

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

CANDIDO RICARDO TOMAZONI COREIA

**APLICAÇÃO DE SISTEMAS DE ABSORVEDORES DINÂMICOS EM
ESTRUTURAS**

PATO BRANCO

2018

CANDIDO RICARDO TOMAZONI COREIA

**APLICAÇÃO DE SISTEMAS DE ABSORVEDORES DINÂMICOS EM
ESTRUTURAS**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Civil, do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Área de Concentração: Materiais e Engenharia de Estruturas.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Rogério Novak.

PATO BRANCO

2018

C797a Coreia, Candido Ricardo Tomazoni.

Aplicação de sistemas de absorvedores dinâmicos em estruturas / Candido Ricardo Tomazoni Coreia. -- 2018.

89 f. : il. ; 30 cm.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Rogério Novak

Dissertação (Mestrado) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil. Pato Branco, PR, 2018.

Bibliografia: f. 87 - 89.

1. Dinâmica estrutural. 2. Análise estrutural. 3. Vibração - Controle. I. Novak, Paulo Rogério, orient. II. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil. III. Título.

CDD 22. ed. 624



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Câmpus Pato Branco

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil



TERMO DE APROVAÇÃO Nº 27

Título da Dissertação

"Aplicação de Absorvedores Dinâmicos de Vibração em Estruturas"

Autor

Candido Ricardo Tomazoni Coreia

Esta dissertação foi apresentada às 13h30min do dia 31 de julho de 2018, como requisito parcial para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA CIVIL– Linha de pesquisa em Análise de Estruturas, no Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil. O autor foi arguido pela Banca Examinadora abaixo assinada, a qual, após deliberação, considerou o trabalho aprovado.

Prof. Dr. Paulo Rogerio Novak

UTFPR/PB
Presidente

Prof. Dr. Fábio Rodrigo Mandello Rodrigues

UTFPR/PB
Examinador

Prof. Dr. Francisco Augusto Aparecido Gomes

UTFPR/PB
Examinador

Prof. Dr. Key Fonseca de Lima

PUC/PR
Examinador

Visto da Coordenação

Prof. Dr. Ney Lyzandro Tabalipa

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em

Engenharia Civil- PPGEC

O Termo de Aprovação assinado encontra-se na Coordenação do PPGEC

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer o apoio e os conselhos de toda minha família, onde sem o qual não seria possível vencer esse desafio.

Agradeço ao meu orientador Prof. Dr. Paulo Rogério Novak, pelo conhecimento compartilhado, pela disposição e paciência.

Aos professores do curso pelos conselhos e conteúdos ministrados.

Agradeço a CAPES pela provisão da bolsa de mestrado.

Agradeço principalmente a minha noiva, pelo carinho, compreensão e dedicação em toda a trajetória desde a submissão do pré-projeto até aqui, um muito obrigado. Amo você.

Enfim, a todos os que por algum motivo contribuíram para a realização desta pesquisa.

RESUMO

COREIA, Candido Ricardo Tomazoni. Aplicação de sistemas de absorvedores dinâmicos em estruturas. 2018. Dissertação – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Pato Branco, 2018.

Problemas com vibrações excessivas tem assolado a humanidade desde os tempos primordiais, tanto pela ação de eventos sísmicos quanto pela ação de ventos nas estruturas. O presente trabalho aborda a um problema de vibração, o qual consiste na análise de uma estrutura excitada por uma vibração harmônica. O objetivo deste trabalho consiste em simular numericamente e experimentalmente a resposta de uma estrutura com um grau de liberdade solicitada por uma excitação harmônica, simulando a ação de ventos com frequência coincidindo com a frequência natural da estrutura e posteriormente implantar um absorvedor dinâmico de vibrações sintonizado, para reduzir o deslocamento da estrutura. Para tal, inicialmente são determinadas as equações de movimento e frequências naturais da estrutura, posteriormente as mesmas são implementadas no software Matlab e com auxílio dos métodos numéricos Runge Kutta e Transformada Rápida de Fourier, é realizada a simulação. A partir dos dados obtidos é então realizada a sintonização e implantação do absorvedor dinâmico na estrutura, onde é realizada uma nova simulação. Após as simulações numéricas, são então realizadas simulações em experimentais em laboratório visando comparar os dados obtidos numericamente. No tratamento dos dados, verificou-se uma redução de 97,66% na aceleração da estrutura, entretanto o sistema apresenta grande sensibilidade a variações de frequência, reduzindo assim sua banda de controle efetiva, outro ponto que chamou atenção foi a resposta do absorvedor dinâmico, o qual apresentou grandes deslocamentos.

Palavras-chave: Absorvedores Dinâmicos, Controle de Vibrações, Análise Dinâmica.

ABSTRACT

COREIA, Candido Ricardo Tomazoni. Application of dynamic absorber systems in structures. 2018. Dissertation – Post – Graduate Program in Civil Engineering, Federal Technological University of Paraná. Pato Branco, 2018.

Problems with excessive vibrations have plagued humanity since primordial times, both by the action of seismic events and by the action of winds in the structures. The present work deals with a vibration problem, which consists of the analysis of a structure excited by a harmonic vibration. The objective of this work is to simulate numerically and experimentally the response of a structure with a degree of freedom required by a harmonic excitation, simulating the action of winds frequently coinciding with the natural frequency of the structure and later implant a dynamic absorber of vibrations tuned, to reduce the displacement of the structure. For this, initially the motion equations and natural frequencies of the structure are determined, later they are implemented in the Matlab software and with the help of the numerical methods Runge Kutta and Fast Transform of Fourier, the simulation is performed. From the obtained data the tuning is implantation of the dynamic absorber in the structure is carried out, where a new simulation is performed. After the numerical, simulations are performed in experimental in the laboratory to compare the data obtained numerically. In the data treatment, there was a reduction of 97.66% in the acceleration of the structure, however the system presents great sensitivity to frequency variations, thus reducing its effective control band, another point that called attention was the response of the dynamic absorber, which presented great displacements.

Keywords: Dynamic Absorbers, Vibration Control, Dynamic Analysis.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 Sistema massa-mola com 1 grau de liberdade. (Fonte: o Autor).	27
Figura 2 Sistema massa-mola 1 grau de liberdade com absorvedor dinâmico. (Fonte: o Autor).	29
Figura 3 Sistema barra mola com um grau de liberdade (Fonte: o Autor).	31
Figura 4 Sistema barra mola 1 grau de liberdade com absorvedor dinâmico. (Fonte: o Autor).	33
Figura 5 Sistema massa-mola 1 grau de liberdade sob vibração forçada. (Fonte: o Autor).	36
Figura 6 Sistema massa-mola 1 grau de liberdade com absorvedor dinâmico sob vibração forçada. (Fonte: o Autor).	37
Figura 7 Sistema barra mola com um grau de liberdade sob vibração forçada. (Fonte: o Autor).	39
Figura 8 Sistema barra mola 1 grau de liberdade com absorvedor dinâmico. (Fonte: o Autor).	41
Figura 9 Apoio rotulado. (Fonte: O autor).	44
Figura 10 Esquema de montagem do sistema com um grau de liberdade e posicionamento dos acelerômetros. (Fonte: O autor).	44
Figura 11 Acelerômetros. (Fonte: O autor).	45
Figura 12 Analisador de sinal. (Fonte: O autor).	45
Figura 13 Motor com massa desbalanceada. (Fonte: O autor).	46
Figura 14 Inversor de fase. (Fonte: O autor).	46
Figura 15 Esquema de montagem do sistema com um grau de liberdade e posicionamento dos acelerômetros. (Fonte: O autor).	47
Figura 16 Esquema de montagem do sistema com dois graus de liberdade e posicionamento dos acelerômetros. (Fonte: O autor).	48
Figura 17 Sistema vibratório experimental. (Fonte: O autor).	48

Figura 18 Resposta numérica do sistema massa mola não controlado no domínio do tempo sob vibração livre. (Fonte: O autor).....	51
Figura 19 Resposta numérica do sistema massa mola não controlado no domínio da frequência sob vibração livre. (Fonte: O autor).....	51
Figura 20 Resposta numérica e resposta analítica do sistema massa mola não controlado no domínio do tempo sob vibração livre. (Fonte: O autor).....	52
Figura 21 Resposta numérica e resposta analítica do sistema massa mola não controlado no domínio da frequência sob vibração livre. (Fonte: O autor).....	52
Figura 22 Resposta numérica do sistema massa mola controlado e não controlado no domínio do tempo sob vibração livre. (Fonte: O autor).	55
Figura 23 Resposta numérica do absorvedor dinâmico no domínio do tempo sob vibração livre. (Fonte: O autor).....	55
Figura 24 Resposta numérica do sistema massa mola controlado e não controlado no domínio da frequência sob vibração livre. (Fonte: O autor).	56
Figura 25 Resposta numérica do absorvedor dinâmico no domínio da frequência sob vibração livre. (Fonte: O autor).	56
Figura 26 Resposta numérica do sistema barra mola não controlado no domínio do tempo sob vibração livre. (Fonte: O autor).	59
Figura 27 Resposta numérica do sistema barra mola não controlado no domínio da frequência sob vibração livre. (Fonte: O autor).....	59
Figura 28 Resposta numérica do sistema barra mola controlado e não controlado no domínio do tempo sob vibração livre. (Fonte: O autor).	60
Figura 29 Resposta numérica do absorvedor dinâmico no domínio do tempo sob vibração livre. (Fonte: O autor).....	62
Figura 30 Resposta numérica do sistema barra mola controlado no domínio da frequência sob vibração livre. (Fonte: O autor).....	62
Figura 31 Resposta numérica do absorvedor dinâmico no domínio da frequência sob vibração livre. (Fonte: O autor).	63
Figura 32 Resposta numérica do sistema massa mola não controlado no domínio do tempo sob vibração forçada. (Fonte: O autor).	65

Figura 33 Resposta numérica do sistema massa mola não controlado no domínio da frequência sob vibração forçada. (Fonte: O autor).	66
Figura 34 Resposta numérica do sistema massa mola controlado no domínio do tempo sob vibração forçada. (Fonte: O autor).	67
Figura 35 Resposta numérica do absorvedor dinâmico no domínio do tempo sob vibração forçada. (Fonte: O autor).	68
Figura 36 Resposta numérica do sistema massa mola controlado no domínio da frequência sob vibração forçada. (Fonte: O autor).	68
Figura 37 Resposta numérica do absorvedor dinâmico no domínio da frequência sob vibração forçada. (Fonte: O autor).	69
Figura 38 Resposta numérica do sistema barra mola não controlado no domínio do tempo sob vibração forçada. (Fonte: O autor).	71
Figura 39 Resposta numérica do sistema barra mola não controlado no domínio da frequência sob vibração forçada. (Fonte: O autor).	71
Figura 40 Resposta numérica do sistema barra mola sob vibração forçada no domínio do tempo controlado e não controlado. (Fonte: O autor).	73
Figura 41 Resposta numérica do absorvedor dinâmico no domínio do tempo sob vibração forçada. (Fonte: O autor).	73
Figura 42 Resposta numérica do sistema barra mola sob vibração forçada no domínio da frequência, controlado e não controlado. (Fonte: O autor).	74
Figura 43 Resposta numérica do absorvedor dinâmico no domínio da frequência sob vibração forçada. (Fonte: O autor).	74
Figura 44 Resposta experimental sistema barra mola sob vibração forçada no domínio do tempo. (Fonte: O autor).	77
Figura 45 Resposta sistema barra mola sob vibração forçada no domínio da frequência. (Fonte: O autor).	77
Figura 46 Resposta sistema barra mola sob vibração forçada no domínio do tempo controlado e não controlado. (Fonte: O autor).	78
Figura 47 Resposta sistema barra mola sob vibração forçada no domínio do tempo controlado. (Fonte: O autor).	79

Figura 48 Resposta do absorvedor dinâmico sob vibração forçada no domínio do tempo. (Fonte: O autor).....	79
Figura 49 Resposta sistema barra mola sob vibração forçada no domínio da frequência controlado e não controlado. (Fonte: O autor).	81
Figura 50 Resposta sistema barra mola sob vibração forçada no domínio da frequência controlado. (Fonte: O autor).....	82
Figura 51 Resposta do absorvedor dinâmico sob vibração forçada no domínio da frequência. (Fonte: O autor).	82

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Propriedades do sistema massa mola com um grau de liberdade.	28
Tabela 2– Propriedades do sistema massa mola com dois graus de liberdade....	30
Tabela 3 – Propriedades do sistema barra mola com um grau de liberdade	32
Tabela 4 – Propriedades do sistema barra mola com dois graus de liberdade	35
Tabela 5 – Propriedades do sistema massa mola com um grau de liberdade sob vibração forçada.....	36
Tabela 6– Propriedades do sistema massa mola com dois graus de liberdade sob vibração forçada.....	38
Tabela 7 – Propriedades do sistema barra mola com um grau de liberdade	40
Tabela 8 – Propriedades do sistema barra mola com dois graus de liberdade	42
Tabela 9 Posição dos acelerômetros e comprimento da barra	43
Tabela 10 Posição dos acelerômetros e comprimento da barra	47
Tabela 11 Relação de massas entre a estrutura principal e o absorvedor dinâmico	49
Tabela 12 Comparação entre resposta numérica e resposta analítica do sistema massa mola.....	53
Tabela 13 Relação de massas entre a estrutura principal e o absorvedor dinâmico.	54
Tabela 14 Frequências naturais do sistema massa mola controlado e não controlado sob vibração livre	57
Tabela 15 Resposta do sistema massa mola controlado e não controlado sob vibração livre	57
Tabela 16 Resposta numérica do sistema barra mola.....	59
Tabela 17 Relação de massas entre a estrutura principal e o absorvedor dinâmico	61

Tabela 18 Frequências naturais do sistema barra mola controlado e não controlado sob vibração livre.	63
Tabela 19 Resposta do sistema barra mola controlado e não controlado sob vibração livre.	64
Tabela 20 Resposta numérica do sistema massa mola.....	66
Tabela 21 Frequências naturais do sistema massa mola controlado e não controlado sob vibração forçada.	69
Tabela 22 Resposta do sistema massa mola controlado e não controlado sob vibração forçada.....	70
Tabela 23 Resposta numérica do sistema barra mola.....	72
Tabela 24 Frequências naturais do sistema barra mola controlado e não controlado sob vibração forçada.	75
Tabela 25 Resposta do sistema massa mola controlado e não controlado sob vibração forçada.....	75
Tabela 26 Resposta experimental do sistema barra mola.	78
Tabela 27 Relação de massas entre a estrutura principal e o absorvedor dinâmico.	80
Tabela 28 Frequências naturais do sistema barra mola controlado e não controlado sob vibração forçada.	83
Tabela 29 Resposta do sistema barra mola controlado e não controlado, sob vibração forçada.....	83

Sumário

1	INTRODUÇÃO	15
1.1	CONTEXTUALIZAÇÃO	15
1.2	OBJETIVOS	17
1.2.1	Objetivos Gerais	17
1.2.2	Objetivos Específicos	17
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	18
2.1	CONTROLE DE VIBRAÇÕES	18
2.2	TIPOS DE ABSORVEDORES DE VIBRAÇÃO	19
2.2.1	Absorvedores Passivos	19
2.2.2	Absorvedores Ativos	19
2.2.3	Absorvedores Adaptativos	20
2.3	VALORES ÓTIMOS DE AMORTECIMENTO	20
2.4	APLICAÇÕES PRÁTICAS	21
3	METODOLOGIA	27
3.1	FORMULAÇÃO DO PROBLEMA SOB VIBRAÇÃO LIVRE	27
3.1.1	Sistema Massa Mola com Vibração Livre Resposta Numérica	27
3.1.2	Sistema Massa Mola Sob Vibração Livre Resposta Analítica	28
3.1.3	Sistema Massa Mola Sob Vibração Livre Com Absorvedor Dinâmico Resposta Numérica	28
3.1.4	Sistema Barra Mola Vibração Livre Resposta Numérica	30
3.1.5	Sistema Barra Mola Vibração Livre Com Absorvedor Dinâmico Resposta Numérica	32
3.2	FORMULAÇÃO DO PROBLEMA SOB VIBRAÇÃO FORÇADA	35
3.2.1	Sistema Massa Mola Vibração Forçada Resposta Numérica	35
3.2.2	Sistema Massa Mola Vibração Forçada Com Absorvedor Dinâmico Resposta Numérica	37
3.2.3	Sistema Barra Mola Vibração Forçada Amortecida Resposta Numérica	38
3.2.4	Sistema Barra Mola Vibração Forçada Com Absorvedor Dinâmico Resposta Numérica	40
3.3	DESCRIÇÃO DO MODELO EXPERIMENTAL	43
4	ANÁLISE DE RESULTADOS	50
4.1	VIBRAÇÃO LIVRE	50
4.1.1	Sistema Massa Mola Com 1 Grau de Liberdade Sob Vibração Livre: Resposta Numérica e Analítica	50

4.1.2	Sistema Massa Mola Sob Vibração Livre Com Absorvedor Dinâmico: Resposta Numérica	53
4.1.3	Sistema Barra Mola 1 Grau de Liberdade Sob Vibração Livre Resposta Numérica	58
4.1.4	Sistema Barra Mola Sob Vibração Livre Com Absorvedor Dinâmico: Resposta Numérica	59
4.2	VIBRAÇÃO FORÇADA	65
4.2.1	Sistema Massa Mola Com 1 Grau De Liberdade, Vibração Forçada: Resposta Numérica	65
4.2.2	Sistema Massa Mola Vibração Forçada Com Absorvedor Dinâmico Resposta Numérica	66
4.2.3	Sistema Barra Mola Com 1 Grau De Liberdade Sob Vibração Forçada: Resposta Numérica	71
4.2.4	Sistema Barra Mola Com Absorvedor Dinâmico Sob Vibração Forçada: Resposta Numérica	72
4.3	SISTEMA EXPERIMENTAL	76
4.3.1	Sistema Barra Mola 1 Grau de Liberdade Vibração Forçada Experimental.....	76
4.3.2	Sistema Barra Mola Com Absorvedor Dinâmico Sob Vibração Forçada Experimental.....	78
5	CONCLUSÃO	85
5.1	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	86
6	REFERÊNCIAS	87

1 INTRODUÇÃO

1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO

Problemas de vibrações excessivas em estruturas tem preocupado a humanidade desde os tempos primordiais, seja pela incidência da ação de eventos sísmicos ou pela incidência de ventos nas estruturas. Estes fatores, fundamentaram o desenvolvimento e a busca por novas tecnologias de construção e controle de ações, as quais buscam por estruturas mais eficientes, estáveis e seguras para residências, pontes, edifícios, e demais estruturas utilizadas pelo homem.

Essas estruturas, quando solicitadas por cargas dinâmicas, como ventos, abalos sísmicos, ou até mesmo o tráfego de veículos ou pessoas, são propensas a apresentar uma resposta ao carregamento aplicado e em alguns casos, essa resposta pode apresentar um deslocamento excessivo na estrutura, levando sérios riscos, seja na integridade da estrutura, ou até mesmo aos usuários (SOONG e SPENCER, 2002).

Os estudos sobre ações dinâmicas em estruturas se intensificaram após o colapso da ponte Tacoma Narrows, em 7 de novembro de 1940, onde a incidência de ventos com aproximadamente 70 quilômetros por hora em contato com a estrutura da ponte formou um desprendimento de vórtices, o qual excitou a estrutura com uma frequência próxima a uma de suas frequências naturais, resultando no fenômeno conhecido como ressonância, produzindo oscilações com amplitudes de até 4,25 metros em ambos os lados da pista de rolamento, levando a estrutura ao colapso. (BRAUN, 1982).

No Brasil a evolução dos estudos sobre ações do vento se inicia a partir de 1972, quando entrou em operação o Túnel de Vento Joaquim Blessmann da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). (STANDERSKI, 2012), onde o mesmo auxiliou na elaboração de diversos trabalhos científicos, que vão desde artigos científicos a teses de doutorado, além da análise dinâmica de diversos edifícios comerciais e residenciais.

Apesar da eficiência comprovada da análise dinâmica em túnel de vento, o processo demanda de equipamentos específicos, além de um período de desenvolvimento da estrutura em escala adequada. Estes fatores acabam elevando os custos da análise estrutural via túnel de vento e restringindo sua utilização.

Entretanto com a evolução computacional e o desenvolvimento de novas metodologias de análise e descrição estrutural, ensaios em túnel de vento podem ser utilizados apenas como uma forma de validar os modelos de solução baseados em métodos de aproximação numérica elevando, portanto, a precisão e confiabilidade nos resultados.

De acordo com Rao (2008), vibrações estão diretamente ligadas a maioria das atividades humanas, como por exemplo o deslocamento de veículos ou pessoas sobre uma estrutura, a vibração de um motor, a vibração dos tímpanos ao receber uma onda sonora. Algumas vibrações representam graves problemas quando presentes em elementos, como estruturas prediais, estruturas de pontes ou passarelas. Com a evolução da engenharia e o desenvolvimento de materiais mais eficientes essas estruturas possuem vãos cada vez maiores e seções cada vez mais esbeltas, portanto mais suscetíveis a incidência de vibrações excessivas.

A susceptibilidade a vibrações excessivas acaba por restringir o potencial de utilização de estruturas mais leves e flexíveis. Entretanto existem diversos métodos de controle de vibrações, além de vários métodos em desenvolvimento, os quais apresentam elevado índice de eficiência no controle de respostas estruturais onde tem como finalidade explorar ao máximo a eficiência de estruturas mais leves através da utilização de materiais mais leves e mais resistentes, além de garantir uma vida útil prolongada as estruturas, proporcionando inclusive uma possível redução nos custos de implantação de estruturas novas.

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 Objetivos Gerais

O objetivo principal deste trabalho é simular numericamente e experimentalmente a eficiência de absorvedores dinâmicos de vibração, quando implantados em estruturas reticuladas do tipo barra mola quando solicitadas por oscilações com frequências próximas às frequências naturais da estrutura, avaliando a resposta dinâmica do sistema antes e após a instalação de um absorvedor dinâmico de vibrações, buscando um sistema eficiente na atenuação das ações dinâmicas evitando acréscimos superiores a 10% na massa da estrutura.

1.2.2 Objetivos Específicos

1. Definir a frequência natural e a equação de movimento de um sistema discreto do tipo massa mola com um grau de liberdade;
2. Definir a frequência natural e equação de movimento de sistema discreto do tipo barra mola com um grau de liberdade;
3. Discretizar numericamente os parâmetros para um absorvedor dinâmico de vibrações para o sistema massa mola e para o sistema barra mola;
4. Simular numericamente a resposta dinâmica da estrutura em função da aceleração antes e após a instalação do absorvedor dinâmico de vibrações
5. Desenvolver em laboratório um sistema de absorvedor dinâmico de vibrações passível, para aplicação em estrutura reticulada do tipo barra;
6. Comparar os resultados obtidos nas simulações numéricas com os resultados obtidos nos ensaios laboratoriais.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 CONTROLE DE VIBRAÇÕES

Quando se fala de controle de vibrações, um dos primeiros tópicos que surge é o do fenômeno conhecido como ressonância, o qual ocorre pela sintonização entre os valores da frequência natural da estrutura e a frequência de excitação. Esse fenômeno resulta em um comportamento caótico da estrutura, apresentando grandes amplitudes de deslocamento durante o período de excitação, reduzindo a vida útil da estrutura e proporcionando desconforto e insegurança aos usuários.

Segundo Rao (2008), a primeira hipótese a ser analisada no controle de vibrações é a alteração da frequência da fonte de vibrações, buscando-se evitar a sintonização da mesma com a frequência natural da estrutura analisada. Entretanto, esse método nem sempre pode ser aplicado, pois algumas vibrações não podem ser controladas na fonte, como por exemplo, a ação de ventos e movimentações sísmicas.

Existem vários métodos de controle de vibrações em estruturas, dos quais se pode destacar: o controle de frequências naturais da estrutura, introdução de amortecimento, isolamento de vibração e a implantação de absorvedor auxiliar de vibração. De acordo com Rao (2008), os mesmos podem ser caracterizados da seguinte forma:

- Controle das frequências naturais da estrutura

A frequência natural de uma estrutura pode ser ajustada alterando os parâmetros de massa e rigidez da mesma, evitando a sintonização da mesma com a frequência de excitação da estrutura;

- Introdução de amortecimento

Em casos onde o sistema apresenta necessidade de trabalhar em uma determinada faixa de frequência, talvez não seja possível evitar a ressonância sobre todas as condições de operação. Nesses casos pode-se restringir a amplitude de resposta da estrutura com a implantação de um dispositivo dissipador de energia ao sistema (amortecimento);

- Isolamento de vibração
Esse método consiste em reduzir os efeitos indesejados através da implantação de um elemento resiliente entre a massa vibratória, e a fonte de excitação, reduzindo a transmissão de energia entre as mesmas;
- Implantação de absorvedor auxiliar de vibração
Em casos onde a frequência da excitação está próxima a frequência natural do sistema se pode utilizar um sistema de absorvedor dinâmico de vibrações, projetado de forma a alterar a frequência natural do sistema para uma faixa diferente da frequência de excitação.

2.2 TIPOS DE ABSORVEDORES DE VIBRAÇÃO

2.2.1 Absorvedores Passivos

Segundo Soong e Spencer (2002), absorvedores de vibração passivos apresentam grande potencial de aplicação tanto na redução de respostas estruturais que proporcionem riscos ou desconforto aos usuários, quanto em reabilitações de estruturas antigas. Sendo caracterizados por aumentar a capacidade de dissipação de energia nos sistemas que são implantados, operando geralmente com base em: deslizamento por atrito, deformação de sólidos e movimentação de fluidos visco elásticos através de orifícios.

Segundo Marques (2000), são projetados para transferir a energia entre a estrutura principal e a massa auxiliar, de forma que sua frequência natural seja sintonizada em uma faixa de excitação fixa. No entanto, o sistema apresenta grande sensibilidade a variações de frequências de excitação, tornando-se inviáveis em casos com variação de frequência.

2.2.2 Absorvedores Ativos

Segundo Marques (2000), consistem na implantação de um atuador posicionado entre a estrutura e a massa do absorvedor, exercendo uma força periódica controlada, a qual pode modificar sua sintonização de acordo com a solicitação inicial, tornando possível ampliar sua faixa de frequências de operação, sem alterar sua massa, rigidez ou amortecimento.

De acordo com Soong e Spencer (2002), o sistema é composto por um sensor localizado sobre a estrutura responsável por medir as excitações externas

e/ou respostas da estrutura, um dispositivo para processar a informação recebida e, determinar a força de controle necessária, através de um algoritmo de controle, e atuadores, alimentado por fonte de energia externa, responsável pela aplicação da força de controle.

Soong e Spencer (2002), salientam que, apesar da eficiência de sistemas de absorvedores ativos nas demais engenharias, o controle de estruturas de engenharia civil apresenta várias características distintas, dificultando a implementação do sistema de controle, geralmente devido a não linearidade das propriedades físicas da estrutura, além da escala de força envolvida e da limitação do número de sensores e atuadores.

2.2.3 Absorvedores Adaptativos

Consistem na união das melhores características de cada um dos sistemas anteriores. Tratam de um sistema em que a massa, a rigidez e o amortecimento podem ser variados continuamente e automaticamente, fazendo com que os mesmos estejam sempre sintonizados. (MARQUES, 2000).

2.3 VALORES ÓTIMOS DE AMORTECIMENTO

Em seu estudo sobre valores ótimos de amortecimento Rana e Soong (1998), inicialmente avaliaram uma estrutura com um grau de liberdade com um fator de amortecimento elevado, associado a um único absorvedor dinâmico de vibrações, onde constataram uma baixa redução da resposta dinâmica do sistema. Ao verificarem a resposta da mesma estrutura com baixo fator de amortecimento e submetida a uma solicitação harmônica, os autores verificaram uma melhora considerável na redução da resposta do sistema. Com objetivo de otimizar seu sistema, estes discretizaram o mesmo em 3 graus de liberdade, equipando o com múltiplos amortecedores de massa sintonizada, configurando-os para operarem nas frequências dos três primeiros modos de vibração. O melhor desempenho do sistema foi alcançado quando a estrutura oscilava no primeiro modo de vibração.

Pinkaew e Fujimo (2001), utilizando a teoria do controle ótimo em amortecedores de massa sintonizada semi-ativos, em estruturas com um grau de liberdade, chegaram à conclusão que um amortecedor de massa sintonizada semi-ativo apresenta eficiência equivalente a um sistema passivo com massa quatro

vezes maior. Representando uma redução significativa nos custos quando comparados a sistemas ativos, além de apresentar nível de eficiência superior a sistemas passivos convencionais.

Yamaguchi e Harpornchai (1993) analisaram as características fundamentais de múltiplos amortecedores de massa sintonizada, avaliando o sistema com frequências naturais distribuídas e com variação de número de amortecedores. Os autores concluíram que a efetividade do sistema está diretamente ligada ao intervalo de frequência dos amortecedores. Afirmando assim, que o sistema de múltiplos amortecedores de massa sintonizado é mais eficiente que amortecedores de massa sintonizada simples.

Ospina (2008), em seu trabalho sobre parâmetros ótimos para múltiplos amortecedores de massa sintonizados interligados, aprimorou a eficiência de sistemas de dissipação, alterando o tipo de ligação entre os amortecedores, além dos parâmetros ótimos de cálculo, evidenciando que, sistemas interligados apresentam maior desempenho em relação a sistemas independentes.

Yang, Sedaghati e Esmailzadeh (2009), apresentam em seu trabalho uma investigação detalhada sobre a atenuação de vibrações em vigas com estrutura curva e contínua, submetidas a carregamentos aleatórios. Através do método dos elementos finitos, definiu os parâmetros ótimos de amortecimento e rigidez, buscando uma maior eficiência para absorvedores dinâmicos de vibração. Concluiu-se que o dispositivo otimizado pode suprimir a vibração de uma viga curva eficientemente em torno da frequência de ressonância da estrutura principal sujeita a carregamento aleatório. Contudo, o sistema mostrou-se bastante sensível a variações de frequência de excitação, devido às restrições características de absorvedores passivos.

2.4 APLICAÇÕES PRÁTICAS

A Passarela do Millennium em Londres quando inaugurada, apresentou vibrações laterais acima dos limites de serviço citados na literatura, levando a mesma a sua interdição dois dias após inaugurada, para a instalação de 52 amortecedores de massa sincronizada dispostos ao longo de seus três vãos de 81, 144 e 108 m para reduzir vibrações verticais, além de 37 amortecedores viscofluidos para atenuar as vibrações horizontais, (Gomes, 2006).

Battista (2004) desenvolveu um sistema composto de múltiplos atenuadores dinâmicos, sincronizados com objetivo de reduzir a amplitude de oscilação produzida pelo desprendimento de vórtices durante a incidência de correntes de vento com baixas velocidades na ponte Rio-Niterói. A ponte executada em vigas caixão, apresentava comportamento aéro elástico, quando solicitada por ventos acima de 50 km/h, devido a frequência de excitação coincidir com o primeiro modo de flexão vertical da estrutura. Foram avaliadas diversas formas de reduzir a amplitude das oscilações, dentre as quais, se destaca a fixação de acessórios aerodinâmicos, porém a hipótese foi descartada devido ao acréscimo de peso exorbitante na estrutura, além da baixa efetividade do método quando testado em túnel de vento. Com objetivo de melhorar o conforto e segurança dos usuários, foi desenvolvido e instalado um sistema com 32 atenuadores dinâmicos, quase-sincronizados, responsáveis por atenuar as amplitudes de oscilação.

Gu, Chen e Chang (2001), realizaram estudo paramétrico com objetivo de controlar as vibrações na ponte Yangpu na China, variando as disposições dos amortecedores de massa sintonizada múltiplos em sete posições distintas. Concluíram que, a eficiência do sistema está em função da razão de frequência, da largura de banda e de forma menos significativa, da razão de amortecimento.

Gomes (2006), realizou um estudo numérico, evidenciando o comportamento dinâmico de uma passarela de pedestres quando solicitada por efeitos de caminhada e corrida. Ao submeter a estrutura a uma análise de vibrações livres, foi constatado que, as primeiras seis frequências naturais da mesma se encontram abaixo de 5 Hz, ou seja, encontram-se em uma faixa crítica de frequências segundo a literatura. Tal fato resulta em oscilações verticais sucintas, mesmo quando solicitada pelo deslocamento de uma única pessoa sobre a estrutura. Fato que, justificou o estudo acerca do controle de vibrações através do sistema de amortecedor de massa sintonizado múltiplo, além de um sistema de travamento adicional com a finalidade de enrijecer a estrutura. Com o objetivo de desenvolver um sistema eficiente e que não aumentasse o peso próprio da estrutura, analisaram-se absorvedores com massas distintas, além da variação em sua quantidade. Dessa forma, o sistema com maior eficiência foi alcançado com 20 amortecedores de 150 kg distribuídos ao longo da estrutura.

Ávila (2002) analisou estruturas com vários graus de liberdades submetidas a carregamentos dinâmicos, equipados com amortecedores híbridos, ativos e

passivos. Concluiu-se que, sistemas equipados com amortecedores de massa sintonizada híbridos são mais efetivos que sistemas passivos. A autora reduziu o sistema a um grau de liberdade através do método de superposição modal e desenvolveu um algoritmo que reduz a amplitude da resposta harmônica permanente.

Díaz (2014), em seu trabalho sobre absorvedores dinâmicos de vibrações multimodais, propôs uma metodologia computacional simulando numericamente a implantação de um sistema de absorvedor dinâmico de vibrações em uma viga em balanço, variando a posição e tipo de absorvedor dinâmico aplicado. Em todas as configurações verificou-se uma redução de amplitude de vibrações em várias frequências simultâneas. Quando analisado no domínio da frequência, os sistemas desenvolvidos apresentaram uma banda de supressão relativamente maior para as frequências correspondentes ao segundo e terceiro modo de vibração quando comparadas a banda de supressão do primeiro modo, devido as pequenas relações de massa obtidas e a ausência de amortecimento no sistema. Quando analisando no domínio do tempo, pode se observar o surgimento de batimentos na frequência de 6,11 Hz, correspondente ao primeiro modo de vibração, demonstrando a presença de uma banda de supressão reduzida. Entretanto, apesar da eficiência do programa, o procedimento mostrou-se lento e com um custo computacional relativamente alto comparado com métodos tradicionais.

Em seu trabalho sobre absorvedores dinâmicos aplicado a elementos de vigas com dois graus de liberdade, Cheng e Huang (2004), salienta que, se torna economicamente inviável utilizar dispositivos com massa superior a 15% da massa da estrutura principal, devido a apresentar pequenas reduções de amplitude e aumentar consideravelmente o peso da estrutura.

Carpineto, Lacarbonara e Vestroni (2010), em seu trabalho, analisaram a resposta de uma passarela de pedestres solicitada por carregamento harmônico oriundo do transito de pedestres sobre a estrutura. Inicialmente, desenvolveram um diagrama de carregamento, avaliando diversas combinações onde puderam verificar as piores condições de carregamento harmônico. Na situação que apresentou maiores níveis de aceleração na estrutura, os autores sintonizaram 3 absorvedores dinâmicos de vibração, dispostos a cada quarto de comprimento da estrutura, resultando em uma redução na aceleração da estrutura nos dois primeiros modos de vibração com ordens de 80% e 75% respectivamente.

Farid e Gendelman (2015), abordaram em seu trabalho um modelo de dissipador de energia não linear, como forma de reduzir a resposta a carregamentos de impacto e carregamentos transientes, visando ampliar a faixa de frequências de trabalho sem aumentar o número de graus de liberdade, onde alcançaram um alto índice de eficiência, quando compararam seu sistema, com um sistema de absorvedor dinâmico tradicional. Porém o dispositivo mostrou-se sensível em relação a escolha do fator de amortecimento, visto que, sem amortecimento, o sistema não irá alcançar o estado de repouso e com o amortecimento excessivo, uma parcela da energia permanece presa no sistema por um longo período, devido ao pêndulo interno cessar seu movimento.

Nyawako e Reynolds (2016) apresentam em seu trabalho uma análise de eficiência entre métodos de controle de vibrações ativos. Um representando o controle geral da estrutura e o outro representando o controle de frequências ressonantes específicas, avaliando ambos os métodos de controle na redução da resposta de uma passarela de pedestres localizada na Universidade de Exter no Reino Unido. Na análise inicial, constataram melhores resultados no controle sintonizado em frequências específicas. Simulando os dispositivos e a estrutura, foram capazes de reduzir e as respostas da estrutura quando submetida a uma excitação harmônica, originada pelo deslocamento de pedestres sobre a mesma em diferentes pontos da seção. Ambos os métodos apresentaram reduções na resposta da estrutura com valores de 85% a 94%.

Mrabet et al (2016), apresentam em seu trabalho uma nova estratégia para determinar os parâmetros de controle de absorvedores dinâmicos de vibração. Sua estratégia consiste em minimizar a probabilidade de falha relacionada a potência dissipada na estrutura. Para comprovar a eficácia da estratégia proposta, as respostas de um edifício de dez andares foram simuladas, quando protegidas com o desenho ideal dos parâmetros de um absorvedor dinâmico de vibrações, sub excitação de diferentes abalos sísmicos. Comparando os resultados com outros resultados da literatura, puderam comprovar a boa efetividade da estratégia proposta.

Ubertini, Comanducci e Laflamme (2015), apresentam em seu trabalho uma metodologia probabilística para projetar absorvedores de massa sintonizada para supressão do efeito *flutter* em pontes de grandes dimensões. Seu trabalho consiste em uma metodologia computacional para obtenção da probabilidade de ocorrência

do efeito *flutter* com base em uma formulação contínua do sistema estrutural e um método de primeira ordem modificado para análise de confiabilidade. Comparando a metodologia probabilística com uma metodologia determinística aplicados a um modelo contínuo de uma ponte, foram analisadas diversas estratégias de controle. Ambas as metodologias resultaram em um posicionamento ideal semelhante em todas as composições analisadas. Entretanto a abordagem não determinística sugeriu que o aumento da taxa de massa de um absorvedor dinâmico é significativamente mais eficiente na redução da probabilidade de falha do que o aumento da velocidade crítica do vento com a abordagem determinística.

Xiang e Nishitani (2016), propõe em seu trabalho um sistema de controle de vibrações auto-centralizado do tipo pêndulo. O sistema é desenvolvido com a extremidade superior conectada a estrutura principal utilizando conectores com rigidez rotacional e a extremidade inferior é conectada a fundação através de amortecedores de dissipação de energia. A partir das simulações numéricas em um edifício com 6 pavimentos, o dispositivo apresentou efeito favorável tanto no controle da diferença da aceleração entre os pavimentos, quanto no controle da aceleração absoluta da estrutura principal sob diferentes condições de movimentação de solo, potencializando sua aplicação tanto em edifícios quanto em torres de comunicação.

Kirrou, Mokni e Belhaq (2015), em seu trabalho sobre oscilações quase periódicas de uma torre excitada pela ação do vento com frequência próxima a segunda frequência natural sub-harmônica e super-harmônica da estrutura, constataram que as oscilações quase periódicas próximas a segunda frequência natural sub-harmônica só se iniciam quando o primeiro componente harmônico é ativado, já próximo a segunda frequência natural super-harmônica as oscilações quase periódicas se iniciam para qualquer componente harmônico ativo. Ainda próximo a segunda frequência natural super-harmônica identificaram amplitudes com valores próximos a as amplitudes encontradas próximas a primeira frequência natural da estrutura, evidenciando a importância da análise dinâmica e de estabilidade em edifícios também na segunda frequência natural.

Lin (2016) em seu trabalho propôs um novo absorvedor de massa sintonizada, denominado absorvedor de massa de topo, destinado a atenuar as respostas sísmicas dos três primeiros modos de vibração de um edifício de 20 pavimentos. Seu dispositivo visa ampliar o aproveitamento de espaço nos

pavimentos inferiores devido a utilizar a massa da cobertura juntamente com elementos de rigidez sintonizados aos três primeiros modos de vibração do edifício, ao invés de dispositivos pendulares, ou diversos dispositivos individuais. Os resultados se mostraram bastante promissores no controle da resposta da estrutura, quando a mesma é submetida a movimentações sísmica, entretanto o autor salienta a necessidade de estudar profundamente o potencial do dispositivo.

Yang et al (2015), apresentam em seu trabalho uma investigação dos efeitos de impacto local de cargas veiculares sobre a laje da pista de rolamento de uma ponte de vigas caixão com 5 variações de comprimento variando de 24 a 58 metros. Inicialmente verificaram que as respostas dinâmicas globais e locais são dominadas por modos de vibração diferentes. Constataram ainda que o índice de impacto não apresenta alterações regulares com o aumento da velocidade do veículo, entretanto diminuem linearmente com o aumento do comprimento da ponte devido a diminuição das vibrações locais, embora o índice de impacto global não siga essa tendência. Observaram que o índice de impacto apresenta um crescimento linear de acordo com o índice de degradação da pista.

3 METODOLOGIA

3.1 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA SOB VIBRAÇÃO LIVRE

3.1.1 Sistema Massa Mola com Vibração Livre Resposta Numérica

Com objetivo de simular numericamente a resposta de um sistema em vibração livre sem amortecimento do tipo massa mola com um grau de liberdade, na posição vertical, inicialmente é determinada a equação de movimento do sistema apresentado na figura 1. Admitindo que, o sistema se encontra na posição de equilíbrio estático, aplicando a segunda lei de Newton, obteve-se a equação de movimento e frequência natural ω_n do sistema conforme as equações 3 e 4.

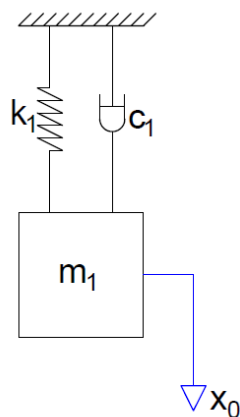


Figura 1 Sistema massa-mola com 1 grau de liberdade. (Fonte: o Autor).

$$\sum F = m \cdot \ddot{x} \quad (1)$$

$$m_1 \ddot{x}_1 = -c_1 \cdot \dot{x}_1 - k_1 \cdot x_1 \quad (2)$$

$$m_1 \ddot{x}_1 + c_1 \cdot \dot{x}_1 + k_1 \cdot x_1 = 0 \quad (3)$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} \quad (4)$$

Adotando m_1 , c_1 , k_1 e x_0 respectivamente como massa, amortecimento, rigidez e deslocamento inicial do sistema analisado. Atribuindo valores a esses elementos conforme tabela 1, simulou-se numericamente com auxílio do método de Runge Kutta de quarta ordem implementado no software MATLAB®, a resposta da aceleração do sistema no domínio do tempo. Utilizou-se ainda uma transformada rápida de Fourier, para evidenciar a resposta da aceleração do sistema no domínio da frequência.

Tabela 1 – Propriedades do sistema massa mola com um grau de liberdade.

m_1 (kg)	1,65
c_1 (N.s/m)	0,00
k_1 (N/m)	27039,79
x_0 (m)	0,001

(Fonte: o Autor).

3.1.2 Sistema Massa Mola Sob Vibração Livre Resposta Analítica

Com objetivo de verificar a precisão do sistema desenvolvido numericamente, foi definida uma solução analítica para o sistema, adotando a frequência natural ω_n conforme a equação 4, x_0 como deslocamento inicial e t como tempo, definindo a equação 5 como solução analítica, adotando os mesmos parâmetros do sistema numérico apresentados na tabela 1, implementou-se no software MATLAB®, a solução analítica do sistema no domínio do tempo. Utilizou-se também uma Transformada Rápida de Fourier para evidenciar a resposta do sistema no domínio da frequência.

$$x_1 = x_0 \cdot \cos(\omega_n \cdot t) \quad (5)$$

$$\ddot{x}_1 = -\omega_n^2 \cdot (x_0 \cdot \cos(\omega_n \cdot t)) \quad (6)$$

A partir dos resultados obtidos no sistema numérico e analítico, foi possível comparar a resposta de ambos os sistemas e verificar a precisão do método numérico, tanto em relação a frequência natural, quanto em relação a aceleração da estrutura. O amortecimento do sistema foi desprezado com o objetivo de evidenciar a resposta da estrutura na situação de carregamento mais severa.

3.1.3 Sistema Massa Mola Sob Vibração Livre Com Absorvedor Dinâmico Resposta Numérica

Após determinar a equação de movimento e a frequência natural do sistema foi possível sintonizar um absorvedor dinâmico de vibrações com uma frequência natural equivalente a frequência natural da estrutura, conforme o representado na Figura 2, com objetivo de, alterar a equação de movimento e frequência natural do sistema que anteriormente eram descritas como um sistema de um grau de liberdade, passando a ser descrito como um sistema composto com dois graus de liberdade. Através da segunda lei de Newton obteve-se as equações de movimento

do sistema descritas nas equações 9 e 11, onde \dot{x}_1 e \dot{x}_2 representam as velocidades de deslocamento da estrutura principal e do absorvedor dinâmico respectivamente, \ddot{x}_1 e \ddot{x}_2 representam as acelerações da estrutura principal e do absorvedor dinâmico respectivamente.

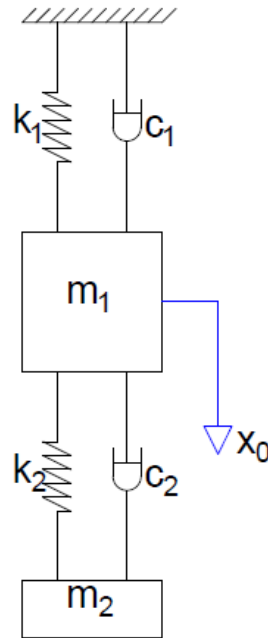


Figura 2 Sistema massa-mola 1 grau de liberdade com absorvedor dinâmico. (Fonte: o Autor).

$$\sum \mathbf{F} = m \cdot \ddot{x} \quad (7)$$

$$m_1 \cdot \ddot{x}_1 = -c_1 \cdot \dot{x}_1 - c_2 \cdot (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k_1 \cdot x_1 - k_2 \cdot (x_1 - x_2) \quad (8)$$

$$m_1 \cdot \ddot{x}_1 + c_1 \cdot \dot{x}_1 + c_2 \cdot (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_1 \cdot x_1 + k_2 \cdot (x_1 - x_2) = 0 \quad (9)$$

$$m_2 \cdot \ddot{x}_2 = -c_2 \cdot (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - k_2 \cdot (x_2 - x_1) \quad (10)$$

$$m_2 \cdot \ddot{x}_2 + c_2 \cdot (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2 \cdot (x_2 - x_1) = 0 \quad (11)$$

Reescrevendo as equações de movimento 9 e 11 na forma matricial, obteve-se a equação 12, para a qual, desprezando o amortecimento pode-se propor como solução as equações 13 e 14, cujas, segundas derivadas resultam nas equações 15 e 16

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (12)$$

$$x_1(t) = X_1 \cdot \cos(\omega t - \emptyset) \quad (13)$$

$$x_2(t) = X_2 \cdot \cos(\omega t - \emptyset) \quad (14)$$

$$\ddot{x}_1(t) = -w^2 \cdot X_1 \cdot \cos(wt - \emptyset) \quad (15)$$

$$\ddot{x}_2(t) = -w^2 \cdot X_2 \cdot \cos(wt - \emptyset) \quad (16)$$

Substituindo as equações 15 e 16 na equação 12, obteve-se a equação 17, cujo determinante representa o polinômio característico do sistema, conforme equação 18. Adotando m_1 , c_1 , k_1 e x_0 respectivamente como massa, amortecimento, rigidez e deslocamento inicial da estrutura principal, e m_2 , c_2 e k_2 como massa, amortecimento e rigidez do absorvedor dinâmico respectivamente, com seus respectivos valores representados conforme a Tabela 2, obteve-se a solução da equação 18 e, obtendo as frequências naturais ω_{n1} e ω_{n2} do sistema analisado, no qual, posteriormente, simulou-se numericamente com auxílio do método de Runge Kutta de quarta ordem implementado no software MATLAB®, a resposta da aceleração do sistema no domínio do tempo. Utilizando uma Transformada Rápida de Fourier, evidenciou-se a resposta da aceleração do sistema no domínio da frequência.

$$\begin{bmatrix} -m_1 \cdot w^2 + (k_1 + k_2) & -k_2 \\ -k_2 & -m_2 \cdot w^2 + k_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$(m_1 \cdot m_2) \cdot w^4 - (k_2 \cdot m_1) \cdot w^2 - (k_1 \cdot m_2) \cdot w^2 - (k_2 \cdot m_2) \cdot w^2 + (k_1 + k_2) = 0 \quad (18)$$

Tabela 2– Propriedades do sistema massa mola com dois graus de liberdade

Corpo 1	m_1 (kg)	1,65
	c_1 (N.s/m)	0,00
	k_1 (N/m)	27039,79
	x_0 (m)	0,001
Corpo 2	m_2 (kg)	0,09
	c_2 (N.s/m)	0,00
	k_2 (N/m)	1498,72

(Fonte: o Autor).

3.1.4 Sistema Barra Mola Vibração Livre Resposta Numérica

A partir dos dados coletados nos sistemas anteriores, o passo seguinte consistiu em simular numericamente a resposta de um sistema em vibração livre sem amortecimento do tipo barra mola, com um grau de liberdade, posicionado na horizontal conforme apresentado na Figura 3. Inicialmente, foi determinada a

equação de movimento do sistema, desprezando o valor do amortecimento e admitindo que o mesmo se encontra na posição de equilíbrio estático, aplicando a segunda lei de Newton para sistemas rotativos e, adotando o sentido horário como positivo, obteve-se a equação de movimento e frequência natural ω_n do sistema conforme as equações 25 e 26.

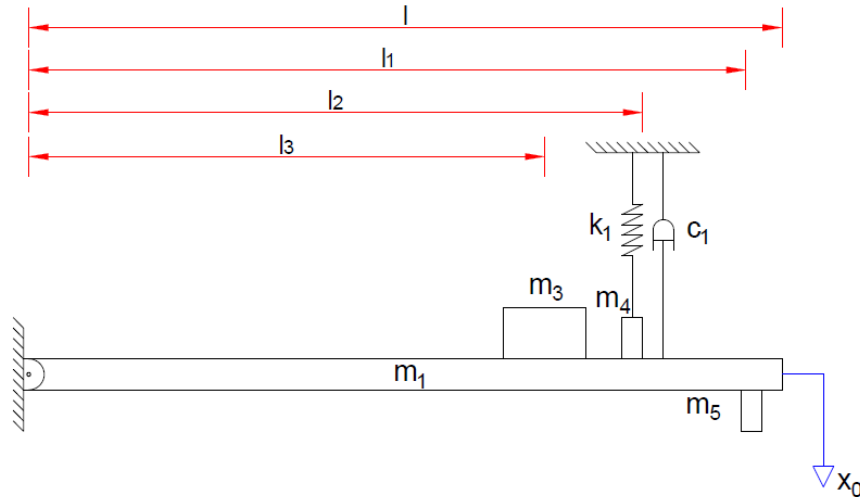


Figura 3 Sistema barra mola com um grau de liberdade (Fonte: o Autor).

Para a descrição do sistema, a inércia foi definida em relação a massa da estrutura através do teorema dos eixos paralelos, conforme a equação 20, sendo aplicado também a hipótese dos pequenos deslocamentos conforme equações 21 e 22

$$\sum \mathbf{M}_O = I_O \cdot \ddot{\theta} \quad (19)$$

$$I_O = \left(\frac{m_1 \cdot l_1^2}{3} \right) + (m_3 \cdot l_3^2) + (m_5 \cdot l_1^2) + (m_4 \cdot l_2^2) \quad (20)$$

$$\cos \theta \cong 1 \quad (21)$$

$$\sin \theta \cong \theta \quad (22)$$

$$I_O \cdot \ddot{\theta} = -f m_1 \cdot l_1 - f c_1 \cdot l_1 \quad (23)$$

$$I_O \cdot \ddot{\theta} = -k_1 \cdot l_1^2 \cdot \theta - c_1 \cdot l_1^2 \dot{\theta} \quad (24)$$

$$I_O \cdot \ddot{\theta} + k_1 \cdot l_1^2 \cdot \theta + c_1 \cdot l_1^2 \dot{\theta} = 0 \quad (25)$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_1 \cdot l_1^2}{I_O}} \quad (26)$$

Os parâmetros do sistema foram adotados de acordo com a Tabela 3, onde m_1 representa a massa da barra, m_3 representa a massa adicional referente ao

motor e seus elementos de fixação que serão responsáveis pelo carregamento harmônico utilizado nos sistemas seguintes, m_4 e m_5 representam as massas dos elementos de fixação das molas, c_1 e k_1 representam o amortecimento e rigidez do sistema respectivamente, l representa o comprimento total da barra, l_1 , l_2 e l_3 representam as distancias dos pontos de aplicação das massas adicionais medidas a partir da origem da barra conforme representado na figura 3 e x_0 representa o deslocamento inicial da barra. A partir desses dados simulou-se numericamente com auxílio do método de Runge Kutta de quarta ordem implementado no software MATLAB®, multiplicando o valor da aceleração angular da equação 25 pela distância da extremidade rotulada até a posição de medição correspondente a 63 centímetros, para converter a mesma em aceleração linear disposta no domínio do tempo. Utilizou-se também uma Transformada Rápida de Fourier para evidenciar a resposta da aceleração do sistema no domínio da frequência.

Tabela 3 – Propriedades do sistema barra mola com um grau de liberdade

	m_1 (kg)	2,16
	m_3 (kg)	0,382
	m_4 (kg)	0,144
	m_5 (kg)	0,125
	c_1 (N.s/m)	0,00
Corpo 1	k_1 (N/m)	27039,79
	l (m)	0,73
	l_1 (m)	0,60
	l_2 (m)	0,70
	l_3 (m)	0,50
	x_0 (m)	0,001

(Fonte: o Autor).

3.1.5 Sistema Barra Mola Vibração Livre Com Absorvedor Dinâmico Resposta Numérica

Após determinar a equação de movimento e frequência natural ω_n para o sistema barra mola com um grau de liberdade, adaptou-se um absorvedor dinâmico de vibrações com frequência natural com valor igual a frequência natural da estrutura. O modelo utilizado representado na Figura 4 foi implementado com

objetivo de alterar a equação de movimento e frequência natural do sistema, as quais anteriormente eram descritas como um sistema com um grau de liberdade, passando a ser descrito como um sistema composto com dois graus de liberdade. Inicialmente foi determinada a equação de movimento do sistema, desprezando o valor do amortecimento e admitindo-se que o sistema se encontra na posição de equilíbrio estático. Aplicando a segunda lei de Newton para sistemas rotativos e adotando o sentido horário como positivo, obteve-se as equações de movimento do sistema, representadas nas equações 29 e 31.

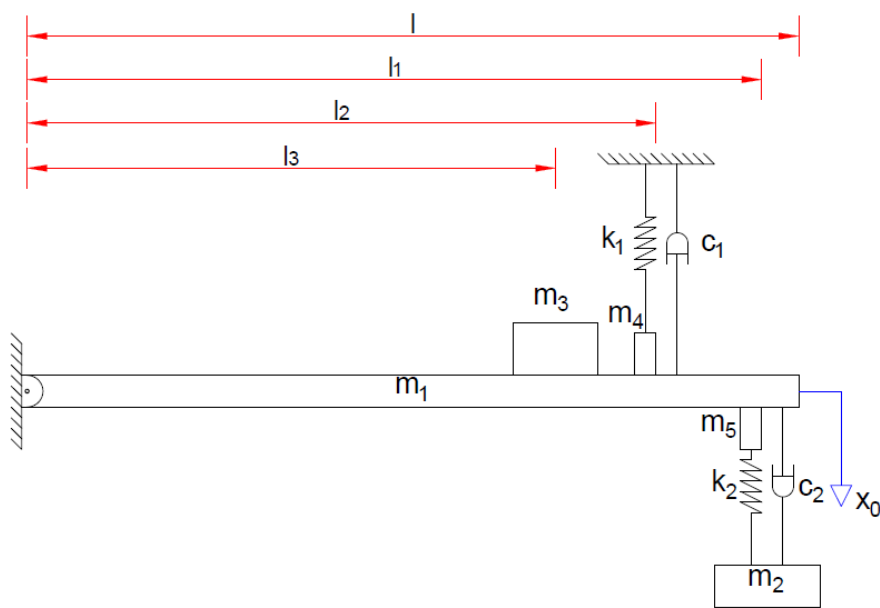


Figura 4 Sistema barra mola 1 grau de liberdade com absorvedor dinâmico. (Fonte: o Autor).

Para a descrição do sistema, definiu-se a inércia em relação a massa da estrutura através do teorema dos eixos paralelos, conforme a equação 20, onde aplicou-se também a hipótese dos pequenos deslocamentos conforme equações 21 e 22

$$I_0 \cdot \ddot{\theta} = -f m_1 \cdot l_1 - f m_2 \cdot l_2 - f c_1 \cdot l_1 - f c_2 \cdot l_2 \quad (27)$$

$$I_0 \cdot \ddot{\theta} = -k_1 \cdot l_1^2 \cdot \theta - k_2 \cdot l_2^2 \cdot (\theta - x) - c_1 \cdot l_1^2 \cdot \dot{\theta} - c_2 \cdot l_2^2 \cdot (\dot{\theta} - \dot{x}) \quad (28)$$

$$I_0 \cdot \ddot{\theta} + k_1 \cdot l_1^2 \cdot \theta + k_2 \cdot l_2^2 \cdot (\theta - x) + c_1 \cdot l_1^2 \cdot \dot{\theta} + c_2 \cdot l_2^2 \cdot (\dot{\theta} - \dot{x}) = 0 \quad (29)$$

$$m_2 \cdot \ddot{x}_2 = -c_2 \cdot (\dot{x}_2 - l_2 \cdot \dot{\theta}) - k_2 \cdot (x_2 - l_2 \cdot \theta) \quad (30)$$

$$m_2 \cdot \ddot{x}_2 + c_2 \cdot (\dot{x}_2 - l_2 \cdot \dot{\theta}) + k_2 \cdot (x_2 - l_2 \cdot \theta) = 0 \quad (31)$$

Reescrevendo as equações de movimento 29 e 31 na forma matricial, obteve-se a equação 32, para a qual, desprezando o amortecimento, pode-se propor como solução as equações 33 e 34, cujas segundas derivadas resultam nas equações 35 e 36

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (c_1 \cdot l_1^2 + c_2 \cdot l_2^2) & -c_2 \cdot l_2 \\ -c_2 \cdot l_2 & c_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1 \cdot l_1^2 + k_2 \cdot l_2^2) & -k_2 \cdot l_2 \\ -k_2 \cdot l_2 & k_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (32)$$

$$\theta(t) = \Theta \cdot \cos(\omega t - \phi) \quad (33)$$

$$x_2(t) = X_2 \cdot \cos(\omega t - \phi) \quad (34)$$

$$\ddot{\theta}(t) = -\omega^2 \cdot \Theta \cdot \cos(\omega t - \phi) \quad (35)$$

$$\ddot{x}_2(t) = -\omega^2 \cdot X_2 \cdot \cos(\omega t - \phi) \quad (36)$$

Substituindo as equações 35 e 36 na equação 32, obteve-se a equação 37, cujo determinante representa o polinômio característico do sistema, conforme equação 38 onde ω representa as frequências naturais do sistema, posteriormente representadas como ωn_1 e ωn_2 . Os parâmetros do sistema foram adotados de acordo com a Tabela 4, onde m_1 representa a massa da barra, m_3 representa a massa adicional referente ao motor e seus elementos de fixação que serão responsáveis pelo carregamento harmônico utilizado nos sistemas seguintes, m_4 e m_5 representam as massas dos elementos de fixação das molas, c_1 e k_1 representam o amortecimento e rigidez do sistema respectivamente, l representa o comprimento total da barra, l_1 , l_2 e l_3 representam as distâncias dos pontos de aplicação das massas adicionais medidas a partir da origem da barra conforme representado na figura 4, x_0 representa o deslocamento inicial da barra, m_2 , c_2 e k_2 representam respectivamente a massa, amortecimento e rigidez do absorvedor dinâmico. A partir desses parâmetros, foi possível desenvolver a solução da equação 38 e, obter as frequências naturais ωn_1 e ωn_2 do sistema analisado. Posteriormente simulou-se numericamente com auxílio do método de Runge Kutta de quarta ordem implementado no software MATLAB®, multiplicando o valor da aceleração angular da equação 28 pela distância da extremidade rotulada até a posição de medição correspondente a 63 centímetros, com a finalidade de converter a aceleração

angular em aceleração linear disposta no domínio do tempo. Aplicando uma Transformada Rápida de Fourier, obteve-se a resposta do sistema no domínio da frequência.

$$\begin{bmatrix} -I_0 \cdot \omega^2 + (k_1 \cdot l_1^2 + k_2 \cdot l_2^2) & -k_2 \cdot l_2 \\ -k_2 \cdot l_2 & -m_2 \cdot \omega^2 + k_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Theta \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (37)$$

$$(I_0 \cdot m_2) \cdot \omega^4 - (k_2 \cdot I_0) \cdot \omega^2 - (k_1 \cdot l_1^2 \cdot m_2) \cdot \omega^2 - (k_2 \cdot l_2^2 \cdot m_2) \omega^2 + (k_1 + k_2 \cdot l_2^2) = 0 \quad (38)$$

Tabela 4 – Propriedades do sistema barra mola com dois graus de liberdade

Corpo 1	m_1 (kg)	2,16
	m_3 (kg)	0,382
	m_4 (kg)	0,144
	m_5 (kg)	0,125
	c_1 (N.s/m)	0,00
	k_1 (N/m)	27039,79
	l (m)	0,73
	l_1 (m)	0,60
	l_2 (m)	0,70
	l_3 (m)	0,50
	x_0 (m)	0,001
Corpo 2	m_2 (kg)	0,09
	c_2 (N.s/m)	0,00
	k_2 (N/m)	1498,72

(Fonte: o Autor).

3.2 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA SOB VIBRAÇÃO FORÇADA

3.2.1 Sistema Massa Mola Vibração Forçada Resposta Numérica

Com objetivo de simular numericamente a resposta do sistema massa mola sob o efeito de vibração forçada sem amortecimento, inicialmente é determinada a equação de movimento do sistema apresentado na Figura 5. Admitindo que, o sistema se encontra na posição de equilíbrio estático, aplicando a segunda lei de Newton, obteve-se a equação de movimento e frequência natural ω_n do sistema conforme as equações 41 e 42, respectivamente.

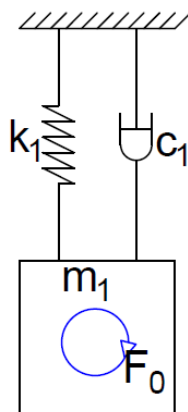


Figura 5 Sistema massa-mola 1 grau de liberdade sob vibração forçada. (Fonte: o Autor).

$$\sum F = m \cdot \ddot{x} \quad (39)$$

$$m_1 \ddot{x}_1 - F_0 \cdot \cos wt = -c_1 \cdot \dot{x}_1 - k_1 \cdot x_1 \quad (40)$$

$$m_1 \cdot \ddot{x}_1 + c_1 \cdot \dot{x}_1 + k_1 \cdot x_1 = F_0 \cdot \cos wt \quad (41)$$

$$wn = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} \quad (42)$$

Adotando m_1 , c_1 , k_1 , F_0 e wt como massa, amortecimento, rigidez, amplitude de deslocamento da fonte de excitação e frequência de excitação do sistema analisado, respectivamente. Atribuindo valores a esses elementos conforme a tabela 5, simulou-se numericamente com auxílio do método de Runge Kutta de quarta ordem implementado no software MATLAB®, a resposta da aceleração do sistema no domínio do tempo quando o mesmo é solicitado por uma vibração harmônica com frequência igual a frequência natural do sistema com objetivo de analisar a resposta do sistema quando o mesmo estiver em ressonância. Utilizou-se também uma Transformada Rápida de Fourier, para evidenciar a resposta do sistema no domínio da frequência.

Tabela 5 – Propriedades do sistema massa mola com um grau de liberdade sob vibração forçada.

m_1 (kg)	1,65
c_1 (N.s/m)	0,00
k_1 (N/m)	27039,79
F_0 (m)	0,8
wt (Hz)	20,36

(Fonte: o Autor).

3.2.2 Sistema Massa Mola Vibração Forçada Com Absorvedor Dinâmico Resposta Numérica

Após determinar a equação de movimento, frequência natural e frequência de excitação do sistema, foi possível sintonizar um absorvedor dinâmico de vibrações com frequência natural, coincidindo com a frequência de excitação, conforme representado na Figura 6, com objetivo de, alterar a equação de movimento e frequência natural do sistema, evitando que, o mesmo entre em ressonância. Através da segunda lei de Newton obteve-se as equações de movimento do sistema, representadas pelas equações 45 e 47, onde \dot{x}_1 e \dot{x}_2 representam as velocidades de deslocamento da estrutura principal e do absorvedor dinâmico respectivamente, \ddot{x}_1 e \ddot{x}_2 representam as acelerações da estrutura principal e do absorvedor dinâmico respectivamente.

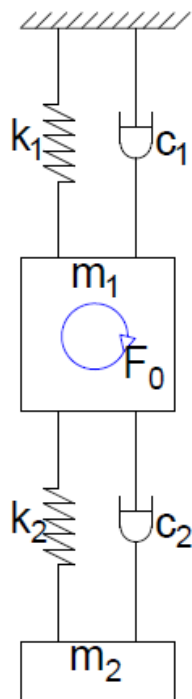


Figura 6 Sistema massa-mola 1 grau de liberdade com absorvedor dinâmico sob vibração forçada. (Fonte: o Autor).

$$\sum \mathbf{F} = m \cdot \ddot{x} \quad (43)$$

$$m_1 \cdot \ddot{x}_1 - F_0 \cdot \cos wt = -c_1 \cdot \dot{x}_1 - c_2 \cdot (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k_1 \cdot x_1 - k_2 \cdot (x_1 - x_2) \quad (44)$$

$$m_1 \cdot \ddot{x}_1 + c_1 \cdot \dot{x}_1 + c_2 \cdot (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_1 \cdot x_1 + k_2 \cdot (x_1 - x_2) = F_0 \cdot \cos wt \quad (45)$$

$$m_2 \cdot \ddot{x}_2 = -c_2 \cdot (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - k_2 \cdot (x_2 - x_1) \quad (46)$$

$$m_2 \cdot \ddot{x}_2 + c_2 \cdot (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2 \cdot (x_2 - x_1) = 0 \quad (47)$$

Adotando m_1 , c_1 , k_1 , F_0 e ωt como massa, amortecimento, rigidez, amplitude de deslocamento da fonte de excitação e frequência de excitação do sistema analisado, respectivamente, e m_2 , c_2 e k_2 como massa, amortecimento e rigidez do absorvedor dinâmico respectivamente, com seus respectivos valores representados conforme a Tabela 6, foi possível simular numericamente com auxílio do método de Runge Kutta de quarta ordem implementado no software MATLAB®, a resposta harmônica do sistema do domínio do tempo. Utilizando uma Transformada Rápida de Fourier, evidenciou-se a resposta da aceleração do sistema no domínio da frequência.

Tabela 6– Propriedades do sistema massa mola com dois graus de liberdade sob vibração forçada

	m_1 (kg)	1,65
	c_1 (N.s/m)	0,00
Corpo 1	k_1 (N/m)	27039,79
	F_0 (m)	0,8
	ωt (Hz)	20,36
	m_2 (kg)	0,09
Corpo 2	c_2 (N.s/m)	0,00
	k_2 (N/m)	1498,72

(Fonte: o Autor).

3.2.3 Sistema Barra Mola Vibração Forçada Amortecida Resposta Numérica

A partir dos dados coletados nos sistemas anteriores, foi possível simular numericamente a resposta de um sistema sob vibração forçada sem amortecimento, do tipo barra mola com um grau de liberdade, posicionado na horizontal conforme apresentado na Figura 7, submetido a um carregamento harmônico com frequência de excitação, coincidindo com a frequência natural do sistema. Admitindo que o sistema se encontra inicialmente na posição de equilíbrio estático, aplicando a segunda lei de Newton para sistemas rotativos e adotando o sentido horário como positivo, obteve-se a equação de movimento e frequência natural ω_n do sistema conforme as equações 54 e 55 respectivamente onde $\dot{\theta}_1$ representa a velocidade de deslocamento da estrutura e $\ddot{\theta}_1$ representa a aceleração da estrutura.

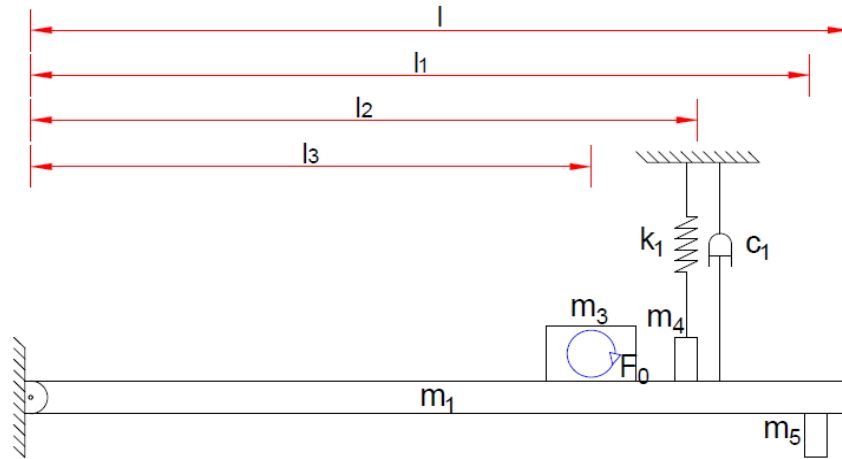


Figura 7 Sistema barra mola com um grau de liberdade sob vibração forçada. (Fonte: o Autor).

Para a descrição do sistema, a inércia foi definida em relação a massa da estrutura através do teorema dos eixos paralelos, conforme a equação 49, sendo também aplicada a hipótese dos pequenos deslocamentos conforme equações 50 e 51

$$\sum \mathbf{M}0 = I0 \cdot \ddot{\theta} \quad (48)$$

$$I0 = \left(\frac{m_1 \cdot l^2}{3} \right) + (m_3 \cdot l_3^2) + (m_5 \cdot l_1^2) + (m_4 \cdot l_2^2) \quad (49)$$

$$\cos \theta \cong 1 \quad (50)$$

$$\sin \theta \cong \theta \quad (51)$$

$$I0 \cdot \ddot{\theta} - F0 \cdot \cos wt = -f m_1 \cdot l_1 - f c_1 \cdot l_1 \quad (52)$$

$$I0 \cdot \ddot{\theta} - F0 \cdot \cos wt = -k_1 \cdot l_1^2 \cdot \theta - c_1 \cdot l_1^2 \dot{\theta} \quad (53)$$

$$I0 \cdot \ddot{\theta} + k_1 \cdot l_1^2 \cdot \theta + c_1 \cdot l_1^2 \dot{\theta} = F0 \cdot \cos wt \quad (54)$$

$$wn = \sqrt{\frac{k_1 \cdot l_1^2}{I0}} \quad (55)$$

Os parâmetros do sistema foram adotados de acordo com a Tabela 3, onde m_1 representa a massa da barra, m_3 representa a massa adicional referente ao motor e seus elementos de fixação responsáveis pelo carregamento harmônico, m_4 e m_5 representam as massas dos elementos de fixação das molas, c_1 e k_1 representam o amortecimento e rigidez do sistema respectivamente, l representa o comprimento total da barra, l_1 , l_2 e l_3 representam as distancias dos pontos de aplicação das massas adicionais medidas a partir da origem da barra conforme representado na figura 7, F_0 representa a amplitude de deslocamento da fonte de

excitação e ωt representa a frequência de excitação. A partir desses dados simulou-se numericamente com auxílio do método de Runge Kutta de quarta ordem implementado no software MATLAB®, multiplicando o valor da aceleração angular da equação 54 pela distância da extremidade rotulada até a posição de medição correspondente a 63 centímetros, para converter a mesma em aceleração linear disposta no domínio do tempo. Utilizou-se também uma Transformada Rápida de Fourier para evidenciar a resposta da aceleração do sistema no domínio da frequência.

Tabela 7 – Propriedades do sistema barra mola com um grau de liberdade

	m_1 (kg)	2,16
	m_3 (kg)	0,382
	m_4 (kg)	0,144
	m_5 (kg)	0,125
	c_1 (N.s/m)	0,00
Corpo 1	k_1 (N/m)	27039,79
	l (m)	0,73
	l_1 (m)	0,60
	l_2 (m)	0,70
	l_3 (m)	0,50
	F_0 (m)	0,8
	ωt (Hz)	20,36

(Fonte: o Autor).

3.2.4 Sistema Barra Mola Vibração Forçada Com Absorvedor Dinâmico Resposta Numérica

Após determinar a equação de movimento, frequência natural e frequência de excitação do sistema barra mola com um grau de liberdade, foi possível sintonizar um absorvedor dinâmico de vibrações com frequência natural coincidindo com a frequência de excitação da estrutura, conforme representado na Figura 4, com o objetivo de alterar a equação de movimento e frequência natural do sistema, evitando que o mesmo entre em ressonância. Através da segunda lei de Newton para sistemas rotativos, obteve-se as equações de movimento do sistema, representadas pelas equações 58 e 60, onde $\dot{\theta}_1$ e \dot{x}_2 representam as velocidades

de deslocamento da estrutura principal e do absorvedor dinâmico respectivamente, $\ddot{\theta}_1$ e \ddot{x}_2 representam as acelerações da estrutura principal e do absorvedor dinâmico respectivamente.

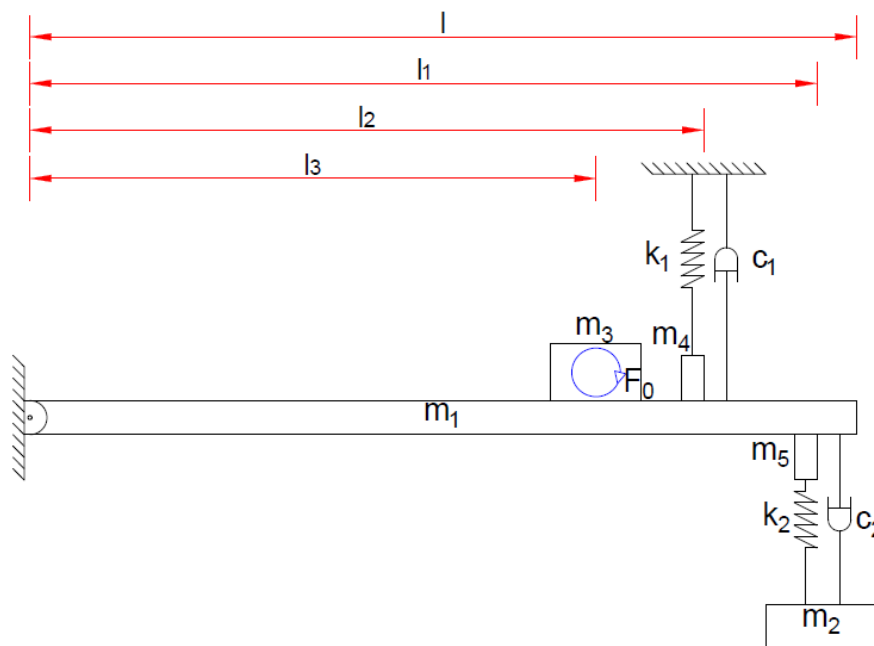


Figura 8 Sistema barra mola 1 grau de liberdade com absorvedor dinâmico. (Fonte: o Autor).

Para a descrição do sistema, a inercia foi definida em relação a massa da estrutura através do teorema dos eixos paralelos conforme a equação 49, aplicando também a hipótese dos pequenos deslocamentos conforme equações 50 e 51

$$I_0 \ddot{\theta} = -fm_1 \cdot l_1 - fm_2 \cdot l_2 - fc_1 \cdot l_1 - fc_2 \cdot l_2 \quad (56)$$

$$I_0 \ddot{\theta} = -k_1 \cdot l_1^2 \cdot \theta - k_2 \cdot l_2^2 \cdot (\theta - x) - c_1 \cdot l_1^2 \cdot \dot{\theta} - c_2 \cdot l_2^2 \cdot (\dot{\theta} - \dot{x}) \quad (57)$$

$$I_0 \ddot{\theta} + k_1 \cdot l_1^2 \cdot \theta + k_2 \cdot l_2^2 \cdot (\theta - x) + c_1 \cdot l_1^2 \cdot \dot{\theta} + c_2 \cdot l_2^2 \cdot (\dot{\theta} - \dot{x}) = F_0 \cdot \cos wt \quad (58)$$

$$m_2 \cdot \ddot{x}_2 = -c_2 \cdot (\dot{x}_2 - l_2 \cdot \dot{\theta}) - k_2 \cdot (x_2 - l_2 \cdot \theta) \quad (59)$$

$$m_2 \cdot \ddot{x}_2 + c_2 \cdot (\dot{x}_2 - l_2 \cdot \dot{\theta}) + k_2 \cdot (x_2 - l_2 \cdot \theta) = 0 \quad (60)$$

Adotando os parâmetros da Tabela 8, onde m_1 representa a massa da barra, m_3 representa a massa adicional referente ao motor e seus elementos de fixação responsáveis pelo carregamento harmônico, m_4 e m_5 representam as massas dos elementos de fixação das molas, c_1 e k_1 representam o amortecimento e rigidez do sistema respectivamente, l representa o comprimento total da barra, l_1 , l_2 e l_3 representam as distâncias dos pontos de aplicação das massas adicionais medidas a partir da origem da barra conforme representado na figura 8, F_0 representa a

amplitude de deslocamento da fonte de excitação e ωt representa a frequência de excitação, m_2 , c_2 e k_2 representam a massa, amortecimento e rigidez do absorvedor dinâmico respectivamente. A partir desses dados simulou-se numericamente com auxílio do método de Runge Kutta de quarta ordem, implementado no software MATLAB®, multiplicando o valor da aceleração angular da equação 58 pela distância da extremidade rotulada até a posição de medição correspondente a 63 centímetros, para converter a mesma em aceleração linear representando a resposta harmônica do sistema no domínio do tempo. Utilizou-se também uma Transformada Rápida de Fourier, para evidenciar a resposta do sistema no domínio da frequência.

Tabela 8 – Propriedades do sistema barra mola com dois graus de liberdade

Corpo 1	m_1 (kg)	2,16
	m_3 (kg)	0,382
	m_4 (kg)	0,144
	m_5 (kg)	0,125
	c_1 (N.s/m)	0,00
	k_1 (N/m)	27039,79
	l (m)	0,73
	l_1 (m)	0,60
	l_2 (m)	0,70
	F_0 (m)	0,8
	ωt (Hz)	20,36
Corpo 2	m_2 (kg)	0,09
	c_2 (N.s/m)	0,00
	k_2 (N/m)	1498,72

(Fonte: o Autor).

3.3 DESCRIÇÃO DO MODELO EXPERIMENTAL

Como forma de validar os métodos numéricos e analíticos empregados na análise dos sistemas, foi desenvolvido um sistema barra mola configurado utilizando os materiais disponíveis em laboratório.

O sistema é composto por uma barra metálica rígida com uma extremidade fixa em um apoio rotulado representado na figura 9 (permitindo o movimento de rotação na barra), suspensa por uma mola a uma distância de 0,60 metros da extremidade rotulada como pode ser observado na figura 10. Para a medição da resposta da estrutura quando submetida aos carregamentos, foram utilizados dois acelerômetros representados na figura 11, dispostos de acordo com o esquema da figura 10, onde l representa o comprimento total da barra, l_4 representa a distância da extremidade rotulada até o ponto de aplicação do acelerômetro ligado ao canal 2 do analisador de sinal representado na figura 12 e l_5 representa a distância da extremidade rotulada até o ponto de aplicação do acelerômetro ligado ao canal 1 do analisador de sinal. Os respectivos valores de l , l_4 e l_5 podem ser observados na tabela 9.

Tabela 9 Posição dos acelerômetros e comprimento da barra

	l (m)	0,73
Corpo 1	l_4 (m)	0,33
	l_5 (m)	0,63

(Fonte: o Autor).

O sistema foi submetido a um deslocamento inicial e a resposta na estrutura foi medida através dos acelerômetros descritos no parágrafo anterior, com a finalidade de determinar a frequência natural da estrutura, com o objetivo de sintonizar a frequência de excitação. Os dados foram adquiridos através do analisador de sinal com um intervalo de 18 segundos.

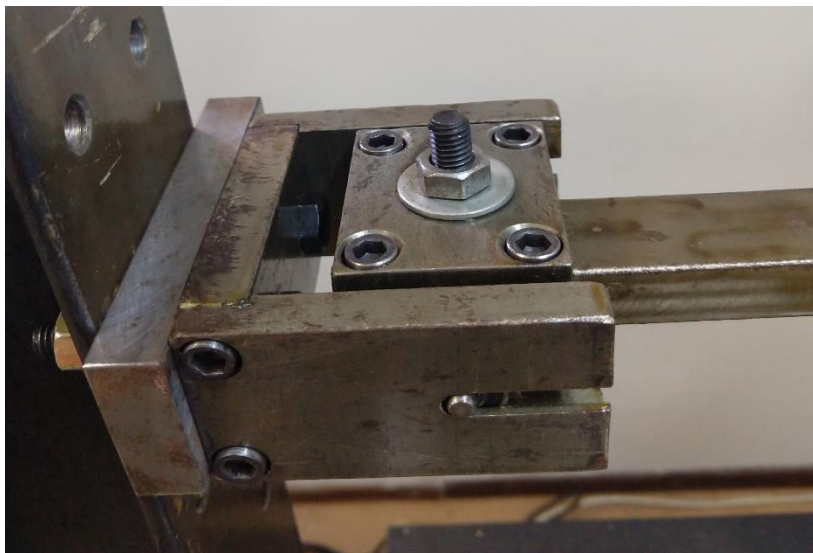


Figura 9 Apoio rotulado. (Fonte: O autor).

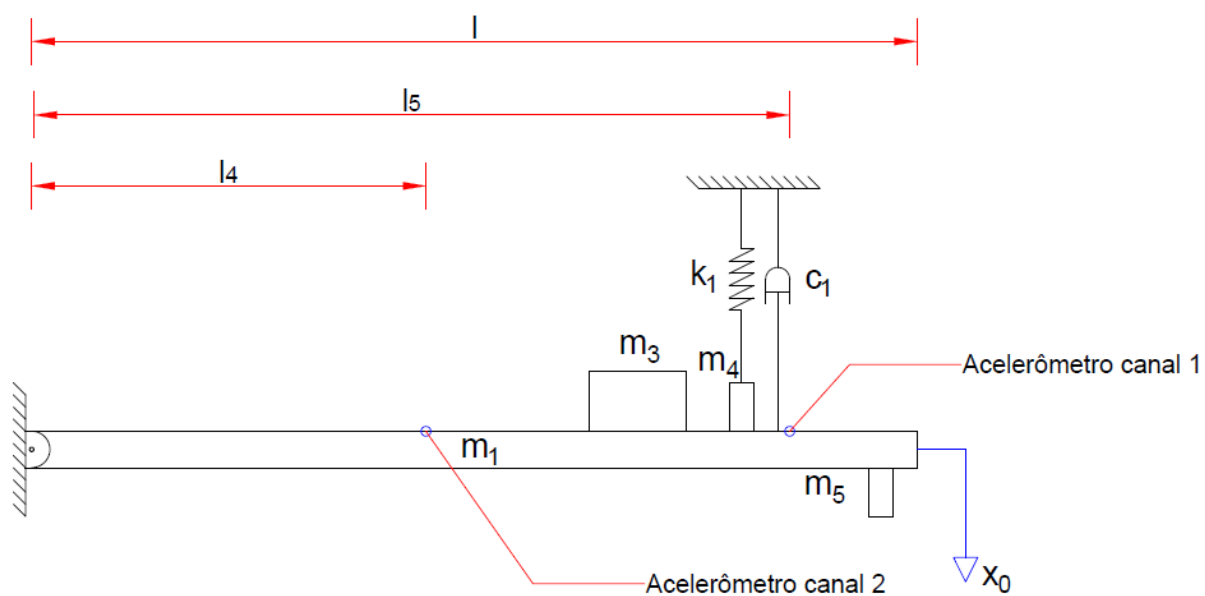


Figura 10 Esquema de montagem do sistema com um grau de liberdade e posicionamento dos acelerômetros. (Fonte: O autor).



Figura 11 Acelerômetros. (Fonte: O autor).

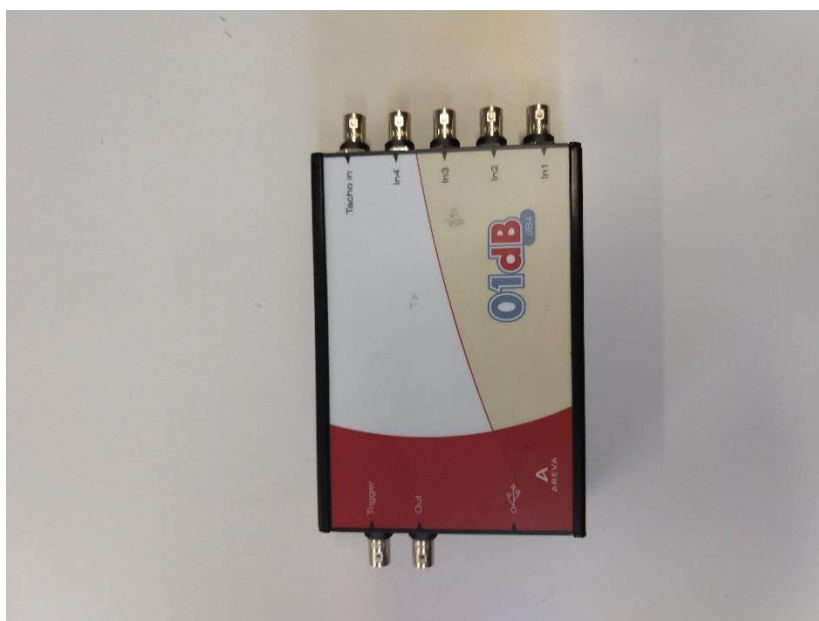


Figura 12 Analisador de sinal. (Fonte: O autor).

Posteriormente a estrutura foi submetida a regime de vibração forçada com auxílio de um motor com massa desbalanceada representado na figura 13, ligado a um inversor de fase representado na figura 14, responsável pela sintonização da frequência de excitação. A resposta foi medida na estrutura através de dois acelerômetros representados na figura 11, ligados ao analisador de sinal representado na figura 12.

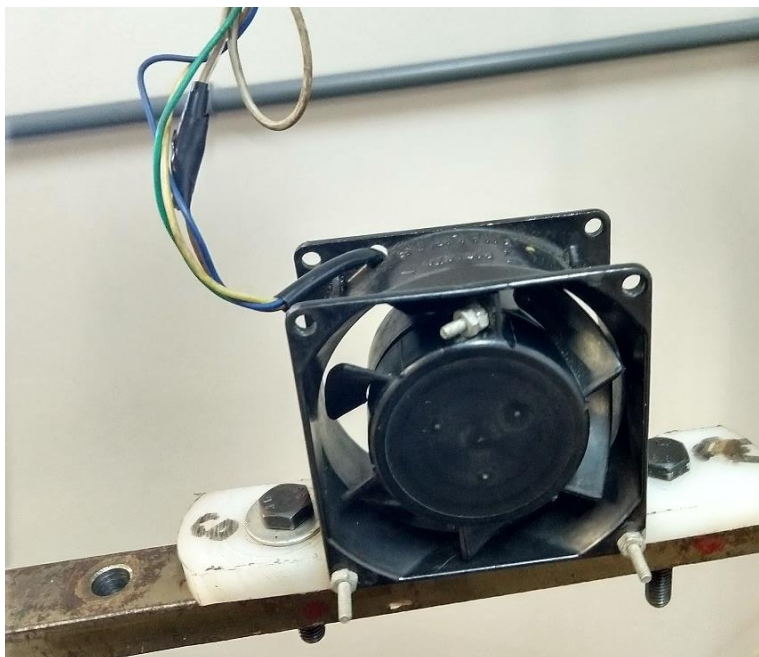


Figura 13 Motor com massa desbalanceada. (Fonte: O autor).



Figura 14 Inversor de fase. (Fonte: O autor).

A resposta a vibração forçada na estrutura foi medida inicialmente, sem a presença do absorvedor dinâmico, com o objetivo de gerar um parâmetro de comparação entre o sistema antes e após a implantação do absorvedor dinâmico de vibrações. A posição inicial dos acelerômetros pode ser observada na figura 15, onde l representa o comprimento total da barra, l_4 representa a distância da

extremidade rotulada até o ponto de aplicação do acelerômetro ligado ao canal 2 do analisador de sinal representado na figura 12 e l_5 representa a distância da extremidade rotulada até o ponto de aplicação do acelerômetro ligado ao canal 1 do analisador de sinal. Os respectivos valores de l , l_4 e l_5 podem ser observados na tabela 9. Os dados foram adquiridos através do analisador de sinal em um intervalo de 18 segundos.

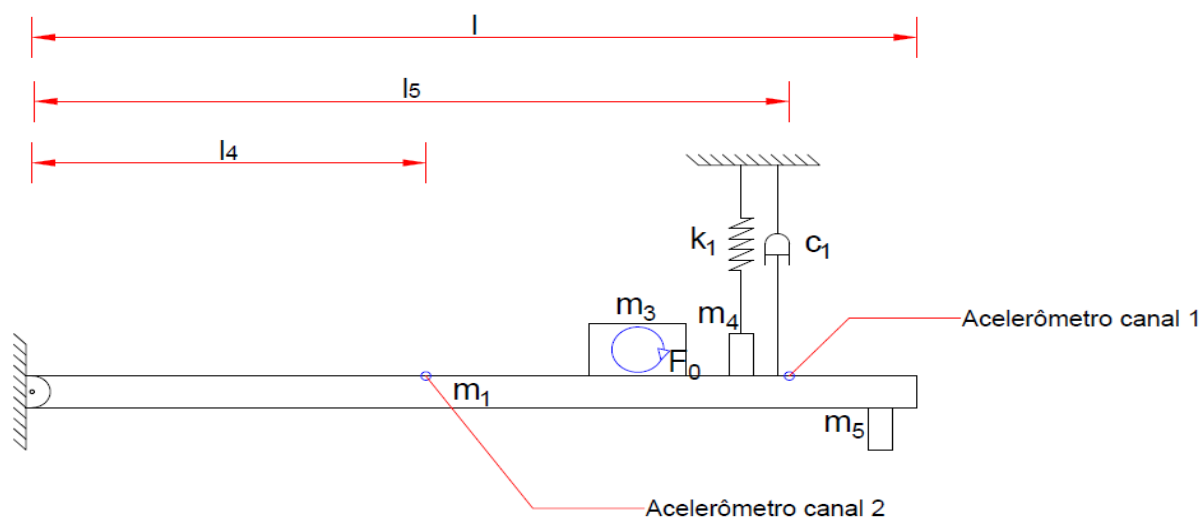


Figura 15 Esquema de montagem do sistema com um grau de liberdade e posicionamento dos acelerômetros. (Fonte: O autor).

Posteriormente, foi sintonizado um absorvedor dinâmico a estrutura e submetido novamente a frequência de excitação calibrada anteriormente. Como forma de medir a aceleração do absorvedor dinâmico, foi alterada a posição do acelerômetro anexado ao canal 02, fixando-o na massa do absorvedor como pode ser observado nas figura 16 e 17, onde l representa o comprimento total da barra, l_5 representa a distância da extremidade rotulada até o ponto de aplicação do acelerômetro ligado ao canal 1 do analisador de sinal representado na figura 12 e l_6 representa a distância da extremidade rotulada até o ponto de aplicação do acelerômetro ligado ao canal 2 do analisador de sinal. Os respectivos valores de l , l_5 e l_6 podem ser observados na tabela 10.

Tabela 10 Posição dos acelerômetros e comprimento da barra

	l (m)	0,73
Corpo 1	l_5 (m)	0,63
	l_6 (m)	0,70

(Fonte: o Autor).

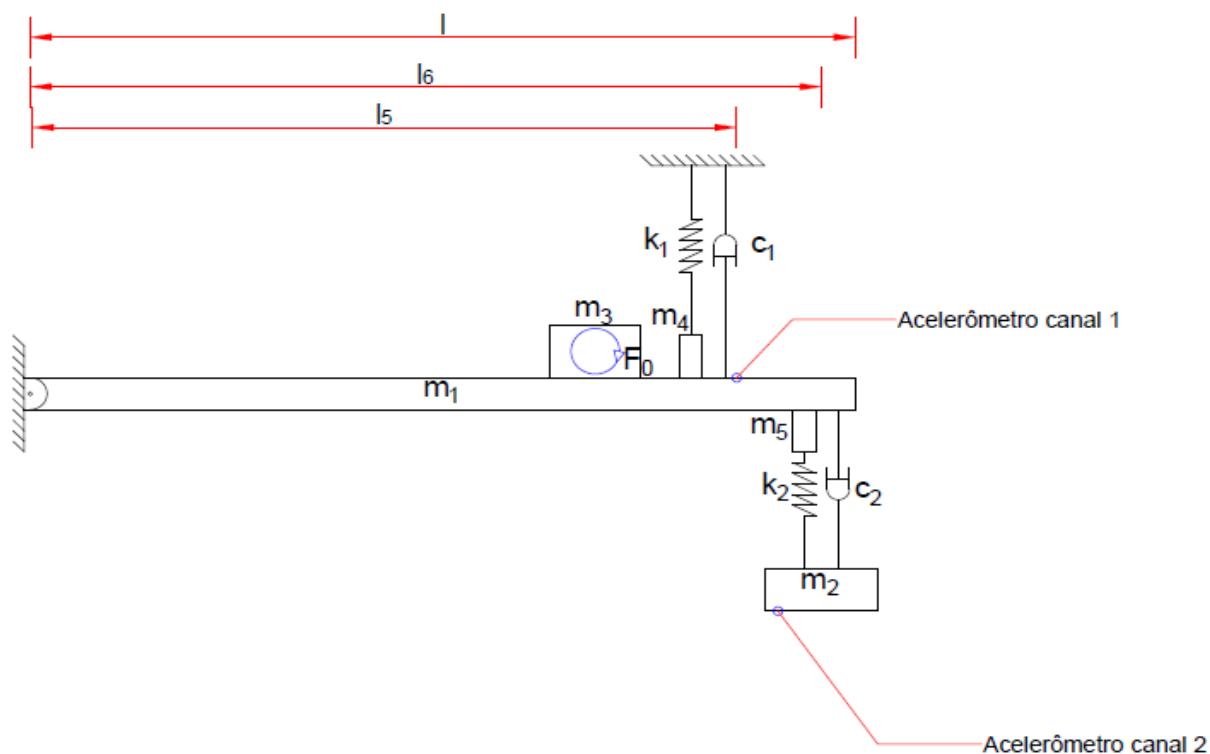


Figura 16 Esquema de montagem do sistema com dois graus de liberdade e posicionamento dos acelerômetros. (Fonte: O autor).



Figura 17 Sistema vibratório experimental. (Fonte: O autor).

A estrutura foi simulada utilizando diversas massas para o absorvedor, conforme podemos observar na Tabela 11, com o objetivo de encontrar a configuração mais eficiente para o sistema estudado.

Tabela 11 Relação de massas entre a estrutura principal e o absorvedor dinâmico

Massa da barra (kg)	Massa do absorvedor (kg)	Massa do Absorvedor em relação a massa da barra (%)
m_1 2,16	m_2 0,030	1,388
	m_2 0,043	1,990
	m_2 0,065	3,009
	m_2 0,076	3,518
	m_2 0,079	3,657
	m_2 0,086	3,981
	m_2 0,091	4,213
	m_2 0,094	4,351
	m_2 0,097	4,490
	m_2 0,108	5,000
	m_2 0,119	5,509
	m_2 0,130	6,018
	m_2 0,151	6,990
	m_2 0,173	8,009
	m_2 0,194	8,981
	m_2 0,216	10,000
	m_2 0,238	11,018
	m_2 0,258	11,944
	m_2 0,280	12,963
m_2 0,303	14,027	
m_2 0,323	14,953	

(Fonte: O autor).

4 ANÁLISE DE RESULTADOS

Nesta seção são apresentados e discutidos os resultados obtidos numericamente, analiticamente e experimentalmente, para os sistemas massa mola e barra mola, submetidos a regimes de vibração livre e regimes de vibração forçada.

4.1 VIBRAÇÃO LIVRE

Inicialmente, serão analisadas as respostas dos sistemas em regime de vibração livre, desprezando o amortecimento e a massa dos elementos mola.

4.1.1 Sistema Massa Mola Com 1 Grau de Liberdade Sob Vibração Livre: Resposta Numérica e Analítica

Ao simular numericamente o sistema massa mola apresentado na figura 01 do capítulo anterior, submetendo o mesmo a um deslocamento inicial através da aplicação do método de Runge Kutta de quarta ordem, obteve-se a resposta do sistema em regime de vibração livre no domínio do tempo em função da aceleração da estrutura, de acordo com a figura 18. Através da transformada rápida de Fourier a resposta do sistema foi representada no domínio da frequência em função da aceleração da estrutura como pode ser visto na figura 19.

Comparando a resposta numérica obtida a partir da equação 3, com a resposta analítica obtida a partir da equação 5 em um intervalo de tempo de 5 segundos, tanto no domínio do tempo conforme a figura 20, quanto no domínio da frequência conforme a figura 21, nota-se que houve uma redução gradativa na resposta do sistema numérico. Como pode se observar na tabela 12, a frequência natural do sistema não se alterou, entretanto, houve uma redução na aceleração do sistema da ordem de 1,10% comparando a resposta do sistema no tempo igual a zero e no tempo igual a 5 segundos, resultando em uma redução de 0,22% na aceleração a cada 1 segundo. Essa redução na resposta da estrutura deve-se a precisão do método de Runge Kutta de quarta ordem, visto que tanto a equação da resposta analítica quanto a equação da resposta numérica não possuem elementos de dissipação de energia.

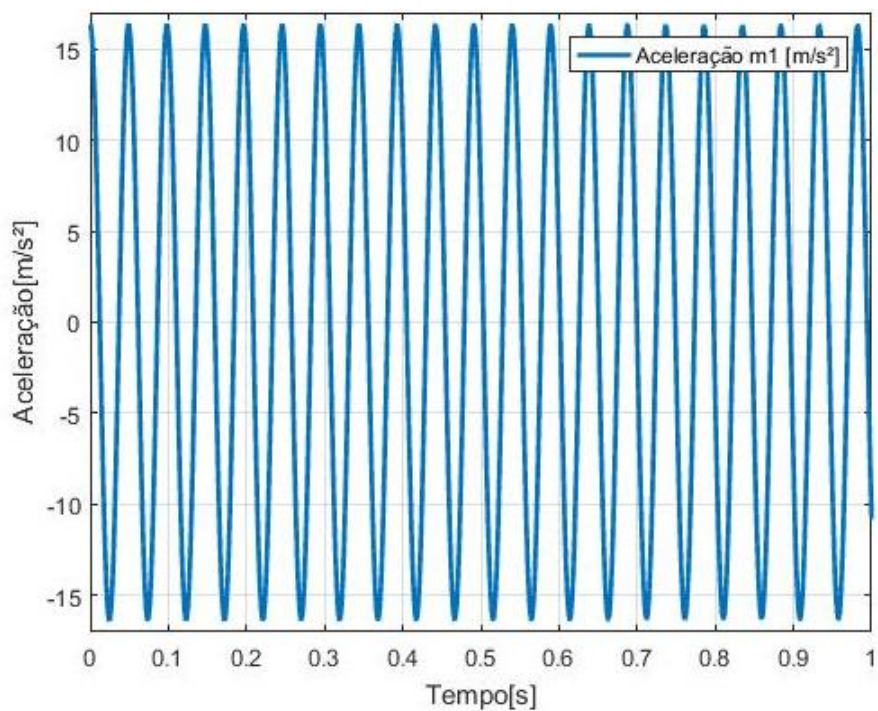


Figura 18 Resposta numérica do sistema massa mola não controlado no domínio do tempo sob vibração livre. (Fonte: O autor).

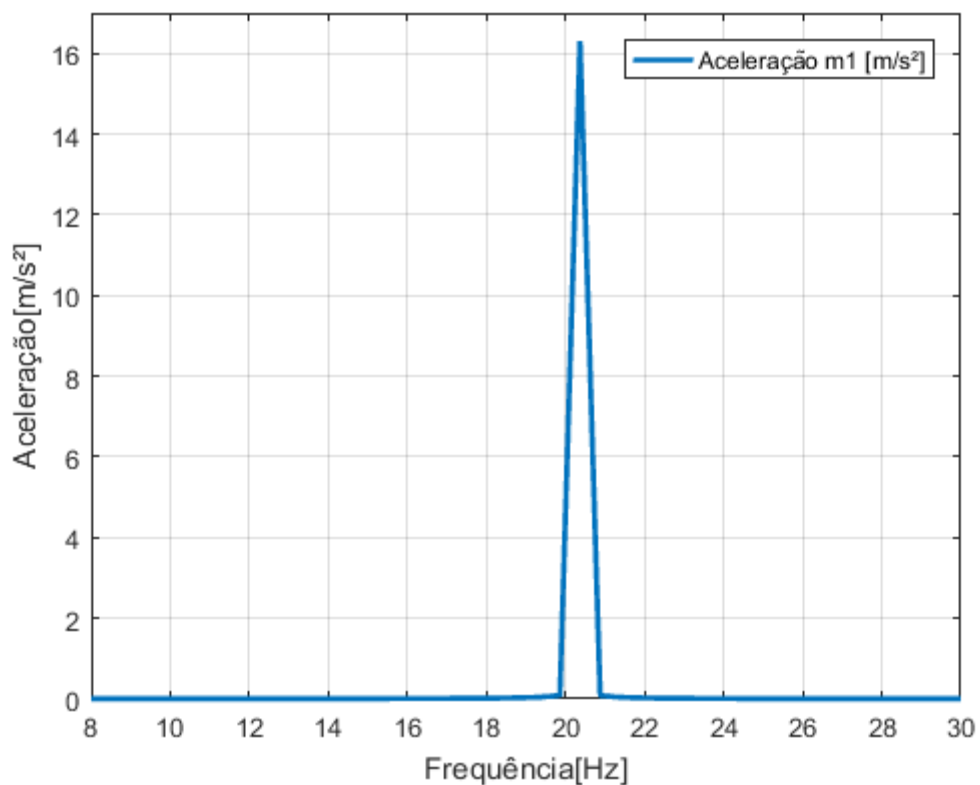


Figura 19 Resposta numérica do sistema massa mola não controlado no domínio da frequência sob vibração livre. (Fonte: O autor).

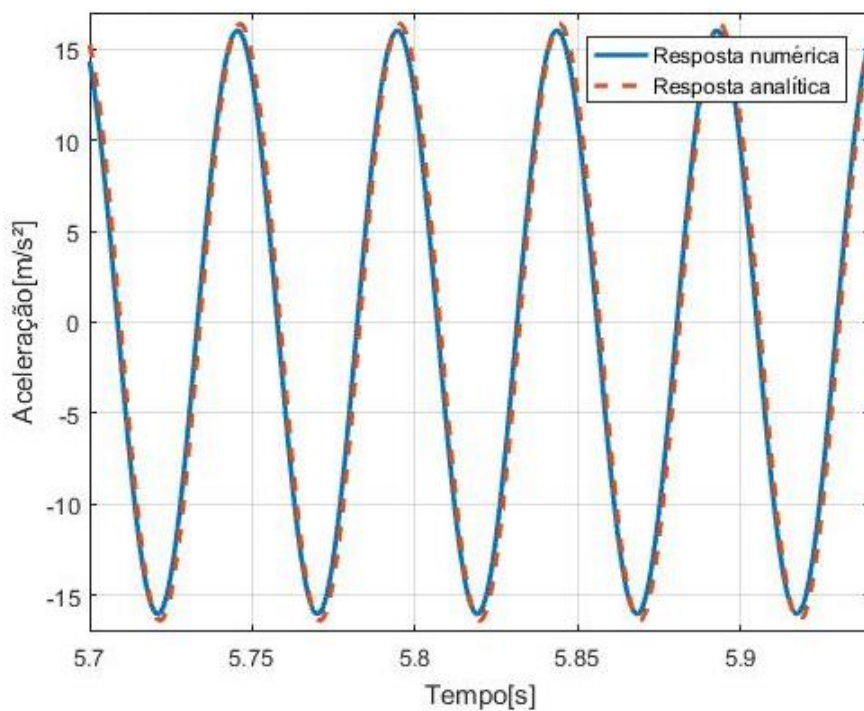


Figura 20 Resposta numérica e resposta analítica do sistema massa mola não controlado no domínio do tempo sob vibração livre. (Fonte: O autor).

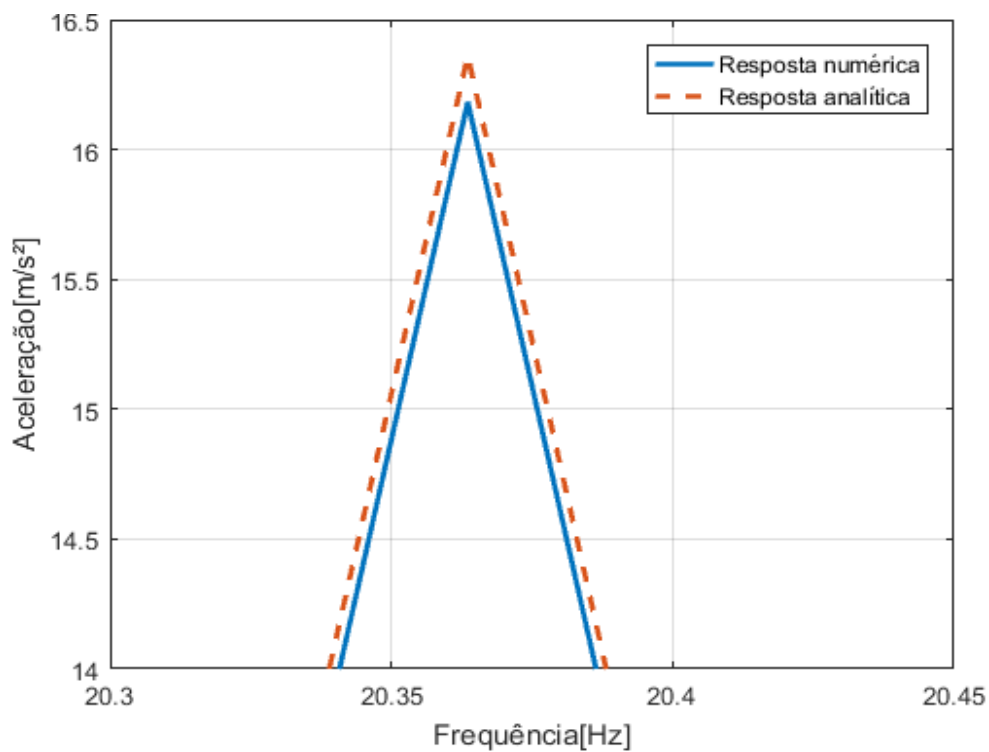


Figura 21 Resposta numérica e resposta analítica do sistema massa mola não controlado no domínio da frequência sob vibração livre. (Fonte: O autor).

Tabela 12 Comparação entre resposta numérica e resposta analítica do sistema massa mola.

Simulação Numérica		Simulação Analítica	
Frequência Natural (Hz)	Aceleração (m/s ²)	Frequência Natural (Hz)	Aceleração (m/s ²)
20,36	16,18	20,36	16,36

(Fonte: O autor).

4.1.2 Sistema Massa Mola Sob Vibração Livre Com Absorvedor Dinâmico: Resposta Numérica

A partir dos resultados encontrados analisando a estrutura sem o absorvedor dinâmico, simulou-se numericamente a resposta do sistema massa mola com a implantação de um absorvedor dinâmico, alterando a massa do absorvedor de acordo com a tabela 13 buscando a configuração com melhor desempenho. A configuração mais eficiente para o sistema foi alcançada com a aplicação de uma massa de 0,091 kg no absorvedor. Para avaliar a eficiência do sistema simulou-se o sistema apresentado na figura 2 juntamente com o sistema apresentado na figura 1 do capítulo anterior, submetendo ambos ao mesmo deslocamento inicial através da aplicação do método de Runge Kutta de quarta ordem, obteve-se a resposta dos sistemas em regime de vibração livre no domínio do tempo em função da aceleração da estrutura, de acordo com a figura 22, a resposta medida no absorvedor pode ser observada na figura 23. Aplicando uma transformada rápida de Fourier representou-se a resposta dos sistemas no domínio da frequência em função da aceleração da estrutura de acordo com a figura 24, a resposta medida no absorvedor pode ser observada na figura 25.

Analisando as figuras 22 e 23, pode-se observar a presença do fenômeno conhecido como batimento na resposta controlada no domínio do tempo, indicando a proximidade entre as frequências naturais dos dois modos de vibração, como é demonstrado na tabela 14, evidenciando que a frequência de oscilação da massa m_1 apresenta uma resposta resultante na massa m_2 e vice-versa, devido a vibração defasada do sistema.

Analisando a figura 24, juntamente com a tabela 15, nota-se uma aceleração de 4,657m/s² no sistema massa mola controlado, caracterizando uma redução na aceleração da massa m_1 controlada de 71,22% em relação a massa m_1 não

controlada, já a aceleração do absorvedor dinâmico medida na barra apresenta um valor de 7,313 m/s². Entretanto, essa redução na aceleração medida na m_1 controlada, tem como agravante uma aceleração medida no absorvedor dinâmico de 34,270 m/s² para a massa principal, e 43,400 m/s² para o absorvedor dinâmico.

Tabela 13 Relação de massas entre a estrutura principal e o absorvedor dinâmico.

Massa da estrutura (kg)	Massa do absorvedor (kg)	Massa do Absorvedor em relação a massa da barra (%)
m_1 1,65	m_2 0,030	1,82
	m_2 0,043	2,60
	m_2 0,065	3,93
	m_2 0,076	4,60
	m_2 0,079	4,78
	m_2 0,086	5,21
	m_2 0,091	5,51
	m_2 0,094	5,69
	m_2 0,097	5,87
	m_2 0,108	6,54
	m_2 0,119	7,20
	m_2 0,130	7,87
	m_2 0,151	9,14
	m_2 0,173	10,47
	m_2 0,194	11,74
	m_2 0,216	13,07
	m_2 0,238	14,41
	m_2 0,258	15,62
	m_2 0,280	16,95
	m_2 0,303	18,34
m_2 0,323	19,55	

(Fonte: O autor).

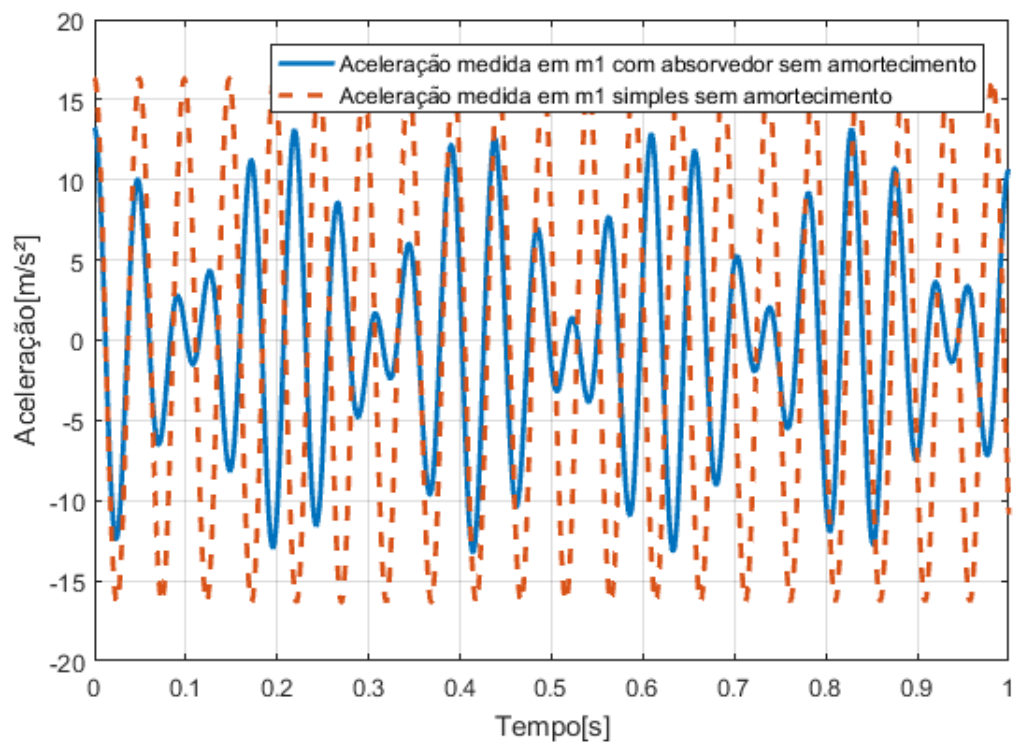


Figura 22 Resposta numérica do sistema massa mola controlado e não controlado no domínio do tempo sob vibração livre. (Fonte: O autor).

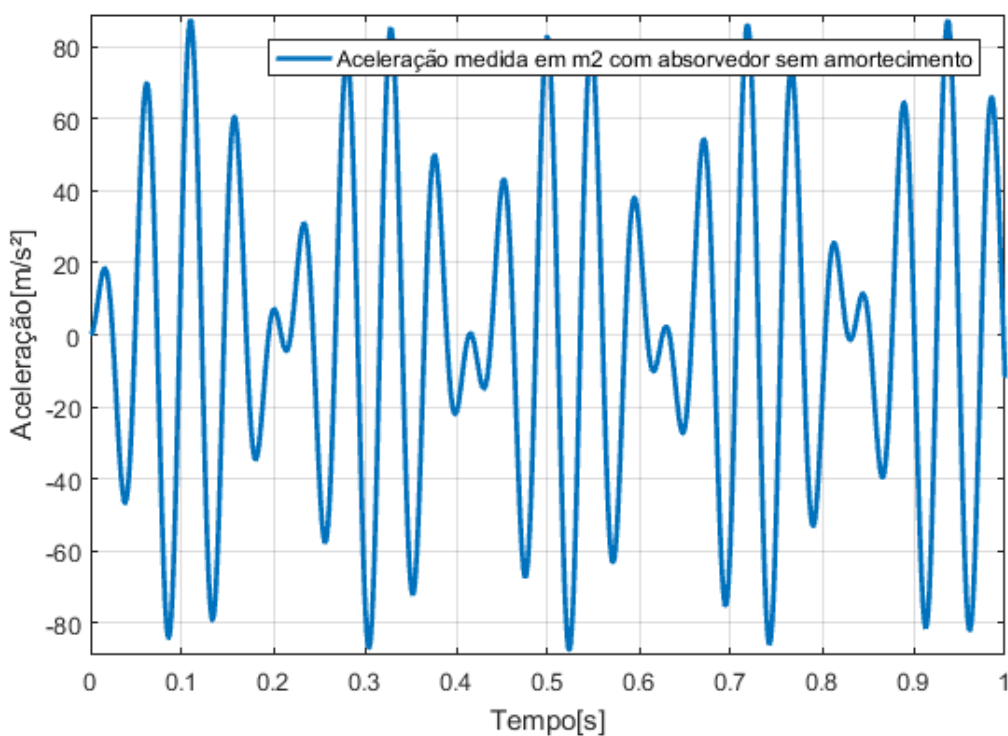


Figura 23 Resposta numérica do absorvedor dinâmico no domínio do tempo sob vibração livre. (Fonte: O autor).

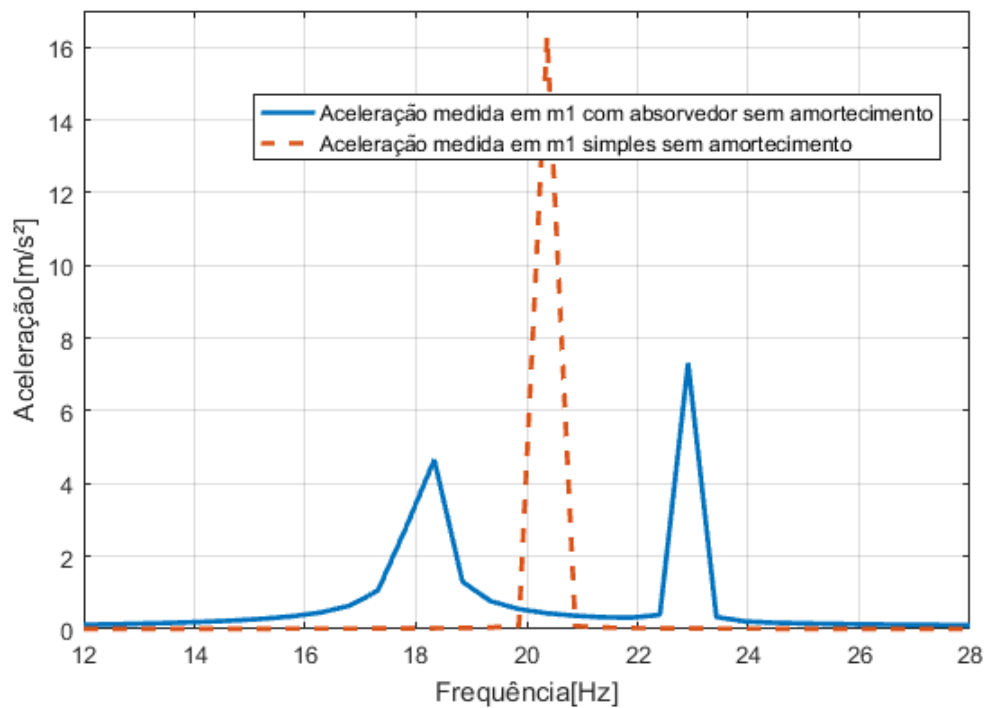


Figura 24 Resposta numérica do sistema massa mola controlado e não controlado no domínio da frequência sob vibração livre. (Fonte: O autor).

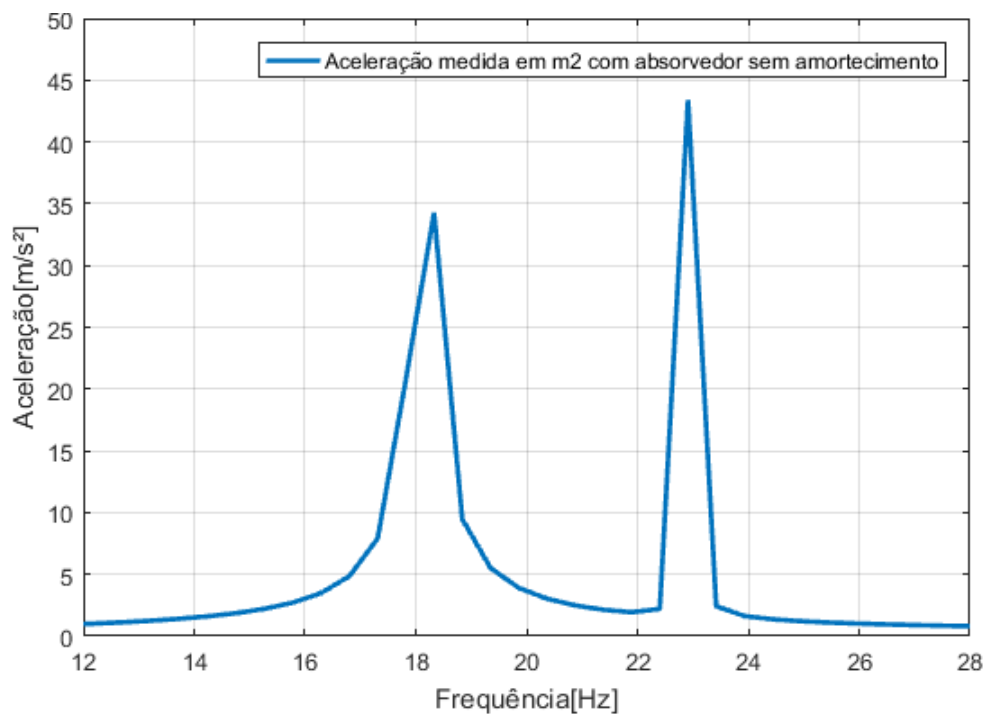


Figura 25 Resposta numérica do absorvedor dinâmico no domínio da frequência sob vibração livre. (Fonte: O autor).

Tabela 14 Frequências naturais do sistema massa mola controlado e não controlado sob vibração livre

Massa m_1 (kg)	1,652
Frequência natural do sistema sem absorvedor dinâmico (Hz)	20,36
Massa do absorvedor dinâmico m_2 (kg)	0,091
Relação entre a massa do absorvedor e a massa principal (%)	5,51
Frequência natural 1 do sistema com absorvedor (Hz)	18,33
Frequência natural 2 do sistema com absorvedor (Hz)	22,91

(Fonte: O autor).

Tabela 15 Resposta do sistema massa mola controlado e não controlado sob vibração livre

Massa m_1 (kg)	1,652
Aceleração da estrutura sem absorvedor dinâmico canal 1 (m/s^2)	16,18
Massa do absorvedor m_2 (kg)	0,091
Aceleração 1 da estrutura com absorvedor dinâmico medido na massa principal canal 1 (m/s^2)	4,657
Aceleração 2 da estrutura com absorvedor dinâmico medido na massa principal canal 1 (m/s^2)	7,313
Aceleração 1 da estrutura com absorvedor dinâmico medido no absorvedor dinâmico canal 2 (m/s^2)	34,270
Aceleração 2 da estrutura com absorvedor dinâmico medido no absorvedor dinâmico canal 2 (m/s^2)	43,400
Relação entre a aceleração 1 da estrutura com absorvedor dinâmico medido na massa principal canal 1 e a aceleração da estrutura sem absorvedor dinâmico canal 1 (%)	71,22

Relação entre a aceleração 2 da estrutura com absorvedor dinâmico medido na massa principal canal 1 e a aceleração da estrutura sem absorvedor dinâmico canal 1 (%)	54,80
Relação entre a aceleração 1 da estrutura medido no absorvedor dinâmico canal 2 e a aceleração da estrutura sem absorvedor dinâmico canal 1 (%)	-111,80
Relação entre a aceleração 2 da estrutura medido no absorvedor dinâmico canal 2 e a aceleração da estrutura sem absorvedor dinâmico canal 1 (%)	-168,23

(Fonte: O autor).

4.1.3 Sistema Barra Mola 1 Grau de Liberdade Sob Vibração Livre Resposta Numérica

Ao simular numericamente, o sistema barra mola apresentado na figura 03 do capítulo anterior, submetendo o mesmo a um deslocamento inicial através da aplicação do método de Runge Kutta de quarta ordem, obtém-se a resposta do sistema em regime de vibração livre no domínio do tempo em função da aceleração da estrutura, de acordo com a figura 26. Aplicando uma transformada rápida de Fourier, obtém-se a resposta da estrutura no domínio da frequência em função da aceleração de acordo com a figura 27. Observa-se na tabela 16 os valores da frequência natural do sistema e da aceleração.

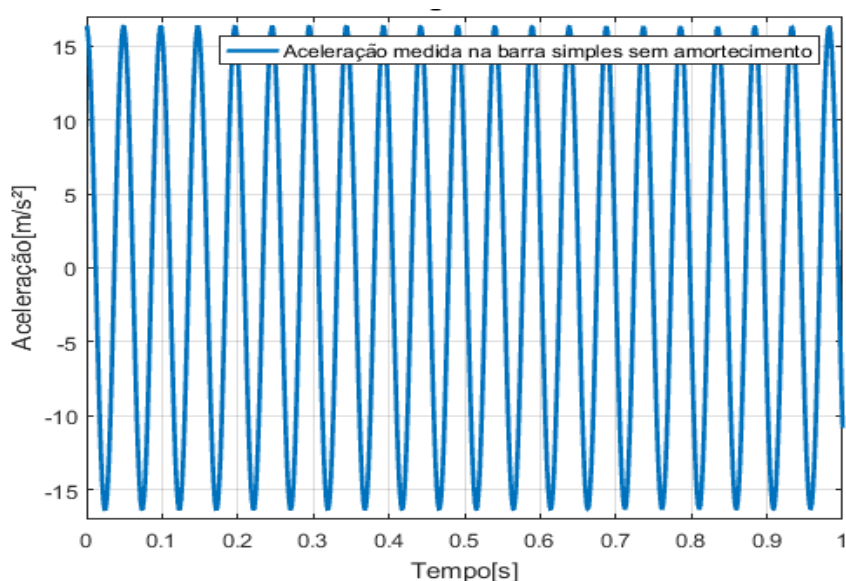


Figura 26 Resposta numérica do sistema barra mola não controlado no domínio do tempo sob vibração livre. (Fonte: O autor).

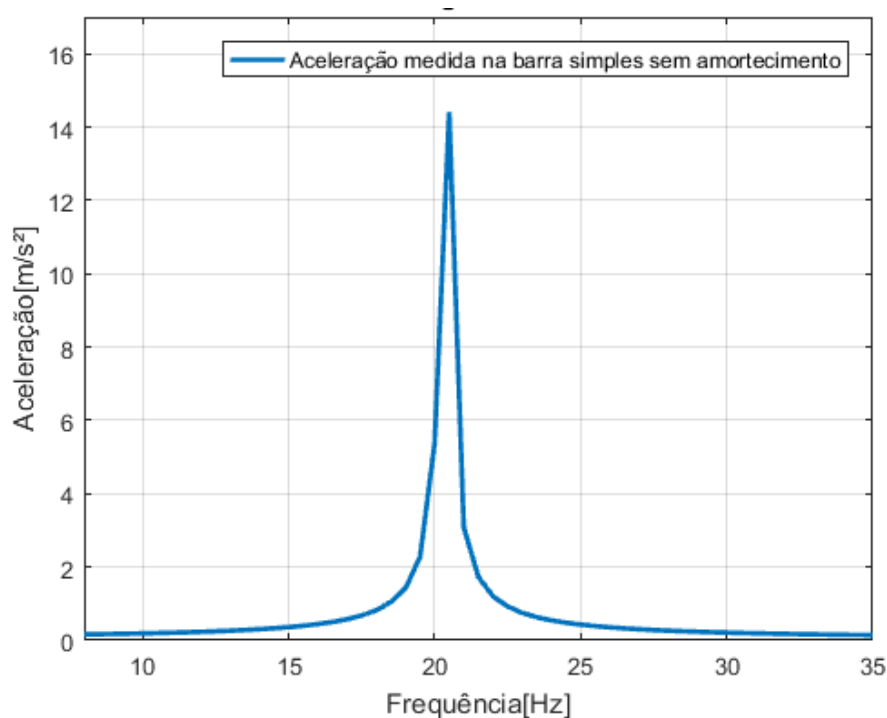


Figura 27 Resposta numérica do sistema barra mola não controlado no domínio da frequência sob vibração livre. (Fonte: O autor).

Tabela 16 Resposta numérica do sistema barra mola.

Simulação Numérica	
Frequência Natural (Hz)	Aceleração (m/s ²)
20,36	14,40

(Fonte: O autor).

4.1.4 Sistema Barra Mola Sob Vibração Livre Com Absorvedor Dinâmico: Resposta Numérica

A partir dos resultados encontrados analisando a estrutura sem o absorvedor dinâmico, simulou-se numericamente a resposta do sistema barra mola com a implantação de um absorvedor dinâmico, alterando a massa do absorvedor dinâmico de acordo com a tabela 17 buscando a configuração com melhor desempenho. A configuração mais eficiente para o sistema foi alcançada com a aplicação de uma massa de 0,091 kg no absorvedor. Para avaliar a eficiência do sistema apresentado na figura 4, o mesmo foi simulado juntamente com o sistema

apresentado na figura 3 do capítulo anterior, submetendo ambos ao mesmo deslocamento inicial através da aplicação do método de Runge Kutta de quarta ordem, obteve-se a resposta dos sistemas em regime de vibração livre no domínio do tempo em função da aceleração da estrutura, de acordo com a figura 28, resposta medida no absorvedor pode ser observada na figura 29. Aplicando uma transformada rápida de Fourier, representou-se a resposta dos sistemas no domínio da frequência em função da aceleração da estrutura de acordo com a figura 30, a resposta medida no absorvedor pode ser observada na figura 31.

Ao analisar as figuras 28 e 29, pode-se observar a presença do fenômeno conhecido como batimento na resposta controlada no domínio do tempo, assim como, no sistema massa mola indicando a proximidade entre as frequências naturais dos dois modos de vibração, como é demonstrado na tabela 18, evidenciando que, a frequência de oscilação da barra apresenta uma resposta resultante na massa do absorvedor e vice-versa devido vibração defasada do sistema.

Quando se analisa a figura 30 juntamente com a tabela 19, nota-se uma aceleração de $4,278 \text{ m/s}^2$ caracterizando uma redução na aceleração da barra com o absorvedor dinâmico de $70,29\%$ em relação a barra sem o absorvedor dinâmico, já a aceleração do absorvedor dinâmico medida na barra apresentou um valor de $7,643 \text{ m/s}^2$. Porém, essa redução na aceleração da barra controlada, tem como agravante uma aceleração medida no absorvedor dinâmico de $23,830 \text{ m/s}^2$ para a massa principal e $30,760 \text{ m/s}^2$ para o absorvedor dinâmico.

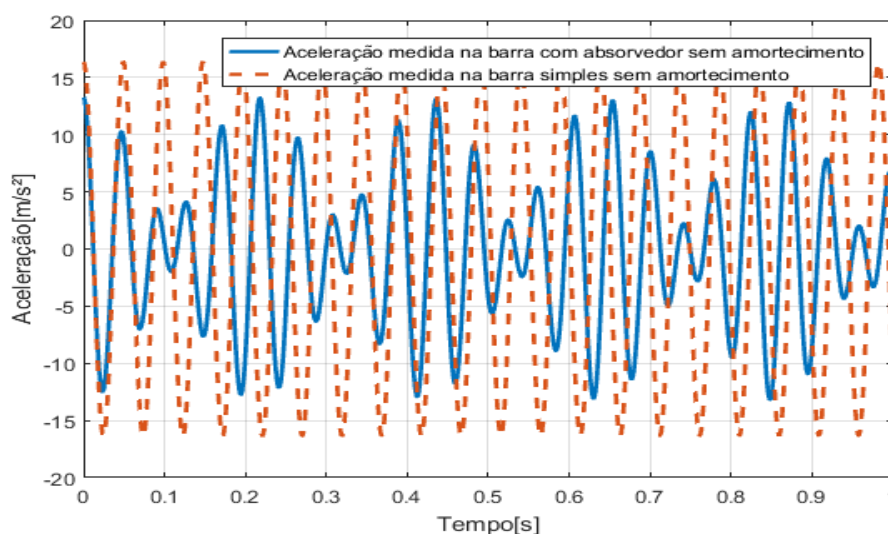


Figura 28 Resposta numérica do sistema barra mola controlado e não controlado no domínio do tempo sob vibração livre. (Fonte: O autor).

Tabela 17 Relação de massas entre a estrutura principal e o absorvedor dinâmico

Massa da barra (kg)	Massa do absorvedor (kg)	Massa do Absorvedor em relação a massa da barra (%)
m_1 2,16	m_2 0,030	1,388
	m_2 0,043	1,990
	m_2 0,065	3,009
	m_2 0,076	3,518
	m_2 0,079	3,657
	m_2 0,086	3,981
	m_2 0,091	4,213
	m_2 0,094	4,351
	m_2 0,097	4,490
	m_2 0,108	5,000
	m_2 0,119	5,509
	m_2 0,130	6,018
	m_2 0,151	6,990
	m_2 0,173	8,009
	m_2 0,194	8,981
	m_2 0,216	10,000
	m_2 0,238	11,018
	m_2 0,258	11,944
	m_2 0,280	12,963
m_2 0,303	14,027	
m_2 0,323	14,953	

(Fonte: O autor).

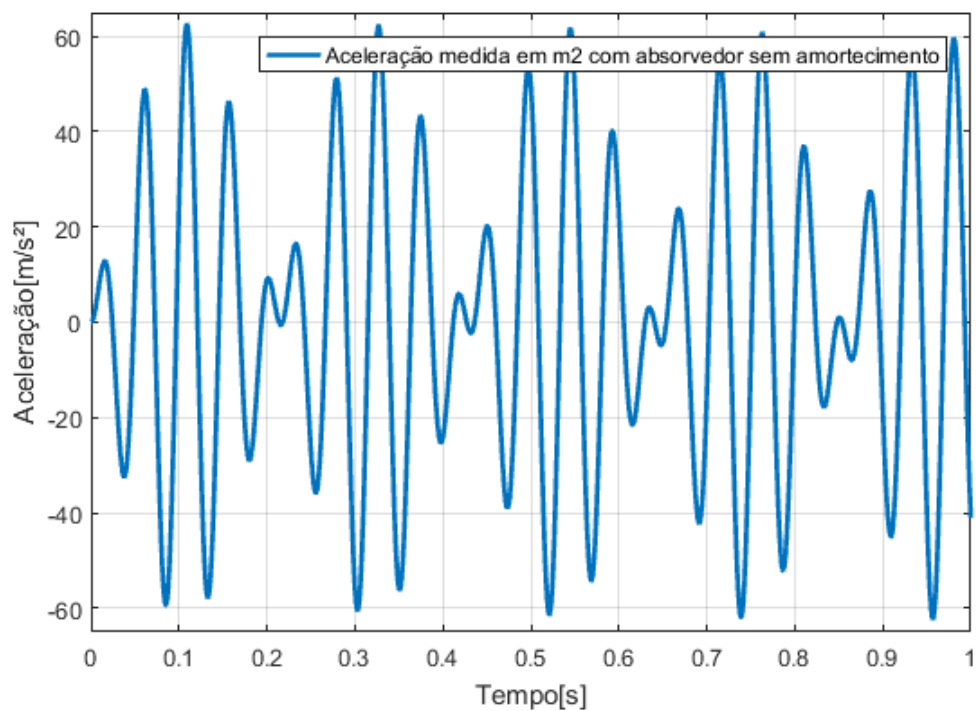


Figura 29 Resposta numérica do absorvedor dinâmico no domínio do tempo sob vibração livre. (Fonte: O autor).

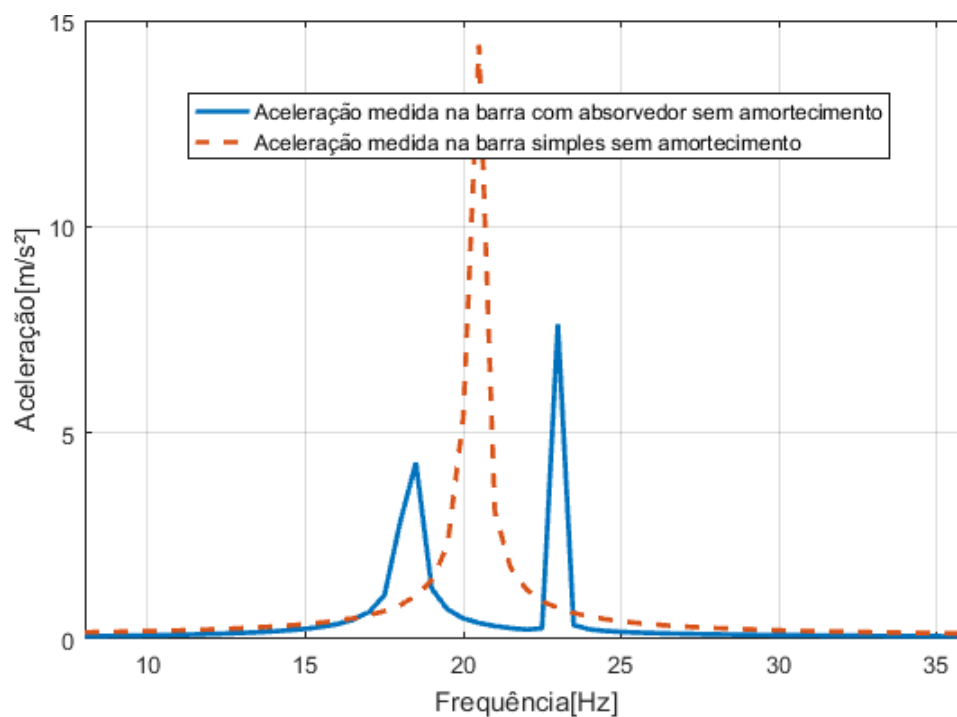


Figura 30 Resposta numérica do sistema barra mola controlado no domínio da frequência sob vibração livre. (Fonte: O autor).

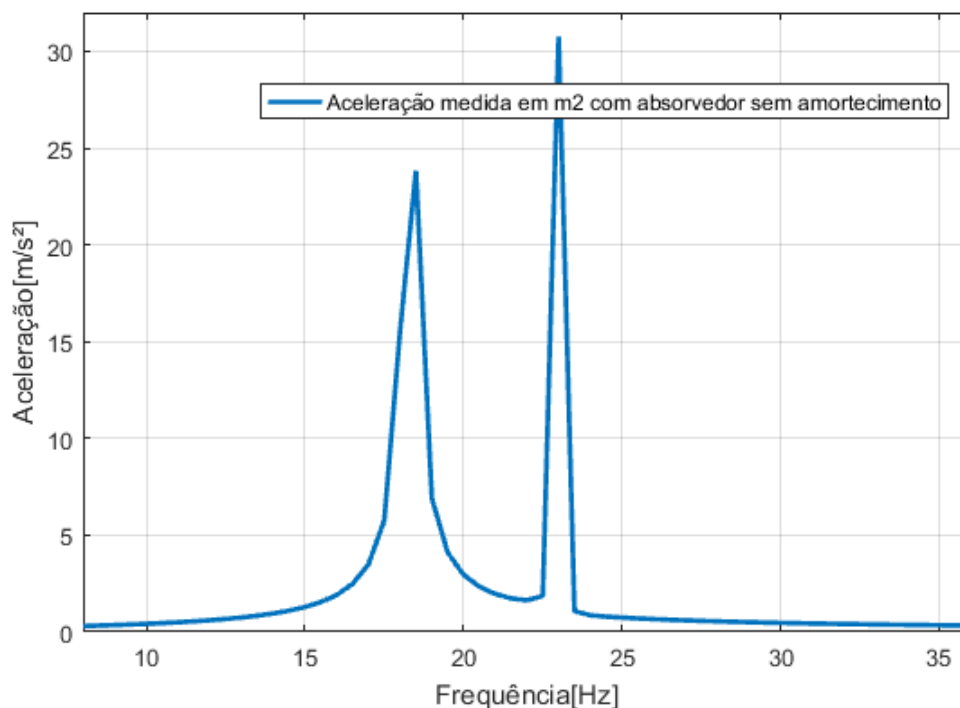


Figura 31 Resposta numérica do absorvedor dinâmico no domínio da frequência sob vibração livre. (Fonte: O autor).

Tabela 18 Frequências naturais do sistema barra mola controlado e não controlado sob vibração livre.

Massa m_1 (kg)	2,160
Frequência natural massa sem absorvedor (Hz)	20,36
Massa do absorvedor m_2 (kg)	0,091
Relação entre a massa do absorvedor e a massa da barra (%)	4,21
Frequência natural 1 do sistema com absorvedor (Hz)	18,33
Frequência natural 2 do sistema com absorvedor (Hz)	22,91

(Fonte: O autor).

Tabela 19 Resposta do sistema barra mola controlado e não controlado sob vibração livre.

Massa da barra m_1 (kg)	2,16
Aceleração barra sem absorvedor canal 1 (m/s ²)	14,400
Massa do absorvedor m_2 (kg)	0,091
Aceleração 1 com absorvedor medido na barra canal 1 (m/s ²)	4,278
Aceleração 2 barra com absorvedor medido na barra canal 1 (m/s ²)	7,643
Aceleração 1 com absorvedor medido no absorvedor dinâmico canal 2 (m/s ²)	23,830
Aceleração 2 com absorvedor medido no absorvedor dinâmico canal 2 (m/s ²)	30,760
Relação entre a aceleração 1 do sistema com absorvedor canal 1 medido na barra e a aceleração do sistema sem absorvedor canal 1 (%)	70,290
Relação entre a aceleração 2 do sistema com absorvedor canal 1 medido na barra e a aceleração do sistema sem absorvedor canal 1 (%)	46,920
Relação entre a aceleração 1 do sistema com absorvedor medido no absorvedor dinâmico canal 2 e a aceleração do sistema sem absorvedor canal 2 (%)	-65,490
Relação entre a aceleração 2 do sistema com absorvedor medido no absorvedor dinâmico canal 2 e a aceleração do sistema sem absorvedor canal 2 (%)	-113,610

(Fonte: O autor).

4.2 VIBRAÇÃO FORÇADA

Nesta seção serão analisadas as respostas dos sistemas em regime de vibração forçada, desprezando o amortecimento e a massa dos elementos mola.

4.2.1 Sistema Massa Mola Com 1 Grau De Liberdade, Vibração Forçada: Resposta Numérica

Ao simular numericamente o sistema massa mola apresentado na figura 5 do capítulo anterior e submetendo o mesmo a um carregamento harmônico com frequência de excitação igual a sua frequência natural da estrutura, através da aplicação do método de Runge Kutta de quarta ordem, obtém-se a resposta do sistema em regime de vibração forçada no domínio do tempo em função da aceleração da estrutura, de acordo com a figura 32. Aplicando uma transformada rápida de Fourier, obteve-se a resposta do sistema no domínio da frequência em função da aceleração da estrutura representado na figura 33. A frequência natural, frequência de excitação e aceleração da estrutura estão representados na tabela 20.

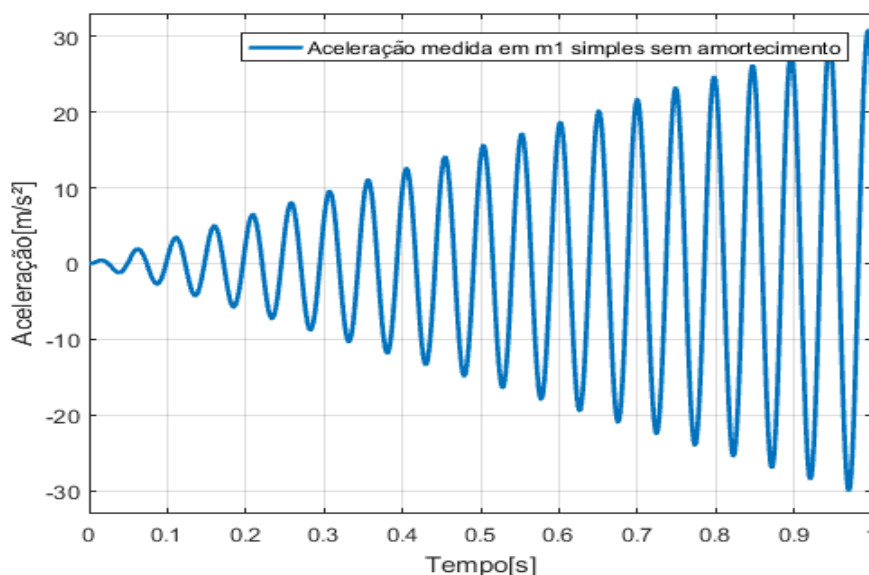


Figura 32 Resposta numérica do sistema massa mola não controlado no domínio do tempo sob vibração forçada. (Fonte: O autor).

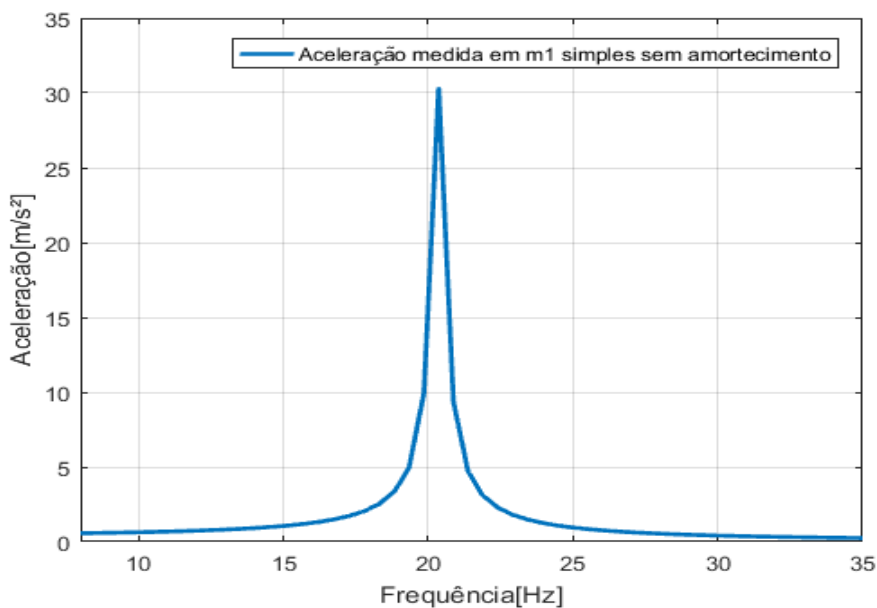


Figura 33 Resposta numérica do sistema massa mola não controlado no domínio da frequência sob vibração forçada. (Fonte: O autor).

Tabela 20 Resposta numérica do sistema massa mola.

Simulação Numérica		
Frequência Natural (Hz)	Frequência de Excitação (Hz)	Aceleração (m/s ²)
20,36	20,36	14,40

(Fonte: O autor).

4.2.2 Sistema Massa Mola Vibração Forçada Com Absorvedor Dinâmico Resposta Numérica

A partir dos resultados encontrados, analisando a estrutura sem o absorvedor dinâmico, simulou-se numericamente a resposta do sistema massa mola, com a implantação de um absorvedor dinâmico, alterando a massa do absorvedor de acordo com a tabela 13, apresentada anteriormente buscando a configuração com melhor desempenho. A configuração mais eficiente para o sistema foi alcançada com a aplicação de uma massa de 0,091 kg no absorvedor. Para avaliar a eficiência do sistema, simulou-se numericamente o sistema apresentado na figura 6 juntamente com o sistema apresentado na figura 5 e submetendo ambos a um carregamento harmônico com frequência de excitação igual a frequência natural da massa m_1 não controlada, através da aplicação do método de Runge Kutta de quarta ordem, obteve-se a resposta dos sistema em regime de vibração forçada no domínio do tempo, em função da aceleração da estrutura, de acordo com a figura

34, a resposta medida no absorvedor pode ser observada na figura 35. Aplicando uma transformada rápida de Fourier obteve-se a resposta do sistema no domínio da frequência em função da aceleração da estrutura de acordo com as figuras 36, a resposta medida no absorvedor pode ser observada na figura 37, onde o primeiro e o terceiro picos de aceleração devem-se respectivamente ao primeiro e segundo modos de vibração. Já o pico centralizado representa a frequência de excitação do sistema, o qual se torna evidente devido ao absorvedor dinâmico estar sintonizado com a mesma.

Analisando as figuras 34 e 35, pode-se observar a presença do fenômeno conhecido como batimento na resposta controlada no domínio do tempo, indicando a proximidade entre as frequências naturais dos dois modos de vibração com a frequência de excitação, além da proximidade entre os dois modos de vibração como pode-se observar na tabela 21.

Analisando a figura 36 juntamente com a tabela 22, observa-se uma aceleração de $0,665 \text{ m/s}^2$ caracterizando uma redução na aceleração da barra controlada de $97,81\%$ em relação a massa m_1 não controlada, já a aceleração do absorvedor dinâmico medido na massa principal apresentou um valor de $0,797 \text{ m/s}^2$. Verificou-se também que a aceleração medida no absorvedor apresenta valores $4,939 \text{ m/s}^2$ para a aceleração da massa principal e $4,827 \text{ m/s}^2$ para o absorvedor dinâmico.

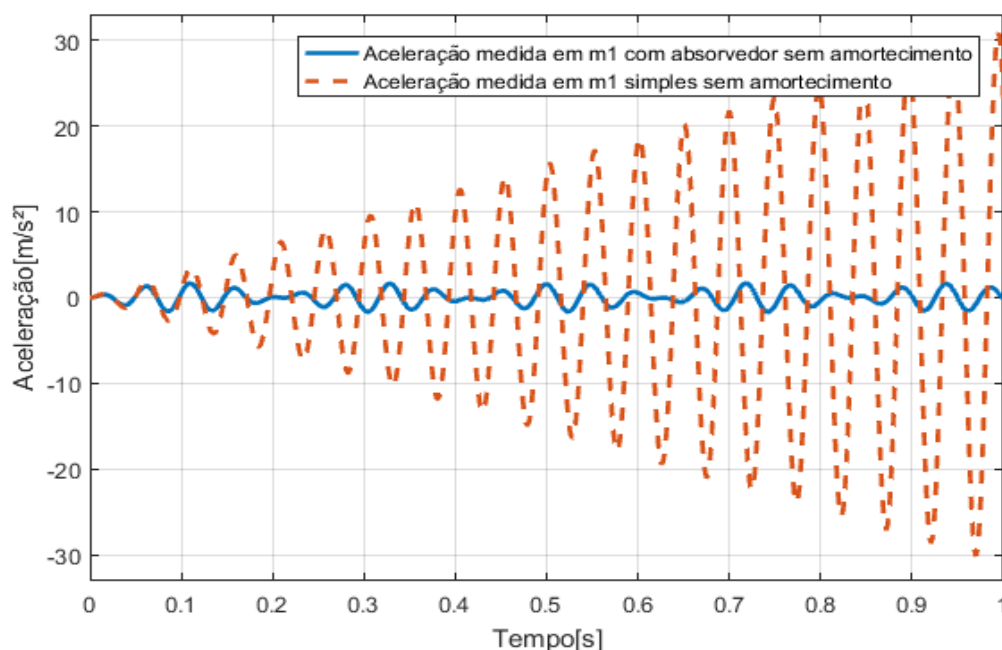


Figura 34 Resposta numérica do sistema massa mola controlado no domínio do tempo sob vibração forçada. (Fonte: O autor).

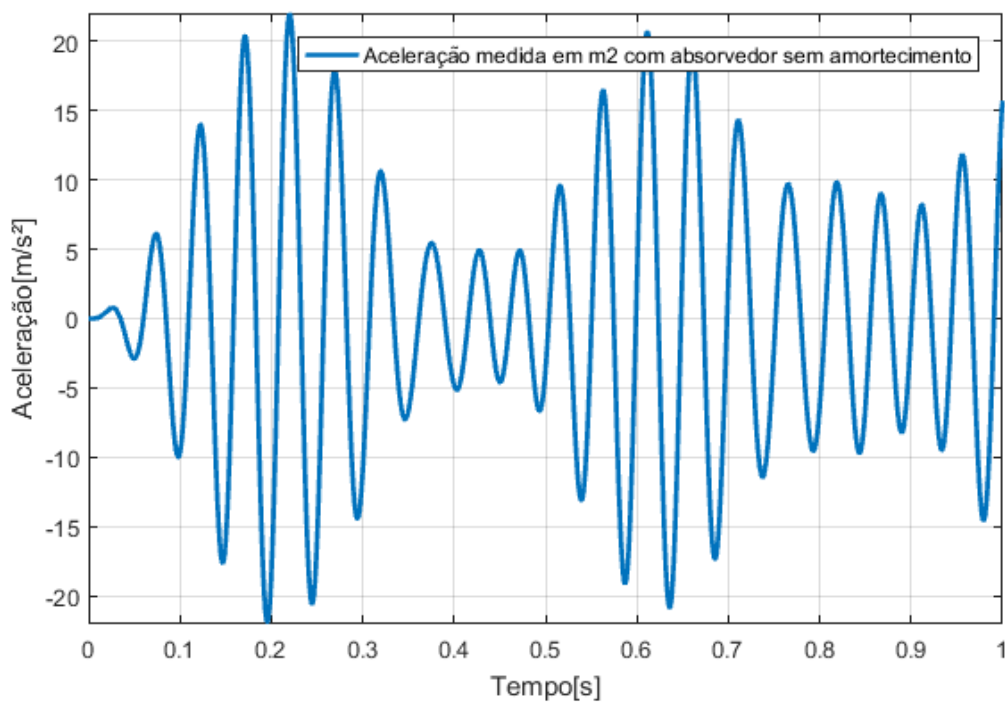


Figura 35 Resposta numérica do absorvedor dinâmico no domínio do tempo sob vibração forçada. (Fonte: O autor).

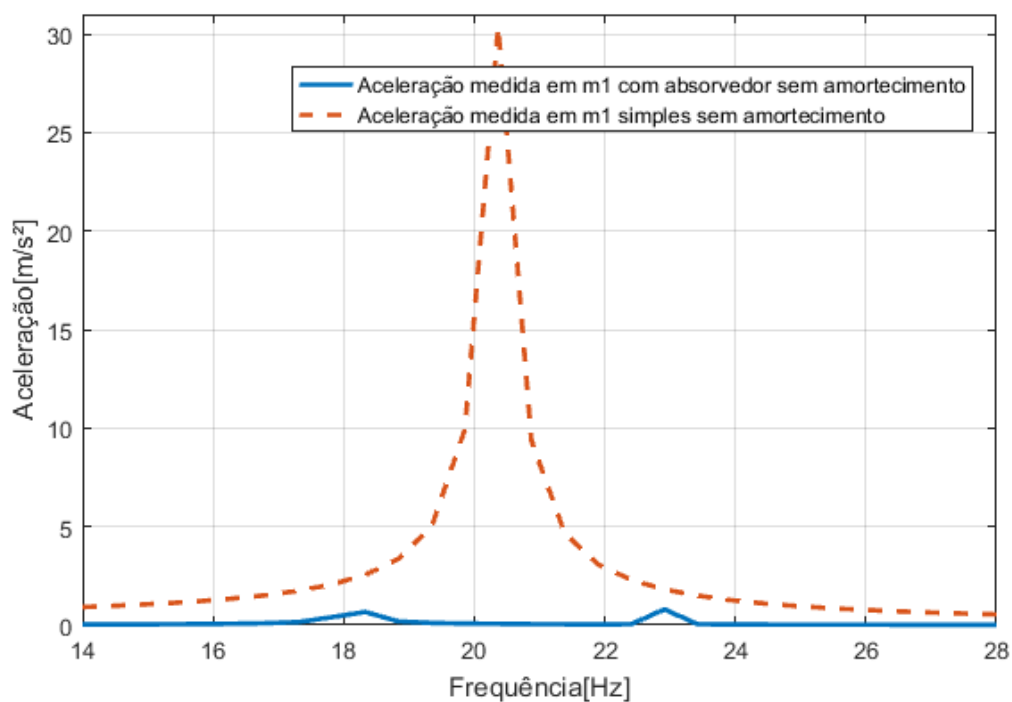


Figura 36 Resposta numérica do sistema massa mola controlado no domínio da frequência sob vibração forçada. (Fonte: O autor).

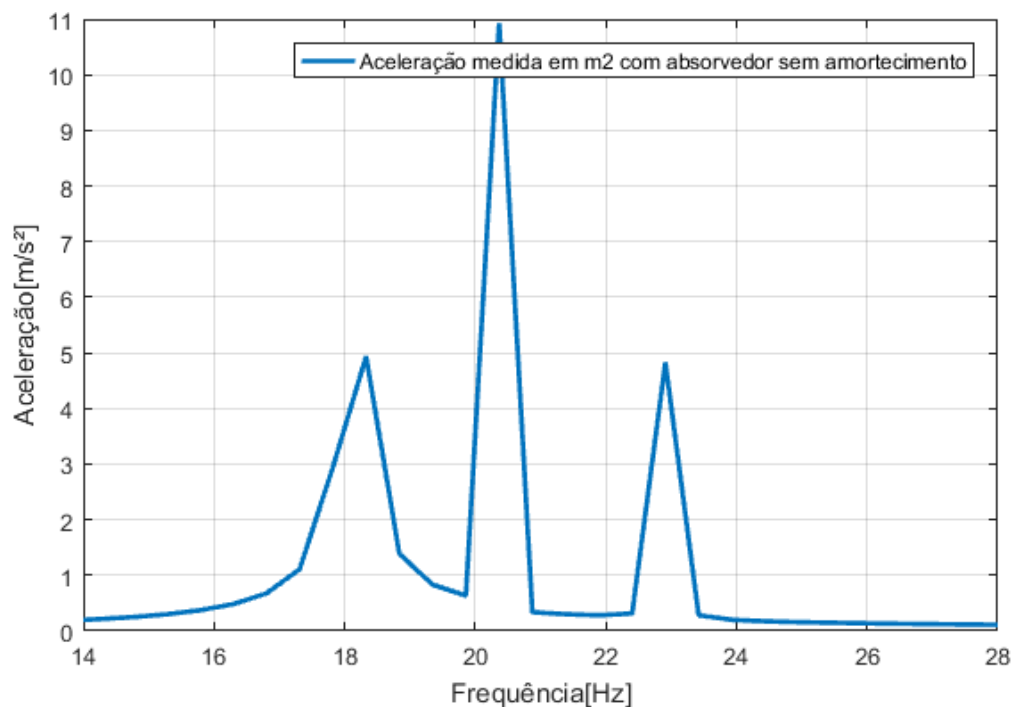


Figura 37 Resposta numérica do absorvedor dinâmico no domínio da frequência sob vibração forçada. (Fonte: O autor).

Tabela 21 Frequências naturais do sistema massa mola controlado e não controlado sob vibração forçada.

Massa m_1 (kg)	1,652
Frequência natural massa sem absorvedor dinâmico (Hz)	20,36
Massa do absorvedor m_2 (kg)	0,091
Relação entre a massa do absorvedor m_2 e a massa principal m_1 (%)	5,510
Frequência natural 1 do sistema com absorvedor dinâmico (Hz)	18,33
Frequência natural 2 do sistema com absorvedor dinâmico (Hz)	22,91

(Fonte: O autor).

Tabela 22 Resposta do sistema massa mola controlado e não controlado sob vibração forçada.

Massa da barra m_1 (kg)	1,652
Aceleração da estrutura sem absorvedor dinâmico canal 1 (m/s ²)	30,370
Massa do absorvedor dinâmico m_2 (kg)	0,091
Aceleração 1 da estrutura com absorvedor dinâmico medido na massa principal canal 1 (m/s ²)	0,665
Aceleração 2 da estrutura com absorvedor dinâmico medido na massa principal canal 1 (m/s ²)	0,797
Aceleração 1 da estrutura com absorvedor dinâmico medido no absorvedor dinâmico canal 2 (m/s ²)	4,939
Aceleração 2 da estrutura com absorvedor dinâmico medido no absorvedor dinâmico canal 2 (m/s ²)	4,827
Relação entre a aceleração 1 da estrutura com absorvedor dinâmico medido na massa principal canal 1 e a aceleração da estrutura sem absorvedor dinâmico canal 1 (%)	97,810
Relação entre a aceleração 2 da estrutura com absorvedor dinâmico medido na massa principal canal 1 e a aceleração da estrutura sem absorvedor dinâmico canal 1 (%)	97,380
Relação entre a aceleração 1 da estrutura medido no absorvedor dinâmico canal 2 e a aceleração da estrutura sem absorvedor dinâmico canal 1 (%)	83,740
Relação entre a aceleração 2 da estrutura medido no absorvedor dinâmico canal 2 e a aceleração da estrutura sem absorvedor dinâmico canal 1 (%)	84,110

(Fonte: O autor).

4.2.3 Sistema Barra Mola Com 1 Grau De Liberdade Sob Vibração Forçada: Resposta Numérica

Ao simular numericamente o sistema barra mola apresentado na figura 7 do capítulo anterior, submetendo o mesmo a um carregamento harmônico com frequência de excitação igual a sua frequência natural, através da aplicação do método de Runge Kutta de quarta ordem, obtém-se a resposta do sistema em regime de vibração forçada no domínio do tempo em função da aceleração da estrutura, de acordo com a figura 38. Aplicando uma transformada rápida de Fourier, obteve-se a resposta do sistema no domínio da frequência em função da aceleração da estrutura representada na figura 39. A frequência natural, frequência de excitação e a aceleração da estrutura são representadas na tabela 23.

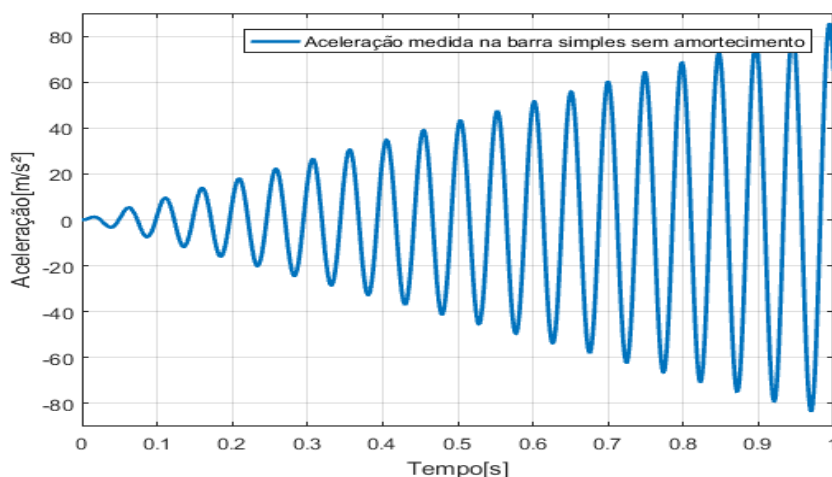


Figura 38 Resposta numérica do sistema barra mola não controlado no domínio do tempo sob vibração forçada. (Fonte: O autor).

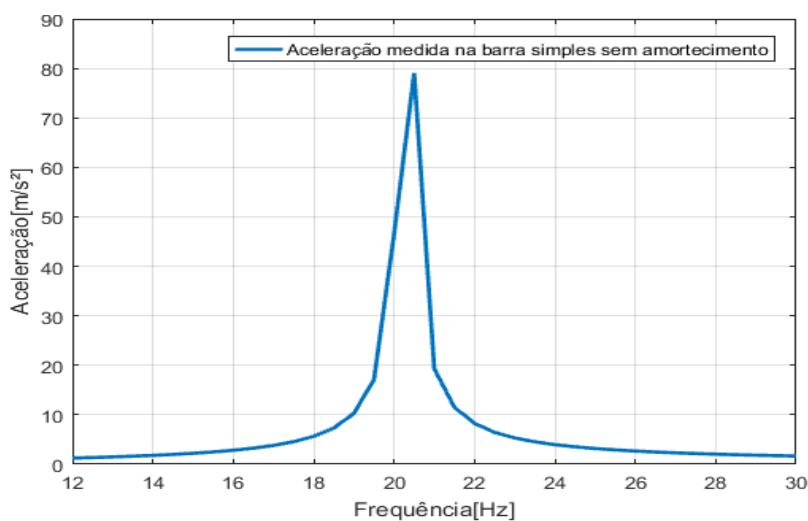


Figura 39 Resposta numérica do sistema barra mola não controlado no domínio da frequência sob vibração forçada. (Fonte: O autor).

Tabela 23 Resposta numérica do sistema barra mola.

Simulação Numérica		
Frequência Natural (Hz)	Frequência de Excitação (Hz)	Aceleração (m/s ²)
20,36	20,36	79,05

(Fonte: O autor).

4.2.4 Sistema Barra Mola Com Absorvedor Dinâmico Sob Vibração Forçada: Resposta Numérica

A partir dos resultados obtidos, analisando a estrutura sem o absorvedor dinâmico, simulou-se numericamente a resposta do sistema barra mola, com a implantação de um absorvedor dinâmico alterando a massa do absorvedor de acordo com a tabela 15, apresentada anteriormente, buscando a configuração com melhor desempenho. A configuração mais eficiente para o sistema foi alcançada com a aplicação de uma massa de 0,091 kg no absorvedor. Para avaliar a eficiência do sistema, simulou-se numericamente o sistema apresentado na figura 8 do capítulo anterior juntamente com o sistema apresentado na figura 7 do capítulo anterior. Submetendo ambos a um carregamento harmônico com frequência de excitação igual a frequência natural da barra não controlada, através da aplicação do método de Runge Kutta de quarta ordem, obteve-se a resposta do sistema em regime de vibração forçada no domínio do tempo em função da aceleração da estrutura, de acordo com a figura 40. A resposta medida no absorvedor pode ser observada na figura 41. Aplicando uma transformada rápida de Fourier, obteve-se a resposta do sistema no domínio da frequência em função da aceleração da estrutura de acordo com a figura 42. A resposta medida no absorvedor pode ser observada na figura 43, onde o primeiro e o terceiro picos de aceleração devem-se respectivamente ao primeiro e segundo modos de vibração. Já o pico centralizado representa a frequência de excitação do sistema, o qual se torna evidente devido ao absorvedor dinâmico estar sintonizado com a mesma.

Analisando as figuras 40 e 41, pode-se observar a presença do fenômeno conhecido como batimento na resposta controlada no domínio do tempo, indicando a proximidade entre as frequências naturais dos dois modos de vibração com a frequência de excitação, além da proximidade entre os dois modos como pode se observar na tabela 24.

Analisando a figura 42 juntamente com a tabela 25, observa-se uma aceleração de $1,847 \text{ m/s}^2$ caracterizando uma redução na aceleração da barra controlada de 97,66% em relação sem o absorvedor dinâmico, já a aceleração do absorvedor dinâmico medida na barra apresentou um valor de $2,245 \text{ m/s}^2$. Verificou-se também que a aceleração medida no absorvedor apresenta valores $11,520 \text{ m/s}^2$ para a aceleração da barra e $8,779 \text{ m/s}^2$ para o absorvedor dinâmico.

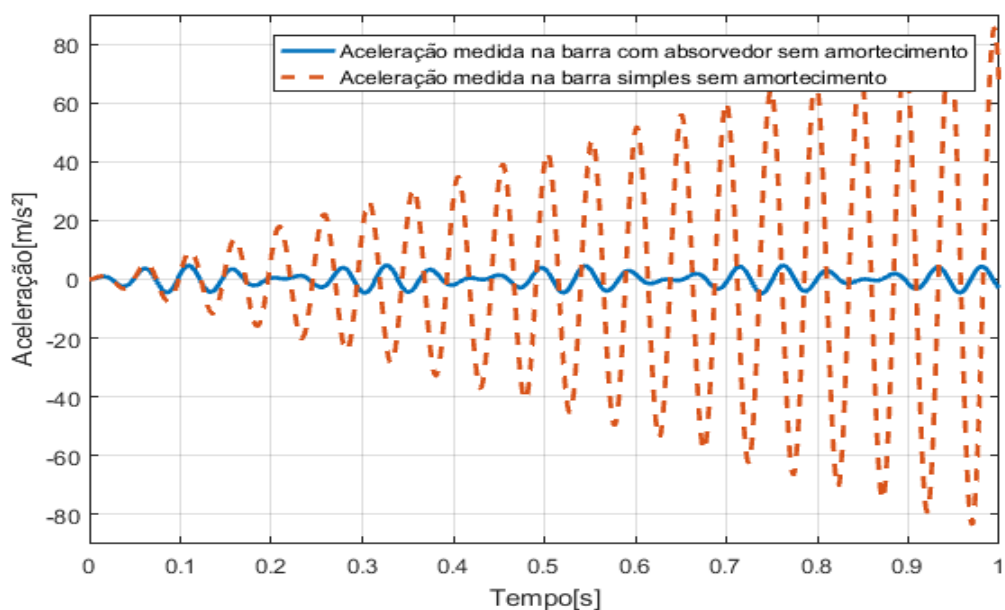


Figura 40 Resposta numérica do sistema barra mola sob vibração forçada no domínio do tempo controlado e não controlado. (Fonte: O autor).

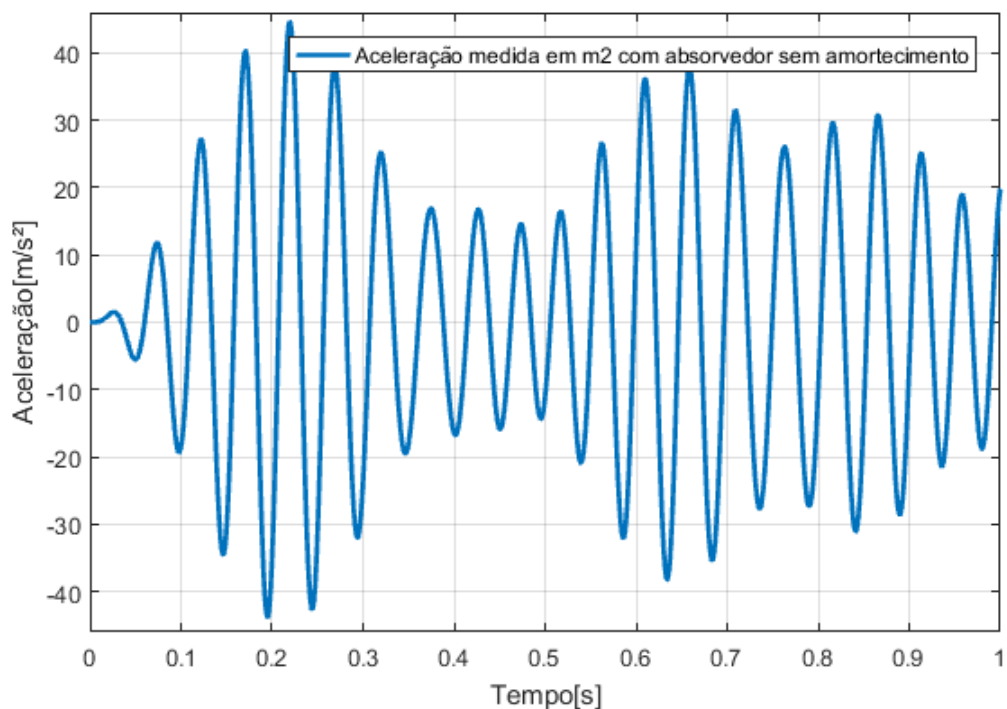


Figura 41 Resposta numérica do absorvedor dinâmico no domínio do tempo sob vibração forçada. (Fonte: O autor).

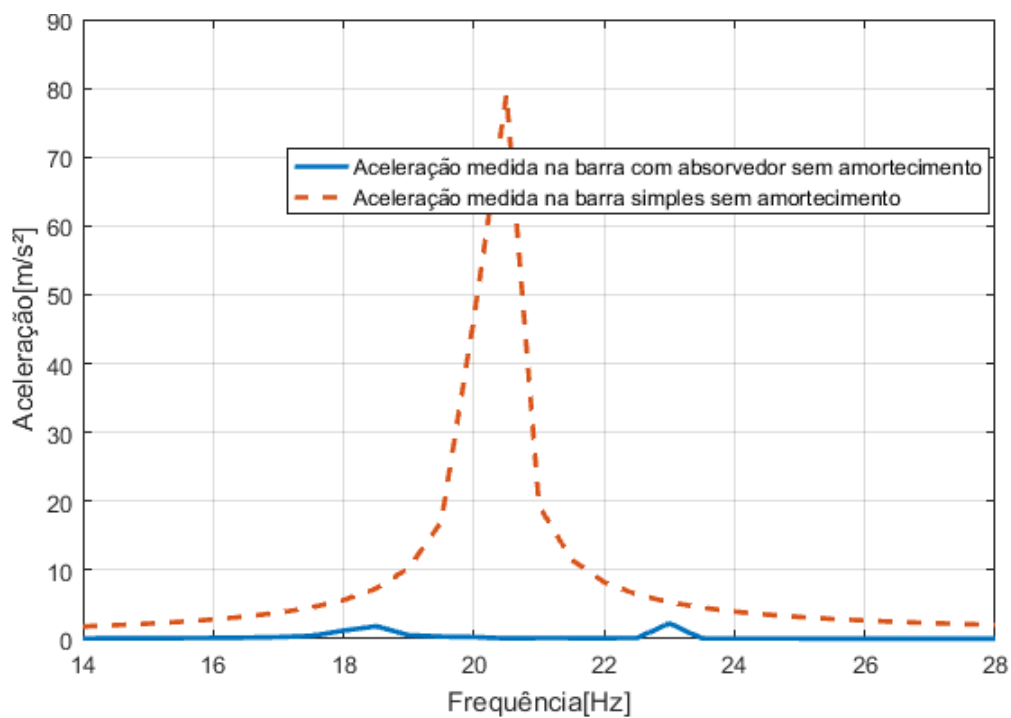


Figura 42 Resposta numérica do sistema barra mola sob vibração forçada no domínio da frequência, controlado e não controlado. (Fonte: O autor).

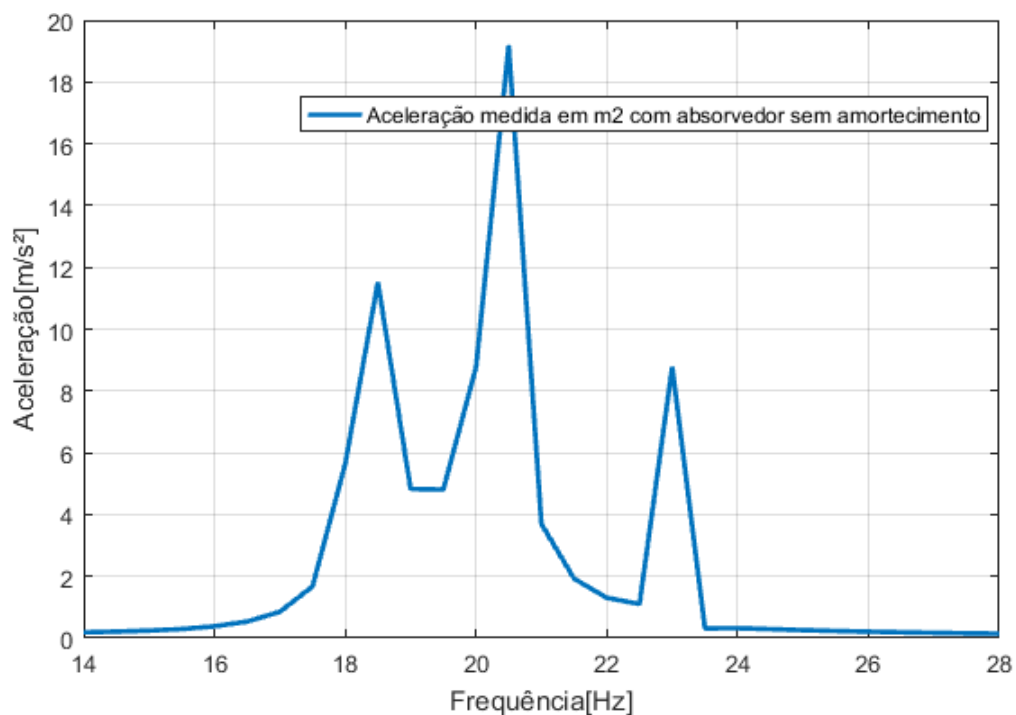


Figura 43 Resposta numérica do absorvedor dinâmico no domínio da frequência sob vibração forçada. (Fonte: O autor).

Tabela 24 Frequências naturais do sistema barra mola controlado e não controlado sob vibração forçada.

Massa da barra m_1 (kg)	2,160
Frequência natural da barra sem absorvedor dinâmico (Hz)	20,36
Massa do absorvedor dinâmico m_2 (kg)	0,091
Relação entre a massa do absorvedor m_2 e a massa da barra m_1 (%)	4,210
Frequência natural 1 do sistema com absorvedor dinâmico (Hz)	18,33
Frequência natural 2 do sistema com absorvedor dinâmico (Hz)	22,91

(Fonte: O autor).

Tabela 25 Resposta do sistema massa mola controlado e não controlado sob vibração forçada.

Massa da barra m_1 (kg)	2,160
Aceleração da estrutura sem absorvedor dinâmico canal 1 (m/s^2)	79,050
Massa do absorvedor dinâmico m_2 (kg)	0,091
Aceleração 1 com absorvedor medido na barra canal 1 (m/s^2)	1,847
Aceleração 2 barra com absorvedor medido na barra canal 1 (m/s^2)	2,245
Aceleração 1 com absorvedor medido no absorvedor dinâmico canal 2 (m/s^2)	11,520
Aceleração 2 com absorvedor medido no absorvedor dinâmico canal 2 (m/s^2)	8,779
Relação entre a aceleração 1 do sistema com absorvedor canal 1 medido na barra e a aceleração do sistema sem absorvedor canal 1 (%)	97,660

Relação entre a aceleração 2 do sistema com absorvedor canal 1 medido na barra e a aceleração do sistema sem absorvedor canal 1 (%)	97,160
Relação entre a aceleração 1 do sistema com absorvedor medido no absorvedor dinâmico canal 2 e a aceleração do sistema sem absorvedor canal 2 (%)	85,430
Relação entre a aceleração 2 do sistema com absorvedor medido no absorvedor dinâmico canal 2 e a aceleração do sistema sem absorvedor canal 2 (%)	88,790

(Fonte: O autor).

4.3 SISTEMA EXPERIMENTAL

Nesta seção será analisada a resposta do sistema barra mola experimental em regime de vibração forçada.

4.3.1 Sistema Barra Mola 1 Grau de Liberdade Vibração Forçada Experimental

Ao simular experimentalmente o sistema barra mola apresentado na figura 15 do capítulo anterior, submetendo o mesmo a um carregamento harmônico com frequência de excitação próxima a sua frequência natural, aplicado através de um motor desbalanceado, representado na figura 13, ligado a um inversor de fase, representado na figura 14, obteve-se a resposta do sistema em regime de vibração forçada com auxílio de dois acelerômetros posicionados de acordo com a figura 15, e de um analisador de sinal representado na figura 12, onde obteve-se a resposta no domínio do tempo em função da aceleração da estrutura, de acordo com a figura 44. Aplicando uma transformada rápida de Fourier, obteve-se a resposta do sistema no domínio da frequência em função da aceleração da estrutura de acordo com a figura 45. A frequência natural, frequência de excitação e aceleração da estrutura estão representadas na tabela 26.

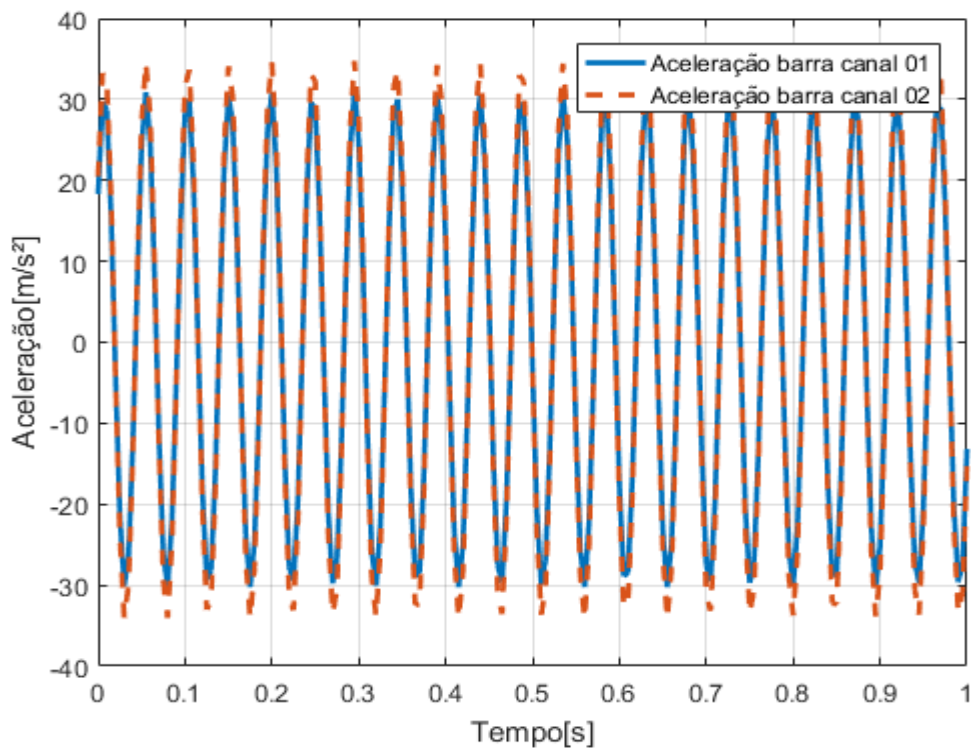


Figura 44 Resposta experimental sistema barra mola sob vibração forçada no domínio do tempo. (Fonte: O autor).

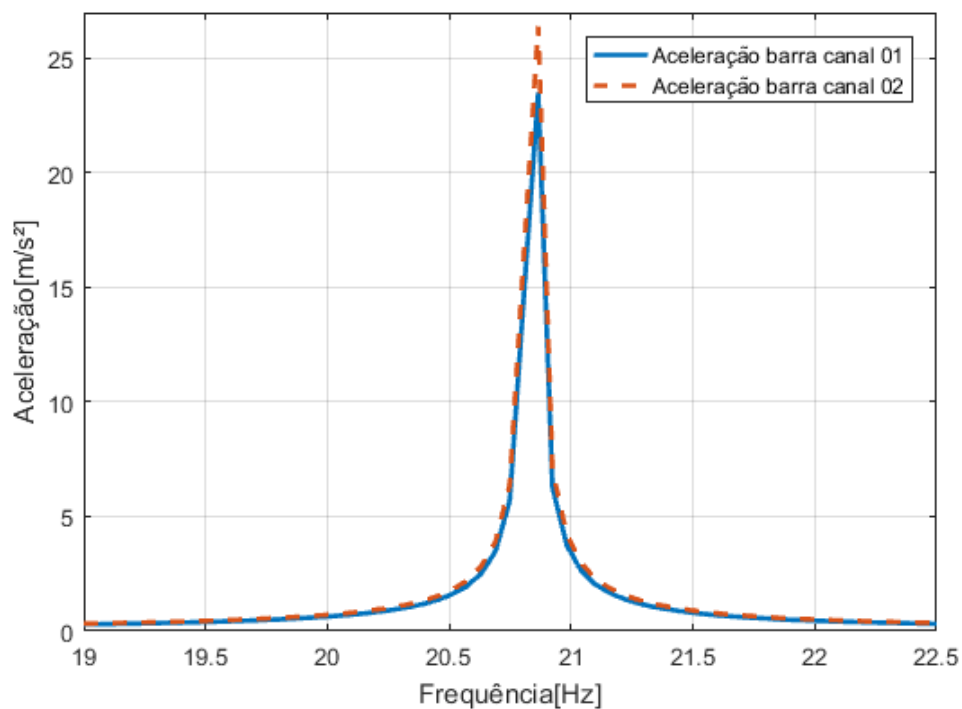


Figura 45 Resposta sistema barra mola sob vibração forçada no domínio da frequência. (Fonte: O autor).

Tabela 26 Resposta experimental do sistema barra mola.

Simulação Experimental				
Frequência Natural canal 1 (Hz)	Frequência Natural canal 2 (Hz)	Frequência de excitação (Hz)	Aceleração canal 1 (m/s ²)	Aceleração canal 2 (m/s ²)
20,36	20,36	20,70	23,50	26,39

(Fonte: O autor).

4.3.2 Sistema Barra Mola Com Absorvedor Dinâmico Sob Vibração Forçada Experimental

A partir dos resultados encontrados analisando a estrutura sem absorvedor dinâmico submetida a uma vibração forçada, simulou-se a resposta da barra com a implantação de um absorvedor dinâmico de vibrações, variando a massa do absorvedor dinâmico de acordo com a tabela 27, buscando a configuração com melhor desempenho. A configuração mais eficiente para o sistema foi alcançada com a aplicação de uma massa de 0,065 kg no absorvedor. A resposta da barra no domínio do tempo com absorvedor dinâmico e sem absorvedor dinâmico pode ser avaliada na figura 46. Já na figura 47 pode-se observar a resposta da barra em um intervalo de tempo maior, onde a resposta do absorvedor também no domínio do tempo pode ser contemplada na figura 48.

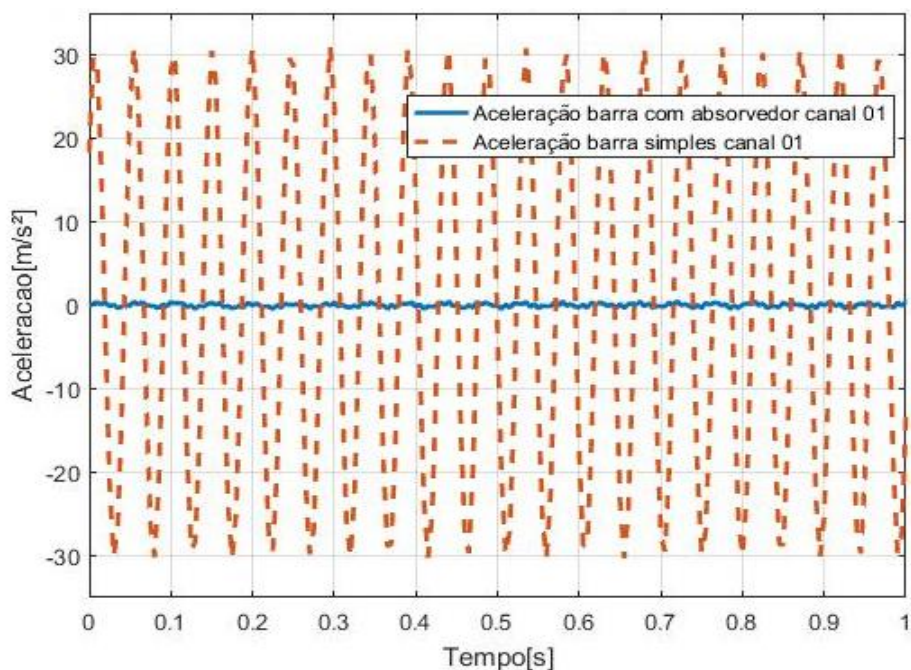


Figura 46 Resposta sistema barra mola sob vibração forçada no domínio do tempo controlado e não controlado. (Fonte: O autor).

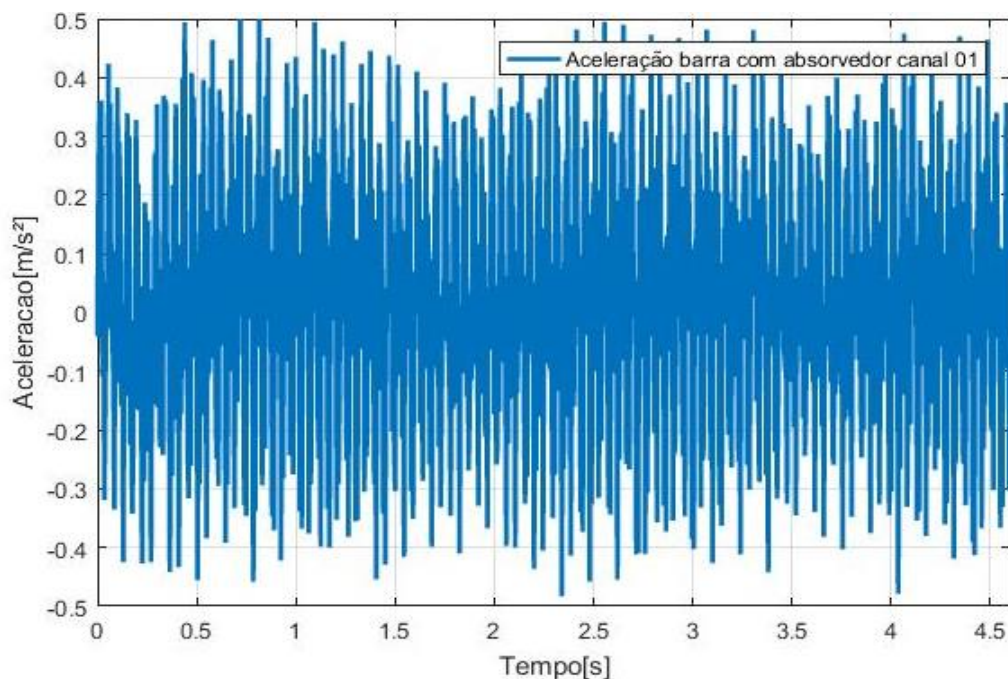


Figura 47 Resposta sistema barra mola sob vibração forçada no domínio do tempo controlado. (Fonte: O autor).

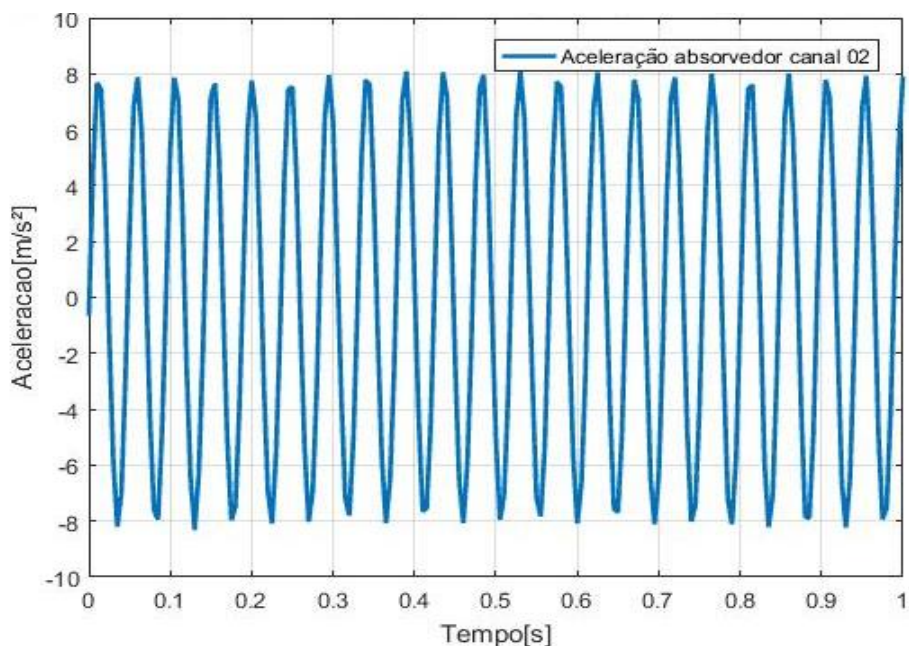


Figura 48 Resposta do absorvedor dinâmico sob vibração forçada no domínio do tempo. (Fonte: O autor).

A resposta da barra com e sem absorvedor dinâmico no domínio da frequência foram obtidas através da aplicação de uma transformada rápida de Fourier e está representada na figura 49, Na figura 50 está representada apenas a resposta da barra com o absorvedor dinâmico no domínio da frequência em uma escala maior. Já a resposta do absorvedor pode ser contemplada na figura 51.

Analisando a figura 47, pode-se observar a presença de batimento na resposta controlada no domínio do tempo, indicando a proximidade das frequências naturais dos dois modos de vibração e a frequência de excitação, além da proximidade entre os dois modos como pode-se observar na tabela 28, assim como nos resultados numéricos.

Tabela 27 Relação de massas entre a estrutura principal e o absorvedor dinâmico.

Massa da barra (kg)	Massa do absorvedor (kg)	Massa do Absorvedor em relação a massa da barra (%)
m_1 2,16	m_2 0,030	1,388
	m_2 0,043	1,990
	m_2 0,065	3,009
	m_2 0,076	3,518
	m_2 0,079	3,657
	m_2 0,086	3,981
	m_2 0,091	4,213
	m_2 0,094	4,351
	m_2 0,097	4,490
	m_2 0,108	5,000
	m_2 0,119	5,509
	m_2 0,130	6,018
	m_2 0,151	6,990
	m_2 0,173	8,009
	m_2 0,194	8,981
	m_2 0,216	10,000
	m_2 0,238	11,018
	m_2 0,258	11,944
	m_2 0,280	12,963
	m_2 0,303	14,027
m_2 0,323	14,953	

(Fonte: O autor).

Analisando as figuras 49 e 50 juntamente com a tabela 28, pode-se observar a presença de apenas um modo de vibração na resposta controlada, ao contrário dos resultados numéricos, esse fato se deve ao amortecimento característico da estrutura o qual não foi considerado nas simulações numéricas.

Outro fato a ser analisado é a maior eficiência do sistema experimental com uma massa de 0,065 kg, enquanto o sistema numérico apresentou sua maior eficiência com uma massa de 0,091 kg, como pode-se analisar na tabela 29. Esse aumento na eficiência se justifica devido a parcela efetiva da massa do elemento mola juntamente com o amortecimento característico da estrutura. Analisando a resposta do sistema experimental no domínio do tempo representada na figura 46 e no domínio da frequência na figura 49 juntamente com a tabela 29, pode-se verificar uma redução na aceleração da barra controlada de 99,19% em relação a barra não controlada. Pode-se observar também que a aceleração do absorvedor apresenta um valor 68,33% menor em relação a barra não controlada.

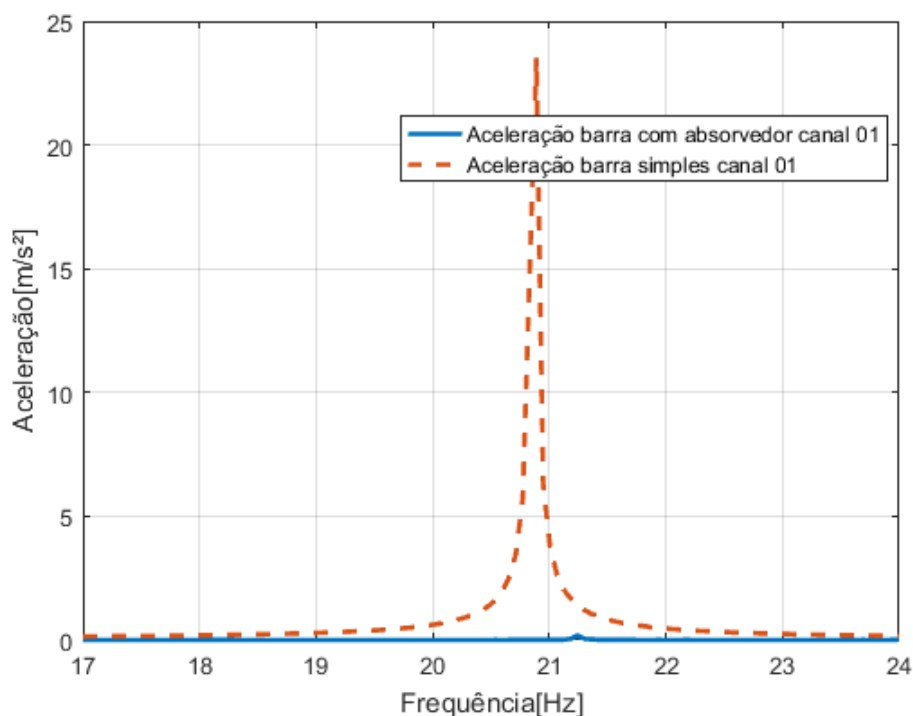


Figura 49 Resposta sistema barra mola sob vibração forçada no domínio da frequência controlado e não controlado. (Fonte: O autor).

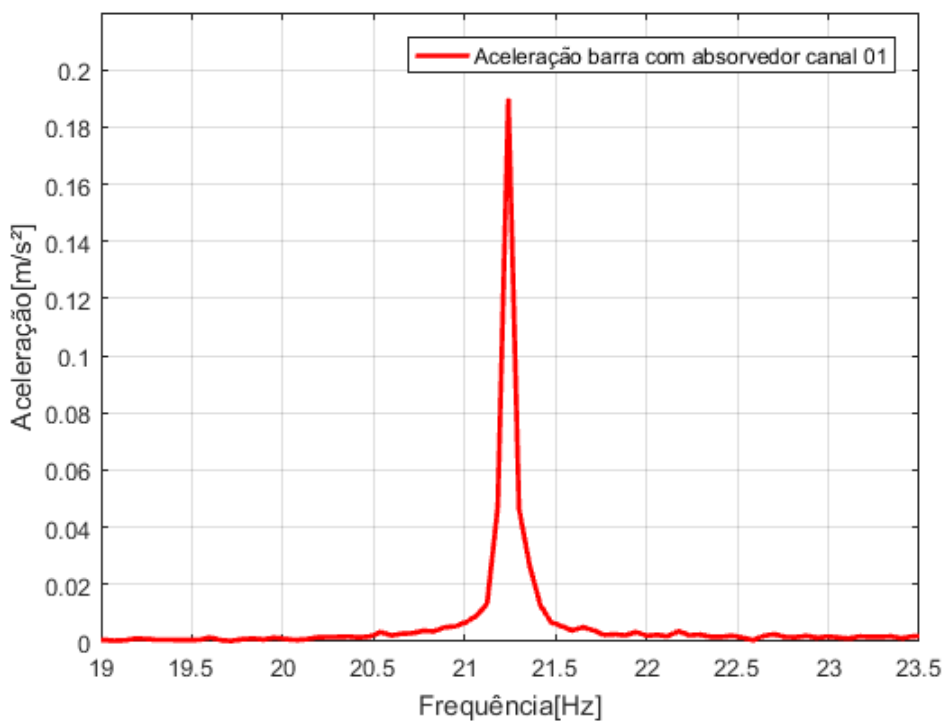


Figura 50 Resposta sistema barra mola sob vibração forçada no domínio da frequência controlado. (Fonte: O autor).

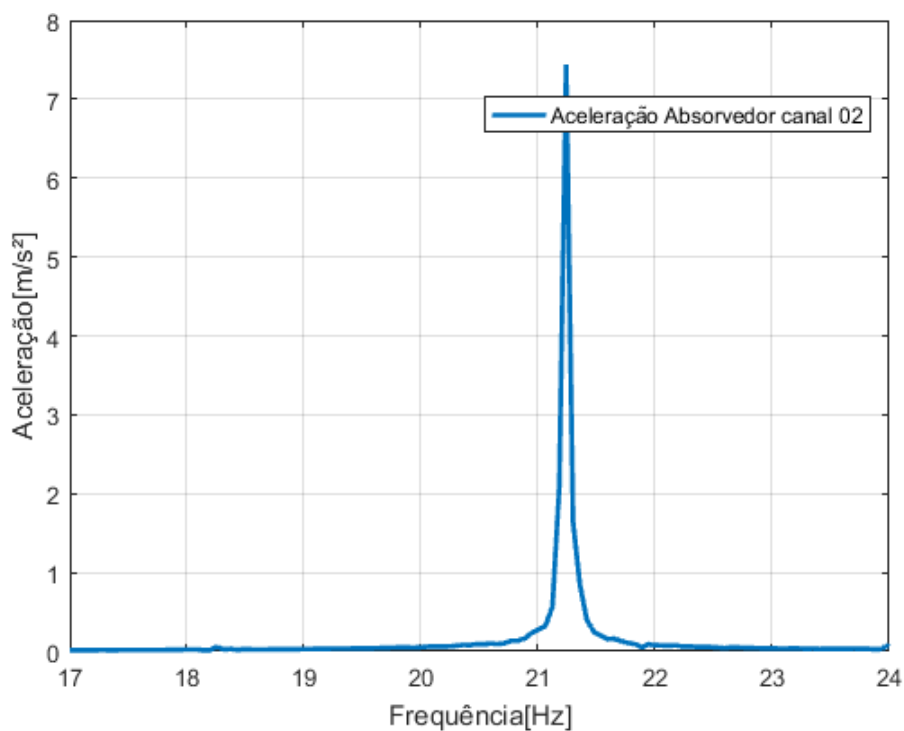


Figura 51 Resposta do absorvedor dinâmico sob vibração forçada no domínio da frequência. (Fonte: O autor).

Tabela 28 Frequências naturais do sistema barra mola controlado e não controlado sob vibração forçada.

	Sistema Experimental	Sistema Numérico
Massa m_1 (kg)	2,16	2,16
Frequência natural sem absorvedor(Hz)	20,86	20,36
Relação entre a massa do absorvedor e a massa principal (%)	3,01	4,21
Frequência natural 1 do sistema com absorvedor (Hz)	21,24	-
Frequência natural 2 do sistema com absorvedor (Hz)	18,33	22,91

(Fonte: O autor).

Tabela 29 Resposta do sistema barra mola controlado e não controlado, sob vibração forçada.

	Sistema Experimental	Sistema Numérico
Massa m_1 (kg)	2,16	2,16
Aceleração 1 sem absorvedor canal 1 (m/s ²)	23,50	79,05
Massa do absorvedor m_2 (kg)	0,065	0,091
Aceleração 1 com absorvedor medido na barra canal 1 (m/s ²)	0,19	1,847
Aceleração 2 barra com absorvedor medido na barra canal 1 (m/s ²)	-	2,245
Aceleração 1 com absorvedor medido no absorvedor dinâmico canal 2 (m/s ²)	7,442	11,52
Aceleração 2 com absorvedor medido no absorvedor dinâmico canal 2 (m/s ²)	-	8,779

Relação entre a aceleração 1 do sistema com absorvedor canal 1 medido na barra e a aceleração do sistema sem absorvedor canal 1 (%)	99,19	97,66
Relação entre a aceleração 2 do sistema com absorvedor canal 1 medido na barra e a aceleração do sistema sem absorvedor canal 1 (%)	-	97,16
Relação entre a aceleração 1 do sistema com absorvedor medido no absorvedor dinâmico canal 2 e a aceleração do sistema sem absorvedor canal 2 (%)	68,33	85,43
Relação entre a aceleração 2 do sistema com absorvedor medido no absorvedor dinâmico canal 2 e a aceleração do sistema sem absorvedor canal 2 (%)	-	88,89

(Fonte: O autor).

5 CONCLUSÃO

No presente trabalho, foram analisados sistemas dinâmicos do tipo massa mola e barra mola, os quais submetidos a regimes de vibração livre e vibração forçada, com o intuito de atenuar as respostas estruturais em ambos os sistemas. Inicialmente foram determinadas as frequências naturais e equações de movimento dos mesmos, onde a partir das quais foram realizadas as simulações numéricas através da implementação no software Matlab, representando a resposta no domínio do tempo através do método de Runge Kutta de quarta ordem e a resposta no domínio da frequência através de uma transformada rápida de Fourier.

Inicialmente foram analisadas diversas configurações de absorvedores dinâmicos de vibração no controle de ambas as estruturas sobre vibração livre, onde foram constatadas reduções na resposta estrutural em ambas as configurações. Entretanto, os sistemas se mostraram mais eficientes quando a frequência natural do absorvedor não acoplado foi sintonizada com a frequência natural da estrutura não controlada, apresentando uma aceleração de $4,657 \text{ m/s}^2$ caracterizando uma redução na resposta estrutural de 71,22% em relação ao sistema massa mola não controlado, já o absorvedor dinâmico apresentou uma aceleração de $43,400 \text{ m/s}^2$ com sua massa representando apenas 5,5% da massa do sistema não controlado. Já para o sistema barra mola apresentou uma aceleração de $4,278 \text{ m/s}^2$ caracterizando uma redução na resposta estrutural de 70,29% em relação ao sistema barra mola não controlado, já o absorvedor dinâmico apresentou uma aceleração de $30,760 \text{ m/s}^2$ com sua massa representando apenas 4,2% da massa do sistema não controlado.

Nos sistemas submetidos a um regime de vibração forçada, com frequência de excitação próxima a frequência natural da estrutura não controlada, ambos os sistemas se mostraram mais eficientes, apresentando uma aceleração de $0,665 \text{ m/s}^2$ caracterizando uma redução na resposta estrutural de 97,81% em relação ao sistema massa mola não controlado, já o absorvedor dinâmico apresentou uma aceleração de $4,827 \text{ m/s}^2$ com sua massa representando apenas 5,5% da massa do sistema não controlado. Já para o sistema barra mola com absorvedor dinâmico a aceleração da barra foi de $1,847 \text{ m/s}^2$, caracterizando uma redução na resposta estrutural de 97,66% em relação ao sistema barra mola não controlado, já o

absorvedor dinâmico apresentou uma aceleração de $8,779 \text{ m/s}^2$ com sua massa representando apenas 4,2% da massa do sistema não controlado.

Como forma de comparar os resultados numéricos, fora desenvolvido e simulado experimentalmente um sistema do tipo barra mola com as mesmas características do sistema numérico, submetendo o mesmo a uma vibração forçada com frequência de excitação próxima a sua frequência natural. Como forma de controlar as respostas do sistema, foram analisadas as mesmas configurações do absorvedor dinâmico de vibrações do sistema numérico. Entretanto, o sistema apresentou uma melhor eficiência com uma massa de absorvedor dinâmico menor que o sistema numérico, apresentando uma redução de 99,19% em relação a estrutura não controlada. Esse comportamento é justificado devido a uma parcela da massa do elemento mola também atuar efetivamente no sistema, além do fator de amortecimento característico do sistema que não pode ser desprezado no sistema experimental.

A partir dos resultados obtidos neste trabalho, além das considerações obtidas na revisão bibliográfica, observou-se um elevado índice de efetividade do sistema de absorvedor dinâmico de vibrações no controle de respostas estruturais, tanto para situações submetidas a vibração livre, quanto para situações submetidas a vibração forçada sem acrescer uma massa substancial a estrutura. Outras vantagens do sistema analisado, consistem em sua independência energética, ou seja, não necessita ser alimentado através de uma fonte de energia externa garantindo seu funcionamento mesmo sobre condições de falta de energia elétrica e sua aplicabilidade nas mais diversas estruturas, tanto na fase de projeto, quanto em estruturas antigas as quais apresentem problemas de vibrações.

5.1 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

- Incluir amortecimento tanto no sistema barra mola quanto no sistema massa mola, na simulação numérica, avaliando a resposta no regime permanente e transiente;
- Evoluir a discretização do sistema com um número maior de graus de liberdade;
- Utilizar um sistema de absorvedor dinâmico adaptativo no lugar do sistema passivo;

6 REFERÊNCIAS

ÁVILA, S. M. **Controle Híbrido Para Atenuação De Vibrações Em Edifícios**. Tese de Doutorado – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2002.

BATTISTA, R. C. Múltiplos Atenuadores Dinâmicos Sincronizados para Controle das Oscilações Induzidas pelo Vento na Ponte Rio-Niterói. **II Seminário de Patologia das Edificações**. Porto Alegre, Brasil, 2004.

BRAUN MARTIN, 1982. **Differential Equations and Their Applications - An Introduction to Applied Mathematics**. Department of Mathematics Queens College City University of New York. New York.

CARPINETO, NICOLA; LACARBONARA, WALTER; VESTRONI, FABRIZIO. Mitigation of Pedestrian-induced Vibrations in Suspension Footbridges via Multiple Tuned Mass Dampers. **Journal of Vibration and Control**, 2010.

CHEN, YH; HUANG, YH. Timoshenko Beam with Tuned Mass Dampers and its Design Curves. **Journal of Sound and Vibration**, v.278, p.873-888, 2004.

DÍAZ, Y. A. M. **Um Estudo dos Absorvedores Dinâmicos de Vibrações Multimodais**. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Itajubá, Itajubá. (2014).

FARID, MAOR; GENDELMAN, OLEG V. Tuned Pendulum as Nonlinear Energy Sink for Broad Energy Range. **Journal of Vibration and Control** 16-1-2015.

GOMES, D. H. M. **Controle da Resposta Dinâmica de uma Passarela de Pedestres da Cidade de Brasília com a Utilização de Amortecedores de Massa Sintonizados**. Dissertação de Mestrado, Universidade de Brasília, Brasília, 2006.

GU, M.; CHEN, S. R.; CHANG, C. C. Parametric Study on Multiple Tuned Mass Dampers For Buffeting Control of Yangpu Bridge. **Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics**, V.89, 2001.

KIRROU, ILHAM; MOKNI, LAHCEN; BELHAQ, MOHAMED. **Quasiperiodic Galloping of a Wind-Excited Tower Near Secondary Resonances of Order 2**. **Journal of Vibration and Control**, 13-1-2015.

LIN, JUI-LIANG. Top-Story Mass Dampers For Seismic Control of The First Triplet of Vibration Modes of Two-Way Asymmetric-Plan Buildings. **Journal of Vibration and Control**, 15-1-2016.

MARQUES, R.F.A. **Estudo Teórico Numérico de Absorvedores de Vibrações Ativos e Adaptativos**. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia MG, 2000.

MATLAB v8.2, **The Language of Technical Computing**. Mathworks Inc, 2014.

MRABET, ELYES; GUEDRI, MOHAMED; ICHCHOU, MOHAMED NAJIB; GHANMI, SAMIR; SOULA, MOHAMED. A New Reliability Based Optimization of Tuned Mass Damper Parameters Using Energy Approach. **Journal of Vibration and Control** 18-1-2016.

NYAWAKO, DONALD S.; PAUL REYNOLDS. Comparative Studies of Global And Targeted Control of Walkway Bridge Resonant Frequencies. **Journal of Vibration and Control** 17-1-2016.

OSPINA, C. S. **Otimização de Amortecedores de Massa Sincronizados, Múltiplos e Interligados, para Controle de Vibrações em Edifícios Altos**. Dissertação de Mestrado, Universidade de Brasília, Brasília, 2008.

PINKAEW, T.; FUJINO, Y. Effectiveness of Semi-active Tuned Mass Dampers under Harmonic Excitation. **Engineering Structures**, 2001.

RANA, R.; SOONG, T.T. Parametric Study and Simplified Design of Tuned Mass Dampers. **Engineering Structures**, 1998.

RAO, S. S. **Vibrações Mecânicas**. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2008. 420 p. Vol. 4. Revisor Técnico José Juliano de Lima Junior.

SOONG T.T.; SPENCER B.F. Supplemental Energy Dissipation: State-Of-The-Art and State-Of-The-Practice. **Engineering Structures**, 24 (3) (2002) 243-259.

STANDERSKI, RITA. **Ação Estática do Vento em Tabuleiros de Pontes: Caracterização Aerodinâmica em Túnel de vento**. 135f. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre, 2012.

UBERTINI, FILIPPO; COMANDUCCI, GABRIELE; LAFLAMME, SIMON. A Parametric Study on Reliability-Based Tuned-Mass Damper Design Against Bridge Flutter. **Journal of Vibration and Control** 17-1-2015.

XIANG PING; AKIRA NISHITANI. Structural Vibration Control With The Implementation of a Pendulum-Type Nontraditional Tuned Mass Damper System. **Journal of Vibration and Control**, 19-1-2016.

YAMAGUCHI, H; HARNPORNCHAI, N. Fundamental Characteristics of Multiple Tuned Mass Dampers for Suppressing Harmonically Forced Oscillations. **Earthquake Engineering and Structural Dynamics**, 1993.

YANG F.; SEDAGHATI R.; ESMAILZADEH E. Vibration Suppression of Non-Uniform Curved Beams under Random Loading using Optimal Tuned Mass Damper. **Journal of Vibration and Control**, v.15, p. 233-261, 2009.

YANG, YU; DENG, LU; WANG, WEI; CAI, CS. Local Impact Analysis for Deck Slabs of Prestressed Concrete Box-Girder Bridges Subject to Vehicle Loading. **Journal of Vibration and Control**, 15-1- 2015.