UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

MATHEUS GARCIA DE ARAUJO

TEORIA DA MEDIDA E CRITÉRIO DE LEBESGUE PARA RIEMANN-INTEGRABILIDADE

CURITIBA

2023

MATHEUS GARCIA DE ARAUJO

TEORIA DA MEDIDA E CRITÉRIO DE LEBESGUE PARA RIEMANN-INTEGRABILIDADE

Measure Theory and Lebesgue Criterion for Riemann-Integrability

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação apresentado como requisito para obtenção do título de Licenciatura em Licenciatura em Matemática do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. André Fabiano Steklain Lisbôa

CURITIBA

2023

MATHEUS GARCIA DE ARAUJO

TEORIA DA MEDIDA E CRITÉRIO DE LEBESGUE PARA RIEMANN-INTEGRABILIDADE

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação apresentado como requisito para obtenção do título de Licenciatura em Licenciatura em Matemática do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Data de aprovação: 29/junho/2023

André Fabiano Steklain Lisbôa
Doutorado
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Júlio César Santos Sampaio
Doutorado
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Christian Manuel Surco Chuño
Doutorado
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

CURITIBA
2023

Dedico este trabalho a minha mãe, por
acreditar em mim.

AGRADECIMENTOS

Fico genuinamente grato a todas as pessoas que foram fundamentais para o sucesso do meu trabalho de conclusão de curso. Em primeiro lugar, gostaria de agradecer ao meu amigo Luiz Pedro Palácio Daniel, cuja amizade e apoio constante foram verdadeiros pilares ao longo dessa jornada. Foi com imensa felicidade que compartilhamos risos, desafios e momentos de superação juntos, fortalecendo nossa amizade ao longo do tempo.

Além disso, agradeço aos vários outros amigos que estiveram presentes, oferecendo suporte, compartilhando conhecimentos e incentivando meu crescimento acadêmico. Cada um de vocês trouxe uma perspectiva única e enriquecedora para as discussões e trabalhos em equipe, tornando essa jornada ainda mais rica e significativa.

Zelo imensamente pelo apoio e suporte incondicional da minha família durante toda essa trajetória acadêmica. Obrigado por estarem sempre presentes, por me ouvirem, me encorajarem e me darem forças nos momentos mais desafiadores. Vocês foram minha fonte de inspiração e motivação, e sou grato por ter uma família tão amorosa e dedicada.

Obrigado, de coração, ao meu orientador, Professor Doutor André Fabiano Steklain Lisboa, por seu comprometimento e orientação ao longo deste trabalho. Sua sabedoria, expertise e paciência foram fundamentais para o desenvolvimento do meu projeto. Sou grato pelas discussões estimulantes, pelos conselhos valiosos e pela confiança depositada em mim ao longo de todo o processo.

Luto para expressar minha profunda gratidão a cada uma dessas pessoas. Seja pela amizade, pelo suporte familiar, pelas contribuições dos amigos ou pela orientação do meu professor, cada um desempenhou um papel essencial em minha jornada acadêmica. Esse momento de conclusão representa não apenas uma conquista pessoal, mas também uma celebração do apoio, amor e dedicação de cada um de vocês. Obrigado por fazerem parte dessa trajetória e por tornarem este momento inesquecível.

RESUMO

Este trabalho de conclusão de curso abordou conceitos importantes da teoria da medida e seu uso na teoria da integração. Foram explorados tópicos como medida, medida de Lebesgue, teoria de integração de Lebesgue, conjunto de medida zero, descontinuidade, critério de Lebesgue para Riemann integrabilidade e teorema da convergência monótona. A pesquisa enfatizou a relevância desses conceitos para a compreensão da integração de funções e a relação entre os métodos de Lebesgue e Riemann. Em particular, o critério de Lebesgue para Riemann integrabilidade foi investigado como uma condição necessária e suficiente para a existência da integral de Riemann em determinadas funções. O estudo contribuiu para o aprofundamento do conhecimento teórico nessa área e ampliou a compreensão das diferentes abordagens de integração em análise matemática.

Palavras-chave: integral; lebesgue; riemann; medida.

ABSTRACT

The thesis addressed important concepts in measure theory and their application in the theory of integration. Topics such as measure, Lebesgue measure, Lebesgue integration theory, set of measure zero, discontinuity, Lebesgue criterion for Riemann integrability, and the monotone convergence theorem were explored. The research emphasized the relevance of these concepts for understanding the integration of functions and the relationship between Lebesgue and Riemann methods. In particular, the Lebesgue criterion for Riemann integrability was investigated as a necessary and sufficient condition for the existence of the Riemann integral in certain functions. The study contributed to deepening theoretical knowledge in this field and expanded the understanding of different approaches to integration in mathematical analysis.

Keywords: integrate; lebesgue; riemann; measure.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Integral de Riemann **34**

Figura 2 – Integral de Lebesgue $\sqrt{x}$ **34**

Figura 3 – Integral de Lebesgue $sen(x)$ **35**

Figura 4 – Comparação Riemann e Lebesgue **35**

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 9

2 EMBASAMENTO TEÓRICO PRELIMINAR 11

2.1 Reais Estendidos 11

2.2 Algebra e σ-Algebra 11

2.3 Funções mensuráveis 13

2.4 Medida 16

2.5 Medida de Lebesgue 16

2.5.1 Medida Exterior 17

3 INTEGRAÇÃO 19

3.1 Teoria de integração de Lebesgue 19

3.2 Conjunto de Medida Zero 21

3.3 Descontinuidades 23

3.3.1 Tipos de Descontinuidades 23

3.3.2 Oscilação de uma função 24

4 APLICAÇÕES 27

4.1 Critério de Lebesgue para Riemann-Integrabilidade 27

4.2 Função Lebesgue integrável 29

4.3 Teorema de Convergência 30

5 REPRESENTAÇÕES GRÁFICAS 34

6 CONCLUSÃO 36

REFERÊNCIAS 37

1 INTRODUÇÃO

O estudo de integração é uma das principais ferramentas da análise matemática, permitindo o calculo de áreas, volumes, bem como outras quantidades em diversas aplicações. Duas das principais teorias de integração são as integrais de Riemann e as integrais de Lebesgue. Ambas são utilizadas para calcular a área sob uma curva mas diferem em seus conceitos fundamentais e condições de aplicação. **Neste trabalho iremos estudar a integral de Lebesgue para uma função real, ou seja na reta.**

Para esse estudo foi escolhido como principais referências o livro "The Elements of Integration and Lebesgue Measure” de (BARTLE, 1995) e o trabalho "Uma condição necessária e suficiente para integrabilidade de uma função real” de (GOMES; CARDONA, 2008), o qual abarca todos os temas das integrações necessários para o desenvolvimento desse trabalho. Além disso, como referências auxiliares foram utilizadas as referências (CABRAL, 2016), (SANTOS, 2013) e (WANG, 2017).

No primeiro capítulo deste trabalho, será apresentado um embasamento teórico preliminar necessário para o entendimento dos conceitos abordados ao longo do estudo. Serão discutidos os fundamentos dos reais estendidos, que incluem a introdução do elemento infinito e do elemento menos infinito, ampliando o conjunto dos números reais.

Em seguida, será abordada a teoria de álgebra e sigma-álgebra, que são estruturas matemáticas fundamentais para o tratamento adequado das medidas. Será explicado o conceito de álgebra, que consiste em um conjunto de subconjuntos de um espaço, fechado sob as operações de união finita, interseção finita e complemento, e a importância da sigma-álgebra, que é uma estrutura mais refinada, fechada sob operações de união e interseção infinitas.

Posteriormente, serão apresentadas as funções mensuráveis, que desempenham um papel crucial no contexto da teoria da medida. Serão discutidos os critérios para definir uma função como mensurável em relação a uma sigma-álgebra, bem como suas propriedades.

Em seguida, será introduzido o conceito de medida, que é uma função que associa um número real não negativo aos subconjuntos de um espaço, de modo a capturar a noção de "tamanho"ou "extensão"desses conjuntos.

Por fim, será abordada a medida de Lebesgue, que é uma medida fundamental para o estudo da teoria da integração de Lebesgue. Serão discutidas suas propriedades, como a invariância por translação, bem como sua relação com a integral de Lebesgue.

No segundo capítulo deste trabalho, será abordada a teoria de integração de Lebesgue, que permite uma abordagem mais ampla e flexível para o cálculo de integrais de funções.

Em seguida, será introduzido o conceito de conjunto de medida zero. Um conjunto de medida zero é um conjunto cuja medida é igual a zero, ou seja, possui extensão nula. Serão discutidas as propriedades e exemplos de conjuntos de medida zero, e como esses conjuntos são relevantes para a teoria de integração de Lebesgue.

Por fim, será abordada a descontinuidade das funções. Serão apresentados os diferentes tipos de descontinuidade, como descontinuidades de salto, descontinuidades removíveis e descontinuidades essenciais. Serão discutidas as características e propriedades desses diferentes tipos de descontinuidade, e como eles podem afetar a integrabilidade de uma função. Também falaremos sobre uma outra definição de descontinuidade, onde introduziremos o conceito de oscilação de uma função que mede a variação entre os valores próximos de uma função em um determinado ponto.

Ao explorar esses conceitos no segundo capítulo, será possível compreender de forma mais aprofundada a teoria de integração de Lebesgue, a importância dos conjuntos de medida zero e como a descontinuidade e a oscilação de uma função estão relacionadas com a teoria da medida e a teoria de integração.

No terceiro e último capítulo deste trabalho, serão apresentadas aplicações dos conceitos discutidos anteriormente. Serão abordados três tópicos principais: o critério de Lebesgue para a integrabilidade de Riemann, a integral de Lebesgue da função característica dos números racionais e a teoria da convergência monótona de Lebesgue.

Em primeiro lugar, será explorado o critério de Lebesgue para a integrabilidade de Riemann. Esse critério estabelece uma condição suficiente para que uma função seja integrável segundo a definição de Riemann, utilizando o conceito de medida de Lebesgue.

Em seguida, será discutida a integral de Lebesgue da função característica dos números racionais. A função característica dos números racionais é um exemplo importante de função que não é integrável segundo a definição de Riemann, mas é integrável segundo a definição de Lebesgue.

Por fim, será abordada a teoria da convergência monótona de Lebesgue. Esse teorema é uma ferramenta poderosa na teoria de integração de Lebesgue e estabelece condições para que a convergência de uma sequência crescente de funções seja preservada pela integral de Lebesgue. Serão apresentadas as hipóteses e o enunciado do teorema, bem como exemplos de sua aplicação na prática.

2 EMBASAMENTO TEÓRICO PRELIMINAR

Émile Borel foi um dos pioneiros no estudo da teoria da medida. Uma classe de conjuntos foi batizada em sua homenagem, sendo denominados *borelianos*. Esta classe é composta conjuntos abertos, uniões e interseções enumeráveis de conjuntos abertos, e complementares. Entretanto, o noção de mensurabilidade só foi realmente generalizada por Lebesgue, que introduziu uma classe mais geral denominada *classe dos conjuntos mensuráveis*.

Este capítulo tem como objetivo trazer alguns conceitos necessários no estudo das Integrais de Riemann e Lebesgue. Este capítulo não tem a pretensão de ser um estudo completo do tema. Supomos que o leitor possua ao menos um estudo prévio de Cálculo e Análise Real.

2.1 Reais Estendidos

Para este trabalho introduzimos uma compactificação do conjunto dos números reais que é dada pela definição de *reais estendidos*, o qual será denotado por $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Vamos utilizar as seguintes operações algébricas utilizando os símbolos $\pm\infty$ e um elemento $x \in \mathbb{R}$.

$$(\pm\infty) + (\pm\infty) = \pm\infty, \tag{1}$$

$$x + (\pm\infty) = (\pm\infty) + x = \pm\infty, \tag{2}$$

$$(\pm\infty)(\pm\infty) = +\infty, \tag{3}$$

$$(\pm\infty)(\mp\infty) = -\infty. \tag{4}$$

Além disso,

$$x(\pm\infty) = (\pm\infty)x = \begin{cases} \pm\infty & \text{se } x > 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \\ \mp\infty & \text{se } x < 0. \end{cases} \tag{5}$$

2.2 Algebra e σ-Algebra

Émile Borel foi o primeiro matemático a trabalhar com a teoria da medida, tendo apresentado a álgebra de Borel e a menor medida de um conjunto como a medida de Borel. Entretanto, a teoria da medida somente foi mais aprofundada pelo seu orientado, Henri Lebesgue, que generalizou o conceito de integral, e assim introduziu o conceito de medida.

Conforme VIANA; OLIVEIRA (2013) os espaços de medida constituem o “ambiente natural” pra a definição da integral de Lebesgue. Será utilizada a teoria da medida para definir o que é um espaço mensurável para então abordar a questão das medidas invariantes, que serão o próximo assunto.

Definição 2.1 (Álgebra)**.** *Dado um conjunto X, uma família E de subconjuntos de X é uma* álgebra de X *se:*

- $\emptyset \in E$,
- $A \in E$ *implica* $A^c = X \backslash A \in E$
- $A \in E$ **e** $B \in E$ *implica* $A \cup B \in E$.

O terceiro item da Definição 2.1 implica que se uma quantidade finita de conjuntos pertence à família E a união destes conjuntos também pertence a esta família. É interessante estender esta definição para uma quantidade infinita de conjuntos. Se for possível *enumerar* estes conjuntos (isto é, associar a cada conjunto um número natural) podemos utilizar a definição a seguir.

Definição 2.2 (σ-álgebra)**.** *Uma álgebra é dita uma σ-álgebra de subconjuntos de X se também for fechada para uniões enumeráveis.*

Neste caso, se (A_n) é uma sequência de subconjuntos de X,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in E.$$

Note que pelas leis de de Morgan temos que as interseções enumeráveis

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^C\right)^C.$$

também pertencem a E.

De posse do conceito de σ-álgebra será possível definir o que é um espaço mensurável, conforme a seguinte definição.

Definição 2.3. *Um espaço mensurável é uma dupla (X, E) onde X é um conjunto e E é uma σ-álgebra de subconjuntos de X. Os elementos de E são chamado conjuntos mensuráveis do espaço.*

Exemplo 2.1. *Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais. Denotamos $2^{\mathbb{R}}$ como sendo a família de subconjuntos de $\mathbb{R}$, é fácil ver que $\beta = 2^{\mathbb{R}}$ é uma σ-álgebra. Portanto temos um espaço mensurável $(\mathbb{R},\beta)$.*

2.3 Funções mensuráveis

Nesta seção apresentaremos as funções mensuráveis e algumas propriedades que serão de extrema importância para o decorrer da Teoria da Integração. A ideia é tentar expandir a classe de funções integráveis por Riemann e para isso precisamos definir o que é uma função que pode ser medida, ou seja, uma função mensurável.

Para o estudo de funções mensuráveis vamos precisar olhar diretamente para a imagem inversa do conjunto, que em geral pode trazer informações muito mais relevantes do que o conjunto imagem. Conforme SANTOS (2013): "Uma função é contínua se e somente se a imagem inversa de um conjunto aberto é aberta. Uma variação dessa propriedade leva ao conceito de função mensurável."

Definição 2.4. *A pré-imagem de um conjunto B sob uma função $f : X \to Y$ é definida como o conjunto de todos os elementos do domínio de f que são mapeados em elementos de B pela função f. Em outras palavras, a pré-imagem de um conjunto $B \subseteq Y$ é definida como:*

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}. \tag{6}$$

Isso significa que a pré-imagem de um conjunto B é o conjunto de todos os pontos do domínio de f que são mapeados para um ponto em B por f. A pré-imagem é uma ferramenta importante em análise matemática e é frequentemente utilizada para definir propriedades como continuidade e mensurabilidade de funções.

Definição 2.5. *Dado um espaço mensurável (X,E), uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é mensurável se o conjunto*

$$\{f < r\} = \{x \in X : f(x) < r\}, \tag{7}$$

é mensurável para todo $r \in \mathbb{R}$.

Agora que temos a definição de uma função mensurável, vamos enunciar um lema que nos permite realizar modificações na definição de mensurabilidade.

Lema 2.1. *Dado um espaço mensurável (X,E), seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função. As seguintes condições são equivalentes:*

(i) Para todo número real r, o conjunto $\{x \in X : f(x) > r\}$ é mensurável.

(ii) Para todo número real r, o conjunto $\{x \in X : f(x) \geqslant r\}$ é mensurável.

(iii) Para todo número real r, o conjunto $\{x \in X : f(x) < r\}$ é mensurável.

(iv) Para todo número real r, o conjunto $\{x \in X : f(x) \leq r\}$ é mensurável.

Demonstração:

- *(i)* $\Rightarrow$ *(ii)*:
  Temos que o conjunto $\{x \in X : f(x) \geqslant r\}$ é o resultado da interseção enumerável dos conjuntos $A_n = \{x \in X : f(x) > r - 1/n\}$, que por hipótese *(i)* são mensuráveis. Logo, concluímos que *(ii)* é verdadeira.

- *(ii)* $\Rightarrow$ *(iii)*:
  De fato, podemos escrever o conjunto $\{x \in X : f(x) < r\}$ como o complemento do conjunto $\{x \in X : f(x) \geqslant r\}$. Como o primeiro conjunto é mensurável por hipótese *(ii)*, o segundo conjunto também é mensurável e concluímos que *(iii)* é verdadeira.

- *(iii)* $\Rightarrow$*(iv)*:
  Temos que o conjunto $\{x \in X : f(x) \leq r\}$ é o resultado da interseção enumerável dos conjuntos $B_n = \{x \in X : f(x) < r+1/n\}$, que por hipótese *(iii)* são mensuráveis. Logo, concluímos que *(iv)* é verdadeira.

- *(iv)* $\Rightarrow$*(i)*:
  De fato, podemos escrever o conjunto $\{x \in X : f(x) > r\}$ como o complemento do conjunto $\{x \in X : f(x) \leq r\}$. Como o primeiro conjunto é mensurável por hipótese *(iv)*, o segundo conjunto também é mensurável e concluímos que *(i)* é verdadeira.

Dessa forma, provamos que as condições *(i)*, *(ii)*, *(iii)* e *(iv)* são equivalentes.

■

Note que o Lema acima estabelece que para uma função mensurável o conjunto dado por $\{x \in X : f(x) = r\}$ é mensurável para todo $r \in \mathbb{R}$, pois

$$\{x \in X : f(x) = r\} = \{x \in X : f(x) \leq r\} \cap \{x \in X : f(x) < r\},$$

ambas mensuráveis.

Dada uma ou mais funções mensuráveis podemos obter outras funções mensuráveis a partir de operações envolvendo funções. O resultado a seguir estabelece algumas possibilidades.

Lema 2.2. *Sejam $f : X \to \mathbb{R}$, $g : X \to \mathbb{R}$ funções mensuráveis e $k \in \mathbb{R}$. Então as funções dadas por*

1. kf,
2. f^2,
3. $f + g$,
4. fg,

5. $|f|$

são mensuráveis.

Demonstração:

1. Se $k = 0$, a demonstração é trivial. Entretanto se $k > 0$, temos

$$\{x \in X : kf(x) > r\} = \{x \in : f(x) > r/k\} \in X.$$

   Note que para $k < 0$ teremos que a demonstração é análoga.

2. Se $r < 0$, então $\{x \in X : (f(x))^2 > r\} = X$; se $r \geqslant 0$, então

$$\{x \in X : (f(x))^2 > r\} = \{x \in X : f(x) > \sqrt{r}\} \cup \{x \in X : f(x) < -\sqrt{r}\}.$$

3. Se r é um numero real, então, se $f(x) + g(x) > r$, então $f(x) > r - g(x)$ e existe um número $q \in \mathbb{Q}$ tal que $r - g(x) < q < f(x)$. Logo,

$$\{x \in X : (f + g)(x) > r\} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} (\{x \in X : f(x) > q\} \cap \{x \in X : g(x) > r - q\}).$$

4. Para provar que fg é mensurável, bastar verificar que

$$fg = \frac{1}{2}[(f + g)^2 - (f - g)^2]$$

   e portanto, usando os itens anteriores, fg é mensurável.

5. Se $r < 0$, então $\{x \in X : |f(x)| > r\} = X$. Se $r \geqslant 0$, temos

$$\{x \in X : |f(x)| > r\} = \{x \in X : f(x) > r\} \cup \{x \in X : f(x) < -r\}.$$

   Logo , a função $|f|$ é mensurável.

$\blacksquare$

Para esse estudo vamos utilizar a notação do espaço mensurável $M^+(X, E)$, que representa o conjunto das funções não-negativas e mensuráveis.

2.4 Medida

Agora que já apresentamos o conceito de espaço mensurável (X,E), em que temos o conjunto X e a sua σ-álgebra E de subconjuntos de X e definimos funções mensuráveis, podemos definir o que são "medidas". Vamos considerar como "medida", sendo um certo grupo de funções definidas na σ-álgebra E que possuem um valor real ou real estendido. Estas funções têm como objetivo medir comprimento, área, massa e entre outras.

Para este estudo de medida, começamos definindo a medida dos intervalos reais calculando o seu comprimento, denotado como $\ell(I)$, onde $I = (a, b)$ é o intervalo aberto com extremos em a e b, tais que $a,b \in \bar{\mathbb{R}}$. O comprimento é definido como $\ell(I) = b - a$, se $a < b$ tais que $a,b \in \mathbb{R}$. No caso dos intervalos que começam ou terminam com infinito, dizemos que possuem comprimento infinito. São eles os intervalos $I = (-\infty,b)$, $I = (a,\infty)$ e $I = (-\infty,\infty)$. No caso dos intervalos que começam e terminam no mesmo ponto $I = (a,a)$, dizemos que tais intervalos possuem comprimento zero.

Para dar continuidade ao nosso estudo, vamos precisar de um noção estendida de medida, em que vamos conseguir medir conjuntos mais gerais do que intervalos em uma reta. Para isso, vamos utilizar a seguinte definição de medida

Definição 2.6. *Uma medida positiva na reta é uma função λ que associa a cada $A \subseteq \mathbb{R}$ um número estendido, $\lambda(A) \in [0, +\infty]$, conhecido como a medida de A, de forma que coincida com o valor obtido nas técnicas já conhecidas (comprimento de intervalos) e que satisfaça duas propriedades:*

(i) $\lambda(\emptyset) = 0$*,*

(ii) $\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_k\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_k)$*,*

para qualquer coleção enumerável de subconjuntos de $\mathbb{R}$ disjuntos dois a dois.

Utilizando a definição de espaços mensuráveis e de medida, podemos então definir o que é um espaço de medida.

Definição 2.7. *Um **espaço de medida** e uma tripla (X, E, λ) em que X é um conjunto, E é a σ-álgebra de X e λ é uma medida definida em E.*

2.5 Medida de Lebesgue

Medidas são utilizadas para medir quaisquer conjuntos, entretanto existem outros tipos de medidas que são utilizados para medir alguns tipo de de conjuntos mais específicos. Um exemplo deste tipo de medida é a *medida de Lebesgue*. Para definir a medida de Lebesgue, vamos primeiramente precisar do conceito de medida exterior e de algumas propriedades. Para isso vamos definir o que é uma medida exterior e o que são conjuntos de Lebesgue para enfim definir a medida de Lebesgue.

2.5.1 Medida Exterior

Quando pensamos em definir uma função para medir subconjuntos na reta, vamos precisar de algumas propriedades. Seja A um conjunto de números reais, vamos denotar $\mu(A)$ como sendo a medida de Lebesgue. Para que medida do intervalo $\ell(I)$ seja congruente, a medida do conjunto A deve manter as seguintes propriedades:

(i) Se A é um intervalo, então $\mu(A) = \ell(A)$.

(ii) Se $A \subseteq B$, então $\mu(A) \leq \mu(B)$.

(iii) Dado $A \subseteq \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$, temos que $A+x_0 = \{x+x_0 : x \in A\}$. Logo $\mu(A) = \mu(A+x_0)$, ou seja, a medida é invariante por translação.

(iv) Se A e B são dois conjuntos disjuntos, então $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$. Se $\{A_i\}$ é uma sequencia disjunta de conjuntos, então $\mu(\cup_{i=0}^{\infty} A_i) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu(A_i)$.

Entretanto, sabe-se que é impossível definir uma função medida que satisfaça o item (iv) para todos os subconjuntos dos números reais. E é por isso que precisamos da definição de *Medida Exterior*.

Definição 2.8. *(Medida Exterior) Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$ e denote $\{I_k\}$ uma sequência de intervalos abertos. A medida externa positiva de Lebesgue em A é definida por*

$$\mu^*(A) = inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k); A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \right\}. \tag{8}$$

Teorema 2.1. *A medida exterior tem as seguintes propriedades:*

(i) Se $E_1 \subseteq E_2$, então $\mu^*(E_1) \leq \mu^*(E_2)$.

(ii) A medida exterior de conjuntos enumeráveis é nula.

(iii) A medida exterior do conjunto vazio é nula.

(iv) A medida exterior é invariante por translação, isto é, para cada número real x_0, $\mu^*(E + x_0) = \mu^*(E)$.

(v) A medida exterior é subaditiva, isto é, dada uma sequência $\{E_i\}$ de conjuntos,

$$\mu^* \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i).$$

(vi) Para qualquer intervalo I, $\mu^*(I) = \ell(I)$.

A função medida exterior de um conjunto é uma generalização da noção de medida, em que podemos medir uma classe mais amplas de conjuntos, consequentemente cobrindo todos os subconjuntos do conjunto dos números reais $\mathbb{R}$. Para este trabalho vamos utilizar principalmente a medida exterior de Lebesgue, função medida que atribui um valor aos conjuntos dos números reais de acordo com sua "extensão".

Utilizando a definição de medida exterior e suas propriedade, vamos realizar uma aplicação já conhecida, entretanto como uma demonstração com base na teoria da medida.

Exemplo 2.2. *$\mathbb{R}$ é não-enumerável.*
Demonstração:

Pela definição temos que para $a,b \in \mathbb{R}$, $\mu(a,b) = b - a$ se $a < b$ e que a medida de um ponto é sempre nula, ou seja $\mu(\{a\}) = 0$ para qualquer $a \in \mathbb{R}$. Então para provar que $\mathbb{R}$ é um conjunto não-enumerável, basta mostrar que o intervalo $(a,b) \subset \mathbb{R}$ é não-enumerável.

Suponha que (a,b) seja enumerável. Então temos que, $(a,b) = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{x_n\}$ em que $x_n \in \mathbb{R}$. Logo o (a,b) é uma união enumerável de seus elementos. Então pela proposição (ii) e (v) do Teorema 2.1 temos que:

$$0 < b - a = \mu(a,b) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{x_n\}) = 0 \tag{9}$$

O que é uma contradição.

Com isso provamos, que $(a,b) \subset \mathbb{R}$ é um intervalo não enumerável e portanto $\mathbb{R}$ é não enumerável.

■

Por fim utilizamos os conceitos anteriores para definir a Medida de Lebesgue.

Definição 2.9. *(Medida de Lebesgue) Um conjunto $B \subseteq \mathbb{R}$ é chamado de Lebesgue mensurável se para cada conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ a igualdade $\mu^*(A) = \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap B^c)$ é válida. Se B é um conjunto Lebesgue mensurável, então a medida de Lebesgue de B é a medida externa de Lebesgue e vamos denota-la por $\mu(B)$.*

Uma vez que temos o conceito de medida podemos discutir a integração em um contexto mais amplo.

3 INTEGRAÇÃO

Neste capítulo, vamos destacar alguns tópicos importantes e realizar uma breve comparação entre as integrais de Riemann e de Lebesgue. A definição de integral de Riemann é bem conhecida e foge do escopo deste trabalho fazer um detalhamento deste conceito. O leitor pode encontrar este tratamento em livros de Cálculo e Análise, como Guidorizzi (2013) e Lima (1982). Como forma alternativa para enunciar as integrais de Riemann, vamos construir a teoria de integração de Lebesgue a fim de demonstrar o seguinte Teorema.

Teorema 3.1. *Uma função f limitada é Riemann integrável se, e somente se, o conjunto dos pontos de descontinuidade de f tem medida zero.*

Esta demonstração será realizada no final do capítulo.

Teorema 3.2. *Uma função f definida em um intervalo fechado será Riemann integrável se, e somente se, E_{1f} tiver medida zero.*

3.1 Teoria de integração de Lebesgue

Quando se fala em integral, intuitivamente pensa-se na integral de Riemann, pois é a ferramenta mais abordada nos cursos de Cálculo. Em geral utilizamos a integral de Riemman para realizar o cálculo de áreas em baixo de um curva da seguinte maneira. Uma partição no intervalo $[a, b]$ é definida para inscrever e circunscrever retângulos à curva dada uma função contínua não-negativa especificada neste intervalo. As áreas combinadas desses retângulos fornecem uma sub e superestimativa da área sob a curva, respectivamente. Essa estimativa será mais precisa se houver mais retângulos e se suas bases forem menores. Quando o máximo das partições tende a zero, a integral de Riemann é definida como o limite dessas estimativas.

Em geral as integrais de Riemann são definidas para funções contínuas. Para definir o conceito de integral de Riemman em funções descontínuas, introduzimos as integrais impróprias. O cálculo das integrais impróprias geralmente é difícil e por isso, neste capítulo abordaremos a teoria de integração de Lebesgue, que facilita o cálculo desse tipo de integral.

Para começar o estudo da teoria de integração de lebesgue, se faz necessário a definição de função característica e de função simples, que serão dadas a seguir.

Definição 3.1. *Dado um conjunto $A \subset X$, dizemos que $\mathcal{X}_A$ é a função característica, em que $\mathcal{X}_A : \mathbb{R} \to \{0,1\}$ por*

$$\mathcal{X}_A(x) = \begin{cases} 1, & \textit{se } x \in A, \\ 0, & \textit{caso contrário.} \end{cases}$$

A função característica é uma medida simples que indica se dado elemento está no conjunto ou não. A seguir apresentamos a *função simples*.

Definição 3.2. *(Função simples) Seja a tripla* (X, E, μ) *um espaço de medida. Dizemos que* $f : X \to \mathbb{R}$ *é uma função simples se*

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathcal{X}_{Ei},$$

em que $a_i \in \mathbb{R}$ *e* $E_i \in E$.

Podemos dizer que uma função simples é uma combinação linear de funções características, servindo para dar pesos aos diferentes conjuntos. Com base nestas definições estamos prontos para definir a *Integral de Lebesgue* a seguir. Vamos começar definindo a integração para uma função simples.

Definição 3.3. *(Integral de Lebesgue para uma função simples) Seja a tripla* (X, E, μ) *um espaço de medida e* $f : X \to \mathbb{R}$ *uma função simples dada por* $f = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathcal{X}_{Ei}$*. A integral de* f *é definida com a medida* μ *por:*

$$\int f d\mu = \sum_{i=0}^{n} a_i \mu(E_i).$$

Com base nesta definição podemos agora avançar para a integração de uma função não negativa.

Definição 3.4. *(Integral de uma função não-negativa) Seja um espaço de medida* (X, E, μ) *e* f *um função não-negativa* E*-mensurável. Definimos a integral da função não-negativa* f *com a medida* μ *por*

$$\int f d\mu = \sup \left\{ \int g d\mu : g \text{ é uma função simples e } 0 \leq g \leq f \right\}.$$

A ideia desta definição é que para qualquer função não negativa f conseguimos escolher a maior função simples g menor que f em que temos a integral se aproximando de um limite superior o qual denominamos integral de f.

Definição 3.5. *Definimos a parte positiva de uma função* f *mensurável com* f^+ *e a parte negativa com* f^- *por*

$$f^+(x) = max(0, f(x)),$$

$$f^-(x) = max(0, -f(x)).$$

Assim, $f = f^+ - f^-$ *com* $f^+, f^- \geqslant 0$

Finalizaremos essa sessão definindo a integral para um função mensurável qualquer e enumerando algumas propriedades importantes da integral.

Definição 3.6. *(Integral de uma função mensurável) Seja (X, E, μ) um espaço de medida e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função E-mensurável. Definimos a integral de um função mensurável f com a relação de medida μ como*

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu.$$

Uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é integrável por Lebesgue se é limitada e mensurável. No decorrer do texto, vamos mostrar que para que uma função seja Riemann integrável é necessário que o conjunto dos pontos de descontinuidade da função seja enumerável.

Teorema 3.3. *Seja (X, E, μ) um espaço de medida e f,$g : X \to \mathbb{R}$ funções integraveis.*

(a) Se $c \in \mathbb{R}$, $\int (cf + g) d\mu = c \int f d\mu + \int g d\mu$;

(b) Se $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in X$, então $\int f d\mu \leq \int g d\mu$;

(c) Se $A, B \in E$, $A \subset B$ e $f \geqslant 0$, então $\int_A f d\mu \leq \int_B f d\mu$;

(d) $|f|$ é integrável e $\left|\int f d\mu\right| \leq \int |f| d\mu$. Se $\int |f| d\mu = 0$, então $f = 0$ μ para quase todo ponto.

Demonstração:
Ver BARTLE(1995).

3.2 Conjunto de Medida Zero

Desenvolvendo mais sobre a teoria da medida e sobre as integrais de Lebesgue, discorreremos sobre o Critério de Lebesgue para Riemann-Integrabilidade. Entretanto para isto, é necessário definir alguns resultados preliminares e algumas notações conhecidas da Análise (LIMA, 1982).

- Um intervalo será representado por I. Seu diâmetro, por $\ell(I)$.
- O conjunto de todas as partições do intervalo fechado $[a, b]$ será representado por $\mathcal{P}[a, b]$.
- A soma superior de uma função f com respeito a uma partição P de seu domínio será denotada por $S(P, f)$ e a soma inferior por $I(P, f)$.
- Um conjunto A é dito enumerável se existir uma bijeção entre A e $\mathbb{N}$
- Um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ será aberto se $\forall x \in A, \exists \epsilon \in \mathbb{R}$ tal que $[x - \epsilon, x + \epsilon] \subset A$ (todo ponto de A é um ponto interior).

- Um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ será fechado se seu complementar em $\mathbb{R}$ (ou seja, $\mathbb{R} - A$) for aberto.
- Uma função $f : I \to \mathbb{R}$ será contínua em $x_0 \in I$ se para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.
- Uma função limitada $f : I \to \mathbb{R}$ (sendo I um intervalo fechado) será Riemann integrável se, para todo $\epsilon > 0$, existe uma partição $P \in P[a, b]$ tal que $S(P, f) - I(P, f) < \epsilon$.

Temos uma noção intuitiva de alguns conjuntos que possuem medida zero, tais como o conjunto vazio ou um ponto isolado. Vamos definir um conjunto de medida zero de forma geral.

Definição 3.7. *Dizemos que $Z \subseteq \mathbb{R}$ tem medida zero se, para todo $\epsilon > 0$ existe uma sequência $\{I_n\}$ de intervalos abertos tais que:*

(i) $Z \subset \displaystyle\bigcup_n I_n$,

(ii) $\displaystyle\sum_n \ell(I_n) < \epsilon$.

Vamos a seguir mostrar alguns conjuntos que possuem medida zero.

Teorema 3.4. *Todo conjunto unitário tem medida zero.*

Demonstração:
Se $F = \{x_0\}$, então $\forall \epsilon > 0$, $F \subset (x_0 - \frac{\epsilon}{4}, x_0 + \frac{\epsilon}{4})$ e com isso construímos uma sequência de intervalos $I_n = (x_0 - \frac{\epsilon}{4}, x_0 + \frac{\epsilon}{4})$, tal que $\sum_n \ell(I_n) = \epsilon/2 < \epsilon$

■

Teorema 3.5. *Se Z tem medida zero e $Y \subset Z$, então Y também tem medida zero.*

Demonstração:
Ver GOMES; CARDONA(2008).

Teorema 3.6. *A união enumerável de conjuntos de medida zero é um conjunto de medida zero.*

Demonstração:
Se $E = \cup_n Z_n$, então dado $\epsilon > 0$, para cada n podemos escolher para cada Z_n uma sequencia $(\{I_m^n\})$ de intervalos de diâmetro menor que $\frac{\epsilon}{2^n}$ e formar, a partir dessas sequencias $\{I_s\}$. Como $\sum_s \ell(I_s) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^n} = \epsilon$, então $\sum_s \ell(I_s) < \epsilon$.

■

Corolário 1. *Todo conjunto enumerável tem medida zero.*

Demonstração:
Se M é enumerável então $M = \cup_n\{x_n\}$. Pelo Teorema 3.4 todo conjunto unitário tem medida zero, logo cada $\{x_n\}$ tem medida zero. E pelo teorema 3.6, $\cup_n\{x_n\}$ tem medida zero. Portanto M tem medida zero.

■

Corolário 2. *Seja $X \subset [a,b]$ um conjunto fechado e de medida zero. Então, para todo $\epsilon > 0$, existe uma partição $P \in \mathcal{P}[a,b]$ tal que a soma dos comprimentos dos intervalos de P da forma $[x_j, x_{j+1}] \cap X \neq \emptyset$ é menor que ϵ.*

Demonstração:
Ver GOMES; CARDONA (2008).

■

3.3 Descontinuidades

Nessa sessão abordaremos conceitos de descontinuidade. Usualmente definimos uma função ser descontínua se não é contínua, isto é, existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ e $x_0 \in \text{Dom}(f)$ onde $|x - x_0| < \delta$ e $|f(x) - f(x_0)| > \epsilon$. Mas para entender o critério de Lebesgue para Riemann-integrabilidade vamos precisar compreender descontinuidade de uma maneira diferente.

3.3.1 Tipos de Descontinuidades

Vamos representar os conjuntos de descontinuidade em f como sendo R_f para as descontinuidade removíveis, S_f para as descontinuidades de salto, E_{1f} as descontinuidades essenciais de primeira ordem e E_{2f} as descontinuidades essenciais de segunda ordem. Logo quando fazemos $R_f \cup S_f \cup E_{1f} \cup E_{2f}$ estaremos representando todas as descontinuidades possíveis em f.

Dizemos que $x_0 \in R_f$, isto é, possui uma descontinuidade removível em x_0 se

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) \text{ tal que } \lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0).$$

Para $x_0 \in S_f$, dizemos que f possui uma descontinuidade de salto em x_0 quando

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

Dizemos f tem um descontinuidade essencial em x_0, ou seja, $x_0 \in E_{1f}$ ou $x_0 \in E_{2f}$, quando

1. Descontinuidade essencial de primeira ordem E_{1f};

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \text{ e } \lim_{x \to x_0^+} f(x) \text{ não existem.}$$

2. Descontinuidade essencial de segunda ordem E_{2f}

$$\text{Ou } \lim_{x \to x_0^-} f(x) \text{ ou } \lim_{x \to x_0^+} f(x) \text{ não existe.}$$

Com isso conseguimos uma outra definição para descontinuidade:

Definição 3.8. *Seja $x_0 \in$ Dom(f) então f é descontínua em x_0 se, e somente se, $x_0 \in R_f \cup S_f \cup E_{1f} \cup E_{2f}$.*

3.3.2 Oscilação de uma função

Para os próximos resultados, vamos precisar nos atentar à enumerabilidade desses conjuntos de descontinuidades e para isso será introduzido o conceito de oscilação de uma função.

Vamos definir oscilação em um função f em um subconjunto (I) de seu domínio conforme o seguinte.

Definição 3.9.

$$\omega_f(I) = sup\{\mid f(s) - f(t) \mid, \{s,t\} \subset I\}.$$

Em particular para um ponto especifico x_0 do domínio de f temos que a oscilação é dada por

$$\omega_f(x_0) = inf\{\omega_f([x_0 - \delta, x_0 + \delta]), \delta \subset \mathbb{R}^+\}.$$

Teorema 3.7. *Seja x_0 um ponto do domínio de f. A função f é contínua em x_0 se, e somente se, $\omega_f(x_0) = 0$.*

Demonstração:
$(\Rightarrow)$ Se f é contínua em x_0, então $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que,

$$\{s,t\} \subset \{x_0 - \delta, x_0 + \delta\} \Rightarrow \mid f(s) - f(x_0) \mid < \frac{\epsilon}{2} \text{ e } \mid f(t) - f(x_0) \mid < \frac{\epsilon}{2}$$

mas

$$\mid f(s) - f(t) \mid = \mid f(s) - f(x_0) - (f(t) - f(x_0)) \mid \leq \mid f(s) - f(x_0) \mid + \mid f(t) - f(x_0) \mid = \epsilon$$

Logo, $\omega_f(x_0) = inf\{\epsilon, \epsilon > 0\}$ e portanto $\omega_f(x_0) = 0$.
($\Leftarrow$) Suponha que $\omega_f(x_0) = 0$. Temos que

$$\omega_f(x_0) = inf\{\omega_f([x_0 - \delta, x_0 + \delta]), \delta > 0\} = 0$$

E isso quer dizer que $\forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0$ tal que,

$$0 < \omega_f([x_0 - \delta, x_0 + \delta]) < \epsilon.$$

Neste caso, se $\{s, t\} \subset [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ então $sup\{\mid f(s) - f(t) \mid\} < \epsilon$, logo $\mid f(s) - f(t) \mid< \epsilon$. E como $\forall\delta > 0, x_0 \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, f é contínua em x_0.

■

Teorema 3.8. *Se $\alpha > 0$ então, para cada função f (com domínio D), o conjunto $\{x \in D : \omega_f(x) < \alpha\}$ é aberto em $\mathbb{R}$.*

Demonstração:
Fixando $\alpha > 0$, se $p \in \{x \in D : \omega_f(x) < \alpha\}$, então, $\exists\delta > 0$ tal que $\omega_f([p - \delta, p + \delta]) < \alpha$. Se $x \in [p - \delta, p + \delta]$, então $\omega_f(x) < \alpha$. Como x é escolhido de forma arbitrária, temos $[p - \delta, p + \delta] \subset \{x \in D : \omega_f(x) < \alpha\}$. Assim p é um ponto interior. Como p é arbitrário, $\{x \in D : \omega_f(x) < \alpha\}$ é aberto.

■

Corolário 3. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, fixado $\alpha > 0$ então $S = \{x \in [a, b] : \omega_f(x) \geqslant \alpha\}$ é fechado e limitado.*

Demonstração:
Pelo teorema anterior $\{x \in [a,b] : \omega_f(x) < \alpha\}$ é aberto em $\mathbb{R}$, então $\{x \in \mathbb{R} : \omega_f(x) \geqslant \alpha\}$ é fechado. Então $\{x \in [a, b] : \omega_f(x) \geqslant \alpha\} = \{x \in \mathbb{R} : \omega_f(x) \geqslant \alpha\} \cap [a,b]$, o que é uma intersecção de fechados, logo um conjunto fechado. Como $\{x \in D : \omega_f(x) \geqslant \alpha\} \subset [a, b]$ então $\{x \in [a, b] : \omega_f(x) \geqslant \alpha\}$ também é limitado.

■

Teorema 3.9. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. O conjunto $S = R_f \cup S_f \cup E_{2f}$ é enumerável.*

Demonstração:
Sejam $A_1 = \{x_0 \in E_{2f} : \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) < \infty\}$ e $A_2 = \{x_0 \in E_{2f} : \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) < \infty\}$. Vamos chamar de T, formado pela união dos conjuntos de descontinuidades, isto é, $T = (R_f \cup S_f \cup A_1) \cup (R_f \cup S_f \cup A_2)$. E denotaremos $T_1 = (R_f \cup S_f \cup A_1)$ e $T_2 = (R_f \cup S_f \cup A_2)$. Sabemos que $x_0 \in T \Rightarrow f$ é descontínua em x_0.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos o conjunto $O_n = \{x_0 \in T_1 : \omega_f(x_0) > \frac{1}{n}\}$ Como $x_0 \in T_1$, pelo teorema 3.7 $\omega_f(x_0) > 0$ e assim, $\exists n \in \mathbb{N} : \omega_f(x_0) > \frac{1}{n}$. Logo, $x_0 \in O_n$, para algum n, isto é, $T_1 \subset \cup_n O_n$. Assim, se cada O_n for enumerável, T_1 também será enumerável. Provaremos que O_n é enumerável.

Se $x_0 \in O_n$, então existe $\lim\limits_{x \to x^-} f(x)$. Fixando $\epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que

$$x \in (x_0 - \delta, x_0) \Rightarrow \mid f(x) - f(x_0) \mid < \epsilon.$$

Mas, se $x_1 \in (x_0 - \delta, x_0)$, então, $\exists \delta_1 > 0$ tal que

$$\mid x - x_1 \mid < \delta_1 \Rightarrow \mid f(x) - f(x_1) \mid \leq \mid f(x) - f(x_0) \mid + \mid f(x_1) - f(x_0) \mid < \epsilon$$

basta tomar δ_1 tal que $(x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1) \subset (x_0 - \delta, x_0)$. E como ϵ foi escolhido arbitrariamente, $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$, f é contínua em x, logo $x \notin T_1$, ou ainda, $\forall x_0 \in O_n, \exists \delta > 0$ tal que $(x_0 - \delta, x_0) \cap O_n = \emptyset$.

Fixado n, tome $x_0 \in O_n$. Seja $q_n(x_0)$ um número racional em $(x_0 - \delta(x_0), x_0)$ $(\delta(x_0)$ para o qual ($(x_0 - \delta, x_0)$ $\cap O_n = \emptyset$). Defina $F : O_n \to \mathbb{Q}$ por $x_0 \mapsto q_n(x_0)$. Se $\{x_0, y_0\} \subset O_n$ e $x_0 \neq y_0$, então (considerando $x_0 < y_0$), $(x_0 - \delta(x_0), x_0) \cap (y_0 - \delta(y_0), y_0) = \emptyset$, caso contrário $x_0 \in (y_0 - \delta(y_0), y_0)$, o que é um absurdo. Assim $q_n(x_0) \neq q_n(y_0)$ e F é injetora. Restringindo o contradomínio, definimos $F_2 : O_n \to A$ ($\subset \mathbb{Q}$) bijetora. Assim, cada O_n é enumerável e T_1 é enumerável.

Poderíamos construir a mesma bijeção para o conjunto T_2 e mostrando assim que T_2 também é um conjunto enumerável. Assim $T = T_1 \cup T_2$ é enumerável.

$\blacksquare$

4 APLICAÇÕES

Durante os capítulos anteriores realizamos uma introdução sobre a integral de Lebesgue e agora iremos fazer uma comparação informal entre as integrais de Riemman e de Lebesgue. É fácil de perceber que as duas teorias são boas ferramentas para calcular as integrais de funções contínuas, entretanto para funções não contínuas se faz necessário o uso de um arcabouço teórico um pouco mais robusto e em alguns casos mais específicos a teoria de Riemann não consegue realizar o cálculo.

Segundo WANG (2017) A diferença das duas teorias é que enquanto a integral de Riemman subdivide o domínio da função, a integral de Lebesgue subdivide o alcance da função. Enquanto para integral de Riemann, cada subdivisão, usualmente chamada de largura do retângulos, possui a mesma largura. Para a integral de Lebesgue é criado uma função simples para cada subdivisão que possui finitos valores de medida.

4.1 Critério de Lebesgue para Riemann-Integrabilidade

Após todo esse estudo sobre medida, integrações e descontinuidade, enfim podemos provar o teorema sobre integrabilidade.

Teorema 4.1. *Uma função f limitada é Riemann integrável se, e somente se, o conjunto dos pontos de descontinuidade de f tem medida zero.*

Demonstração:
$(\Rightarrow)$ Suponha uma função Riemann integravel $f : I \to \mathbb{R}$,

$$\forall \epsilon > 0, \exists P \in P[a,b] \text{tal que} S(P,f) - I(P,f) < \epsilon.$$

Se $P = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$, então

$$\sum_{i=1}^{n}(f(\eta_i)\Delta(x_i)) - \sum_{i=1}^{n-1}(f(\xi_i)\Delta(x_i)) < \epsilon.$$

onde $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $f(\eta_i) = sup\{f(x) : x \in \Delta x_i\}$ e $f(\xi_i) = inf\{f(x) : x \in \Delta x_i\}$. Podemos escrever

$$\sum_{i=1}^{n}(f(\eta_i) - f(\xi_i))\Delta x_i < \epsilon.$$

Mas, para cada $i \in \{1, ..., n\}$, se $\{s_i, t_i\} \subset \Delta x_i$, temos $\mid f(s_i) - f(t_i) \mid < f(\eta_i) - f(\xi_i)$. Logo

$$\sum_{i=1}^{n} \mid f(s_i) - f(t_i) \mid \Delta x_i < \epsilon.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $S_n = \{x \in [a,b] : \omega_f(x) > \frac{1}{n}\}$ Dado $\epsilon > 0$, vamos escolher $\epsilon_0 = \frac{\epsilon}{2n}$ e, a partir desse ϵ_0, extrair uma partição P de f tal que

$$\{s_i,t_i\} \subset \Delta x_i \text{ para cada } i \leq n, \sum_{i=0}^{n} \mid f(s_i) - f(t_i) \mid \Delta x_i < \epsilon_0.$$

Então, $x \in S_n \Rightarrow \frac{1}{n} < \omega_f(x)$. Se $\exists i \in N$ tal que $y_i \in \Delta x_i$ então

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i < \sum_{i=1}^{n} \omega_f(y_i)\Delta x_i < \epsilon_0, \text{ o que implica } \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i < \frac{\epsilon}{2}$$

Assim, para $x \in S_n$ que estão contidos em algum Δx_i, podemos tomar (x_i, x_{i+1}) como uma sequência de intervalos abertos que contém esses pontos e cujo diâmetro é menor que $\frac{\epsilon}{2}$. Se não existe i tal que $x \in \Delta x_i$, então $x \in P$. Mas, uma vez que P é enumerável, P tem medida zero e podemos encontrar uma sequência de intervalos abertos com diâmetro total menor que $\frac{\epsilon}{2}$ que cobre P. Assim, S_n tem medida zero e o conjunto dos pontos de descontinuidade de f tem medida zero (tal conjunto é a união numerável S_n, pelo Teorema 3.7).

$(\Leftarrow)$ Suponha agora que o conjunto dos pontos de descontinuidade de f tenha medida zero. Fixe $\epsilon_1 > 0$, então o conjunto $S = \{x \in [a,b] : \omega_f(x) \geqslant \epsilon\}$ (onde $\epsilon = \min\{\frac{\epsilon_1}{2}, \frac{\epsilon_1}{2(b-a)}\}$) está contido no conjunto dos pontos de descontinuidade de f, e pelo teorema 3.6, tem medida zero. Pelo corolário 3, S é fechado. Sendo fechado e de medida zero, o corolário 2 garante que existe uma partição de $[a,b]$ cujos intervalos que contêm elementos de S são arbitrariamente pequenos.

Tomemos então uma partição P de $[a,b]$ tal que os intervalos que contêm algum elemento de S têm diâmetro menor que $\frac{\epsilon}{4}||f||$ (onde $||f|| = \max\{\sup f(x), x \in [a,b], -\inf f(x), x \in [a,b]\}$). Logo

$$S(P,f) - I(P,f) = S(P',f) - I(P',f) + S(P'',f) - I(P'',f)$$

Onde P' são os intervalos que não possuem nenhum ponto em S e P'' os que possuem. Então:

$$S(P'',f) - I(P'',f) = \sum_{n=1}^{n}(f(\eta_i) - f(\xi_i))\Delta(x_i) < 2||f||\sum_{n=1}^{n}\Delta(x_i) < \epsilon \leq \frac{\epsilon_1}{2}.$$

Para as pontos P':

$$S(C',f) - I(C',f) < \sum_{n=1}^{n}(f(\eta_i) - f(\xi_i))\Delta(x_i) < \epsilon\sum_{n=1}^{n}\Delta(x_i) < \epsilon(b-a) \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Logo,

$$S(P,f) - I(P,f) < \epsilon_1$$

e f é integrável em $[a,b]$.

■

Refinação do critério de Lebesgue para Riemann integrabilidade

Teorema 4.2. *Uma função f definida em um intervalo fechado será Riemann integrável se, e somente se, $E_1 f$ tiver medida zero.*

Demonstração:
Devido ao critério de Lebesgue, f é Riemann integrável se, e somente se, o conjunto dos pontos de descontinuidade de f tiver medida zero. Porém, pelo teorema 3.9, sabemos que o conjunto $R_f \cup S_f \cup E_{2f}$ tem medida zero. Assim, o conjunto dos pontos de descontinuidade de f terá medida zero se, e somente se, E_{1f} tiver medida zero.

■

4.2 Função Lebesgue integrável

Vamos dar uma olhada na função característica dos número irracionais:

$$f(x) = \begin{cases} 0, x \text{ é racional;} \\ 1, x \text{ é irracional.} \end{cases} \tag{10}$$

Vamos definir $f(x)$ em um intervalo fechado $[0,1]$. O conjunto formado pelos pontos de descontinuidade dessa função se enquadra no conjunto E_{1f}, ou seja, essa função possui descontinuidades essências de primeira ordem. É fácil de notar que não é possível contar quantas descontinuidades f possui, fazendo com que E_{1f} seja uma conjunto não-enumerável, e de acordo com o teorema 4.1. é notável que essa função não pode ser Riemann integrável.

Entretanto podemos integra-la por Lebesgue, pois:

$$\int_{[0,1]} f = 0.\mu(A) + 1.\mu(B) \tag{11}$$

Em que $A = [0,1] \cap \mathbb{Q}$ o conjunto dos números racionais no intervalo, $B = [0,1] - \mathbb{Q}$ o conjunto dos números irracionais e μ como sendo a medida de Lebesgue de um conjunto. E como $\mathbb{Q}$ é enumerável, sabemos que $\mu(\mathbb{Q}) = 0$ consequentemente $\mu(A) = 0$. Entretanto para $\mu(B)$, temos pelo Teorema da Extensão de Carathéodory, CABRAL (2016), temos que

$\ell([0,1]) = 1 = \mu^*([0,1]) = \mu^*([0,1] \cap \mathbb{Q}) + \mu^*([0,1] - \mathbb{Q}) \Rightarrow \mu^*([0,1] - \mathbb{Q}) = 1$. E portanto a integral de Lebesgue de $f = 1$

4.3 Teorema de Convergência

A convergência da integral de Lebesgue é outra aplicação que será abordada nesse capítulo. Entretanto vamos abordar apenas o Teorema da convergência monótona e alguns de seus corolários.

Utilizamos esse o teorema pois as vezes pode ser difícil calcular $\int f d\mu$ diretamente da definição, pois trabalhamos com o supremo de uma família enorme, geralmente não-enumerável, de funções simples. Segundo SANTOS 2013 o teorema da convergência monótona, assegura que para calcular $\int f$ é suficiente calcular $lim_{n\to\infty} \int f_n$ onde f_n é um sequencia decrescente de funções mensuráveis não negativas convergindo pontualmente para f.

Lema 4.1. *Seja $f, g \in M^+(X, E)$ e $f \leq g$, então*

$$\int f d\mu \leq \int g d\mu.$$

Demonstração:
Seja $\varphi \in M^+$ uma função simples tal que $0 \leq \varphi \leq f$ então $0 \leq \varphi \leq g$. Então

$$\int f d\mu \leq \int g d\mu.$$

■

Teorema 4.3. *(Convergência Monótona.) Seja (X, E, μ) um espaço de medida e $\langle f_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções reais não-negativas integráveis em X tal que*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \text{ µ para quase todo ponto em } X \text{ (convergência pontual).}$$

Suponha que a sequência é monótona crescente, ou seja,

$$f_n(x) \leq f_{n+1}(x), \text{ µ para quase todo ponto em X, para todo } n \in \mathbb{N} \text{ (monotonicidade).}$$

Se $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int f_n d\mu < \infty$, então f é integrável e

$$\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu$$

Demonstração:

Seja $f \in M^{+}$, então pelo lema anterior temos $f_n \leq f_{n+1} \leq f$, então

$$\int f_n d\mu \leq \int f_{n+1} d\mu \leq \int f d\mu, \forall n \in \mathbb{N}$$

Então temos que

$$lim \int f_n d\mu \leq \int f d\mu$$

Agora seja $a \in \mathbb{R}$ em que $0 < a < 1$ e φ um função simples tal que $0 \leq \varphi \leq f$. Então

$$A_n = \{x \in X : f_n(x) \geqslant a\varphi(x)\}$$

Logo, $A_n \in E, A_n \subseteq A_{n+1}$ e $X \cap A_n$ então

$$\int_{A_n} a\varphi d\mu \leq \int_{A_n} f_n d\mu \leq \int f_n d\mu$$

Como (A_n) é um sequencia monótono crescente podemos escrever

$$\int \varphi d\mu = lim \int_{A_n} \varphi d\mu$$

Agora aplicando o limite em $\int_{A_n} a\varphi d\mu$ e como $0 < a < 1$ temos:

$$a \int \varphi d\mu \leq lim \int f_n d\mu \Rightarrow \int \varphi d\mu \leq lim \int f_n d\mu$$

E como $0 \leq \varphi \leq f$ é um função arbitraria simples em M^{+} podemos escrever

$$\int f d\mu = sup \int \varphi d\mu \leq lim \int f_n d\mu$$

■

Lema 4.2. *(Lema de Fatou) Seja $f_n \in M^{+}$ uma sequência de funções mensuráveis não negativas definidas. Então temos:*

$$\int \lim_{n\to\infty} inf f_n \leq \lim_{n\to\infty} inf \int f_n.$$

Demonstração:
Seja $g_m = inf\{f_m,f_{m+1},...\}$ então $g_m \leq f_n$ sempre que $m \leq n$. Então

$$\int g_m d\mu \leq \int f_n d\mu, m \leq n,$$

Logo

$$\int g_m d\mu \leq lim\ inf \int f_n d\mu.$$

Enquanto a sequencia (g_m) for crescente e convergir para $lim\ inf f_n$ o teorema da convergência monótona implica que

$$\int (lim\ inf f_n) d\mu = lim \int g_m d\mu \leq lim\ inf \int f_n d\mu.$$

■

Corolário 4. *Seja $\{f_n\}$ uma sequência monótona de funções Lebesgue integráveis em $[a,b]$ e suponhamos que $\{f_n\}$ converge para f pontualmente em $[a,b]$. Se $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_a^b f_n$ é finito, então f é Lebesgue integrável em $[a,b]$ e temos:*

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n$$

Corolário 5. *Seja $\{f_n\}$ uma sequência não negativa de funções mensuráveis em $[a,b]$. Então temos:*

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n$$

Corolário 6. *Sejam $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função Lebesgue integrável em $[a,b]$ e E um subconjunto mensurável de $[a,b]$. Se $\{E_n\}$ é uma sequência disjunta de conjuntos mensuráveis tal que $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, então temos:*

$$\int_E f = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f$$

Exemplo 4.1. *Vamos provar que a função $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, definida para $x > 0$ e $f(0) = 0$, é Lebesgue integrável em $[0,1]$.*

Seja a sequência de funções, onde para cada inteiro positivo n, temos:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq x < \frac{1}{n^2}, \\ \frac{1}{\sqrt{x}}, & \text{se } \frac{1}{n^2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Cada uma das funções f_n é Lebesgue integrável em $[0,1]$ (já que são Riemann integráveis em $[0,1]$), e a sequência $\{f_n\}$ é uma sequência não-decrescente de funções não negativas que converge para $f(x)$ em $[0,1]$, de modo que:

$$\int_0^1 f_n = 2\sqrt{x}\Big|_{\frac{1}{n^2}}^{1} = 2 - \frac{2}{n}.$$

Como para cada $n \in \mathbb{Z}$, podemos encontrar $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n$, finito.

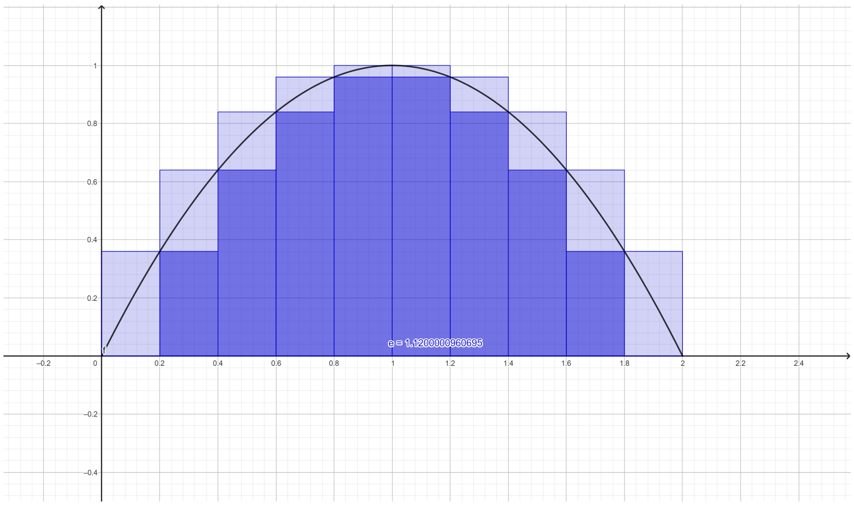
Portanto, pelo Teorema da Convergência Monótona, a função $f(x)$ é Lebesgue integrável em $[0,1]$ e

$$\int_0^1 f(x) = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n = 2.$$

5 REPRESENTAÇÕES GRÁFICAS

Neste Capítulo faremos algumas representações gráficas das integrais de Riemann e Lebesgue. Primeiramente vamos começar com a representação gráfica de Riemman para a função $f(x) = -x^2 + 2x$ no intervalo $[0,2]$.

Figura 1 – Integral de Riemann

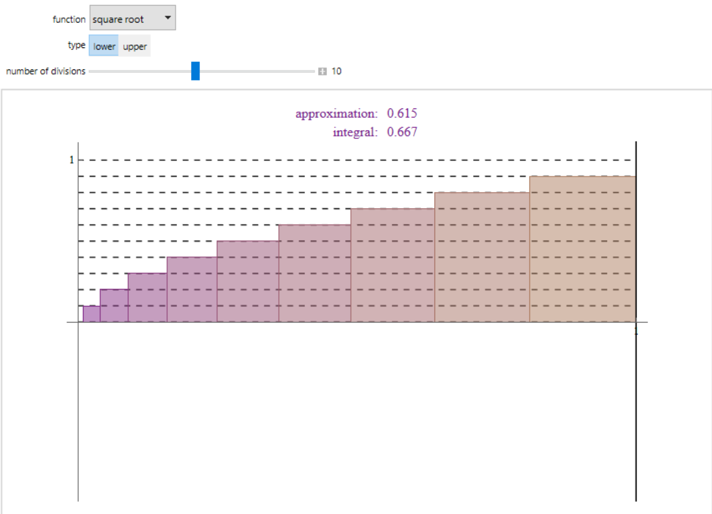


Fonte: Autoria Própria

Neste exemplo utilizamos apenas 10 retângulos para realizar a aproximação da área, entretanto no link abaixo é possível alterar o numero de retângulos e ter uma melhor visualização da aproximação. Link: https://www.geogebra.org/calculator/kkvyatrf

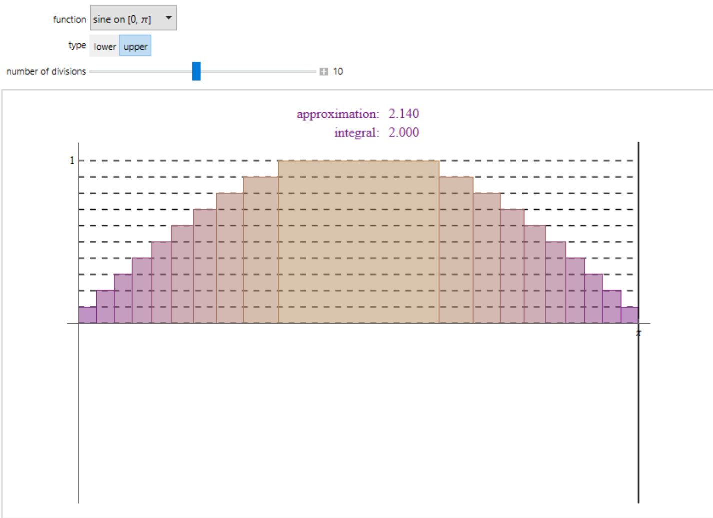
Para a integral de Lebesgue temos a aproximação feita por (Freniche, Francisco J.). Neste exemplo temos as aproximações de algumas funções, como $\sqrt{x}$ e $sen(x)$ que será representado por imagem a seguir.

Figura 2 – Integral de Lebesgue $\sqrt{x}$



Fonte: https://demonstrations.wolfram.com/RiemannVersusLebesgue/

Figura 3 – Integral de Lebesgue $sen(x)$

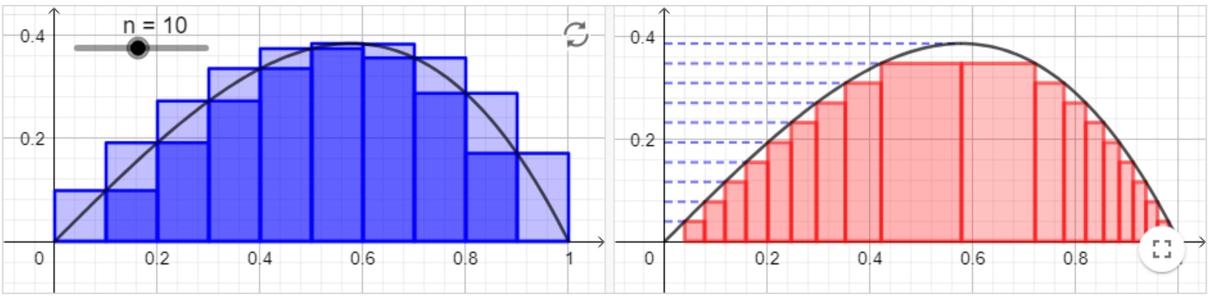


Fonte: https://demonstrations.wolfram.com/RiemannVersusLebesgue/

Nos dois exemplos a cima, utilizamos a integral de Lebesgue para realizar a aproximação do valor da área com 10 repartições. É notável que a diferença gráfica das duas teorias está presente nos retângulos, enquanto na teoria de Riemann os retângulos possuíam sempre a mesma largura, na teoria de lebesgue os não. Utilizando o link a seguir podemos ver algumas outras funções e ainda aumentar o numero de repartições. Link: https://demonstrations.wolfram.com/RiemannVersusLebesgue/

Outro exemplo bem legal para visualizar essas integrações de uma maneira gráfica é o exemplo feito por Fagradal, no geogebra. Este exemplo pode ser acessada para facilitar a

Figura 4 – Comparação Riemann e Lebesgue



Fonte: https://www.geogebra.org/m/W2umNHTq.

visualização no link: https://www.geogebra.org/m/W2umNHTq.

6 CONCLUSÃO

Em conclusão, esta pesquisa explorou alguns conceitos fundamentais da teoria da medida e sua aplicação na teoria da integração. Ao examinar tópicos como medida, medida de Lebesgue, teoria de integração de Lebesgue, conjunto de medida zero, descontinuidade, critério de Lebesgue para a integrabilidade de Riemann e o teorema da convergência monótona, obtivemos uma compreensão abrangente da relação entre esses conceitos e sua importância.

O estudo destacou a importância do critério de Lebesgue para a integrabilidade de Riemann como uma ferramenta para determinar a existência da integral de Riemann em funções específicas. Esse critério serve como uma ponte entre os dois métodos de integração.

Ao aprofundar nosso conhecimento teórico e explorar abordagens diversas de integração, este trabalho contribui para o campo mais amplo da análise matemática. Ele abre caminhos para pesquisas futuras e incentiva uma perspectiva mais refinada sobre as teorias de integração, promovendo uma compreensão mais profunda de suas aplicações em diversos contextos matemáticos.

REFERÊNCIAS

BARTLE, R. G. **"The Elements of Integration and Lebesgue Measure"**. [*S.l.*]: Wiley Classics Library Edition Published, 1995. 179 p. ISBN 978-0471042228.

CABRAL, M. A. P. **Introdução à Teoria da Medida e Integral de Lebesgue**. 2016.

GOMES, J. R. M.; CARDONA, F. S. P. **Uma condição necessária e suficiente para integrabilidade de uma função real**. 2008.

GUIDORIZZI, H. **Um curso de cálculo**. [*S.l.*]: LTC, 2013. ISBN 9788521612803.

LIMA, E. **Curso de análise**. [*S.l.*]: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1982. (Curso de análise, v. 1).

SANTOS, L. N. d. **As Integrais de Riemann, Riemann-Stieltjes e Lebesgue**. 2013. 116 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2013.

VIANA, M.; OLIVEIRA, K. **Fundamentos da Teoria Ergódica**. [*S.l.*]: SBM, 2013. ISBN 978-8583370178. Acesso em: 21 ago. 2013.

WANG, S. **Another method of Integration: Lebesgue Integral**. 2017.