

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ**

**LUCAS PIUCO DE CAMPOS**

**UM OLHAR PARA O TRIÂNGULO DE SIERPINSKI À LUZ DA  
MODELAGEM MATEMÁTICA**

**TOLEDO**

**2025**

**LUCAS PIUCO DE CAMPOS**

**UM OLHAR PARA O TRIÂNGULO DE SIERPINSKI À LUZ DA  
MODELAGEM MATEMÁTICA**

**A LOOK AT THE SIERPINSKI TRIANGLE IN THE LIGHT OF  
MATHEMATICAL MODELLING**

Trabalho de conclusão de curso de graduação apresentado como requisito para obtenção do título de Licenciado em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).

Orientador(a): Prof. Dr. Emerson Tortola

**TOLEDO**

**2025**



[4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)

Esta licença permite remixe, adaptação e criação a partir do trabalho, para fins não comerciais, desde que sejam atribuídos créditos ao(s) autor(es) e que licenciem as novas criações sob termos idênticos. Conteúdos elaborados por terceiros, citados e referenciados nesta obra não são cobertos pela licença.

**LUCAS PIUCO DE CAMPOS**

**UM OLHAR PARA O TRIÂNGULO DE SIERPINSKI À LUZ DA  
MODELAGEM MATEMÁTICA**

Trabalho de conclusão de curso de graduação apresentado como requisito para obtenção do título de Licenciado em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).

Data de aprovação: 21 de fevereiro de 2025

**Emerson Tortola**

Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná  
(Orientador)

**Heloisa Cristina da Silva**

Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

**Loreci Zanardini**

Doutorado em Engenharia de Energia na Agricultura  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

**TOLEDO**

**2025**

## **AGRADECIMENTOS**

Gostaria de expressar minha mais profunda gratidão a todos que, de diferentes maneiras, contribuíram para a realização deste trabalho. Primeiramente, agradeço à minha família, que foi meu alicerce em todos os momentos, oferecendo amor, apoio e compreensão durante esta jornada acadêmica. Sem o incentivo constante e a paciência deles, este projeto não seria possível.

Agradeço também ao meu professor orientador, o Prof. Dr. Emerson Tortola, por sua dedicação, orientação e sabedoria ao longo deste processo. Sua experiência e conselhos foram fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho e para o meu crescimento acadêmico.

Por fim, deixo meu sincero agradecimento aos meus amigos, que estiveram ao meu lado em todos os momentos, compartilhando desafios, alegrias e aprendizados. Vocês foram uma fonte constante de motivação e apoio, e sou muito grato por poder contar com vocês durante essa caminhada.

*“A matemática está em todas as expressões humanas.  
Compreendê-la em sua diversidade é uma maneira de  
entender a própria humanidade”.*

(Ubiratan D’Ambrosio, 2001)

CAMPOS, Lucas Piuco de. **Um olhar para o Triângulo de Sierpinski à luz da modelagem matemática**. 2025. 79 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Toledo, 2025.

## RESUMO

Este Trabalho de Conclusão de curso (TCC) tem como objetivo investigar como a modelagem matemática pode auxiliar no ensino do fractal Triângulo de Sierpinski. A exploração desse fractal possibilita, por exemplo, a abordagem de perímetro e área. Nosso intuito foi desenvolver algumas investigações associadas a ele, amparados em procedimentos característicos de atividades de modelagem. Para participar da pesquisa, foram convidados alunos de duas turmas de 9º ano do Ensino Fundamental, de uma escola pública, situada no município de Toledo, Oeste do Paraná, nas quais o pesquisador atuava como professor regente da disciplina de Matemática. Os participantes da pesquisa foram organizados em grupo para o desenvolvimento das investigações, que foram propostas pelo professor. Trata-se de uma pesquisa qualitativa, voltada para questões educacionais concernentes ao ensino da geometria não-euclidiana e o uso de procedimentos relativos à modelagem matemática. Os dados foram produzidos por meio de gravações em áudio e vídeo e de registros escritos referentes às resoluções. Os instrumentos incluem smartphone, para captura de voz, vídeo e imagens, computador, lápis, caneta e papel. Uma análise de caráter qualitativo foi empreendida a fim de identificar nas ações e resoluções dos alunos aspectos que caracterizam a modelagem matemática, os quais forneceram elementos para concluir que a modelagem oferece uma abordagem estruturada do fractal, capaz de subsidiar a compreensão e a análise de características através da construção e interpretação de modelos matemáticos.

**Palavras-chave:** Educação Matemática; Modelagem Matemática; Geometria Fractal; Ensino Fundamental.

CAMPOS, Lucas Piuco de. **A look at Sierpinski fractals in the light of mathematical modelling.** 2025. 79 p. Course Completion Work (Degree in Mathematics) - Federal University of Technology - Paraná, Toledo, 2025.

## ABSTRACT

This Course Completion Work aims to investigate how mathematical modelling can aid in teaching the Sierpinski Triangle fractal. Exploring this fractal allows, for example, the approach of perimeter and area. Our intent was to develop some investigations associated with it, supported by procedures characteristic of modelling activities. To participate in the research, students from two 9th grade classes of Elementary School were invited, from a public school located in the municipality of Toledo, Western Paraná, in which the researcher worked as a teacher of the Mathematics discipline. The research participants were organized in groups for the development of the investigations, which were proposed by the teacher. This is a qualitative research, focused on educational issues concerning the teaching of non-Euclidean geometry and the use of procedures related to mathematical modelling. The data were produced by means of audio and video recordings and written records referring to the resolutions. The instruments include smartphone, for voice capture, video and images, computer, pencil, pen and paper. An analysis of a qualitative nature was undertaken in order to identify in the actions and resolutions of the students aspects that characterize mathematical modelling, which provided elements to conclude that modelling offers a structured approach of the fractal, capable of supporting the understanding and analysis of characteristics through the construction and interpretation of mathematical models.

**Keywords:** Mathematics Education; Mathematical Modelling; Fractal Geometry; Elementary Education.

## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura 1</b> - Fases da modelagem matemática.....	18
<b>Figura 2</b> - Exemplos de fractais na natureza.....	22
<b>Figura 3</b> - Quatro primeiras iterações do Triângulo de Sierpinski.....	27
<b>Figura 4</b> - Quatro primeiras iterações do Tapete de Sierpinski.....	31
<b>Figura 5</b> - Quatro primeiras iterações da Pirâmide de Sierpinski.....	36
<b>Figura 6</b> - Estudo da área do triângulo de Sierpinski feito por um aluno.....	47
<b>Figura 7</b> - Quadro com as explicações a respeito da área não-colorida.....	49
<b>Figura 8</b> - Estudo do Perímetro do triângulo de Sierpinski feito por um aluno.....	50
<b>Figura 9</b> - Algumas respostas acerca da questão 1 do questionário 1.....	52
<b>Figura 10</b> - Algumas resposta acerca da questão 2 do questionário 1.....	52
<b>Figura 11</b> - Algumas resposta acerca da questão 3 do questionário 1.....	53
<b>Figura 12</b> - Algumas resposta acerca da questão 4 do questionário 1.....	53
<b>Figura 13</b> - Algumas resposta acerca da questão 5 do questionário 1.....	54
<b>Figura 14</b> - Algumas resposta acerca da questão 6 do questionário 1.....	55
<b>Figura 15</b> - Algumas resposta acerca da questão 7 do questionário 1.....	56
<b>Figura 16</b> - Algumas resposta acerca da questão 8 do questionário 1.....	57

## LISTA DE TABELAS

<b>Tabela 1</b> - Área do Triângulo de Sierpinski após $n$ iterações.....	28
<b>Tabela 2</b> - Perímetro do Triângulo de Sierpinski após $n$ iterações.....	30
<b>Tabela 3</b> - Área do Tapete de Sierpinski após $n$ iterações.....	32
<b>Tabela 4</b> - Perímetro do Tapete de Sierpinski após $n$ iterações.....	35
<b>Tabela 5</b> - Área e volume da pirâmide de Sierpinski após $n$ iterações.....	38

## SUMÁRIO

<b>INTRODUÇÃO.....</b>	<b>11</b>
<b>CAPÍTULO 1: MODELAGEM NA PERSPECTIVA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA.....</b>	<b>15</b>
1.1 O QUE É E POR QUE MODELAGEM MATEMÁTICA?.....	15
1.2 A MODELAGEM NA SALA DE AULA E O SEU ESPAÇO NO CURRÍCULO.....	16
<b>CAPÍTULO 2: GEOMETRIA FRACTAL.....</b>	<b>21</b>
2.1 FRACTAL: ORIGENS E NOÇÕES INICIAIS.....	21
2.2 CARACTERIZAÇÃO DE UM FRACTAL.....	23
2.2.1 Autossimilaridade.....	24
2.2.2 Complexidade Infinita.....	24
2.2.3 Dimensão fractal.....	25
2.3 ALGUNS EXEMPLOS DE FRACTAIS.....	26
2.3.1 Triângulo de Sierpinski.....	26
2.3.2 Tapete de Sierpinski.....	30
2.3.3 Pirâmide de Sierpinski.....	36
<b>CAPÍTULO 3: ASPECTOS METODOLÓGICOS E CONTEXTO DA PESQUISA.....</b>	<b>40</b>
<b>CAPÍTULO 4: ANÁLISE E DISCUSSÃO.....</b>	<b>44</b>
4.1 ANÁLISE DA ATIVIDADE SOBRE O TRIÂNGULO DE SIERPINSKI.....	44
<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>58</b>
<b>APÊNDICES.....</b>	<b>64</b>
APÊNDICE A - Tabela não preenchida com o estudo da área do Triângulo de Sierpinski.....	65
APÊNDICE B - Tabela preenchida com o estudo da área do Triângulo de Sierpinski.....	66
APÊNDICE C - Tabela não preenchida com o estudo do perímetro do Triângulo de Sierpinski.....	67
APÊNDICE D - Tabela preenchida com o estudo do perímetro do Triângulo de Sierpinski.....	68

APÊNDICE E - Tabela não preenchida com o estudo da Pirâmide de Sierpinski.....	69
APÊNDICE F - Tabela preenchida com o estudo da Pirâmide de Sierpinski.....	70
APÊNDICE G - Tabela preenchida com o estudo do Tapete de Sierpinski.....	71
APÊNDICE H - Tabela preenchida com o estudo do Tapete de Sierpinski.....	72
APÊNDICE I - Questionário sobre o Triângulo de sierpinski.....	73
APÊNDICE J - Questionário sobre o Triângulo de Sierpinski preenchido.....	74
APÊNDICE K - Questionário sobre o Tapete de Sierpinski.....	76
APÊNDICE L - Questionário sobre o Tapete de Sierpinski preenchido.....	77
APÊNDICE M - Questionário sobre a Pirâmide de Sierpinski.....	78
APÊNDICE N - Questionário sobre a Pirâmide de Sierpinski preenchido.....	79

## INTRODUÇÃO

A relevância dos conceitos e definições da geometria euclidiana é reconhecida de longa data. Seu ensino, entretanto, passou por modismos fortemente radicalizantes, os quais consistem desde o formalismo impregnado de demonstrações apoiadas no raciocínio lógico-dedutivo e algebrização até o empirismo inoperante (Lorenzato, 1995).

Além disso, nas últimas décadas, testemunhamos o florescimento de novas abordagens da geometria, capazes de capturar as complexidades e “irregularidades” das formas que observamos na natureza. Nesse contexto, a geometria fractal, cunhada por Benoît Mandelbrot na década de 1970, revolucionou a forma como entendemos conceitos como área, perímetro e dimensão, ao destacar a autossimilaridade presente nessas formas, como montanhas e costas marítimas. Figuras antes incompreendidas ou não contempladas pela geometria euclidiana, devido às suas “irregularidades”, agora são entendidas como oportunidades para o ensino.

A geometria fractal é entendida como uma geometria não-euclidiana ao desafiar a ideia de continuidade decorrente da natureza das construções geométricas descritas por Euclides. Essa ideia advém do pressuposto de que objetos podem ser desenhados de maneira contínua, sem interrupções ou descontinuidade, como sugerem os postulados de Euclides. A geometria fractal introduz objetos que, embora possam ser definidos em espaços euclidianos, apresentam estruturas que se repetem em escalas cada vez menores, criando uma complexidade infinita.

Do ponto de vista educacional, entendemos a relevância do estudo dessa geometria não-euclidiana, ampliando o modo de ver como a Matemática pode ser aplicada para descrever ou explicar aspectos do mundo. Abordá-la na sala de aula contempla além de questões teórico-epistemológicas, questões estéticas, importantes para tornar a aprendizagem da Matemática atraente, incentivando a promoção do pensamento criativo. Além disso, coloca a certeza matemática sob lentes críticas, compreendendo que ela só existe em contextos bem específicos e determinados pelas definições.

Trata-se, portanto, de uma forma de estabelecer relações e fornecer descrições ou previsões a respeito de figuras antes associadas ao caos, mas ordenadas segundo “leis da natureza” (Barbosa, 1999). A geometria fractal é uma oportunidade para descrever matematicamente tais figuras. Diante de tais características, acreditamos que a modelagem matemática, na perspectiva da Educação Matemática, seja uma abordagem pertinente para tratá-la em sala de aula.

A modelagem matemática, descrita por Almeida, Silva e Vertuan (2012), em uma interpretação sobre a expressão em si mesma, associa-se à ideia de moldar algo, associado à realidade, por meio de um modelo matemático, uma estrutura produzida a partir de relações matemáticas estabelecidas a partir da análise de características do fenômeno sob investigação.

Nesse contexto, é vista como ferramenta de problematização e interpretação da realidade, desempenhando um papel fundamental nas mais diversas áreas do conhecimento humano, desde a física até a economia, passando pela biologia e a engenharia (Bassanezi, 2002). Ao oferecer uma abordagem sistemática para compreender e solucionar problemas complexos, a modelagem emerge como uma aliada poderosa na busca por respostas e *insights* significativos, mas, sobretudo, no contexto educacional, como uma alternativa pedagógica para se ensinar e aprender Matemática.

Ao discutir o espaço para atividades de modelagem matemática no currículo, Almeida e Vertuan (2011), com base em Blum e Niss (1991), apresentam algumas possibilidades, dentre as quais eles citam a alternativa da combinação, a qual presume que, no decorrer das aulas de Matemática, uma introdução de conceitos ocorre por meio da invocação frequente de aspectos de aplicação e modelagem matemática. Essa abordagem permite que os estudantes desenvolvam uma compreensão dos conteúdos ao relacioná-los com situações concretas e contextualizadas. Além disso, essa dinâmica pode ocorrer de forma inversa, utilizando novos conceitos, métodos e resultados matemáticos para a realização de atividades aplicadas. Dessa maneira, a modelagem matemática não apenas auxilia na assimilação dos conteúdos, mas também fomenta o desenvolvimento de competências analíticas e críticas, essenciais para a formação acadêmica e profissional dos alunos.

Diante dessa perspectiva, nosso objetivo é investigar *como a modelagem matemática pode auxiliar no ensino do fractal Triângulo de Sierpinski*, fazendo algumas investigações a respeito de perímetro e área. Essa escolha se justifica por diversos fatores, principalmente por ser um fractal de simples construção e com regularidades visualmente intuitivas, sendo de fácil abordagem em contextos educacionais.

A construção iterativa do Triângulo de Sierpinski, baseada em passos simples e repetitivos, facilita a compreensão de propriedades fundamentais dos fractais, como a autossimilaridade e a recursividade. Além disso, a sua vasta presença na literatura científica atesta a sua potencialidade na exploração de conceitos matemáticos, promovendo conexões interdisciplinares com áreas como álgebra, combinatória e ciência da computação. Adicionalmente, sua inclusão em materiais didáticos e documentos curriculares corrobora a sua relevância pedagógica. No caso específico do Paraná, os documentos curriculares do

Ensino Fundamental (2018) explicitam a necessidade de “identificar formas fractais e as características de autossimilaridade e complexidade infinita” (Paraná, 2018), reforçando a importância do estudo de fractais.

Trata-se de uma pesquisa qualitativa, cujo problema para investigação, segundo Ludke e André (2014), é definido no contexto da sala de aula, no qual o pesquisador está envolvido. É, desse modo, resultado de interesses dos pesquisadores, porém, combinados a experiências em sala de aula associadas ao assunto. Além disso, a autonomia atribuída aos alunos no desenvolvimento das atividades pode levar a uma imprevisibilidade nos procedimentos de resolução, os quais investigamos com esta pesquisa.

Participaram 66 alunos do 9º ano do Ensino Fundamental do Colégio Estadual Senador Atílio Fontana, localizado no município de Toledo, os quais foram convidados e aceitaram participar, assim como seus responsáveis legais, conforme assinaturas do Termo de Assentimento Livre e Esclarecido (TALE), bem como do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) e do Termo de Consentimento para Utilização de Imagem, Som e Voz (TCUISV), definidos a partir da aprovação do projeto de pesquisa no Comitê de Ética em Pesquisa envolvendo Seres Humanos (CEP) da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Campus Medianeira, parecer subcircunstanciado nº 7.086.899.

Esses estudantes foram organizados em grupos para o desenvolvimento das investigações propostas, buscando promover momentos de colaboração, a partir das discussões e reflexões propostas. A escolha desses participantes fundamenta-se na experiência do pesquisador como professor regente da disciplina de Matemática dessas turmas, possibilitando um acompanhamento mais aprofundado das interações dos alunos com a temática abordada.

Além disso, a coleta de dados foi realizada durante a execução da atividade em sala de aula, empregando diversos instrumentos para garantir um registro abrangente do processo investigativo. Entre os recursos utilizados, destacam-se as gravações em áudio e vídeo, os registros escritos pelos alunos e as anotações do pesquisador, que possibilitaram um acompanhamento detalhado das interações e reflexões dos participantes.

A análise desses dados seguiu uma abordagem qualitativa, com o objetivo de identificar e compreender aspectos que evidenciam a utilização da modelagem matemática no ensino dos conceitos de perímetro e área, associados ao Triângulo de Sierpinski.

Por fim, além desta introdução, este trabalho está estruturado em quatro capítulos que contemplam a fundamentação teórica sobre modelagem matemática e a geometria fractal,

uma descrição da metodologia utilizada, a análise dos dados e, por fim, as considerações finais, nas quais são discutidos os principais resultados da pesquisa.

## CAPÍTULO 1

### MODELAGEM NA PERSPECTIVA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Este capítulo versa sobre o que é modelagem matemática na perspectiva da Educação Matemática e os motivos de utilizá-la em sala de aula para abordar a Matemática. Debruça-se também sobre como trabalhá-la em sala de aula e o seu espaço no currículo atual.

#### 1.1 O QUE É E POR QUE MODELAGEM MATEMÁTICA?

Quando começam a dar aula, algumas dúvidas a respeito das práticas associadas ao ensino e à aprendizagem da Matemática são comuns entre os recém formados, em parte devido à recorrência de situações que requerem a aplicação de conceitos matemáticos: qual Matemática os estudantes precisam aprender? Como vou ensinar Matemática? Qual o propósito da Matemática que ensinamos?”. Contudo, a Matemática que ensinamos está distante do que os estudantes vivenciam no seu cotidiano (Almeida; Silva, 2015).

De acordo com Schmidt, Ribas e Carvalho (1998), o processo educativo não pode se limitar exclusivamente à disseminação de um conteúdo sistemático, pré-elaborado e finalizado, mas deve promover o desenvolvimento de competências e estratégias às quais o estudante possa recorrer, quando necessário, diante das situações que enfrentará dentro ou fora do ambiente educacional. Adicionalmente, o ensino da Matemática deve encorajar o aluno a ponderar sobre os temas circundantes, contribuindo para a sua formação como indivíduo crítico e participativo na comunidade em que está inserido, além de capacitá-lo a tomar decisões embasadas em dados (Maas et al., 2022).

Trata-se, portanto, de adotar uma abordagem crítica no ensino de Matemática, no sentido de inserir os estudantes em discussões que vão além dos aspectos técnicos da disciplina, promovendo reflexões sobre questões sociais, ambientais e tecnológicas. Além disso, segundo D’Amore (2007, p. 287), as práticas realizadas durante as aulas de Matemática devem focar “em uma circunstância desafiadora e não em um dilema específico: o estudante se depara com uma questão no contexto de uma tarefa mais abrangente”.

Diante dessas argumentações, a favor da introdução de tarefas mais desafiadoras e da promoção de reflexões que vão além da Matemática curricular, entendemos a modelagem no

âmbito da Educação Matemática como uma alternativa pedagógica apropriada a esses objetivos, que propõe a abordagem da Matemática a partir da exploração de situações-problema não necessariamente relacionadas à Matemática.

Para Almeida, Silva e Vertuan (2012, p. 9), a modelagem pode ser compreendida como “uma alternativa pedagógica na qual fazemos uma abordagem, por meio da Matemática, de uma situação-problema não essencialmente matemática”. Sob essa perspectiva, contribui para o desenvolvimento de investigações em sala de aula, que começam com um problema proveniente de um domínio extramatemático, envolvendo uma busca intencional e hipóteses como guias, além da aplicação de diversas estratégias matemáticas para a construção de modelos matemáticos e a obtenção de uma solução viável.

Nesse ponto vista, as relações entre a vida real – origem do problema – e o conhecimento matemático – campo cujos conceitos estão instalados – servem como base para o desenvolvimento de habilidades importantes, que incluem a resolução de problemas, o pensamento crítico na avaliação de soluções, a criatividade na formulação de estratégias, a fluência no uso da linguagem matemática, a argumentação e a comunicação matemática e a análise e interpretação de situações reais por meio de modelos matemáticos (Blomhøj; Højgaard, 2003; Maaß, 2006; Blomhøj, 2011). Dessa forma, a modelagem não apenas contribui para a compreensão de conceitos matemáticos, mas também amplia a capacidade dos estudantes de aplicar esse conhecimento em diferentes contextos, principalmente aqueles que costumam ser deixados de lado em aulas de Matemática estritamente teóricas.

## 1.2 A MODELAGEM NA SALA DE AULA E O SEU ESPAÇO NO CURRÍCULO

A conceituação e a descrição da modelagem matemática, de acordo com Almeida e Vertuan (2011), têm se dado na literatura de maneiras variadas, se refletindo em diferentes concepções e pressupostos voltados às visões pedagógicas que orientam as práticas de ensino e as bases teóricas das pesquisas acadêmicas. Essa diversidade se reflete na estruturação de ciclos e esquemas que descrevem o fazer modelagem, que podem enfatizar etapas como a problematização, a matematização e a obtenção e interpretação dos resultados. De modo geral, essas concepções defendem uma abordagem investigativa mais flexível, não linear, na qual os estudantes assumem maior autonomia e evidenciam as potencialidades da modelagem, permitindo a sua adaptação a diferentes contextos educacionais.

Na concepção de Almeida, Silva e Vertuan (2012, p. 12), por exemplo, a modelagem matemática é entendida como uma atividade, a qual

[...] pode ser descrita em termos de uma situação inicial (problemática), de uma situação final desejada (que representa uma solução para a situação inicial) e de um conjunto de procedimentos e conceitos necessários para passar da situação inicial para a situação final. [...] O termo “problema” é entendido aqui como uma situação na qual o indivíduo não possui esquemas a priori para sua solução. Assim, para a resolução de situações problema, de modo geral, não há procedimentos previamente conhecidos ou soluções já indicadas.

Para os autores, uma atividade de modelagem pode ser organizada em fases:

**Inteiração:** Cujo conceito sugere a ideia de adquirir conhecimento sobre algo; na modelagem matemática, essa fase representa o primeiro contato com a situação-problema que se deseja investigar, visando compreender suas características essenciais. Nesse momento, o pesquisador coleta dados tanto quantitativos quanto qualitativos, auxiliando na formulação do problema e na definição de seus objetivos. Assim, a escolha do tema e a pesquisa por informações são elementos cruciais nessa fase.

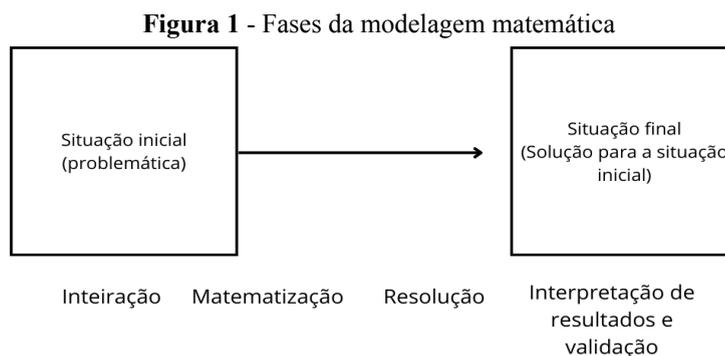
**Matematização:** O problema definido na fase inicial, de modo geral, é descrito em linguagem comum e não está diretamente ligado à linguagem matemática, o que requer a conversão de uma representação (linguagem comum) para outra (linguagem matemática). Essa transição para a linguagem matemática esclarece o problema a ser resolvido. A busca e o desenvolvimento dessa representação matemática são orientados pelas relações entre as características do problema e os conceitos, técnicas e métodos matemáticos adequados para expressá-los de forma matemática. Por conseguinte, a segunda fase da modelagem é conhecida como “matematização”, que abrange esses processos de transição entre linguagens, visualização e uso de símbolos matemáticos para descrever características da situação-problema. Essas descrições derivam da formulação de hipóteses e pressupostos, seleção de variáveis e simplificação das informações em relação ao problema originalmente definido na fase de inteiração.

**Resolução:** Durante essa fase, é desenvolvido um modelo matemático para representar a situação, permitindo a exploração dos elementos pertinentes e a abordagem das questões relacionadas ao problema em estudo. É a fase em que os procedimentos e conceitos matemáticos são empreendidos para se apresentar uma solução ao problema.

**Interpretação de resultados e validação:** A compreensão dos resultados indicados pelo modelo requer a análise de uma solução para o problema. Assim, a análise da solução é um processo de avaliação feito pelos participantes envolvidos na tarefa e envolve a confirmação do modelo matemático ligado ao problema, levando em conta tanto os métodos matemáticos

quanto a adequação da representação e da solução à situação. Nessa fase, não se busca apenas desenvolver a capacidade de criar e aplicar modelos, mas também promover nos alunos a habilidade de avaliar e comunicar esse processo de modelagem e os diferentes contextos nos quais podem ser utilizados.

A figura 1 apresenta um esquema que ilustra a atividade de modelagem matemática descrita por Almeida, Silva e Vertuan (2012).



**Fonte:** Almeida, Silva e Vertuan (2012)

Vale ressaltar que embora os ciclos e esquemas apresentados na literatura apresentem elementos considerados característicos de uma atividade de modelagem pelos seus autores, eles não são capazes de retratar a dinamicidade com a qual os procedimentos são empreendidos pelos alunos. É importante ratificar a não linearidade das fases e procedimentos apresentados e discutidos. Isso causa certa estranheza nos professores, ao gerar certa imprevisibilidade quanto aos encaminhamentos da atividade.

Dessa forma, preocupados com a implementação de atividades de modelagem em sala de aula, diversos autores têm debatido alternativas para viabilizá-la. Almeida e Vertuan (2011, p. 24-25), com base em Blum e Niss (1991), sugerem algumas possibilidades:

- a) A alternativa da separação: em vez de incluir as atividades de modelagem nas aulas regulares de matemática, tais atividades são desenvolvidas em cursos extracurriculares, especialmente realizados para este fim; nesta abordagem, as aulas regulares permanecem inalteradas pela introdução da Modelagem Matemática ao currículo do curso ou da disciplina;
- b) a alternativa da combinação: esta alternativa presume que no decurso das aulas de Matemática sejam frequentemente invocados aspectos de aplicação e Modelagem Matemática como forma de auxiliar a introdução de conceitos matemáticos. O mesmo pode ser feito no sentido inverso, quando novos conceitos, métodos e resultados matemáticos podem ser ativados para a realização de atividades de aplicação e modelagem, sempre que possível;
- c) a alternativa da integração curricular: segundo esta alternativa, os problemas seriam o ponto de partida e a matemática necessária para resolvê-los seria introduzida a partir da necessidade. Para os autores, nesse caso, a restrição é que os problemas abordados deveriam conduzir a conceitos matemáticos “relevantes” e “tratáveis” no currículo escolar daquela série ou daquela disciplina;

d) a alternativa interdisciplinar integrada: para caracterizar este encaminhamento, os autores defendem que haveria uma completa integração entre as atividades extramatemáticas e matemáticas em uma estrutura curricular interdisciplinar em que a “matemática” não seria organizada como disciplina isolada, mas os conteúdos das diferentes disciplinas curriculares, previamente identificados, seriam desenvolvidos nas aulas de forma integrada.

Não há maneira única ou ideal, a incorporação de atividades de modelagem matemática nas aulas vai depender das condições e objetivos pedagógicos que o professor tem, quais experiências deseja proporcionar a seus alunos, se está interessado em apresentar aplicações da Matemática, com o uso de métodos e conceitos bem definidos, se quer propor situações desafiadoras, nas quais os alunos são convidados a buscar meios de interpretá-las e resolvê-las, ou se quer propor a investigação de situações cuja problematização e investigação partem do interesse dos alunos. Isso implica em considerar práticas que podem se estender por semanas, situações que podem ser exploradas em algumas aulas ou desafios que podem ser resolvidos em apenas uma aula.

Barbosa (2004), por exemplo, discute três casos, que na verdade se configuram mais como três regiões de possibilidades, para o desenvolvimento de atividades em sala de aula. Esses casos consistem na atribuição de diferentes “responsabilidades” ao professor e alunos, conforme ilustra o Quadro 1.

**Quadro 1** - Responsabilidades do professor/aluno em uma atividade de modelagem

	Caso 1	Caso 2	Caso 3
Elaboração da situação problema	Professor	Professor	Professor/aluno
Simplificação	Professor	Professor/aluno	Professor/aluno
Dados qualitativos e quantitativos	Professor	Professor/aluno	Professor/aluno
Resolução	Professor/aluno	Professor/aluno	Professor/aluno

**Fonte:** Barbosa (2004)

A caracterização desses três “casos”, estabelecidos pelo autor, reside no quão o professor se sente à vontade a compartilhar com seus alunos a responsabilidade do desenvolvimento da atividade, levando em consideração as condições pedagógicas que tem disponível, como tempo, currículo, características da turma etc. Não tem, portanto, ligação direta com a introdução da modelagem aos alunos; mesmo a sua primeira incursão na modelagem poderia ocorrer de acordo com o Caso 3, por exemplo.

Outrossim, a transição de um cenário cujas aulas centram-se na prática de resolução de exercícios a respeito de conteúdos recém explicados para o desenvolvimento de atividades

investigativas, como são as atividades de modelagem, pode se configurar um desafio tanto para os professores quanto para os alunos. Diante disso, Almeida e Dias (2004) sugerem que a incorporação de atividades de modelagem em sala de aula seja feita a partir de momentos gradativos, conduzindo os alunos, e também professores, a se familiarizar com os procedimentos relativos ao desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática.

Dessa forma, num primeiro momento, o professor pode apresentar aos alunos uma situação desafiadora, fornecendo as informações necessárias, guia, acompanha e avalia a exploração do desafio, o raciocínio, a interpretação e a aplicação de um modelo matemático, auxiliando nas ações como definir variáveis e formular hipóteses, simplificar, traduzir para a linguagem matemática, construir e validar o modelo matemático, bem como aplicá-lo para analisar a situação e obter uma solução.

Em seguida, num momento posterior, o professor pode propor outra situação desafiadora aos alunos, para a qual eles precisam ampliar a coleta de informações para explorar o cenário, apresentar as variáveis e hipóteses simplificadoras e validar o modelo matemático para a análise da situação. A mudança fundamental do primeiro momento para o segundo é a autonomia dos alunos na escolha dos métodos matemáticos, ou não, adequados para conduzir a investigação.

Por fim, num terceiro momento fornece aos estudantes autonomia para identificar um desafio específico, reunir e analisar os dados disponíveis, realizando as transições de linguagem necessárias, identificar conceitos matemáticos relevantes para desenvolver e validar um modelo adequado à análise da situação específica e comunicar suas descobertas à comunidade escolar.

Essa estratégia de familiarização com os procedimentos da modelagem a partir de diferentes momentos tem como objetivo desenvolver nos alunos a “competência de modelagem”. Por isso, nos momentos iniciais a orientação e o auxílio do professor são realizados no sentido de oferecer aos alunos confiança, autonomia e habilidade para identificar um problema e buscar uma solução através da Matemática.

## **CAPÍTULO 2**

### **GEOMETRIA FRACTAL**

Este capítulo trata da geometria fractal, abordando aspectos relativos à sua origem e principais características. Discute a relevância dos fractais no contexto do ensino da Matemática, destacando atributos fundamentais como autossimilaridade, complexidade infinita e dimensão fractal. Além disso, são apresentados alguns fractais conhecidos como exemplo, inclusive o Triângulo de Sierpinski, destacando as suas propriedades matemáticas e as possibilidades de exploração no ensino de Matemática.

#### **2.1 FRACTAL: ORIGENS E NOÇÕES INICIAIS**

Originada na segunda metade do século XX, tendo Benoit Mandelbrot como seu precursor, a Geometria Fractal começou a ser entendida como um ramo da Matemática. Mandelbrot (1983, p. 1) descreve como desenvolveu essa nova geometria a partir de suas pesquisas, as quais se dedicaram a uma perspectiva do que seria o irregular fragmentado à nossa volta. Com a intenção de dar um nome a essas formas incomuns, e até estranhas à Matemática, porém naturais, Mandelbrot (1983) explica que encontrou em um dicionário de Latim a palavra *fractus*, do verbo quebrar ou partir, daí o nome Geometria Fractal. Desse modo, foram nomeadas fractais todas as estruturas que possuem conjuntos de curvas e figuras desconexas, as quais não são foco de estudo da Geometria Euclidiana.

Dessa forma, os fractais manifestam-se de forma exuberante tanto na natureza quanto no domínio da Matemática. No mundo natural, observamos a beleza fractal nos intrincados flocos de neve, nas ramificações das árvores, nos padrões de drenagem dos rios, nas formas das nuvens, na topografia das montanhas etc. A Figura 2 ilustra com alguns exemplos.

**Figura 2** - Exemplos de fractais na natureza



Fonte: Fractal Science (2025)

Mandelbrot se deparou com seus primeiros problemas referentes à Geometria Fractal através de um estudo sobre Economia. Em Barbosa (2005, p. 11), encontramos noções dos problemas enfrentados por Mandelbrot no IBL Norte-Americano<sup>1</sup>.

Na IBM [Mandelbrot] deparou-se com questões de ruídos nas linhas telefônicas utilizadas em rede entre os computadores. Mandelbrot soube dos engenheiros que algum ruído não podia ser eliminado e interferia nos sinais; a aleatoriedade e a irregularidade dos ruídos afastaram os engenheiros da busca de soluções. Resolveu o problema (...) pensando nos erros de transmissão como um conjunto de Cantor<sup>2</sup>.

Com o surgimento da Geometria Fractal, a preocupação de Mandelbrot passou a ser de caracterizar objetos, os quais não se encaixavam na natureza da Geometria Euclidiana, tais como figuras com curvas, como é o caso de montanhas, encostas, nuvens, troncos de árvores, ondas do mar e diversas outras formas e figuras encontradas na natureza.

Para ilustrar essa preocupação, Mandelbrot utilizou como exemplo um cenário hipotético onde um indivíduo (homem) se encontra caminhando num litoral, sempre o mais perto possível da água. Assim, cada passo vai deixando uma pegada. Quando reencontrar seu ponto de origem, a linha que une suas pegadas formará o comprimento da costa. Se pegarmos o mesmo cenário e substituirmos cada vez por animais menores, será levado cada vez mais

<sup>1</sup> IBL Norte-Americano refere-se à *IBM Research* (International Business Machines Corporation), onde Benoit Mandelbrot trabalhou como pesquisador.

<sup>2</sup> O Conjunto de Cantor, introduzido por Georg Cantor, é formado removendo-se repetidamente o terço central de um segmento de reta. Começa-se com um segmento, remove-se o terço central, restando dois segmentos; em seguida, remove-se o terço central de cada um desses segmentos restantes, e assim sucessivamente. Caracteriza-se por ser infinito, ter medida nula e ser um exemplo clássico de conjunto fractal devido à sua autossimilaridade em todas as escalas.

em consideração acidentes antes ignorados, tais como linhas mais irregulares e mais longas que do primeiro indivíduo com maiores passos.

De acordo com Mandelbrot, a costa de um país como a Grã-Bretanha não tem seu valor real de comprimento. Ao pensar na medida do homem, ela é antropocêntrica, entre tantas outras. Contudo, o comprimento da sua costa vai depender de seu agrimensor ou no caso do exemplo hipotético, do tamanho do passo do animal. Dessa forma, ele explica que uma costa é sempre íngreme e sinuosa e, por consequência, podemos considerar a sua grandeza infinita. Assim, observa que as formas irregulares do litoral têm uma característica em comum: a sua complicação não altera a mudança de escala. Nesse sentido, percebeu que independentemente da escala utilizada, a forma percebida se mantém a mesma.

## 2.2 CARACTERIZAÇÃO DE UM FRACTAL

Embora muitas descrições sobre o que é um fractal possam ser encontradas na literatura, a sua conceituação é uma questão que ainda permanece em aberto. Mandelbrot (1989, p. 14), após observar e vivenciar numerosas tentativas infrutíferas de estabelecer uma definição, apresenta uma reflexão:

Será necessário definir uma figura fractal de modo rigoroso, para em seguida dizer que um objecto real é fractal por se assemelhar à figura geométrica que constitui o modelo? Considerando que um tal formalismo seria prematuro [...], um método baseado numa característica aberta e intuitiva, onde os avanços se efetuam por retoques sucessivos.

O que temos, portanto, são caracterizações com indicações de aspectos relevantes a serem considerados ao tratar um fractal. Falconer (1985), por exemplo, sem se apegar a um formalismo, alega que um fractal é algo cuja parte qualquer de si se assemelha ao todo em algum aspecto. Nesse sentido, indica que um fractal apresenta:

- autossimilaridade ou autossemelhança, sendo exata ou aproximada;
- complexidade infinita ou iteração, ou seja uma determinada operação se repete um número infinito de vezes;
- dimensão fractal, uma nova dimensão associada à densidade, aspereza, espessura, textura etc.

A fim de tornar mais claros esses atributos, discorreremos a seguir sobre cada um deles.

### **2.2.1 Autossimilaridade**

A autossimilaridade ou autossemelhança, de acordo com Carvalho (2005), é uma das principais características de um fractal, a qual implica que toda parte observada em escala menor é igual exata ou estatisticamente falando à parte inicial, de origem. Assim, padrões e características são encontrados em escalas menores de um todo, pois cada parte ampliada da imagem será igual ou semelhante à inicial.

Ao analisar o atributo de autossemelhança, Capra (1996) explica que ela pode ser exata, gerada por um processo matemático cujo conjunto final é idêntico ao inicial, não importando as condições implicadas, ou aproximada ou estatística, encontrada em objetos da natureza, nos quais suas estruturas, ampliadas várias vezes, não serão iguais à inicial, como cópias idênticas, mas muito semelhantes.

Nesse sentido, Nascimento, Silva e Maciel (2012) exemplificam os fractais com características de autossemelhança aproximada ou estatística com elementos encontrados na natureza, tais como nuvens, montanhas, couve-flor, gengibre, ondas e muitos outros que apresentam suas partes, menores em escala, muito parecidas com a original. Em contrapartida, exemplifica os fractais com características de autossemelhança exata com os chamados fractais geométricos, como: Conjunto de Cantor, Triângulo Sierpinski, Curva de Koch e muitos outros.

### **2.2.2 Complexidade Infinita**

A complexidade infinita ou iteração, segundo Capra (1996, p.119), “é caracterizada em um fractal com a existência de um processo que dispõe de um número infinito de procedimentos, que se repetem iterativamente, os quais resultam em uma estrutura complexa”. Ela implica que qualquer que seja o número de ampliações de um objeto fractal, nunca obteremos a “imagem final”, uma vez que ela poderá continuar a ser infinitamente ampliada.

Desse modo, a repetição constante de certas operações geométricas constroem um fractal. Com o avanço de novas tecnologias e a criação de computadores, as iterações podem ser aplicadas milhares de vezes para, assim, produzir fractais modernos, gerados por sistemas

computacionais de plantas, árvores, linhas litorâneas, montanhas e tudo aquilo que representa uma forma real encontrada na natureza.

### 2.2.3 Dimensão fractal

A dimensão de um determinado objeto está relacionada ao espaço que ele ocupa. Durante várias gerações após Euclides, comprimento, largura e altura determinaram o conceito de dimensão, cujo valor é dado por um número inteiro positivo (Nunes, 2006). Nesse contexto, da Geometria Euclidiana, sabemos que um ponto não possui dimensão, uma reta possui dimensão um, uma figura plana dimensão dois, e o espaço ou figuras espaciais, como os sólidos geométricos, dimensão três.

A dimensão fractal, por sua vez, é expressa por um número fracionário, de 0 a 3, que reflete a ocupação da estrutura do fractal dentro do espaço que a abrange. Está relacionada com a irregularidade, rugosidade ou comportamento exercido (Tratch, 2008). Nesse sentido, quanto mais dobras, fissuras ou dentados forem os contornos dos objetos maior será a sua dimensão. Janos (2008, p. 74) traz um exemplo para ilustrar o que significa tal dimensão:

Pegue uma folha de papel 5x10cm e amasse-a até formar uma bola de papel. Esta bola de papel tem dimensão entre 2 e 3. A tentativa de construir objetos de 3 dimensões a partir de objetos de 2 dimensões produz estruturas fractais quebradiças com espaços vazios irregulares como a bola de papel.

Para Capra (1996), a ideia de dimensão fractal era abstrata inicialmente, no entanto, se tornou um ótimo artifício para análises mais complexas, com a finalidade de determinar parâmetros que tornassem possível a localização ou definição de determinado objeto.

Barbosa (2005), utilizando teoremas e definições oriundos da topologia, espaços métricos e teoria da medida, apresentou uma equação para calcular a dimensão fractal, originalmente desenvolvida por Felix Hausdorff<sup>3</sup>. Ele a obteve a partir da comparação entre objetos de 1, 2 e 3 dimensões, os repartindo em elementos autossimilares.

$$D = \frac{\log M}{\log N}$$

Nessa fórmula, “M” corresponde ao número de elementos semelhantes e “N” representa o fator de escala, isto é, a razão de semelhança.

---

<sup>3</sup> Felix Hausdorff (1868-1942) foi um matemático alemão reconhecido por suas contribuições à teoria dos conjuntos e à topologia, sendo responsável pela formulação do conceito de dimensão de Hausdorff, amplamente utilizado na análise de fractais.

A título de exemplo, podemos mencionar a dimensão fractal da bacia fluvial do rio Amazonas, que é de 1.85, dos relâmpagos no espaço tridimensional, 1.51 e dos angiogramas dos rins, 1.61.

## 2.3 ALGUNS EXEMPLOS DE FRACTAIS

No estudo da geometria fractal, algumas formas se destacam devido às suas propriedades matemáticas e à sua relevância para aplicações teóricas e didáticas. Além do Triângulo de Sierpinski, há na literatura vários exemplos de fractais, inclusive alguns que levam também o nome Sierpinski<sup>4</sup>, como o Tapete de Sierpinski e a Pirâmide de Sierpinski. Cada um desses fractais é construído por meio de regras específicas de reprodução geométrica, resultando em configurações que permitem uma investigação de conceitos como perímetro, área e volume. Nos itens a seguir, serão apresentadas as características e os procedimentos de construção desses três fractais.

### 2.3.1 Triângulo de Sierpinski

O Triângulo de Sierpinski é um fractal composto inteiramente por triângulos equiláteros resultantes de um processo de decomposição e exclusão. Para a sua construção, considera-se um triângulo equilátero inicial e ligando-se o ponto médio de cada um de seus lados, formam-se quatro triângulos congruentes. Após a remoção da porção central, restam três triângulos, com lados que medem metade do comprimento do triângulo inicial. Ao repetir essas etapas iterativamente a cada um dos triângulos resultantes, obtém-se o Triângulo de Sierpinski.

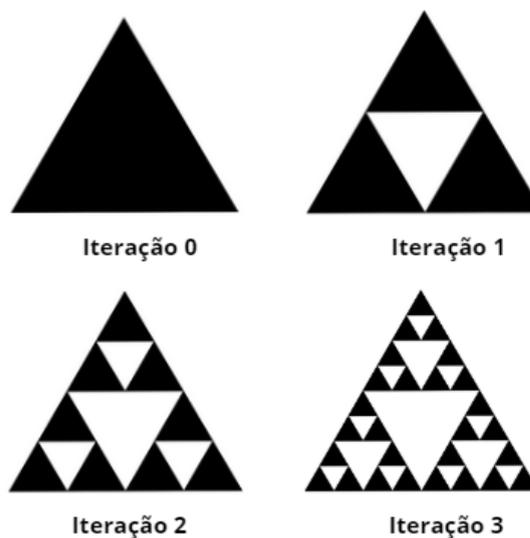
A cada iteração ou nível são gerados três vezes mais triângulos, com lados medindo metade do lado do triângulo que lhe deu origem. Cada parte é uma cópia em menor escala do

---

<sup>4</sup> Waclaw Sierpiński (1882-1969) foi um renomado matemático polonês, conhecido por suas contribuições à teoria dos conjuntos, topologia e teoria dos números. Seu trabalho mais popular é o Triângulo de Sierpiński, um fractal que exemplifica a autossimilaridade. Sierpiński publicou mais de 700 trabalhos matemáticos e desempenhou um papel fundamental no desenvolvimento da matemática moderna, contribuindo significativamente para o estudo de conjuntos e números primos.

triângulo ou estrutura inicial e são verdadeiros exemplos do atributo “autossimilaridade”. A Figura 3 apresenta as quatro primeiras iterações referentes ao Triângulo de Sierpinski.

**Figura 3** - Quatro primeiras iterações do Triângulo de Sierpinski



Fonte: Adaptado de Assis et al. (2008)

Uma propriedade interessante do Triângulo de Sierpinski é que a sua área diminui à medida que o número de iterações aumenta, aproximando-se gradualmente de zero quando as iterações tendem ao infinito. Vejamos:

1. Área inicial:

- Considere um triângulo equilátero com lados medindo  $s$ .
- A área  $A_0$  do triângulo equilátero é dada por:  $A_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}s^2$ .

2. Primeira iteração:

- Unindo-se os pontos médios dos lados do triângulo inicial, ele é decomposto em 4 triângulos, cada um com lados medindo  $\frac{s}{2}$ , e o triângulo central é removido.
- A área de cada novo triângulo é:  $\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{s}{2}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{s^2}{4} = \frac{\sqrt{3}}{16}s^2$ .
- Após a remoção do triângulo central, a área  $A_1$  do fractal é:

$$A_1 = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{16}s^2 = \frac{3\sqrt{3}}{16}s^2.$$

3. n-ésima iteração:

- A cada iteração  $n$  o processo descrito é repetido, ou seja, cada triângulo é decomposto em 4 triângulos com lados medindo  $\frac{s}{2^n}$ , e os triângulos centrais são removidos.

- A área de cada novo triângulo é:  $\frac{\sqrt{3}}{4} \left( \frac{s}{2^n} \right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{s^2}{2^{2n}} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{s^2}{4^n} = \frac{\sqrt{3}}{4^{n+1}} s^2$ .
- Considerando os  $3^n$  novos triângulos, a área  $A_n$  do fractal é:

$$A_n = 3^n \cdot \frac{\sqrt{3}}{4^{n+1}} s^2.$$

Que também pode ser escrita em função da área inicial  $A_0$ :

$$A_n = \left( \frac{3}{4} \right)^n \cdot A_0 = \left( \frac{3}{4} \right)^n \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} s^2.$$

- Quando  $n \rightarrow \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3}{4} \right)^n \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} s^2 = 0.$$

A Tabela 1 apresenta um detalhamento da área do fractal Triângulo de Sierpinski nas quatro primeiras iterações. Para cada iteração, apresenta a quantidade de triângulos, independentemente de suas dimensões, a área de cada triângulo, a área do fractal na determinada iteração e um exemplo, considerando unitária a área do triângulo inicial.

**Tabela 1** - Área do Triângulo de Sierpinski após n iterações

Iteração	Quantidade de triângulos	Área de cada triângulo	Área do fractal	Exemplo de $A_n$ ( $A_0 = 1$ )
0	1	$\frac{\sqrt{3}}{4^1} s^2$	$\frac{\sqrt{3}}{4^1} s^2$	1
1	3	$\frac{\sqrt{3}}{4^2} s^2$	$3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4^2} s^2$	$\frac{3}{4}$
2	9	$\frac{\sqrt{3}}{4^3} s^2$	$9 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4^3} s^2$	$\frac{9}{16}$
3	27	$\frac{\sqrt{3}}{4^4} s^2$	$27 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4^4} s^2$	$\frac{27}{64}$
...	...	...	...	...
$n$	$3^n$	$\frac{\sqrt{3}}{4^{n+1}} s^2$	$3^n \cdot \frac{\sqrt{3}}{4^{n+1}} s^2$	$\left( \frac{3}{4} \right)^n$

Fonte: Autor (2024)

Como se pode observar, a área do Triângulo de Sierpinski reduz a uma razão  $\frac{3}{4}$  a cada iteração, formando uma progressão geométrica infinita (finita se considerarmos até a iteração  $n$ ), cujos termos cada vez mais se aproximam de zero.

Outra propriedade interessante do Triângulo de Sierpinski refere-se a seu perímetro, que, diferentemente da área, aumenta à medida que o número de iterações aumenta, tendendo ao infinito quando as iterações tendem ao infinito. Vejamos:

## 1. Perímetro inicial:

- Considere um triângulo equilátero com lados medindo  $s$ .
- O perímetro  $P_0$  do triângulo equilátero inicial é dado por:  $P_0 = 3s$ .

## 2. Primeira iteração:

- Unindo-se os pontos médios dos lados do triângulo inicial, ele é decomposto em 4 triângulos, cada um com lados medindo  $\frac{s}{2}$ .
- O perímetro de cada novo triângulo é  $3\frac{s}{2}$ .
- Desconsiderando as medidas dos três segmentos de reta coincidentes, referentes aos lados do triângulo central que foi removido, ou seja, o perímetro de um dos triângulos, o perímetro  $P_1$  é dado por:

$$P_1 = 3 \cdot 3\frac{s}{2} = 9\frac{s}{2}.$$

## 3. n-ésima iteração:

- A cada iteração  $n$  o processo descrito é repetido, ou seja, cada triângulo é decomposto em 4 triângulos com lados medindo  $\frac{s}{2^n}$ , e as medidas dos segmentos de reta coincidentes, referentes aos lados dos triângulos centrais removidos são desconsideradas.
- O perímetro de cada novo triângulo é  $3\frac{s}{2^n}$ .
- O perímetro  $P_n$  do fractal é:

$$P_n = 3^{n+1} \cdot \frac{s}{2^n} = \frac{3^{n+1}}{2^n} \cdot s = \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot 3s.$$

- Quando  $n \rightarrow \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot 3s = \infty.$$

A Tabela 2 apresenta um detalhamento do perímetro do fractal Triângulo de Sierpinski nas quatro primeiras iterações. Para cada iteração, apresenta a quantidade de triângulos, independentemente de suas dimensões, o perímetro de cada triângulo, o perímetro do fractal na determinada iteração e um exemplo, considerando unitário o perímetro do triângulo inicial.

**Tabela 2** - Perímetro do Triângulo de Sierpinski após  $n$  iterações

Iteração	Quantidade de triângulos	Perímetro de cada triângulo	Perímetro do fractal	Exemplo de $P_n$ ( $P_0 = 1$ )
0	1	$3s$	$3s$	1
1	3	$3\frac{s}{2}$	$9\frac{s}{2}$	$\frac{3}{2}$
2	9	$3\frac{s}{2^2}$	$27\frac{s}{2^2}$	$\frac{9}{4}$
3	27	$3\frac{s}{2^3}$	$81\frac{s}{2^3}$	$\frac{27}{8}$
...	...	...	...	...
$n$	$3^n$	$3\frac{s}{2^n}$	$3^{n+1}\frac{s}{2^n}$	$\left(\frac{3}{2}\right)^n$

Fonte: Autor (2024)

Como se pode observar, o perímetro do Triângulo de Sierpinski aumenta a uma razão  $\frac{3}{2}$  a cada iteração, formando uma progressão geométrica infinita (finita se considerarmos até a iteração  $n$ ), cujos termos cada vez mais tendem ao infinito.

Após analisarmos essas propriedades, fica evidente nesse fractal o segundo atributo, complexidade infinita, uma vez que existe um processo que se repete iterativamente, resultando em uma estrutura complexa.

Além disso, podemos determinar a dimensão fractal do Triângulo de Sierpinski, utilizando a equação apresentada por Barbosa (2005). Como a cada iteração são gerados 3 vezes mais triângulos ( $M = 3$ ) com lados medindo metade do lado do triângulo que lhe deu origem ( $N = 2$ ), a dimensão fractal do Triângulo de Sierpinski pode ser determinada por:

$$D = \frac{\log M}{\log N} = \frac{\log 3}{\log 2} \approx 1,585.$$

Esse valor nos sugere que o grau de ocupação do fractal Triângulo de Sierpinski no espaço está entre as dimensões 1 e 2, como se estivesse entre uma linha e um plano.

### 2.3.2 Tapete de Sierpinski

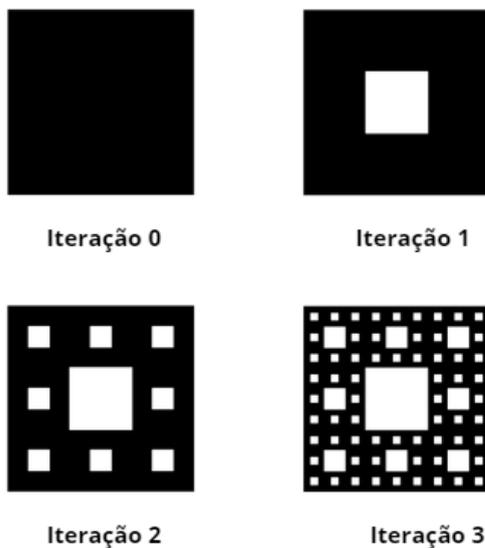
O Tapete de Sierpinski é um fractal gerado pela remoção gradual de quadrados centrais. A sua construção é descrita por Barbosa (2005, p. 44):

Pode-se aplicar a mesma técnica de eliminação (remoção) usada no Triângulo de Sierpinski, partindo de um quadrado, dividindo-o em 9 pequenos quadrados

congruentes, e eliminando o central. Em seguida, aplicar esse mesmo procedimento em cada um dos 8 quadrados restantes, e assim sucessivamente e iterativamente.

A Figura 4 apresenta as quatro primeiras iterações referentes ao Tapete de Sierpinski.

**Figura 4** - Quatro primeiras iterações do Tapete de Sierpinski



**Fonte:** Adaptado de Barbosa (2005)

Assim como no Triângulo de Sierpinski, a área do Tapete é uma propriedade que chama atenção, tendendo a zero à medida que aumentamos o número de iterações. Vejamos:

1. Área inicial:

- Considere um quadrado com lados medindo  $s$ .
- A área  $A_0$  do quadrado é dada por:  $A_0 = s^2$ .

2. Primeira iteração:

- Decompõe-se o quadrado em 9 quadrados congruentes, cada um com lado medindo  $\frac{s}{3}$ . Remove-se o quadrado central.
- A área de cada novo quadrado é dada por:  $\left(\frac{s}{3}\right)^2$ .
- Após a remoção do quadrado central, a área  $A_1$  do fractal é:

$$A_1 = 8 \cdot \left(\frac{s}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}s^2.$$

3.  $n$ -ésima iteração:

- A cada iteração  $n$  o processo descrito é repetido, ou seja, cada quadrado é decomposto em 9 quadrados com lados medindo  $\frac{s}{3^n}$ , e os quadrados centrais são removidos.

- A área de cada novo quadrado é:  $\left(\frac{s}{3^n}\right)^2$ .
- Considerando os  $8^n$  novos quadrados, a área  $A_n$  do fractal é:

$$A_n = 8^n \cdot \left(\frac{s}{3^n}\right)^2 = \left(\frac{8}{9}\right)^n s^2.$$

- Quando  $n \rightarrow \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{8}{9}\right)^n s^2 = 0.$$

A Tabela 3 apresenta um detalhamento da área do Tapete de Sierpinski nas quatro primeiras iterações. Para cada iteração, apresenta a quantidade de quadrados, independentemente de suas dimensões, a área de cada quadrado, a área do fractal na determinada iteração e um exemplo, considerando unitária a área do quadrado inicial.

**Tabela 3** - Área do Tapete de Sierpinski após n iterações

Iteração	Quantidade de quadrados	Área de cada quadrado	Área do fractal	Exemplo de $A_n$ ( $A_0 = 1$ )
0	1	$s^2$	$s^2$	1
1	8	$\left(\frac{s}{3}\right)^2$	$\frac{8}{9}s^2$	$\frac{8}{9}$
2	64	$\left(\frac{s}{3^2}\right)^2$	$\left(\frac{8}{9}\right)^2 s^2$	$\frac{64}{81}$
3	512	$\left(\frac{s}{3^3}\right)^2$	$\left(\frac{8}{9}\right)^3 s^2$	$\frac{512}{729}$
...	...	...	...	...
n	$8^n$	$\left(\frac{s}{3^n}\right)^2$	$\left(\frac{8}{9}\right)^n s^2$	$\left(\frac{8}{9}\right)^n$

Fonte: Autor (2024)

Como se pode observar, a área do Tapete de Sierpinski reduz a uma razão  $\frac{8}{9}$  a cada iteração, formando uma progressão geométrica infinita (finita se considerarmos até a iteração  $n$ ), cujos termos cada vez mais se aproximam de zero. Aliás, é possível determinar a área  $A_n$  desse fractal a partir das subtrações sucessivas das áreas dos quadrados removidos:

$$A_n = s^2 - \left(\frac{s}{3}\right)^2 - 8 \cdot \left(\frac{s}{3^2}\right)^2 - \dots - 8^{n-1} \cdot \left(\frac{s}{3^n}\right)^2, \text{ ou ainda,}$$

$$A_n = s^2 - \left[\left(\frac{s}{3}\right)^2 + 8 \cdot \left(\frac{s}{3^2}\right)^2 + \dots + 8^{n-1} \cdot \left(\frac{s}{3^n}\right)^2\right].$$

Como podemos observar, a somatória entre colchetes pode ser interpretada como a soma de uma progressão geométrica finita ( $n$  termos), de tal modo que pode ser reescrita como:

$$S_n = \frac{\left(\frac{s}{3}\right)^2 \left[\left(\frac{8}{9}\right)^n - 1\right]}{\frac{8}{9} - 1} = \frac{\left(\frac{s}{3}\right)^2 \left[\left(\frac{8}{9}\right)^n - 1\right]}{-\frac{1}{9}} = \frac{\left(\frac{s}{3}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{8}{9}\right)^n\right]}{\frac{1}{9}} = 9 \cdot \left(\frac{s}{3}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{8}{9}\right)^n\right] = s^2 \left[1 - \left(\frac{8}{9}\right)^n\right].$$

Desse modo,

$$A_n = s^2 - s^2 \left[1 - \left(\frac{8}{9}\right)^n\right] = \left(\frac{8}{9}\right)^n s^2.$$

Além disso, a somatória entre colchetes pode ser interpretada como uma série geométrica, do tipo  $\sum_{n=0}^{\infty} = a \cdot r^n$ , convergente, uma vez que a razão  $\frac{8}{9}$  pertence ao intervalo  $(0,1)$ , o que assegura que seus termos se tornam progressivamente menores, tendendo a zero, e a soma, mesmo que infinita, aproxima-se de um determinado valor. Desse modo, podemos reescrever  $A_n$  da seguinte forma:

$$A_n = s^2 - \sum_{n=0}^{\infty} 8^n \cdot \left(\frac{s}{3^{n+1}}\right)^2, \text{ ou ainda,}$$

$$A_n = s^2 - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{s}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^n.$$

No contexto do Tapete de Sierpinski, a razão  $\frac{8}{9}$  garante que a soma das áreas removidas ao longo de infinitas iterações se aproxime de um valor,  $s^2$ , como mostra a soma da série geométrica:

$$S = \frac{a}{1-r}$$

$$S = \frac{\left(\frac{s}{3}\right)^2}{1 - \frac{8}{9}} = \frac{\left(\frac{s}{3}\right)^2}{\frac{1}{9}} = 9 \cdot \left(\frac{s}{3}\right)^2 = s^2$$

$$\text{Portanto, } A_n = s^2 - s^2 = 0.$$

Isso significa que a soma das áreas dos quadrados removidos nas  $n$  iterações do Tapete de Sierpinski se aproxima cada vez mais da área do quadrado inicial, o que implica que a área do Tapete de Sierpinski, que é obtida após a remoção iterativa de todos os quadrados centrais, como já discutimos, tende a zero.

Assim como no Triângulo de Sierpinski, podemos observar que o perímetro do Tapete de Sierpinski aumenta à medida que aumenta a quantidade de iterações, tendendo ao infinito.

## 1. Perímetro inicial:

- Considere um quadrado com lados medindo  $s$ .
- O perímetro  $P_0$  do quadrado inicial é dado por:  $P_0 = 4s$ .

## 2. Primeira iteração:

- Decompõe-se o quadrado em 9 quadrados congruentes, cada um com lado medindo  $\frac{s}{3}$ . Remove-se o quadrado central.
- O perímetro do quadrado central é dado por:  $4 \cdot \frac{s}{3}$ .
- Após a remoção do quadrado central, o perímetro  $P_1$  do fractal é:

$$P_1 = 4s + 4 \cdot \frac{s}{3} = \frac{16}{3}s.$$

## 3. n-ésima iteração:

- A cada iteração  $n$  o processo descrito é repetido, ou seja, cada quadrado é decomposto em 9 quadrados com lados medindo  $\frac{s}{3^n}$ , e os quadrados centrais são removidos.
- O perímetro de cada quadrado central é:  $4 \cdot \frac{s}{3^n}$ .
- Considerando os  $8^{n-1}$  quadrados centrais removidos a partir da primeira iteração, o perímetro  $P_n$  do fractal é:

$$P_n = 4s + 4 \cdot \frac{s}{3} + 8 \cdot 4 \cdot \frac{s}{3^2} + \dots + 8^{n-1} \cdot 4 \cdot \frac{s}{3^n}$$

Observe que podemos interpretar a soma a partir do segundo termo

$$4 \cdot \frac{s}{3} + 8 \cdot 4 \cdot \frac{s}{3^2} + \dots + 8^{n-1} \cdot 4 \cdot \frac{s}{3^n}, \text{ ou ainda, } 4s \cdot \left[ \frac{1}{3} + \frac{8}{3^2} + \dots + \frac{8^{n-1}}{3^n} \right],$$

como a soma de uma progressão geométrica finita ( $n$  termos), com razão  $\frac{8}{3}$ , de tal modo que a expressão entre colchetes pode ser reescrita como:

$$S_n = \frac{\frac{1}{3} \left[ \left( \frac{8}{3} \right)^n - 1 \right]}{\frac{8}{3} - 1} = \frac{\frac{1}{3} \left[ \left( \frac{8}{3} \right)^n - 1 \right]}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3} \left[ \left( \frac{8}{3} \right)^n - 1 \right] = \frac{1}{5} \left[ \left( \frac{8}{3} \right)^n - 1 \right].$$

Desse modo,  $P_n$  pode ser reescrito como:

$$P_n = 4s + 4s \cdot \frac{1}{5} \left[ \left( \frac{8}{3} \right)^n - 1 \right], \text{ ou:}$$

$$P_n = \frac{4}{5}s \left[ 4 + \left( \frac{8}{3} \right)^n \right].$$

- Quando  $n \rightarrow \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{5} s \left[ 4 + \left( \frac{8}{3} \right)^n \right] = \infty.$$

Essa análise também pode ser feita interpretando a soma  $\frac{1}{3} + \frac{8}{3^2} + \dots + \frac{8^{n-1}}{3^n}$

como uma série geométrica do tipo  $\sum_{n=0}^{\infty} a \cdot r^n$ , ou seja,  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{8}{3} \right)^n$ .

Contudo, como a razão  $\frac{8}{3}$  não pertence ao intervalo  $(0,1)$ , essa série é divergente, cuja soma aumenta iterativamente. Por consequência, o perímetro do fractal também tende ao infinito.

A Tabela 4 apresenta um detalhamento do perímetro do fractal Tapete de Sierpinski nas quatro primeiras iterações. Para cada iteração, apresenta a quantidade de quadrados removidos, independentemente de suas dimensões, o perímetro de cada quadrado central removido, o perímetro do fractal na determinada iteração e um exemplo, considerando unitário o perímetro do quadrado inicial.

**Tabela 4** - Perímetro do Tapete de Sierpinski após n iterações

Iteração	Quantidade de quadrados removidos	Perímetro de cada quadrado central	Perímetro do fractal	Exemplo de $P_n$ ( $P_0 = 1$ )
0	0	$4s$	$4s$	1
1	1	$4 \frac{s}{3}$	$\frac{16}{3}s$	$\frac{4}{3}$
2	8	$4 \frac{s}{3^2}$	$\frac{80}{9}s$	$\frac{20}{9}$
3	64	$4 \frac{s}{3^3}$	$\frac{496}{27}s$	$\frac{124}{27}$
...	...	...	...	...
n	$8^{n-1}$ *	$4 \frac{s}{3^n}$	$\frac{4}{5} s \left[ 4 + \left( \frac{8}{3} \right)^n \right]$	$\frac{1}{5} \left[ 4 + \left( \frac{8}{3} \right)^n \right]$

\* Observe que  $n > 0$ , uma vez que os quadrados só são removidos após a primeira iteração.

**Fonte:** Autor (2024)

Como se pode observar, o perímetro do Tapete de Sierpinski aumenta iterativamente, formando uma sequência infinita, cujos termos tendem ao infinito, uma vez que a cada iteração são removidos mais quadrados, mesmo que menores, aumentando o perímetro.

Ao analisarmos as propriedades desse fractal, ficam evidentes os atributos autossimilaridade e complexidade infinita, uma vez que existe um processo que se repete

iterativamente, resultando em uma estrutura complexa, cuja parte qualquer se assemelha com a estrutura inicial. Além disso, considerando que a cada iteração 8 novos quadrados são gerados ( $M = 8$ ) com lados medindo um terço do quadrado que lhe deu origem ( $N = 3$ ), a dimensão fractal do Tapete de Sierpinski pode ser determinada por:

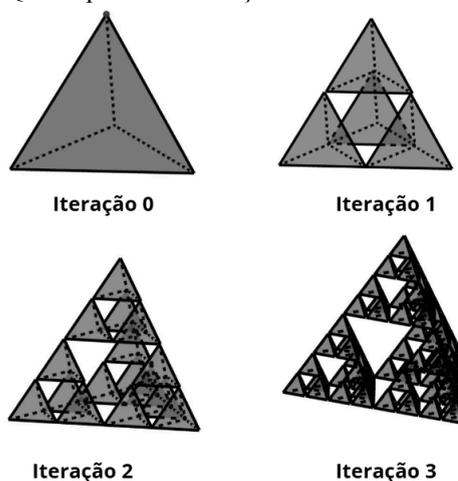
$$D = \frac{\log M}{\log N} = \frac{\log 8}{\log 3} \approx 1,8928.$$

Assim como em relação ao Triângulo de Sierpinski, esse valor nos sugere que o grau de ocupação do Tapete de Sierpinski no espaço está entre as dimensões 1 e 2, ocupando um espaço maior que o Triângulo de Sierpinski, mas sem preencher completamente uma superfície bidimensional.

### 2.3.3 Pirâmide de Sierpinski

A pirâmide de Sierpinski, também conhecida como tetraedro de Sierpinski, é uma estrutura fractal tridimensional derivada do triângulo de Sierpinski. Ela é composta por uma disposição recursiva de tetraedros, na qual cada tetraedro é subdividido em menores, de forma que suas faces apresentam o padrão característico do triângulo de Sierpinski. Essa construção resulta em uma estrutura autossimilar, na qual cada parte replicada mantém as propriedades geométricas da figura inicial, evidenciando a complexidade e a organização específica das formas fractais como mostra a Figura 5.

**Figura 5** - Quatro primeiras iterações da Pirâmide de Sierpinski



**Fonte:** Adaptado de Barbosa (2005)

É mais um fractal obtido por decomposição e exclusão. Começa com um tetraedro de iteração 0, que é decomposto em tetraedros menores com arestas medindo metade do comprimento da aresta do inicial. Após a remoção dos tetraedros centrais, na iteração 1 restam quatro tetraedros; na iteração 2, dezesseis tetraedros; na iteração 3, sessenta e quatro, e assim por diante.

Assim como o Triângulo e o Tapete de Sierpinski, podemos estudar vários atributos da Pirâmide de Sierpinski, como a quantidade de tetraedros, o comprimento das arestas, a área e o volume. Vamos apresentar algumas características em relação à sua área e ao seu volume. Vejamos:

1. Área e Volume iniciais:

- Considere um tetraedro regular com arestas medindo  $s$ .
- A área  $A_0$  e o volume  $V_0$  do tetraedro são dados por:  $A_0 = \sqrt{3} s^2$  e  $V_0 = \frac{\sqrt{2}}{12} s^3$ .

2. Primeira iteração:

- Divide-se o tetraedro em 8 tetraedros congruentes, cada um com aresta medindo  $\frac{s}{2}$ . Remove-se os 4 tetraedros centrais.
- A área da superfície de cada novo tetraedro é dada por:  $\sqrt{3} \left(\frac{s}{2}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} s^2$ .
- O volume de cada novo tetraedro é dado por:  $\frac{\sqrt{2}}{12} \left(\frac{s}{2}\right)^3 = \frac{\sqrt{2}}{96} s^3$ .
- Após a remoção dos tetraedros centrais, a área  $A_1$  do fractal é:

$$A_1 = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} s^2 = \sqrt{3} s^2.$$

Ou seja,  $A_1 = A_0$ .

- Após a remoção dos tetraedros centrais, o volume  $V_1$  do fractal é:

$$V_1 = 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{96} s^3 = \frac{\sqrt{2}}{24} s^3.$$

3. n-ésima iteração:

- A cada iteração  $n$  o processo descrito é repetido, ou seja, cada tetraedro é decomposto em 8 tetraedros com arestas medindo  $\frac{s}{2^n}$ , e os 4 tetraedros centrais são removidos, restando  $4^n$  tetraedros.
- Como a área de cada tetraedro restante é dada por  $\sqrt{3} \left(\frac{s}{2^n}\right)^2$ , a área  $A_n$  é:

$$A_n = 4^n \cdot \sqrt{3} \left(\frac{s}{2^n}\right)^2 = \sqrt{3} s^2.$$

Ou seja,  $A_0 = A_1 = \dots = A_n$ . Logo, a área da Pirâmide de Sierpinski se mantém constante. Isso se justifica, pois cada face removida junto aos tetraedros centrais revela uma face que não era visível.

- Como o volume de cada tetraedro restante é dado por  $\frac{\sqrt{2}}{12} \left(\frac{s}{2^n}\right)^3$ , o volume  $V_n$

$$\text{é: } V_n = 4^n \cdot \frac{\sqrt{2}}{12} \left(\frac{s}{2^n}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \frac{\sqrt{2}}{12} s^3, \text{ ou ainda, } V_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot V_0.$$

Isso quer dizer que o volume reduz-se a metade a cada iteração.

- Quando  $n \rightarrow \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_n = 0.$$

A Tabela 5 apresenta um detalhamento da área e do volume do fractal Pirâmide de Sierpinski nas quatro primeiras iterações. Para cada iteração, apresenta a quantidade de tetraedros, independentemente de suas dimensões, a área de cada tetraedro, a área do fractal na determinada iteração - mostrando que ela se mantém constante, o volume de cada tetraedro, o volume do fractal na determinada iteração e um exemplo, considerando unitário o volume do tetraedro inicial.

**Tabela 5** - Área e volume da pirâmide de Sierpinski após n iterações

Iteração	Quantidade de tetraedros	Área de cada tetraedro	Área do fractal	Volume de cada tetraedro	Volume do fractal	Exemplo de $V_n$ ( $V_0 = 1$ )
0	1	$\sqrt{3} s^2$	$\sqrt{3} s^2$	$\frac{\sqrt{2}}{12} s^3$	$\frac{\sqrt{2}}{12} s^3$	1
1	4	$\sqrt{3} \left(\frac{s}{2}\right)^2$	$\sqrt{3} s^2$	$\frac{\sqrt{2}}{12} \left(\frac{s}{2}\right)^3$	$\frac{\sqrt{2}}{24} s^3$	$\frac{1}{2}$
2	16	$\sqrt{3} \left(\frac{s}{2^2}\right)^2$	$\sqrt{3} s^2$	$\frac{\sqrt{2}}{12} \left(\frac{s}{2^2}\right)^3$	$\frac{\sqrt{2}}{48} s^3$	$\frac{1}{4}$
3	64	$\sqrt{3} \left(\frac{s}{2^3}\right)^2$	$\sqrt{3} s^2$	$\frac{\sqrt{2}}{12} \left(\frac{s}{2^3}\right)^3$	$\frac{\sqrt{2}}{96} s^3$	$\frac{1}{8}$
...	...	...	...	...	...	...
n	$4^n$	$\sqrt{3} \left(\frac{s}{2^n}\right)^2$	$\sqrt{3} s^2$	$\frac{\sqrt{2}}{12} \left(\frac{s}{2^n}\right)^3$	$\left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \frac{\sqrt{2}}{12} s^3$	$\left(\frac{1}{2}\right)^n$

**Fonte:** Autor (2024)

Ao analisarmos as propriedades desse fractal, ficam evidentes os atributos marcantes de autossimilaridade e complexidade infinita, visto que seu processo de construção ocorre de forma iterativa. A cada nova etapa, surge uma estrutura tridimensional mais complexa, mantendo a semelhança com a pirâmide inicial em todas as suas partes. No caso da Pirâmide de Sierpiński, a cada iteração, 4 novos tetraedros são gerados ( $M = 4$ ), cada um com arestas medindo metade da aresta do tetraedro que lhe deu origem ( $N = 2$ ). Logo, a dimensão fractal da Pirâmide de Sierpinski pode ser determinada por:

$$D = \frac{\log M}{\log N} = \frac{\log 4}{\log 2} = \frac{2 \cdot \log 2}{\log 2} = 2.$$

Esse valor revela que, embora a pirâmide exista em um espaço tridimensional, seu comportamento se assemelha a uma estrutura bidimensional, pois a ocupação de seu volume diminui progressivamente até tender a zero, enquanto a sua superfície mantém uma complexidade auto-similar constante.

### CAPÍTULO 3

#### ASPECTOS METODOLÓGICOS E CONTEXTO DA PESQUISA

Para investigar *como a modelagem matemática pode auxiliar no ensino do fractal Triângulo de Sierpinski*, optamos por uma abordagem qualitativa. Tal abordagem é geralmente utilizada no contexto de pesquisas educacionais para compreender problemas relativos ao cotidiano escolar, problemas que levam em consideração a complexidade envolvida no ensino, na aprendizagem, na relação entre professor e alunos, ou entre alunos, entre outras questões (Ludke; André, 2014).

A exploração desse fractal possibilita a apresentação aos alunos de um novo ponto de vista da Geometria Euclidiana, fomentando discussões sobre perímetro e área. Nosso intuito foi, portanto, desenvolver algumas investigações associadas a esse fractal, amparados em procedimentos característicos de atividades de modelagem matemática.

Para participar da pesquisa, foram convidados alunos de duas turmas de 9º ano do Ensino Fundamental, A e D, de uma escola pública, situada no município de Toledo, Oeste do Paraná, nas quais o pesquisador atuava como professor regente da disciplina de Matemática, em regime de processo seletivo simplificado (PSS), no ano de 2024. A turma 9º ano A possuía 36 alunos matriculados, enquanto a turma 9º ano D possuía 30 alunos matriculados, totalizando 66 alunos, com idades entre 13 e 14 anos.

Trata-se do Colégio Estadual Senador Atílio Fontana, uma escola de tempo integral que oferece uma experiência educacional abrangente, combinando currículo acadêmico com atividades extracurriculares, esportes, arte e eventos culturais em um horário estendido, normalmente das 7h30 às 16h30. Esse modelo de ensino objetiva além do aprendizado acadêmico, o desenvolvimento pessoal dos alunos, promovendo habilidades sociais e emocionais como empatia e colaboração. O tempo extra na escola permite um suporte personalizado, auxiliando os alunos em dúvidas, dificuldades e atividades extras.

Conforme descrito no Projeto Político Pedagógico da instituição, “a escola prima por uma educação integral, que contribua para a formação de pessoas em caráter geral, aptas a assimilar mudanças, cidadãos participativos na era do conhecimento, desenvolver a autonomia em suas escolhas e acolhendo e respeitando as diferenças de forma solidária e cooperadora numa perspectiva de superar estratificação social” (Colégio Estadual Senador Atílio Fontana, 2023, p. 111).

O projeto desta pesquisa foi submetido e aprovado pelo Comitê de Ética em Pesquisa envolvendo Seres Humanos (CEP) da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), conforme Parecer subcircunstanciado nº 7.086.899, condicionado ao Certificado de Apresentação para Apreciação Ética (CAAE) 82565824.9.0000.0165. Atendendo às normativas das Resoluções CNS nº 466/12 e nº 510/16, sendo considerado ético e seguro. A aprovação reflete a conformidade com os direitos e garantias estabelecidas no Estatuto da Criança e do Adolescente, assegurando proteção e dignidade aos participantes. Vale ressaltar que dos 66 alunos inicialmente convidados para participar da pesquisa, apenas 53 desenvolveram as atividades propostas, compondo nosso grupo de participantes.

Três atividades foram desenvolvidas em um total de 18 horas-aula, organizadas de modo a incentivar o engajamento dos participantes. A atividade que analisamos neste Trabalho de Conclusão de Curso tem como temática o Triângulo de Sierpinski, primeira atividade desenvolvida pelos alunos, com duração de 5 horas-aula. A coleta de dados se deu em meados de novembro de 2024.

Para o desenvolvimento das atividades, apresentamos primeiramente noções iniciais a respeito do que é um fractal, suas origens e quem foi Sierpinski. Em seguida, os alunos foram organizados em grupos e convidados a realizar as atividades, as quais envolvem a construção e análise dos fractais de Sierpinski, a saber: o triângulo, o tapete e o cartão fractal triângulo de Sierpinski. Durante as atividades, questões como: “Como seu grupo resolveu a atividade proposta?”, “O que acontece na primeira iteração?”, “Quais procedimentos são repetidos?”, “Isso acontece sempre?” e “Como se escreve isso matematicamente?” foram apresentadas aos alunos, incentivando-os a solucionar as questões propostas e a registrar as suas soluções.

Ao final de cada atividade, foi proposto um questionário com questões a respeito da construção feita e das percepções das propriedades matemáticas dos fractais investigados. Além disso, os alunos responderam individualmente às questões: 1) Quais foram os conceitos matemáticos utilizados na resolução? e 2) Houve resoluções diferentes no seu grupo, se sim quais? Por fim, foi realizada uma discussão, na qual eles puderam expor seus resultados e sanar as suas dúvidas.

Para a construção e análise do triângulo de Sierpinski, foi disponibilizado a cada aluno um triângulo equilátero, recortado em papel sulfite. Em grupos com quatro alunos, eles realizaram a construção das três primeiras iterações através de dobraduras e na sequência fizeram uma análise sobre o comportamento do perímetro e da área a cada iteração feita. Para auxiliar nessa análise, os alunos preencheram duas tabelas (Apêndices A e D), registrando informações como quantidade de triângulos não-coloridos, área de cada triângulo não

colorido, área total dos triângulos não-coloridos, o comprimento do lado de cada triângulo não-colorido, o perímetro de cada triângulo não colorido e o perímetro total dos triângulos não-coloridos. Na sequência, os alunos responderam a um questionário (Apêndice I), com 8 questões a respeito do fractal Triângulo de Sierpinski.

Em seguida, os alunos realizaram a construção das três primeiras iterações do Tapete de Sierpinski, com o auxílio de régua e um quadrado recortado em folha sulfite, disponibilizado pelo professor. Após a construção do fractal, eles preencheram uma tabela (Apêndice G) com informações referentes à área e ao perímetro do fractal. Depois das discussões, eles responderam um questionário (Apêndice k), com 7 questões a respeito do fractal Tapete de Sierpinski.

Por fim, os alunos realizaram a construção das três primeiras iterações do Cartão Fractal Triângulo de Sierpinski, com o auxílio de régua, tesoura e uma folha sulfite, disponibilizada pelo professor. A construção foi fixada em um papel cartão dobrado, para auxiliar na visualização do fractal. Após a construção, os alunos preencheram uma tabela (Apêndice E) com informações a respeito do volume do fractal e, finalmente, responderam um questionário (Apêndice M), com 7 questões a seu respeito.

Após a discussão sobre os três fractais de Sierpinski, foi realizada uma plenária, para socialização das respostas e discussão das abordagens empreendidas nas resoluções.

A coleta de dados foi realizada a partir dos registros escritos dos alunos, produzidos em cada atividade, por meio de gravações em áudio e vídeo dos diálogos durante as aulas, além de fotos e diário de campo do pesquisador.

A análise de dados foi realizada sobre as produções escritas dos alunos, bem como dos áudios e imagens registrados na construção e análise do fractal Triângulo de Sierpinski. Para a realização da análise, nos orientamos por questionamentos como: o que revelam as falas e registros dos alunos? Como eles disseram e registraram? Como os procedimentos da modelagem matemática podem ser identificados nas construções a análise dos fractais?

Para este trabalho de conclusão de curso, optamos por analisar apenas o fractal Triângulo de Sierpinski, em virtude do tempo. A escolha por esse fractal em específico se deu devido ao Tapete de Sierpinski apresentar características e abordagem semelhantes à dele, especialmente no que tange aos aspectos de recorrência, progressão e remoção, continuamente explorados nas atividades. Além disso, o Cartão Fractal Triângulo de Sierpinski é inspirado neste fractal, sendo que muitas características são dele derivadas.

Dessa forma, os dados analisados se concentram em interpretações qualitativas das resoluções e percepções dos 53 alunos participantes em relação à abordagem matemática

realizada, permitindo uma compreensão sobre como a modelagem matemática pode auxiliar no ensino do Triângulo de Sierpinski.

## CAPÍTULO 4

### ANÁLISE E DISCUSSÃO

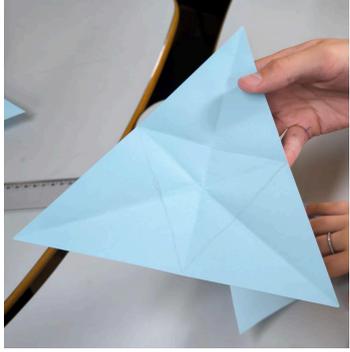
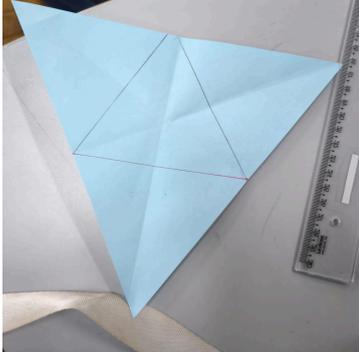
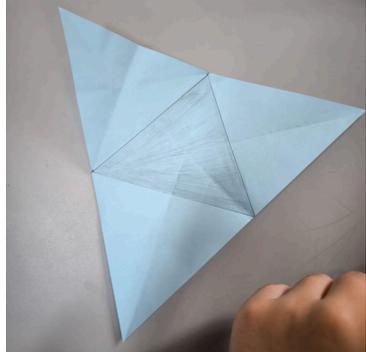
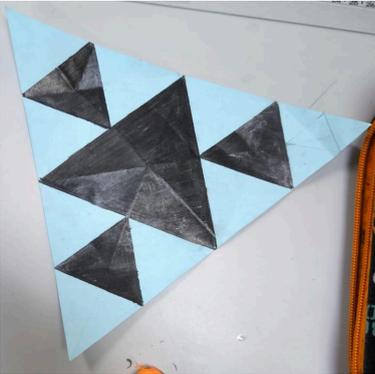
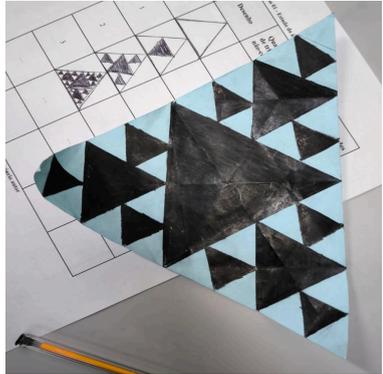
Este capítulo apresenta a análise e discussão das resoluções dos alunos para a atividade referente ao fractal Triângulo de Sierpinski. Faz uma descrição, chamando atenção para o desempenho dos alunos e principalmente apresentando indícios de como os procedimentos da modelagem matemática podem ser identificados e, nesse contexto, contribuíram para a abordagem e discussão dos conceitos de perímetro e área.

#### 4.1 ANÁLISE DA ATIVIDADE SOBRE O TRIÂNGULO DE SIERPINSKI

Nas primeiras aulas foi feita uma apresentação aos alunos sobre quem foi Sierpinski, qual foi a sua história, trajetória e algumas de suas contribuições para a geometria fractal. Essa introdução foi inspirada na fase de inteiração, descrita por Almeida, Silva e Vertuan (2012), que destacam a importância de os alunos conhecerem e se interessarem a respeito do tema que vão debater. De acordo com os autores, o conceito de “inteiração” sugere a ideia de adquirir conhecimento sobre algo; na modelagem matemática, essa etapa representa o primeiro contato com a situação problemática que se deseja investigar, visando compreender suas características essenciais.

A partir daí, explicamos como seria a dinâmica das atividades e começamos com a construção do primeiro fractal, o triângulo de Sierpinski. O Quadro 2 ilustra a construção feita pelos alunos.

Quadro 2 - Construção do Triângulo de Sierpinski

		
<p><b>Passo 1:</b> Encontrar o ponto médio de cada lado, dobrar e vincar o papel de modo que o vértice oposto coincida com esse ponto.</p>	<p><b>Passo 2:</b> Ao desdobrar o papel, os três segmentos de reta, indicados pelas dobras, devem ser traçados para demarcar os triângulos.</p>	<p><b>Passo 3:</b> Pinte o triângulo central, cujos vértices não coincidem com os vértices do triângulo inicial, representando a sua remoção.</p>
		
<p>Passo 4: Em cada triângulo não pintado, repetir os três primeiros passos.</p>	<p>Passo 5: Repetir o passo anterior quantas vezes quanto possível.</p>	

Fonte: Autor (2024)

Durante a construção do triângulo de Sierpinski, na etapa inicial, alguns alunos encontraram dificuldades em associar as dobraduras com a criação de pontos médios. Por isso, foi realizada uma revisão de modo a sinalizar como eles poderiam usar a simetria para determiná-los.

Os alunos mostraram facilidade em dar sequência na construção e repetir os procedimentos indicados, o que chama atenção para o atributo complexidade infinita dos fractais. Eles observaram com facilidade que a cada iteração cada triângulo era decomposto em quatro triângulos, dos quais um era removido. Ou seja, a cada iteração a quantidade de triângulos triplicava.

Essa compreensão das informações relativas à construção do fractal e o sanar dúvidas referentes à ela também pode ser associada à fase de inteiração, uma vez que é nela, segundo Almeida, Silva e Vertuan (2012), que os aspectos relevantes à caracterização da

situação-problema são levados em conta, a partir dos quais as informações que podem ajudar na resolução são selecionadas.

Apesar de essa construção não se referir a uma representação direta da realidade tangível, mas sim à modelagem de um fractal, cuja estrutura segue um conjunto de regras rigorosamente definidas e aplicadas iterativamente, podemos pensar no fractal como sendo a realidade que deu origem à investigação. O fractal, apesar de ser uma noção definida no âmbito da Matemática, foi por muito tempo um mistério, sendo inclusive associado ao caos. Entendemos, nessa perspectiva, que o fractal é a situação não essencialmente matemática, como descrita por Almeida, Silva e Vertuan (2012), que desejamos investigar por meio da Matemática.

Ao chamarem atenção para aspectos e padrões observados no comportamento de alguma característica à medida que a quantidade de iterações aumenta, como por exemplo, a quantidade de triângulos, os alunos realizam ações concernentes à fase de matematização, na qual a situação-problema passa a ser descrita em termos matemáticos (Almeida; Silva; Vertuan, 2012). É a fase em que processos de transição entre linguagens, visualização e uso de símbolos são utilizados para descrever aspectos da situação por meio da Matemática.

Para auxiliar na matematização e conduzir os alunos à fase de resolução, algumas questões foram realizadas, algumas relacionadas à área (*Qual é a quantidade de triângulos não coloridos? Qual é a área de cada triângulo não colorido? Qual é a área total dos triângulos não coloridos?*) e outras ao perímetro do Triângulo de Sierpinski (*Qual é o comprimento do lado de cada triângulo não colorido? Qual é o perímetro de cada triângulo não colorido? Qual é o perímetro total dos triângulos não coloridos?*). Essas questões buscaram explorar as propriedades geométricas do fractal, aprofundando a compreensão de sua estrutura.

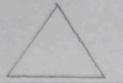
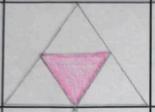
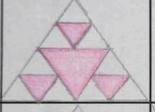
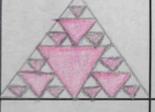
Ao estabelecer que o objetivo é estudar esses aspectos, área e perímetro, o problema passa a ser tratado sob uma abordagem matemática, para a qual é necessário o domínio de conhecimentos relativos ao cálculo da área e do perímetro de triângulos equiláteros. Como destaca Scheffer (1995), a modelagem matemática serve para ajudar a interpretar as especificações reais por meio de representações matemáticas, o que no caso do triângulo de Sierpinski, envolve aplicar tais conceitos, para entender a estrutura do fractal em termos quantitativos.

Nesse contexto, busca-se aprofundar a análise desses aspectos, iteração por iteração, com o objetivo de levar os alunos a desenvolver uma fórmula geral, um modelo matemático, que permita calcular a área e o perímetro do fractal em uma iteração qualquer. Um modelo

matemático, segundo Almeida, Silva e Vertuan (2012), é justamente uma representação estruturada a partir de relações matemáticas estabelecidas a partir da análise de características do fenômeno sob investigação. A busca e o desenvolvimento dessa representação matemática são orientados pelas relações entre as características do problema e os conceitos, técnicas e métodos matemáticos adequados para expressá-los de forma matemática. Essas descrições derivam da formulação de pressupostos, seleção de variáveis e simplificação das informações em relação ao problema originalmente definido na fase de inteiração.

A Figura 6 exemplifica o processo de construção de modelos matemáticos, referente à fase de resolução, para alguns aspectos que foram levantados na forma de problemas, como a quantidade de triângulos, a área de cada triângulo e a área do fractal.

**Figura 6** - Estudo da área do triângulo de Sierpinski feito por um aluno

Iteração	Desenho	Quantidade de triângulos não-coloridos	Área de cada triângulo não-colorido	Área total dos triângulos não-coloridos
0		$0 \cdot 3 = 0 + 3^0 = 1$	$\frac{l^2 \sqrt{3}}{4}$	$\frac{l^2 \sqrt{3}}{4}$
1		$3 \cdot 1 = 3 = 3^1$	$\frac{(\frac{l}{2})^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{l^2 \sqrt{3}}{16}$	$3 \cdot \frac{l^2 \sqrt{3}}{16} = \frac{3l^2 \sqrt{3}}{16}$
2		$3 \cdot 3 = 9 = 3^2$	$\frac{(\frac{l}{4})^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{l^2 \sqrt{3}}{64}$	$9 \cdot \frac{l^2 \sqrt{3}}{64} = \frac{9l^2 \sqrt{3}}{64}$
3		$3 \cdot 3 \cdot 3 = 27 = 3^3$	$\frac{l^2 \sqrt{3}}{4^2} = \frac{l^2 \sqrt{3}}{16}$	$27 \cdot \frac{l^2 \sqrt{3}}{16} = \frac{27l^2 \sqrt{3}}{16}$
...	...	...	...	...
n		$3^n$	$\frac{l^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n$	$\frac{l^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n$

Fonte: Autor (2024)

A princípio foram preenchidas as quatro primeiras linhas da segunda coluna. Esses desenhos são registros visuais do que aconteceu no papel. As hachuras indicam os triângulos que foram removidos. O objetivo de propor esses desenhos foi viabilizar a partir da análise do visual a interação com os elementos de forma intuitiva, formal e algorítmica, inferindo padrões (geométricos e numéricos) e escrevendo generalizações, como afirmam Almeida, Silva e Vertuan (2012). Esse tipo de prática facilita a construção de modelos matemáticos por parte dos alunos, permitindo uma melhor compreensão do seu papel.

Esse auxílio ficou em evidência quando os alunos, na sequência, preencheram a terceira coluna. A quantidade de triângulos não-coloridos refere-se à quantidade de triângulos formados a cada iteração. Como os alunos já tinham as imagens desenhadas na segunda coluna, esse preenchimento se resumiu à contagem dos triângulos não hachurados. Aqui observamos os primeiros movimentos do professor em busca de direcionar os alunos à uma generalização, com questionamentos do tipo: *Quantos triângulos terá a décima iteração?* Questionamentos como esse são comuns em atividades de modelagem, uma vez que cabe ao professor o papel de orientador, fazendo perguntas, indicando caminhos, como explicam Almeida, Silva e Vertuan (2012).

Um dos alunos, (A), respondeu após algum momento 59.049 triângulos, explicando: *“Professor temos uma sequência a partir da primeira iteração, temos  $3^0, 3^1, 3^2, 3^3$ , então na minha décima iteração vamos ter  $3^{10}$ ”*. Essas ideias vão em direção às considerações de Bassanezi (2002), que concebe a modelagem como um processo que envolve descobrir e aplicar relações numéricas. Nesse caso, o aluno intuitivamente organizou uma sequência, que mais tarde conhecerá como progressão geométrica, subjacente ao processo de iteração do fractal, a cada iteração a quantidade de triângulos é triplicada.

Além disso, o professor perguntou aos alunos como eles poderiam determinar a quantidade de triângulos na  $n$ -ésima iteração. Essa questão já requereu um pouco mais de organização e dedução. Após alguns minutos um aluno, (B), explicou: *“Como temos uma sequência de razão 3, dada por  $3^0, 3^1, 3^2, 3^3$ , o meu expoente vai aumentando uma unidade a cada nova iteração, então vamos ter 3 elevado a algo”*. Dessa forma, foi discutido que esse algo deveria ser um número inteiro positivo, assim como as iterações. Chamando de  $n$  esse número, a quantidade de triângulos desejada, ou seja, na  $n$ -ésima iteração, pode ser representada por  $3^n$ .

Na quarta coluna, por sua vez, os alunos calcularam a área de cada triângulo gerado na iteração  $n$ , ou seja, de cada triângulo não-colorido. Como os alunos sabiam que se tratava de triângulos equiláteros, eles utilizaram a fórmula  $\frac{l^2\sqrt{3}}{4}$  para o cálculo da área, sendo  $l$  a medida do lado do triângulo equilátero. Como  $l$  é uma medida genérica, os alunos tiveram que realizar algumas manipulações algébricas para obter as áreas desejadas. Embora com algumas dificuldades, como eles já tinham observado que a medida do lado do triângulo reduz-se à metade a cada iteração (*“Não professor visto que eu tirei um triângulo bem no meu ponto médio então o meu lado está dividido em dois”* - Aluno (C)), eles realizaram esses cálculos

substituindo  $l$  por  $\frac{l}{2}$ ,  $\frac{l}{4}$ ,  $\frac{l}{8}$  e assim por diante. A Figura 7 apresenta o registro no quadro desses cálculos.

**Figura 7** - Quadro com as explicações a respeito da área não-colorida

$$\frac{l^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{l^2\sqrt{3}}{16} \quad \boxed{4 \cdot 4^3 = 4^{1+3} = 4^4}$$

$$\frac{l^2\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{16} = \frac{l^2\sqrt{3}}{64}$$

$$\frac{l^2\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{64} = \frac{l^2\sqrt{3}}{256}$$

**Fonte:** Autor (2024)

Scheffer (1995) observa que a modelagem envolve explorar as propriedades dos objetos e as características matemáticas por meio de regras e relações formais. Esse tipo de exercício é importante porque permite que os alunos compreendam como as mudanças em um objeto iterativo afetam as suas propriedades geométricas e, ao mesmo tempo, ajuda a internalizar técnicas de cálculo como a área de triângulos, integrando-as em um contexto mais amplo de estudo matemático.

Quando questionados sobre a área não-colorida na  $n$ -ésima iteração, os alunos perceberam que, nesse caso, a área de cada triângulo equilátero estava sendo reduzida a uma razão de  $\frac{1}{4}$ . Dessa forma, indicaram que bastava multiplicar a área de um triângulo equilátero por  $\left(\frac{1}{4}\right)^n$ , ou seja,  $\frac{l^2\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n$ .

Em relação à última coluna, sobre a área total dos triângulos não-coloridos, os alunos realizaram os cálculos sem dificuldades relevantes, uma vez que já tinham na tabela a quantidade de triângulos não coloridos gerados a cada iteração, na terceira coluna, e a área de cada um deles, na quarta coluna. “Professor, minha área total na iteração 0 é dada por  $\frac{l^2\sqrt{3}}{4} \cdot 3^0$ , porque eu tenho 1 triângulo e, da mesma forma, eu vou ter a área da minha iteração 1 dada por  $\frac{l^2\sqrt{3}}{4^2} \cdot 3^1$ ” - Aluno (A). Quando questionados sobre a área total dos triângulos não-coloridos na  $n$ -ésima iteração, os alunos demoraram para responder, até que o

aluno (D) afirmou: “Eu tenho a minha quantidade de triângulos não coloridos representados por  $3^n$  e a minha área é dada por  $\frac{l^2\sqrt{3}}{4} \left(\frac{1}{4}\right)^n$ , como tenho o produto, eu não posso representar  $\frac{l^2\sqrt{3}}{4}$  vezes  $\left(\frac{3}{4}\right)^n$ ?”. Através de propriedades de potenciação o aluno conseguiu deduzir a fórmula genérica para calcular a  $n$ -ésima iteração.

O preenchimento dessa tabela (Figura 8), pode ser associado à fase de resolução da modelagem, descrita por Almeida, Silva e Vertuan (2012), uma vez que é nela que conceitos e procedimentos matemáticos são utilizados para a construção do modelo, permitindo a representação da situação e a exploração de elementos e questões pertinentes.

Para a validação e interpretação dos resultados, os modelos encontrados foram colocados à prova, a fim de verificar a quantidade e a área (individual ou total) de triângulos não coloridos para as iterações já calculadas.

Procedimentos e discussões semelhantes podem ser observados e realizados a partir da análise do perímetro do Triângulo de Sierpinski. A Figura 8 exemplifica as análises do comprimento e perímetro de cada triângulo e o perímetro total do fractal para as quatro primeiras iterações e a  $n$ -ésima iteração.

**Figura 8** - Estudo do Perímetro do triângulo de Sierpinski feito por um aluno

Iteração	Desenho	Comprimento do lado de cada triângulo não-colorido	Perímetro de cada triângulo não-colorido	Perímetro total dos triângulos não-coloridos
0		$\frac{1}{1} \cdot l = l$	$3 \cdot l$	$1 \cdot 3l = 3l$
1		$\frac{1}{2} \cdot l = \frac{l}{2}$	$3 \cdot \frac{l}{2} = \frac{3l}{2}$	$3 \cdot \frac{3l}{2} = \frac{3^2 l}{2}$
2		$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \cdot l = \frac{l}{4}$	$3 \cdot \frac{l}{4} = \frac{3l}{4}$	$3^2 \cdot \frac{3l}{4} = \frac{3^3 l}{2^2}$
3		$l \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{l}{8}$	$3 \cdot \frac{l}{8} = \frac{3l}{8}$	$3^3 \cdot \frac{3l}{8} = \frac{3^4 l}{2^3}$
...	...	...	...	...
n		$l \left(\frac{1}{2}\right)^n$	$3l \left(\frac{1}{2}\right)^n$	$3l \left(\frac{3}{2}\right)^n$

Fonte: Autor (2024)

Da mesma forma como na análise da área, os alunos fizeram os desenhos das primeiras iterações do Triângulo de Sierpinski. Não houve problemas quanto a esse preenchimento, uma vez que os desenhos eram os mesmos feitos na análise anterior.

Na sequência, discutiram sobre o comprimento do lado de cada triângulo não-colorido, ou seja, dos triângulos que compunham o fractal, retomando a fase de matematização, da modelagem matemática, uma vez que os alunos estavam retratando em termos matemáticos características do fractal, especificamente, o comportamento do lado a cada iteração. O aluno (A) observou: *“Professor, [...] estamos tirando o triângulo central em cada nova iteração, de forma a ficar metade do comprimento em cada nova iteração”*, ou seja,  $s_n = \frac{1}{2}l_{n-1}$ ,  $n > 0$ . Essa informação funciona como hipótese, que guiou a construção do modelo matemático para o comprimento dos triângulos não-coloridos na  $n$ -ésima iteração, que é dado por  $(\frac{1}{2})^n l$ ,  $n \geq 0$ .

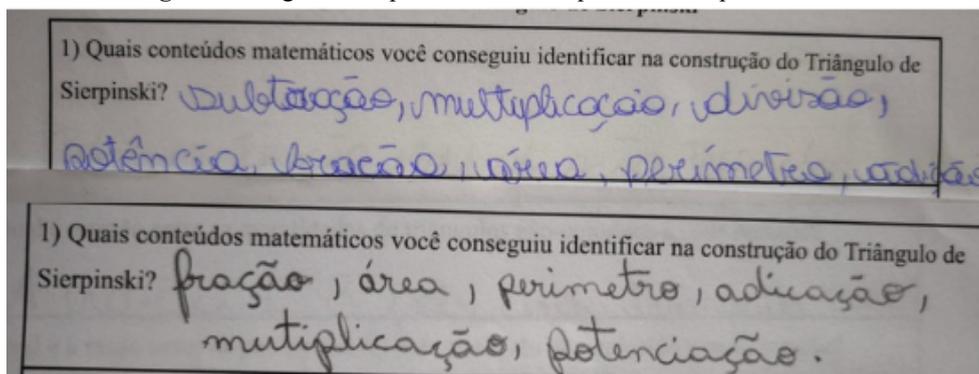
Com essas informações, ficou fácil calcular o perímetro de cada um desses triângulos. O aluno (A) explicou que o perímetro *“É a soma dos lados”*. Além disso, os alunos perceberam que, para o seu cálculo, bastava multiplicar o comprimento de cada lado (já calculado na terceira coluna) pela quantidade de lados de um triângulo, ou seja, por 3 (como sugere a Figura 8). Quando questionados se era possível calcular o perímetro para uma iteração  $n$  qualquer, o aluno (A) respondeu *“Sim professor, já definimos que para calcular o lado em qualquer iteração temos  $l(\frac{1}{2})^n$ , desta forma, [como] sabemos que o triângulo tem 3 lados, basta-nos multiplicar:  $3 \cdot l(\frac{1}{2})^n$ ”*.

Ao analisarem o perímetro total dos triângulos não-coloridos, ou seja, o perímetro do fractal, os alunos foram motivados pela pergunta do aluno (A): *“Professor, tenho que pensar no número de triângulos em cada iteração?”*. A partir dela, eles perceberam que o perímetro do fractal era o produto da quantidade de triângulos não-coloridos, que triplica a cada iteração, pelo perímetro de cada triângulo não-colorido naquela iteração (já calculado na quarta coluna), ou seja,  $3^n \cdot 3l(\frac{1}{2})^n$ , ou ainda, como escreveram os alunos:  $3l(\frac{3}{2})^n$ .

A obtenção desses modelos matemáticos, para o comprimento do lado, perímetro de cada triângulo e perímetro do fractal, representa a fase de resolução (Almeida; Silva; Vertuan, 2012). Sob essa perspectiva, para auxiliar os alunos na validação e interpretação dos resultados, solicitamos que eles preenchessem um questionário com 8 questões a respeito da área e perímetro do fractal Triângulo de Sierpinski (Apêndice I).

Ao analisarmos as respostas a esse questionário, observamos que a maioria dos alunos conseguiram identificar e registrar quais foram os conteúdos matemáticos abordados na construção do Triângulo de Sierpinski, como sugere a Figura 9, com respostas dos alunos à questão 1.

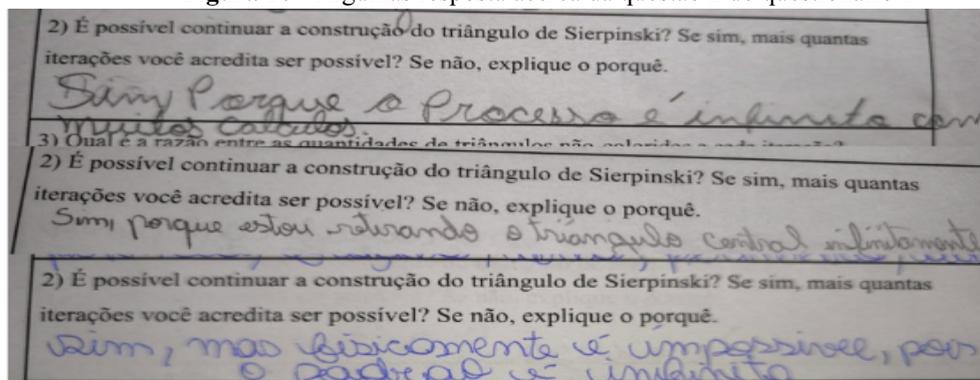
**Figura 9** - Algumas respostas acerca da questão 1 do questionário 1



**Fonte:** Autor (2024)

A questão 2, por sua vez, indica que os alunos compreenderam que é possível continuar a construção do triângulo de Sierpinski infinitamente, pois, por mais pequeno que seja o triângulo gerado em cada iteração, sempre será possível encontrar novos pontos médios, traçar e remover um triângulo central, como mostra a Figura 10.

**Figura 10** - Algumas resposta acerca da questão 2 do questionário 1

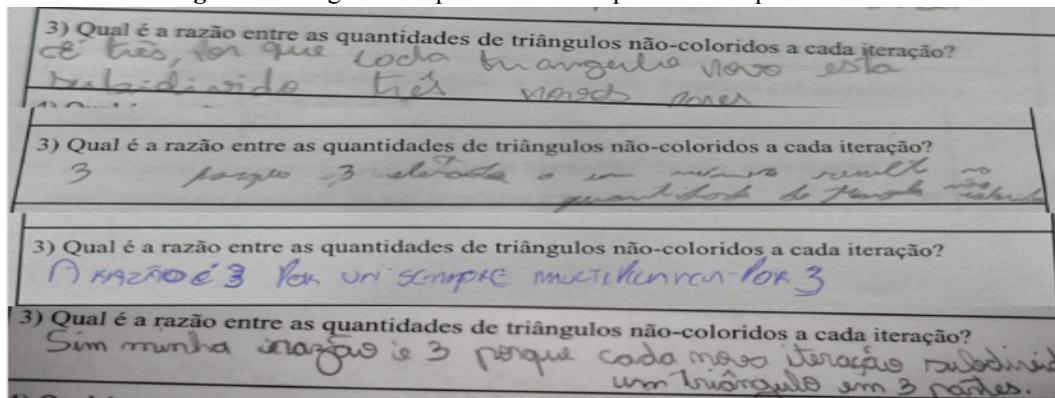


**Fonte:** Autor (2024)

Essa resposta levou os alunos a perceberem que a quantidade de novos triângulos gerados, progressivamente menores, também será infinita, triplicando a cada iteração. Na verdade, essa característica é uma manifestação da complexidade infinita, que é um atributo típico dos fractais. Conforme Mandelbrot (1982), os fractais associam-se à noção de fraturas, que possuem um detalhamento infinito, ou seja, propriedades que se repetem em escalas infinitamente pequenas, produzindo estruturas autossimilares.

As respostas para a questão 3 revelam que a maioria dos alunos percebeu que a razão entre a quantidade de triângulos não-coloridos a cada iteração é 3, conforme Figura 11.

**Figura 11** - Algumas resposta acerca da questão 3 do questionário 1



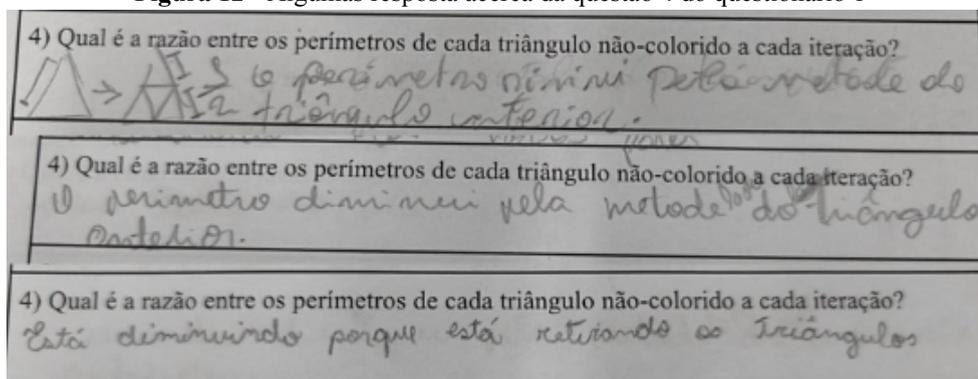
**Fonte:** Autor (2024)

Os alunos começaram a visualizar o que mais tarde reconhecerão como uma progressão geométrica. De acordo com Almeida, Silva e Vertuan (2012), quando se trabalha com modelagem matemática, é importante que os alunos façam essas conexões iniciais de forma intuitiva, pois isso facilita a transição para um entendimento mais formal e estruturado.

Vale ressaltar que nesse momento, alguns alunos apresentaram uma ideia equivocada ao associar a tabuada do três ao número de iterações, o que demonstra a falta de compreensão do conceito e propriedades de potenciação. Almeida, Silva e Vertuan (2012) explicam que é comum que os alunos cometam erros quando começam a se familiarizar com conceitos e a estabelecer conexões com o problema, devido ao caráter intuitivo que tem tais interpretações.

Já as respostas à questão 4, Figura 12, mostram que os alunos entenderam que o perímetro dos triângulos não-coloridos a cada iteração diminui a uma razão  $\frac{1}{2}$ .

**Figura 12** - Algumas resposta acerca da questão 4 do questionário 1



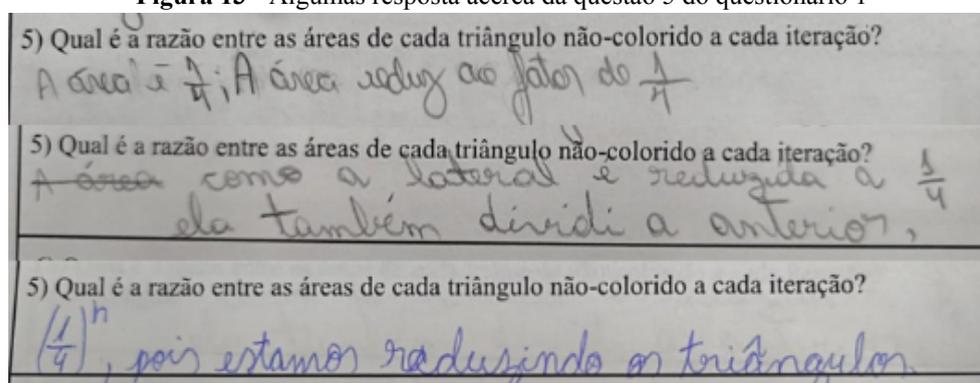
**Fonte:** Autor (2024)

Foi interessante que alguns alunos associaram essa relação aos desenhos. De acordo com Almeida, Silva e Vertuan (2012), esse processo de visualização e construção de relações numéricas e lineares é uma etapa fundamental no desenvolvimento da modelagem matemática, pois permite aos alunos compreenderem padrões e regularidades, essenciais para a generalização de fórmulas.

Cabe pontuar que alguns alunos confundiram o motivo de tal redução. O aluno (E), por exemplo, explicou “*Está diminuindo porque está tirando os triângulos*”, o que não está incorreto, porém, isso justifica a redução da área e não do perímetro, que se deve à redução à metade do comprimento do lado a cada iteração. Essa confusão reflete uma incompreensão ou pelo menos uma falta de clareza quanto aos aspectos sob análise no momento da matematização. Almeida, Silva e Vertuan (2012), explicam que essa etapa exige que os alunos façam distinções entre as diferentes propriedades matemáticas de maneira gradual, para evitar interpretações equivocadas.

As respostas à questão 5, Figura 13, mostram que a maioria dos alunos compreendeu que a razão entre as áreas dos triângulos não-coloridos a cada iteração é  $\frac{1}{4}$ , ou seja, são reduzidas à quarta parte a cada iteração, uma vez que cada triângulo é dividido em 4.

**Figura 13** - Algumas resposta acerca da questão 5 do questionário 1



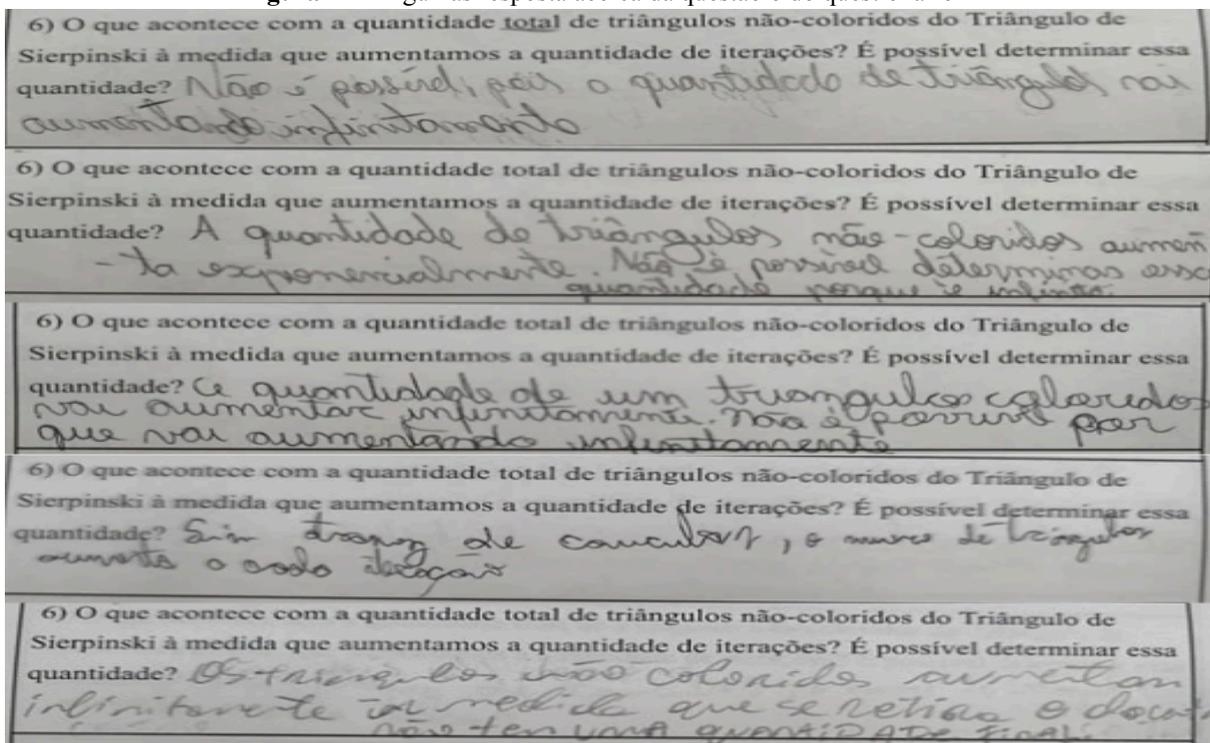
**Fonte:** Autor (2024)

Alguns alunos confundiram a razão entre as áreas com a razão entre os comprimentos, indicando incorretamente  $\frac{1}{2}$  como resposta, o que foi corrigido na plenária. É comum, nessa fase de interpretação de resultados e validação, que os alunos identifiquem erros, esclareçam dúvidas, pois ao revisitar o que fizeram, lançam um novo olhar, reflexivo e avaliativo, que pode contribuir com a compreensão das propriedades analisadas e das relações estabelecidas.

Para a questão 6, as respostas dos alunos indicam que a maioria compreendeu a impossibilidade de indicar uma “quantidade final” de triângulos não coloridos, uma vez que é

possível continuar as iterações indefinidamente. A Figura 14 apresenta algumas respostas dos alunos.

**Figura 14** - Algumas resposta acerca da questão 6 do questionário 1



Fonte: Autor (2024)

Alguns alunos, entretanto, responderam que é possível determinar a quantidade de triângulos, o que sinaliza uma ideia confusa de infinito. Segundo Almeida, Silva e Vertuan (2012), uma atividade de modelagem matemática pode envolver a investigação de propriedades que nem sempre são imediatas, como no caso das iterações infinitas do Triângulo de Sierpinski. Embora seja possível calcular a quantidade de triângulos para uma iteração específica e determinar uma equação para uma iteração  $n$  qualquer, é impossível determinarmos numericamente qual é a última iteração e, conseqüentemente, a quantidade de triângulos, que aumenta iterativamente.

Em relação à questão 7, os alunos compreenderam que não é possível determinar um perímetro final, pois o processo de subdivisão do Triângulo de Sierpinski é infinito. A cada iteração o perímetro aumenta, e como o número de iterações não tem fim, o perímetro total tende ao infinito, como mostram as respostas da Figura 15.

**Figura 15** - Algumas resposta acerca da questão 7 do questionário 1

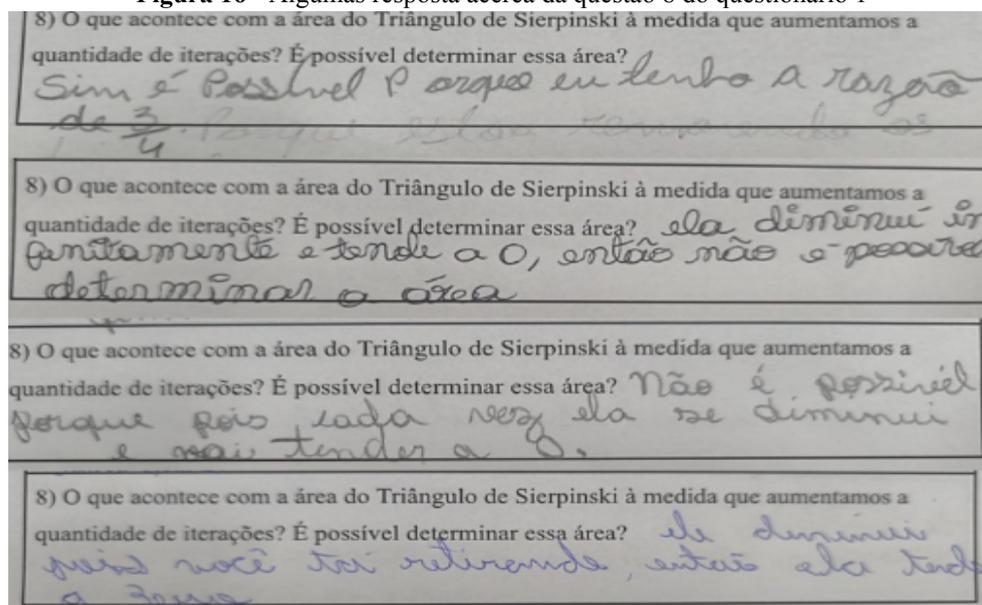
7) O que acontece com o perímetro do Triângulo de Sierpinski à medida que aumentamos a quantidade de iterações? É possível determinar esse perímetro? Não é possível porque ele continua se dividindo infinitamente.
7) O que acontece com o perímetro do Triângulo de Sierpinski à medida que aumentamos a quantidade de iterações? É possível determinar esse perímetro? ele não tem o valor de iterações. É possível com a calculadora.
7) O que acontece com o perímetro do Triângulo de Sierpinski à medida que aumentamos a quantidade de iterações? É possível determinar esse perímetro? Não é possível porque ele continua se dividindo sem fim.
7) O que acontece com o perímetro do Triângulo de Sierpinski à medida que aumentamos a quantidade de iterações? É possível determinar esse perímetro? Não vamos conseguir porque a medida de iterações sempre aumenta.

**Fonte:** Autor (2024)

Segundo Almeida, Silva e Vertuan (2012), esse tipo de análise, que envolve uma progressão infinita, exige uma compreensão de como modelos matemáticos podem seguir em direção ao infinito sem atingir um valor finito. O comportamento do parâmetro nesse contexto se alinha ao conceito de divergência, no qual as grandezas começam a aumentar indefinidamente conforme o processo se repete. Assim, o entendimento dos alunos sobre o aumento contínuo do perímetro ilustra a aplicação da modelagem matemática ao lidar com características que não têm um limite definido, mas que seguem um padrão de crescimento ou expansão sem fim.

Finalmente, para a questão 8, as respostas dos alunos indicam uma nova interpretação em relação ao infinito. Diferentemente da quantidade de triângulos e do perímetro, que aumentam iterativamente, como mostram as respostas dos alunos às duas questões anteriores, a área do Triângulo de Sierpinski se torna cada vez menor, à medida que aumenta a quantidade de iterações, aproximando-se cada vez mais a zero. Porém, aqui observamos uma reflexão parecida com a realizada em relação ao Paradoxo de Zenão, embora a área continue reduzindo a cada iteração, se aproximando de zero, ela sempre será reduzida à quarta parte, nunca chegando a zero. A Figura 16 apresenta algumas respostas dadas pelos alunos.

Figura 16 - Algumas resposta acerca da questão 8 do questionário 1



Fonte: Autor (2024)

A maioria dos alunos indicou a impossibilidade de determinar um valor para essa área, embora reconheceram que a área tende a zero. Alguns alunos afirmaram ser possível determiná-la, uma vez que ela reduz a uma razão  $\frac{3}{4}$ . Embora essa informação esteja correta, só é possível utilizá-la sabendo da área na iteração anterior. Embora com alguns equívocos, os alunos conseguiram interpretar o comportamento da área do Triângulo de Sierpinski.

Em uma análise geral sobre as respostas dos questionários, pode-se dizer que ele funcionou bem como instrumento avaliativo e interpretativo das resoluções empreendidas. Através dele, os alunos tiveram a oportunidade de expor seus procedimentos e comunicar resultados, validando seus modelos e respostas. Além disso, contribuiu com uma sistematização das características do Triângulo de Sierpinski.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com o objetivo de investigar *como a modelagem matemática pode auxiliar no ensino do fractal Triângulo de Sierpinski*, algumas investigações a respeito de perímetro e área foram propostas a 66 alunos de dois 9º anos do Ensino Fundamental.

Embora não se trate de uma situação cotidiana, como geralmente se investiga em uma atividade de modelagem matemática, o fractal Triângulo de Sierpinski viabiliza a análise de comportamentos iterativos, que podem ser descritos por meio de modelos matemáticos.

Nesse contexto, assim como em atividades de modelagem, foi preciso que os alunos se inteirassem com as situações, no caso, que compreendessem as características relativas aos processos de construção dos fractais, para que (re)conhecessem informações necessárias para a matematização, ou seja, a interpretação matemática da situação.

Nessa fase, de matematização, algumas informações relevantes foram tomadas como hipóteses, que guiaram as resoluções, como por exemplo, a quantidade de triângulos  $T_n$  é triplicada a cada iteração  $n$ , ou ainda, a cada iteração  $n$  a área  $A_n$  reduz-se a uma razão  $\frac{3}{4}$ , etc. Essas hipóteses determinaram como escrever e abordar a situação matematicamente -  $T_n = 3^n \cdot T_0$ ,  $n \geq 0$  no primeiro caso, e  $A_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n A_0$ ,  $n \geq 0$  no segundo caso -, seja por meio de métodos de recorrência, soma de progressões ou séries geométricas.

Outrossim, durante as atividades foram exploradas as características fundamentais dos fractais de forma interativa e investigativa. A autossemelhança foi abordada a partir da construção do Triângulo de Sierpinski, permitindo que os alunos observassem como cada parte menor reproduzia a estrutura do todo, independentemente da escala. A complexidade infinita foi trabalhada ao longo das iterações, destacando como o processo de subdivisão se repete continuamente, gerando padrões cada vez mais detalhados sem nunca alcançar um ponto final. Por fim, a noção de dimensão fractal foi introduzida a partir da comparação com figuras da geometria euclidiana, levando os alunos a refletirem sobre como o Triângulo de Sierpinski ocupa um espaço intermediário entre uma linha e um plano. Essa abordagem possibilitou uma compreensão mais intuitiva dos fractais, tornando um conceito abstrato mais acessível por meio da experimentação e da observação direta.

Vale ressaltar que os conteúdos abordados estão de acordo com as indicações curriculares para aquela série, porém, fornecem subsídios para a construção de uma noção

intuitiva que mais tarde pode ser formalizada, corroborando com a ideia de currículo em espiral, vigente na Educação Básica, cujos conceitos são apresentados, retomados e aprofundados ao longo das séries escolares.

Assim, essas abordagens viabilizaram a construção de modelos matemáticos, que além de descrever o comportamento dos atributos analisados, permitiram reflexões quanto ao significado de infinito, apresentando interpretações diferentes daquelas que geralmente são apresentadas em sala de aula com o estudo da Geometria Euclidiana. Isto é, mostrou que mesmo reduzindo o comprimento do lado dos triângulos, o perímetro pode se tornar cada vez maior, tendendo ao infinito, ou, por outro lado, que mesmo com infinitas iterações a área pode se tornar cada vez menor, tendendo a zero.

A inspiração, ou até mesmo fundamentação, em procedimentos da modelagem matemática, portanto, pode subsidiar uma abordagem estruturada que pode auxiliar na compreensão e análise de características dos fractais.

No que se refere aos alunos, nossa análise revelou que muitos participantes não estavam habituados a realizar atividades que envolvessem a modelagem matemática para a generalização de padrões, como proposto nas atividades práticas com os fractais de Sierpinski. Para eles, construir e interpretar modelos que representassem padrões matemáticos parecia algo fora do comum, o que inicialmente gerou dificuldades em conectar aspectos visuais com conceitos mais abstratos, como iteração, ou complexidade infinita, e autossimilaridade.

Dessa forma, ao propor atividades investigativas e colaborativas, centradas na construção e análise de fractais, foi possível incentivar o desenvolvimento de habilidades cognitivas complexas, como a visualização espacial, o raciocínio lógico, a resolução de problemas e a capacidade de abstração. A análise dos dados revelou que os alunos foram capazes de construir modelos matemáticos para representar, descrever, explicar e até mesmo fazer “previsões” associadas ao Triângulo de Sierpinski, utilizando conceitos de geometria, álgebra e aritmética. Além disso, os estudantes apresentaram interesse e engajamento nas atividades propostas, o que sugere que a modelagem matemática pode ser uma estratégia pertinente para abordar os fractais, como sugere a abordagem do Triângulo de Sierpinski.

Outrossim, a utilização de fractais, como o Triângulo de Sierpinski, como objeto de estudo, proporcionou um contexto rico para a exploração de conceitos matemáticos importantes, como perímetro, área e volume (no caso do Cartão Fractal Triângulo de Sierpinski, que não foi analisado neste TCC), atribuindo a eles uma interpretação diferente da

que se costuma dar em sala de aula ou de acordo com orientações curriculares e abordagens presentes em livros e materiais didáticos.

A construção dos fractais, de forma manipulativa, aliada à resolução de problemas desafiadores, favoreceu uma compreensão intuitiva desses conceitos, a partir da identificação de padrões e regularidades. Os resultados obtidos indicam que a modelagem matemática subsidiou o desenvolvimento de ações que contribuíram para as análises desejadas.

A modelagem matemática se mostrou, portanto, como alternativa pedagógica que alia rigor acadêmico à criatividade e à exploração de conceitos de forma inovadora. O sucesso dessa integração, contudo, está condicionado a uma mudança de paradigma na prática docente, que deve priorizar o engajamento dos alunos e a contextualização dos conteúdos. Assim, com este trabalho, esperamos contribuir para a reflexão sobre como a modelagem matemática pode ser inserida no ensino de fractais e incorporada como estratégia para a abordagem de conteúdos na Educação Básica.

## REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, L. M. W.; VERTUAN, R. E. Discussões sobre “como fazer” Modelagem Matemática na sala de aula. In: ALMEIDA, L. M. W.; ARAÚJO, J. L.; BISOGNIN, E. (Orgs.). **Práticas de Modelagem Matemática na Educação Matemática**: relatos de experiências e propostas pedagógicas. Londrina: Eduel, 2011. p. 19-43.
- ALMEIDA, L.M.W.; SILVA, K. P; VERTUAN, R. E. **Modelagem matemática na educação básica**. São Paulo: Contexto, 2012.
- ALMEIDA, L. M. W., & da SILVA, K. A. P. (2015). Práticas de professores com Modelagem Matemática: Algumas configurações. **Educação Matemática em Revista**, 06-15.
- ALMEIDA, L. M. W., & DIAS, M. R. (2004). Um estudo sobre o uso da Modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem. **Bolema**: Boletim de Educação Matemática, 17(22), 19-35.
- ALVES, M. A. J. **O método nas ciências naturais e sociais**: pesquisa quantitativa e qualitativa. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2001.
- ASSIS, T. A.; MIRANDA, J. G. V.; MOTA, F. B.; ANDRADE, R. F. S.; CASTILHO, C. M. C. Geometria fractal: propriedades e características de fractais ideais. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, São Paulo, v. 30, n. 2, p. 2304-1–2304-10, 2008.
- BARBOSA, J. C. Modelagem Matemática: O que é? Por que? Como? **Veritati**, Salvador, n. 4, p. 73-80, 2004.
- BARBOSA, J. C. Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 24., 2001, Caxambu. **Anais...** Rio Janeiro: ANPED, 2001.
- BARBOSA, J. C. O que pensam os professores sobre Modelagem matemática? **Zetetiké**, Campinas, v. 7, n. 11, p. 67-85, 1999.
- BARBOSA, J. L. M. **Geometria euclidiana plana**. 10. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.
- BARBOSA, R. M. **Descobrendo a Geometria Fractal para a sala de aula**. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.
- BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. Lisboa: Edições 70, 1977.
- BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática**: uma nova estratégia. São Paulo: Contexto, 2002.
- BEMFICA, A.; ALVES, C. Fractais: progressão e série geométrica, uma metodologia de ensino. **Revista modelos**, Osório, v. 1, n. 1, p. 6-25, ago. 2011.
- BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem matemática no ensino**. 5. ed. São Paulo: Contexto, 2011.

BLOMHIJ, M.; JENSEN, T. H. Developing mathematical modelling competence: conceptual clarification and educational planning. **Teaching Mathematics and its Applications**, Oxford, v. 22, n. 3, p. 123-139, set. 2003.

BLOMHØJ, M. Modelling Competency: Teaching, Learning and Assessing Competency - Overview. In: KAISER G. et al. (eds). **Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling**. Dordrecht: Springer, 2011. p. 343-347.

Blum, W., & Niss, M. (1991). Resolução de problemas matemáticos aplicados, modelagem, aplicações e links para outros assuntos — Estado, tendências e questões na instrução matemática. **Estudos educacionais em matemática**, 22 (1), 37-68.

CAPRA, F. **A teia da vida**: uma nova compreensão científica dos sistemas vivos. São Paulo: pensamento-Cultrix, 1996.

CARVALHO, H. C. **Geometria fractal**: perspectivas e possibilidades no ensino da matemática. 2005. 101 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Universidade Federal do Pará, Belém, 2005.

COLÉGIO ESTADUAL SENADOR ATTÍLIO FONTANA. **Projeto Político Pedagógico – 2023**. Toledo: CESAF, 2023.

FALCONER, K. J. **The Geometry of Fractal Sets**. Cambridge: Cambridge university press, 1985.

FRACTAL SCIENCE. A aplicação da ciência fractal em nossas vidas. **Fractal Science**, [s.d.]. Disponível em: <https://fractalscience.org/a-aplicacao-da-ciencia-fractal-em-nossas-vidas/>. Acesso em: 26 fev. 2025.

GOMES, A. N. **Uma proposta de ensino envolvendo geometria fractal para o estudo de semelhança de figuras planas**. 2010. 230 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2010.

JANOS, M. **Geometria fractal**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2008.

LORENZATO, S. Por que não ensinar geometria? Educação Matemática em Revista, Blumenau, v. 3, n. 4, p. 3-13, 1995.

LUDKE, M; ANDRÉ, M. **Pesquisa em educação**: abordagens qualitativas. Rio de Janeiro: EPU, 2014.

MAASS, K.; SORGE, S.; ROMERO-ARIZA, M.; HESSE, A.; STRASER, O. Promoting Active Citizenship in Mathematics and Science Teaching. **International Journal of Science and Mathematics Education**, Taiwan, v. 20, p. 727–746, 2022.

MANDELBROT, B. P. **Objectos Fractais**. Lisboa: Gradiva, 1989.

MARTINS, E. B; PEREIRA, A. C. C; FONSECA, P. H. S. Redescobrimo o conceito de logaritmo por meio da construção da régua de cálculo linear. **Revista eletrônica debates em educação científica e tecnológica**, Ponta Grossa, v. 6, n. 3, p.85-100, 2016.

MENDES, R. M.; MISKULIN, R. G. S. A análise de conteúdo como uma metodologia. **Cadernos de Pesquisa**, São Paulo, v. 47, n. 165, p. 1044-1066, 2017.

NASCIMENTO, M.; SILVA, S. C. R.; MACIEL, N. A. Uma proposta didática para o ensino de geometria fractal em sala de aula na educação básica. **Vidya**, Santa Maria, v. 32, n. 2, p. 113-132, jul./dez., 2012.

NUNES, R. S. R. **Geometria fractal e aplicações**. 2006. 78 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Departamento de matemática pura, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, Cidade do Porto, 2006.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. Diretoria de Políticas e Programas Educacionais. **Documento Curricular do Paraná: Ensino Fundamental**. Curitiba: SEED, 2018.

RABAY, Y. S. F. **Estudo e aplicações da Geometria Fractal**. 2013. 89 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2013.

RÊGO, R. M; RÊGO, R. G. Desenvolvimento e uso de materiais didáticos no ensino de matemática. In: LORENZATO, S. (Org.). **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. Campinas: Autores Associados, 2006.

SCHEFFER, N. F. **O Encontro da Educação Matemática com a Pedagogia de Freinet**. 1995. 275 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, 1995.

SCHMIDT, L. M.; RIBAS, M. H.; CARVALHO, M. A. A prática pedagógica como fonte de conhecimento. **Olhar de Professor**, Ponta Grossa, v. 1, n. 1, p. 9-23, 1998.

SCHRENK, M. J; VERTUAN, R. E. Modelagem Matemática como prática pedagógica: uma possível caracterização em Educação Matemática. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 24, n. 1, p. 194-224, 2022.

VARGAS, C. V. **O ensino e a aprendizagem da progressão aritmética através da resolução de problemas**. 2019. 138 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Ensino de Física) – Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2019.

## **APÊNDICES**

APÊNDICE A - TABELA NÃO PREENCHIDA COM O ESTUDO DA ÁREA DO TRIÂNGULO DE SIERPINSKI

Tabela 01 não preenchida - Estudo da área do Triângulo de Sierpinski

Iteração	Desenho	Quantidade de triângulos não-coloridos	Área de cada triângulo não-colorido	Área total dos triângulos não-coloridos
0				
1				
2				
3				
...	...	...	...	...
n				

Fonte: Próprio autor (2024)

APÊNDICE B - TABELA PREENCHIDA COM O ESTUDO DA ÁREA DO TRIÂNGULO DE SIERPINSKI

Tabela 01 preenchida - Estudo da área do Triângulo de Sierpinski

Iteração	Desenho	Quantidade de triângulos não-coloridos	Área de cada triângulo não-colorido	Área total dos triângulos não-coloridos
0		$3^0 = 1$	$\frac{l^2\sqrt{2}}{4}$	$1 \cdot \frac{l^2\sqrt{2}}{4}$
1		$3^1 = 3$	$\frac{l^2\sqrt{2}}{4^2}$	$3^1 \cdot \frac{l^2\sqrt{2}}{4}$
2		$3^2 = 9$	$\frac{l^2\sqrt{2}}{4^3}$	$3^2 \cdot \frac{l^2\sqrt{2}}{4}$
3		$3^3 = 27$	$\frac{l^2\sqrt{2}}{4^4}$	$3^3 \cdot \frac{l^2\sqrt{2}}{4}$
...	...	...	...	...
n	Triângulo de Sierpinski	$3^n$	$\frac{l^2\sqrt{2}}{4} \left(\frac{1}{4}\right)^n$	$\frac{l^2\sqrt{2}}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^n$

Fonte: Próprio autor (2024)

## APÊNDICE C - TABELA NÃO PREENCHIDA COM O ESTUDO DO PERÍMETRO DO TRIÂNGULO DE SIERPINSKI

Tabela 02 não preenchida - Perímetro do Triângulo de Sierpinski

<b>Iteração</b>	<b>Desenho</b>	<b>Comprimento do lado de cada triângulo não-colorido</b>	<b>Perímetro de cada triângulo não-colorido</b>	<b>Perímetro total dos triângulos não-coloridos</b>
0				
1				
2				
3				
...	...	...	...	...
n				

Fonte: Próprio autor (2024)

APÊNDICE D - TABELA PREENCHIDA COM O ESTUDO DO PERÍMETRO DO TRIÂNGULO DE SIERPINSKI

Tabela 02 preenchida - Perímetro do Triângulo de Sierpinski

Iteração	Desenho	Comprimento do lado de cada triângulo não-colorido	Perímetro de cada triângulo não-colorido	Perímetro total dos triângulos não-coloridos
0		$l$	$3.l$	$3.l$
1		$\frac{l}{2}$	$3. \frac{l}{2}$	$\frac{3^2 l}{2}$
2		$(\frac{l}{2})^2$	$3. (\frac{l}{2})^2$	$\frac{3^3 l}{2^2}$
3		$(\frac{l}{2})^3$	$3. (\frac{l}{2})^3$	$\frac{3^4 l}{2^3}$
...	...	...	...	...
n	Triângulo de Sierpinski	$(\frac{l}{2})^n$	$3. (\frac{l}{2})^n$	$3l. (\frac{3}{2})^n$

Fonte: Próprio autor (2024)

## APÊNDICE E - TABELA NÃO PREENCHIDA COM O ESTUDO DA PIRÂMIDE DE SIERPINSKI

Tabela 03 não preenchida - Pirâmide de Sierpinski

<b>Iterações</b>	<i>Número de paralelepípedos novos</i>	<i>Volume do novo paralelepípedo</i>
0		
1		
2		
3		
....	....	....
<b>n</b>		

Fonte: Próprio autor (2024)

APÊNDICE F - TABELA PREENCHIDA COM O ESTUDO DA PIRÂMIDE DE SIERPINSKI

Tabela 03 preenchida - Pirâmide de Sierpinski

<b>Iterações</b>	<b><i>Número de paralelepípedos novos</i></b>	<b><i>Volume do novo paralelepípedo</i></b>
0	1	$\frac{a^3}{2^2}$
1	3	$\frac{a^3}{2^5}$
2	9	$\frac{a^3}{2^8}$
3	27	$\frac{a^3}{2^{11}}$
....	....	....
<b>n</b>	$3^n$	$\frac{a^3}{2^{3n+2}}$

Fonte: Próprio autor (2024)

APÊNDICE G - TABELA PREENCHIDA COM O ESTUDO DO TAPETE DE SIERPINSKI

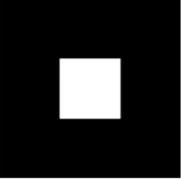
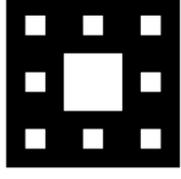
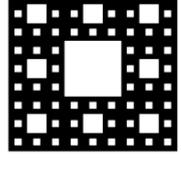
Tabela 04 não preenchida - Área e Perímetro do Tapete de Sierpinski

<b>Iteração</b>	<b>Desenho</b>	<b>Número de quadradinhos retirados</b>	<b>Lado do quadrado</b>	<b>Área de cada quadrado não-colorido</b>	<b>Perímetro de cada quadrado não-colorido</b>
<b>0</b>					
<b>1</b>					
<b>2</b>					
<b>3</b>					
<b>...</b>	<b>...</b>	<b>...</b>	<b>...</b>	<b>...</b>	<b>...</b>
<b>n</b>					

Fonte: Próprio autor (2024)

APÊNDICE H - TABELA PREENCHIDA COM O ESTUDO DO TAPETE DE SIERPINSKI

Tabela 04 preenchida - Área e Perímetro do Tapete de Sierpinski

Iteração	Desenho	Número de quadrados retirados	Lado do quadrado	Área de cada quadrado não-colorido	Perímetro de cada quadrado não-colorido
0		0	$L$	$L^2$	$4L$
1		1	$\frac{L}{3}$	$L^2 - \left(\frac{L}{3}\right)^2 = \frac{8L^2}{9}$	$4\frac{L}{3} = \frac{4L}{3}$
2		8	$\frac{L}{9}$	$\frac{8L^2}{9} - \left(\frac{L}{9}\right)^2 = \frac{64L^2}{81}$	$4\frac{L}{9} = \frac{4L}{9}$
3		64	$\frac{L}{27}$	$\frac{64L^2}{81} - \left(\frac{L}{27}\right)^2 = \frac{512L^2}{729}$	$4\frac{L}{27} = \frac{4L}{27}$
...	...	...	...	...	...
<b>n</b>	<b>Tapete de Sierpinski</b>	$8^{n-1}$	$\frac{L}{3^n}$	$\left(\frac{8}{9}\right)^n L^2$	$4\left(\frac{L}{3^n}\right)$

Fonte: Próprio autor (2024)

## APÊNDICE I - QUESTIONÁRIO SOBRE O TRIÂNGULO DE SIERPINSKI

**Questionário 01 : Perguntas sobre Triângulo de Sierpinski**

1) Quais conteúdos matemáticos você conseguiu identificar na construção do Triângulo de Sierpinski?

2) É possível continuar a construção do triângulo de Sierpinski? Se sim, mais quantas iterações você acredita ser possível? Se não, explique o porquê.

3) Qual é a razão entre as quantidades de triângulos não-coloridos a cada iteração?

4) Qual é a razão entre os perímetros de cada triângulo não-colorido a cada iteração?

5) Qual é a razão entre as áreas de cada triângulo não-colorido a cada iteração?

6) O que acontece com a quantidade total de triângulos não-coloridos do Triângulo de Sierpinski à medida que aumentamos a quantidade de iterações? É possível determinar essa quantidade?

7) O que acontece com o perímetro do Triângulo de Sierpinski à medida que aumentamos a quantidade de iterações? É possível determinar esse perímetro?

8) O que acontece com a área do Triângulo de Sierpinski à medida que aumentamos a quantidade de iterações? É possível determinar essa área?

**Fonte: Próprio autor (2024)**

APÊNDICE J - QUESTIONÁRIO SOBRE O TRIÂNGULO DE SIERPINSKI  
PREENCHIDO

**Questionário 01: Perguntas sobre Triângulo de Sierpinski respondidas**

1) Quais conteúdos matemáticos você conseguiu identificar na construção do Triângulo de Sierpinski?

Os conteúdos matemáticos presentes são geometria fractal, área, perímetro, semelhança de triângulos, razão e proporção.

2) É possível continuar a construção do triângulo de Sierpinski? Se sim, mais quantas iterações você acredita ser possível? Se não, explique o porquê.

Sim, é possível continuar a construção indefinidamente, pois cada nova iteração se baseia em uma subdivisão do triângulo anterior.

3) Qual é a razão entre as quantidades de triângulos não-coloridos a cada iteração?

Cresce em uma progressão geométrica de razão 3.

4) Qual é a razão entre os perímetros de cada triângulo não-colorido a cada iteração?

Cada novo triângulo não colorido que surge a cada iteração é semelhante aos triângulos das iterações anteriores, mas tem lados com  $\frac{1}{2}$  dos triângulos anteriores não coloridos. Logo reduzindo  $\frac{1}{2}$  a cada iteração.

5) Qual é a razão entre as áreas de cada triângulo não-colorido a cada iteração?

A área de cada triângulo não colorido em cada nova iteração é de  $\frac{1}{2}$  da área do triângulo não colorido na iteração anterior. Isso ocorre por que ao reduzir o lado do triângulo pela metade, a área reduz a um fator de  $(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$ .

6) O que acontece com a quantidade total de triângulos não-coloridos do Triângulo de Sierpinski à medida que aumentamos a quantidade de iterações? É possível determinar essa quantidade?

Temos um aumento exponencial visto que:  $3^0 + 3^1 + 3^2 \dots 3^{n-1}$ , com  $n \rightarrow \infty$

7) O que acontece com o perímetro do Triângulo de Sierpinski à medida que aumentamos a quantidade de iterações? É possível determinar esse perímetro?

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 3L\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \text{ com } n \geq 0$$

8) O que acontece com a área do Triângulo de Sierpinski à medida que aumentamos a quantidade de iterações? É possível determinar essa área?

A área do triângulo de Sierpinski diminui a cada iteração, pois a cada nova iteração remove-se o triângulo central não. Gerando uma razão de  $\frac{3}{4}$ , logo é possível.

**Fonte: Próprio autor (2024)**

## APÊNDICE K - QUESTIONÁRIO SOBRE O TAPETE DE SIERPINSKI

## Questionário 02 - Perguntas sobre Tapete de Sierpinski

1) Quais conteúdos matemáticos você conseguiu identificar na construção do Tapete de Sierpinski?

2) É possível continuar a construção do Tapete de Sierpinski? Se sim, mais quantas iterações você acredita ser possível? Se não, explique o porquê.

3) Qual é a razão entre as quantidades de quadrados não-coloridos a cada iteração?

4) Qual é a razão entre os perímetros de cada quadrado não-colorido a cada iteração?

5) Qual é a razão entre as áreas de cada quadrado não-colorido a cada iteração?

6) O que acontece com o perímetro do Tapete de Sierpinski à medida que aumentamos a quantidade de iterações? É possível determinar esse perímetro?

7) O que acontece com a área do Tapete de Sierpinski à medida que aumentamos a quantidade de iterações? É possível determinar essa área?

Fonte: Próprio autor (2024)

## APÊNDICE L - QUESTIONÁRIO SOBRE O TAPETE DE SIERPINSKI PREENCHIDO

### Questionário 02 - Perguntas respondidas sobre Tapete de Sierpinski

1) Quais conteúdos matemáticos você conseguiu identificar na construção do Tapete de Sierpinski?

Os conteúdos matemáticos presentes são geometria fractal, área, perímetro, semelhança, razão e proporção, potenciação e mínimo múltiplo comum.

2) É possível continuar a construção do Tapete de Sierpinski? Se sim, mais quantas iterações você acredita ser possível? Se não, explique o porquê.

Sim, é possível continuar a construção do tapete de Sierpinski infinitamente.

3) Qual é a razão entre as quantidades de quadrados não-coloridos a cada iteração?

A cada iteração o número de quadrados não coloridos aumenta a uma razão de 8.

4) Qual é a razão entre os perímetros de cada quadrado não-colorido a cada iteração?

A razão é  $\frac{1}{3}$ , visto que em cada iteração temos a divisão do quadrado em 9 quadrados e se retira o central.

5) Qual é a razão entre as áreas de cada quadrado não-colorido a cada iteração?

Como em cada iteração o lado do meu quadrado é dividido em uma razão de  $\frac{1}{3}$  do anterior, a área de cada novo quadrado é dada pela razão  $(\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{9}$  do quadrado anterior.

6) O que acontece com o perímetro do Tapete de Sierpinski à medida que aumentamos a quantidade de iterações? É possível determinar esse perímetro?

Tende ao infinito, não sendo possível calcular o perímetro em virtude que estamos cada vez adicionando mais lados a cada iteração.

7) O que acontece com a área do Tapete de Sierpinski à medida que aumentamos a quantidade de iterações? É possível determinar essa área?

Em um número infinito de iterações a área tende a 0, mesmo que a estrutura como fractal exista.

## APÊNDICE M - QUESTIONÁRIO SOBRE A PIRÂMIDE DE SIERPINSKI

**Questionário 03 - Perguntas sobre a Pirâmide de Sierpinski**

1) Quais conteúdos matemáticos você conseguiu identificar na construção do Cartão Fractal Pirâmide de Sierpinski?
2) É possível continuar a construção do Cartão Fractal Pirâmide de Sierpinski? Se sim, mais quantas iterações você acredita ser possível? Se não, explique o porquê.
3) Qual é a razão entre as quantidades de paralelepípedos a cada iteração?
4) Qual é a razão entre os volumes dos novos paralelepípedos a cada iteração?
5) O que acontece com a quantidade de paralelepípedos à medida que aumenta o número de iterações? É possível definir a quantidade de paralelepípedos para a iteração $n$ ?
6) Você consegue observar alguma relação de simetria na disposição dos paralelepípedos em cada iteração? De qual tipo?
7) O que acontece com a aparência geral da Pirâmide de Sierpinski à medida que aumentamos as iterações?

Fonte: Próprio autor (2024)

## APÊNDICE N - QUESTIONÁRIO SOBRE A PIRÂMIDE DE SIERPINSKI PREENCHIDO

### Questionário 03 - Perguntas com respostas sobre a Pirâmide de Sierpinski

<p>1) Quais conteúdos matemáticos você conseguiu identificar na construção do Cartão Fractal Pirâmide de Sierpinski?</p> <p>Os conteúdos matemáticos presentes são geometria fractal, volume, semelhança, razão e proporção.</p>
<p>2) É possível continuar a construção do Cartão Fractal Pirâmide de Sierpinski? Se sim, mais quantas iterações você acredita ser possível? Se não, explique o porquê.</p> <p>Sim, são possíveis infinitas iterações.</p>
<p>3) Qual é a razão entre as quantidades de paralelepípedos a cada iteração?</p> <p>A quantidade de paralelepípedos aumenta em uma progressão geométrica de razão 4.</p>
<p>4) Qual é a razão entre os volumes dos novos paralelepípedos a cada iteração?</p> <p>Como temos uma divisão de cada novo paralelepípedo em quatro partes menores, logo a razão é <math>\frac{1}{4}</math>.</p>
<p>5) O que acontece com a quantidade de paralelepípedos à medida que aumenta o número de iterações? É possível definir a quantidade de paralelepípedos para a iteração n?</p> <p>Temos um aumento do número de paralelepípedos a cada nova iteração dado por <math>3^n</math>, logo conseguimos definir a quantidade para n-ésima iteração.</p>
<p>6) Você consegue observar alguma relação de simetria na disposição dos paralelepípedos em cada iteração? De qual tipo?</p> <p>Sim, é possível observar uma simetria de reflexão e rotação dos paralelepípedos, pois a cada iteração é dividido em partes iguais que se repetem em torno do eixo central.</p>
<p>7) O que acontece com a aparência geral da Pirâmide de Sierpinski à medida que aumentamos as iterações?</p> <p>Torna-se mais complexo à medida que vamos tendo mais iterações. Sendo um fractal com autossimilaridade, onde cada parte menor do fractal se parece com o todo.</p>

Fonte: Próprio autor (2024)