

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
COORDENAÇÃO DE ENGENHARIA
ENGENHARIA MECÂNICA

RICARDO LEITE MARTINS BAZARIN

APLICAÇÃO DO MÉTODO DE LATTICE BOLTZMANN PARA
ESCOAMENTO VISCOSO EXTERNO EM TORNO DE UM
AEROFÓLIO BIDIMENSIONAL

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

GUARAPUAVA

2015

RICARDO LEITE MARTINS BAZARIN

**APLICAÇÃO DO MÉTODO DE LATTICE BOLTZMANN PARA
ESCOAMENTO VISCOSO EXTERNO EM TORNO DE UM
AEROFÓLIO BIDIMENSIONAL**

Trabalho de Conclusão de Curso 2 apresentado como requisito parcial à obtenção do título de Bacharel em Engenharia Mecânica, da Coordenação de Engenharia Mecânica, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Christian Naaktgeboren
Coorientadora: Prof. Dra. Raquel da Cunha Ribeiro da Silva

GUARAPUAVA

2015

TERMO DE APROVAÇÃO

RICARDO LEITE MARTINS BAZARIN

Trabalho de conclusão de curso aprovado como requisito parcial à obtenção do título de Engenheiro Mecânico, pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, Câmpus Guarapuava.

Membros da Banca:

Prof. Dr. Christian Naaktgeboren
Membro da Banca

Prof. Dra. Raquel da Cunha
Membro da Banca

Prof. Dr. Antonio Carlos Amaro de Faria Junior
Membro da Banca

Prof. Luciano Zart Olanyk
Coordenador do Curso de Engenharia Mecânica

Local da defesa	
Hora da defesa	
Data da defesa	26 de junho de 2015

RICARDO LEITE MARTINS BAZARIN

RESUMO

BAZARIN, Ricardo Leite Martins Bazarin. Aplicação do método de lattice Boltzmann para escoamento viscoso externo em torno de um aerofólio bidimensional. 2015. 64 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Curso de Engenharia Mecânica. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Guarapuava, 2015.

No presente trabalho, o método de lattice Boltzmann é aplicado para o estudo do escoamento viscoso externo em torno de um aerofólio bidimensional com o propósito de convalidar dados da literatura. Para isto, o escoamento em torno do aerofólio é simulado considerando um perfil NACA 0012 para $Re = 500$ (número de Reynolds), $Ma = 0,17$ (número de Mach) e $\alpha = 0^\circ$ (ângulo de ataque). Neste caso são analisados os parâmetros de coeficiente de arrasto (C_d), coeficiente de sustentação (C_l), coeficiente de pressão (C_p) e perfis de velocidade. A validação do método e do código numérico para representação de um problema de dinâmica dos fluidos é feita através da verificação do problema de *lid driven cavity flow*, considerado um *bechmarck*. Por fim, os resultados obtidos para o escoamento viscoso externo em torno do aerofólio demonstraram boa concordância com os resultados de Lockard *et al.*, (2014), considerando as limitações do presente trabalho.

Palavras-chave: Método de Lattice Boltzmann. Aerofólio. Bidimensional.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1– Linha de corrente sobre um perfil de aerofólio.....	12
Figura 2– Retículos unidimensionais D1Q2, D1Q3 e D1Q5.....	22
Figura 3– Retículos bidimensionais D2Q4, D2Q5 e D2Q9.....	23
Figura 4– Retículos tridimensionais D3Q15 e D3Q19	23
Figura 5– Bounce-back esquema para cada fronteira	24
Figura 6– Relação da direção de velocidades do modelo D2Q9.....	24
Figura 7– Estrutura de programação	30
Figura 8– Interação superfície fluido	31
Figura 9– Geometria do <i>lid driven cavity flow</i>	32
Figura 10– Linhas de corrente do perfil de velocidade do <i>lid driven cavity flow</i>	34
Figura 11– Linhas de corrente do perfil de velocidade do <i>lid driven cavity flow em escala real</i>	34
Figura 12– Gráficos de posicionamento do vórtice central no eixo x e y.....	35
Figura 13– Gráficos de posicionamento do vórtice inferior direito no eixo x e y.....	35
Figura 14– Gráficos de posicionamento do vórtice inferior esquerdo no eixo x e y.....	36
Figura 15– Perfil aerofólio NACA 0012.....	38
Figura 16– Perfil aerofólio NACA 0012 de aplicação.....	41
Figura 17– Campo de Velocidades	42
Figura 18– Coeficiente de pressão pela superfície do aerofólio	43
Figura 19– Coeficiente de pressão pela superfície do aerofólio	43
Figura 20– Perfis de velocidade horizontal nos setores do aerofólio $x/c=0.0$ e $x/c=0.25$	44
Figura 22– Perfis de velocidade horizontal nos setores do aerofólio $x/c=0.5$, $x/c=0.75$ e $x/c=1.0$	45
Figura 23– Perfis de velocidade vertical nos setores do aerofólio $x/c=0.0$, $x/c=0.25$ e $x/c=0.5$	46
Figura 25– Perfis de velocidade vertical nos setores do aerofólio $x/c=0.75$ e $x/c=1.0$	47

LISTA DE TABELAS

Tabela 1– Comparação entre resultados do <i>lid driven cavity flow</i>	36
Tabela 2– Erro percentual em comparação com os resultados da tabela 1.....	37
Tabela 3– Casos analisados.....	38
Tabela 4– Compação dos resultados de <i>Cd</i> e <i>Cl</i>	42
Tabela 5– Modelos Unidimensionais.....	53
Tabela 6– Modelos Bidimensionais.....	53
Tabela 7– Modelos Tridimensionais.....	54

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	9
1.1	MÉTODO DE LATTICE BOLTZMANN.....	10
1.2	ESCOAMENTO VISCOSO EXTERNO ENTORNO DE AEROFÓLIO.....	12
1.3	PERFIS DE AEROFÓLIO NA CA.....	13
1.4	PROBLEMA.....	13
1.5	JUSTIFICATIVA.....	14
1.6	OBJETIVOS.....	15
1.6.1	OBJETIVO GERAL.....	15
1.6.2	OBJETIVOS ESPECÍFICOS.....	15
2	PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS.....	16
3	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....	17
3.1	EQUAÇÃO DO TRANSPORTE DE BOLTZMANN.....	17
3.2	MODELO DE COLISÃO BGK.....	19
3.3	DISCRETIZAÇÃO.....	19
3.4	FUNÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO DE EQUILÍBRIO.....	20
3.5	VARIÁVEIS MACROSCÓPICAS.....	21
3.6	MODELOS DE RETÍCULOS.....	22
3.7	CONDIÇÃO DE CONTORNO BOUNCE-BACK.....	23
3.8	CONDIÇÃO DE CONTORNO PARA CAMADA ABERTA.....	27
3.9	FREQUÊNCIA DE COLISÃO E VISCOSIDADE DO FLUÍDO.....	28
3.10	MUDANÇA DE ESCALA E NÚMERO DE MACH.....	28
3.11	ESTRUTURAÇÃO DO CÓDIGO DE PROGRAMAÇÃO.....	29
3.12	MÉTODO DE MOMENTUM-EXCHANGE.....	30
4	VALIDAÇÃO DO MÉTODO.....	32
4.1	LIDDRIVEN CAVITY FLOW.....	32
4.2	RESOLUÇÃO.....	33
4.3	RESULTADOS.....	33
5	RESULTADOS E DISCUSSÕES.....	38

5.1	CASOS ANALISADOS.....	38
5.2	RESOLUÇÃO.....	39
5.3	RESULTADOS E DISCUSSÕES.....	41
6	CONCLUSÃO.....	48
	REFERÊNCIAS.....	50
	APÊNDICE A – VALORES DE WIECI PARA DIFERENTES MODELOS DE RETÍCULOS.....	53
	APÊNDICE B – CÓDIGOS UTILIZADOS NO PRESENTE TRABALHO	56

1 INTRODUÇÃO

Problemas de fenômenos de transporte podem ser abordados experimentalmente, analiticamente ou por métodos numéricos. A resolução analítica de problemas de fenômenos de transporte é em geral de grande dificuldade devido a não linearidade das equações, condições de contorno complexas e geometrias complexas presente na maioria dos casos de engenharia. Portanto a utilização de métodos numéricos, que convertem as equações diferenciais governantes do problema em um sistema de equações algébricas, como por exemplo o método das diferenças finitas e o método dos volumes finitos, são muito utilizados atualmente para obter resultados aproximados para tais fenômenos. Esta utilização dos métodos numéricos para resolução de fenômenos de transporte aliados a utilização de recursos computacionais resulta na Dinâmica dos Fluidos Computacional (DFC) (MOHAMAD, 2011).

A utilização de métodos numéricos, como o método das diferenças finitas e o método dos volumes finitos, possuem abordagens eulerianas, que baseiam-se em volumes de controle e necessitam da discretização das equações governantes macroscópicas, em uma malha espacial para a análise das variáveis de interesse, este requisito agrega uma etapa de pré-processamento de natureza geométrica de muitos graus de liberdade ao procedimento de DFC.

No caso de fenômenos complexos como os de fronteiras móveis, de escoamento multifásicos, de solidificação e de fusão, os métodos Eulerianos necessitam de incorporar algoritmos de rastreamento de interfaces que acabam deixando os códigos ainda mais complexos (MOHAMAD, 2011). Métodos Eulerianos destinados a DFC possuem problemas inerentes à necessidade da utilização de malhas, exemplo de difusão numérica – portanto empírica – sempre que a direção da convecção difere da orientação local da malha em presença de cisalhamento (MALISKA, 2004).

1.1 MÉTODO DE LATTICE BOLTZMANN

Nos últimos anos o Método de Lattice Boltzmann (MLB) tornou-se uma ferramenta numérica muito utilizada para solucionar problemas de DFC em diversos ambientes (YU *et al.*, 2003). A rápida difusão deste método deve-se ao tipo de abordagem lagrangeana, que possui fácil capacidade de abordar escoamentos com diferentes fases, geometrias complexas como escoamento em meios porosos e entorno de aerofólios (MOHAMAD, 2011). Por ser um método novo, o MLB encontra-se ainda em fase de desenvolvimento e ganha experiência para casos como escoamentos com alto número de Reynolds, mas ainda mostra-se um método com grande potencial (LOCKARD *et al.*, 2000).

O MLB foi desenvolvido como um esquema alternativo para modelagens e resolução de fenômenos físicos, simulando escoamento de fluidos e modelagem física em fluidos (CHEN; DOOLEN, 1998). Esta modelagem alternativa do MLB possui algumas vantagens na aplicação em relação aos métodos tradicionais empregados em DFC a exemplo da formação das malhas ser um processo automatizável, não havendo a necessidade de um grande refinamento em certos pontos para obtenção de resultados precisos. O modelo de turbulência *Very Large Eddy Simulation* é considerado um estado da arte, capaz de capturar a natureza transiente do escoamento, simulando camadas limites turbulentas para altos números de Reynolds.

Além disto, o método possui dinâmica local, permitindo níveis elevados de paralelização, e consequentemente melhor aproveitamento dos recursos computacionais e diminuição do tempo de processamento (EXA, 2014). Numa comparação do MLB (método lagrangeano) com esquemas de Navier-Stokes de alta ordem (método euleriano) para computação aeroacústica, Marié, Ricot e Sagaut (2009, p. 1069) concluíram que o MLB possui uma maior velocidade de solução do problema para uma dispersão definida dos resultados.

A equação de Boltzmann surge da teoria cinética de partículas, na qual a dinâmica molecular é descrita em grande detalhe neste nível de abordagem microscópico. Aplicando um tratamento estatístico à descrição microscópica leva (à equação de Boltzmann) ao nível de abordagem microscópico (MOHAMAD, 2011). O MLB surge da discretização da equação de Boltzmann em um retículo (lattice) espacial regular e em um número finito de velocidades microscópicas.

Um dado esquema de discretização leva a um método de LB, as equações são comumente referidas por $D\mathbf{x}Q_i$, onde $\mathbf{x}$ é dimensionalidade espacial do problema e i , o número de velocidades microscópicas (CHIKATAMARLA; KARLIN, 2009). Exemplos de métodos de Lattice Boltzmann em 1, 2 e 3 dimensões espaciais incluem: D1Q2 e D1Q3 em uma dimensões, D2Q9 e D2Q9 em duas dimensões e D3Q15 e D3Q19 em três dimensões (MOHAMAD, 2011).

A Equação 1.1 apresenta a equação do transporte, rearranjando a derivação da Equação 1.1 obtem-se Equação 1.2, e a aproximação de BGK (Bhatnagar, Gross e Krook) (Equação 1.3), são as ferramenta de trabalho do MLB (SUKOP; THORN JR, 2007),

$$\frac{df}{dt} = \Omega(f) \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \cdot \nabla f = \Omega(f) \quad (1.2)$$

$$\Omega(f) = \omega(f^{eq} - f) = \frac{1}{\tau} (f^{eq} - f) \quad (1.3)$$

onde f é a função de distribuição de probabilidade de partículas em um espaço de fases, Ω é o operador de colisão, ω é a frequência de colisões e f^{eq} é função distribuição de equilíbrio.

1.2 ESCOAMENTO VISCOSO EXTERNO ENTORNO DE AEROFÓLIO

Escoamentos externos ocorrem através de corpos imersos em fluidos sem fronteiras e escoamentos viscosos quando se considera a tensão de cisalhamento exercida pela viscosidade do fluido em contato com o corpo imerso. Existem diversos casos em que ocorrem escoamentos externos viscosos entorno de corpos imersos, como por exemplo, escoamento entorno de automóveis, aerofólios e aviões (FOX; MCDONALD; PRITCHARD, 2006).

Em um escoamento externo entorno de um aerofólio ocorrem diversos fenômenos, tais como, a separação do escoamento que ocorre na borda de ataque do aerofólio pelo ponto de estagnação, o fluido adquire velocidade zero nos ponto de contato com o aerofólio de acordo com a condição de não-deslizamento, devido a separação do escoamento, formação de esteiras e viscosidade do fluido, coeficientes de pressão em pontos da asa, forças são exercidas no corpo e quando decompostas em duas dimensões tem se força de arrasto e de sustentação (FOX *et al*, 2006).

A aplicação do método numérico busca representar tais fenômenos, que ocorrem em escoamento externo entorno de um corpo, aproximadamente de maneira que nos possibilite coletar dados próximos aos do processo real. Na Figura 2 tem-se uma imagem de uma simulação numérica de um escoamento entorno de aerofólio.

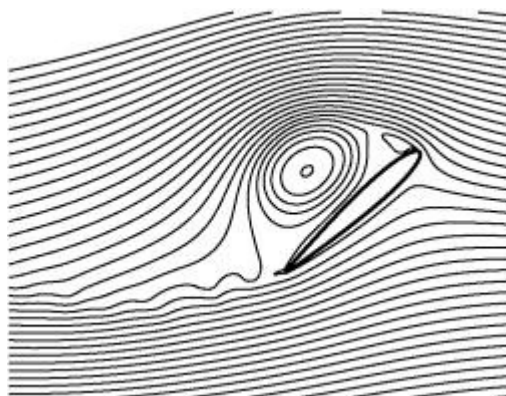


Figura 1– Linha de corrente sobre um perfil de aerofólio

Fonte: Akbari, Price (2003, p.862)

1.3 PERFIS DE AEROFÓLIO NACA

Os perfis de aerofólio NACA são perfis desenvolvidos empiricamente pela *National Advisory Committee for Aeronautics* (NACA), existem diferentes tipos de aerofólios NACA, sendo eles classificados por número de dígitos e por simetria ou não simetria, como por exemplo o aerofólio NACA 0012 um aerofólio de 4 dígitos e simétrico e o aerofólio NACA 2412 um aerofólio também de 4 dígitos mas não simétrico (ANDERSON, 1998).

A equação para parametrização de um aerofólio NACA 4 dígitos simétrico é,

$$y = c \left(5t \left(0,2969 \left(\frac{x}{c} \right)^{0,5} - 0,126 \left(\frac{x}{c} \right) - 0,3516 \left(\frac{x}{c} \right)^2 + 0,2843 \left(\frac{x}{c} \right)^3 - 0,1015 \left(\frac{x}{c} \right)^4 \right) \right) \quad (1.4)$$

onde c é uma linha que divida o aerofólio em espessuras iguais, c é mais conhecido corda do aerofólio, no caso de um aerofólio simétrico a corda é igual ao comprimento do perfil, t é a espessura máxima em porcentagem e x e y são os pontos nas referentes as coordenadas (ABOOT; DOENHOFF, 1959).

1.4 PROBLEMA

Atualmente a utilização de métodos que sejam de rápido processamento e eficazes na resolução de problemas de DFC, vem sendo os responsáveis pelo desenvolvimento das áreas de mobilidade. Este trabalho propõe a aplicação do Método de

Lattice Boltzmann para modelar um escoamento viscoso externo em um perfil de aerofólio bidimensional utilizando um esquema D2Q9.

1.5 JUSTIFICATIVA

Atualmente a necessidade de projetos com um alto nível de precisão vem aumentando e consequentemente transformando o mundo da engenharia. Como uma resolução analítica não se pode aplicar em alguns problemas de engenharia, alguns métodos numéricos são utilizados para se obter resultados suficientemente precisos (MOHAMAD, 2011).

A resolução de problemas de DFC é de alta complexidade quando utilizado métodos numéricos, como elementos finitos e volumes finitos, que são os métodos utilizados na maior parte das indústrias aeronáuticas. Um novo método com abordagem lagrangiana, o Método de Lattice Boltzmann, vem crescendo e ganhando força na resolução de problemas de DFC, por facilitar a implementação em linguagens de códigos e ter um bom aproveitamento dos recursos computacionais (LOCKARD *et al*, 2000). Assim o Método de Lattice Boltzmann pode facilitar os estudos na área de escoamentos aeronáuticos, como por exemplo, escoamentos entorno de aerofólios, que é de grande importância para determinar as características de sustentação e arrasto de veículos, como aviões, barcos e carros. Porém é um método que não ocupa a ementa dos conhecimentos de um curso de graduação, assim sendo necessária uma transferência deste conhecimento da esfera científica para o nível acadêmico.

1.6 OBJETIVOS

1.6.1 OBJETIVO GERAL

Aplicar o Método de Lattice Boltzmann em um escoamento externo entorno de um perfil de aerofólio bidimensional e convalidar com dados encontrados na literatura.

1.6.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Implementar códigos numérico e convalidar o método com dados encontrados na literatura.

Aplicar numericamente as condições de contorno do Método de Lattice Boltzmann buscando uma aproximação retangular das camadas curvas do perfil de aerofólio e comparar os resultados obtidos de Coeficiente de Arrasto (C_d) e Coeficiente de Sustentação (C_l) com os resultados de Lockard *et al* (2014).

Apresentar códigos escritos para detalhar de implementação de cada etapa do método para condições bidimensionais utilizando retículo D2Q9.

2 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Realizar uma pesquisa bibliográfica através de artigos periódicas especializadas, seminários e livros, que possibilitem o conhecimento deste método, trazendo-o da esfera científica para a esfera acadêmica.

Implementar o método, programando os códigos em linguagem de programação Fortran 95, detalhando e identificando cada parte dos códigos que forem anexados.

Apresentar os resultados obtidos, através das simulações dos códigos de validação e do escoamento entorno do aerofólio, utilizando gráficos e tabelas feitos em IPython e comparar com dados da literatura.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo é apresentada a teoria do método de Lattice Boltzmann, onde se aborda a equação do transporte de Boltzmann, aproximação Bhatnagar, Gross e Krook (BGK), função distribuição de equilíbrio, esquemas de retículo, variáveis macroscópicas e condições de contorno.

3.1 EQUAÇÃO DO TRANSPORTE DE BOLTZMANN

Segundo MOHAMAD (2011), uma descrição estatística de um sistema de N partículas pode ser explicada por uma função de distribuição de probabilidade $f(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t)$, que representa o número de partículas em um tempo t posicionadas entre $\mathbf{x}$ e $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$ que possuem velocidade entre $\mathbf{c}$ para $\mathbf{c} + d\mathbf{c}$. Quando uma força $\mathbf{F}$ é aplicada em uma partícula ocorre uma mudança de velocidade $\mathbf{c} + \mathbf{F}dt$ e posição de $\mathbf{x}$ para $\mathbf{x} + \mathbf{c}dt$.

Se não ocorrer colisão entre estas partículas, o número de partículas antes e depois da aplicação da força que estão em $f(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t)$ continua o mesmo, desta forma,

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{c}dt, \mathbf{c} + \mathbf{F}dt, t + dt)d\mathbf{x}d\mathbf{c} - f(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t)d\mathbf{x}d\mathbf{c} = 0. \quad (3.1)$$

No caso de colisão irá ocorrer uma distribuição diferente no número de partículas no intervalo de $f(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t)$. A taxa de mudança do que ocorre na distribuição de função é chamada de operador de colisão Ω (MELE, 2013). Adicionando o operador de colisão a Equação 3.1

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{c}dt, \mathbf{c} + \mathbf{F}dt, t + dt)d\mathbf{x}d\mathbf{c} - f(\mathbf{x}, \mathbf{c}, t)d\mathbf{x}d\mathbf{c} = \Omega(f)d\mathbf{x}d\mathbf{c}dt. \quad (3.2)$$

Coletando os em $d\mathbf{x}d\mathbf{c}$ e fazendo o limite de $dt \rightarrow 0$, temos

$$\frac{df}{dt} = \Omega(f), \quad (3.3)$$

ondes,

$$df = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} d\mathbf{x} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{c}} d\mathbf{c} + \frac{\partial f}{\partial t} dt \quad (3.4)$$

derivando por dt ,

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \frac{d\mathbf{x}}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{c}} \frac{d\mathbf{c}}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} \frac{dt}{dt} \quad (3.5)$$

onde $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{c}$, $\frac{d\mathbf{c}}{dt} = \mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m}$ e $\frac{dt}{dt} = 1$, portanto,

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{c} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{c}} \frac{\mathbf{F}}{m} + \frac{\partial f}{\partial t} = \Omega(f). \quad (3.6)$$

Na ausência de forças externas, a Equação 3.6 reduz-se a:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{c} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{c} \cdot \nabla f = \Omega(f), \quad (3.7)$$

ou seja,

$$\frac{df}{dt} + \mathbf{c} \cdot \nabla f = \Omega(f), \quad (3.8)$$

que é a equação de Boltzmann. A função $\Omega(f)$ é considerada uma integral de grande complexidade (HARRIS, 2004).

3.2 MODELO DE COLISÃO BGK

Em 1957 Bhatnagar, Gross e Krook (BGK) propuseram uma aproximação do operador de colisão Ω , que em geral é uma integral complexa e não-linear, com um simples operador sem introduzir um erro significativo

$$\Omega(f) = \omega(f^{eq} - f) = \frac{1}{\tau}(f^{eq} - f), \quad (3.9)$$

onde τ é o fator de relaxamento, ω é frequência de colisão e f^{eq} é a função distribuição de equilíbrio, como já mencionado na introdução (MOHAMAD, 2011; SUCCI, 2001).

Agora substituindo a Equação 1.3 na Equação 1.2, obtemos

$$\frac{df}{dt} + \mathbf{c} \cdot \nabla f = \frac{1}{\tau}(f^{eq} - f), \quad (3.10)$$

a Equação 3.10 é a equação de Boltzmann-BGK.

3.3 DISCRETIZAÇÃO

Segundo Mohamad (2011) a Equação 3.10 dever ser discretizada e assumida que é valida ao longo da direções específicas. A Equação 3.10 discretizada ao longo das velocidades, pode ser escrita como,

$$\frac{df_i}{dt} + \mathbf{c}_i \cdot \nabla f_i = \frac{1}{\tau}(f_i^{eq} - f_i), \quad (3.11)$$

onde i se refere a i -ésima velocidade microscópica.

A Equação 3.10 também pode ser manipulada, onde $dt = \Delta t$, para ficar como

$$f_i(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \Delta t, t + \Delta t) = f_i(\mathbf{x}, t) + \frac{\Delta t}{\tau} (f_i^{eq} - f_i). \quad (3.12)$$

Onde $\mathbf{x}$ representa dimensão e i as velocidades microscópicas, assim determinando o modelo D2Q9. A Equação 3.10 é considerada a principal ferramenta de trabalho do método de Lattice Boltzmann e outra vantagem é sua simplicidade (MOHAMAD, 2011).

3.4 FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO DE EQUILÍBRIO

A função distribuição de equilíbrio é um elemento chave, pois, ela determina qual o procedimento que será analisado, no caso difusão de calor, escoamento incompressível, entre outros (MOHAMAD, 2011).

A função distribuição de equilíbrio que está presente no operador de colisão, é basicamente uma expansão em séries de Taylor da função distribuição de Maxwell feitas para um baixo número de Mach, ou seja $M = \frac{u}{c_s} \ll 1$, onde u é a velocidade microscópica da partícula e c_s é a velocidade do som. A função distribuição de Maxwell

$$f^{eq} = \frac{\rho}{2\pi/3} e^{-\frac{u^2}{2(c-u)^2}} = \frac{\rho}{2\pi/3} e^{-\frac{u^2}{2(c^2)}} e^{\frac{u^2}{2(c^2)}(2c \cdot u - u \cdot u)}, \quad (3.13)$$

onde c é vetor velocidade no específico modelo de esquema e ρ é a densidade macroscópica. Feita expansão em series de Taylor da Equação 3.13 até a segunda ordem para coincidir com a ordem da equação de Navier-Stokes (MELE, 2013), obtem-se

$$f^{eq} = \frac{1}{2\pi/3} e^{-\frac{c \cdot u}{2}} \left[1 + 3(c \cdot u) - \frac{(u \cdot u)}{2} + \frac{(c \cdot u)^2}{2} \right]. \quad (3.14)$$

Discretizando e rearranjando a Equação 3.14

$$f^{eq} = \rho w_i \left[1 + 3(c_i \cdot u) - \frac{3}{2}(u \cdot u) + \frac{9}{2}(c_i \cdot u)^2 \right], \quad (3.15)$$

onde i discretiza a função pelas direções do retículo e w_i é o fator de ponderação.

3.5 VARIÁVEIS MACROSCÓPICAS

As variáveis macroscópicas de um fluido como velocidade u , pressão p , densidade ρ e quantidade de movimento ρu , podem ser obtidas através dos somatórios (HARRIS, 2004),

$$\rho = \sum_{i=0}^l f_i = \sum_{i=0}^l f_i^{eq} \quad (3.16)$$

$$\rho u = \sum_{i=0}^l c_i f_i = \sum_{i=0}^l c_i f_i^{eq}, \quad (3.17)$$

$$u = \frac{1}{\rho} \sum_{i=0}^l c_i f_i = \frac{1}{\rho} \sum_{i=0}^l c_i f_i^{eq}, \quad (3.18)$$

e a pressão p de fluidos incompressíveis

$$p = \rho c_s^2 = c_s^2 \sum_{i=0}^l f_i \quad (3.17)$$

onde $c_s = \frac{c_i}{\sqrt{3}}$ é a velocidade do som e $c_i = \frac{\Delta x}{\Delta t} i + \frac{\Delta y}{\Delta t} j$ é o vetor de direção de cada velocidade, levando em consideração um modelo D2Q9.

3.6 MODELOS DE RETÍCULOS

A discretização do espaço no método de Lattice Boltzmann ocorre através retículos que restringem as direções e a velocidades de deslocamento de cada partícula. O retículos são diferenciados de acordo com a dimensão do problema e o número de velocidades, como por exemplo um retículo D2Q9 que possui duas dimensões e nove velocidades, com 8 direções uma central. Nas figuras abaixo vemos as imagens de alguns retículos utilizados.

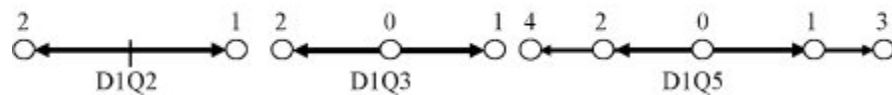


Figura 2– Retículos unidimensionais D1Q2, D1Q3 e D1Q5

Fonte: Mohamad (2011, p.20)

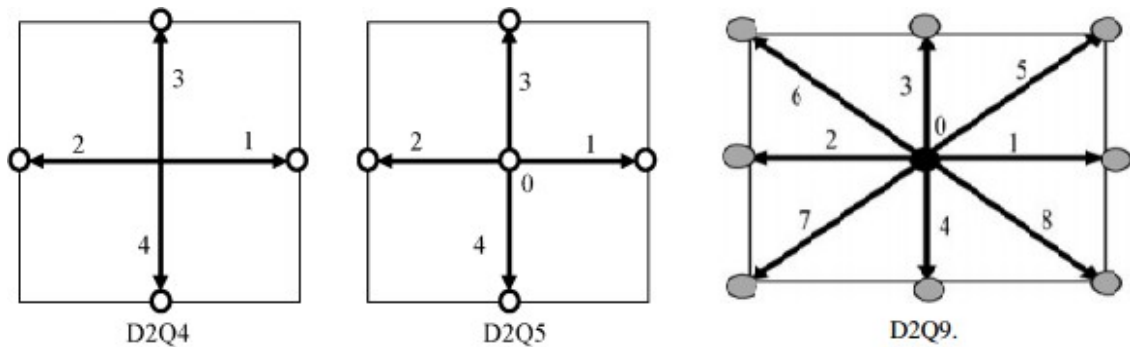


Figura 3– Retículos bidimensionais D2Q4, D2Q5 e D2Q9

Fonte: Mohamad (2011, p.21)

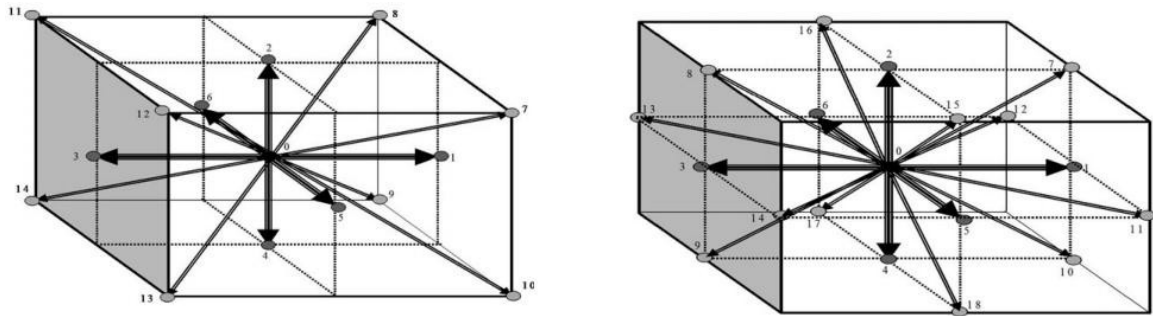


Figura 4– Retículos tridimensionais D3Q15 e D3Q19

Fonte: Mohamad (2011, p.22, 23)

Neste trabalho o retículo utilizado será o D2Q9 que possui suas direções de velocidades de $c(0,0)$, $c(1,0)$, $c(0,1)$, $c(-1,0)$, $c(0,-1)$, $c(1,1)$, $c(-1,1)$, $c(-1,-1)$ e $c(1,-1)$ e fator de ponderação w_i são $4/9$, $1/9$, $1/9$, $1/9$, $1/9$, $1/36$, $1/36$, $1/36$ e $1/36$ para $f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7$ e f_8 respectivamente. O Apêndice A apresentamos valores de w_i e c_i para outros modelos de retículos com referência em Shan *et al* (2006).

3.7 CONDIÇÃO DE CONTORNO BOUNCE-BACK

O Bounce-back é condição de contorno utilizada no método de Lattice Boltzman para modelar sólidos estacionários, camadas móveis, condições de não escorregamento e escoamento sobre obstáculos. A aplicação do Bounce-back é muito simples, pois consiste em partículas que se chocam contra uma parede, invertendo o seu sentido do movimento, em um domínio fluido-sólido. A figura abaixo apresenta um imagem esquemática do Bounce-back.

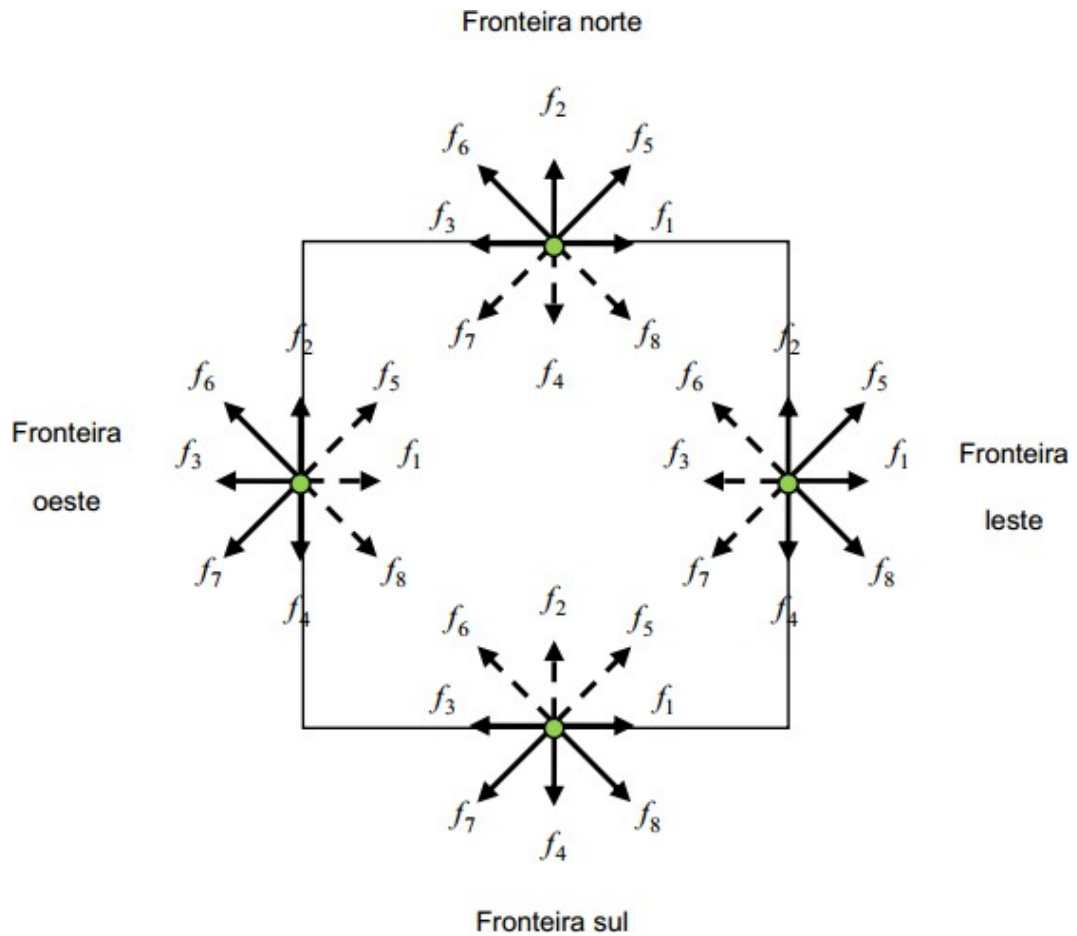


Figura 5– Bounce-back esquema para cada fronteira

Fonte: Meira (2014, p.39)

Considerando a aplicação do método Bounce-back para um esquema D2Q9 (bidimensional com 9 velocidades) podemos modelar as equações para aplicação. Podendo escrever a Equação 3.16 como mostrado abaixo. A Figura 6 mostra a relação da direção de velocidades do modelo D2Q9 utilizado na modelagem das equações.

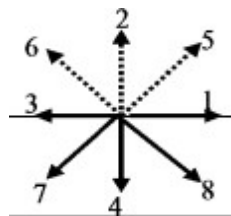


Figura 6– Relação da direção de velocidades do modelo D2Q9

Fonte: Mohamad (2014, p.73)

$$\rho = f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 + f_7 + f_8 \quad (3.18)$$

A Equação 3.18 fica modelada como mostra-se abaixo, considerando o sentido positivo para direita do vetor horizontal e para cima no vetor vertical.

$$\rho u = f_1 + f_5 + f_8 - f_6 - f_3 - f_7 \quad (3.19)$$

$$\rho v = f_5 + f_2 + f_6 - f_7 - f_4 - f_8 \quad (3.20)$$

As Equações 3.18, 3.19 e 3.20 são para modelar-se as condições de contorno e camadas norte, leste, oeste e sul. Para a camada Oeste reescreve-se as Equações 3.21, 3.22 e 3.23.

$$\rho_w = f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 + f_7 + f_8 \quad (3.21)$$

$$\rho_w u_w = f_1 + f_5 + f_8 - f_6 - f_3 - f_7 \quad (3.22)$$

$$\rho_w v_w = f_5 + f_2 + f_6 - f_7 - f_4 - f_8 \quad (3.23)$$

Considerando as condições normais de equilíbrio, temos

$$f_1 - f_1^{eq} = f_3 - f_3^{eq}. \quad (3.24)$$

Utilizando a Equação 3.15 pode-se calcular os f^{eq} da Equação 3.24, temos

$$f_1^{eq} = \frac{1}{\rho_w} \left[1 + 3u_w + \frac{9}{2}u_w^2 - \frac{3}{2}(u_w^2 + v_w^2) \right], \quad (3.25)$$

$$f_3^{eq} = \frac{1}{\rho_w} \left[1 - 3u_w + \frac{9}{2}u_w^2 - \frac{3}{2}(u_w^2 + v_w^2) \right]. \quad (3.26)$$

Substituindo as Equações 3.25 e 3.26 na Equação 3.24, tem-se a Equação 3.27 abaixo.

$$f_1 = f_3 + \frac{\epsilon}{3} \rho_w u_w \quad (3.27)$$

Aplicando o mesmo método utilizado para encontrar a Equação 3.27, pode-se encontrar abaixo as resoluções para as equações $f_5 - f_5^{eq} = f_7 - f_7^{eq}$ e $f_8 - f_8^{eq} = f_6 - f_6^{eq}$.

$$f_5 = f_7 - \frac{1}{2}(f_2 - f_4) + \frac{1}{6} \rho_w u_w + \frac{1}{2} \rho_w v_w \quad (3.28)$$

$$f_8 = f_6 + \frac{1}{2}(f_2 - f_4) + \frac{1}{6} \rho_w u_w - \frac{1}{2} \rho_w v_w \quad (3.29)$$

Substituindo as Equações 3.27, 3.28 e 3.29 na Equação 3.21, obtém-se a equação abaixo.

$$\rho_w = \frac{1}{1-u_w} [f_0 + f_2 + f_4 + 2(f_3 + f_6 + f_7)] \quad (3.30)$$

Aplicando o mesmo processo para uma camada leste encontra-se,

$$f_3 = f_1 - \frac{\epsilon}{3} \rho_E u_E, \quad (3.31)$$

$$f_7 = f_5 + \frac{1}{2}(f_2 - f_4) - \frac{1}{6} \rho_E u_E - \frac{1}{2} \rho_E v_E, \quad (3.32)$$

$$f_6 = f_8 - \frac{1}{2}(f_2 - f_4) - \frac{1}{6} \rho_E u_E + \frac{1}{2} \rho_E v_E, \quad (3.33)$$

$$\rho_w = \frac{1}{1+u_E} [f_0 + f_2 + f_4 + 2(f_1 + f_5 + f_8)]. \quad (3.34)$$

Aplicando o mesmo processo para uma camada norte encontra-se,

$$f_4 = f_2 - \frac{\epsilon}{3} \rho_N v_N \quad (3.35)$$

$$f_7 = f_5 + \frac{1}{2}(f_1 - f_3) - \frac{1}{6} \rho_N v_N - \frac{1}{2} \rho_N u_N \quad (3.36)$$

$$f_8 = f_6 + \frac{1}{2}(f_1 - f_3) - \frac{1}{6} \rho_N v_N + \frac{1}{2} \rho_N u_N \quad (3.37)$$

$$\rho_N = \frac{1}{1+v_N} [f_0 + f_1 + f_3 + 2(f_2 + f_6 + f_5)]. \quad (3.38)$$

Aplicando o mesmo processo para uma camada sul encontra-se,

$$f_2 = f_4 + \frac{v}{3} \rho_S v_S, \quad (3.39)$$

$$f_5 = f_7 - \frac{1}{2}(f_1 - f_3) + \frac{1}{6} \rho_S v_S + \frac{1}{2} \rho_S \mu_S \quad (3.40)$$

$$f_6 = f_8 + \frac{1}{2}(f_1 - f_3) + \frac{1}{6} \rho_S v_S - \frac{1}{2} \rho_S \mu_S \quad (3.41)$$

$$\rho_S = \frac{1}{1-v_S} [f_0 + f_1 + f_3 + 2(f_4 + f_7 + f_8)]. \quad (3.42)$$

3.8 CONDIÇÃO DE CONTORNO PARA CAMADAS ABERTA

Em problemas com a velocidade de entrada e sem uma velocidade definida de saída, não pode-se usar o Bounce-back. Para estes casos usa-se uma extrapolação para obter as funções distribuição desconhecidas (MOHAMAD, 2011). Abaixo segue um exemplo da extrapolação aplicada para uma condição de contorno aberta na camada leste, baseado na Figura 6.

$$f_{3,n} = 2 \cdot f_{3,n-1} - f_{3,n-2} \quad (3.43)$$

$$f_{6,n} = 2 \cdot f_{6,n-1} - f_{6,n-2} \quad (3.44)$$

$$f_{7,n} = 2 \cdot f_{7,n-1} - f_{7,n-2} \quad (3.45)$$

3.9 FREQUÊNCIA DE COLISÃO E VISCOSIDADE DO FLUÍDO

A relação entre a viscosidade cinemática e a frequência de colisão utilizada na aproximação de Bhatnagar, Gross e Krook (BGK) (Equação 3.9) é apresentada por Mele (2013) e Mohamad (2011), a equação abaixo apresenta esta relação.

$$\omega = \frac{1}{\frac{\nu}{c_s^2 \cdot \Delta t} + \frac{1}{2}} \quad (3.46)$$

Onde c_s é a velocidade do som mencionado no Subcapítulo 3.5 e para casos em que a Δt e Δx são iguais a 1, a Equação 3.46 pode ser resumida igual a Equação 3.47.

$$\omega = \frac{1}{3\nu + \frac{1}{2}} \quad (3.47)$$

Onde ν é viscosidade do fluido e a frequência de colisão $\omega = \frac{\Delta t}{\tau}$ onde τ é o simples relaxamento de tempo.

Succi (2001) aborda a análise da Equação 3.47 de maneira que ela é limitada inferiormente e superiormente, pois quando $\nu = 0$ $\omega = 2$ e quando $\nu \rightarrow \infty$ $\omega = 0$ e assim ω permanece delimitado em um intervalo 0 a 2. Sukop Thorne Jr (2007) recomendam um valor, para a frequência de colisão, aproximado de 1,0 para manter a estabilidade do método.

3.10 MUDANÇA DE ESCALA E NÚMERO DE MACH

O número de Reynolds é um número adimensional utilizado para relacionar problemas de escoamento de fluido, onde é utilizado na fórmula um comprimento

característico do problema L_c , uma velocidade de referência do problema U_r e a viscosidade cinemática do fluido ν , veja a equação abaixo (FOX *et al*, 2006).

$$Re = \frac{L_c U_r}{\nu} \quad (3.48)$$

Com o objetivo de fazer com que o escoamento seja estável, algumas alterações na escala do problema devem ser feitas. O número de Mach é um número que relaciona a velocidade do escoamento U com a velocidade do som c_s e junto com a frequência de colisão são responsáveis pela estabilidade do problema, o erro do problema é da ordem do número de Mach ao quadrado (MOHAMAD, 2011).

$$Ma = \frac{U}{c_s} \quad (3.49)$$

Um exemplo de alteração de escala pode ser feito por exemplo, no problema *lid driven cavity flow*, que é um problema onde a tampa de uma cavidade quadrada preenchida de um certo fluido entra em movimento. Considerando um tamanho de lado do quadrado de 0,2 m, a velocidade de movimento da tampa de 6 m/s e a viscosidade do fluido de $1,2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$, com estas características para Δt e Δx iguais a 1, tem-se $Re = 1000$, $Ma = 10,3923$ e $\omega = 1,9985$, resultando assim em um problema completamente instável. Já se alterar a velocidade da tampa para 0,1 m/s, a viscosidade para $0,01 \text{ m}^2/\text{s}$ e o lado do quadrado 100 m, tem-se $Re = 1000$, $Ma = 0,173$ e $\omega = 1,886$, resultando assim em um escoamento instável.

3.11 ESTRUTURAÇÃO DO CODIGO DE PROGRAMAÇÃO

Os problemas abordados neste trabalho foram implementados computacionalmente em linguagens de programação Fortran e Python seguindo o fluxograma mostrado na figura abaixo, que apresenta uma ordem de implementação do método Lattice Boltzmann.

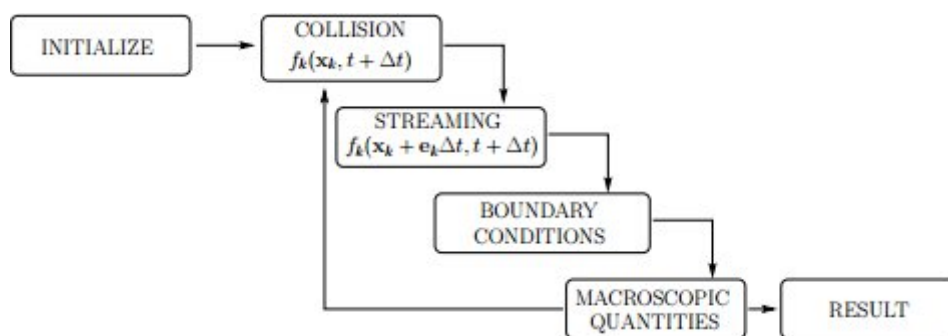


Figura 7– Estrutura de programação

Fonte: Mele (2013, p.11)

Na Figura 8, vê-se em primeiro que ocorre um processo de inicialização onde são definidas as variáveis do método e atribuído valores iniciais do problema, em segundo partimos para o processo de colisão, em terceiro o processo de transmissão, em quarto as condições de contorno, em quinto o cálculo das variáveis de macroscópicas e por último, caso seja satisfeita a condição de parada ou termino de número de passos determinado do problema é calculado dos resultados finais, caso contrário as variáveis microscópicas retornam ao processo de colisão para passar por mais passo do processo. No Apêndice B será apresentado a implementação dos códigos de resolução dos problemas apresentados neste trabalho, que seguem esta estruturação.

3.12 MÉTODO DE *MOMENTUM-EXCHANGE*

Este método é utilizado para calcular as forças em cada ligação do fluido entre dois retículos (MEI *et al*, 2002). Este método parte da ideia de conservação da quantidade momento, onde é considerado uma troca da quantidade de momento entre partículas de direções opostas do retículo central com os retículos da vizinha (KOMORI, 2012), equação 3.50 apresenta o cálculo.

$$F = \sum_i \frac{1}{\Delta t} c_i (f_i(x_f) + f_i'(x_b)) \quad (3.50)$$

Onde F é a força resultante, Δt variação do tempo determinada no método, c_i é vetor direção de cada função distribuição, f_i' é a função distribuição de sentido oposto a f_i , $x_b = x_f + c_i \Delta t$ é o ponto do retículo que reside na parte sólida e x_f o retículo vizinho na posição do vetor direção estabelecido.

A interação ocorrendo entre uma superfície e um fluido domínio é abordado levando em consideração as funções de distribuição de interação neste recinto. A figura abaixo exemplifica esta relação.

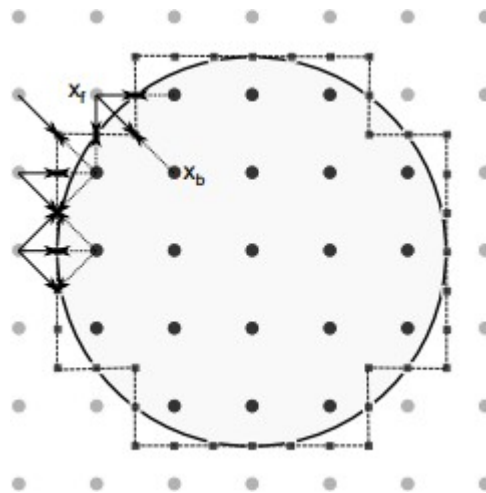


Figura 8— Interação superfície fluido

Fonte: Romero (2012, p.19)

4 VALIDAÇÃO DO MÉTODO

O problema para a validação do método foi escolhido o *lid driven cavity flow*, um *benchmark* conhecido. Será implementado o problema no método de Lattice Boltzmann para resolução e comparar os resultados obtidos com outras referências. O código implementação do problema está no Anexo A em Fortran e Python.

4.1 LID DRIVEN CAVITY FLOW

O *lid driven cavity flow* é um comum experimento de validação de métodos numéricos, pois sua simples geometria bidimensional faz com que o problema tenha fáceis condições de contorno para ser aplicadas (MELE, 2013).

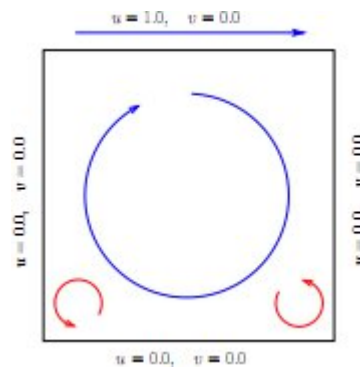


Figura 9– Geometria do *lid driven cavity flow*

Fonte: Mele (2013, p.10)

Nas condições de contorno iniciais do *lid driven cavity flow* as velocidades são zero, menos as componentes do eixo x em contato com a *lid* (tampa superior) que possui uma velocidade inicial $u = 6 \text{ m / s}$ e uma viscosidade do fluido de $\nu = 0,00012 \text{ m}^2/\text{s}$. As dimensões da cavidade quadrada são lados $H = 0,2 \text{ m}$, assim junto com a velocidade e viscosidade caracterizam um número de Reynolds $Re = 1000$.

4.2 RESOLUÇÃO

Implementado a estrutura do método em um esquema D2Q9, as condições de contorno de fronteiras são determinadas seguindo método Bounce-back levando em consideração as condições iniciais do problema, segue abaixo as condições de contorno para a camada norte, para as camadas leste, oeste e sul onde são definidas no Subcapítulo 3.7,

$$\rho_N = f_0 + f_1 + f_3 + 2(f_2 + f_6 + f_5), \quad (4.1)$$

$$f_4 = f_2, \quad (4.2)$$

$$f_7 = f_5 + \frac{1}{2}(f_1 + f_3) - \frac{1}{2}\rho_N u_N, \quad (4.3)$$

$$f_8 = f_6 + \frac{1}{2}(f_3 + f_1) - \frac{1}{2}\rho_N u_N. \quad (4.4)$$

Aplicada as condições de contorno e a mudança de escala feita no subcapítulo 3.9, obtem-se os resultados em vetores de velocidade que estão plotados na Figura 10, feito em linguagem Python.

4.3 RESULTDOS

Na Figura 11 se observar o perfil de velocidade da cavidade em uma relação proporcional onde $u = 0,1 \text{ m/s}$ é equivalente $u = 6 \text{ m/s}$ (devido mudança de escala) e também um vórtice central e outros dois vórtices secundários.

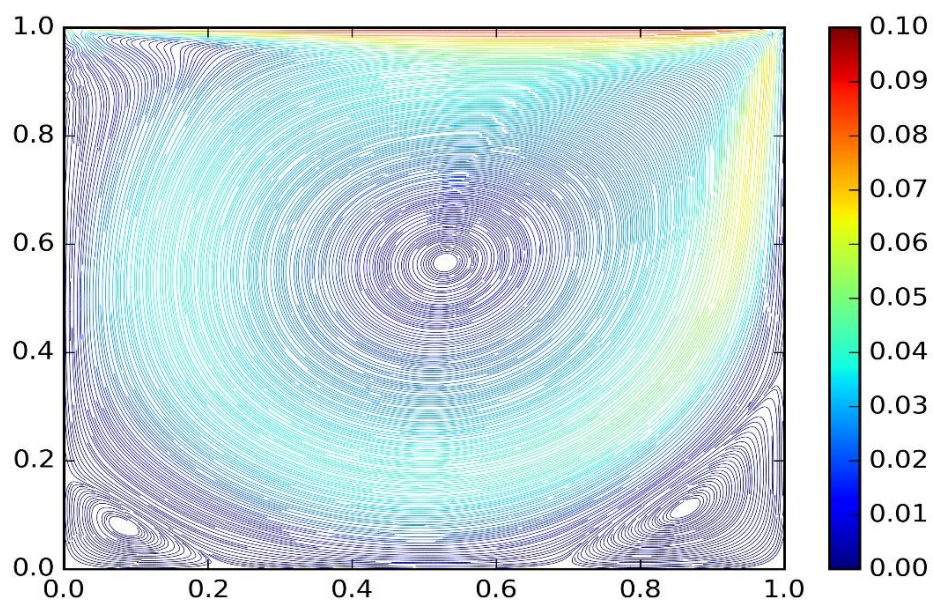


Figura 10– Linhas de corrente do perfil de velocidade do *lid driven cavity flow*

Fonte: Própria autoria

Voltando para escala inicial onde a velocidade é de 6 m/s , os valores do gráfico são alterados, conforme mostrado na Figura 11.

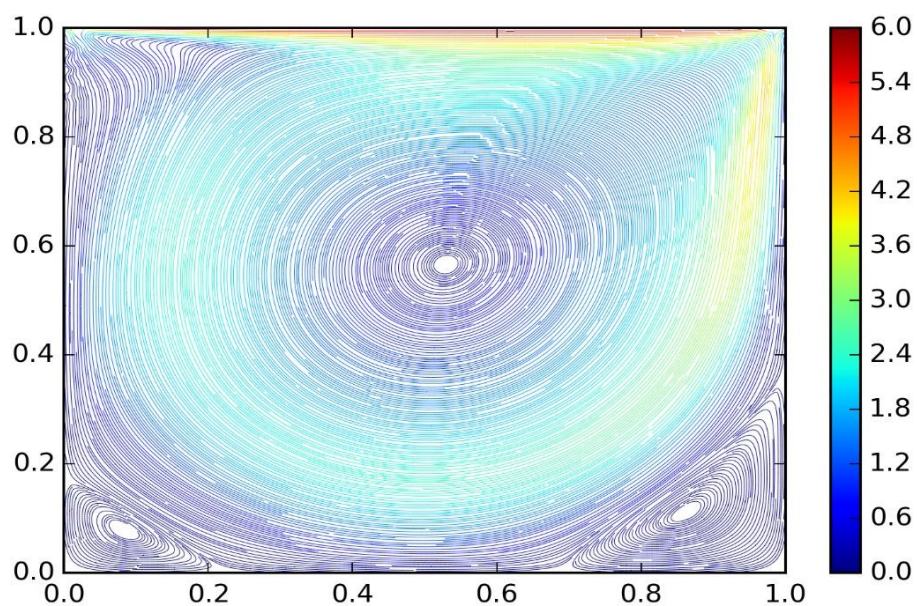


Figura 11– Linhas de corrente do perfil de velocidade do *lid driven cavity flow* em escala real

Fonte: Própria autoria

A Figura 12 apresenta o posicionamento aproximado do vórtice central, no qual é $x = 0,52$ e $y = 0,57$, considerando o centro do vórtice um ponto onde a velocidade é zero.

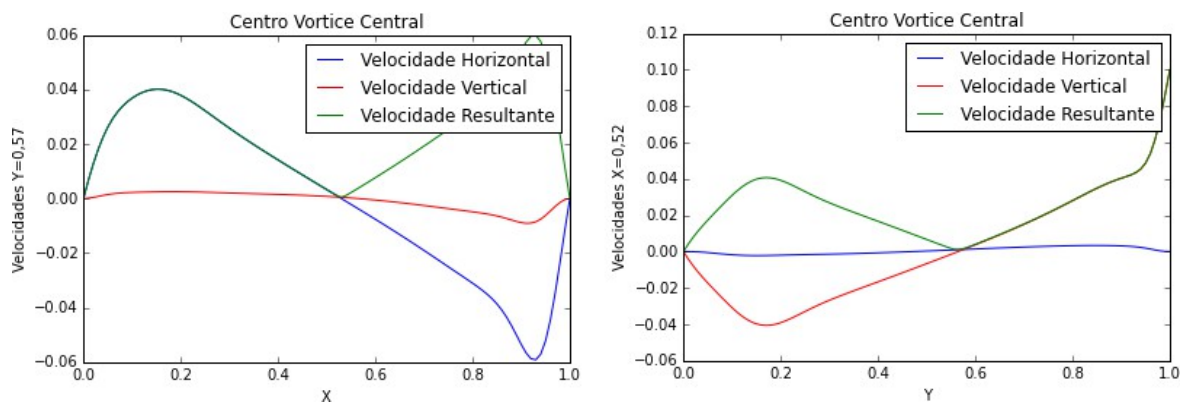


Figura 12– Gráficos de posicionamento do vórtice central no eixo x e y

Fonte: Própria autoria

A figura 13 apresenta o posicionamento aproximado do vórtice inferior direito, no qual é $x = 0,86$ e $y = 0,11$, considerando o centro do vórtice um ponto onde a velocidade é zero.

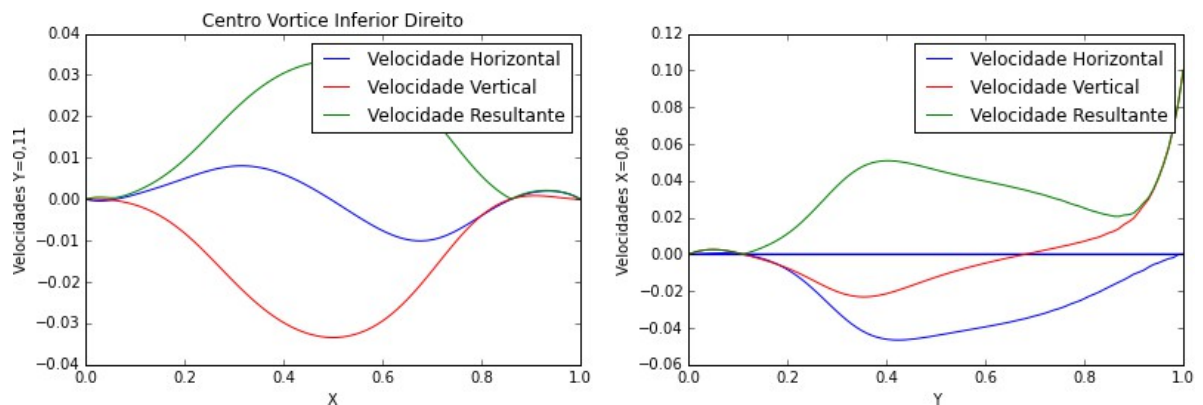


Figura 13– Gráficos de posicionamento do vórtice inferior direito no eixo x e y

Fonte: Própria autoria

A figura 14 apresenta o posicionamento aproximado do vórtice inferior esquerdo, no qual é $x = 0,08$ e $y = 0,08$, considerando o centro do vórtice um ponto onde a velocidade é zero

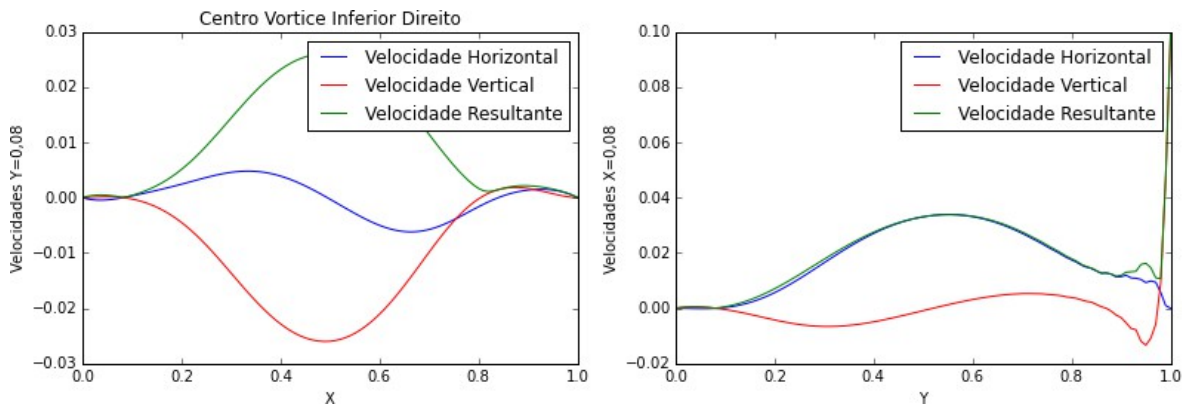


Figura 14– Gráficos de posicionamento do vórtice inferior esquerdo no eixo x e y
Fonte: Própria autoria

Comparando o posicionamento dos vórtices centrais e secundários com os resultados obtidos em referências Mele (2013) que utiliza o método de Lattice Boltzmann, Hou *et al* (1995) que utiliza o método Latice Boltzmann, Ghia *et al* (1982) que utiliza o método Multigrid e Vanka (1986) que utiliza solução de Block-implicit Multigrid. Os resultados apresentados do Trabalho Presente possuem uma variação dos pontos de $\pm 0,1$.

Tabela 1– Comparação entre resultados do *lid driven cavity flow*

<i>Re</i>		Vórtice Central		Vórtice Inferior Esquerdo		Vórtice Superior Direito	
		<i>x</i>	<i>y</i>	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>x</i>	<i>y</i>
1000	Trabalho Presente	0,52±	0,57±	0,08±	0,08±	0,86±	0,11±
	Vanka (1986)	0,5438	0,5625	0,0750	0,0813	0,8625	0,1063
	Ghia <i>et al</i> (1982)	0,5313	0,5625	0,0859	0,0781	0,8594	0,1094
	Hou <i>et al</i> (1995)	0,5333	0,5647	0,0902	0,0784	0,8667	0,1137
	Mele (2013)	0,5216	0,5647	0,0877	0,0757	0,8510	0,1059

Na Tabela 2 foi calculado o erro percentual do trabalho atual para os demais trabalho apresenta na Tabela 1, utilizando a equação abaixo.

$$Erro\% = \frac{|valor\ aproximado - valor\ exato|}{valor\ exato} \times 100 \quad (4.1)$$

Tabela 2– Erro percentual em comparação com os resultados da tabela 1

Erro %	Vanka (1986)		Ghia <i>et al</i> (1982)		Hou <i>et al</i> (1995)		Mele (2013)	
	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>x</i>	<i>y</i>
Vórtice Central	4,37%	1,33%	2,12%	1,13%	2,49%	0,938%	0,306%	0,938%
Vórtice Inferior Esquerdo	6,66%	1,59%	6,86%	2,43%	11,3%	2,04%	8,77%	5,68%
Vórtice Inferior Esquerdo	0,289%	3,48%	0,069%	0,548%	0,77%	3,25%	1,05%	3,87%

Uma porcentagem da variação do posicionamento dos pontos de centro e do erros percentuais, se deve a não interpolação entre os pontos do gráfico de velocidades apresentados nas Figuras 10 e 11 que resultariam em um ponto mais preciso em vez de pontos da malha regular.

5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Este capítulo apresentará uma análise realizada para um escoamento viscoso externo entorno de um aerofólio bidimensional. Os resultados obtidos serão modelados para comparação dos coeficientes de sustentação, arrasto e pressão com as referências encontradas. O perfil de aerofólio utilizado no problema será um NACA 0012.

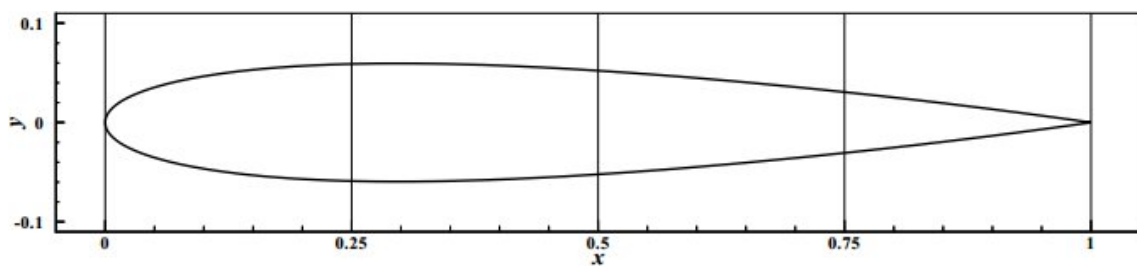


Figura 15– Perfil aerofólio NACA 0012

Fonte: Lockard *et al* (2014, p.14)

5.1 CASOS ANALISADOS

Implementado o método será analisado os escoamentos entorno de aerofólios com os dados apresentados na tabela abaixo e posicionados na metade da altura e $\frac{1}{4}$ do comprimento do domínio, então analisados principalmente valores de coeficiente de arrasto (C_d) e coeficiente de sustentação (C_l), que são calculados pelas Equações 5.1 e 5.2, respectivamente.

Tabela 3– Casos analisados

Aerofólio	Re	Ma	α°
NACA 0012	500	0,17	0°

$$C_d = \frac{Fd}{0,5 \cdot \rho_{\infty} \cdot U_{\infty} \cdot A} \quad (5.1)$$

$$C_l = \frac{Fl}{0,5 \cdot \rho_{\infty} \cdot U_{\infty} \cdot A} \quad (5.2)$$

Onde Fd é a força de arrasto, que é a força resultante horizontal aplicada ao aerofólio, Fl é a força de sustentação, que é a força resultante vertical aplicada no aerofólio, ρ_{∞} é a densidade do fluido no infinito, U_{∞} é a velocidade do fluido no infinito e A é a área bidimensional do aerofólio.

5.2 RESOLUÇÃO

Implementado o método estruturado (Subcapítulo 3.10), em um esquema D2Q9, as condições de contorno são determinadas seguindo método Bounce-back e a condição de contorno para camadas abertas, levando em consideração as condições iniciais do problema, veja abaixo as condições de contorno, como mostrado na Figura 6.

Condição de contorno utilizando o método Bounce-back para fronteira oeste de entrada.

$$f_1 = f_3 + \frac{1}{3} \rho_w u_w \quad (5.3)$$

$$f_5 = f_7 - \frac{1}{2} (f_2 - f_4) + \frac{1}{6} \rho_w u_w \quad (5.4)$$

$$f_8 = f_6 - \frac{1}{2} (f_2 - f_4) + \frac{1}{6} \rho_w u_w \quad (5.5)$$

$$\rho_w = \frac{1}{1-u_w} [f_0 + f_2 + f_4 + 2(f_3 + f_6 + f_7)] \quad (5.6)$$

Condição de Contorno utilizando camada aberta para fronteira leste.

$$f_{1,n} = 2 \cdot f_{1,n-1} - f_{1,n-2} \quad (5.7)$$

$$f_{8,n} = 2 \cdot f_{8,n-1} - f_{8,n-2} \quad (5.8)$$

$$f_{5,n} = 2 \cdot f_{5,n-1} - f_{5,n-2} \quad (5.9)$$

Condição de Contorno utilizando camada aberta para fronteira norte.

$$f_{2,n} = 2 \cdot f_{2,n-1} - f_{2,n-2} \quad (5.10)$$

$$f_{6,n} = 2 \cdot f_{6,n-1} - f_{6,n-2} \quad (5.11)$$

$$f_{5,n} = 2 \cdot f_{5,n-1} - f_{5,n-2} \quad (5.12)$$

Condição de Contorno utilizando camada aberta para fronteira sul.

$$f_{4,n} = 2 \cdot f_{4,n-1} - f_{4,n-2} \quad (5.13)$$

$$f_{7,n} = 2 \cdot f_{7,n-1} - f_{7,n-2} \quad (5.14)$$

$$f_{8,n} = 2 \cdot f_{8,n-1} - f_{8,n-2} \quad (5.15)$$

A condição de contorno utilizadas para determinar as fronteiras do aerofólio foi o Bounce-back, a aplicação deste contorno teoricamente é simples mas na prática de implementação é um pouco mais complicada formando um formato aproximado do aerofólio, mostrado na Figura 16, que possui em linha verde e azul o formato correto do perfil dada pela Equação 5.16 para o perfil NACA 0012.

$$\begin{aligned} y^+ = c \left(0,6 \left(0,29690 \left(\frac{x}{c} \right)^{0,5} - 0,126 \left(\frac{x}{c} \right) - 0,3516 \left(\frac{x}{c} \right)^2 \right. \right. \\ \left. \left. + 0,2843 \left(\frac{x}{c} \right)^3 - 0,1015 \left(\frac{x}{c} \right)^4 \right) \right) \end{aligned} \quad (5.16)$$

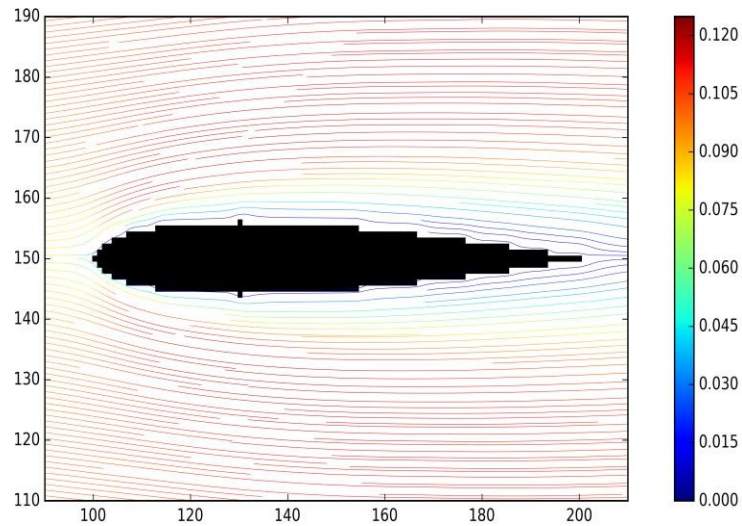


Figura 16– Perfil aerofólio NACA 0012 de aplicação

Fonte: Própria autoria

5.3 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Aplicando as condições de contorno a estrutura de código definida no Subcapítulo 3.10 resolve-se o problema para um Reynolds $Re = 500$, velocidade inicial $u = 0,1 \text{ m/s}$, viscosidade cinemática $\nu = 0,02 \text{ m}^2/\text{s}$ e uma corda $c = 100 \text{ m}$, para um domínio de 500 por 400 retículos, em x e y respectivamente, obtemos o campo de velocidades, como mostra a Figura 17.

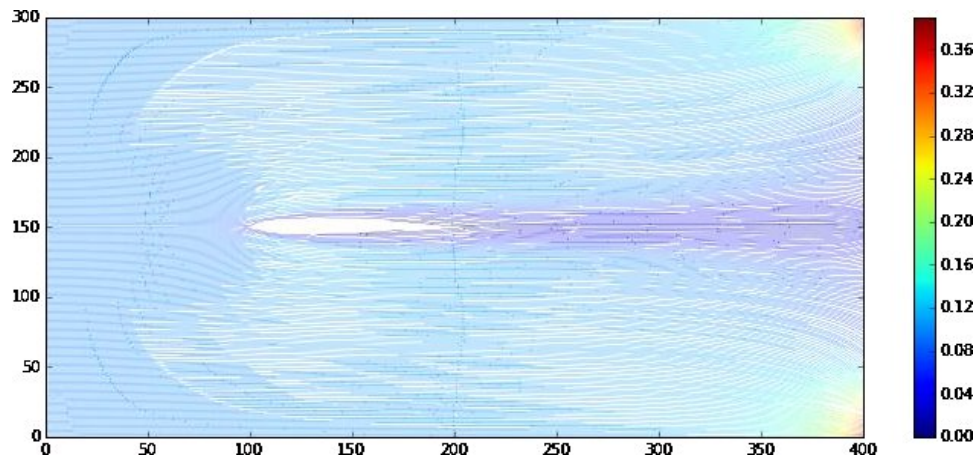


Figura 17– Campo de Velocidades

Fonte: Própria autoria

Resultados obtidos do Coeficiente de Sustentação (C_l) e Coeficiente de Arrasto (C_d), estão apresentados na tabela abaixo, e comparados com os resultados da referência de Lockard *et al* (2014), que se utiliza do software Power FLOW, que é baseado no método de Lattice Boltzmann e o software CFL3D, que segunda a referência é um *solver* convencional de dinâmica dos fluídos computacional.

Tabela 4– Compação dos resultados de C_d e C_l

	C_d	C_l
CFL3D	0,17618	$0,115 \times 10^{-6}$
Power FLOW	0,1717211	$0,22703 \times 10^{-3}$
Trabalho Presente	0,19087	$0,18882 \times 10^{-5}$

Os valore de coeficiente de arrasto (C_d) e de coeficiente de sustentação (C_l) obtidos utilizando o método de *Momentum-Exchange* abordado no Subcapítulo 3.12 foram razoáveis. A variação obtida no resultado de coeficiente de arrasto (C_d) deve-se ao perfil aproximado do real em forma de escada utilizado na simulação, gerando um arrasto maior devido suas formas retangulares. O valores do coeficiente de sustentação (C_l) obtidos, tendem a se aproximar de zero, que é o valor teórico do coeficiente de sustentação de um perfil NACA 0012 com $\alpha^\circ = 0$, porem os valores obtidos pela referência foram mais próximos do valor teórico que o resultado obtido no presente trabalho, acredita-se que esta variação deve-

se ao nível de refinamento da malha regular tanto quanto ao formato do perfil aproximado utilizado.

Dados do coeficiente de pressão (C_p) pela superfície do aerofólios são comparados com o da referência de Lockard *et al* (2014) em forma de gráfico, o cálculo do coeficiente de pressão pode ser feito pela Equação 5.17.

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{0,5 \cdot \rho_\infty \cdot U_\infty^2} \quad (5.17)$$

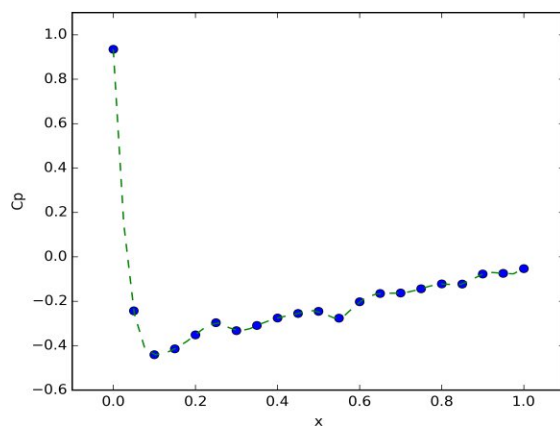


Figura 18– Coeficiente de pressão pela superfície do aerofólio

Fonte: Própria autoria

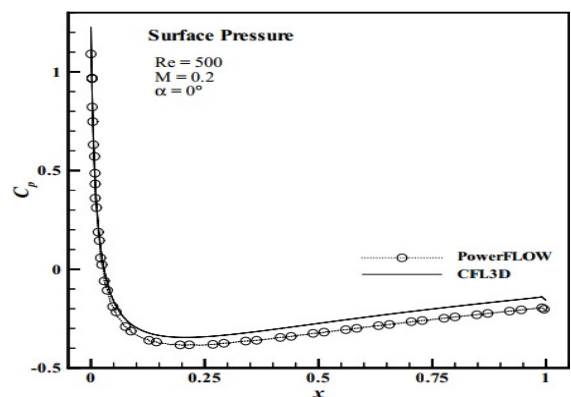


Figura 19– Coeficiente de pressão pela superfície do aerofólio

Fonte: Lockard *et al* (2014, p.23)

Os dados apresentados do coeficiente de pressão (C_p) possuem uma variação em relação a referência de Lockard *et al* (2014), devido a diferença entre as geometrias do aerofólio que foram implementadas nos softwares Power FLOW e CFL3D, que possivelmente utilizaram condições de contorno curva para modelagem do aerofólio e um refinamento maior das pontos da malha. Porém o resultado apresentado por Lockard *et al* (2014) no ponto de estagnação do perfil (ponta da asa) é maior que 1, resultado que é teoricamente impossível para um escoamento incompressível, representando assim a violação da primeira lei da termodinâmica. O resultado correto para o coeficiente de pressão no ponto de estagnação é 1.0, valor que se aproximou do resultado obtido no presente trabalho.

Comparações entre as velocidades ocorrerão graficamente devido ao formato em que os resultados estão apresentados em Lockard *et al* (2014), e serão setorizados em $\frac{x}{c} = 0,0, \frac{x}{c} = 0,25, \frac{x}{c} = 0,5, \frac{x}{c} = 0,75$ e $\frac{x}{c} = 1,0$, onde c é a corda do aerofólio e x o ponto de posicionamento na corda. Os valores de perfil de velocidade setorizados entorno da asa servem para validar o escoamento entorno do aerofólio.

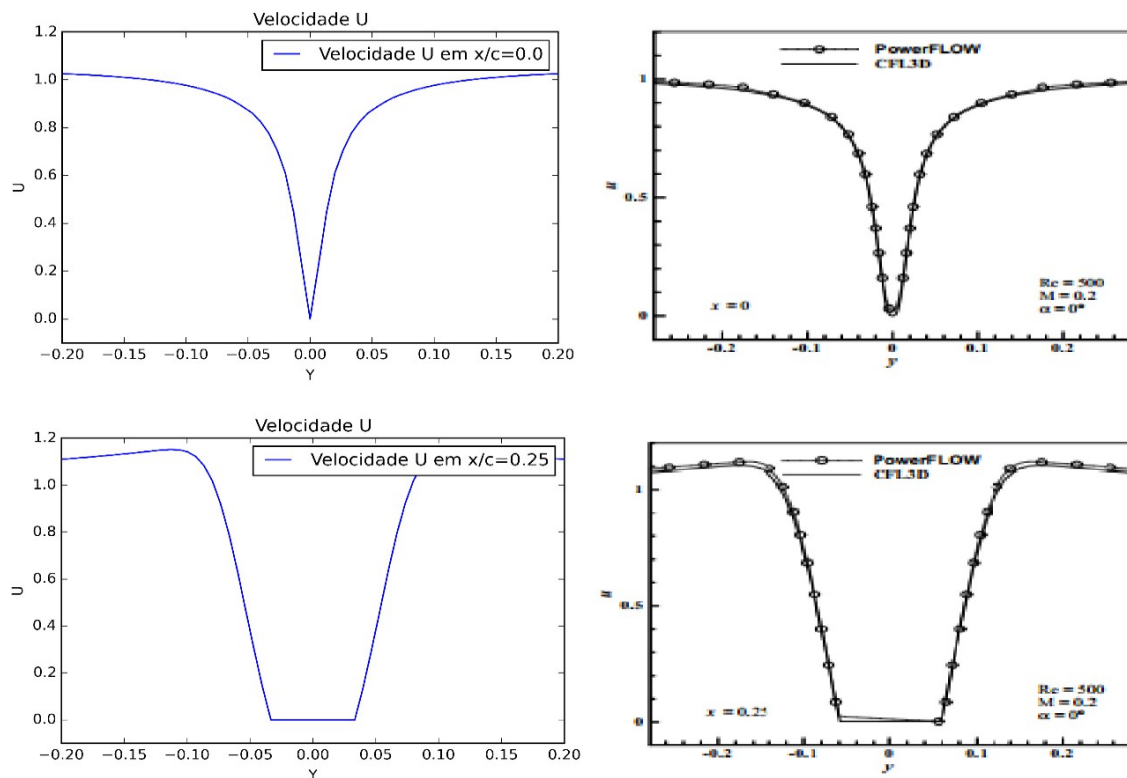


Figura 20– Perfis de velocidade horizontal nos setores do aerofólio $x/c=0.0$ e $x/c=0.25$

Fonte: Própria autoria

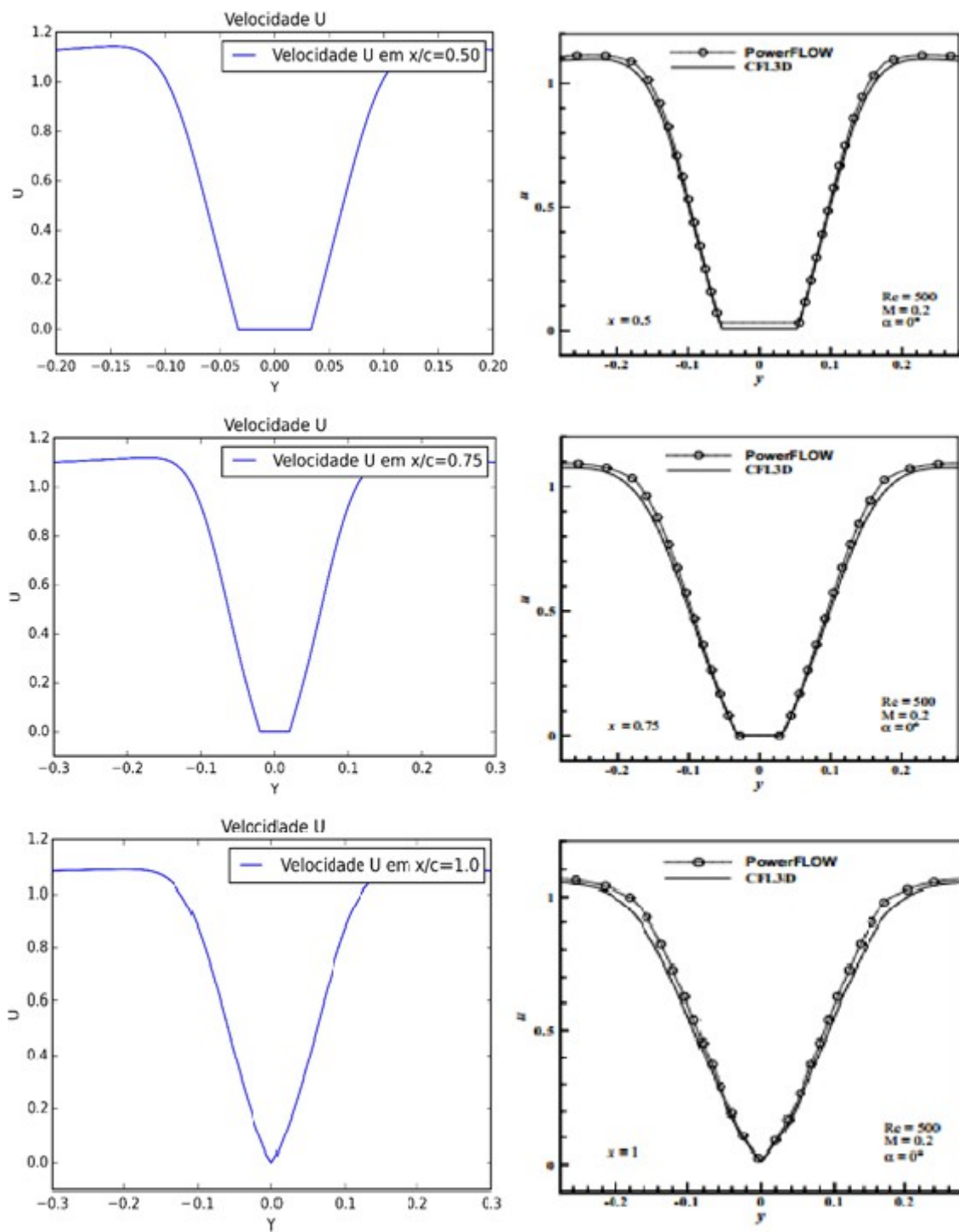


Figura 21– Perfis de velocidade horizontal nos setores do aerofólio $x/c=0.5$, $x/c=0.75$ e $x/c=1.0$

Fonte: Própria autoria

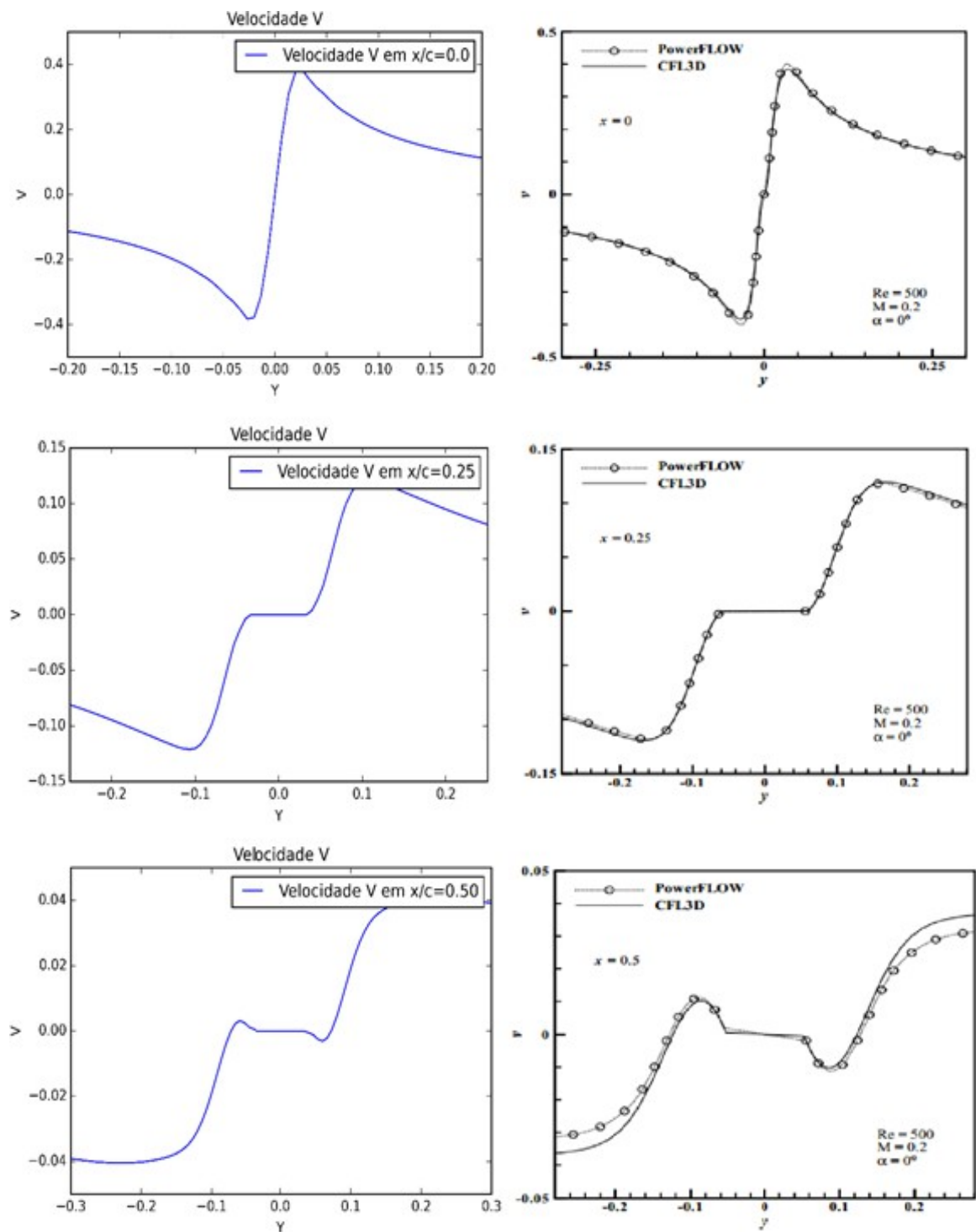


Figura 22– Perfis de velocidade vertical nos setores do aerofólio $x/c=0.0$, $x/c=0.25$ e $x/c=0.5$

Fonte: Própria autoria

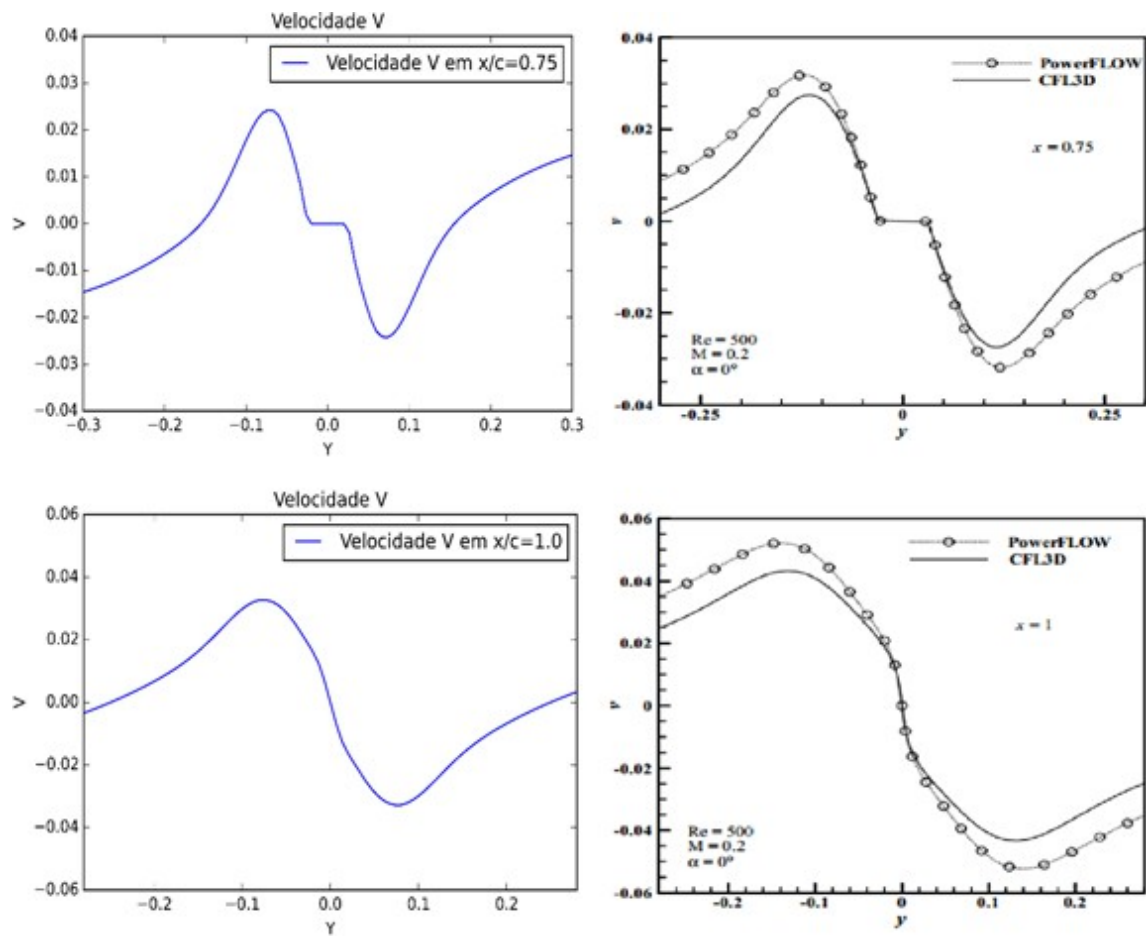


Figura 23– Perfis de velocidade vertical nos setores do aerofólio $x/c=0.75$ e $x/c=1.0$

Fonte: Própria autoria

Os resultados obtidos dos perfis de velocidades setorizado entorno do aerofólio apresentaram-se de acordo com a referência Lockard *et al* (2014), as variações devem-se as relações de escala apresentadas para focalizar as áreas de interesse no gráfico.

6 CONCLUSÃO

No presente trabalho foi proposto a análise de um escoamento viscoso externo em torno de um aerofólio bidimensional, onde foi utilizado o método de Lattice Boltzmann, que se baseia em possíveis colisões de partículas presentes em retículos, para a resolução de problemas de escoamento de fluidos.

Para a verificação do método e do código de programação utilizou-se um *benchmark* usual, o *lid driven cavity flow* que consiste em um escoamento que ocorre em uma cavidade totalmente preenchida com um fluido de trabalho onde a tampa superior apresenta uma velocidade de deslocamento constante. A comparação dos resultados obtidos no presente trabalho com os resultados encontrados na literatura, tanto numéricos como experimentais, foram considerados satisfatórios.

Para o caso analisado do escoamento viscoso entorno do aerofólio constatou-se que a implementação do problema sem utilização de métodos aplicados á condições de contorno curvas geram uma variação no resultado, devido ao formato de escada que o aerofólio adquire (Figura 16). Constatou-se também que a implementação do problema em um retículo D2Q9 acabou restringindo o problema a um escoamento de baixo número de Reynolds, devido a necessidade de um baixo número de Mach para estabilidade do problema, fazendo com que fosse necessário um aumento da malha regular para o aumento do número de Reynolds, fazendo que o escoamento ficasse inviável computacionalmente.

Os resultados obtidos no problema de escoamento viscoso externo entorno de um aerofólio bidimensional foram comparados com a referência de Lockard *et al* (2014), onde a análise do problema é feita por softwares que se utilizam de métodos de condição de contornos mais precisos para representação do perfil de aerofólio e assim apresentam resultados final mais refinados. Porém os resultados obtidos no presente trabalho foram adequados, levando em consideração os obstáculos encontrados, a proximidade foi razoável.

Uma sugestão para futuros trabalhos envolvendo o método de Lattice Boltzmann é a utilização de retículos que apresentem uma ordem maior de velocidade possíveis que o D2Q9, assim eliminam o problema de um baixo número de Mach em casos de

escoamento incompressíveis como apresentado no trabalho atual. Por exemplo um retículo D2Q12, D2Q16 ou D2Q17 (SHAN *et al*, 2006), retículos apresentados no Apêndice A. Tais retículos possuem implementações mais trabalhosas que o D2Q9, mas possibilitam a implementação de um código mais estável .

REFERÊNCIAS

ABOOT, I. H; DOENHOFF, A. E. von. **Theory of wing sections, including a summary of airfoil**. 1. ed. New York: Dover, 1959.

ANDERSON, John, D. Jr. **Aircraft performance and design**. 1. ed. Boston: The McGraw-Hill Companies, 1998.

CHEN, S.; DOOLEN, G. D. **Lattice Boltzmann method for fluid flows**. Annual Rev Fluid Mech 30:329-364, 1998.

CHIKATAMARLA, Shyam, S.; KARLIN, Iliya, V. **Lattices for the lattice Boltzmann method**. Physical Review E., p. 046701, 2009.

EXA. **PowerFLOW: a Revolutionary Solution**. Disponível em <<http://exa.com/powerflow.html>>. Acesso em: 14 nov. 2014.

FOX, Robert W.; MCDONALD, Alan, T.; PRITCHARD, Philip, J. **Introdução a mecânica dos fluidos**. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

GHIA, U.; GHIA, K. N.; SHIN, C. T. **High-Re solutions for incompressible flow using the Navier Stokes equations and a multigrid method**. J. Comput. Physical 48, p. 387-411, 1982.

GOLBERT, Daniel. R. **Modelos de Lattice-Boltzmann Aplicados à Simulação de Computacional do Escoamento de Fluidos Incompressíveis**. 2009. Dissertação (Mestrado em Ciências em Modelagem Computacional)-Faculdade de Ciências em Modelagem Computacional, Laboratório Nacional de Computação Científica.

KOMORI, Fabio. S. **Desenvolvimento de um simulador computacional de dinâmica de fluidos utilizando o método de lattice boltzmann**. 2012. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica)-Universidade de São Paulo, Escola Politécnica.

HARRIS, Stewart. **An introduction to theory of the Boltzmann equation**. 1. ed. New York: Dover, 2004.

HOU, S.; ZOU, Q.; CHEN, S.; DOOLEN, G.; COGLEY, A. **Simulation of Cavity Flow by Lattice Boltzmann Method**. J. Comput. Phys. 118, p. 329-347, 1995.

LOCKARD, David. P.; LUO, Li-Shi.; SINGER, Bart. A. **Evaluation of the Lattice-Boltzmann Equation Solver PowerFLOW for Aerodynamic Applications**. Disponível em < http://www.engr.uky.edu/vac/public_html/CTEMPpowerflow.pdf>. Acesso em: 06 nov. 2014.

MALISKA, Clovis. R. **Transferência de calor e mecânica dos fluidos computacional**. Ed. LTC, 2004.

MARIÉ, Simon.; RICOT, Denis.; SAGAUT, Pierre. **Compariso between lattice Boltzmann method and Navier-Stokes high order schemes for computational aeroacoustics**. Journal of Computational Physics, p. 1056-1070, 2009.

MEI, Renwei.; YU, Dazhi.; SHYY, Wei. **Force evaluation in the lattice boltzmann method involving curved geometry**. Disponível em <<http://journals.aps.org/pre/abstract/10.1103/PhysRevE.65.041203>>. Acesso em: 28 mai. 2015.

MEIRA, Rodrigo. E. da C. P. de. **Aplicação do método Lattice Boltzmann ao estudo do escoamento em canais parcialmente porosos**. 2014. 87 f. Trabalho de Conclusão de Curso. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba. 2014.

MELE, Igor. Lattice Boltzmann Method. Journal of Computational Physics. IN: SEMINARIO, 2013, Ljubljana.

MOHAMAD, A. A. **Lattice Boltzmann Method – Fundamentals and Engineering Applications with Computer Codes**. Ed. Springer, 2011.

ROMERO, Jorge. I. B. **Fluid-particle interaction with the immersed boundary Lattice Boltzmann method**. 2012. Tese (Mestrado em Engenharia)- Friedrich Alexander Universidade Erlangen Nuremberg, Departamento de Informática.

SHAN, Xiao. W.; YUAN, Xue-Feng.; CHEN, Hudong. **Kinetic theory representation of hydrodynamics a way beyond the Navier-Stokes equation**. J. Fluid Mech., p. 413-441, 2006.

SUCCI, S. **The lattice Boltzmann equation for fluid dynamics and beyond**. Claredon Press, Oxford, 2001.

SUKOP, M. C.; THORNE JR, D. T. **Lattice Boltzmann Modeling – An Introduction for Geoscientista and Engineers**. Ed. Springer, 2007

VANKA, S. P. **Block-implicit multigrid solution of Navier-Stokes equations in primitive variables**. J. Comput. Phys. 65, p. 138-158, 1986.

YU, Dazhi.; MEI, Renwei.; LUO, Li-Shi.; SHYY, Wei. **Viscous flow computations with the method of lattice Boltzman equation**. Progress in Aerospace Sciences., p. 329-367, 2003.

APÊNDICE A – VALORE DE w_i e c_i PARA DIFERENTES MODELOS DE RETÍCULOS

Os dados apresentados nas tabelas abaixo foram retirados de Shan *et al* (2006), e o sinal TS é uma abreviação para totalmente simétrico, onde os demais vetores se localizam em giro de 90° em relação ao seu anterior.

Tabela 5– Modelos Unidimensionais

Modelos	c_i	w_i
D1Q1	0	1
D1Q2	∓ 1	$\frac{1}{2}$
D1Q3	0 $\mp \sqrt{3}$	$\frac{2}{3}$ $\frac{1}{6}$
D1Q4	$\overline{\mp \sqrt{3} - \sqrt{6}}$ $\overline{\mp \sqrt{3} + \sqrt{6}}$	$(3 + \sqrt{6})/12$ $(3 - \sqrt{6})/12$
D1Q5	0 $\overline{\mp \sqrt{5} - \sqrt{10}}$ $\overline{\mp \sqrt{5} + \sqrt{10}}$	$\frac{8}{15}$ $(7 + 2\sqrt{10})/60$ $(7 - 2\sqrt{10})/60$

Tabela 6– Modelos Bidimensionais

Modelos	c_i	n° c_i	w_i	
D2Q6	(0,0) $2(\cos \frac{2n\pi}{5}, \sin \frac{2n\pi}{5})$	1 5	$\frac{1}{6}$ $\frac{1}{10}$	$n=1, \dots, 5$
D2Q7	(0,0) $2(\cos \frac{n\pi}{3}, \sin \frac{n\pi}{3})$	1 6	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{12}$	$n=1, \dots, 6$

D2Q12	$(r, 0)_{TS}$	4	$1/36$	$r^2 = 6$
	$(\mp s, \mp s)$	4	$(5 + 2\sqrt{5})/45$	$s^2 = (9 - 3\sqrt{5})/4$
	$(\mp t, \mp t)$	4	$(5 - 2\sqrt{5})/45$	$t^2 = (9 + 3\sqrt{5})/4$
D2Q16	$(r, 0)_{TS}$	4	$(5 - 2\sqrt{6})/48$	$r^2 = 3 + \sqrt{6}$
	$(s, 0)_{TS}$	4	$(5 + 2\sqrt{6})/48$	$s^2 = 3 - \sqrt{6}$
	$(r, s)_{TS}$	8	$1/48$	
D2Q17	$(0,0)$	1	$(575 + 193\sqrt{193})/8100$	$r^2 = (120 + 5\sqrt{193})/72$
	$(r, 0)_{TS}$	4	$(3355 - 91\sqrt{193})/18000$	
	$(\mp r, \mp r)$	4	$(655 + 17\sqrt{193})/27000$	
	$(\mp 2r, \mp 2r)$	4	$(685 + 49\sqrt{193})/54000$	
	$(3r, 0)_{TS}$	4	$(1445 + 101\sqrt{193})/16200$	

Tabela 7– Modelos Tridimensionais

Modelos	$\mathbf{c}_i$	n° $\mathbf{c}_i$	w_i	
D3Q13	$(0,0,0)$	1	$2/5$	$r^2 = (5 + \sqrt{5})/2$ $s^2 = (5 - \sqrt{5})/2$
	$(\mp r, \mp s, 0)$	4	$1/20$	
	$(\mp r, 0, \mp s)$	4	$1/20$	
	$(0, \mp r, \mp s)$	4	$1/20$	
D3Q15	$(0,0,0)$	1	$2/9$	
	$(\sqrt{3}, 0, 0)_{TS}$	6	$1/9$	
	$(\mp\sqrt{3}, \mp\sqrt{3}, \mp\sqrt{3})$	8	$1/72$	
D3Q19	$(0,0,0)$	1	$1/3$	
	$(\sqrt{3}, 0, 0)_{TS}$	6	$1/18$	
	$(\sqrt{3}, \sqrt{3}, 0)_{TS}$	12	$1/36$	
D3Q27	$(0,0,0)$	1	$8/27$	
	$(\sqrt{3}, 0, 0)_{TS}$	6	$2/27$	
	$(\sqrt{3}, \sqrt{3}, 0)_{TS}$	12	$1/54$	
	$(\mp\sqrt{3}, \mp\sqrt{3}, \mp\sqrt{3})$	8	$1/216$	
D3Q27	$(0,0,0)$	1	$(720 \mp 8\sqrt{15})/2205$	

	$(r, 0, 0)_{TS}$	6	$(270 \pm 46\sqrt{15})/15435$	$r^2 = (15 \mp \sqrt{15})/2$
	$(s, s, 0)_{TS}$	12	$(162 \mp 41\sqrt{15})/6174$	$s^2 = (6 \pm \sqrt{15})/2$
	$(\mp t, \mp t, \mp t)$	8	$(783 \pm 202\sqrt{15})/24696$	$t^2 = (9 \mp \sqrt{15})/2$
D3Q39	$(0, 0, 0)$	1	1/12	$r^2 = 3/2$
	$(r, 0, 0)_{TS}$	6	1/12	
	$(\mp r, \mp r, \mp r)$	8	1/27	
	$(2r, 0, 0)_{TS}$	6	2/135	
	$(2r, 2r, 0)_{TS}$	12	1/423	
	$(3r, 0, 0)_{TS}$	6	1/1620	

APÊNDICE B – CODIGOS UTILIZADOS NO PRESENTE TRABALHO

Os códigos apresentados estão em linguagem de programação Fortran e não estão no esquema de direções de D2Q9 apresentado na Figura 6. A dedução das direções é simples e está determinada nos códigos.

Lid Driven Caity Flow D2Q9

Inicialização de Variáveis

```
Program Lid
parameter (n=100,m=100)
real f(0:8,0:n,0:m),feq(0:8,0:n,0:m),rho(0:n,0:m)
real w(0:8),cx(0:8),cy(0:8),u(0:n,0:m),v(0:n,0:m)
integer i,j,k
open(2,file='resultCavity1')
open(3,file='Densidade')
uo=0.1
rho0=5.0
dx=1.0
dy=1.0
dt=1.0
visco=0.01
Re=uo*m/visco
print*, "Re=",Re
omega=1.0/(3.0*visco+0.5)
mstep=40000
w(0)=4./9.
do i=1,4
    w(i)=1./9.
end do
do i=5,8
    w(i)=1./36.
end do
cx(0)=0
cx(1)=1
cx(2)=-1
cx(3)=0
cx(4)=0
cx(5)=1
cx(6)=-1
cx(7)=-1
cx(8)=1
cy(0)=0
cy(1)=0
cy(2)=0
cy(3)=1
```

```

cy(4)=-1
cy(5)=1
cy(6)=-1
cy(7)=1
cy(8)=-1

do j=0,m
  do i=0,n
    rho(i,j)=rho0
    u(i,j)=0.0
    v(i,j)=0.0
  end do
end do
do j=0,m
  do i=0,n
    do k=0,8
      f(k,i,j)=0.0
    end do
  end do
end do
do i=1,n-1
  u(i,m)=uo
  v(i,m)=0.0
end do

```

Processo de Colisão, Transmissão, Condições de Contorno e Variáveis

Macroscópicas

```

do kk=1,mstep
  do i=0,n
    !Processo de Colisão
    do j=0,m
      t1=u(i,j)*u(i,j)+v(i,j)*v(i,j)
      do k=0,8
        t2=u(i,j)*cx(k)+v(i,j)*cy(k)
        feq(k,i,j)=rho(i,j)*w(k)*(1.0+3.0*t2+4.5*t2*t2-1.5*t1)
        !if(k.eq.0) feq(k,i,j)=w(k)*rho(i,j)
        f(k,i,j)=omega*feq(k,i,j)+(1.0-omega)*f(k,i,j)
      end do
    end do
  end do
  do j=0,m
    !Processo de Transmissão
    do i=1,n
      f(1,n-i+1,j)=f(1,n-i,j)      !Esquada para Direita
      f(2,i-1,j)=f(2,i,j)          !Direita para Esquerda
    end do
  end do
  do i=0,n
    do j=1,m
      f(3,i,m-j+1)=f(3,i,m-j)      !Baixo para Cima
      f(4,i,j-1)=f(4,i,j)          !Cima para Baixo
    end do
  end do
  do j=1,m
    do i=1,n
      f(5,n-i+1,m-j+1)=f(5,n-i,m-j) !Diagonal ++
      f(6,i-1,j-1)=f(6,i,j)        !Diagonal --
    end do
  end do
end do

```

```

        end do
    end do
    do j=1,m
        do i=1,n
            f(7,i-1,m-j+1)=f(7,i,m-j)      !Diagonal -+
            f(8,n-i+1,j-1)=f(8,n-i,j)      !Diagonal +-
        end do
    end do
    do j=0,m                                !Condições de Contorno
        f(1,0,j)=f(2,0,j)                  !Metodo Bounce Back na Camada Oeste
        f(8,0,j)=f(7,0,j)
        f(5,0,j)=f(6,0,j)
        f(2,n,j)=f(1,n,j)                  !Metodo Bounce Back na Camada Leste
        f(7,n,j)=f(8,n,j)
        f(6,n,j)=f(5,n,j)
    end do
    do i=0,n
        f(3,i,0)=f(4,i,0)                  !Metodo Bounce Back na Camada Sul
        f(5,i,0)=f(6,i,0)
        f(7,i,0)=f(8,i,0)
    end do
    do i=1,n-1                              !Metodo Bounce Back na Camada Norte
        rhon=f(0,i,m)+f(1,i,m)+f(2,i,m)+2.*(f(3,i,m)+f(7,i,m)+f(5,i,m))
        f(4,i,m)=f(3,i,m)
        f(8,i,m)=f(7,i,m)+(rhon*uo/6.0)
        f(6,i,m)=f(5,i,m)-(rhon*uo/6.0)
    end do
    do j=0,m                                !Variáveis Macroscópicas
        do i=0,n
            ssum=0.0
            do k=0,8
                ssum=ssum+f(k,i,j)
            end do
            rho(i,j)=ssum
        end do
    end do
    do i=0,n
        do j=0,m-1
            usum=0.0
            vsum=0.0
            do k=0,8
                usum=usum+f(k,i,j)*cx(k)
                vsum=vsum+f(k,i,j)*cy(k)
            end do
            u(i,j)=usum/rho(i,j)
            v(i,j)=vsum/rho(i,j)
        end do
    end do
end do

```

Plotando Resultados

```

do j=0,m
    write(2,*)(u(i,j),i=0,n) !Velocidade horizontal
end do
do j=0,m

```

```

        write(2,*)(v(i,j),i=0,n) !Velocidade Vertical
    end do
do j=0,m
    write(2,*)(rho,i=0,n) !Densidade
end do
stop
end program Lid

```

Escoamento NACA 0012 D2Q9

Inicialização de Variáveis

```

Program NACA12
parameter (n=400,m=300,c=100)
real f(0:8,0:n,0:m),feq(0:8,0:n,0:m),rho(0:n,0:m),
real w(0:8),cx(0:8),cy(0:8),u(0:n,0:m),v(0:n,0:m),image(0:n,0:m),cs, NACA(0:c)
integer i,j,k,x
real xx, cc, r
open(2,file='Naca')
open(3,file='Densidade')
open(4,file='image')
open(5,file='f')
uo=0.05
obstX = n/4
obstY = m/2
NACA(0)=0
do x=1,c
    xx = x
    cc = c
    r = xx/cc
    NACA(x)=cc*(0.6*(0.29690*(r)**(0.5)-0.126*(r)-0.3516*(r)**(2)+0.2843*(r)**(3)-
0.1015*(r)**(4)))
end do
wall=1
do i =0,n
    do j=0,m
        image(i,j)=0.0
    end do
end do
do i =obstX,obstX+c
    do j =0,m
        if (((j) <= (NACA(i-(n/4))+obstY)).and.((j) >= (obstY-NACA(i-(n/4)))))
image(i,j) = wall
        end do
    end do
end do
rhoo=1.0
dx=1.0
dy=dx
dt=1.0
cs=(dx/dt)/1.73205
visco=0.02
Re=uo*c*dx/visco
print*,"Re=",Re
omega=1.0/(((3.0*dt*visco)/dx**2)+0.5)
mstep=30000

```

```

w(0)=4./9.
do i=1,4
  w(i)=1./9.
end do
do i=5,8
  w(i)=1./36.
end do
cx(0)=0.0
cx(1)=dx/dt
cx(2)=-dx/dt
cx(3)=0.0
cx(4)=0.0
cx(5)=dx/dt
cx(6)=-dx/dt
cx(7)=-dx/dt
cx(8)=dx/dt
cy(0)=0.0
cy(1)=0.0
cy(2)=0.0
cy(3)=dy/dt
cy(4)=-dy/dt
cy(5)=dy/dt
cy(6)=-dy/dt
cy(7)=dy/dt
cy(8)=-dy/dt
do j=0,m
  do i=0,n
    rho(i,j)=rho0
    u(i,j)=0.0
    v(i,j)=0.0
  end do
end do
do j=0,m
  do i=0,n
    do k=0,8
      f(k,i,j)=0.0
    end do
  end do
end do
do j=1,m-1
  u(0,j)=uo
end do

```

Processo de Colisão, Transmissão, Condições de Contorno e Variáveis

Macroscópicas

```

do kk=1,mstep
  do i=0,n
    !Processo de Colisão
    do j=0,m
      t1=u(i,j)*u(i,j)+v(i,j)*v(i,j)
      do k=0,8
        t2=u(i,j)*cx(k)+v(i,j)*cy(k)
        feq(k,i,j)=rho(i,j)*w(k)*(1.0+(t2/cs**(2))+((0.5*t2**2)/cs**4)-
(0.5*t1)/cs**2)
        f(k,i,j)=omega*feq(k,i,j)+(1.0-omega)*f(k,i,j)
      end do
    end do
  end do
end do

```

```

    end do
  end do
  do j=0,m
    do i=1,n
      f(1,n-i+1,j)=f(1,n-i,j)      !Esquerda para Direita
      f(2,i-1,j)=f(2,i,j)          !Direita para Esquerda
    end do
  end do
  do i=0,n
    do j=1,m
      f(3,i,m-j+1)=f(3,i,m-j)      !Baixo para Cima
      f(4,i,j-1)=f(4,i,j)          !Cima para Baixo
    end do
  end do
  do j=1,m
    do i=1,n
      f(5,n-i+1,m-j+1)=f(5,n-i,m-j) !Diagonal ++
      f(6,i-1,j-1)=f(6,i,j)        !Diagonal --
    end do
  end do
  do j=1,m
    do i=1,n
      f(7,i-1,m-j+1)=f(7,i,m-j)    !Diagonal -+
      f(8,n-i+1,j-1)=f(8,n-i,j)    !Diagonal +-
    end do
  end do
  do j=1,m-1
    !Condições de Contorno
    f(1,n,j)=2.*f(1,n-1,j)-f(1,n-2,j) !Metodo Bounce Back na Camada Leste
    f(5,n,j)=2.*f(5,n-1,j)-f(5,n-2,j)
    f(8,n,j)=2.*f(8,n-1,j)-f(8,n-2,j)
  end do
  do i=0,n
    f(3,i,m)=2.*f(3,i,m-1)-f(3,i,m-2) !Metodo Bounce Back na Camada Norte
    f(5,i,m)=2.*f(5,i,m-1)-f(5,i,m-2)
    f(7,i,m)=2.*f(7,i,m-1)-f(7,i,m-2)
    f(4,i,0)=2.*f(4,i,1)-f(4,i,2)      !Metodo Bounce Back na Camada Sul
    f(6,i,0)=2.*f(6,i,1)-f(6,i,2)
    f(8,i,0)=2.*f(8,i,1)-f(8,i,2)
  end do
  do j=1,m-1
    !Metodo Bounce Back na Camada Oeste
    rhon=(f(0,0,j)+f(3,0,j)+f(4,0,j)+2.*(f(2,0,j)+f(7,0,j)+f(6,0,j)))/(1.-uo)
    f(1,0,j)=f(2,0,j)+(2.*rhon*uo/3)
    f(5,0,j)=f(6,0,j)+(rhon*uo/6.0)
    f(8,0,j)=f(7,0,j)+(rhon*uo/6.0)
  end do
  do i =0,n
    !Condições de contorno Bouce-back de rastreamento das quinas
  do aerofólio
    do j =0,m
      if (image(i,j) == wall) then
        if ((image(i,j+1) == wall).and.(image(i,j-1) == wall).and.(image(i-1,j) ==
wall).and.(image(i+1,j) == 0.0)) then
          f(1,i,j)=f(2,i,j)
          f(5,i,j)=f(6,i,j)      !Direita pra esquerda
          f(8,i,j)=f(7,i,j)
        end if
        if ((image(i,j+1) == wall).and.(image(i,j-1) == wall).and.(image(i+1,j) ==
wall).and.(image(i-1,j) == 0.0)) then
          f(2,i,j)=f(1,i,j)
          f(6,i,j)=f(5,i,j)      !Esquerda pra direita

```

```

        f(7,i,j)=f(8,i,j)
    end if
    if ((image(i,j+1) == 0.0).and.(image(i,j-1) == wall).and.(image(i-1,j) ==
wall).and.(image(i+1,j) == wall)) then
        f(3,i,j)=f(4,i,j)
        f(5,i,j)=f(6,i,j)                                !Cima pra baixo
        f(7,i,j)=f(8,i,j)
    end if
    if ((image(i,j+1) == wall).and.(image(i,j-1) == 0.0).and.(image(i-1,j) ==
wall).and.(image(i+1,j) == wall)) then
        f(4,i,j)=f(3,i,j)
        f(6,i,j)=f(5,i,j)                                !Baixo pra cima
        f(8,i,j)=f(7,i,j)
    end if
    if ((image(i,j+1) == 0.0).and.(image(i,j-1) == wall).and.(image(i-1,j) ==
wall).and.(image(i+1,j) == 0.0)) then
        f(3,i,j)=f(4,i,j)
        f(5,i,j)=f(6,i,j)                                !Quina direita pra esquerda e cima pra
baixo-|
        f(7,i,j)=f(8,i,j)
        f(1,i,j)=f(2,i,j)
    end if
    if ((image(i+1,j+1) == 0.0).and.(image(i-1,j-1) == wall).and.(image(i-
1,j+1) == wall).and.(image(i+1,j-1) == wall))then
        f(3,i,j)=f(4,i,j)
        f(5,i,j)=f(6,i,j)                                !Quina Inversa direita pra esquerda e
cima pra baixo
        f(7,i,j)=f(8,i,j)
        f(1,i,j)=f(2,i,j)
    end if
    if ((image(i,j+1) == wall).and.(image(i,j-1) == 0.0).and.(image(i-1,j) ==
wall).and.(image(i+1,j) == 0.0)) then
        f(4,i,j)=f(3,i,j)
        f(6,i,j)=f(5,i,j)                                !Quina direita pra esquerda e baixo
pra cima_|
        f(8,i,j)=f(7,i,j)
        f(1,i,j)=f(2,i,j)
    end if
    if ((image(i+1,j+1) == wall).and.(image(i-1,j-1) == wall).and.(image(i-
1,j+1) == wall).and.(image(i+1,j-1) == 0.0)) then
        f(4,i,j)=f(3,i,j)
        f(6,i,j)=f(5,i,j)                                !Quina Inversa direita pra esquerda e
baixo pra cima
        f(8,i,j)=f(7,i,j)
        f(1,i,j)=f(2,i,j)
    end if
    if ((image(i,j+1) == 0.0).and.(image(i,j-1) == wall).and.(image(i-1,j) ==
0.0).and.(image(i+1,j) == wall)) then
        f(2,i,j)=f(1,i,j)
        f(6,i,j)=f(5,i,j)                                !Quina esquerda pra direita e cima pra
baixo |-
        f(7,i,j)=f(8,i,j)
        f(3,i,j)=f(4,i,j)
    end if
    if ((image(i+1,j+1) == wall).and.(image(i-1,j-1) == wall).and.(image(i-
1,j+1) == 0.0).and.(image(i+1,j-1) == wall)) then
        f(2,i,j)=f(1,i,j)
        f(6,i,j)=f(5,i,j)                                !Quina Inversa esquerda pra direita e
cima pra baixo

```

```

        f(7,i,j)=f(8,i,j)
        f(3,i,j)=f(4,i,j)
    end if
    if ((image(i,j+1) == wall).and.(image(i,j-1) == 0.0).and.(image(i-1,j) ==
0.0).and.(image(i+1,j) == wall)) then
        f(2,i,j)=f(1,i,j)
        f(6,i,j)=f(5,i,j)                                !Quina esquerda pra direita e baixo
pra cima|_
        f(7,i,j)=f(8,i,j)
        f(4,i,j)=f(3,i,j)
    end if
    if ((image(i+1,j+1) == wall).and.(image(i-1,j-1) == 0.0).and.(image(i-
1,j+1) == wall).and.(image(i+1,j-1) == wall)) then
        f(2,i,j)=f(1,i,j)
        f(6,i,j)=f(5,i,j)                                !Quina esquerda pra direita e baixo
pra cima
        f(7,i,j)=f(8,i,j)
        f(4,i,j)=f(3,i,j)
    end if
end if
end do
end do
do j=0,m                                                    !Variáveis Macroscópicas
    do i=0,n
        ssum=0.0
        do k=0,8
            ssum=ssum+f(k,i,j)
        end do
        rho(i,j)=ssum
    end do
end do
do i=1,n
    do j=0,m
        usum=0.0
        vsum=0.0
        do k=0,8
            usum=usum+f(k,i,j)*cx(k)
            vsum=vsum+f(k,i,j)*cy(k)
        end do
        u(i,j)=usum/rho(i,j)
        v(i,j)=vsum/rho(i,j)
    end do
end do
do j=1,m-1          !Definição das velocidades na fronteira para aplicação das camadas
abertas
    v(n,j)=0.0
end do
do i=0,n
    v(i,m)=0.0
    v(i,0)=0.0
end do
do i =0,n
    do j =0,m
        if (image(i,j) == wall) then
            u(i,j)=0.0
            v(i,j)=0.0
        end if
    end do
end do
end do

```

```
end do
```

Plotando Resultados

```
do j=0,m
  write(2,*)(u(i,j),i=0,n)
end do
do j=0,m
  write(2,*)(v(i,j),i=0,n)
end do
do j=0,m
  write(3,*)(rho(i,j),i=0,n)
end do
do j=0,m
  write(4,*)(image(i,j),i=0,n)
end do
do k=0,8
  do j=0,m
    write(5,*)(f(k,i,j),i=0,n)
  end do
end do
stop
end program NACA12
```