

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

LUCAS FELIPE MONTEIRO

**COMPARAÇÃO DE DESEMPENHO E ESTRATÉGIAS DE OTIMIZAÇÃO DE
ENXAME DE PARTÍCULAS EM FUNÇÕES NÃO-LINEARES MULTIMODAIS**

PONTA GROSSA

2025

LUCAS FELIPE MONTEIRO

**COMPARAÇÃO DE DESEMPENHO E ESTRATÉGIAS DE OTIMIZAÇÃO DE
ENXAME DE PARTÍCULAS EM FUNÇÕES NÃO-LINEARES MULTIMODAIS**

**Performance comparison of Particle Swarm Optimization strategies in
multimodal nonlinear functions**

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação
apresentado como requisito para obtenção do
título de Bacharel em Engenharia Elétrica
do Departamento Acadêmico de Engenharia
Elétrica da Universidade Tecnológica Federal do
Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Hugo Valadares Siqueira

PONTA GROSSA

2025



[4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

Esta licença permite compartilhamento, remixe, adaptação e criação a partir do trabalho, mesmo para fins comerciais, desde que sejam atribuídos créditos ao(s) autor(es). Conteúdos elaborados por terceiros, citados e referenciados nesta obra não são cobertos pela licença.

LUCAS FELIPE MONTEIRO

**COMPARAÇÃO DE DESEMPENHO E ESTRATÉGIAS DE OTIMIZAÇÃO DE
ENXAME DE PARTÍCULAS EM FUNÇÕES NÃO-LINEARES MULTIMODAIS**

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação
apresentado como requisito para obtenção do
título de Bacharel em Engenharia Elétrica
do Departamento Acadêmico de Engenharia
Elétrica da Universidade Tecnológica Federal do
Paraná.

Data de aprovação: 21/fevereiro/2025

Hugo Valadares Siqueira
Doutorado
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR/PG)

Fernanda Cristina Corrêa
Doutorado
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR/PG)

Thiago Antonini Alves
Doutorado
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR/PG)

PONTA GROSSA
2025

Dedico este trabalho à minha família, que sempre esteve ao meu lado, me apoiando incondicionalmente e fazendo o possível para que eu pudesse chegar aqui e realizar meus sonhos (... e que não são poucos).

AGRADECIMENTOS

À minha família, me apoiando incondicionalmente.

Aos meus amigos do 'banco da árvore', pelas risadas e companheirismo, fundamentais na minha jornada.

Aos membros e professores orientadores da UTForce, SAE e CAEEL, durante os anos que estive à frente ou participando desses projetos.

Aos colegas de trabalho e amigos que fiz até aqui durante minha jornada profissional e fora do ambiente acadêmico, que me deram todo o apoio para este trabalho ser finalizado.

À minha namorada, que foi muito paciente e companheira em me motivar de todas as formas possíveis.

Ao professor Hugo, que me apresentou esta área de estudo fantástica, por toda dedicação e paciência durante esses anos.

RESUMO

Este trabalho apresenta um estudo comparativo de quinze variações do algoritmo de Otimização por Enxame de Partículas (PSO) aplicadas a cinco funções benchmark (Rastrigin, Sphere, Rosenbrock, Griewank e Ackley) em diferentes escalas dimensionais (2D, 3D, 5D, 10D e 30D). São investigadas topologias globais e locais (anel e Von Neumann), bem como estratégias adicionais de atualização, incluindo inércia adaptativa, explosão, QPSO, FIPSO e BBPSO. O objetivo é avaliar o desempenho de cada variação em termos de precisão, velocidade de convergência, confiabilidade e custo computacional.

Palavras-chave: otimização por enxame de partículas; metaheurísticas; topologias; fatores constritivos; multimodal.

ABSTRACT

This work presents a comparative study of fifteen Particle Swarm Optimization (PSO) variants applied to five benchmark functions (Rastrigin, Sphere, Rosenbrock, Griewank, and Ackley) across different dimensional scales (2D, 3D, 5D, 10D, and 30D). The investigation covers both global and local topologies (ring and Von Neumann), as well as additional updating strategies, including inertia adaptation, explosion, QPSO, FIPSO, and BBPSO. The main goal is to evaluate each variant's performance regarding accuracy, convergence speed, reliability, and computational cost.

Keywords: particle swarm optimization; metaheuristics; topologies; constriction factors; multi-modal.

LISTA DE ALGORITMOS

Algoritmo 1 – Mecanismo de Explosão no PSO	30
Algoritmo 2 – Algoritmo de inicialização das experimentações	38

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Blocos de representação de um processo de otimização	16
Figura 2 – Forma cartesiana de um sistema unidimensional, bidimensional e tridimensional	17
Figura 3 – Duas das possíveis soluções para o problema das 8 rainhas de Pearl (1984)	19
Figura 4 – Relação entre os princípios de diversificação e intensificação em uma espaço de busca de um método metaheurístico.	20
Figura 5 – Modelos representativos da atuação de um PSO: da inicialização à convergência	22
Figura 6 – Os três elementos do cálculo da posição da partícula por Clerc (2006) .	24
Figura 7 – Fluxo de execução tradicional do PSO	24
Figura 8 – Topologia global	27
Figura 9 – Topologia anel	27
Figura 10 – Topologia Von Neumann	28
Figura 11 – Função Rastrigin	34
Figura 12 – Função Sphere	35
Figura 13 – Função Rosenbrock	35
Figura 14 – Função Griewank	36
Figura 15 – Função Ackley	37
Figura 16 – Gráficos <i>boxplot</i> dos <i>fitness</i> em cada dimensão da função Rastrigin .	41
Figura 17 – Gráficos <i>boxplot</i> com velocidades de convergências em cada dimensão da função Rastrigin	42
Figura 18 – Gráficos com as taxas de confiabilidade em cada dimensão da função Rastrigin	43
Figura 19 – Gráficos com os tempos de execução médio em cada dimensão da função Rastrigin	44
Figura 20 – Gráficos <i>boxplot</i> dos <i>fitness</i> em cada dimensão da função Sphere . . .	45
Figura 21 – Gráficos <i>boxplot</i> com velocidades de convergências em cada dimensão da função Sphere	46

Figura 22 – Gráficos com as taxas de confiabilidade em cada dimensão da função Sphere	47
Figura 23 – Gráficos com os tempos de execução médio em cada dimensão da função Sphere	48
Figura 24 – Gráficos <i>boxplot</i> dos <i>fitness</i> em cada dimensão da função Rosenbrock	49
Figura 25 – Gráficos <i>boxplot</i> com velocidades de convergências em cada dimensão da função Rosenbrock	50
Figura 26 – Gráficos com as taxas de confiabilidade em cada dimensão da função Rosenbrock	51
Figura 27 – Gráficos com os tempos de execução médio em cada dimensão da função Rosenbrock	52
Figura 28 – Gráficos <i>boxplot</i> os <i>fitness</i> em cada dimensão da função Griewank . .	53
Figura 29 – Gráficos <i>boxplot</i> com velocidades de convergências em cada dimensão da função Griewank	54
Figura 30 – Gráficos com as taxas de confiabilidade em cada dimensão da função Griewank	55
Figura 31 – Gráficos com os tempos de execução médio em cada dimensão da função Griewank	56
Figura 32 – Gráficos <i>boxplot</i> dos <i>fitness</i> em cada dimensão da função Ackley . . .	57
Figura 33 – Gráficos <i>boxplot</i> com velocidades de convergências em cada dimensão da função Ackley	58
Figura 34 – Gráficos com as taxas de confiabilidade em cada dimensão da função Ackley	59
Figura 35 – Gráficos com os tempos de execução médio em cada dimensão da função Ackley	60
Figura 36 – Gráfico da precisão do <i>fitness</i> entre todos os cenários	61
Figura 37 – Gráfico das velocidades de convergência entre todos os cenários . . .	62
Figura 38 – Gráfico das taxas de confiabilidade entre todos os cenários	62
Figura 39 – Gráfico dos tempos médios de processamento entre todos os cenários	63

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Variações de estratégias de PSO implementadas e aplicadas nas simulações.	25
Tabela 2 – Funções de <i>benchmark</i> , seus espaços de busca e pontos ótimos. . . .	33
Tabela 3 – Parâmetros utilizados no algoritmo PSO	39
Tabela 4 – Tabela das médias gerais para cada variação entre todos os cenários .	61
Tabela 5 – Resultados numéricos das experimentações	71

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
1.1	Objetivos	13
1.1.1	Objetivos específicos	14
1.2	Estrutura do trabalho	14
2	MODELOS DE OTIMIZAÇÃO	15
2.1	Otimização em problemas reais	15
2.2	Processos de otimização em um sistema	15
2.3	Sistemas multidimensionais	16
2.4	Modelos metaheurísticos de otimização	17
2.4.1	Modelos de otimização bio-inspirados	20
2.5	Otimização por enxame de partículas (PSO)	21
2.6	Estratégias de PSO escolhidas	25
2.6.1	Impacto das topologias nas variações do PSO	26
2.6.1.1	Topologia global	26
2.6.1.2	Topologia local	27
2.6.1.2.1	Topologia <i>anel</i>	27
2.6.1.2.2	Topologia de Von Neumann	28
2.6.2	Impacto das estratégias de atualização do enxame nas variações do PSO	28
2.6.2.1	Fator inercial adaptativo	29
2.6.2.2	Mecanismo de explosão	30
2.6.2.3	Quantum-Behaved PSO (QPSO)	30
2.6.2.4	Fully Informed PSO (FIPSO)	31
2.6.2.5	Bare Bones PSO (BBPSO)	32
2.7	Funções <i>benchmark</i>	33
2.7.1	Função Rastrigin	34
2.7.2	Função Sphere (De Jong N.1)	35
2.7.3	Função Rosenbrock (De Jong N.2)	35
2.7.4	Função Griewank	36
2.7.5	Função Ackley	37
3	METODOLOGIA	38

3.1	Análise e critérios comparativos de performance	39
4	RESULTADOS E DISCUSSÃO	41
4.1	Função 1: Rastrigin	41
4.1.1	Precisão	41
4.1.2	Velocidades de convergência	42
4.1.3	Confiabilidade	43
4.1.4	Velocidades computacionais	44
4.2	Função 2: Sphere (De Jong Function N. 1)	44
4.2.1	Precisão	44
4.2.2	Velocidades de convergência	46
4.2.3	Confiabilidade	47
4.2.4	Velocidades computacionais	47
4.3	Função 3: Rosenbrock (De Jong Function N. 2)	48
4.3.1	Precisão	48
4.3.2	Velocidades de convergência	49
4.3.3	Confiabilidade	51
4.3.4	Velocidades computacionais	51
4.4	Função 4: Griewank	52
4.4.1	Precisão	52
4.4.2	Velocidades de convergência	53
4.4.3	Confiabilidade	54
4.4.4	Velocidades computacionais	55
4.5	Função 5: Ackley	56
4.5.1	Precisão	56
4.5.2	Velocidades de convergência	57
4.5.3	Confiabilidade	58
4.5.4	Velocidades computacionais	59
4.6	Discussões gerais dos resultados	59
5	CONCLUSÃO	65
	REFERÊNCIAS	66

APÊNDICE A	TABELA NUMÉRICA COMPLETA COM OS DESEMPENHOS GERAIS DOS EXPERIMENTOS COM AS VARIAÇÕES DE PSO PARA N DIMENSÕES	71
-------------------	---	-----------

1 INTRODUÇÃO

A matemática desempenha um papel essencial na solução de problemas do mundo real, fornecendo as bases conceituais e ferramentas necessárias para modelar, analisar e identificar soluções em diversas áreas.

Modelagens matemáticas podem ser feitas a partir de qualquer sistema, independente da natureza de estudo. De análises estatísticas e dinâmicas na biologia como o crescimento populacional de espécies, trazidos por Murray (2002), a fenômenos econômicos e físicos. A visão analítica desses cenários é importante para compreender processos dinâmicos e trabalhar com previsibilidade (MURRAY, 2002).

A crescente necessidade por soluções que sejam tanto eficazes quanto confiáveis para problemas mais complexos e dinâmicos, tem incentivado o avanço de diversos métodos de otimização.

Entre eles, os algoritmos metaheurísticos bio-inspirados, como o PSO, se destacam. Criado por pesquisadores influenciados por fenômenos naturais ou sociais, fundamentados em comportamentos coletivos e cognitivos, a Otimização por Enxame de Partículas (PSO) se mostra uma ferramenta de otimização bem flexível quanto a equilibrar eficiência e eficácia na busca por soluções de sistemas mais complexos.

Um dos exemplos está em Borges *et al.* (2018), na qual foi aplicado variações mais convencionais do PSO na otimização de parâmetros utilizados em um controlador PID Gaussiano Adaptativo (GAPID). Os resultados apresentaram um desempenho superior das variações de PSO em relação a um modelo de PID convencional, demonstrando que em alguns casos envolvendo sistemas mais complexos e multidimensionais, a implementação de métodos como esse são preferíveis.

Este trabalho apresenta uma evolução dos algoritmos e métodos empregados nesse problema de Borges *et al.* (2018), inspirando a estressar sistemas multidimensionais a partir de funções *benchmarks*, com novas estratégias de PSO mais sofisticados, comparando suas performances.

1.1 Objetivos

O principal objetivo deste trabalho é realizar um estudo aprofundado sobre a Otimização por Enxame de Partículas (PSO), avaliando e comparando as performances de especificamente 15 variações do algoritmo com critérios de comparação bem definidos: precisão, velocidade, confiabilidade e tempo de processamento. As 15 variações do algoritmo apresentam estratégias topológicas e lógicas distintas, e serão testadas em cenários de baixa, média e alta dimensionalidade. Para isso, serão utilizadas 5 funções *benchmark* diferentes e que possuem características a serem exploradas por essas estratégias, como unimodalidade, multimodalidade e diferentes escalas dimensionais.

1.1.1 Objetivos específicos

- Avaliar o comportamento das variações do PSO em diferentes dimensões, em problemas de baixa, média e alta dimensionalidades;
- Analisar a influência das topologias no desempenho de cada variação do PSO;
- Investigar o impacto de mecanismos constritivos na exploração e exploração do espaço de busca, e
- Comparar o desempenho das variações mais sofisticadas como o QPSO, FIPSO e BBPSO, com as variações mais simples, identificando cenários de vantagens e desvantagens

1.2 Estrutura do trabalho

Nos capítulos 2 e 2.4 serão discutidos alguns fundamentos e estudos sobre otimizações de sistemas complexos, em particular as metaheurísticas e bio-inspiradas, e suas relações com a multidimensionalidade.

O capítulo 2.5 apresentará o Particle Swarm Optimization (PSO), suas características e estratégias (variações) utilizadas neste trabalho, bem como seus embasamentos e referências.

As funções *benchmark* e suas características serão trazidas no capítulo 2.7.

A explicação da metodologia de experimentação e resultados obtidos estarão presentes no capítulo 4.

2 MODELOS DE OTIMIZAÇÃO

As resoluções de sistemas não lineares podem ser complexas. Geralmente, as resoluções desses sistemas podem ser realizadas por métodos analíticos e numéricos, como Gauss-Seidel e Newton-Raphson, por exemplo.

Soluções obtidas por métodos numéricos convencionais são derivadas por meio de cálculos iterativos, que se repetem até atenderem a um critério de convergência. No entanto, em problemas mais complexos, esses métodos podem não fornecer resultados satisfatórios ou ser sensíveis a pequenos erros. Nessas situações, torna-se necessária a aplicação de estratégias mais avançadas como os métodos metaheurísticos, por exemplo (KAMSYAKAWUNI *et al.*, 2020).

2.1 Otimização em problemas reais

As otimizações não se resumem a meramente resolver equações matemáticas isoladas, mas sim, resolver problemas reais de diversas áreas de conhecimento. Muitos problemas de otimização envolvem encontrar a configuração ideal de um conjunto de variáveis para atingir metas específicas (BLUM; ROLI, 2001).

O livro “*Convex Optimization*”, de Boyd e Vandenberghe (2004), traz alguns problemas e cases reais que podem ser aplicados em sistema de otimização, como mitigar riscos e ponderar retornos financeiros de uma carteira de investimentos até resoluções para um problema de dimensionamento no layout de componentes eletrônicos de um circuito.

Sistemas automatizados ou com pouca interação humana, com necessidade de respostas rápidas e em tempo real, exigem confiabilidade e previsibilidade desses sistemas para Boyd e Vandenberghe (2004). Essas aplicações envolvem diretamente os operadores do problema em questão, segundo os autores:

Para a maioria dessas aplicações, a otimização matemática é usada como um auxílio ao tomador de decisões humano, ao projetista de sistemas ou ao operador de sistemas, que supervisiona o processo, verifica os resultados e modifica o problema (ou a abordagem da solução) quando necessário (BOYD; VANDENBERGHE, 2004, p. 3, tradução nossa).

2.2 Processos de otimização em um sistema

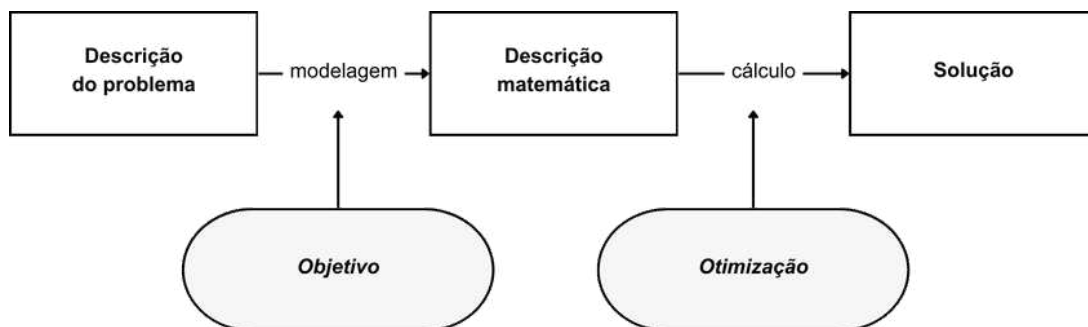
Qualquer processo, independentemente da complexidade e da área de conhecimento, pode ser modelado matematicamente e aprimorado por técnicas de otimização.

Nocedal e Wright (2006) descrevem que para implementar um método de otimização em um sistema. Primeiro é necessário definir um objetivo para um problema proposto, que seria

um conjunto de combinações numéricas, constantes e variáveis, que podem ser representadas por um número único (solução). Essas combinações de números e variáveis equacionadas são obtidas desse sistema por meio da modelagem.

A partir de um sistema modelado e com o objetivo de busca definido, é então aplicado uma ferramenta de otimização, cujo propósito é buscar soluções ótimas das variáveis para a maximização ou minimização desse objetivo (NOCEDAL; WRIGHT, 2006). A Figura 1 ilustra o que seriam os blocos dentro de um sistema otimizado.

Figura 1 – Blocos de representação de um processo de otimização



Fonte: Autoria própria (2025).

Nariño (2014) ainda descreve alguns termos existentes e intrínsecos a um problema de otimização como:

- Definição do objetivo, dado por uma função objetivo denominada $f(x)$;
- As variáveis de projeto denominadas (x) que determinam as características numéricas e parâmetros do sistema modelado, em função desse objetivo dado por $f(x)$;
- Ponto ótimo, que seria o vetor com as variáveis que satisfaçam o modelo proposto gerando um valor ótimo desse objetivo proposto. O conjunto do valor ótimo e ponto ótimo é denominado solução ótima, que pode ser global (melhor em relação ao espaço de busca total) ou local (melhor em relação a uma vizinhança próxima ao ponto ótimo);
- O espaço de busca na qual a ferramenta de otimização realizará a análise para encontrar os pontos ótimos candidatos à solução;
- Restrições que possam existir e delimitar ou condicionarem esse espaço de busca;

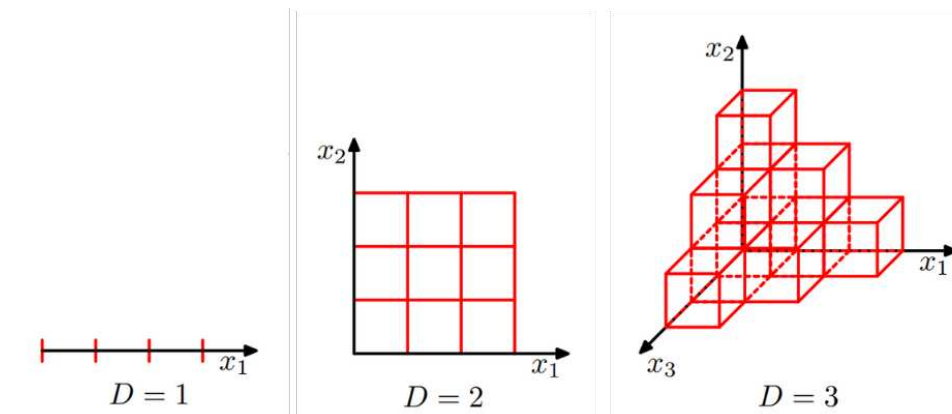
2.3 Sistemas multidimensionais

Sistemas multidimensionais envolvem problemas modelados com um grande número de variáveis, exigindo métodos de otimização que lidem com complexidades naturalmente criadas pelo alto volume de fatores associados ao sistema.

À medida que o número de dimensões aumenta, o espaço de busca cresce de forma acelerada tal qual as informações disponíveis se tornam cada vez mais escassas, dispersas, tornando significativamente mais difícil sua solução. Esse fenômeno é explicado por Bellman (1961), que o chamou de “maldição da dimensionalidade”.

A Figura 2 representa visualmente o que Bellman (1961) diz sobre o problema das dimensionalidades: Em 1 dimensão, há 3 espaços possíveis; em 2 dimensões, há uma grade de 9 posições; e em 3 dimensões, um cubo com 27 posições. O crescimento do espaço de busca cresce exponencialmente com dimensionalidade D , dificultando a otimização.

Figura 2 – Forma cartesiana de um sistema unidimensional, bidimensional e tridimensional



Fonte: BISHOP, 2006, p. 35.

Problemas multidimensionais estão comumente relacionados à áreas da engenharia e controle. Múltiplas variáveis de entradas e saídas são associadas em modelagens de controle, portanto métodos eficientes para problemáticas multivariáveis são empregadas nesses casos a fim de projetar ótimos controladores (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2005).

Métodos baseados em resoluções de sistemas não lineares como otimização convexa de Boyd e Vandenberghe (2004), programação não linear de Bertsekas (1999), ou os metaheurísticos que serão discutidos na próxima sessão, se propõem como boas ferramentas de otimização para esses casos, por proverem fundamentos teóricos e empíricos para lidar com espaços de busca com altas dimensionalidades.

2.4 Modelos metaheurísticos de otimização

Um dos principais objetivos do desenvolvimento de métodos de otimização é a capacidade de produzir soluções tão eficientes e confiáveis quanto possível, e de modo a fornecer resultados consistentes em diversos cenários com o menor custo computacional.

Essa busca por eficiência na resolução desses problemas acompanha um grande aumento em gastos energéticos e alta capacidade computacional, na qual sistemas de otimização mais sofisticados visam reduzir impactos ambientais e custos gerais computacionais (YANG, 2020).

A possibilidade de se usar algoritmos de iteração em sistemas de processamento computacionais introduz uma quebra de limitação em termos de velocidade de processamento, tornando amplas as oportunidades de desenvolvimento de algoritmos de otimização dos mais diversos.

Outro ponto importante, além da velocidade, encontra-se nas oportunidades de usar algoritmos personalizados e adaptados a problemas com contextos diferentes, gerando soluções mais eficientes conforme determinadas características parametrizadas dentro do ambiente lógico de execução.

O equilíbrio entre eficácia e eficiência pode ser obtido em algoritmos de otimização por aproximação, como os metaheurísticos. Estes são ótimos para serem aplicados a sistemas mais difíceis e complexos, com grandes espaços de busca, onde se busca maior eficácia na busca de soluções ótimas e de forma mais eficiente (TALBI, 2009). Para Talbi (2009), “As metaheurísticas atendem a três propósitos principais: resolver problemas mais rapidamente, resolver problemas maiores e obter algoritmos robustos.”

Diferentemente de métodos determinísticos, onde os valores das variáveis são bem definidos e não possuem incertezas, métodos estocásticos como os heurísticos permitem aproveitar melhor a aleatoriedade nos processos de busca de uma solução ótima, amostrando e avaliando a solução global a partir de soluções locais candidatas, probabilisticamente falando (ALI; KHOMPATRAPORN; ZABINSKY, 2005; SERVAT, 2020).

Para Birge e Louveaux (2011) essa característica da estocástica permite obter respostas melhores do que os métodos determinísticos em problemas mais complexos, como os multidimensionais.

Os modelos de otimização metaheurísticos são estruturas sofisticadas combinadas a métodos heurísticos básicos, objetivando explorar eficientemente e efetivamente espaços de busca mais complexos (BLUM; ROLI, 2001). Esse termo “metaheurística” deriva da junção das palavras gregas “encontrar” (*heuriskein*) e “num nível superior” (*meta*) (BLUM; ROLI, 2001).

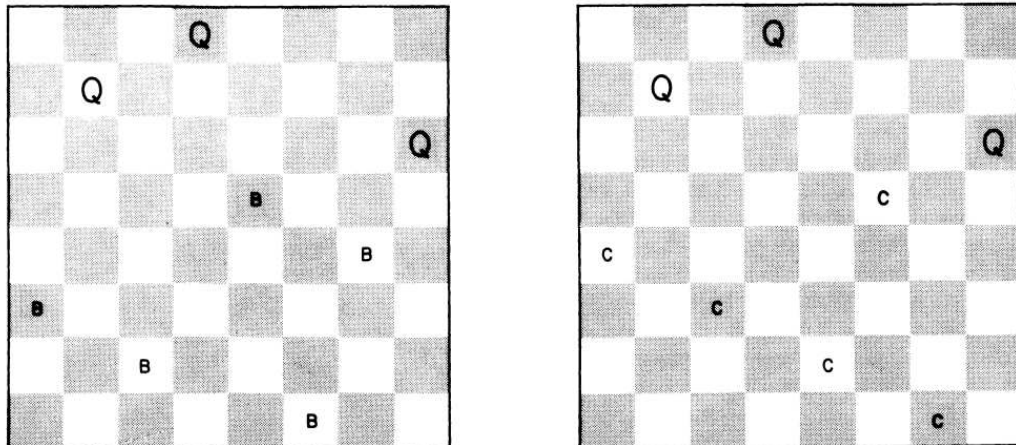
Esses métodos heurísticos básicos referem-se a abordagens práticas e intuitivas para se resolver um problema. Pearl (1984) em seu livro “*Heuristics: Intelligent Search Strategies for Computer Problem Solving*”, trata as heurísticas como sendo “regras de bolso, palpites fundamentados, julgamentos intuitivos ou simplesmente ‘senso comum’”. Seria obter respostas e resultados a partir de uma base experimental e empírica, realizadas sucessivamente onde a cada iteração conhecimentos são adquiridos e que se somam a informações previamente concebidas, aumentando a probabilidade de acerto (PEARL, 1984).

Pearl (1984, p. 4) traz ainda em seu livro, um exemplo de aplicação heurística que chamou de “*O Problema das 8 Rainhas*”. Aqui, um jogador tem o desafio de dispor 8 peças rainha de xadrez em 8 posições no tabuleiro de forma que nenhuma possa ser atacada por outra, conforme as regras de movimentação da rainha em um jogo de xadrez. Existem inúmeras possibilidades de caminhos diferentes de se começar a resolver, mas talvez o modelo mais simples seria começar a dispor as peças em todas as possíveis possibilidades de configuração de forma

incremental, sistematicamente e não aleatoriamente, e a cada iteração, ir aprendendo a como resolver descartando configurações que não deram certo e reduzindo as possibilidades futuras de não resolução.

A Figura 3 apresenta 2 das possíveis soluções para esse problema, onde as posições "Q", "B" e "C" representariam as peças rainha.

Figura 3 – Duas das possíveis soluções para o problema das 8 rainhas de Pearl (1984)
(a) Alternativa de solução (B) **(b) Alternativa de solução (C)**



Fonte: Adaptado de PEARL, 1984, p. 7.

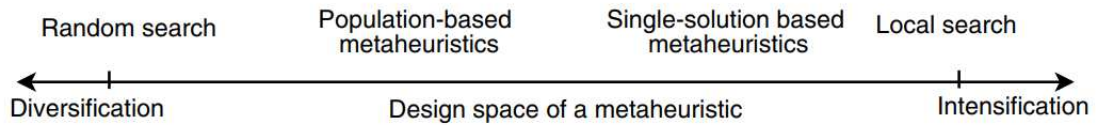
Os modelos de otimização metaheurísticos, utilizam-se desses conceitos para aplicarem no problema proposto algoritmos cujo resultado é obtido a partir de uma jornada incremental, com princípios de exploração e exploração, ou seja, de conhecimentos descobertos e adquiridos a cada iteração, equilibrando eficiência e eficácia, como definido por Osman e Laporte (1996):

Uma metaheurística é formalmente definida como um processo de geração iterativo que orienta uma heurística subordinada combinando conceitos diferentes de forma inteligente para explorar e explorar o espaço de busca; estratégias de aprendizagem são usadas para estruturar informações a fim de encontrar soluções quase ótimas de forma eficiente (OSMAN; LAPORTE, 1996, p. 1).

Outros 2 princípios importantes são comumente relacionados a aplicações metaheurísticas: o da intensificação (relacionado à exploração de possíveis melhores soluções num espaço de busca local) e o da diversificação (relacionado à exploração do espaço de busca mais amplo). Enquanto a diversificação orienta um trabalho de exploração mais amplo para garantir uma busca uniforme, a intensificação orienta uma busca mais precisa, analisando com mais profundidade localmente uma possível melhor solução candidata (TALBI, 2009). Esses conceitos de busca são ilustrados pela Figura 4.

A Figura 4 representa o que Talbi (2009) fala sobre critérios divergentes. À medida que temos uma necessidade em diversificar em buscas aleatórias, um modelo baseado em popu-

Figura 4 – Relação entre os princípios de diversificação e intensificação em uma espaço de busca de um método metaheurístico.



Fonte:TALBI, 2009, p. 4.

lação pode ser mais eficiente. Em contrapartida, para uma busca local mais eficaz, modelos baseados em soluções únicas são mais indicadas.

Essa perspectiva é fundamental para este trabalho, pois o PSO opera explorando ambos os conceitos extremos em diferentes tamanhos de espaços de busca, sejam eles simples ou altamente complexos e multidimensionais. Além de ser capaz de procurar soluções ótimas em espaços com muitos mínimos locais, fazendo com que a busca local seja determinante para a precisão do resultado.

2.4.1 Modelos de otimização bio-inspirados

Diversos desses estudos heurísticos são inspirados por elementos e processos naturais biológicos, como seleção natural, genética, colônias de formigas, enxame de abelhas, cardume de peixes e outros grupos de indivíduos que possuem um certo tipo de comportamento social (TALBI, 2009).

O começo desta área de estudo surge na década de 40, com alguns trabalhos pioneiros inspirados na natureza biológica: McCulloch e Pitts (1943) ao realizarem uma modelagem matemática de um neurônio, alguns artigos publicados sobre o conceito de *machine learning* por Friedberg (1958), e sobre programação evolucionária por Fogel (1962).

Nos anos seguintes, estudos relacionados a estratégias evolutivas (EE) para aplicações na otimização de problemas foram desenvolvidos por Rechenberg (1965) e Schwefel (1965). Holland (1975), a partir de um entendimento de que características evolucionárias propostas pela seleção natural e DNA poderiam ser ferramentas robustas em otimizações, introduziu o algoritmo genético.

Mais tarde, nos anos 90, foram publicados novos estudos sobre outros algoritmos, inspirados em inteligência coletiva (BONABEAU; DORIGO; THERAULAZ, 1999). Surgem o *Particle Swarm Optimization* (PSO) de Kennedy e Eberhart (1995), inspirado comportamento de bandos de pássaros e cardumes de peixes, e a Otimização por Colônia de Formigas (ACO) de Dorigo, Birattari e Stutzle (2006), que simula o comportamento de busca por alimento de formigas.

Esses métodos de otimização derivados de inteligências coletivas estão baseados nos comportamentos sociais e cognitivos das espécies. Para Kennedy (1997), assim como é difícil não relacionar comunicação à símbolos linguísticos e que se adaptam socialmente, teorias ba-

seadas em enxames são paradigmas de que construções sociais podem descrever uma certa realidade.

A visão evolutiva e adaptativa de comportamentos sociais como ferramentas computacionais se tornam alternativas interessantes na busca por um equilíbrio entre eficiência e eficácia para encontrar soluções ótimas em problemas mais gerais.

Assim como a natureza que estimulou e influenciou por milhares de anos características biológicas e sociais entre espécies, em processos incrementais estocásticos e heurísticos num sistema extremamente complexo por envolver inúmeras variáveis reagentes, otimizações bio-inspiradas como o PSO se propõem a resolver problemas reais, onde:

- Utilizar uma quantidade de indivíduos na diversificação de busca para explorar amplamente espaços complexos multidimensionais, com introdução de elementos aleatórios evitando estagnação em buscas locais;
- Equilibrar essa exploração com a exploração de espaços de busca mais localizados, baseando-se em estratégias coletivas e cognitivas para intensificar um refinamento maior;
- Com comportamentos sociais e inteligência coletiva, promover soluções locais candidatas a possíveis soluções globais, contribuindo nas experiências coletivas a partir de experiências individuais;
- Processar iterativamente e adaptar se necessário, possibilitando uma convergência gradual para soluções ótimas de alta qualidade, flexibilizando entre amplificar e refinar a busca das soluções candidatas.

2.5 Otimização por enxame de partículas (PSO)

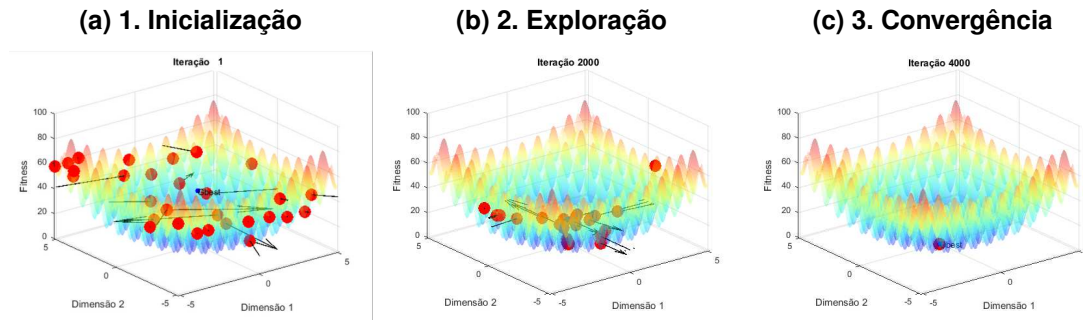
Introduzido por Kennedy e Eberhart (1995), a Otimização por Enxame de Partículas, no inglês *Particle Swarm Optimization* (PSO), é um algoritmo de otimização metaheurístico bio-inspirado, baseado em inteligência coletiva no comportamento social de indivíduos (partículas) com um mecanismo iterativo usado para descobrir soluções ótimas ou quase ótimas em espaços de busca mais complexos (KENNEDY; EBERHART, 1995; KENNEDY, 1997; SHI; EBERHART, 1998).

O PSO se fundamenta em 2 conceitos: comportamentos sociais e cooperação coletiva - como em bandos de pássaros, cardume de peixes e enxames - e também se relaciona com algoritmos evolucionários, como os genéticos (KENNEDY; EBERHART, 1995).

A combinação das características dessas linhas de estudo permite utilizar uma estratégia de otimização onde uma população de enxame de partículas aleatoriamente exploram um espaço de busca qualquer. Incrementalmente, compartilham suas experiências individuais

e coletivas dos potenciais melhores pontos de solução, prevalecendo um ponto ótimo global que orienta as próximas buscas até atender um critério de finalização dado pelo objetivo. A Figura 5 representa o que visualmente seria o PSO, numa visão tridimensional.

Figura 5 – Modelos representativos da atuação de um PSO: da inicialização à convergência



Fonte: Autoria própria (2025).

Clerc (2006, p. 17) exemplifica a atuação de um PSO, onde essas experiências individuais e coletivas podem ser aplicadas. Ele mostra como um grupo de pessoas ao subir uma montanha com o objetivo de chegar no ponto mais alto, se espalham e sobem iterativamente, em curtas distâncias, explorando localmente o que poderia ser o ponto mais alto. Quando um indivíduo chega num ponto que potencialmente pode ser o objetivo (solução local), guarda essa posição e compartilha as características com outros indivíduos. Essas informações compartilhadas geram uma inteligência coletiva, pois outros indivíduos podem chegar num ponto mais alto ainda, e sem precisar se mover mais, todo o grupo possui um conhecimento do melhor candidato a posição mais alta da montanha (uma solução global).

A função do PSO é dada pelas Equação 1 e Equação 2. Nela temos a presença das componentes sociais e individuais e a relação entre posição e velocidade de cada partícula a cada iteração.

$$v = v_i + c_1 r_1 (p_{best} - x_i) + c_2 r_2 (g_{best} - x_i) \quad (1)$$

$$x = x_i + v \quad (2)$$

Onde:

- v é o vetor de velocidade final da partícula,
- x é a posição final da partícula,
- v_i é o vetor de velocidade inicial da partícula,
- x_i é a posição inicial da partícula,
- c_1 e c_2 são os coeficientes de aceleração cognitiva e social, respectivamente,

- r_1 e r_2 são números aleatórios uniformemente distribuídos no intervalo $[0,1]$,
- p_{best} é a melhor posição já encontrada pela partícula i ,
- g_{best} é a melhor posição encontrada pelo enxame ou o melhor da vizinhança, dependendo da topologia adotada.

O início do PSO é dado pela geração aleatória inicial das partículas no espaço de busca da função objetivo. São geradas as posições iniciais x_i e velocidades iniciais v_i do enxame. A cada iteração, as partículas se deslocam no espaço de busca seguindo as Equação 1 e Equação 2.

A Equação 2 representa a posição de cada partícula no espaço. Elas se movem de uma posição x_i para uma nova posição x a partir da função velocidade dada pela Equação 1. É essa função da velocidade a responsável por interferir na nova posição x da partícula em questão, levando em consideração as componentes individuais e sociais do enxame.

A componente individual é dada pela diferença entre sua melhor posição individual p_{best} em relação a atual. Também é somado um fator social que consiste na diferença entre a melhor posição global de referência do enxame (g_{best}), encontrado por qualquer outra partícula, e a posição atual (KENNEDY; EBERHART, 1995).

Junto a esses elementos individual e social são adicionados os chamados “pesos”, componentes que introduzem os conceitos estocásticos e psicológicos ao enxame Kennedy (1997). As variáveis r_1 e c_1 são relacionadas ao que Kennedy e Eberhart (1995) chamam de “nostalgia” da partícula, ou seja, uma tendência a retornar a melhor posição individual p_{best} que se demonstrou mais promissor até então. As demais variáveis r_2 e c_2 seriam as influências sociais. Tanto r_1 quanto r_2 seriam valores randômicos. Os parâmetros c_1 e c_2 seriam os fatores de constrição (ou aceleração), necessários para garantir a convergência do PSO (SHI; EBERHART, 1998; EBERHART; SHI, 2000).

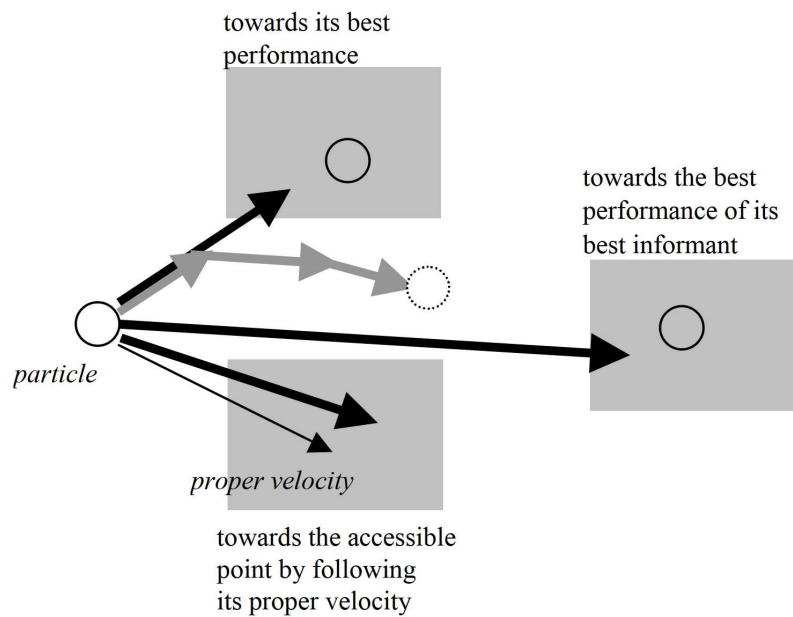
Clerc (2006) na Figura 6 ilustra o que para ele seriam os três elementos fundamentais no deslocamento de uma partícula no PSO. Assim como descrito anteriormente, os blocos cinza de cima e de baixo na figura seriam os fatores individuais: o de baixo a própria velocidade e o de cima, sua melhor posição individual (p_{best}); O bloco da direita seria a melhor posição global (g_{best}). A combinação desses vetores representa a seta cinza mais clara, que junto aos “pesos” individuais e globais, seria sua nova posição.

A implementação desse algoritmo em qualquer sistema computacional pode seguir os passos representados na Figura 7.

Primeiro é iniciado o PSO com a escolha dos parâmetros iniciais como: tamanho da população (partículas), coeficientes de velocidade, espaço de busca determinado por uma função objetivo (ou *fitness*) e sua dimensionalidade, e critério de parada podendo ser um número máximo de iterações ou algum critério arbitrado de precisão do *fitness* ideal.

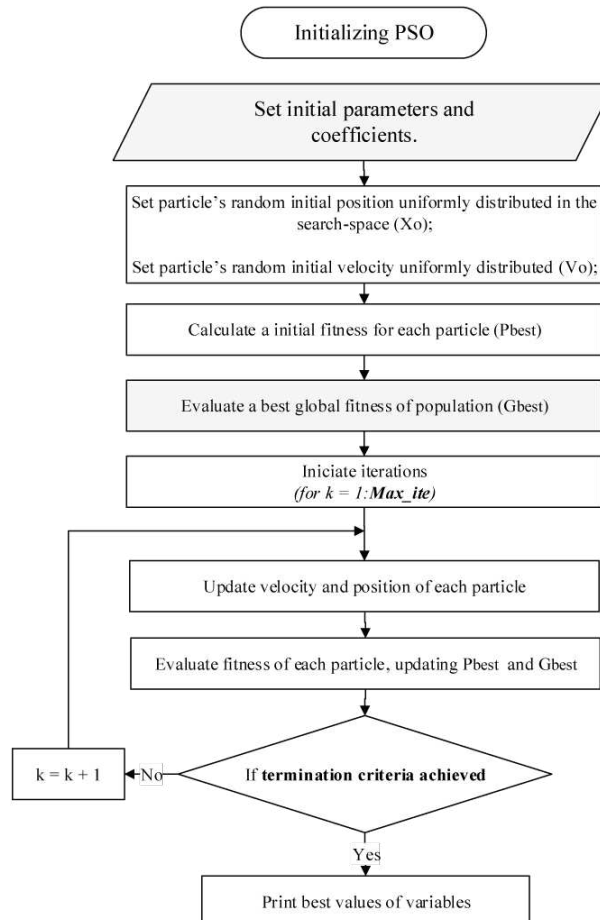
Após, a partir da função *fitness* que define o tamanho e características do espaço de busca, as posições e velocidades iniciais das partículas são aleatoriamente distribuídas, res-

Figura 6 – Os três elementos do cálculo da posição da partícula por Clerc (2006)



Fonte: CLERC, 2006, p. 33.

Figura 7 – Fluxo de execução tradicional do PSO



Fonte: BORGES et al., 2018

peitando os limites deste espaço. As melhores posições individuais e a global são definidas inicialmente a partir dessa primeira distribuição.

Um loop com as iterações é iniciado, atualizando as posições do enxame conforme as Equação 1 e Equação 2 acima e suas respectivas melhores posições individuais e a global, a cada incremento, validando o melhor *fitness* até o critério de parada ser atendido.

2.6 Estratégias de PSO escolhidas

Diversas variações do PSO original foram desenvolvidas ao longo dos anos por pesquisadores, buscando eficientizar mais os resultados tanto em precisão quanto em velocidade de convergência, para os mais variados cenários e problemas.

Essas variações compreendem ajustar ou adicionar partes à estrutura do algoritmo, respeitando os princípios cognitivos sociais e evolucionários enunciados acima, mas com estratégias específicas.

Este trabalho trará a comparação de performance de 15 variações de PSO para sistemas multidimensionais, descritos na Tabela 1. Abaixo, será explicado brevemente no que consiste cada uma dessas variações e as estratégias associadas.

Tabela 1 – Variações de estratégias de PSO implementadas e aplicadas nas simulações.

Variação do PSO	Topologia	Estratégia de atualização
PSO1	Global	Original
PSO2	Global	Inercial adaptativo
PSO3	Global	Mecanismo de explosão
PSO4	Global	Inercial adaptativo + Mecanismo de explosão
PSO5	Anel (local)	Original
PSO6	Anel (local)	Inercial adaptativo
PSO7	Anel (local)	Mecanismo de explosão
PSO8	Anel (local)	Inercial adaptativo + Mecanismo de explosão
PSO9	Von Neumann (local)	Original
PSO10	Von Neumann (local)	Inercial adaptativo
PSO11	Von Neumann (local)	Mecanismo de explosão
PSO12	Von Neumann (local)	Inercial adaptativo + Mecanismo de explosão
PSO13	Global ¹	QPSO (<i>Quantum-behaved</i> PSO)
PSO14	Local ²	FIPSO (<i>Fully Informed</i> PSO)
PSO15	Global ³	BBPSO (<i>Bare Bones</i> PSO)

Fonte: Autoria própria (2025).

¹ O QPSO está associado a uma topologia global (SUN; FENG; XU, 2004).

² O BBPSO está associado a uma topologia global (KENNEDY, 2003).

³ O FIPSO obteve melhores performances usando uma topologia anel. (MENDES; KENNEDY; NEVES, 2004).

2.6.1 Impacto das topologias nas variações do PSO

As topologias no PSO representam a forma de compartilhamento das informações entre as partículas do enxame e são obrigatórias. São estas estruturas que determinam o método de comunicação das experiências individuais e coletivas, que para alguns casos, são cruciais na avaliação entre velocidade e precisão do *fitness* (BORGES *et al.*, 2018).

Diversos estudos, tanto em funções *benchmark* como o de Kennedy (1999) e Bratton e Kennedy (2007), quanto em modelos reais de otimização como Wyk e Engelbrecht (2010) e Figueiredo e Ludermit (2012), apresentam empiricamente que topologias diferentes influenciam nas performances finais dos PSOs, dependendo dos cenários propostos.

Clerc (2006) em seu livro fala sobre o efeito das topologias, na qual chama de “memórias”. A forma que o enxame armazena essa “memória” e se comunica entre si, principalmente se essa comunicação for mais democrática possível, possibilita uma taxa de convergência muito superior para alguns casos. A variação FIPSO usada neste trabalho, usa um conceito onde uma partícula absorve todo o histórico de informações da vizinhança. Mesmo sendo do tipo local, apresenta uma alternativa em termos de topologia em relação à anelar (MENDES; KENNEDY; NEVES, 2004).

Neste trabalho foram utilizados 2 tipos de topologias regulares e fixas: a global e a local. Embora as variações QPSO, FIPSO e BBPSO possuam uma estrutura um pouco diferente das demais variações do PSO original em termos de exploração e exploração, deve-se definir uma topologia a elas.

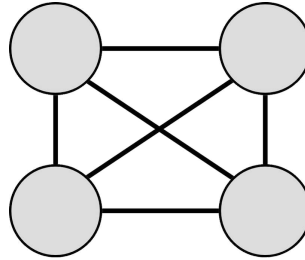
Há fundamentos sobre emprego de topologias randômicas, irregulares ou dinâmicas (CLERC, 2006; VALLE *et al.*, 2008). Diferente das fixas e regulares, que possuem uma certa ordem de comunicação como as usadas neste trabalho, essas usam métodos ainda mais estocásticos quanto ao compartilhamento das informações do enxame, podendo ser muito útil para a convergência em alguns casos (CLERC, 2006; VALLE *et al.*, 2008).

Como a intenção aqui é comparar estruturas sob uma mesma base lógica de interação, topologias randômicas, irregulares ou dinâmicas não foram experimentadas.

2.6.1.1 Topologia global

Nas topologias globais (Figura 8), o comportamento do compartilhamento das informações refletem os mesmos critérios do PSO original. A partícula com a sua melhor posição individual (p_{best}) informa as outras partículas da sua potencial candidata global. Na iteração, a função *fitness* valida se essa posição prevalece sobre alguma outra posição candidata e, caso seja, a posição é definida como melhor posição global (g_{best}) do enxame até então.

Geralmente esta topologia está relacionada com rápidas convergências devido a grande capacidade de uma busca mais ampla, porém, pode estagnar nas buscas de ótimo locais (SHAMI *et al.*, 2022).

Figura 8 – Topologia global**Fonte: Autoria própria (2025).**

2.6.1.2 Topologia local

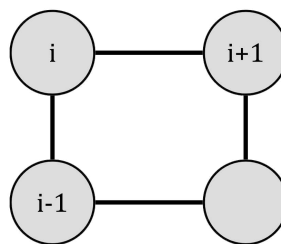
Nas topologias locais, diferentemente das globais, as partículas se comunicam apenas com suas vizinhas diretas no enxame. Com isso, ao invés do enxame ter uma melhor posição global definida como referência (g_{best}), tem-se uma melhor posição local (l_{best}) para a vizinhança.

Isso requer um ajuste na Equação 1 das velocidades do PSO, substituindo o g_{best} para um l_{best} , como mostrado na Equação 3:

$$v = v_i + c_1 r_1 (p_{best} - x_i) + c_2 r_2 (l_{best} - x_i) \quad (3)$$

2.6.1.2.1 Topologia anel

Introduzido por Kennedy (1999), na variação anelar, a partícula (i) só compartilha informações sobre a sua melhor posição p_{best} com a partícula predecessora ($i - 1$) e sucessora ($i + 1$) diretas (Figura 9).

Figura 9 – Topologia anel**Fonte: Autoria própria (2025).**

Uma alternativa à topologia global no que se refere a maiores possibilidades de achar ótimos locais, permitindo mais diversidade na busca. Porém, o custo computacional acaba sendo maior, podendo tornar a convergência mais lenta devido à troca maior de informações entre as partículas no processo de iteração (SHAMI *et al.*, 2022).

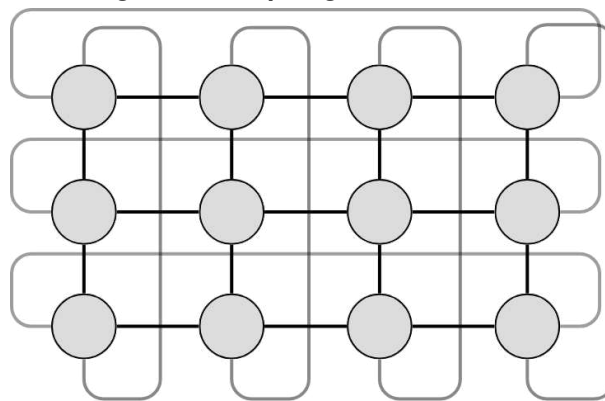
2.6.1.2.2 Topologia de Von Neumann

A topologia é baseada nos estudos de Neumann e Burks (1966) sobre modelos matemáticos aplicados no campo da computação que simulam processos celulares, inspirados no sistema nervoso, denominados “autômatos celulares” (NEUMANN; BURKS, 1966). Traz uma versão alternativa e mais sofisticada ao modelo anelar de comunicação.

As partículas se comunicam com suas vizinhas diretas, mas diferentemente da topologia anel, aqui as partículas compartilham informações com suas vizinhas diretas laterais (esquerda e direita), superiores (acima) e inferiores (abaixo) (KENNEDY; MENDES, 2002).

Além disso, podem se comunicar de forma circular, como se as bordas se “enrolassem”, representando um toroide (MENDES; KENNEDY; NEVES, 2004). Ou seja, a partícula da extrema esquerda pode se comunicar com a partícula da extrema direita, na mesma linha. O mesmo é válido para comunicação vertical, na mesma coluna.

Figura 10 – Topologia Von Neumann



Fonte: Autoria própria (2025).

Semelhante à topologia anel, na variação de Von Neumann tem-se uma grande diversidade, podendo ser ótima para buscas locais e obter maiores precisões, mais ainda que na anelar. Porém, é previsível que, como na anelar, o fluxo de informações seja maior entre as partículas. Pelo tamanho da vizinhança neste caso ser maior, a velocidade de processamento pode ser mais debilitada. O tamanho da população também pode afetar o resultado quanto ao desempenho do sistema, pois quanto mais partículas interagindo entre si, mais processamento iterativo o algoritmo usa.

2.6.2 Impacto das estratégias de atualização do enxame nas variações do PSO

Analisando os parâmetros e variáveis presentes nos termos sociais e individuais nas equações gerais do PSO, estudos trouxeram e ainda trazem adaptações que podem ser aplicadas na estrutura de atualização das partículas.

Geralmente são incluídos parâmetros e inteligências, novos ou adaptados, relacionados aos termos de velocidade e posição das partículas. A intenção é tornar o método mais otimizado

para determinadas aplicações e favorecer sua convergência. Seja por meio de contribuições de outras áreas de conhecimento ou empíricas, podem ser atribuídos ao algoritmo fatores baseados em comportamentos sociais, físicos e matemáticos, por exemplo.

2.6.2.1 Fator inercial adaptativo

Um desses estudos pioneiros em adaptar o conceito introdutório do PSO por Kennedy e Eberhart (1995) foi a inclusão de um fator inercial à velocidade das partículas por Shi e Eberhart (1998).

Seu conceito consiste em gerar um certo peso à velocidade das partículas à medida que as iterações vão evoluindo, contribuindo para um equilíbrio maior em explorar globalmente o espaço de busca, mas sem perder o refinamento necessário localmente, sendo importante para eficiência de convergência do algoritmo (SHI; EBERHART, 1998).

Eberhart e Shi (2000) em seus experimentos usando inércia, obtiveram muito êxito em comparação com a forma original do PSO, recomendando o uso de fatores de constrição ou inerciais para melhorar a performance dos experimentos envolvendo PSO.

A equação de velocidade do PSO (Equação 1) recebe um fator inercial, o parâmetro ω multiplicando a velocidade inicial (v_i), evidenciado na Equação 4:

$$v = \omega v_i + c_1 r_1 (p_{best} - x_i) + c_2 r_2 (g_{best} - x_i) \quad (4)$$

A inércia adaptativa se ajusta ao longo das iterações para equilibrar a exploração e a exploração. Sua fórmula típica para a atualização do peso de inércia é dada pela Equação 5:

$$\omega(t) = \omega_{\max} - \left(\frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{max_{iter}} \right) t, \quad (5)$$

onde:

- $\omega(t)$ é o peso de inércia na iteração t ,
- $\omega_{\max}$ é o valor máximo do peso de inércia,
- $\omega_{\min}$ é o valor mínimo do peso de inércia,
- max_{iter} é o número máximo de iterações.

Essa estratégia permite que o algoritmo comece com uma forte capacidade exploratória e, conforme as iterações avançam, reduza o peso da inércia para favorecer uma intensificação no espaço de busca.

2.6.2.2 Mecanismo de explosão

Alguns trabalhos como os de Valle *et al.* (2008) e ALFI (2011) abordam estratégias de reinicialização ou de simulação de um fator de entropia ao sistema em algum momento da iteração, caso o enxame chegue numa certa estagnação. Esta desordem tem o intuito de diversificar o enxame, repulsivamente pelo espaço de busca como em uma explosão, com a finalidade de aumentar a exploração do enxame.

Neste trabalho foi implementado fundamentos trazidos da *Velocity-based Reinitialization PSO* (VRBPSO) (BINKLEY; HAGIWARA, 2008). A estratégia aplicada (Algoritmo 1) nas variações que contém um mecanismo explosivo, atendem a um critério definido inicialmente, dado pelo número de iterações sem melhorias das melhores posições globais ou locais. Caso o critério seja atendido, as partículas sofrem uma reinicialização repulsiva mandatória, fugindo de buscas locais.

Algoritmo 1 – Mecanismo de Explosão no PSO

```

1: para  $i = 1$  até  $max_{iter}$  faça
2:   Atualizar velocidades e posições do enxame
3:   Avaliar o fitness das partículas
4:   Atualizar  $p_{best}$  e  $g_{best}$ 
5:   se (número de iterações sem melhoria  $\geq$  critério) então
6:     Reinicializar as posições das partículas
7:     Resetar o contador de iterações sem melhoria
8:   senão,
9:     Continuar a execução normalmente
10:  finaliza se
11: finaliza para

```

Fonte: Autoria própria (2025).

2.6.2.3 Quantum-Behaved PSO (QPSO)

Esta variação introduzida por Sun, Feng e Xu (2004) acaba adaptando o conceito de atualização das partículas baseando-se na mecânica quântica das partículas físicas, especialmente no princípio de superposição quântica dadas pelas equações de Schrodinger (1926)(Equação 6). Esse conceito aborda que as posições das partículas físicas, numa dimensão quântica, se comportam de forma probabilística e não determinística.

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \hat{H} \Psi(\mathbf{r}, t) \quad (6)$$

Em vez de um vetor velocidade determinar qual o próximo estado da partícula do exame no espaço de busca, conforme a Equação 1 do PSO original, a posição da partícula do enxame é determinada probabilisticamente (SUN; FENG; XU, 2004). Ou seja, assim como os saltos quânticos das partículas físicas previstas na mecânica quântica, o indivíduo do enxame pode

“saltar” para diferentes regiões no espaço de busca obedecendo uma regra probabilística e não determinística.

Estes "saltos" eliminam a necessidade de termos um vetor de trajetória dependendo de v e x , pois segundo o princípio da incerteza de Heisenberg (1927), ambos não podem simultaneamente serem determinados (SUN; FENG; XU, 2004).

A atualização de posição no *Quantum-behaved Particle Swarm Optimization* (QPSO) é dada pela Equação 7 :

$$x = p \pm \beta |m_{\text{best}} - x_i| \ln \left(\frac{1}{u} \right) \quad (7)$$

onde:

- x_i é a posição da partícula;
- p é o atrator local, uma combinação da melhor posição individual da partícula (p_{best_i}) e a melhor posição global (g_{best}), por exemplo,

$$p = \phi p_{\text{best}_i} + (1 - \phi) g_{\text{best}}, \quad (8)$$

com $\phi \in [0,1]$ um número aleatório;

- m_{best} é a média dos melhores p_{best} do enxame;
- β é um parâmetro de controle que determina a amplitude do movimento, análogo à inércia adaptativa

$$\beta(t) = \omega_{\text{max}} - \left(\frac{\omega_{\text{max}} - \omega_{\text{min}}}{\text{max}_{\text{iter}}} \right) t; \quad (9)$$

- u é um número aleatório uniformemente distribuído no intervalo (0,1);

No QPSO a equação da velocidade é retirada. Os vetores de velocidade ($\vec{v}$) e posição ($\vec{x}$) são substituídos pela função de onda $\Psi(\mathbf{r}, t)$. Os demais termos são derivados do modelo quântico de potencial energético e poço quântico dados pelo Hamiltoniano ($\hat{H}$), junto com a constante de Planck ($\hbar$) e o imaginário (i) (SUN; FENG; XU, 2004);

Assim como nas variações com um inercial adaptativo, o QPSO apresenta termos constritores dadas pelos parâmetros β e também por p , conduzindo o enxame à uma convergência gradual. Dados essas características de “saltos” probabilísticos, também se propõe a ser uma boa alternativa para escapar de mínimos locais facilmente.

2.6.2.4 Fully Informed PSO (FIPSO)

A estratégia do *Fully Informed PSO* está na atualização da posição e velocidade da partícula usando todo o histórico das partículas da vizinhança local, e não mais necessariamente

as melhores posições individuais e globais. A velocidade é dada por uma média das posições de toda a vizinhança (MENDES; KENNEDY; NEVES, 2004).

$$v = \omega v_i + (\bar{P}_m - x_i). \quad (10)$$

Onde:

- v_i é a velocidade inicial da partícula ;
- ω é o peso de inércia;
- $\bar{P}_m$ representa a média ponderada que a partícula utiliza como referência, a partir de sua vizinhança, e é dado por:
- x_i é a posição inicial da partícula.

A velocidade da partícula, e consequentemente do enxame, é dada por uma média ponderada do histórico posições de toda a vizinhança, onde os pesos são definidos por uma distribuição normal randômica entre um valor mínimo e máximo. Isso constitui um certo fator construtivo ao enxame.(MENDES; KENNEDY; NEVES, 2004).

Há uma grande possibilidade das partículas escaparem de mínimo locais, por estarem totalmente informadas e devido a esses pesos (MENDES; KENNEDY; NEVES, 2004).Mendes, Kennedy e Neves (2004) citam ainda que seu funcionamento não garante que os vizinhos diretos são os que contenham as melhores posições, uma vez que não são explorados a vizinhança indireta. Portanto, a partícula pode acabar ignorando uma informação importante que pode facilitar a convergência. Também, o número de partículas pode impactar na velocidade de processamento devido ao alto fluxo de compartilhamento, assim como o número de dimensões do problema, ocasionando em perda considerável de eficiência.

2.6.2.5 Bare Bones PSO (BBPSO)

A estratégia do *Bare Bones PSO* (BBPSO) é fundamentada também na probabilidade. Assim como na variação QPSO, a componente da velocidade do enxame é excluída e as posições do enxame são geradas por uma distribuição probabilística, usando as melhores posições particulares (p_{best}) e a melhor global (g_{best}). Sua versão é muito simples comparada às outras variações, exigindo menos capacidade computacional.

A atualização da posição, sem interferência da componente velocidade, é dada pela Equação 11:

$$x = N(\mu, \sigma^2) \quad (11)$$

Onde

- N é distribuição normal de Gauss com um valor médio μ dados pela média entre o p_{best} e g_{best} :

$$\mu = \frac{g_{best} + p_{best}}{2} \quad (12)$$

- e o desvio padrão:

$$\sigma = |g_{best} - p_{best}| \quad (13)$$

Para Krohling e Mendel (2009), essa variação tem mostrado potencial em resolver problemas multimodais, mas com grandes chances de estagnação local em funções multimodais em altas dimensionalidades. Muito desse potencial pode estar relacionado com o fato de simplificar as equações gerais do PSO, eliminando a componente vetorial da velocidade, otimizando o tempo de busca e velocidade de convergência. Porém, pode ser ineficiente em termos de exploração de espaços com muitos mínimos locais

2.7 Funções *benchmark*

Para analisar e comparar as diferentes alternativas desses modelos de otimização, em especial o PSO que é objeto de estudo deste trabalho, são utilizadas funções de *benchmark* (Tabela 2). Elas são funções de teste cujos parâmetros como tamanho do espaço de busca e solução ótima já são conhecidos.

Tabela 2 – Funções de *benchmark*, seus espaços de busca e pontos ótimos.

Index	Função	Espaço de busca	Dimensões	<i>Fitness</i>	Ponto ótimo
1	Rastrigin	$-5,12 \leq x_n \leq 5,12$	n	$f(x_n) = 0$	$x_n = (0, \dots, 0)$
2	Sphere (De Jong N.1)	$-5,12 \leq x_n \leq 5,12$	n	$f(x_n) = 0$	$x_n = (0, \dots, 0)$
3	Rosenbrock (De Jong N.2)	$-2,048 \leq x_n \leq 2,048$	n	$f(x_n) = 0$	$x_n = (1, \dots, 1)$
4	Griewank	$-600 \leq x_n \leq 600$	n	$f(x_n) = 0$	$x_n = (0, \dots, 0)$
5	Ackley	$-32,768 \leq x_n \leq 32,768$	n	$f(x_n) = 0$	$x_n = (0, \dots, 0)$

Fonte: Autoria própria (2025).

Elas oferecem uma oportunidade de avaliar critérios distintos sobre uma mesma base de parâmetros, pois cada função apresenta características particulares, dentre elas:

- Tamanhos do espaço de busca e dimensionalidade: Espaços maiores requerem uma exploração mais eficiente por parte do enxame, que pode interferir na velocidade de exploração e efetividade, sobretudo à medida que aumenta-se a dimensionalidade do problema. O tamanho da população e a velocidade do enxame podem limitar a exploração para buscas globais, ao mesmo tempo que podem reduzir a efetividade da solução em buscas locais (SHI; EBERHART, 1998);

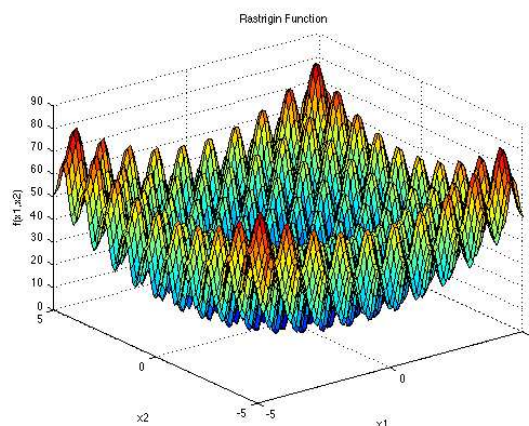
- Presença de termos lineares e não lineares: Funções objetivo que têm relações não lineares entre variáveis com a presença de termos quadráticos, cúbicos, ou interações não lineares pode aumentar a complexidade do problema. Esse processamento adicional pode interferir no custo computacional.
- Formato da função e regiões de busca: Se a função tem muitos mínimos locais dentro de uma região do espaço, por exemplo, isso pode tornar o problema de otimização mais desafiador, pois o algoritmo pode ficar preso em um mínimo local (CLERC, 2006). Outro exemplo está no formato da superfície de busca que também pode oferecer certa dificuldade. Superfícies de *fitness* altamente irregulares ou assimétricas, com muitas oscilações, picos e vales, podem dificultar os algoritmos a encontrar o ponto ótimo nessas regiões (CLERC, 2006).

Neste trabalho foram utilizadas 5 funções *benchmark* escolhidas para representar essas características descritas acima, e que são encontradas em outros estudos para análises multidimensionais de PSO, como em Clerc (2006), Fallahi e Taghadosi (2022), Krohling e Mendel (2009), Khan *et al.* (2012). Os nomes dessas 5 funções e principais parâmetros relevantes a esse trabalho estão resumidos na Tabela 2.

2.7.1 Função Rastrigin

A função Rastrigin é uma função não linear multimodal, ou seja, caracterizada por espaço com muitos mínimos locais, mas com um mínimo global bem definido (em $f(x) = 0$), como pode ser visto na Figura 11.

Figura 11 – Função Rastrigin



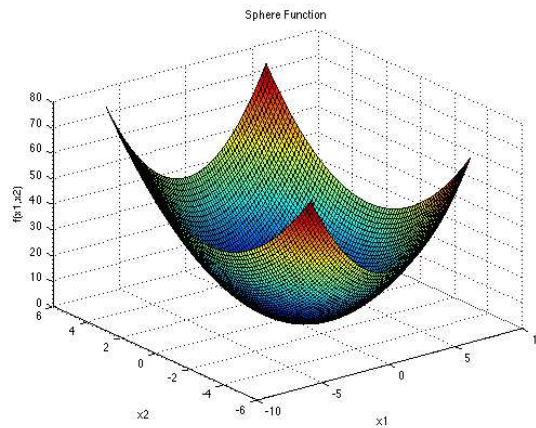
Fonte: Surjanovic e Bingham (2013).

Devido à sua multimodalidade, ela testa a capacidade do algoritmo de escapar de mínimos locais e explorar eficientemente o espaço de busca, avaliando o equilíbrio entre exploração e exploração.

2.7.2 Função Sphere (De Jong N.1)

A função esfera (Figura 12), é uma função convexa e unimodal, onde o objetivo é minimizar a soma dos quadrados dos valores das variáveis.

Figura 12 – Função Sphere



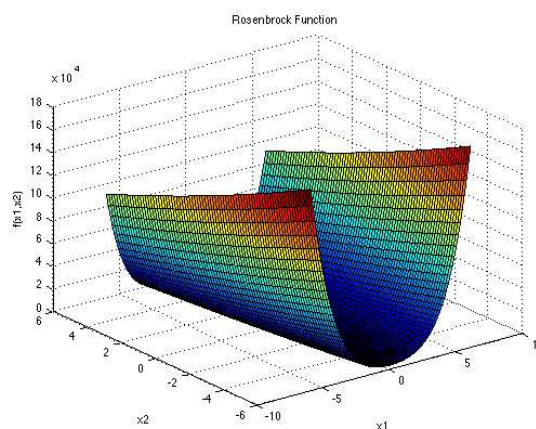
Fonte: Surjanovic e Bingham (2013).

Por ser simples e possuir um único mínimo global em $f(x) = 0$, ela serve como uma base para verificar se o algoritmo é capaz de convergir corretamente em problemas simples, funcionando como um teste de validação dos mecanismos básicos de busca.

2.7.3 Função Rosenbrock (De Jong N.2)

Esta função é não convexa e possui um vale estreito e curvo que contém mínimo global em $f(x) = 0$.

Figura 13 – Função Rosenbrock



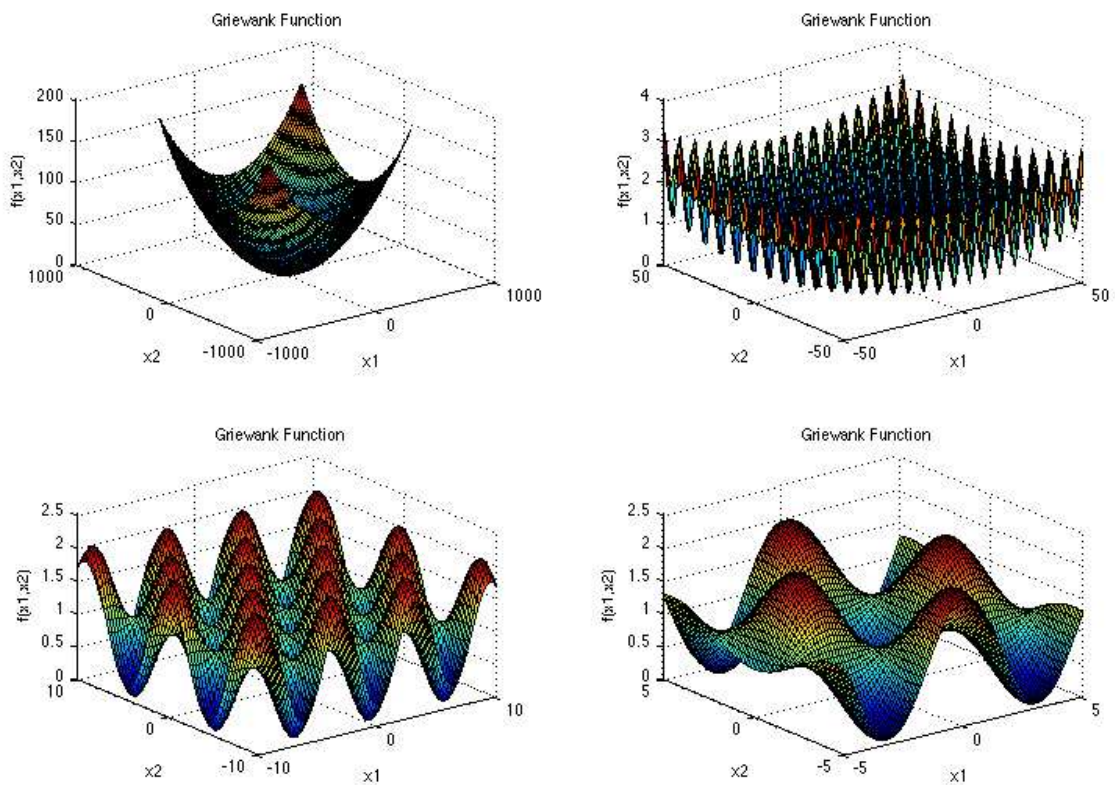
Fonte: Surjanovic e Bingham (2013).

Possui mínimo global difícil de encontrar em espaços de busca maiores, especialmente para algoritmos de PSO com estruturas mais simples, e sua complexidade aumenta rapidamente com o número de dimensões (CLERC, 2006).

2.7.4 Função Griewank

A função Griewank é multimodal e possui um espaço com muitos mínimos locais distribuídos de forma regular, mas com um ótimo global facilmente identificado, também em $f(x) = 0$. Ao ampliar o gráfico, fica nítido a presença de uma superfície ondulada, porém, regular.

Figura 14 – Função Griewank



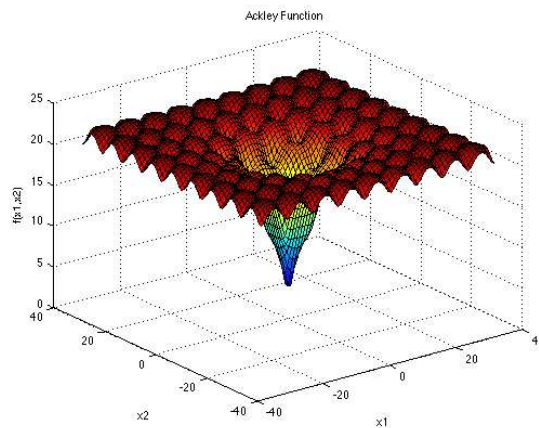
Fonte: Surjanovic e Bingham (2013).

Sua estrutura multimodal (visto na Figura 14), com muitos mínimos locais, permite avaliar a capacidade do algoritmo de não ficar preso em ótimos locais e explorar o espaço global de forma eficiente. Isso torna o problema mais difícil, mas, ao mesmo tempo, facilita a fuga desses mínimos em otimização com algoritmos estocásticos (CLERC, 2006).

2.7.5 Função Ackley

A função Ackley é uma função não linear multimodal que possui uma superfície com muitos picos e vales, mas com um mínimo global bem definido.

Figura 15 – Função Ackley



Fonte: Surjanovic e Bingham (2013).

É amplamente utilizada para testar algoritmos de otimização devido à sua alta complexidade e número de mínimos locais (visto na Figura 15), o que coloca à prova a habilidade do PSO em escapar de mínimos locais, como nas funções Rastrigin e Griewank. Clerc (2006) fala que sua “bacia de atração” para o mínimo global é mais estreita, reduzindo a eficácia de deslocamentos aleatórios das partículas.

3 METODOLOGIA

Nesta seção serão apresentados os resultados obtidos e algumas discussões a respeito do comportamento entre as diversas variações do PSO e suas respostas sobre diferentes funções *benchmark* aplicadas.

As 15 variações de PSO utilizadas para comparação de performance e análise dos resultados para cenários multidimensionais estão descritas na Tabela 1 na seção 2.6. As funções *benchmark* utilizadas para validar os resultados estão presentes na Tabela 2 na seção 2.7.

As simulações foram realizadas no *Matlab* versão R2015a, cuja estrutura de inicialização e chamadas de funções do processo estão no pseudocódigo demonstrado abaixo (Algoritmo 2).

Algoritmo 2 – Algoritmo de inicialização das experimentações

```

1: Início {Definição dos parâmetros gerais do PSO}
2: Dimensão  $\leftarrow 2$  {Define entre  $n$  dimensões}
3: População  $\leftarrow 30$ 
4: Máx_Iterações  $\leftarrow 10000$ 
5: Precisão  $\leftarrow 0.95$ 
6: Máx_Amostragens  $\leftarrow 50$ 
7: Benchmark_Func  $\leftarrow 1$  {Exemplo: 1 para Rastrigin}
8:  $c1 \leftarrow 2.05$ ,  $c2 \leftarrow 2.05$ 
9: Wmax  $\leftarrow 1$ , Wmin  $\leftarrow 0.4$ 
10: Iteração_Explosão  $\leftarrow 200$  {Importa parâmetros da função benchmark}
11: Parâmetros_Benchmark  $\leftarrow$  getBenchmarkFunction(Benchmark_Func)
    {Verifica qual PSO foi selecionado} 1
12: Chamar run_PSO1() {Executa PSO 1 para todas as amostras}
13: ... 15
14: Chamar run_PSO15() {Executa PSO 15 para todas as amostras}
    {Obtém os resultados por amostra}
15: Resultados_Amostras  $\leftarrow$  ObterResultados()
    {Opcional: Chamar subfunções, como para topologias de Von Neumann} Necessário
16: Chamar_Subfunções()
    {Gera base de dados com os resultados compilados}
17: GerarBaseDados(Resultados_Amostras)
    {Gera gráficos a partir da base de dados}
18: GerarGráficos(Base_Dados)
19: Fim

```

Fonte: Autoria própria (2025).

A escolha dos parâmetros de inicialização do PSO estão presentes na Tabela 3. Os parâmetros ideais dos coeficientes de aceleração $c1$ e $c2$ são discutidos por Eberhart e Shi (2000).

Foram realizados 50 testes independentes, denominados "amostras", para cada cenário. Esses cenários foram compostos por diferentes variações do PSO e por cinco funções de *benchmark*. Cada amostra foi avaliada em cinco configurações dimensionais distintas: 2D, 3D, 5D, 10D e 30D.

Tabela 3 – Parâmetros utilizados no algoritmo PSO

Parâmetro	Valor
Tamanho da população	30
Máximo de iterações	10.000
Número de amostras (testes) para cada cenário	50
$c1 = c2$	2.05
Valor inercial máximo (inicial)	1
Valor inercial mínimo	0,4
Número de iterações sem convergência para ativar explosão	200
Critério de parada (precisão do <i>fitness</i> ideal)	5%

Fonte: Autoria própria (2025).

Em cada amostra, um limite máximo de 10.000 iterações foi estabelecido (conforme a Tabela 3), embora a convergência pudesse ocorrer previamente caso um critério de parada fosse atingido (5% de precisão do erro do *fitness* ideal).

Esses critérios de parada são úteis para determinar e comparar performance entre os resultados. Seu conceito é encontrado em Clerc (2006, pg. 65) e também por Kennedy e Eberhart (1995). Portanto, para estas análises, para uma amostra cuja convergência fosse bem sucedida deveria atender ao menos 95% do *fitness* ideal.

3.1 Análise e critérios comparativos de performance

Para Talbi (2009), experimentos computacionais metaheurísticos precisam de critérios claros de comparação.

Em métodos exatos de otimização, o tempo de busca é o principal indicador de desempenho, pois eles garantem um ótimo valor global. Já para as metaheurísticas, também é necessário considerar indicadores que reflitam a qualidade das soluções obtidas (TALBI, 2009).

Para estabelecer parâmetros de análise, orientar comparativos entre todas as variações para cada cenário e relativizar os resultados, foram considerados 4 principais critérios, sendo eles:

1. Precisão a partir do *fitness* ideal: Exibe os resultados do *fitness* numa escala de 0 a 1 (0% a 100% do *fitness* ideal) ao finalizar todas as iterações para cada amostra, seja atingido o limite máximo de iterações ou atendendo ao critério mínimo de parada (95% de precisão do *fitness* ideal);
2. Velocidades de convergência: Representa em qual número de iteração a amostra foi finalizada, atendendo o critério de parada mínimo de 95% do *fitness* ou chegando ao limite máximo de iterações permitidas nos testes;

3. Confiabilidade: Indica percentualmente quantas amostras obtiveram soluções ótimas, ou seja, convergiram para ao menos 95% do *fitness* da função teste. Clerc (2006, p. 65-57) trabalha esse conceito de confiança no PSO em seu livro.
4. Velocidades computacionais: Exibe o tempo médio, em segundos, que cada amostra levou para processar o algoritmo do PSO até o critério de parada ser atendido.

Alguns dos critérios acima são sugeridos por Talbi (2009). Também, foram utilizados em alguns trabalhos como do Kamsyakawuni *et al.* (2020) e Fallahi e Taghadosi (2022).

Desta forma, temos como efeitos comparativos que:

- para o critério 1, quanto mais próximo de 1, mais preciso é a solução; quanto mais próximo de 0, menos preciso é a solução;
- para o critério 2, quanto menos iterações, mais rápido é a convergência do PSO; quanto mais iterações, mais lento é a convergência do PSO;
- para o critério 3, quanto mais próximo de 100%, mais confiável é a convergência do PSO para uma solução ótima; quanto mais próximo de 0%, menos confiável é a convergência do PSO para uma solução ótima.
- para o critério 4, quanto menos tempo cada teste levar em média, mais rápido é seu processamento; quanto mais tempo cada teste levar em média, mais lento é seu processamento.

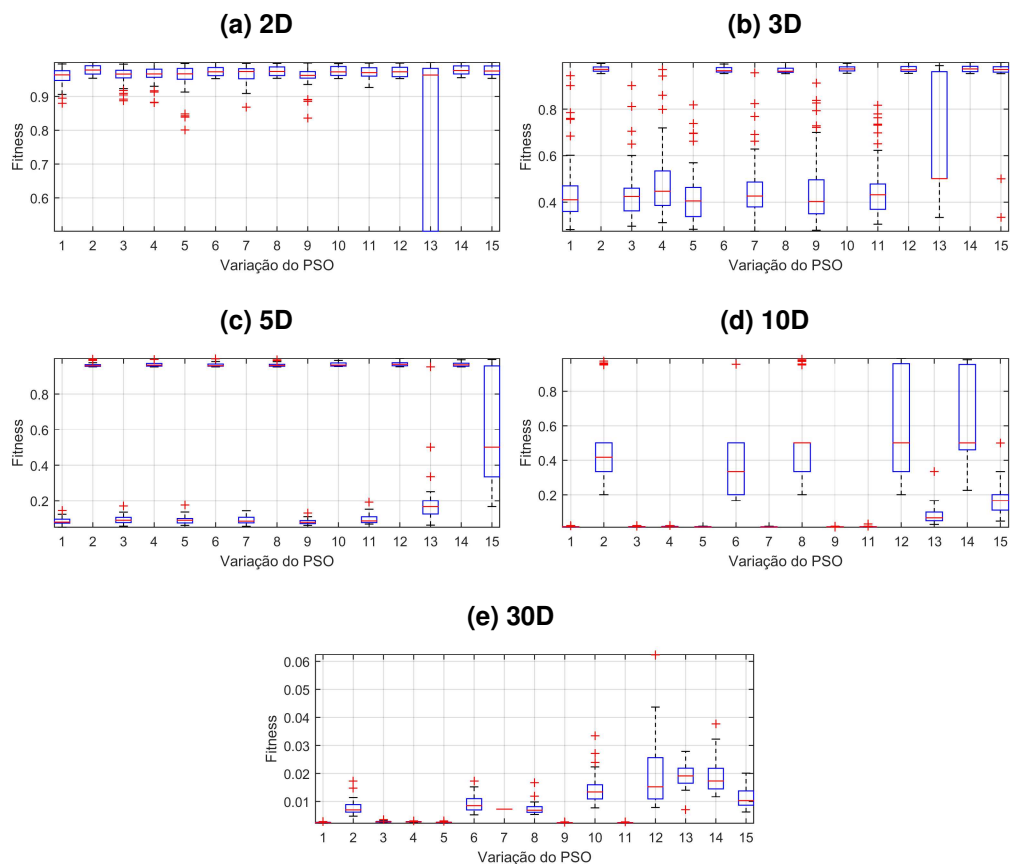
4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Após a explanação de como os testes foram realizados e sobre os parâmetros de análise destacados acima no Capítulo 3, a seguir serão apresentados e discutidos os resultados.

4.1 Função 1: Rastrigin

4.1.1 Precisão

Figura 16 – Gráficos *boxplot* dos *fitness* em cada dimensão da função Rastrigin



Fonte: Autoria própria (2025).

A Figura 16 mostra os gráficos *boxplot* para análise da precisão do experimento para a função Rastrigin.

Nos experimentos com 2 dimensões, a mediana do *fitness* é consistente e alta, com valores entre 0,96 a 0,98. No entanto, a presença de *outliers* inferiores sugere que algumas execuções encontraram dificuldades para a convergência.

Para 3, 5 e 10 dimensões houve uma maior disparidade quanto a precisão. As variações PSO1, PSO3, PSO4, PSO5, PSO7 e PSO9 tiveram uma mediana muito inferior em relação às demais. Porém, algumas dessas amostras chegaram a convergir em 3 dimensões, como

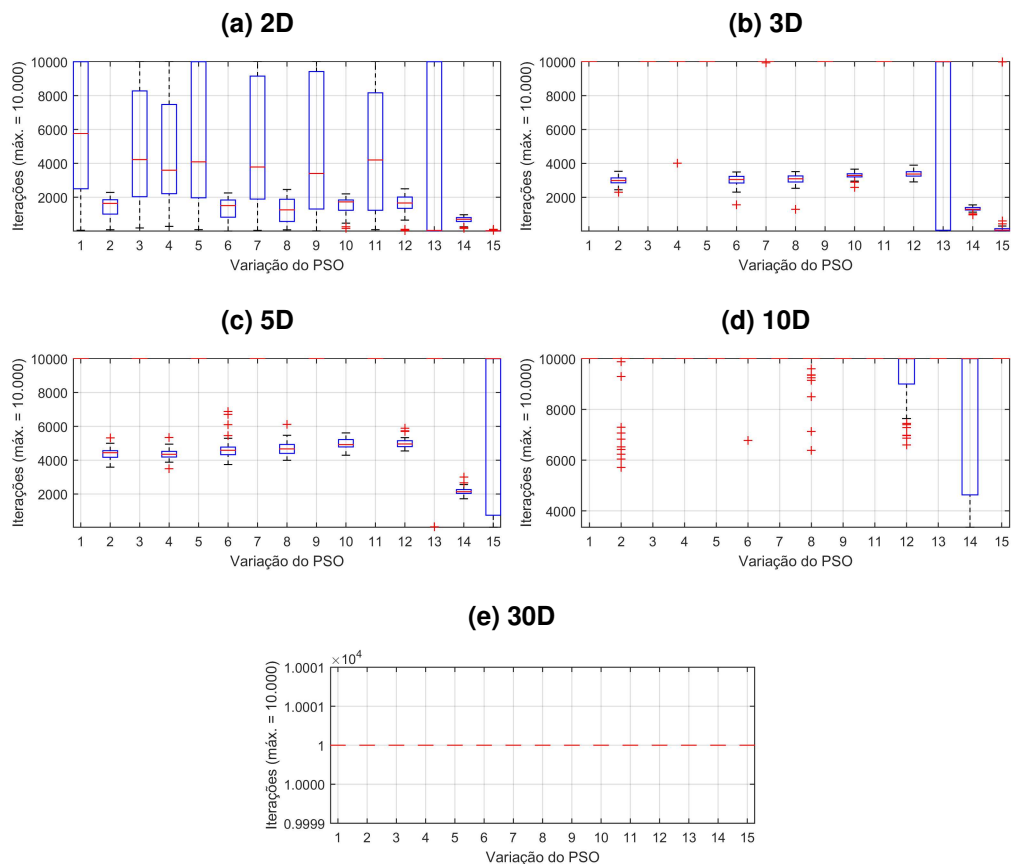
mostrado pelos *outliers* superiores. Isso demonstra uma certa resistência em escapar de ótimos locais na ausência de um termos constritivos.

As variações do PSO2, PSO12 e PSO14, que possuem apenas o fator inercial, tiveram um desempenho mais consistente em todas as dimensões que há resultados com convergências. As topologias Von Neumann com a estratégia da inércia e FIPSO (PSO14) se destacaram positivamente. Esses modelos favorecem a exploração devido ao estilo de comunicação entre as partículas.

Para dimensões muito altas, nenhuma variação demonstrou ser eficaz. A função Rastrigin se torna extremamente complexa para altas dimensões por ser multimodal. Isso dificulta que as variações do PSO consigam explorar e convergir para o ótimo global. Os parâmetros do algoritmo podem ser ajustados, como em aumentar o tamanho da população e o número máximo de iterações, desfavorecendo a velocidade mas optando pela eficácia do sistema

4.1.2 Velocidades de convergência

Figura 17 – Gráficos *boxplot* com velocidades de convergências em cada dimensão da função Rastrigin



Fonte: Autoria própria (2025).

As velocidades de convergência (Figura 17) apresentaram alto grau de dispersão de modo geral, nas variações que obtiveram algum êxito em se aproximar do *fitness* ideal.

Variações com inerciais, como PSO2, PSO6, PSO8, PSO12, PSO14 e PSO15, foram mais rápidas na convergência em relação às demais, com a mediana por volta de 2.000 iterações.

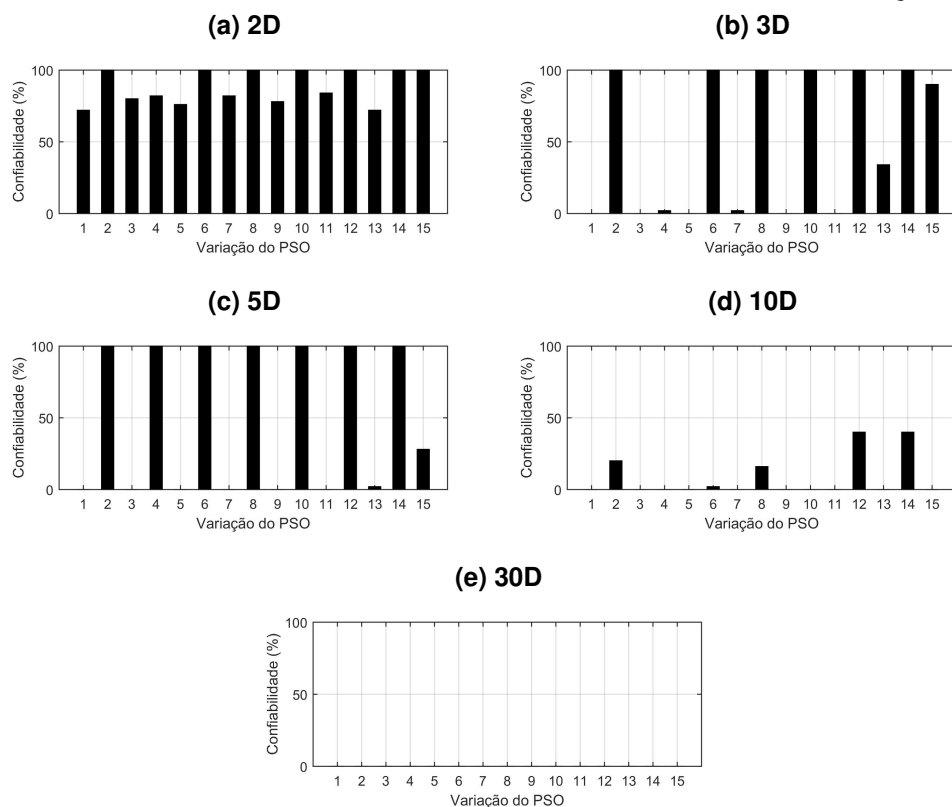
Nas dimensões 3D e 5D é notado que essas variações citadas acima apresentaram resultados mais significativos, com um número de iterações necessárias não ultrapassando a 5.000 iterações. Há presença de alguns *outliers* superiores em 5D na variação PSO6.

Para 10 dimensões houveram falhas de convergência em praticamente todas as amostras. Mas algumas amostras da variação 2, 6, 8, 12 e 14 atingiram convergências entre 6000 e 8000 iterações.

Para 30 dimensões, todas as variações atingiram o teto de 10.000 sem convergir.

4.1.3 Confiabilidade

Figura 18 – Gráficos com as taxas de confiabilidade em cada dimensão da função Rastrigin



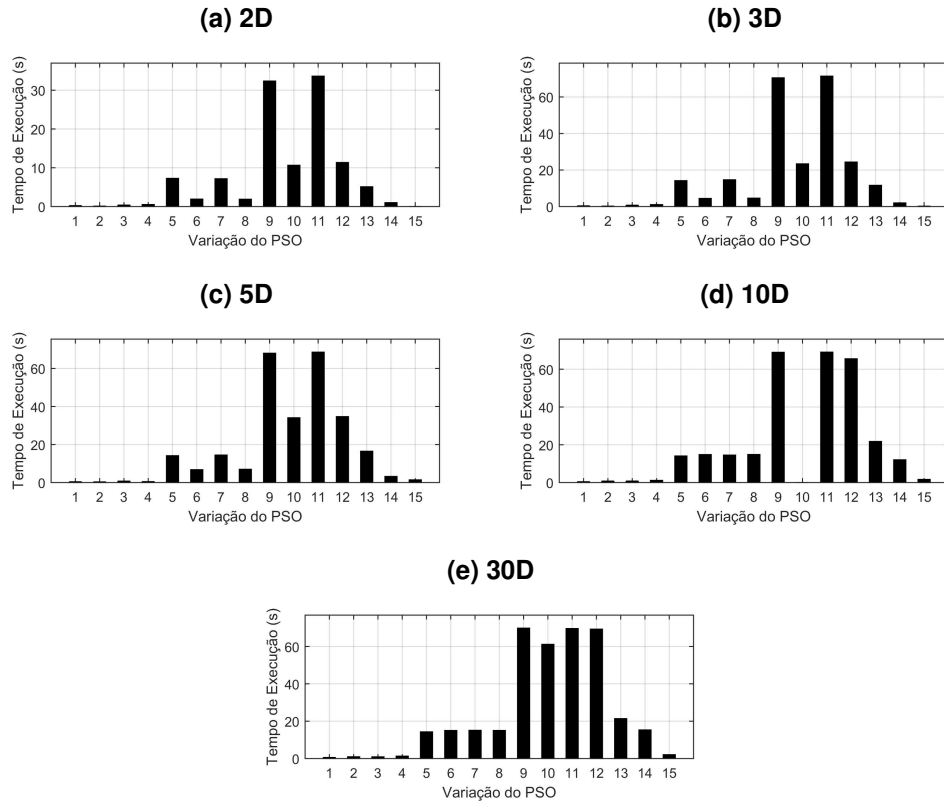
Fonte: Autoria própria (2025).

Para a função Rastrigin (Figura 18), nenhuma variação se mostrou confiável no que diz respeito à taxa de convergência em relação a toda amostragem, para altas dimensões. A presença de muito mínimos locais gera uma dificuldade que escala à medida que o número de dimensões sobe.

Todas as variações com fatores constritivos desempenharam melhor, com exceção do QSPO (em todos os cenários) e do PSO 4 (em 3 dimensões).

4.1.4 Velocidades computacionais

Figura 19 – Gráficos com os tempos de execução médio em cada dimensão da função Rastringin



Fonte: Autoria própria (2025).

Aqui é observado resultados muito díspares quanto ao tempo computacional (Figura 19).

O tempo de execução é baixo para a maioria das variações do PSO, sobretudo nas topologias globais. O que era esperado devido à baixa complexidade da função.

Os tempos foram maiores das topologias locais como anel e Von Neumann, especialmente as variações com Von Neumann. Essas topologias implicam em um número elevado de iterações e *loops* dentro da estrutura do algoritmo devido a como as partículas compartilham informações sobre as melhores posições.

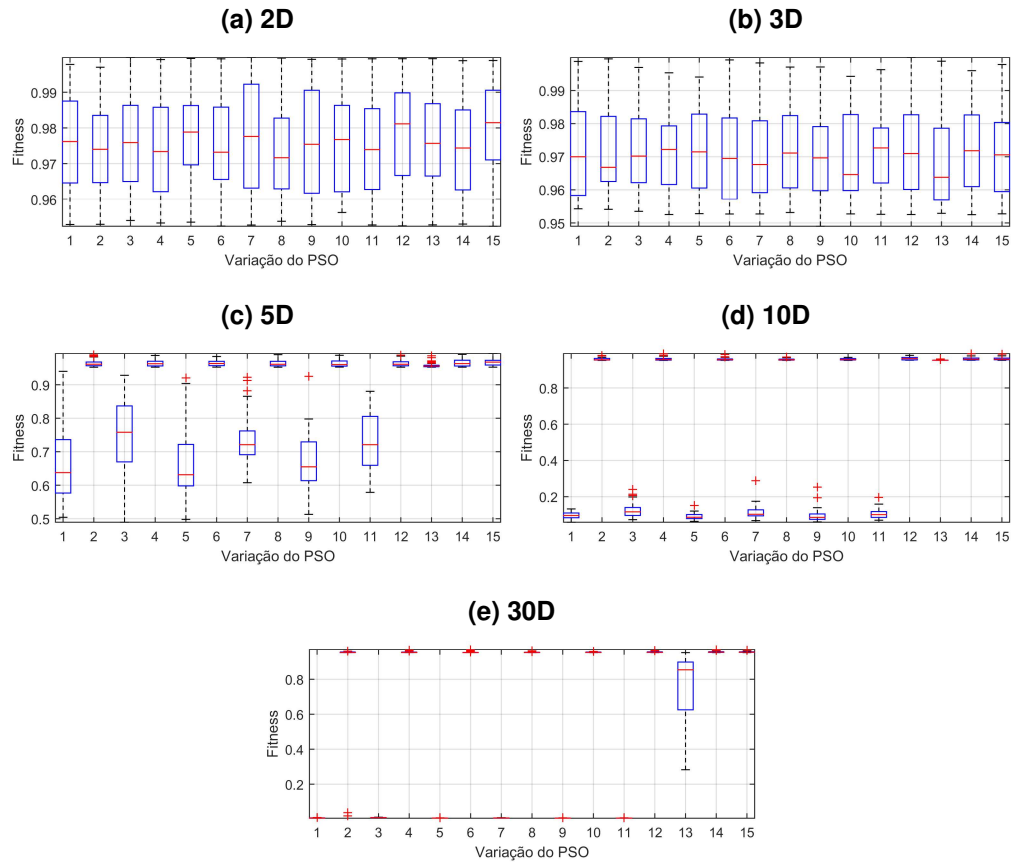
4.2 Função 2: Sphere (De Jong Function N. 1)

4.2.1 Precisão

A Figura 20 mostra as precisões de *fitness* para cada variação.

Para os sistemas em 2 e 3 dimensões, o comportamento é semelhante com distribuições amplas e sem um padrão claro de superioridade entre as variações do PSO. Há uma grande

Figura 20 – Gráficos *boxplot* dos *fitness* em cada dimensão da função Sphere



Fonte: Autoria própria (2025).

dispersão nos valores de *fitness*, indicando que a otimização ainda não é tão consistente para todas as variações de PSO.

Mesmo assim, a mediana do *fitness* parece estável entre diferentes variações do PSO, ficando entre 0,96 e 0,98, representando soluções ótimas. Porém, a presença de *outliers* sugere que algumas execuções tiveram dificuldades em achar o *fitness* ideal.

Já para os sistemas com mais dimensões, nota-se uma melhoria significativa na convergência do *fitness* ideal para algumas variações do PSO.

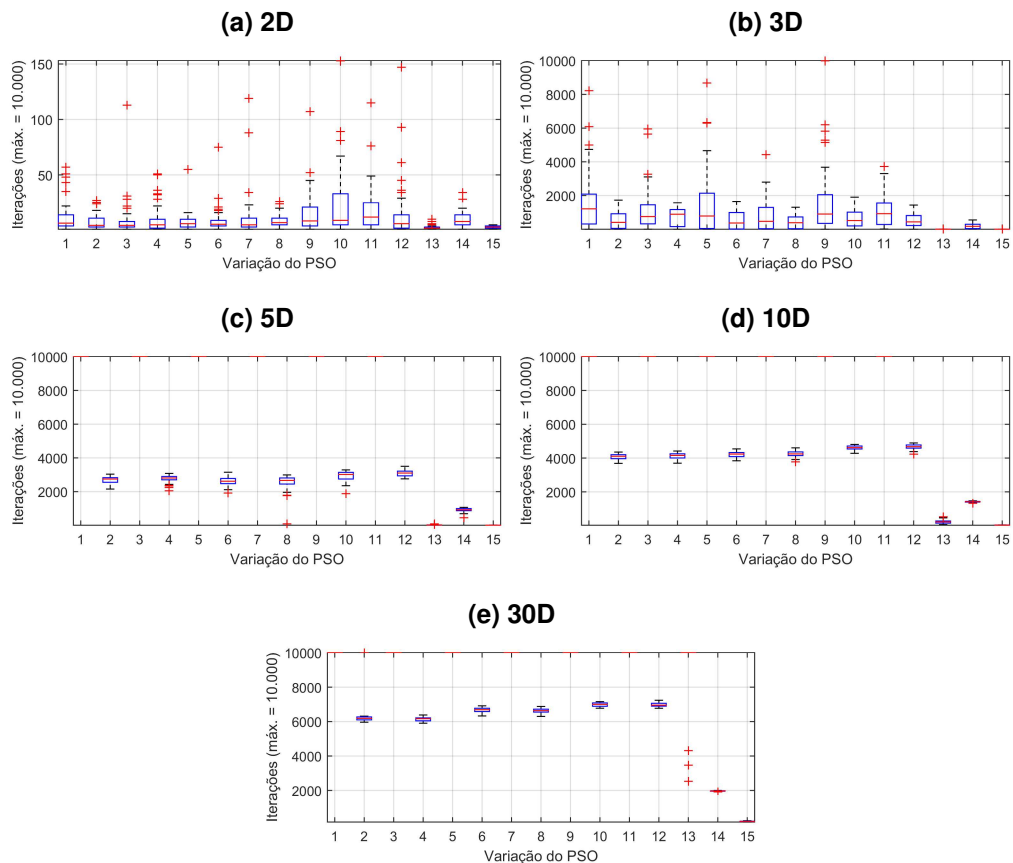
Algumas variações do PSO nas maiores dimensões, como PSO2, PSO4, PSO6, PSO12, PSO13 e PSO14, apresentam um *fitness* consistentemente alto, sugerindo que essas versões possuem melhor capacidade de exploração e convergência para n dimensões. Provavelmente isso se deve à presença de um fator constritor presente nas equações do PSO, como inércia, β e p do QPSO (PSO13), que otimiza o espaço de busca, como previsto.

O destaque para os cenários com mais de 3 dimensões fica com o PSO13, a variação com o QPSO. Ele apresenta a melhor efetividade por conta dos resultados serem muito consistentes, com *outliers* muito próximos a mediana e um grau de dispersão baixíssimo comparado às demais variações.

Porém, no resultado com 30 dimensões, dentre as variações de convergiram apresenta uma dispersão muito alta, possivelmente indicando instabilidades nas trajetórias probabilísticas das partículas à medida que a dimensão aumenta de complexidade.

4.2.2 Velocidades de convergência

Figura 21 – Gráficos *boxplot* com velocidades de convergências em cada dimensão da função Sphere



Fonte: Autoria própria (2025).

O número de iterações necessárias para convergir (Figura 21) aumenta a cada dimensão, como esperado, devido à maior complexidade da busca em espaços de alta dimensionalidade.

Algumas variações do PSO, como PSO2, PSO4, PSO6, PSO8, PSO12, PSO13, PSO14 e PSO15 conseguem convergir mais rapidamente, enquanto outras demonstram grande variabilidade na quantidade de iterações.

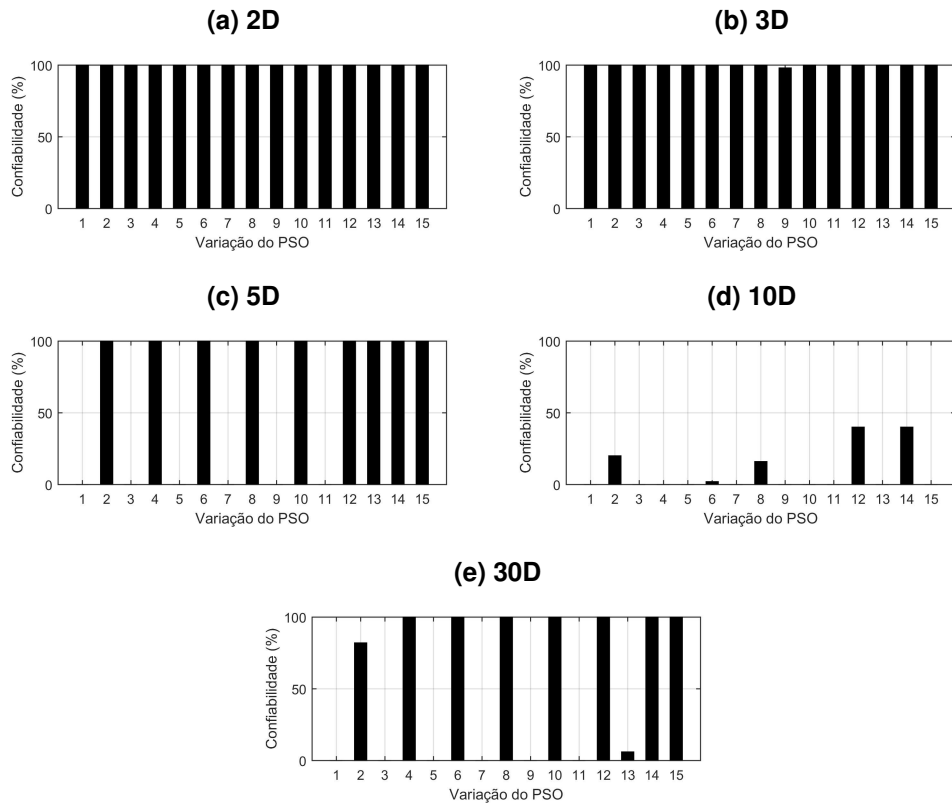
O destaque fica com o PSO15 (BBPSO) que obteve grande êxito em todos os cenários, com uma dispersão baixíssima no que diz respeito a quantidade de iterações necessárias para convergir.

Outro ponto interessante é com a velocidade do PSO13, que teve velocidade compatíveis com o PSO15 em sistemas com menores dimensões, mas com 30 dimensões teve difi-

culdade em convergir satisfatoriamente, ficando na média com 10.000 iterações necessárias e impactando a dispersão do *fitness*, visto anteriormente.

4.2.3 Confiabilidade

Figura 22 – Gráficos com as taxas de confiabilidade em cada dimensão da função Sphere



Fonte: Autoria própria (2025).

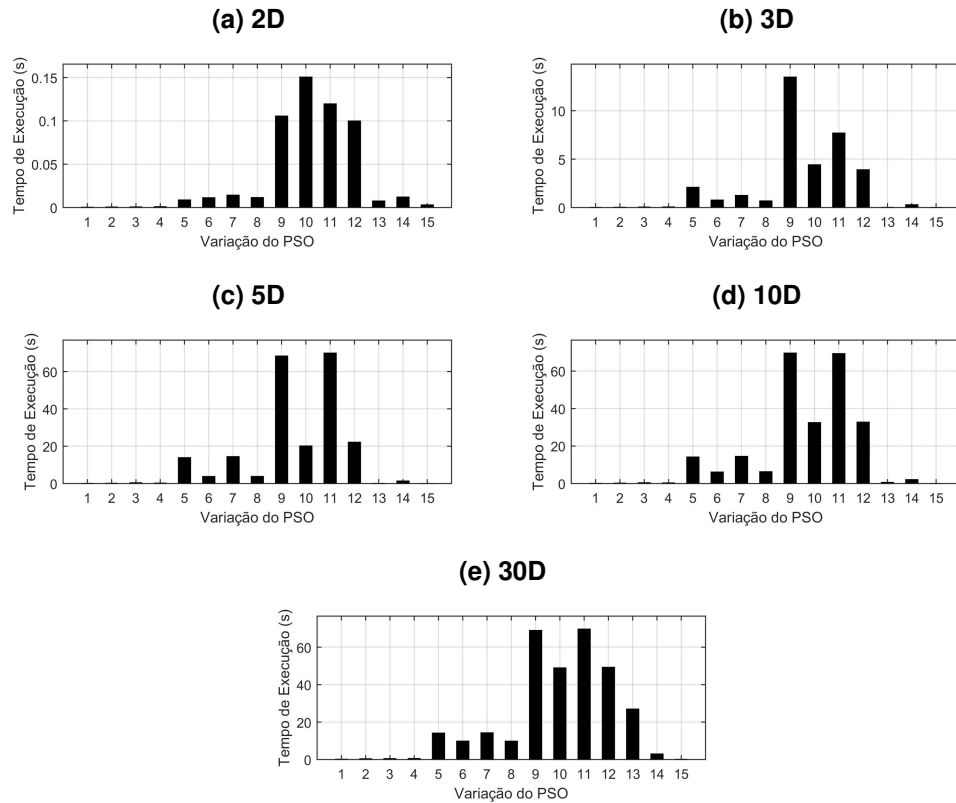
Na Figura 22, para dimensões baixas e médias (2D a 10D), a maioria das variações do PSO apresentam alta taxa de sucesso, indicando que são confiáveis e têm boas chances de convergir para soluções satisfatórias, sobretudo nas bidimensionais e tridimensionais, onde todas as variações apresentaram 100% de convergência.

Algumas variações do PSO mantêm alta confiabilidade mesmo em 30D, com exceção das variações PSO1, PSO3 e PSO13 demonstrando que certos ajustes nos parâmetros podem garantir um desempenho mais robusto, como aumentando o número de partículas e o limite máximo de iterações.

4.2.4 Velocidades computacionais

Os tempos computacionais (Figura 23) para amostragem são mais altos para as topologias de Von Neumann e Anel, como previsto.

Figura 23 – Gráficos com os tempos de execução médio em cada dimensão da função Sphere



Fonte: Autoria própria (2025).

As topologias globais das variações de 1 a 4 são mais velozes, junto com as variações de PSO13 a PSO15.

AS variações locais com nenhum fator inercial se mostraram mais lentas em processar as informações, em relação a todas as outras que possuem fatores inerciais, com tempos acima de 70s médios por amostragem para dimensões mais altas.

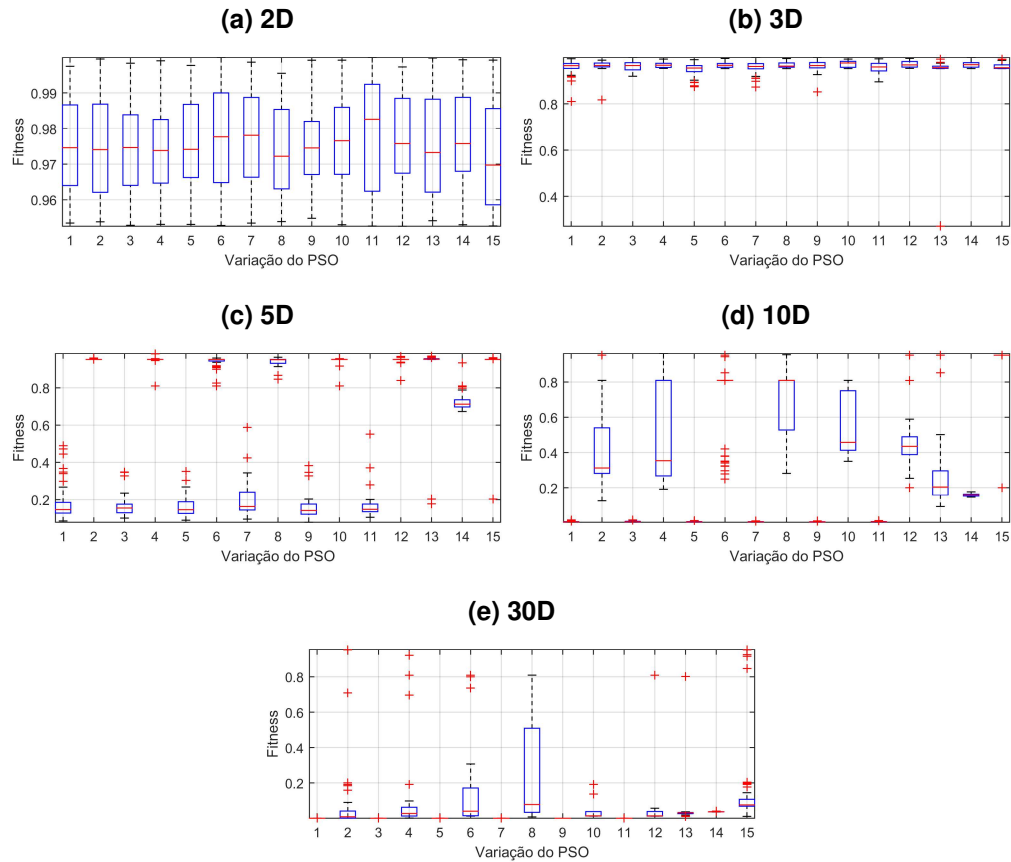
4.3 Função 3: Rosenbrock (De Jong Function N. 2)

4.3.1 Precisão

Na Figura 24, para as dimensões menores, 2D e 3D, os resultados de precisão se mostraram bem consistentes para essa função. Já nas dimensões maiores, algumas variações apresentaram precisões muito superiores que outras. Esses melhores resultados foram obtidos de variações com fatores inerciais e constritivos.

O grau de dispersão dos resultados com 2, 3 e 5 dimensões foi muito baixo nas variações com soluções ótimas (*fitness* dentro dos 5% de erro). Nos testes com 10 e 30 dimensões, resultados mais amplos foram obtidos, com as médias ficando abaixo do ideal (0,95).

Figura 24 – Gráficos *boxplot* dos *fitness* em cada dimensão da função Rosenbrock



Fonte: Autoria própria (2025).

Algumas poucas amostras chegaram a convergir nas variações com fatores inerciais e constritivos, demonstrado mais dificuldade em consistência nas convergências para dimensões mais altas.

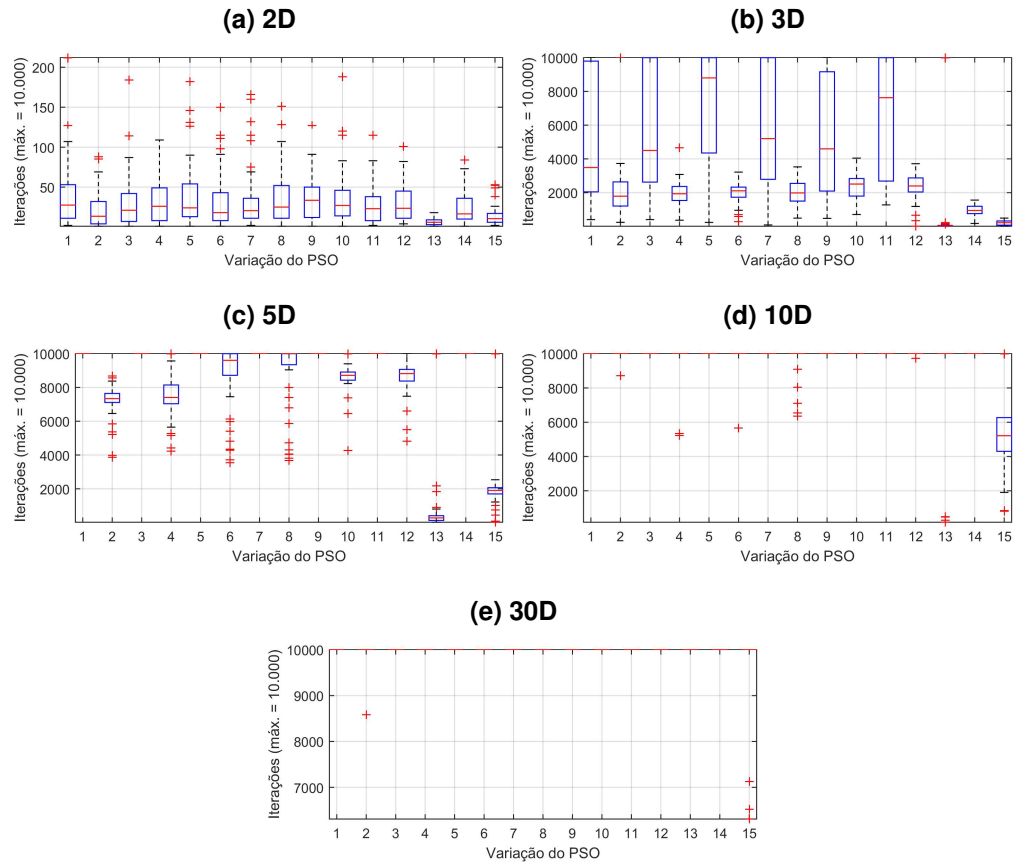
Pode ser observado também que a topologia global apresenta convergências bem-sucedidas considerando todas as dimensões, talvez por explorar melhor todo o espaço, característico de um sistema unimodal como a função Rosenbrock. Para dimensões muito altas, as topologias locais tendem a ficar presas localmente, falhando no aspecto de exploração geral do espaço de busca.

O destaque dessa experimentação fica por conta da variação PSO15, a BBPSO, que entre todas apresentou mais precisão em todas as dimensões. Mesmo com a média e quartis mais baixos de *fitness* em 30 dimensões, foi a única que teve um número maior de convergências, mostrando que é uma boa opção quanto à eficácia.

4.3.2 Velocidades de convergência

A Figura 25 mostra os resultados da velocidade. No cenário com 2 dimensões, praticamente todas as variações apresentaram um ótimo resultado com uma média de até 50 iterações

Figura 25 – Gráficos *boxplot* com velocidades de convergências em cada dimensão da função Rosenbrock



Fonte: Autoria própria (2025).

para convergir, mesmo com alguns poucos *outliers* superiores, mas não passando mais que 250 iterações máximas.

Nas experimentações em 3D e 5D, tanto a média quanto as dispersões entre as variações já começam a ser maiores e mais distintas. Variações com inerciais e fatores constritivos são mais eficientes que as demais.

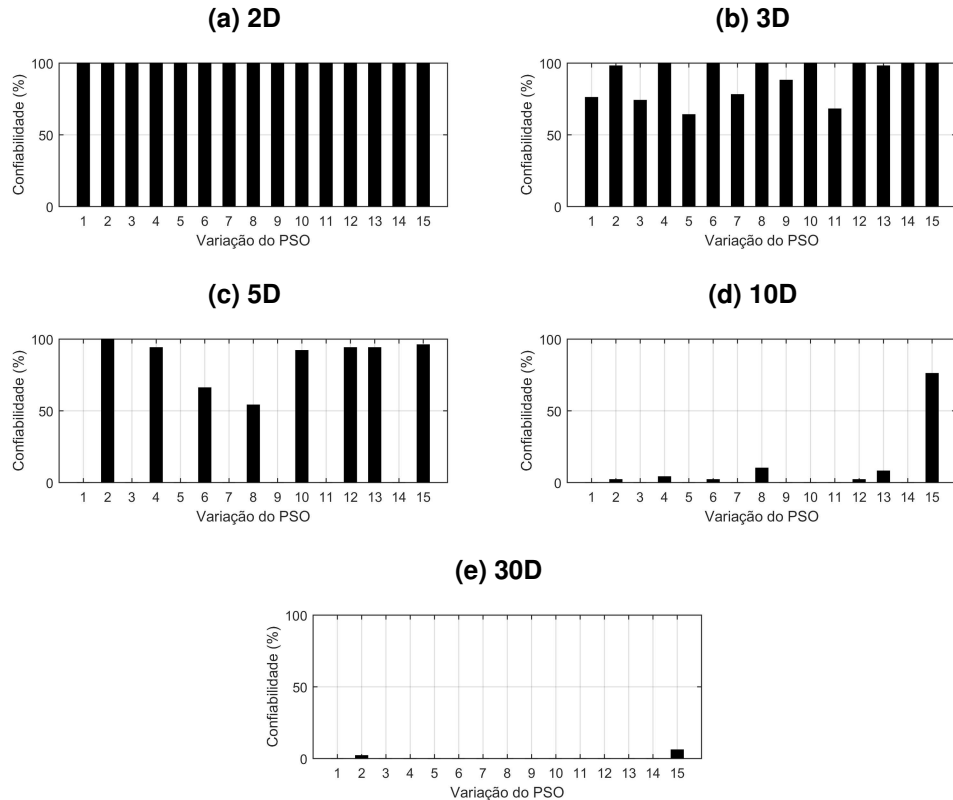
Dentre as variações sem nenhum fator inercial ou construtivo, destacam-se as com topologia global, que mostram com médias mais velozes de convergências do que as com topologia local (anel e Von Neumann) para até 3 dimensões. Um maior potencial exploratório desta topologia pode explicar este resultado, sem os fatores inerciais e para dimensões baixas.

Até 5 dimensões, a variação PSO13 com o QPSO apresentou maior velocidade entre todas, com menor dispersão e média de iterações nas amostragens. Uma justificativa pode ser sua estratégia de atualização probabilística. Justificativa que também pode ser dada no desempenho da variação PSO15 (BBPSO), pois apresentou mais consistência em todas as dimensões, sendo a variação que obteve melhor eficiência no geral (mesmo com o QPSO sendo mais rápido para dimensões menores que 10D).

A partir de 10 dimensões, todas as variações falharam em se manter dentro do máximo de iterações, com exceção de algumas amostras da variação PSO15 (BBPSO).

4.3.3 Confiabilidade

Figura 26 – Gráficos com as taxas de confiabilidade em cada dimensão da função Rosenbrock



Fonte: Autoria própria (2025).

Em dimensões baixas (2D e 3D), a confiabilidade (Figura 26) está dentro de um índice bom, com altas chances de convergência para todas as variações.

Porém, a partir de 5 dimensões, observa-se uma grande variação na confiabilidade, com algumas variações mantendo um desempenho estável e outras falhando na maioria das execuções.

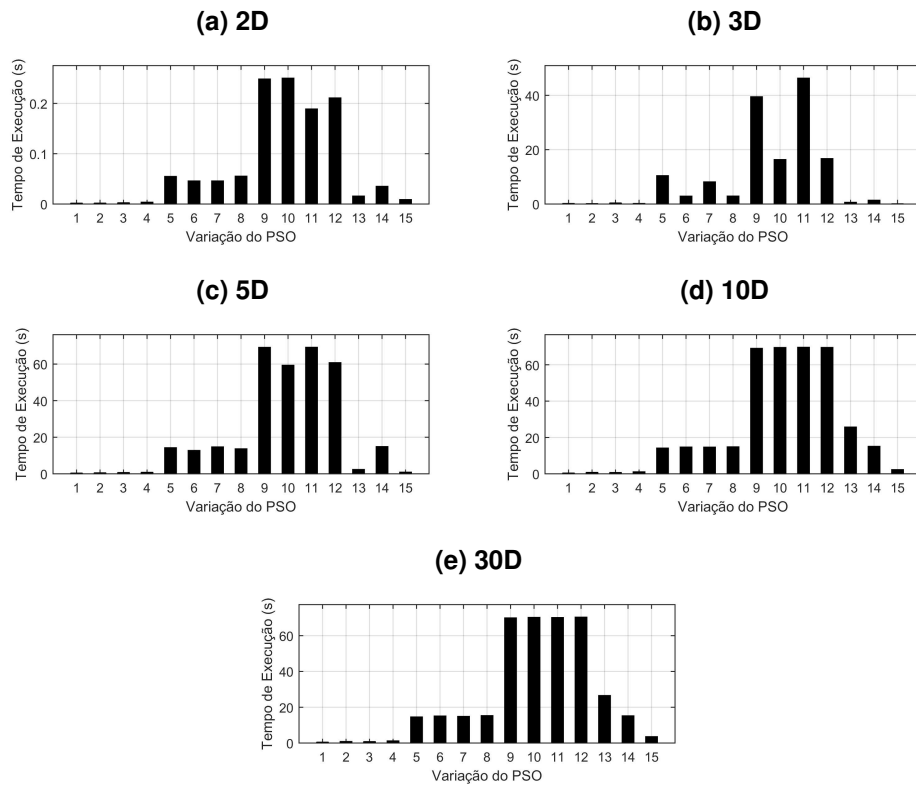
À medida que a dimensionalidade aumenta, há falhas em praticamente todas as variações. O BBPSO (PSO15) ainda se mantém com uma alta taxa de confiança até a 10ª dimensão.

4.3.4 Velocidades computacionais

Como podem ser vistos na Figura 27, claramente as topologias globais se destacam positivamente em relação ao tempo gasto nos processamentos. As locais chegam a demorar até 70s por amostra com as variações usando Von Neumann, refletindo que o formato de compartilhamento entre as partículas é crucial para a velocidade computacional.

A variação PSO15 (BBPSO) foi a que apresentou melhores resultados gerais, com tempos muito inferiores em todos os cenários, só ficando atrás das variações PSO1, PSO2, PSO3 e PSO4, e que também possuem topologias globais.

Figura 27 – Gráficos com os tempos de execução médio em cada dimensão da função Rosenbrock



Fonte: Autoria própria (2025).

Há outros 2 pontos a serem destacados. Primeiro, entre as dimensões 2D e 3D há um salto significativo nas médias em comparação com dimensões acima de 3. Houve um aumento em cerca de 180 vezes entre as maiores médias de 2D para 3D.

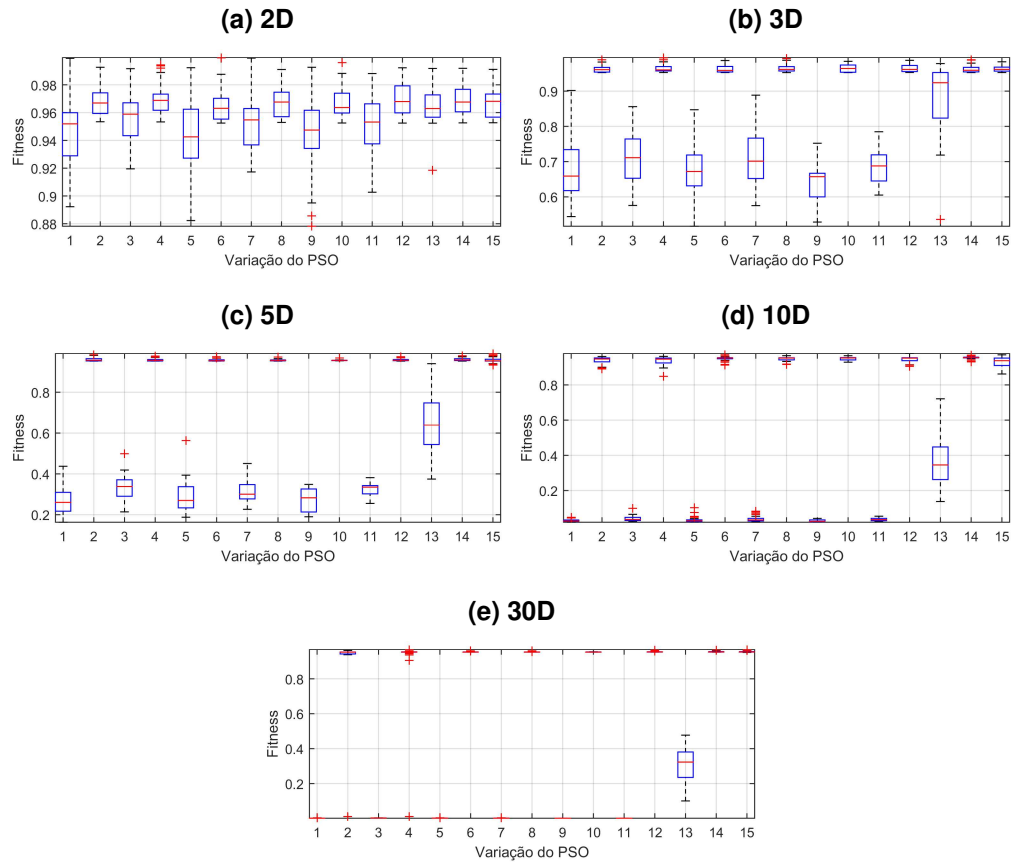
O segundo é que as médias se estabilizaram a partir da 5ª dimensão, representando os tempos limites para o máximo de iterações alcançadas, conforme visto anteriormente na velocidade de convergência. Estes tempos só seriam superados caso o número máximo de iterações também fosse aumentado.

4.4 Função 4: Griewank

4.4.1 Precisão

Na Figura 28, em dimensões mais baixas, a maioria das estratégias apresentam ótimos resultados. Naturalmente devido à complexidade, à medida que a dimensão aumenta, também há uma diferenciação maior nas dispersões entre as amostras das variações que não chegam a convergir, onde apenas as que apresentam fatores constritivos chegam no resultado desejado.

O PSO13 (QPSO) mostra um comportamento interessante por divergir do resto das variações. Ele se mantém próximo das variações convergentes até 3 dimensões. Após, fica

Figura 28 – Gráficos *boxplot* os *fitness* em cada dimensão da função Griewank

Fonte: Autoria própria (2025).

preso no meio entre os piores e melhores resultados. Nota-se que esses extremos das outras variações são bem evidenciados para dimensões mais altas.

Essa característica do QPSO pode inferir que as partículas ficam presas nos mínimos locais. Talvez, com um número maior da população, os efeitos globais de exploração possam ser compensados e a estratégia se tornar mais eficaz.

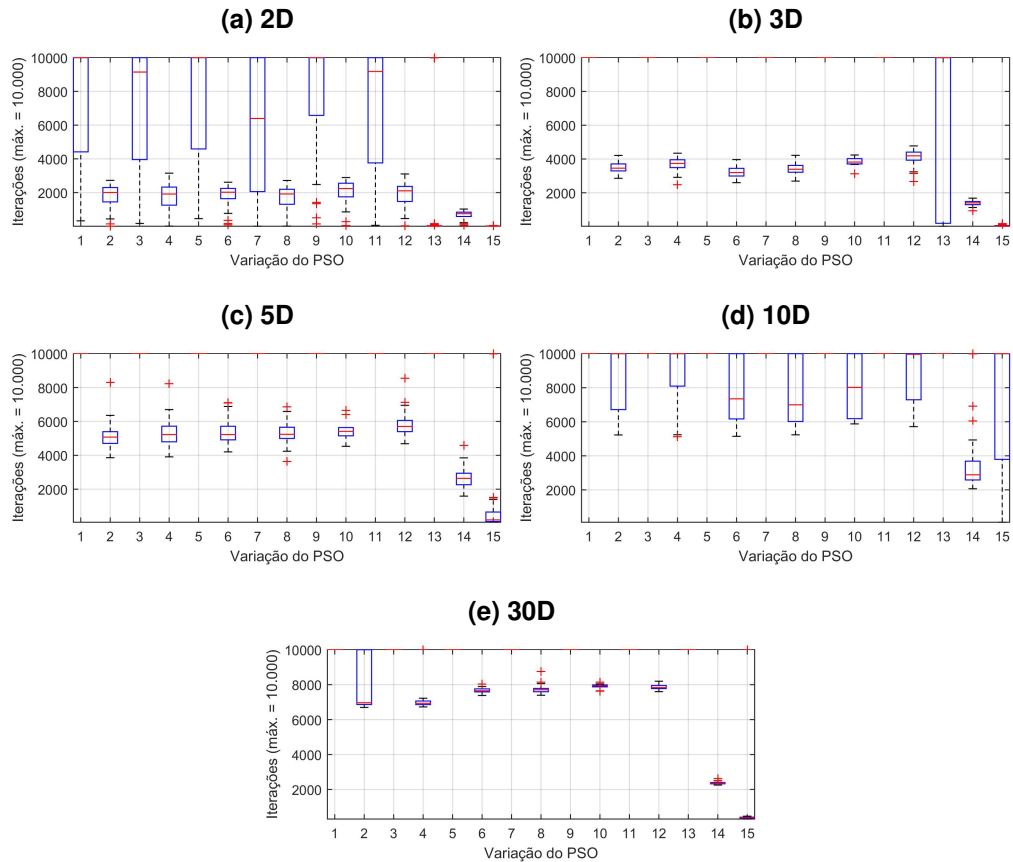
Mesmo os *fitness* terem menos variabilidade entre ótimos resultados e entre as falhas, nota-se que as topologias locais (anel e Von Neumann) se demonstram levemente superiores que as variações de topologias globais, incluindo o BBSPO e QPSO. As topologias locais se destacam positivamente aqui nesse cenário.

4.4.2 Velocidades de convergência

Apresentando uma característica muito similar aos demais cenários anteriores, na Figura 29 as variações com fatores de constrição, como inerciais, convergem muito mais rapidamente.

As médias sobem gradualmente a cada dimensão, apresentando relativamente baixa variabilidade, com exceção dos experimentos em 2D e 10D.

Figura 29 – Gráficos *boxplot* com velocidades de convergências em cada dimensão da função Griewank



Fonte: Autoria própria (2025).

O PSO13 (QPSO) apresenta ótimos resultados quanto a velocidade em 2D, uma dispersão muito grande em 3D, mas não convergindo em menos de 10.000 iterações (limite máximo) a partir de 5 dimensões. Um número maior populacional, ou um ajuste nos parâmetros da Equação 7 pode influenciar o resultado positivamente, pelo menos até média dimensionalidade.

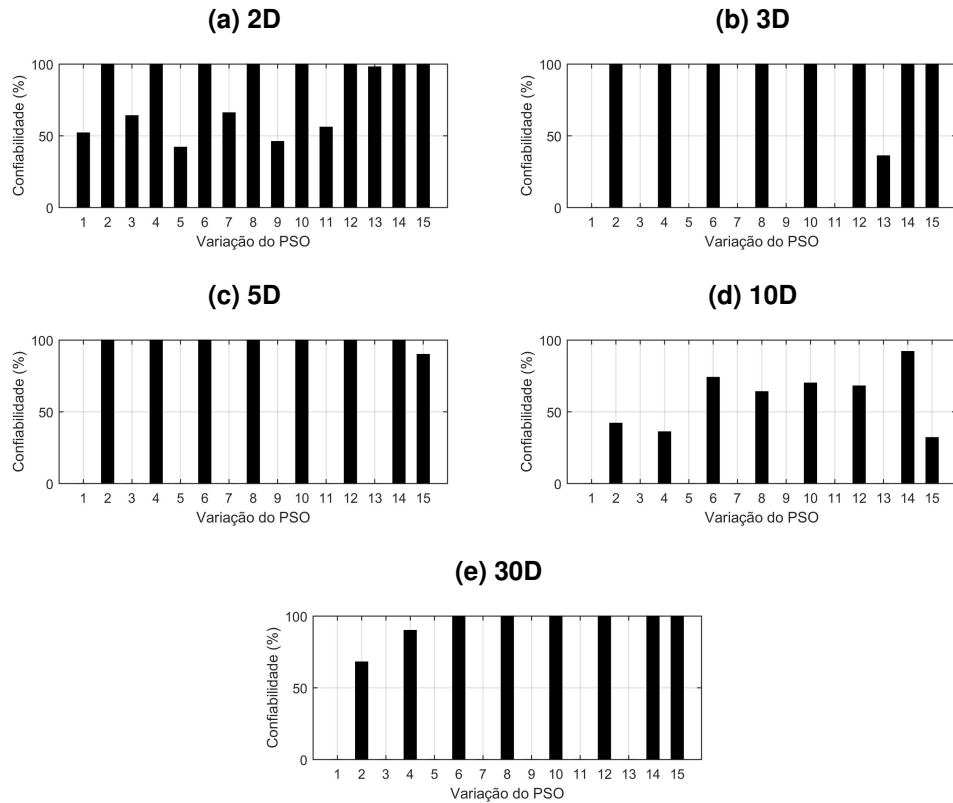
No geral, a variação PSO14 (FIPSO) apresenta resultados mais consistentes comparando todos os cenários.

4.4.3 Confiabilidade

A Figura 30 apresenta altas taxas de convergência em todas as dimensões, mas nem para todas as variações. Destacam-se as variações com inerciais. Todas as estratégias sem esses fatores tiveram péssimo rendimento.

A partir de 5D e 10D, percebe-se uma maior dispersão nos valores de confiabilidade entre as variações. Enquanto algumas mantêm boa capacidade de convergência, outras encontram dificuldades para escapar de mínimos locais ou refinar a busca em um espaço de maior dimensionalidade.

Figura 30 – Gráficos com as taxas de confiabilidade em cada dimensão da função Griewank



Fonte: Autoria própria (2025).

Por fim, em 30D, há queda mais acentuada na confiabilidade para diversas variações. Algumas estratégias ainda conseguem resultados razoáveis, mas a maioria enfrenta desafios significativos, demonstrando a necessidade de ajustes de parâmetros ou de abordagens mais avançadas para lidar com problemas em alta dimensionalidade.

4.4.4 Velocidades computacionais

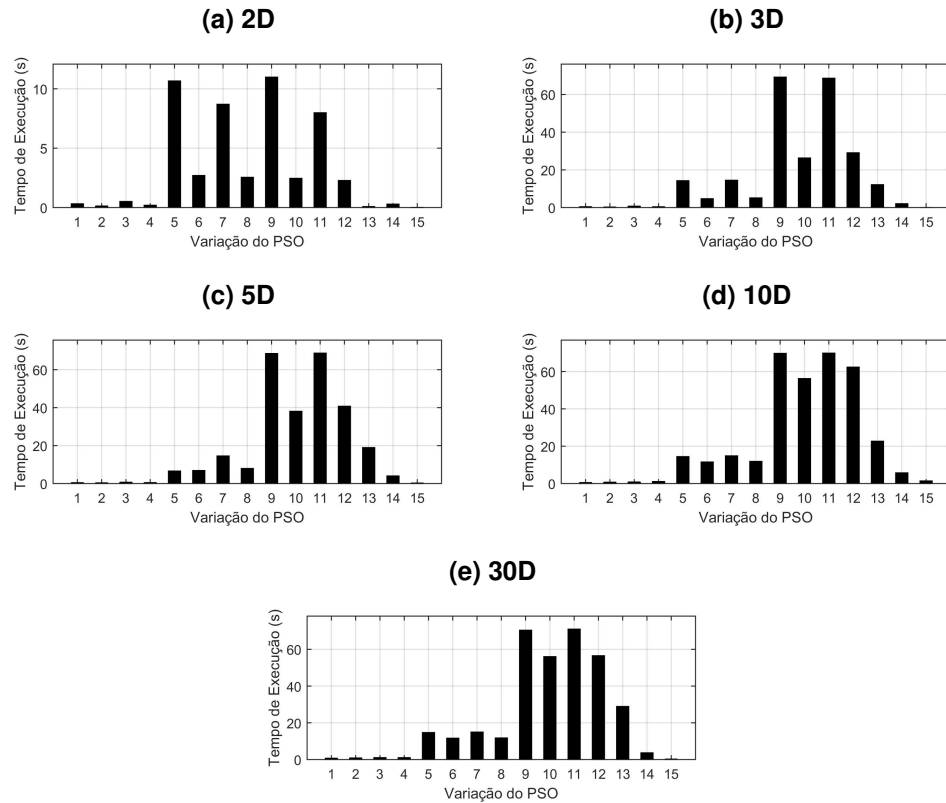
No aspecto geral, as variações com topologias locais se mostram mais lentas do que as globais, como previsto, exigindo mais da capacidade computacional (Figura 31).

O QPSO, mesmo com uma configuração topológica global, ficou mais próximo às topologias locais em tempo de processamento, conforme o aumento da dimensão.

Nota-se também que as estratégias que não usam fatores inerciais processaram mais lentamente. Essa diferença pode ser justificada por conta das velocidades de convergência, vistas anteriormente, ficando superiores às variações sem fatores constritivos.

Outro destaque seria no experimento em 2D, onde não há muitas diferenças entre as topologias anel e Von Neumann, com suas variantes similares.

Figura 31 – Gráficos com os tempos de execução médio em cada dimensão da função Griewank



Fonte: Autoria própria (2025).

4.5 Função 5: Ackley

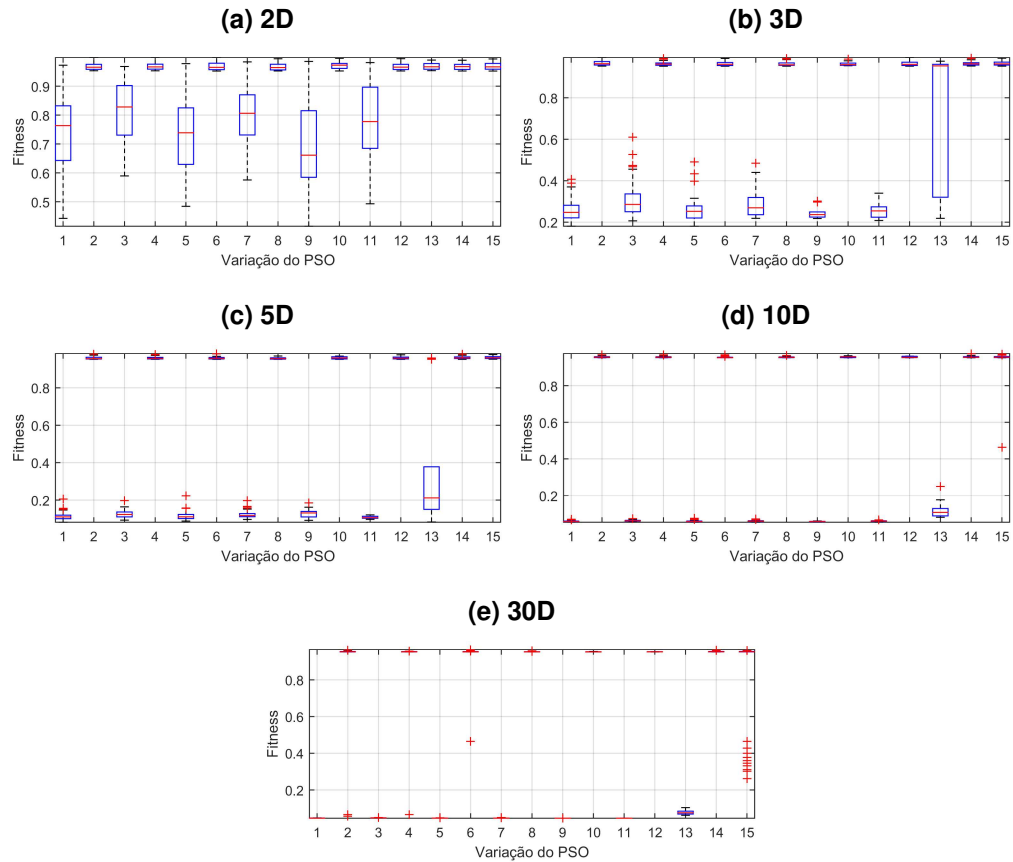
4.5.1 Precisão

Comparando estes resultados (Figura 32) com os da função Griewank, pode-se notar grandes semelhanças entre as 2 experimentações. Extremos de altas precisão para estratégias inerciais e constritivas, mas com extremos de baixas precisão para variações sem esses termos.

Alguns *outliers* intermediários (entre 0,4 e 0,6 de *fitness*) para 2 e 3 dimensões refletem que algumas variações como 1, 3, 5, 7, 9 e 11, tiveram certa dificuldade na execução, talvez relacionados a não conseguirem escapar de mínimos locais, convergindo prematuramente.

O PSO13 (QPSO) também apresenta comportamento análogo à função Griewank. Começa com alta precisão em 2 dimensões, mas que vai ficando impreciso conforme o número de dimensões aumenta. Clerc (2006) indica que podem haver falhas para estratégias probabilísticas. O BBPSO apresenta ótimos resultados em 30D, mas a presença de *outliers* inferiores podem sugerir a mesma ponderação de (CLERC, 2006).

Figura 32 – Gráficos *boxplot* dos *fitness* em cada dimensão da função Ackley



Fonte: Autoria própria (2025).

4.5.2 Velocidades de convergência

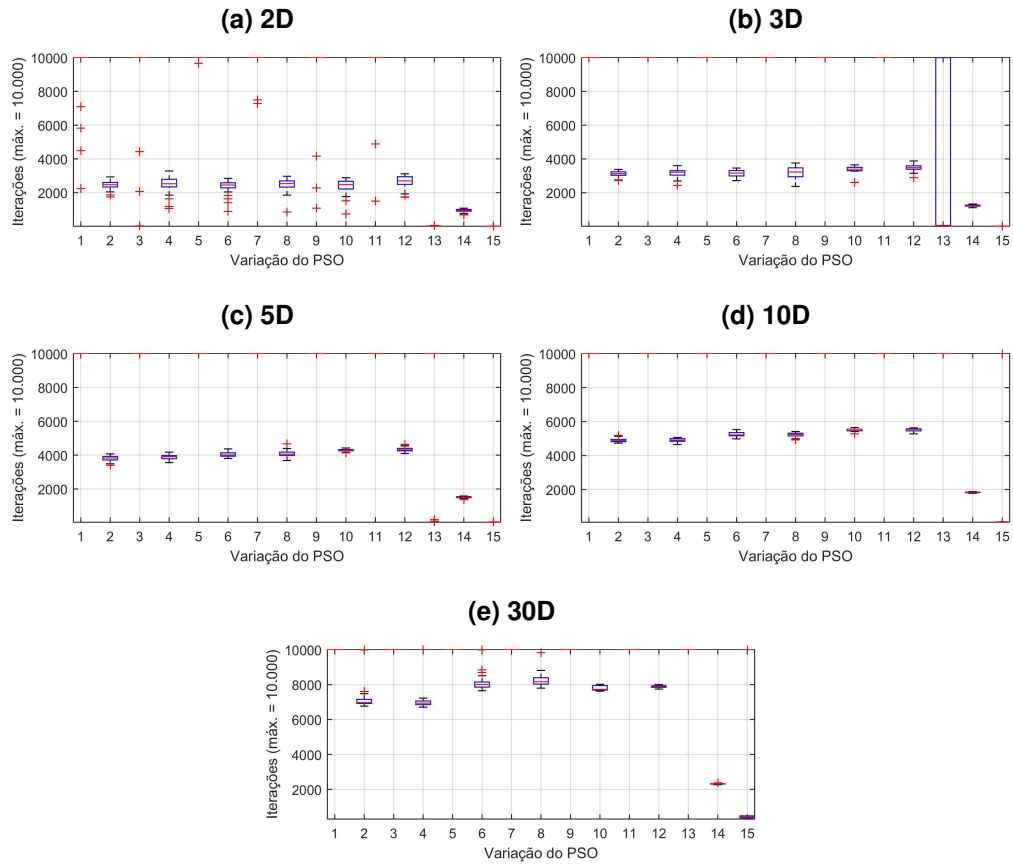
O número de iterações necessárias parece ter consistência até a 10ª dimensão, com uma média de até 6000 iterações, mas apenas para variações com termos constritivos. Algumas poucas convergências são mostradas (Figura 33) para as demais variações em 2 dimensões (como em PSO1, PSO3, PSO7, PSO9 e PSO11), sinalizando que chegaram a um *fitness* considerado ideal. Mas com pouquíssima consistência levando em consideração toda a amostragem de cada uma dessas variações.

As dispersões se mostraram baixas, indicando consistência quanto ao número de iterações necessárias para achar o *fitness* dentro da precisão de 5

Os destaques positivos ficam com as variações 14 (FIPSO) e 15 (BBPSO), com ótimas velocidades comparadas às demais estratégias.

A variação PSO13 (QPSO) se destacou negativamente, pois teve um excelente desempenho em 2 dimensões, mas a partir disso, teve inconsistência em 3D e 5D, e falhou em todas as tentativas para 10D e 30D.

Figura 33 – Gráficos *boxplot* com velocidades de convergências em cada dimensão da função Ackley



Fonte: Autoria própria (2025).

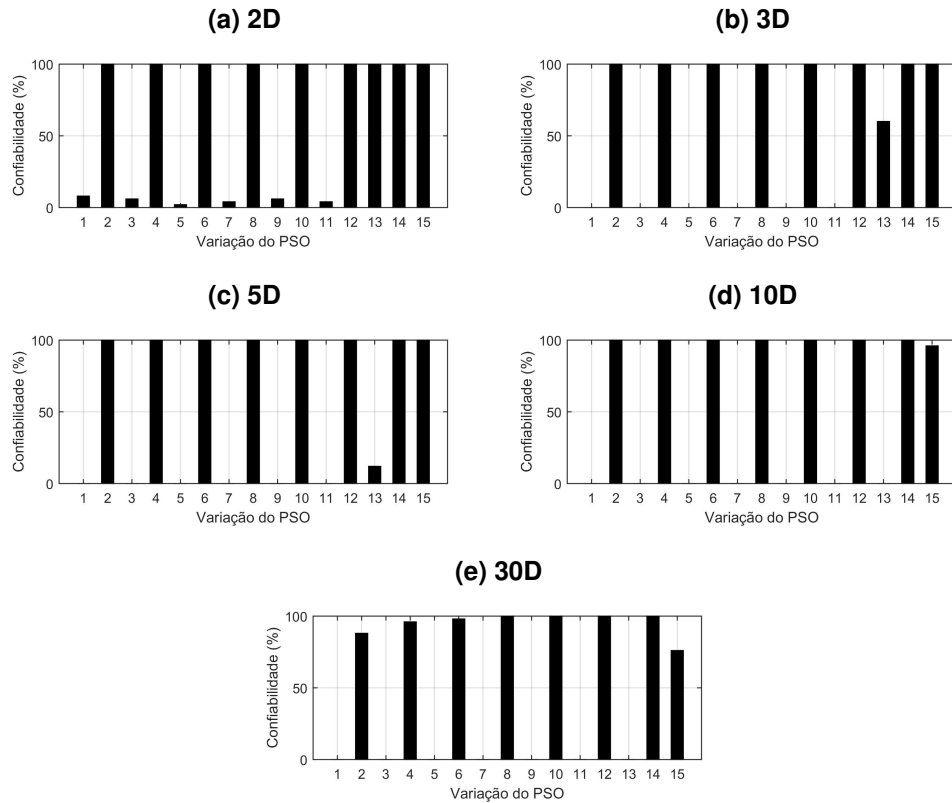
4.5.3 Confiabilidade

Tanto para ambientes de 2 até 30 dimensões, há variações com excelentes taxas de confiabilidades como algumas com baixíssima ou nenhuma convergência bem-sucedida, vistas na Figura 34.

As variações PSO1, PSO3, PSO5, PSO7, PSO9 e PSO11 não obtiveram êxito na convergência, falhando em alcançar a precisão desejada na maioria dos cenários. A única exceção ocorreu em 2 dimensões, onde, ainda assim, não apresentaram resultados suficientemente consistentes para assegurar alta confiabilidade.

Nos espaços de 5D e 10D, observam-se discrepâncias mais acentuadas entre as variações: enquanto algumas mantêm índices razoáveis de confiabilidade, outras encontram dificuldades para escapar de mínimos locais e refinar a busca em um espaço de maior complexidade.

Por fim, o QPSO (PSO13) exibiu uma queda gradativa de desempenho a cada aumento de dimensão, chegando a 0

Figura 34 – Gráficos com as taxas de confiabilidade em cada dimensão da função Ackley

Fonte: Autoria própria (2025).

4.5.4 Velocidades computacionais

Assim como os resultados anteriores das outras estratégias, relativamente, topologias globais se demonstraram ser mais computacionalmente velozes (Figura 35) do que topologias locais, como previsto.

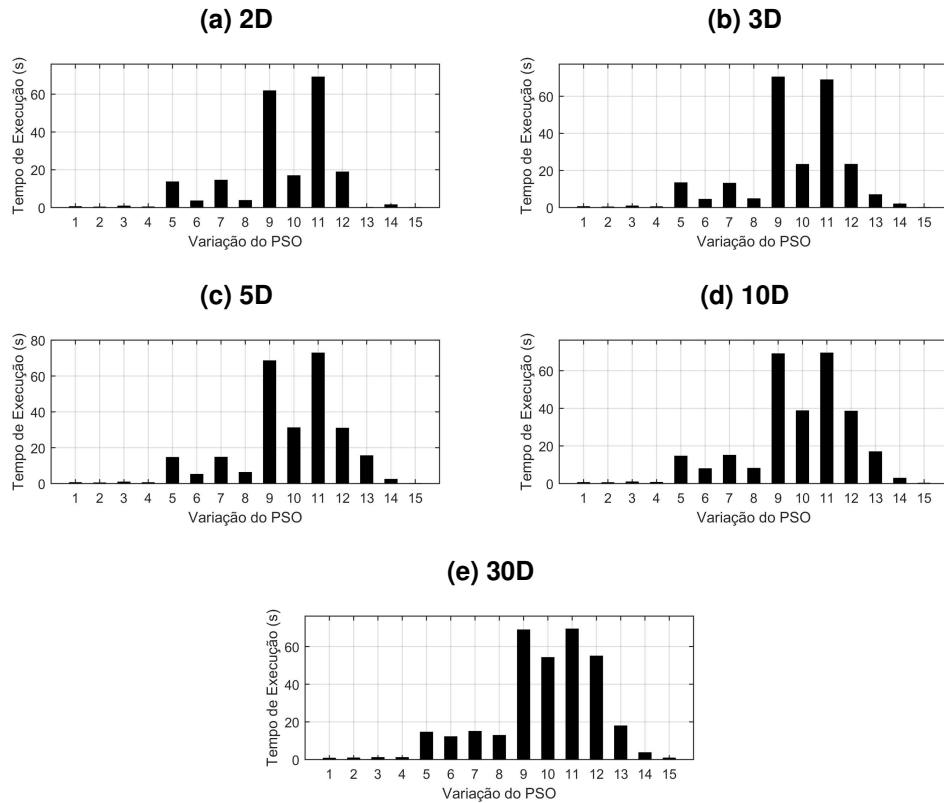
Porém, as variações com topologias anelares e de Von Neumann são mais variáveis em termos de tempo de processamento, indicando que as variações PSO6, PSO8, PSO10 e PSO12 por possuírem fatores inerciais processam mais rapidamente as iterações.

4.6 Discussões gerais dos resultados

Os resultados numéricos gerais estão dispostos Apêndice A para todos os cenários. Na Tabela 4 constam as médias gerais para cada variação dos critérios analisados. Em negrito, estão destacados os melhores resultados, entre parenteses, os piores.

De maneira geral, variações que possuem fatores constritivos tiveram um desempenho muito superior em praticamente todos os testes, com algumas poucas exceções. Os experimentos da função Sphere foram as que apresentaram melhores resultado, esperado pela sua simplicidade em relação às demais devido a sua natureza unimodal. A função Rastrigin apre-

Figura 35 – Gráficos com os tempos de execução médio em cada dimensão da função Ackley



Fonte: Autoria própria (2025).

sentou mais dificuldades às amostras de forma geral, devido sua característica multimodal, com múltiplos mínimos locais em todo o espaço de busca.

Em problemas de 2 dimensões, observou-se que a mediana do *fitness* foi consistente e alta para praticamente todas as variações, com valores próximos de 0,96 a 0,98. A única exceção foi na função Ackley, onde a mediana das variações que não possuem valores inerciais ficou bem abaixo dessa média.

Também, para 2 e 3 dimensões, a presença de alguns outliers em algumas variações na função Rastrigin indicaram que, em certas amostragens, a convergências foram obtidas mas com baixa confiabilidade. Ambas funções (Ackley e Rastrigin) apresentam muitos mínimos locais, o que torna as estratégias sem fatores constritivos mais resistentes à diversificar a exploração local, levando a uma convergência prematura em ótimos locais.

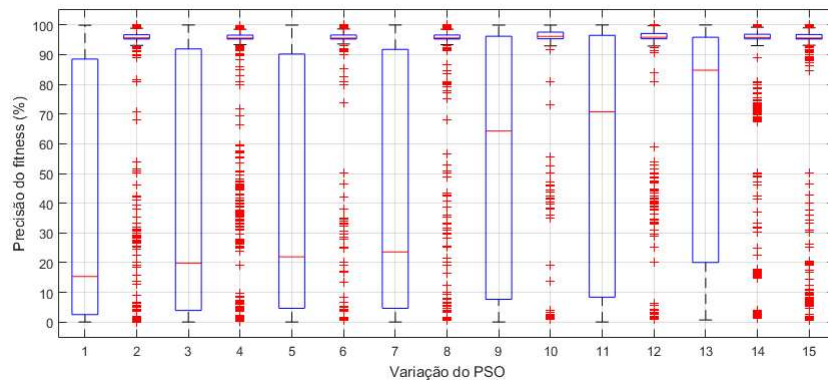
Conforme a dimensão aumentou para 3D, 5D e 10D, houve uma maior disparidade nos resultados, evidenciando que as variações do PSO que incorporaram mecanismos constritivos, como o uso de fatores inerciais para as variações PSO2, PSO4, PSO6, PSO8, PSO12, PSO13, PSO14 e PSO15, apresentaram melhor desempenho na convergência, alcançando soluções com *fitness* mais próximos do ideal (atendendo o critério de 5% de erro) (Figura 36).

Entre as estratégias que não contavam com algum fator constritivo, as com topologias local obtiveram um desempenho levemente melhor, se tratando de eficácia na convergência. Ainda nesse aspecto, pouco foi a diferença entre as 2 topologias locais, mas a de Von Neumann

Tabela 4 – Tabela das médias gerais para cada variação entre todos os cenários

PSO	Precisão do <i>fitness</i> (%)	Iterações	Tempo médio (s)	Confiabilidade (%)
1	38,04	8390	0,35	20
2	82,91	4812	0,39	80
3	39,4	8337	0,61	21
4	80,95	5232	0,59	76
5	37,81	(8456)	11,7	(19)
6	85,62	4894	7,17	82
7	39,27	8289	12,09	21
8	86,63	4902	7,41	82
9	(37,72)	8397	56,19	21
10	86,77	4853	33,08	86
11	38,83	8370	(56,78)	20
12	85,79	5115	35,52	84
13	59,41	5579	11,96	45
14	83,55	3054	4,58	81
15	82,92	2368	0,61	80

Fonte: Autoria própria (2025).

Figura 36 – Gráfico da precisão do *fitness* entre todos os cenários

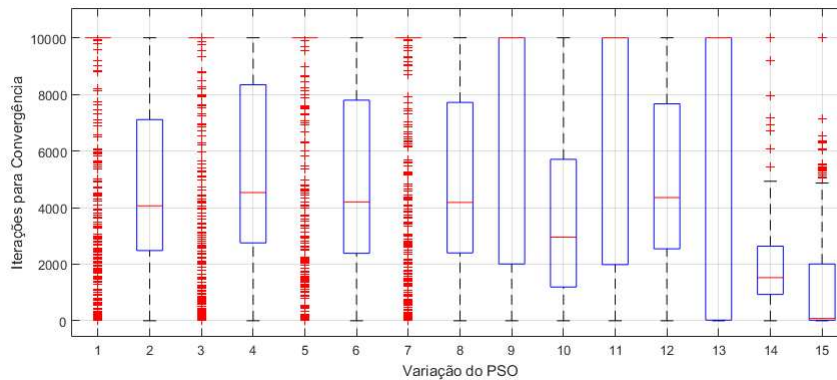
Fonte: Autoria própria (2025).

ganhou leve vantagem nesse quesito. Em relação à velocidade de convergência, algumas variações – em especial as que incluíram elementos constritivos, como o PSO2, PSO4, PSO6, PSO8, PSO12, PSO14 e PSO15 – convergiram significativamente mais rápido em cenários de baixa e média dimensionalidade (2D, 3D e 5D).

Para cenários com 10 e 30 dimensões, as velocidades (Figura 37) apresentaram mais dispersão. Em funções como Rastringin, Rosenbrock e Griewank, para as variações que alcançaram o valor pretendido de *fitness*, a quantidade de iterações ficaram muito próximas ao limite nessas dimensões. Esse seria um indicador de que, para funções mais complexas, sejam multimodais ou que o espaço de busca seja relativamente maior, as estratégias podem até

convergir, mas sem muita eficiência. Um número maior populacional ou implementar outras estratégias mais robustas que diversifiquem mais as partículas em buscas locais poderiam reduzir a velocidade de convergência, como topologias irregulares.

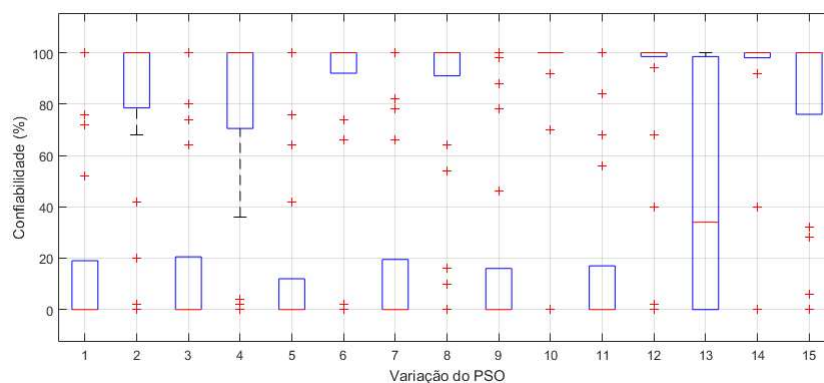
Figura 37 – Gráfico das velocidades de convergência entre todos os cenários



Fonte: Autoria própria (2025).

No critério de confiabilidade (Figura 38), as variações se mostraram altamente eficazes em 2 e 3 dimensões, mas a taxa de convergência caiu de forma considerável para dimensões mais altas para variações sem inerciais. Se destacam 2 variações que tiveram uma média superior de confiabilidade na maioria dos experimentos, tanto para baixas ou altas dimensionalidades: FIPSO (PSO14) e BBPSO (PSO15). Ambas apresentaram mais consistência nesse quesito.

Figura 38 – Gráfico das taxas de confiabilidade entre todos os cenários

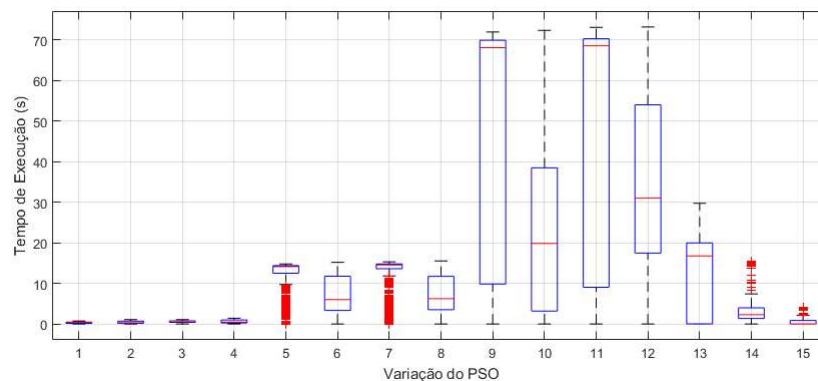


Fonte: Autoria própria (2025).

As funções Ackley, Griewank e Sphere foram as que mais obtiveram taxas de convergências acima de 80% para a maioria das variações, sinalizando que as funções Rastrigin e Rosenbrock se mostram mais complexas para sistemas com alta dimensionalidade, tanto pelo espaço de busca ser maior (como Rosenbrock) ou devido a presença de muitos mínimos locais em espaços relativamente pequenos. Para esses cenários, é necessário ponderar dentre as estratégias de PSO mecanismos equilibrando precisão ou velocidade.

No que se refere ao tempo computacional (Figura 39), os resultados indicaram que as variações com topologias globais se destacaram por sua velocidade total de processamento mais velozes. Enquanto as topologias locais baseadas em estruturas em anel e Von Neumann, demandaram mais tempo devido ao maior custo de comunicação entre as partículas. Essa diferença foi particularmente evidente em cenários de alta dimensionalidade, onde as topologias locais apresentaram tempos médios de execução superiores, chegando, em alguns casos, a 70 segundos por amostra, especialmente as de Von Neumann. Mas para qualquer dimensão, essa diferença entre os tempos de amostragem permaneceu regular.

Figura 39 – Gráfico dos tempos médios de processamento entre todos os cenários



Fonte: Autoria própria (2025).

As variações QPSO (PSO13), FIPSO (PSO14) e BBPSO (PSO15) merecem certos destaques. O QPSO mostrou inconsistência comparando os resultados obtidos com outras variações, num aspecto mais amplo. Para baixas dimensões, apresentou muitas vezes velocidades de convergências muito rápidas, boa precisão e confiabilidade e tempo computacional entre as variações com topologias global e anel. Algumas vezes até similar à global para 2 dimensões. Já para médias e altas dimensões, o QPSO raramente apresentou um bom desempenho. Alguns ajustes nos parâmetros podem melhorar a performance desta variação, tanto nos termos constritivos quanto no número de partículas, uma vez que na ausência de um vetor velocidade, reforçando o incremento populacional, pode-se otimizar a busca pelo espaço.

As variações FIPSO e BBPSO se mostraram serem as mais consistentes entre todas. Apresentaram ótimas performances tanto de confiabilidade e precisão, quanto velocidade de convergência e tempo de processamento, para n dimensões. Para altas dimensões ainda houve certa dificuldade em convergir para o fitness desejado, ou até mesmo não convergindo.

Entre essas 3 variações testadas, o BBPSO obteve um desempenho geral superior, considerando sua simplicidade de estrutura, tempos de processamento rápidos e confiabilidade.

Entre as variações mais simples em termos de estratégia de atualização do enxame (variações 1 a 12), o PSO2 teve um desempenho melhor, principalmente pelas taxas de convergências acima da média e ótima velocidade.

Em síntese, a análise dos resultados demonstra que a eficácia e a eficiência do PSO dependem fortemente da variação adotada e do problema específico, sobretudo no que diz res-

peito à escala dimensional. Estratégias que incorporam mecanismos constritivos se mostraram vantajosas em termos de precisão e velocidade de convergência em dimensões baixas a médias. Para dimensões maiores, ajustes nos parâmetros podem ser relevantes, assim como optar por estratégias mistas de topologia e atualização do enxame baseadas em diversificar buscas em espaços multimodais.

5 CONCLUSÃO

Neste trabalho, foram comparadas e analisadas 15 variações de PSO em cinco funções *benchmark*, avaliadas em diferentes escalas dimensionais.

Ficou evidente que mecanismos constritivos são superiores na maioria dos casos e para n dimensionalidades. Também, que algumas topologias são mais adequadas que outras em termos de eficiência, pois com resultados convergentes similares, se apresentaram mais velozes e consumindo menos tempo computacional na busca por soluções ótimas como o BBPSO, FIPSO e PSO clássico com inercial.

Em problemas de baixa dimensionalidade (2D e 3D), praticamente todas as variações apresentaram boa capacidade de convergência, embora algumas tenham exibido outliers que indicam falhas eventuais em certos cenários.

Já para dimensões médias (5D e 10D), as estratégias que incluíram fatores inerciais e probabilísticos, como FIPSO e BBPSO, se destacaram em precisão e velocidade de convergência.

Nos cenários de alta dimensionalidade (30D), a maioria das variações enfrentou dificuldades para escapar de mínimos locais ou atingiu o limite de iterações sem convergir.

O BBPSO, porém, manteve resultados consistentemente superiores, ainda que com dispersão elevada em algumas funções multimodais. Em termos de tempo computacional, as topologias globais apresentaram maior rapidez. Já topologias locais (como *anel* e *Von Neumann*) foram mais lentas, embora em algumas funções tenham favorecido a diversidade do enxame e melhorado a taxa de convergência em menores dimensionalidades.

Esses resultados reforçam que não há uma melhor estratégia universal de PSO, e sim, há necessidade de adequar os parâmetros e as estratégias de comunicação às características do problema.

Outros testes poderiam ser aplicados na tentativa de melhorar alguns cenários. Como trabalho futuro, recomenda-se novas experimentações ajustando os parâmetros iniciais (como no aumento no tamanho populacional) e testando novos coeficientes constritivos para melhorar o desempenho em alta dimensionalidade.

REFERÊNCIAS

- ALFI, A. Pso with adaptive mutation and inertia weight and its application in parameter estimation of dynamic systems. **Acta Automatica Sinica**, v. 37, n. 5, p. 541–549, 2011. ISSN 1874-1029. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S187410291160205X>.
- ALI, M.; KHOMPATRAPORN, C.; ZABINSKY, Z. A numerical evaluation of several stochastic algorithms on selected continuous global optimization test problems. **Journal of Global Optimization**, v. 31, p. 635–672, 01 2005.
- BELLMAN, R. **Adaptive Control Processes: A Guided Tour**. Princeton University Press, 1961. ISBN 9780691079011. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/j.ctt183ph6v>.
- BERTSEKAS, D. **Nonlinear Programming**. Athena Scientific, 1999. (Athena scientific optimization and computation series). ISBN 9781886529007. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=TgMpAQAAAMAJ>.
- BINKLEY, K.; HAGIWARA, M. Balancing exploitation and exploration in particle swarm optimization: Velocity-based reinitialization. **Transactions of the Japanese Society for Artificial Intelligence**, Japanese Society for Artificial Intelligence, v. 23, n. 1, p. 27–35, 2008. ISSN 1346-0714.
- BIRGE, J.; LOUVEAUX, F. **Introduction to Stochastic Programming**. Springer New York, 2011. (Springer Series in Operations Research and Financial Engineering). ISBN 9781461402374. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=Vp0Bp8kjPxUC>.
- BISHOP, C. M. **Pattern Recognition and Machine Learning**. 1. ed. Springer New York, NY, 2006. XX, 778 p. (Information Science and Statistics). ISSN 1613-9011. ISBN 978-0-387-31073-2. Disponível em: <https://link.springer.com/book/9780387310732>.
- BLUM, C.; ROLI, A. Metaheuristics in combinatorial optimization: Overview and conceptual comparison. **ACM Comput. Surv.**, v. 35, p. 268–308, 01 2001.
- BONABEAU, E.; DORIGO, M.; THERAULAZ, G. **Swarm intelligence: from natural to artificial systems**. USA: Oxford University Press, Inc., 1999. ISBN 0195131592.
- BORGES, F. G. *et al.* Performance comparison of particle swarm optimization strategies to adjust a nonlinear gapid controller. In: **2018 13th IEEE International Conference on Industry Applications (INDUSCON)**. [S.l.: s.n.], 2018. p. 685–691.
- BOYD, S.; VANDENBERGHE, L. **Convex Optimization**. Cambridge University Press, 2004. ISBN 9781107394001. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=IUZdAAAAQBAJ>.
- BRATTON, D.; KENNEDY, J. Defining a standard for particle swarm optimization. In: **2007 IEEE Swarm Intelligence Symposium**. [S.l.: s.n.], 2007. p. 120–127.
- CLERC, M. **Particle Swarm Optimization**. John Wiley Sons, Ltd, 2006. ISBN 9780470612163. Disponível em: <https://kamenpenkov.wordpress.com/wp-content/uploads/2016/01/pso-m-clerc-2006.pdf>.
- DORIGO, M.; BIRATTARI, M.; STUTZLE, T. Ant colony optimization. **IEEE Computational Intelligence Magazine**, v. 1, n. 4, p. 28–39, 2006.

- EBERHART, R.; SHI, Y. Comparing inertia weights and constriction factors in particle swarm optimization. *In: Proceedings of the 2000 Congress on Evolutionary Computation. CEC00 (Cat. No.00TH8512)*. [S.l.: s.n.], 2000. v. 1, p. 84–88 vol.1.
- FALLAHI, S.; TAGHADOSI, M. Quantum-behaved particle swarm optimization based on solitons. **Scientific Reports**, v. 12, n. 1, p. 13977, 2022. ISSN 2045-2322. Disponível em: <https://doi.org/10.1038/s41598-022-18351-0>.
- FIGUEIREDO, E. M.; LUDERMIR, T. B. Effect of the pso topologies on the performance of the pso-elm. *In: 2012 Brazilian Symposium on Neural Networks*. [S.l.: s.n.], 2012. p. 178–183.
- FOGEL, L. J. Autonomous automata. **Industrial Research**, v. 4, p. 14–19, 1962. Disponível em: <https://cir.nii.ac.jp/crid/1571417124633170688>.
- FRIEDBERG, R. M. A learning machine: part i. **IBM J. Res. Dev.**, IBM Corp., USA, v. 2, n. 1, p. 2–13, jan. 1958. ISSN 0018-8646. Disponível em: <https://doi.org/10.1147/rd.21.0002>.
- HEISENBERG, W. Über den anschaulichen inhalt der quantentheoretischen kinematik und mechanik. **Zeitschrift für Physik**, v. 43, n. 3, p. 172–198, 1927. ISSN 0044-3328. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/BF01397280>.
- HOLLAND, J. H. **Adaptation in Natural and Artificial Systems**. Ann Arbor, MI: University of Michigan Press, 1975. Second edition, 1992.
- KAMSYAKAWUNI, A. *et al.* Metaheuristic algorithm approach to solve non-linear equations system with complex roots. **Journal of Physics: Conference Series**, IOP Publishing, v. 1494, n. 1, p. 012001, mar 2020. Disponível em: <https://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/1494/1/012001>.
- KENNEDY, J. The particle swarm: social adaptation of knowledge. *In: Proceedings of 1997 IEEE International Conference on Evolutionary Computation (ICEC '97)*. [S.l.: s.n.], 1997. p. 303–308.
- KENNEDY, J. Small worlds and mega-minds: effects of neighborhood topology on particle swarm performance. *In: Proceedings of the 1999 Congress on Evolutionary Computation-CEC99 (Cat. No. 99TH8406)*. [S.l.: s.n.], 1999. v. 3, p. 1931–1938 Vol. 3.
- KENNEDY, J. Bare bones particle swarms. *In: Proceedings of the 2003 IEEE Swarm Intelligence Symposium. SIS'03 (Cat. No.03EX706)*. [S.l.: s.n.], 2003. p. 80–87.
- KENNEDY, J.; EBERHART, R. Particle swarm optimization. *In: Proceedings of ICNN'95 - International Conference on Neural Networks*. [S.l.: s.n.], 1995. v. 4, p. 1942–1948 vol.4.
- KENNEDY, J.; MENDES, R. Population structure and particle swarm performance. *In: Proceedings of the 2002 Congress on Evolutionary Computation. CEC'02 (Cat. No.02TH8600)*. [S.l.: s.n.], 2002. v. 2, p. 1671–1676 vol.2.
- KHAN, T. A. *et al.* Modeling of a standard particle swarm optimization algorithm in matlab by different benchmarks. *In: Second International Conference on the Innovative Computing Technology (INTECH 2012)*. [S.l.: s.n.], 2012. p. 271–274.
- KROHLING, R. A.; MENDEL, E. Bare bones particle swarm optimization with gaussian or cauchy jumps. *In: 2009 IEEE Congress on Evolutionary Computation*. [S.l.: s.n.], 2009. p. 3285–3291.
- MCCULLOCH, W. S.; PITTS, W. A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity. **The Bulletin of Mathematical Biophysics**, v. 5, n. 4, p. 115–133, 1943.

MENDES, R.; KENNEDY, J.; NEVES, J. The fully informed particle swarm: Simpler, mabe better. **Evolutionary Computation, IEEE Transactions on**, v. 8, p. 204 – 210, 07 2004.

MURRAY, J. D. **Mathematical Biology I. An Introduction**. 3. ed. New York: Springer, 2002. v. 17. (Interdisciplinary Applied Mathematics, v. 17).

NARIÑO, G. A. R. **Otimização de Risers em Catenária com Amortecedores Hidrodinâmicos**. 2014. 119 f. Monografia (Tese) — Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-RIO), Porto Alegre, 2014.

NEUMANN, J. V.; BURKS, A. **Theory of Self-reproducing Automata**. University of Illinois Press, 1966. (Goldstine Printed Materials). ISBN 9780598377982. Disponível em: https://archive.org/details/theoryofselfrepr00vonn_0/page/n5/mode/2up.

NOCEDAL, J.; WRIGHT, S. **Numerical Optimization**. Springer New York, 2006. (Springer Series in Operations Research and Financial Engineering). ISBN 9780387227429. Disponível em: https://doi.org/10.1007/978-0-387-40065-5_1.

OSMAN, I.; LAPORTE, G. Metaheuristics: A bibliography. **Annals of Operational Research**, v. 63, p. 513–628, 10 1996.

PEARL, J. **Heuristics: intelligent search strategies for computer problem solving**. USA: Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc., 1984. ISBN 0201055945.

RECHENBERG, I. **Cybernetic Solution Path of an Experimental Problem**. [S.l.], 1965.

SCHRODINGER, E. An undulatory theory of the mechanics of atoms and molecules. **Phys. Rev.**, American Physical Society, v. 28, p. 1049–1070, Dec 1926. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.28.1049>.

SCHWEFEL, H.-P. **Kybernetische Evolution als Strategie der Exprimmentellen Forschung in der Strömungstechnik**. 03 1965. 84 p. Tese (Doutorado) — Technische Universität Berlin, 03 1965. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/216301423_Kybernetische_Evolution_als_Strategie_der_Exprimmentellen_Forschung_in_der_Stromungstechnik.

SERVAT, P. S. **Comparação Sistemática entre Métodos de Otimização Estocástica**. 2020. 38 f. Monografia (TCC) — Departamento de Engenharia Química, Escola de Engenharia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2020.

SHAMI, T. M. *et al.* Particle swarm optimization: A comprehensive survey. **IEEE Access**, v. 10, p. 10031–10061, 2022.

SHI, Y.; EBERHART, R. A modified particle swarm optimizer. *In*: **1998 IEEE International Conference on Evolutionary Computation Proceedings. IEEE World Congress on Computational Intelligence (Cat. No.98TH8360)**. [S.l.: s.n.], 1998. p. 69–73.

SKOGESTAD, S.; POSTLETHWAITE, I. **Multivariable Feedback Control: Analysis and Design**. Wiley, 2005. ISBN 9780470011676. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=97iAEAAAQBAJ>.

SUN, J.; FENG, B.; XU, W. Particle swarm optimization with particles having quantum behavior. *In*: **Proceedings of the 2004 Congress on Evolutionary Computation (IEEE Cat. No.04TH8753)**. [S.l.: s.n.], 2004. v. 1, p. 325–331 Vol.1.

SURJANOVIC, S.; BINGHAM, D. **Virtual Library of Simulation Experiments: Test Functions and Datasets**. 2013. Retrieved February 17, 2025, from <http://www.sfu.ca/~ssurjano>.

TALBI, E.-G. **Metaheuristics: From Design to Implementation**. [S.l.]: Wiley, 2009. v. 74. ISBN 9780470278581.

VALLE, Y. del *et al.* Particle swarm optimization: Basic concepts, variants and applications in power systems. **IEEE Transactions on Evolutionary Computation**, v. 12, n. 2, p. 171–195, 2008.

WYK, A. B. van; ENGELBRECHT, A. P. Overfitting by pso trained feedforward neural networks. *In*: **IEEE Congress on Evolutionary Computation**. [S.l.: s.n.], 2010. p. 1–8.

YANG, X.-S. Nature-inspired optimization algorithms: Challenges and open problems. **Journal of Computational Science**, v. 46, p. 101104, 2020. ISSN 1877-7503. 20 years of computational science. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877750320300144>.

**APÊNDICE A – Tabela numérica completa com os desempenhos gerais
dos experimentos com as variações de PSO para n dimensões**

Tabela 5 – Resultados numéricos das experimentações

Função	D	PSO	Precisão do Fitness (%)				Velocidade (Iterações)				Tempo (s)	Confiabilidade (%)
			Média	Melhor	Pior	Desvio	Média	Melhor	Pior	Desvio		
1	2	1	95,81	99,62	87,97	2,85	5984	51	10000	3578	0,22	72
1	2	2	97,83	100,00	95,39	1,38	1450	81	2283	612	0,10	100
1	2	3	96,15	99,56	88,71	2,57	5047	186	10000	3491	0,37	80
1	2	4	96,37	99,91	88,14	2,56	4831	280	10000	3399	0,52	82
1	2	5	95,58	99,76	80,05	4,28	5028	85	10000	3527	7,26	76
1	2	6	97,38	99,95	95,27	1,34	1314	4	2252	672	1,91	100
1	2	7	96,55	99,80	86,88	2,53	4915	40	10000	3480	7,18	82
1	2	8	97,56	99,79	95,37	1,44	1267	76	2458	710	1,89	100
1	2	9	95,88	99,90	83,61	2,97	4579	12	10000	3821	32,36	78
1	2	10	97,50	99,74	95,30	1,40	1499	167	2197	543	10,65	100
1	2	11	97,06	99,88	92,65	1,79	4765	85	10000	3567	33,62	84
1	2	12	97,34	99,87	95,29	1,46	1579	30	2497	620	11,36	100
1	2	13	84,22	99,99	50,13	21,52	2821	5	10000	4522	5,10	72
1	2	14	97,76	99,99	95,56	1,31	672	170	966	194	1,01	100
1	2	15	97,62	99,96	95,34	1,48	20	5	111	17	0,01	100
1	3	1	45,39	94,34	28,23	15,14	10000	10000	10000	0	0,38	0
1	3	2	97,20	99,63	95,28	1,21	2971	2300	3535	253	0,22	100
1	3	3	44,08	90,03	29,69	12,04	10000	10000	10000	0	0,73	0
1	3	4	48,22	97,00	31,21	15,41	9880	4008	10000	847	1,06	2
1	3	5	42,53	81,78	28,36	11,98	10000	10000	10000	0	14,17	0
1	3	6	96,87	99,37	95,30	1,19	3016	1559	3496	328	4,44	100
1	3	7	45,62	95,58	27,52	13,77	9999	9943	10000	8	14,67	2
1	3	8	96,75	99,90	95,24	1,28	3051	1288	3516	353	4,61	100
1	3	9	46,63	91,20	27,94	15,72	10000	10000	10000	0	70,48	0
1	3	10	97,33	99,66	95,41	1,22	3274	2596	3661	171	23,38	100
1	3	11	45,78	81,67	30,54	13,10	10000	10000	10000	0	71,41	0
1	3	12	97,20	99,87	95,36	1,26	3382	2910	3897	193	24,37	100
1	3	13	61,99	98,69	33,45	26,09	6616	11	10000	4762	11,63	34
1	3	14	97,23	99,95	95,27	1,33	1311	964	1553	116	1,98	100
1	3	15	92,31	99,94	33,45	15,53	1084	17	10000	3004	0,19	90
1	5	1	8,60	14,61	5,11	1,77	10000	10000	10000	0	0,41	0
1	5	2	96,25	99,53	95,29	1,03	4390	3588	5328	314	0,34	100
1	5	3	9,43	17,16	5,71	2,30	10000	10000	10000	0	0,73	0
1	5	4	96,48	99,50	95,25	1,02	4362	3502	5335	303	0,48	100
1	5	5	9,14	17,65	6,15	2,14	10000	10000	10000	0	14,12	0
1	5	6	96,35	99,78	95,27	1,00	4675	3743	6887	595	6,77	100
1	5	7	9,15	14,42	5,62	2,04	10000	10000	10000	0	14,47	0
1	5	8	96,34	99,32	95,25	0,97	4712	3994	6110	374	6,97	100
1	5	9	8,21	13,03	6,15	1,52	10000	10000	10000	0	68,02	0
1	5	10	96,69	98,91	95,48	1,08	4967	4294	5612	318	34,07	100
1	5	11	9,69	19,27	6,89	2,97	10000	10000	10000	0	68,58	0
1	5	12	96,84	99,87	95,34	1,17	5002	4546	5896	301	34,68	100
1	5	13	19,66	95,27	6,28	14,10	9801	60	10000	1406	16,47	2
1	5	14	96,61	99,27	95,27	1,15	2170	1721	2999	238	3,21	100
1	5	15	57,40	99,40	16,74	26,68	7295	37	10000	4390	1,42	28
1	10	1	1,53	2,23	1,23	0,24	10000	10000	10000	0	0,43	0
1	10	2	48,63	97,50	20,08	26,01	9426	5714	10000	1303	0,76	20
1	10	3	1,53	2,29	1,23	0,20	10000	10000	10000	0	0,79	0
1	10	4	1,57	2,23	1,31	0,22	10000	10000	10000	0	1,15	0
1	10	5	1,46	1,84	1,24	0,16	10000	10000	10000	0	14,08	0
1	10	6	33,70	95,56	16,74	14,43	9935	6771	10000	457	14,82	2
1	10	7	1,43	1,83	1,22	0,15	10000	10000	10000	0	14,53	0
1	10	8	48,04	98,67	20,07	23,97	9775	6390	10000	689	14,85	16
1	10	9	1,50	1,76	1,26	0,11	10000	10000	10000	0	68,96	0
1	10	11	1,56	3,09	1,32	0,34	10000	10000	10000	0	69,04	0
1	10	12	62,11	98,88	20,08	29,26	9410	6598	10000	977	65,53	40
1	10	13	8,27	33,45	2,87	5,44	10000	10000	10000	0	21,76	0
1	10	14	64,84	98,29	22,58	27,29	7969	3354	10000	2699	12,05	40

Função	D	PSO	Precisão do Fitness (%)				Velocidade (iterações)				Tempo médio (s)	Confiabilidade (%)
			Média	Melhor	Pior	Desvio	Média	Melhor	Pior	Desvio		
1	10	15	17,36	50,13	4,78	8,59	10000	10000	10000	0	1,66	0
1	30	1	0,25	0,28	0,22	0,01	10000	10000	10000	0	0,57	0
1	30	2	0,77	1,73	0,48	0,24	10000	10000	10000	0	0,96	0
1	30	3	0,28	0,35	0,26	0,02	10000	10000	10000	0	0,90	0
1	30	4	0,28	0,31	0,25	0,01	10000	10000	10000	0	1,29	0
1	30	5	0,26	0,30	0,24	0,02	10000	10000	10000	0	14,29	0
1	30	6	0,93	1,73	0,52	0,28	10000	10000	10000	0	15,03	0
1	30	7	0,73	0,73	0,73	0,00	10000	10000	10000	0	15,11	0
1	30	8	0,76	1,67	0,54	0,24	10000	10000	10000	0	15,05	0
1	30	9	0,24	0,27	0,23	0,01	10000	10000	10000	0	69,81	0
1	30	10	1,42	3,35	0,77	0,49	10000	10000	10000	0	61,15	0
1	30	11	0,24	0,27	0,23	0,01	10000	10000	10000	0	69,61	0
1	30	12	1,94	6,24	0,78	1,26	10000	10000	10000	0	69,28	0
1	30	13	1,89	2,79	0,71	0,57	10000	10000	10000	0	21,37	0
1	30	14	1,93	3,77	1,17	0,64	10000	10000	10000	0	15,32	0
1	30	15	1,14	2,01	0,62	0,37	10000	10000	10000	0	2,07	0
2	2	1	97,68	99,78	95,29	1,30	11	1	57	13	0,00	100
2	2	2	97,41	99,70	95,30	1,19	7	1	27	7	0,00	100
2	2	3	97,60	99,97	95,41	1,27	9	1	113	16	0,00	100
2	2	4	97,44	99,92	95,34	1,37	10	1	51	12	0,00	100
2	2	5	97,83	99,95	95,36	1,22	8	1	55	8	0,01	100
2	2	6	97,54	99,94	95,25	1,36	9	1	75	11	0,01	100
2	2	7	97,73	99,97	95,28	1,46	11	1	119	20	0,01	100
2	2	8	97,41	99,96	95,39	1,29	9	1	26	6	0,01	100
2	2	9	97,49	99,92	95,29	1,51	16	1	107	19	0,11	100
2	2	10	97,57	99,93	95,63	1,32	22	1	153	29	0,15	100
2	2	11	97,51	99,94	95,28	1,38	18	1	115	21	0,12	100
2	2	12	97,85	99,94	95,26	1,46	15	1	147	26	0,10	100
2	2	13	97,63	99,94	95,28	1,22	3	1	10	2	0,01	100
2	2	14	97,51	99,89	95,31	1,36	10	1	34	7	0,01	100
2	2	15	98,03	99,89	95,25	1,20	3	1	5	1	0,00	100
2	3	1	97,20	99,88	95,43	1,41	1650	2	8212	1794	0,01	100
2	3	2	97,18	99,96	95,41	1,33	544	3	1726	483	0,02	100
2	3	3	97,21	99,70	95,35	1,20	1134	5	5955	1283	0,04	100
2	3	4	97,15	99,54	95,25	1,21	768	2	1573	535	0,06	100
2	3	5	97,25	99,41	95,28	1,22	1478	5	8668	1966	2,09	100
2	3	6	97,05	99,93	95,27	1,29	526	4	1644	536	0,77	100
2	3	7	97,00	99,84	95,27	1,31	854	5	4435	1005	1,25	100
2	3	8	97,22	99,71	95,32	1,30	452	5	1308	402	0,68	100
2	3	9	96,99	99,71	94,90	1,21	1958	1	10000	2573	13,47	98
2	3	10	96,94	99,43	95,27	1,30	614	3	1902	499	4,42	100
2	3	11	97,15	99,63	95,26	1,12	1070	15	3718	929	7,69	100
2	3	12	97,17	99,99	95,25	1,29	540	2	1435	441	3,90	100
2	3	13	96,81	99,89	95,29	1,36	6	2	16	3	0,02	100
2	3	14	97,22	99,60	95,25	1,31	196	1	553	164	0,29	100
2	3	15	97,03	99,79	95,28	1,20	7	3	11	2	0,01	100
2	5	1	67,20	94,00	50,43	11,05	10000	10000	10000	0	0,07	0
2	5	2	96,42	98,97	95,24	1,04	2707	2155	3038	183	0,12	100
2	5	3	75,23	92,81	48,95	10,39	10000	10000	10000	0	0,40	0
2	5	4	96,46	98,74	95,25	0,97	2767	2051	3082	221	0,21	100
2	5	5	66,61	92,04	49,80	10,16	10000	10000	10000	0	13,84	0
2	5	6	96,44	98,43	95,25	0,84	2605	1926	3151	235	3,74	100
2	5	7	72,91	92,23	60,75	7,42	10000	10000	10000	0	14,40	0
2	5	8	96,34	98,98	95,24	0,88	2549	94	2993	459	3,79	100
2	5	9	67,89	92,50	51,31	10,59	10000	10000	10000	0	68,26	0
2	5	10	96,32	98,80	95,26	0,90	2928	1890	3290	312	20,11	100
2	5	11	73,14	88,05	57,88	9,59	10000	10000	10000	0	69,83	0
2	5	12	96,46	98,82	95,25	0,97	3091	2759	3504	194	22,10	100
2	5	13	95,79	98,60	95,24	0,68	26	10	100	16	0,06	100

Função	D	PSO	Precisão do Fitness (%)				Velocidade (iterações)				Tempo médio (s)	Confiabilidade (%)
			Média	Melhor	Pior	Desvio	Média	Melhor	Pior	Desvio		
2	5	14	96,48	99,07	95,25	1,01	916	447	1069	109	1,34	100
2	5	15	96,73	99,27	95,24	1,08	13	9	19	3	0,01	100
2	10	1	9,69	13,25	5,91	1,92	10000	10000	10000	0	0,09	0
2	10	2	95,88	97,88	95,24	0,68	4072	3687	4355	164	0,19	100
2	10	3	12,45	24,03	7,33	3,70	10000	10000	10000	0	0,41	0
2	10	4	95,97	98,75	95,24	0,75	4122	3698	4418	188	0,32	100
2	10	5	9,09	15,12	6,39	1,75	10000	10000	10000	0	14,13	0
2	10	6	95,80	98,42	95,24	0,60	4211	3839	4542	169	6,12	100
2	10	7	11,45	28,81	6,80	3,42	10000	10000	10000	0	14,47	0
2	10	8	95,73	97,06	95,25	0,44	4241	3774	4604	183	6,28	100
2	10	9	9,86	25,24	6,10	4,22	10000	10000	10000	0	69,58	0
2	10	10	95,87	96,89	95,24	0,50	4609	4281	4806	127	32,50	100
2	10	11	10,66	19,59	7,03	2,90	10000	10000	10000	0	69,30	0
2	10	12	96,22	98,03	95,32	0,75	4660	4237	4894	137	32,75	100
2	10	13	95,34	95,94	95,24	0,14	230	62	521	102	0,60	100
2	10	14	96,06	98,92	95,29	0,73	1411	1322	1470	36	2,05	100
2	10	15	96,07	98,70	95,27	0,73	37	25	45	5	0,03	100
2	30	1	0,68	0,90	0,53	0,08	10000	10000	10000	0	0,15	0
2	30	2	78,91	96,14	1,87	35,70	6838	5965	10000	1499	0,38	82
2	30	3	0,89	1,11	0,72	0,10	10000	10000	10000	0	0,48	0
2	30	4	95,45	96,65	95,24	0,25	6148	5906	6384	118	0,53	100
2	30	5	0,63	0,78	0,55	0,07	10000	10000	10000	0	14,10	0
2	30	6	95,40	96,78	95,24	0,31	6674	6327	6915	143	9,81	100
2	30	7	0,65	0,81	0,52	0,08	10000	10000	10000	0	14,24	0
2	30	8	95,43	96,33	95,25	0,23	6630	6302	6881	129	9,78	100
2	30	9	0,60	0,72	0,51	0,04	10000	10000	10000	0	68,94	0
2	30	10	95,46	95,93	95,24	0,22	6986	6776	7160	115	48,93	100
2	30	11	0,60	0,72	0,53	0,04	10000	10000	10000	0	69,64	0
2	30	12	95,55	96,51	95,24	0,32	6978	6774	7239	116	49,24	100
2	30	13	75,18	95,24	28,25	18,72	9606	2538	10000	1584	26,94	6
2	30	14	95,68	96,91	95,25	0,44	1968	1914	2001	21	2,95	100
2	30	15	95,59	96,69	95,24	0,30	202	165	240	18	0,11	100
3	2	1	97,55	99,75	95,34	1,22	38	2	212	39	0,00	100
3	2	2	97,48	99,95	95,38	1,35	22	1	88	24	0,00	100
3	2	3	97,43	99,83	95,28	1,31	32	1	184	35	0,00	100
3	2	4	97,52	99,90	95,31	1,31	31	1	109	26	0,00	100
3	2	5	97,67	99,77	95,31	1,36	40	1	182	40	0,05	100
3	2	6	97,78	99,99	95,28	1,35	32	1	150	35	0,05	100
3	2	7	97,79	99,86	95,34	1,29	34	2	166	39	0,05	100
3	2	8	97,41	99,55	95,39	1,25	37	1	151	37	0,06	100
3	2	9	97,50	99,92	95,48	1,25	36	1	127	28	0,25	100
3	2	10	97,60	99,92	95,30	1,31	36	1	188	35	0,25	100
3	2	11	97,89	99,99	95,26	1,52	27	2	115	24	0,19	100
3	2	12	97,63	99,73	95,26	1,33	31	4	101	23	0,21	100
3	2	13	97,50	99,98	95,41	1,43	7	1	18	4	0,02	100
3	2	14	97,68	99,93	95,30	1,36	24	1	84	21	0,04	100
3	2	15	97,22	99,92	95,26	1,41	15	2	53	13	0,01	100
3	3	1	95,78	99,52	81,06	2,97	5087	403	10000	3556	0,19	76
3	3	2	96,53	98,89	81,70	2,38	2047	242	10000	1438	0,14	98
3	3	3	96,21	99,84	91,93	2,01	5631	405	10000	3538	0,38	74
3	3	4	96,80	99,36	95,33	1,08	1938	368	4661	789	0,20	100
3	3	5	94,87	99,09	87,33	2,66	7330	237	10000	3130	10,43	64
3	3	6	96,85	99,64	95,26	1,21	1999	290	3219	600	2,90	100
3	3	7	95,78	99,96	87,23	2,52	5587	85	10000	3612	8,15	78
3	3	8	96,84	99,60	95,24	1,32	1965	491	3528	779	2,93	100
3	3	9	96,32	99,91	85,16	2,86	5622	477	10000	3576	39,49	88
3	3	10	97,24	99,35	95,26	1,33	2344	704	4047	836	16,37	100
3	3	11	95,84	99,45	89,51	2,39	6672	1274	10000	3389	46,32	68
3	3	12	97,06	99,67	95,34	1,27	2359	14	3715	792	16,72	100

Função	D	PSO	Precisão do Fitness (%)				Velocidade (iterações)				Tempo médio (s)	Confiabilidade (%)
			Média	Melhor	Pior	Desvio	Média	Melhor	Pior	Desvio		
3	3	13	94,64	99,37	27,05	9,80	249	9	10000	1408	0,62	98
3	3	14	96,96	99,93	95,26	1,27	949	175	1559	316	1,40	100
3	3	15	96,19	99,36	95,24	1,23	203	9	493	143	0,08	100
3	5	1	18,18	49,02	8,55	9,72	10000	10000	10000	0	0,39	0
3	5	2	95,28	96,10	95,24	0,15	7199	3871	8683	971	0,54	100
3	5	3	16,57	34,76	10,10	5,49	10000	10000	10000	0	0,68	0
3	5	4	94,75	98,34	80,99	2,87	7486	4236	10000	1231	0,81	94
3	5	5	16,42	35,07	8,95	5,61	10000	10000	10000	0	14,26	0
3	5	6	93,97	96,00	80,99	3,41	8726	3551	10000	1884	12,76	66
3	5	7	20,36	58,82	9,54	9,05	10000	10000	10000	0	14,72	0
3	5	8	94,09	96,42	84,69	2,15	8949	3673	10000	1997	13,66	54
3	5	9	16,47	38,27	7,85	7,77	10000	10000	10000	0	69,14	0
3	5	10	94,55	95,67	80,99	2,92	8505	4258	10000	1126	59,34	92
3	5	11	17,86	55,11	10,54	9,56	10000	10000	10000	0	69,17	0
3	5	12	95,02	96,94	83,91	1,66	8620	4826	10000	972	60,78	94
3	5	13	90,94	97,13	17,72	18,47	951	21	10000	2352	2,37	94
3	5	14	72,37	93,51	67,28	4,64	10000	10000	10000	0	14,89	0
3	5	15	92,29	96,23	20,28	14,85	2050	25	10000	1756	0,90	96
3	10	1	0,73	1,74	0,47	0,25	10000	10000	10000	0	0,41	0
3	10	2	43,71	95,26	12,67	23,02	9974	8721	10000	181	0,78	2
3	10	3	0,82	1,82	0,45	0,34	10000	10000	10000	0	0,70	0
3	10	4	47,08	96,08	19,13	24,83	9812	5239	10000	933	1,10	4
3	10	5	0,71	1,44	0,46	0,20	10000	10000	10000	0	14,16	0
3	10	6	71,16	95,31	24,91	20,48	9913	5662	10000	613	14,72	2
3	10	7	0,71	1,19	0,49	0,16	10000	10000	10000	0	14,68	0
3	10	8	70,92	95,50	28,17	21,21	9743	6360	10000	844	14,84	10
3	10	9	0,70	1,16	0,49	0,19	10000	10000	10000	0	69,03	0
3	10	10	53,58	80,94	35,02	17,41	10000	10000	10000	0	69,50	0
3	10	11	0,77	1,48	0,48	0,25	10000	10000	10000	0	69,61	0
3	10	12	46,60	95,24	19,99	15,62	9995	9726	10000	39	69,54	2
3	10	13	29,09	95,33	9,43	23,92	9228	165	10000	2644	25,74	8
3	10	14	15,92	17,66	14,76	0,70	10000	10000	10000	0	15,10	0
3	10	15	77,20	95,28	20,03	32,44	5690	800	10000	2742	2,30	76
3	30	1	0,02	0,03	0,01	0,00	10000	10000	10000	0	0,48	0
3	30	2	5,90	95,25	0,05	16,86	9972	8581	10000	201	0,85	2
3	30	3	0,03	0,07	0,02	0,01	10000	10000	10000	0	0,78	0
3	30	4	9,72	92,15	0,12	21,60	10000	10000	10000	0	1,20	0
3	30	5	0,02	0,03	0,01	0,00	10000	10000	10000	0	14,58	0
3	30	6	15,56	80,94	1,21	24,94	10000	10000	10000	0	15,09	0
3	30	7	0,02	0,02	0,01	0,00	10000	10000	10000	0	14,88	0
3	30	8	25,95	80,94	0,75	31,39	10000	10000	10000	0	15,31	0
3	30	9	0,02	0,02	0,02	0,00	10000	10000	10000	0	69,93	0
3	30	10	4,58	19,15	1,22	6,40	10000	10000	10000	0	70,20	0
3	30	11	0,02	0,02	0,01	0,00	10000	10000	10000	0	70,12	0
3	30	12	10,14	80,86	1,21	24,90	10000	10000	10000	0	70,33	0
3	30	13	4,36	80,20	0,95	10,96	10000	10000	10000	0	26,54	0
3	30	14	3,69	4,07	3,55	0,09	10000	10000	10000	0	15,20	0
3	30	15	18,63	95,32	1,06	27,86	9799	6309	10000	807	3,57	6
4	2	1	94,48	99,91	89,23	2,43	7379	324	10000	3170	0,31	52
4	2	2	96,80	99,26	95,34	1,06	1795	3	2723	693	0,13	100
4	2	3	95,61	99,16	91,95	1,71	7043	168	10000	3404	0,51	64
4	2	4	96,85	99,43	95,33	1,02	1790	11	3151	723	0,19	100
4	2	5	94,41	99,23	88,23	2,53	7513	453	10000	3363	10,66	42
4	2	6	96,51	99,95	95,24	1,11	1841	78	2613	592	2,70	100
4	2	7	95,39	99,92	91,73	1,94	5920	7	10000	3889	8,69	66
4	2	8	96,81	99,10	95,29	1,18	1706	12	2716	711	2,55	100
4	2	9	94,49	99,26	87,82	2,61	8162	144	10000	2975	10,98	46
4	2	10	96,74	99,61	95,25	1,11	2040	54	2890	688	2,46	100
4	2	11	95,07	98,81	90,27	2,19	6960	56	10000	3583	7,98	56

Função	D	PSO	Precisão do Fitness (%)				Velocidade (iterações)				Tempo médio (s)	Confiabilidade (%)
			Média	Melhor	Pior	Desvio	Média	Melhor	Pior	Desvio		
4	2	12	96,94	99,23	95,24	1,12	1953	28	3104	687	2,28	100
4	2	13	96,48	99,18	91,85	1,26	228	4	10000	1410	0,08	98
4	2	14	96,93	99,19	95,26	1,17	691	59	1024	221	0,29	100
4	2	15	96,72	99,11	95,27	1,04	18	7	45	9	0,01	100
4	3	1	68,10	90,17	54,40	8,73	10000	10000	10000	0	0,43	0
4	3	2	96,21	98,89	95,24	0,89	3486	2857	4213	322	0,25	100
4	3	3	71,39	85,58	57,56	7,18	10000	10000	10000	0	0,73	0
4	3	4	96,36	99,48	95,27	0,94	3703	2481	4345	375	0,41	100
4	3	5	67,21	84,71	51,66	6,78	10000	10000	10000	0	14,25	0
4	3	6	96,25	98,67	95,25	1,00	3211	2599	3963	303	4,70	100
4	3	7	71,50	88,84	57,51	7,61	10000	10000	10000	0	14,48	0
4	3	8	96,39	99,28	95,24	1,00	3424	2692	4219	327	5,12	100
4	3	9	64,55	75,21	52,86	6,98	10000	10000	10000	0	69,21	0
4	3	10	96,55	98,44	95,24	1,30	3813	3131	4236	302	26,32	100
4	3	11	68,86	78,47	60,50	5,62	10000	10000	10000	0	68,64	0
4	3	12	96,46	98,73	95,28	1,00	4124	2660	4774	421	29,06	100
4	3	13	88,76	97,80	53,62	8,77	6834	18	10000	4663	12,14	36
4	3	14	96,21	98,91	95,25	0,93	1391	928	1681	144	2,03	100
4	3	15	96,30	98,30	95,26	0,83	52	18	179	32	0,03	100
4	5	1	26,75	43,75	16,32	6,38	10000	10000	10000	0	0,45	0
4	5	2	95,96	98,35	95,24	0,78	5172	3860	8307	722	0,36	100
4	5	3	33,11	49,80	21,40	5,74	10000	10000	10000	0	0,67	0
4	5	4	95,82	97,66	95,24	0,67	5298	3908	8223	740	0,49	100
4	5	5	28,46	56,25	18,79	7,22	10000	10000	10000	0	6,58	0
4	5	6	95,64	97,36	95,24	0,49	5357	4202	7100	730	6,86	100
4	5	7	31,54	45,10	22,67	5,61	10000	10000	10000	0	14,53	0
4	5	8	95,65	97,31	95,24	0,44	5323	3637	6868	603	7,94	100
4	5	9	27,33	34,86	19,01	5,80	10000	10000	10000	0	68,53	0
4	5	10	95,69	96,80	95,38	0,41	5515	4533	6653	627	38,06	100
4	5	11	32,46	38,15	25,53	3,74	10000	10000	10000	0	68,71	0
4	5	12	95,81	97,41	95,24	0,53	5804	4685	8557	621	40,73	100
4	5	13	63,83	93,98	37,47	13,74	10000	10000	10000	0	18,95	0
4	5	14	96,03	97,80	95,24	0,67	2650	1590	4582	514	4,00	100
4	5	15	95,67	98,88	93,33	1,01	1307	49	10000	2955	0,25	90
4	10	1	2,94	4,75	2,00	0,72	10000	10000	10000	0	0,51	0
4	10	2	94,04	96,16	89,05	1,75	8623	5226	10000	1823	0,71	42
4	10	3	3,95	9,88	2,34	1,41	10000	10000	10000	0	0,81	0
4	10	4	93,78	96,22	84,96	2,03	9111	5130	10000	1492	1,08	36
4	10	5	3,21	10,33	2,10	1,41	10000	10000	10000	0	14,43	0
4	10	6	95,00	97,10	91,24	1,13	7757	5147	10000	1740	11,54	74
4	10	7	3,68	8,28	2,16	1,36	10000	10000	10000	0	14,83	0
4	10	8	94,88	96,60	91,65	0,98	7769	5234	10000	1877	11,86	64
4	10	9	2,84	4,18	2,16	0,77	10000	10000	10000	0	69,69	0
4	10	10	95,00	96,59	92,92	1,11	8071	5875	10000	1791	56,20	70
4	10	11	3,72	5,43	2,59	1,00	10000	10000	10000	0	69,82	0
4	10	12	94,73	97,75	90,64	1,50	8622	5715	10000	1598	62,33	68
4	10	13	36,09	72,11	13,75	13,25	10000	10000	10000	0	22,66	0
4	10	14	95,55	96,87	93,02	0,67	3832	2065	10000	2286	5,73	92
4	10	15	93,00	97,09	86,21	2,71	7580	97	10000	4033	1,40	32
4	30	1	0,20	0,38	0,15	0,04	10000	10000	10000	0	0,71	0
4	30	2	74,56	96,26	1,09	39,42	7961	6696	10000	1482	0,85	68
4	30	3	0,29	0,37	0,23	0,04	10000	10000	10000	0	1,03	0
4	30	4	93,38	96,68	1,09	13,34	7239	6726	10000	936	1,02	90
4	30	5	0,23	0,34	0,17	0,03	10000	10000	10000	0	14,69	0
4	30	6	95,34	96,11	95,24	0,15	7670	7382	8026	125	11,62	100
4	30	7	0,22	0,37	0,17	0,05	10000	10000	10000	0	14,96	0
4	30	8	95,37	96,09	95,24	0,17	7725	7395	8746	220	11,75	100
4	30	9	0,18	0,20	0,16	0,01	10000	10000	10000	0	70,40	0
4	30	10	95,33	95,49	95,24	0,08	7908	7635	8153	163	56,03	100

Função	D	PSO	Precisão do Fitness (%)				Velocidade (iterações)				Tempo médio (s)	Confiabilidade (%)
			Média	Melhor	Pior	Desvio	Média	Melhor	Pior	Desvio		
4	30	11	0,17	0,21	0,15	0,02	10000	10000	10000	0	70,99	0
4	30	12	95,44	96,46	95,25	0,21	7868	7599	8197	131	56,52	100
4	30	13	30,87	47,73	10,07	9,89	10000	10000	10000	0	28,89	0
4	30	14	95,48	96,38	95,24	0,24	2365	2254	2624	64	3,66	100
4	30	15	95,51	96,65	95,09	0,31	577	308	10000	1360	0,24	100
5	2	1	74,51	97,26	44,26	13,76	9593	2242	10000	1485	0,44	8
5	2	2	96,79	99,87	95,34	1,14	2464	1738	2932	239	0,20	100
5	2	3	80,56	96,81	58,94	11,40	9531	35	10000	1928	0,75	6
5	2	4	96,79	99,85	95,33	1,06	2471	1058	3280	441	0,28	100
5	2	5	73,36	97,80	48,43	12,27	9994	9675	10000	46	13,52	2
5	2	6	96,80	99,83	95,25	1,20	2370	879	2839	355	3,44	100
5	2	7	79,81	98,41	57,54	9,29	9896	7294	10000	517	14,41	4
5	2	8	96,76	99,50	95,28	1,26	2476	845	2970	361	3,67	100
5	2	9	69,29	98,58	41,52	15,05	9550	1078	10000	1826	61,72	6
5	2	10	97,16	99,66	95,28	1,17	2397	741	2882	377	16,80	100
5	2	11	77,38	98,16	49,29	12,37	9728	1503	10000	1389	69,01	4
5	2	12	96,86	99,53	95,27	1,21	2632	1733	3115	345	18,76	100
5	2	13	96,84	99,04	95,36	1,09	22	8	58	9	0,04	100
5	2	14	96,77	98,98	95,26	1,05	942	686	1079	93	1,41	100
5	2	15	96,89	99,43	95,24	1,18	13	6	17	2	0,01	100
5	3	1	25,86	40,64	18,06	5,04	10000	10000	10000	0	0,46	0
5	3	2	96,73	99,30	95,28	1,16	3112	2715	3380	169	0,26	100
5	3	3	30,63	61,07	20,65	8,61	10000	10000	10000	0	0,80	0
5	3	4	96,30	99,00	95,24	0,85	3180	2443	3602	236	0,37	100
5	3	5	26,01	49,05	18,04	5,77	10000	10000	10000	0	13,30	0
5	3	6	96,41	99,00	95,24	1,03	3148	2717	3461	189	4,38	100
5	3	7	28,85	48,40	21,86	6,60	10000	10000	10000	0	13,04	0
5	3	8	96,32	98,91	95,26	0,98	3188	2369	3761	317	4,67	100
5	3	9	24,51	30,23	21,79	3,06	10000	10000	10000	0	70,32	0
5	3	10	96,41	98,63	95,46	1,05	3354	2604	3648	290	23,19	100
5	3	11	25,83	33,99	20,82	4,00	10000	10000	10000	0	68,81	0
5	3	12	96,43	99,35	95,25	1,02	3480	2894	3879	177	23,24	100
5	3	13	69,17	97,65	21,86	33,51	4029	22	10000	4924	6,86	60
5	3	14	96,54	99,09	95,33	0,97	1234	1110	1329	52	1,86	100
5	3	15	96,64	99,11	95,28	1,04	20	13	28	3	0,02	100
5	5	1	11,36	20,60	8,14	2,08	10000	10000	10000	0	0,46	0
5	5	2	95,96	98,01	95,24	0,72	3810	3400	4074	149	0,32	100
5	5	3	12,47	19,72	9,25	2,01	10000	10000	10000	0	0,78	0
5	5	4	95,93	97,79	95,26	0,64	3889	3555	4174	151	0,45	100
5	5	5	11,61	22,25	8,76	2,37	10000	10000	10000	0	14,50	0
5	5	6	95,92	98,26	95,24	0,64	4032	3800	4370	132	5,08	100
5	5	7	12,20	19,68	9,62	2,02	10000	10000	10000	0	14,63	0
5	5	8	95,77	97,02	95,24	0,51	4078	3683	4665	188	6,14	100
5	5	9	13,08	18,41	9,15	2,77	10000	10000	10000	0	68,45	0
5	5	10	95,99	96,97	95,25	0,62	4278	4131	4421	86	31,04	100
5	5	11	10,74	12,08	9,65	0,73	10000	10000	10000	0	72,77	0
5	5	12	96,02	97,66	95,24	0,67	4330	4099	4629	118	30,82	100
5	5	13	30,79	95,88	8,27	25,56	8813	56	10000	3248	15,45	12
5	5	14	96,13	98,00	95,24	0,65	1507	1371	1584	43	2,29	100
5	5	15	96,23	97,79	95,30	0,71	36	29	49	4	0,03	100
5	10	1	5,92	7,06	5,48	0,36	10000	10000	10000	0	0,50	0
5	10	2	95,68	96,83	95,24	0,40	4896	4728	5188	108	0,43	100
5	10	3	6,24	7,30	5,68	0,35	10000	10000	10000	0	0,82	0
5	10	4	95,61	96,80	95,25	0,35	4905	4651	5067	98	0,59	100
5	10	5	5,97	7,60	5,42	0,47	10000	10000	10000	0	14,52	0
5	10	6	95,49	96,93	95,24	0,34	5237	4982	5531	123	7,84	100
5	10	7	6,08	7,26	5,39	0,36	10000	10000	10000	0	14,95	0
5	10	8	95,58	96,43	95,24	0,33	5230	4913	5415	115	8,03	100
5	10	9	5,79	6,06	5,48	0,17	10000	10000	10000	0	68,93	0

Função	D	PSO	Precisão do Fitness (%)				Velocidade (iterações)				Tempo médio (s)	Confiabilidade (%)
			Média	Melhor	Pior	Desvio	Média	Melhor	Pior	Desvio		
5	10	10	95,71	96,36	95,25	0,39	5519	5287	5650	108	38,63	100
5	10	11	6,05	6,74	5,49	0,35	10000	10000	10000	0	69,34	0
5	10	12	95,59	96,15	95,25	0,36	5513	5274	5630	106	38,41	100
5	10	13	11,42	24,83	8,12	3,11	10000	10000	10000	0	16,85	0
5	10	14	95,70	97,48	95,25	0,42	1829	1774	1875	22	2,76	100
5	10	15	93,74	97,14	46,40	9,77	479	70	10000	1963	0,14	96
5	30	1	4,65	4,75	4,58	0,04	10000	10000	10000	0	0,67	0
5	30	2	84,75	96,14	5,67	29,23	7362	6770	10000	997	0,79	88
5	30	3	4,78	5,01	4,67	0,07	10000	10000	10000	0	1,01	0
5	30	4	91,82	95,71	6,58	17,58	7068	6711	10000	618	0,99	96
5	30	5	4,66	4,80	4,60	0,04	10000	10000	10000	0	14,48	0
5	30	6	94,41	96,46	46,39	6,93	8079	7648	10000	369	12,06	98
5	30	7	4,66	4,92	4,59	0,05	10000	10000	10000	0	14,89	0
5	30	8	95,36	95,83	95,24	0,16	8245	7798	9820	336	12,76	100
5	30	9	4,62	4,68	4,59	0,02	10000	10000	10000	0	68,80	0
5	30	10	95,32	95,51	95,24	0,09	7805	7627	8020	152	54,12	100
5	30	11	4,62	4,65	4,59	0,02	10000	10000	10000	0	69,25	0
5	30	12	95,32	95,42	95,25	0,06	7886	7746	8005	81	54,88	100
5	30	13	7,68	10,35	6,18	1,02	10000	10000	10000	0	17,79	0
5	30	14	95,43	96,15	95,24	0,19	2317	2270	2374	19	3,58	100
5	30	15	81,58	96,10	26,23	25,20	2700	300	10000	4144	0,75	76