overline{GE} = -\overline{EG} \implies \frac{\overline{AD} \cdot \overline{EB}}{\overline{DB}} = -\frac{\overline{EC} \cdot \overline{FA}}{\overline{FC}} \implies \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} \cdot \frac{\overline{EB}}{\overline{EC}} \cdot \frac{\overline{FC}}{\overline{FA}} = -1. \tag{A.3}$$

¹A demonstração do teorema pode ser encontrada em (NETO, 2013) e (SILVA, 2015).

Observando que $\overline{EB} = -\overline{BE}$ e $\overline{FC} = -\overline{CF}$, concluímos a partir de (A.3) que:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} \cdot \frac{-\overline{BE}}{\overline{EC}} \cdot \frac{-\overline{CF}}{\overline{FA}} = -1 \implies \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} \cdot \frac{\overline{BE}}{\overline{EC}} \cdot \frac{\overline{CF}}{\overline{FA}} = -1.$$

Reciprocamente, suponhamos que a reta DE intersecta o prolongamento do segmento AC em F' , conforme ilustra a Figura A.7, e que:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} \cdot \frac{\overline{BE}}{\overline{EC}} \cdot \frac{\overline{CF}}{\overline{FA}} = -1. \quad (\text{A.4})$$

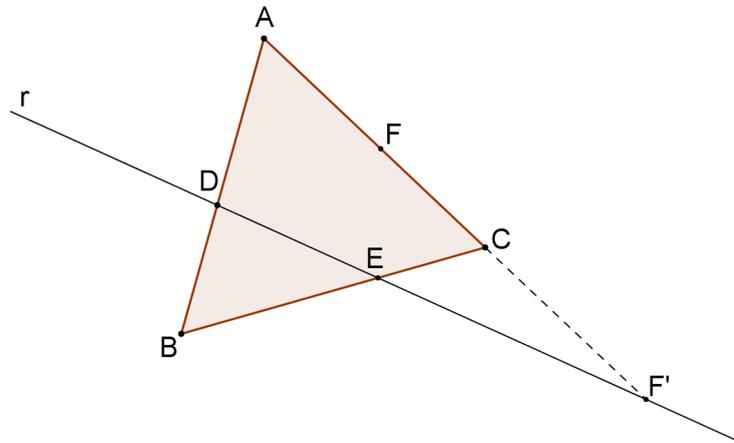


Figura A.7: Triângulo ABC e os pontos colineares D , E e F'

Como D , E e F' são colineares, temos, como provado anteriormente, que:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} \cdot \frac{\overline{BE}}{\overline{EC}} \cdot \frac{\overline{CF'}}{\overline{F'A}} = -1. \quad (\text{A.5})$$

Comparando (A.4) e (A.5), obtemos:

$$\frac{\overline{CF}}{\overline{FA}} = \frac{\overline{CF'}}{\overline{F'A}}. \quad (\text{A.6})$$

De (A.6), decorre que os pontos F e F' são coincidentes. Portanto, os pontos D , E e F são colineares.

□

Observação A.1. Considerando as razões orientadas entre os segmentos, isto é, as medidas dos comprimentos algébricos, dizemos que o teorema de Menelaus está na sua versão completa - Teorema A.1. Caso contrário, usando somente as medidas geométricas (razões positivas), ou

seja, sem orientação definida para os segmentos, temos a versão básica do referido teorema.

Teorema A.2 (Menelaus - versão básica). *Se ABC é um triângulo qualquer e D , E e F são pontos colineares, situados respectivamente sobre os lados \overline{AB} , \overline{BC} e \overline{AC} de ABC , então*

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} \cdot \frac{\overline{BE}}{\overline{EC}} \cdot \frac{\overline{CF}}{\overline{FA}} = 1.$$

Observação A.2. *A demonstração do Teorema A.2 é inteiramente análoga à demonstração do Teorema A.1.*

Observação A.3. *Na versão básica, a recíproca do teorema de Menelaus nem sempre é verdadeira. Basta considerar como contra-exemplo os pontos médios dos lados de um triângulo ABC . Neste caso, o produto das razões é igual a 1, porém os pontos não são colineares.*

A.2 O TEOREMA DA BISSETRIZ INTERNA DE UM TRIÂNGULO

Definição A.4. *A bissetriz interna de um triângulo é um segmento que possui uma extremidade em um dos vértices e a outra no lado oposto, e que divide o ângulo interno desse vértice em dois ângulos adjacentes e congruentes.*

A Figura A.8 ilustra a bissetriz interna \overline{AD} do triângulo ABC .

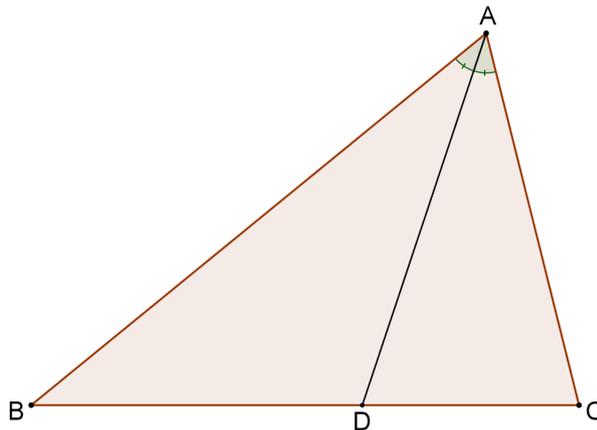


Figura A.8: Triângulo ABC e a bissetriz interna \overline{AD}

Teorema A.3. *Em um triângulo, a bissetriz de um ângulo interno divide o lado oposto em segmentos proporcionais aos lados adjacentes.*

Demonstração.

Sejam um triângulo ABC qualquer e a bissetriz interna \overline{AD} relativa ao ângulo \widehat{BAC} . Pelo vértice C , traçamos uma reta r paralela à reta suporte de \overline{AD} , e prolongamos o lado \overline{BA} até que este intersecte r em E , como ilustra a Figura A.9. Queremos provar que $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DB}}{\overline{DC}}$.

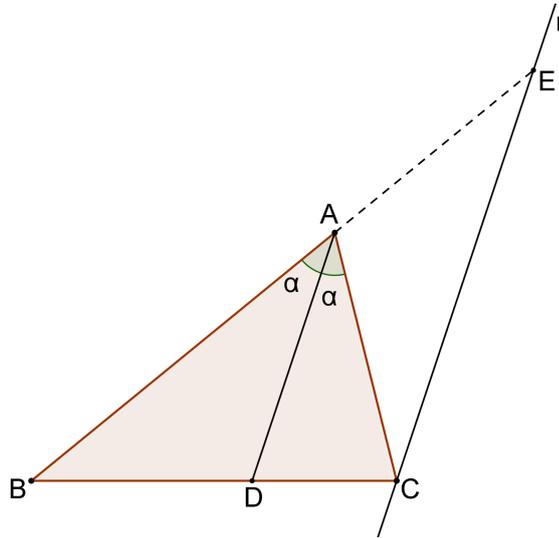


Figura A.9: Triângulo ABC , a bissetriz interna \overline{AD} e a reta CE

Como as retas AD e CE são paralelas, conseqüentemente $\widehat{BAD} \equiv \widehat{AEC} = \alpha$ (ângulos correspondentes congruentes) e $\widehat{DAC} \equiv \widehat{ACE} = \alpha$ (ângulos alternos internos). Assim, $\widehat{AEC} \equiv \widehat{ACE} = \alpha$ e o triângulo AEC é isósceles. Portanto,

$$\overline{AC} \equiv \overline{AE}, \quad (\text{A.7})$$

como ilustra a Figura A.10.

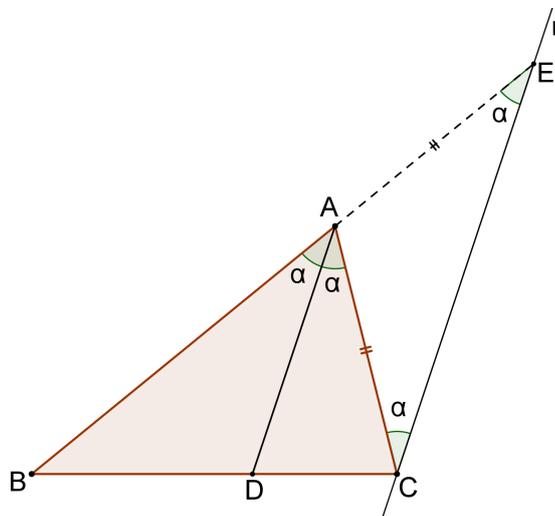


Figura A.10: Triângulo isósceles AEC

Dessa forma, pelo teorema de Tales temos que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{DB}}{\overline{DC}}. \quad (\text{A.8})$$

Substituindo (A.7) em (A.8), concluímos que $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DB}}{\overline{DC}}$.

□

A.3 PROPRIEDADES DA CIRCUNFERÊNCIA DE NOVE PONTOS

Demonstramos agora duas propriedades da circunferência de nove pontos empregadas no capítulo três.

Lema A.1. *Se α é uma circunferência de raio $2R$ e centro em O , X é um ponto em α e P é um ponto interior a α , então o lugar geométrico dos pontos M que são pontos médios dos segmentos PX , quando X percorre α , é uma circunferência β de raio R e centro em N , ponto médio de \overline{OP} .*

A Figura A.11 ilustra as hipóteses e a tese do Lema A.1.

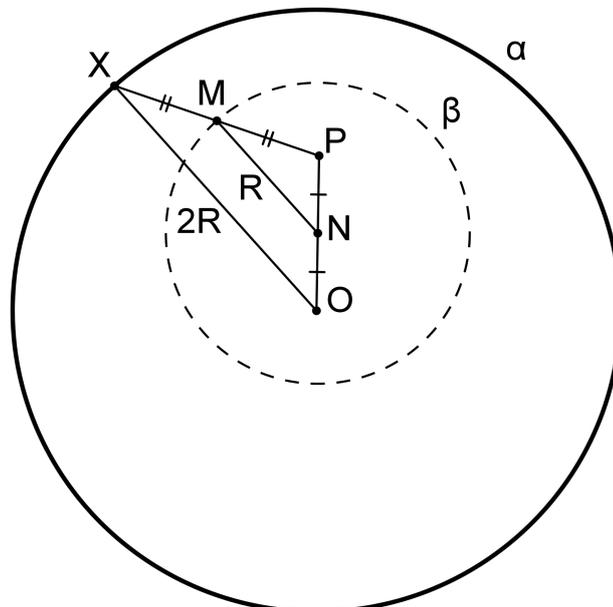


Figura A.11: Circunferências α e β

Demonstração.

Se N é o ponto médio de \overline{OP} e M é o ponto médio de \overline{PX} , então \overline{NM} é a base média do

triângulo OPX , como ilustra a Figura A.11. Logo, $\overline{NM} \parallel \overline{OX}$, $\overline{NM} = R \quad \forall X \in \alpha$. Desse modo, M descreve a circunferência β com raio $\overline{NM} = R$ e centro N .

□

Teorema A.4. *A circunferência de nove pontos de um triângulo ABC é o lugar geométrico dos pontos médios dos segmentos HX , onde H é o ortocentro de ABC e X é um ponto qualquer da circunferência circunscrita a ABC .*

A Figura A.12 ilustra as hipóteses e a tese do Teorema A.4.

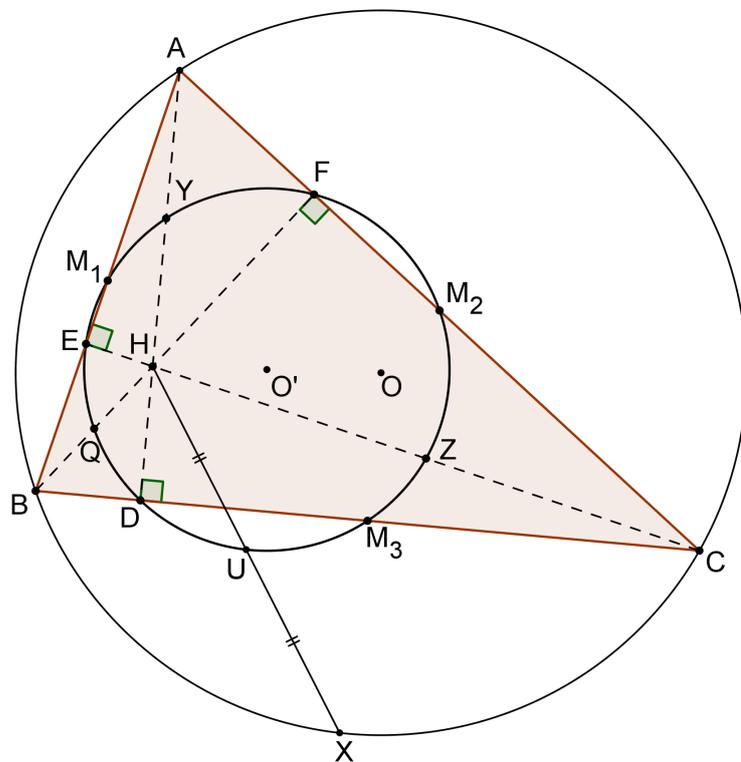


Figura A.12: Circunferência de nove pontos centrada em O' e a circunferência circunscrita ao triângulo ABC centrada em O

Demonstração.

Seja \overline{HX} , onde H é o ortocentro de um triângulo ABC e X é um ponto arbitrário da circunferência α circunscrita a ABC , como ilustra a Figura A.13.

Sejam ainda O o centro da circunferência α e U o ponto médio de \overline{HX} . Assim, de acordo com o Lema A.1, existe uma circunferência β centrada no ponto médio O' de \overline{OH} que passa por U , como mostra a Figura A.14.

Resta-nos demonstrar que a circunferência β é a circunferência de nove pontos.

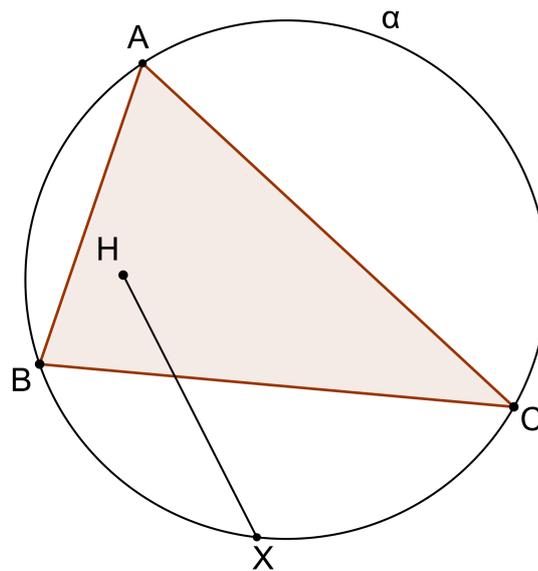


Figura A.13: Segmento HX

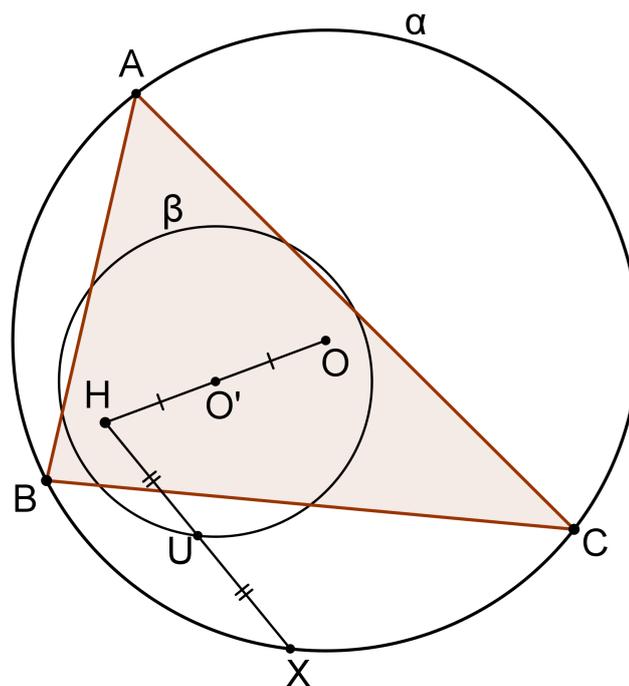


Figura A.14: Circunferência α , segmento HX e a circunferência β

Sejam Y , Q e Z os pontos médios de \overline{AH} , \overline{BH} e \overline{HC} , respectivamente, como na Figura A.12. Ainda segundo o Lema A.1, Y , Q e Z são pontos pertencentes à circunferência β e, conforme o Teorema 3.7, também são pontos da circunferência de nove pontos do triângulo ABC . Como por três pontos passa uma única circunferência - Teorema 2.7, concluímos que β é a circunferência de nove pontos.

□

Teorema A.5. *A medida do raio da circunferência de nove pontos de um triângulo ABC é igual à metade da medida do raio da circunferência que circunscreve ABC .*

Demonstração.

Sejam a circunferência circunscrita a um triângulo ABC , de centro O e raio $\overline{OA} = R$, e a circunferência de nove pontos de ABC , de centro O' e raio $\overline{O'Y} = R'$, onde Y é o ponto médio de \overline{AH} e H é o ortocentro de ABC . Conforme já demonstrado no Teorema A.4, a circunferência de nove pontos de ABC está centrada no ponto médio O' de \overline{HO} e passa pelos pontos médios dos segmentos com extremidades em H e na circunferência circunscrita a ABC , conforme indica a Figura A.15.

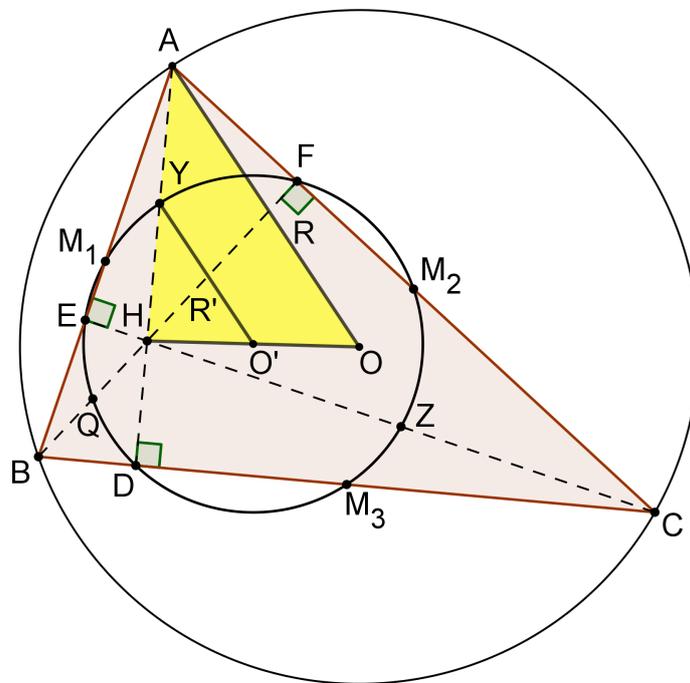


Figura A.15: Circunferência de nove pontos do triângulo ABC de raio R' e a circunferência circunscrita a ABC de raio $\overline{OA} = R$

Em particular, consideremos o ponto Y , ponto médio de \overline{AH} e pertencente à circunferência de nove pontos de ABC . Como $\overline{O'Y}$ intersecta \overline{AH} e \overline{OH} em seus respectivos pontos médios, segue que $\overline{O'Y}$ é a base média do triângulo AHO e, portanto, os triângulos YHO' e AHO são semelhantes pelo caso LAL (lado-ângulo-lado) na razão $1 : 2$. Disto decorre que $\overline{O'Y} = \frac{\overline{OA}}{2}$ ou, equivalentemente, $R' = \frac{R}{2}$.

□