

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

LETÍCIA ALBUQUERQUE GRATÃO

AS GAVETAS DA MATEMÁTICA

CURITIBA

2023

LETÍCIA ALBUQUERQUE GRATÃO

AS GAVETAS DA MATEMÁTICA

The Math drawers

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação
apresentado como requisito para obtenção do
título de Licenciado em Matemática do Curso
de Licenciatura em Matemática da Universidade
Tecnológica Federal do Paraná.

Orientador: Prof^a Dr^a. Mari Sano

CURITIBA

2023



[4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

Esta licença permite compartilhamento, remixe, adaptação e criação a partir do trabalho, mesmo para fins comerciais, desde que sejam atribuídos créditos ao(s) autor(es). Conteúdos elaborados por terceiros, citados e referenciados nesta obra não são cobertos pela licença.

LETÍCIA ALBUQUERQUE GRATÃO

AS GAVETAS DA MATEMÁTICA

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação
apresentado como requisito para obtenção do
título de Licenciado em Matemática do Curso
de Licenciatura em Matemática da Universidade
Tecnológica Federal do Paraná.

Data de aprovação: 21/junho/2023

Mari Sano
Doutorado
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Patrícia Massae Kitani
Doutorado
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Francismar Ferreira Lima
Doutorado
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

CURITIBA
2023

RESUMO

Neste trabalho abordaremos o Princípio das Gavetas de Dirichlet ou Princípio da Casa dos Pombos e suas generalizações, dando foco para as suas inúmeras aplicações em diversas áreas da matemática. Além disso, apresentaremos, de maneira breve, a história deste Princípio.

Palavras-chave: princípio das gavetas de dirichlet; combinatória; aplicações.

ABSTRACT

In this work we will approach Dirichlet's Drawers Principle or The Pigeonhole Principle and its generalizations, focusing in the innumerable applications in several fields of mathematics. Furthermore, we will briefly present the history of this Principle.

Keywords: dirichlet's drawers principle; combinatorics; applications.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Triângulo equilátero com pontos azuis ou vermelhos	19
Figura 2 – 13 pontos em um retângulo 3x4	19
Figura 3 – 9 pontos em um cubo de lado 1	20
Figura 4 – 5 pontos em um triângulo de lado 1	21
Figura 5 – 5 pontos em um quadrado de lado 1	22
Figura 6 – 8 pontos em um quadrado de lado 1	22
Figura 7 – Seis pessoas que se conhecem ou não se conhecem	44
Figura 8 – Exemplo em que 3 pessoas se conhecem mutuamente	45
Figura 9 – Exemplo em que uma pessoa não conhece três pessoas	45
Figura 10 – Exemplo de três pessoas que não se conhecem mutuamente	46
Figura 11 – Exemplo de três pessoas que se conhecem mutuamente	46

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Tábuas de adição e multiplicação de $\mathbb{Z}_3$	14
Tabela 2 – Probabilidade de, dadas n pessoas, duas fazerem aniversário no mesmo dia.	27

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
2	PRELIMINARES	10
2.1	Divisibilidade	10
2.2	Congruências	10
2.3	Aritmética módulo m	12
2.3.1	Classes de Equivalência	12
3	O PRINCÍPIO DAS GAVETAS	15
3.1	Diferentes Provas	15
3.2	Generalizações	16
4	APLICAÇÕES SIMPLES	18
4.1	Aplicações simples que envolvem Geometria	18
4.2	Aplicações simples que envolvem Aritmética	23
4.3	Aplicações simples que envolvem probabilidade	26
4.4	Aplicações simples que envolvem funções	27
4.5	Aplicações simples que envolvem Análise combinatória	27
5	APLICAÇÕES AVANÇADAS	29
5.1	Aplicações avançadas que envolvem Aritmética	29
5.2	Aplicações avançadas que envolvem Análise	40
5.3	Aplicações avançadas que envolvem Trigonometria	42
5.4	Aplicações avançadas que envolvem Álgebra Linear	43
5.5	Aplicações avançadas que envolvem Análise Combinatória	44
5.6	Aplicações Avançadas que envolvem funções	47
6	CONCLUSÃO	49
	REFERÊNCIAS	50

1 INTRODUÇÃO

Um dos tópicos da Análise Combinatória é o Princípio das gavetas de Dirichlet. De enunciado simples de compreender, mas que nos permite resolver problemas e demonstrar resultados em diferentes áreas como Geometria, Teoria de Números, entre outras. Este Princípio afirma que, *se $n+1$ objetos são colocados em n gavetas, então pelo menos uma gaveta deverá conter 2 ou mais objetos* (SANTOS; MELLO; MURARI, 1995).

Também conhecido como Princípio da Casa dos Pombos, essa poderosa ferramenta matemática é frequentemente relacionada ao matemático francês Dirichlet, já que acredita-se que ele tenha sido o primeiro a enunciá-lo.

Mas quem foi Dirichlet? Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet nasceu em 13 de fevereiro de 1805, em Düren. Seu primeiro trabalho foi a prova para $n = 5$ do Último Teorema de Fermat. O teorema diz que para $n > 2$ não existem inteiros x, y, z diferentes de zero tais que $x^n + y^n = z^n$. Também foi responsável pela proposição da definição moderna de função: *Se uma variável y está relacionada a uma variável x e para todo valor associado a x existe uma regra na qual um único valor de y é determinado, então y é dita função da variável independente x .*

Dirichlet utilizou o Princípio das gavetas em algumas demonstrações, mas sequer tentou tomar os créditos pelo Princípio. Isso provavelmente se deve ao fato de que essa não foi a primeira vez que o Princípio foi usado.

Segundo Heeffer (HEEFFER, 2014), o Princípio das gavetas de Dirichlet já foi mencionado de forma indireta em *Selectae Propositiones*, livro escrito em 1622 pelo francês Jean Leurechon, que o utilizava para lecionar na Universidade Jesuíta de Pont-à-Mousson. A passagem era simples e objetiva, escrita em uma única frase: "é necessário que dois homens tenham o mesmo número de cabelos, ouro, e outros". Também, no final do livro *Récréation mathématique*, publicado em 1624 pela Universidade Jesuíta de Pont-à-Mousson e aparentemente atribuído a Leurechon, foi resolvido o problema, usando o Princípio das gavetas de Dirichlet.

De qualquer forma, Dirichlet não foi o primeiro a usar o Princípio. Mas mesmo assim, o princípio é conhecido como Princípio das gavetas de Dirichlet e é o termo que usaremos aqui.

Neste Trabalho de Conclusão de Curso, primeiramente, apresentaremos, no capítulo 2 alguns conceitos iniciais, necessários para a demonstração de diversas aplicações. Em seguida, no capítulo 3, enunciaremos o Princípio das Gavetas de Dirichlet, ao qual demonstraremos de diferentes maneiras e traremos suas generalizações. Por fim, nos capítulos 4 e 5, apresentaremos diversas aplicações utilizando o Princípio e separando-as entre aplicações simples e avançadas, em diferentes áreas da matemática. Algumas dessas aplicações serão desenvolvidas usando o software Geogebra para uma melhor visualização.

2 PRELIMINARES

Neste capítulo, iremos abordar alguns conceitos básicos da Teoria de Números, que serão necessários para a resolução de diversas aplicações que envolvem o Princípio das Gavetas de Dirichlet.

2.1 Divisibilidade

Dados $a, b \in \mathbb{Z}$, dizemos que a divide b ou b é divisível por a quando existe $c \in \mathbb{Z}$ tal que $b = ac$. Denota-se $a|b$. Quando não existe c tal que $b = ac$, então b não é divisível por a . Denota-se $a \nmid b$.

Exemplo 1. *4 divide 20 mas não divide 22.*

Temos que 20 pode ser escrito como $20 = 4 \cdot 5$ e 22 pode ser escrito como $22 = 4 \cdot 5 + 2$, ou seja, não existe $c \in \mathbb{Z}$ que multiplicado por 4 resulte em 22.

Proposição 1. *Sejam a, b, c inteiros. Então*

- (i) $a|0, 1|a, a|a$;
- (ii) $a|1$ se e somente se $a = \pm 1$;
- (iii) se $a|b$ e $c|d$, então $ac|bd$;
- (iv) se $a|b$ e $b|c$, então $a|c$;
- (v) $a|b$ e $b|a$ se, e somente se, $a = \pm b$;
- (vi) se $a|b$ e $b \neq 0$, então $|a| \leq |b|$;
- (vii) se $a|b$ e $a|c$, então $a|bx + cy$ para todos os inteiros x e y .

A demonstração dessa proposição pode ser encontrada em (BURTON, 2011).

2.2 Congruências

Sejam a, b e m números inteiros com $m > 1$. Dizemos que a e b são congruentes módulo m se os restos na sua divisão por m são iguais. Denota-se

$$a \equiv b \pmod{m}.$$

Se a e b não deixam o mesmo resto na divisão por m , dizemos que a é incongruente a b módulo m e escrevemos $a \not\equiv b \pmod{m}$.

Exemplo 2. 25 e 16 são congruentes módulo 3.

Sabemos que $25 = 3 \cdot 8 + 1$ e $16 = 3 \cdot 5 + 1$.

Como 25 e 16 deixam resto 1 na divisão por 3, então $25 \equiv 16 \pmod{3}$.

Exemplo 3. 25 e 16 não são congruentes módulo 4.

Sendo que $25 = 4 \cdot 6 + 1$ e $16 = 4 \cdot 4$.

Logo 25 e 16 deixam restos diferentes na divisão por 4, então $25 \not\equiv 16 \pmod{4}$.

Proposição 2. Seja $m \in \mathbb{N}$, com $m > 1$. Para todos $a, b, c \in \mathbb{Z}$, tem-se que

(i) $a \equiv a \pmod{m}$;

(ii) se $a \equiv b \pmod{m}$, então $b \equiv a \pmod{m}$;

(iii) se $a \equiv b \pmod{m}$ e $b \equiv c \pmod{m}$, então $a \equiv c \pmod{m}$.

Note que a Proposição 2 mostra que a congruência é uma relação de equivalência. A demonstração dessa proposição pode ser encontrada em (HEFEZ, 2016).

Para verificar se dois números são congruentes módulo m não é necessário efetuar a divisão euclidiana, basta utilizar o seguinte resultado:

Proposição 3. Suponha que $a, b, m \in \mathbb{Z}$ com $m > 1$. Tem-se que $a \equiv b \pmod{m}$ se, e somente se, $m | b - a$.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Por hipótese, sabemos que a e b deixam mesmo resto na divisão por m . Logo, $a = mq_1 + r$ e $b = mq_2 + r$. Assim, temos

$$b - a = (mq_2 + r) - (mq_1 + r) = mq_2 - mq_1 + r - r = mq_2 - mq_1 = m(q_2 - q_1).$$

Dessa maneira, $m | b - a$.

($\Leftarrow$) Pelo algoritmo da divisão euclidiana temos que $a = mq_1 + r_1$ e $b = mq_2 + r_2$, com $0 \leq r_1, r_2 < m$.

Assim, $b - a = (mq_2 + r_2) - (mq_1 + r_1) = m(q_2 - q_1) + r_2 - r_1$. Como $m | b - a$ e $m | m(q_2 - q_1)$, temos que $m | r_2 - r_1$.

Logo, $r_2 = r_1$ pois $|r_2 - r_1| < m$.

□

Exemplo 4. 25 e 16 são congruentes módulo 3.

Podemos verificar que $25 - 16 = 9$ e $3 | 9$. Assim, $25 \equiv 16 \pmod{3}$.

Proposição 4. Sejam $a, b, c, d, m \in \mathbb{Z}$ com $m > 1$.

(i) Se $a \equiv b \pmod{m}$ e $c \equiv d \pmod{m}$, então $a + c \equiv b + d \pmod{m}$.

(ii) Se $a \equiv b \pmod{m}$ e $c \equiv d \pmod{m}$, então $ac \equiv bd \pmod{m}$.

Demonstração. Se $a \equiv b \pmod{m}$ e $c \equiv d \pmod{m}$, então $m | b - a$ e $m | d - c$.

- (i) Como $m|b - a$ e $m|d - c$, então $m|(b - a) + (d - c)$, logo $m|(b + d) + (a + c)$. Pela Proposição 3, segue que $a + c \equiv b + d \pmod{m}$.
- (ii) Como $m|b - a$ e $m|d - c$, então $m|d(b - a)$ e $m|a(d - c)$, logo $m|d(b - a) + a(d - c)$, dessa maneira $m|db - ac$. Portanto, $ac \equiv bd \pmod{m}$.

□

Corolário 1. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $a, b, m \in \mathbb{Z}$, com $m > 1$. Se $a \equiv b \pmod{m}$ então $a^n \equiv b^n \pmod{m}$.

Demonstração. Vamos provar utilizando indução em n .

Para $n = 1$, temos que se $a \equiv b \pmod{m}$ por hipótese.

Agora, supomos que a afirmação é válida para algum $k \in \mathbb{N}$ e provaremos que é válida para $k + 1$. Assim, se $a \equiv b \pmod{m}$ então $a^k \equiv b^k \pmod{m}$.

Como $a \equiv b \pmod{m}$ e, pela hipótese de indução, $a^k \equiv b^k \pmod{m}$, temos, pela proposição anterior, que $a \cdot a^k \equiv b \cdot b^k \pmod{m}$, então $a^{k+1} \equiv b^{k+1} \pmod{m}$.

Pelo Princípio da Indução segue que, se $a \equiv b \pmod{m}$, então $a^n \equiv b^n \pmod{m}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. □

2.3 Aritmética módulo m

Nesta seção, estudaremos, de maneira sucinta, a aritmética módulo m , que nos auxiliará em algumas aplicações. Para mais detalhes e demonstrações, o leitor pode consultar (HEFEZ, 2016).

2.3.1 Classes de Equivalência

Sejam a, x e m números inteiros com $m > 1$. Definimos a classe residual módulo m de a , denotada por $\bar{a}$, como o conjunto de todos os inteiros congruentes a a módulo m , isto é,

$$\begin{aligned}\bar{a} &= \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv a \pmod{m}\} \\ &= \{a + mt \mid t \in \mathbb{Z}\}.\end{aligned}$$

Note que $a \in \mathbb{Z}$, então $\bar{a} \neq \emptyset$, já que vimos anteriormente que $a \equiv a \pmod{m}$.

O conjunto de todas as classes residuais módulo m é denotado por $\mathbb{Z}_m$. Assim,

$$\mathbb{Z}_m = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{m-1}\},$$

como mostra o Corolário 2.

Exemplo 5. Seja $m = 3$. Então

$$\bar{0} = \{3t \mid t \in \mathbb{Z}\}$$

$$\bar{1} = \{3t + 1 \mid t \in \mathbb{Z}\}$$

$$\bar{2} = \{3t + 2 \mid t \in \mathbb{Z}\}$$

tem-se que

$$a \in \begin{cases} \bar{0}, & \text{se } a \text{ é múltiplo de } 3 \\ \bar{1}, & \text{se } a \text{ tem resto } 1 \text{ quando dividido por } 3 \\ \bar{2}, & \text{se } a \text{ tem resto } 2 \text{ quando dividido por } 3. \end{cases}$$

Proposição 5. As classes residuais possuem as seguintes propriedades:

- (i) $\bar{a} = \bar{b}$ se, e somente, se $a \equiv b \pmod{m}$;
- (ii) Se $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$, então $\bar{a} = \bar{b}$;
- (iii) $\bigcup_{a \in \mathbb{N}} \bar{a} = \mathbb{Z}$.

Proposição 6. Para cada $a \in \mathbb{Z}$ existe um, e somente um, $r \in \mathbb{Z}$, com $0 \leq r < m$, tal que $\bar{a} = \bar{r}$.

Demonstração. Seja $a \in \mathbb{Z}$. Pelo algoritmo da divisão euclidiana, existem q e r únicos com $0 \leq r < m$ tais que $a = qm + r$. Isso é o mesmo que dizer que $a \equiv r \pmod{m}$. Logo, pelo item (i) da Proposição 5, $\bar{a} = \bar{r}$. Consequentemente, este é o único inteiro r tal que $0 \leq r < m$ e $\bar{a} = \bar{r}$. $\square$

Corolário 2. Existem exatamente m classes residuais distintas módulo m , a saber, $\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{m-1}$.

Podemos definir as operações de adição e multiplicação em um conjunto $\mathbb{Z}_m$ da seguinte maneira:

- **Adição:** $\bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b}$.
- **Multiplicação:** $\bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{a \cdot b}$.

A seguir, mostraremos que estas operações estão bem definidas.

Se $\bar{a} = \bar{a'} \in \mathbb{Z}_m$ e $\bar{b} = \bar{b'} \in \mathbb{Z}_m$, então, pelo item (i) da Proposição 5, $a \equiv a' \pmod{m}$ e $b \equiv b' \pmod{m}$, portanto $a + b \equiv a' + b' \pmod{m}$ e $a \cdot b \equiv a' \cdot b' \pmod{m}$ e, consequentemente,

$\overline{a + b} = \overline{a' + b'}$ e $\overline{a \cdot b} = \overline{a' \cdot b'}$. Isso mostra que a soma e o produto de classes não dependem do representante da classe, garantindo que $\overline{a + b}$ é única e $\overline{a \cdot b}$ também é única.

Exemplo 6. *Tábuas de adição e multiplicação de $\mathbb{Z}_3$.*

Tabela 1 – Tábuas de adição e multiplicação de $\mathbb{Z}_3$

(a) Tábua de adição de $\mathbb{Z}_3$

+	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{0}$	0	1	2
$\overline{1}$	1	2	0
$\overline{2}$	2	0	1

(b) Tábua de multiplicação de $\mathbb{Z}_3$

$\cdot$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{0}$	0	0	0
$\overline{1}$	0	1	2
$\overline{2}$	0	2	1

Propriedades da Adição

Para todo $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in \mathbb{Z}_m$, temos

- (i) Associatividade: $(\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c} = \overline{a} + (\overline{b} + \overline{c})$;
- (ii) Comutatividade: $\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}$;
- (iii) Existência de zero: $\overline{a} + \overline{0} = \overline{a}$ para todo $\overline{a} \in \mathbb{Z}_m$;
- (iv) Existência de inverso: $\overline{a} + \overline{-a} = \overline{0}$.

Propriedades da Multiplicação

Para todo $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in \mathbb{Z}_m$, temos

- (i) Associatividade: $(\overline{a} \cdot \overline{b}) \cdot \overline{c} = \overline{a} \cdot (\overline{b} \cdot \overline{c})$;
- (ii) Comutatividade: $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{b} \cdot \overline{a}$;
- (iii) Existência de identidade: $\overline{a} \cdot \overline{1} = \overline{a}$;
- (iv) Distributividade: $\overline{a} \cdot (\overline{b} + \overline{c}) = \overline{a} \cdot \overline{b} + \overline{a} \cdot \overline{c}$.

Proposição 7. *Um elemento $\overline{a} \in \mathbb{Z}_m$ é invertível se, e somente se, $\text{mdc}(a, m) = 1$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Se $\overline{a}$ é invertível, então existe $\overline{b} \in \mathbb{Z}_m$ tal que $\overline{1} = \overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{a \cdot b}$. Logo, $a \cdot b \equiv 1 \pmod{m}$, isto é, existe um $t \in \mathbb{Z}$ tal que $a \cdot b + t \cdot m = 1$ e, consequentemente, $\text{mdc}(a, m) = 1$.

($\Leftarrow$) Supomos que $\text{mdc}(a, m) = 1$. Logo, existem $b, t \in \mathbb{Z}$ tais que $a \cdot b + t \cdot m = 1$. Dessa maneira, temos que

$$\overline{1} = \overline{a \cdot b + t \cdot m} = \overline{1} = \overline{a \cdot b} + \overline{t \cdot m} = \overline{a} \cdot \overline{b} + \overline{0} = \overline{a} \cdot \overline{b}$$

Portanto, $\overline{a}$ é invertível. □

3 O PRINCÍPIO DAS GAVETAS

Neste capítulo, iremos nos aprofundar no Princípio em si, conhecendo algumas maneiras de demonstrá-lo e suas principais generalizações.

3.1 Diferentes Provas

Primeiramente, enunciaremos e demonstraremos o Princípio das Gavetas de Dirichlet por absurdo.

Teorema 1. *Princípio das Gavetas de Dirichlet*

Dados m objetos dispostos em n gavetas, com $m > n$, então, pelo menos, uma gaveta terá mais de um objeto.

Demonstração. Podemos entender o Princípio de maneira mais intuitiva e imediata através da demonstração por absurdo.

Suponha, por absurdo, que nenhuma gaveta tenha dois ou mais objetos. Dessa forma, teremos, no máximo, n objetos, o que é uma contradição.

□

O Princípio das Gavetas de Dirichlet, também pode ser demonstrado utilizando o Princípio da Indução Matemática.

Faremos Indução no número n de gavetas.

Para $n = 1$ temos uma quantidade $m > 1$ de objetos e todos eles serão colocados em uma gaveta. Assim, esta gaveta terá mais de um objeto.

Supomos que o resultado é válido para algum n natural, onde n é o número de gavetas. Mostraremos que o resultado também é válido se tivermos $n + 1$ gavetas e $m > n + 1$ objetos.

Para $n + 1$ gavetas, colocamos os objetos de maneira aleatória. Então, escolhemos uma gaveta ao acaso. Se esta gaveta contém mais de um objeto, concluimos nossa afirmação. Se a gaveta não contém nenhum objeto, as n gavetas restantes devem conter $m > n + 1 > n$ objetos, que pela hipótese de indução, nos garante que, pelo menos, uma das gavetas restantes terá mais de um objeto. Por fim, se a gaveta tem um objeto, as n gavetas restantes terão $m - 1 \geq n + 1 > n$ objetos, que, pela hipótese de indução, garante que, pelo menos, uma das gavetas restantes terá mais de um objeto.

Pelo princípio da Indução Matemática, segue que, dados m objetos dispostos em n gavetas, com $m > n$, então, pelo menos, uma gaveta terá mais de um objeto.

Uma outra maneira de demonstrar o Princípio das Gavetas de Dirichlet é utilizando médias aritméticas. Vamos estudar a definição e um teorema importante sobre o assunto.

Definição 1. A média aritmética (simples) da lista de n números $x_1, x_2, \dots, x_n$ é definida por

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

Uma propriedade direta da média aritmética é:

Teorema 2. Se a média aritmética dos números $x_1, x_2, \dots, x_n$ é maior ou igual a M , pelo menos, um dos números $x_1, x_2, \dots, x_n$ é maior ou igual a M .

Demonstração. Suponha que $x_1 < M, x_2 < M, \dots, x_n < M$. Assim,

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} < \frac{M + M + \dots + M}{n} = \frac{nM}{n} = M,$$

o qual é um absurdo, já que $\bar{x} \geq M$.

□

Agora, podemos demonstrar o Princípio das Gavetas de Dirichlet usando média aritmética.

Temos $m > n$, ou seja $m = n + r$ para algum $r \in \mathbb{N}$. Seja x_i o número de objetos colocados na gaveta i , para $i = 1, 2, \dots, n$. A média de número de objetos por gaveta é

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{n + r}{n} = 1 + \frac{r}{n} > 1.$$

Pelo teorema anterior, pelo menos, um dos x_i é maior ou igual a $1 + \frac{r}{n}$. Como x_i é um número natural temos que x_i é maior ou igual a 2, isto é, pelo menos, uma das gavetas terá mais do que 1 objeto.

Exemplo 7. Em um grupo de 10 pessoas, pelo menos, duas delas nasceram no mesmo dia da semana.

Demonstração. Considerando as 10 pessoas como objetos e os 7 dias da semana como gavetas, temos que $10 > 7$, então, pelo Princípio das Gavetas de Dirichlet, pelo menos, duas pessoas do grupo, nasceram no mesmo dia da semana.

□

3.2 Generalizações

Teorema 3. Se n gavetas são ocupadas por $nk + 1$ objetos, então, pelo menos, uma gaveta deverá conter, pelo menos, $k + 1$ objetos.

Demonstração. Suponha, por absurdo, que cada gaveta terá no máximo k objetos. Dessa maneira, a quantidade máxima de objetos será nk , o que é uma contradição.

□

Note que, essa generalização também pode ser demonstrada usando a propriedade da média aritmética.

Exemplo 8. *Prove que ao retirar nove bolas de uma urna que contém 5 bolas brancas, 5 bolas pretas, 5 bolas vermelhas e 5 bolas azuis, é possível obter, pelo menos, três bolas de uma das cores.*

Demonstração. Considerando as quatro cores como gavetas ($n = 4$) e as bolas retiradas como objetos ($nk + 1 = 9$), temos que $4k + 1 = 9$, logo, $k = 2$ e $k + 1 = 3$. Assim, de 9 bolas retiradas, pelo menos, 3 serão da mesma cor.

□

No próximo teorema, abordaremos a função piso, dada por $\lfloor x \rfloor$, que associa a cada x o maior inteiro menor ou igual a x .

Teorema 4. *Se n gavetas são ocupadas por m objetos, então em, pelo menos, uma gaveta haverá ao menos $\lfloor \frac{(m-1)}{n} \rfloor + 1$ objetos.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que cada gaveta tenha no máximo $\lfloor \frac{(m-1)}{n} \rfloor$ objetos. Então, a quantidade máxima de objetos será $\lfloor \frac{(m-1)}{n} \rfloor n$. E $\lfloor \frac{(m-1)}{n} \rfloor n \leq \frac{(m-1)}{n} n = m - 1$. Assim, a quantidade total de objetos será menor ou igual a $m - 1$, o que é uma contradição.

□

O próximo exemplo foi adaptado a partir da referência (MACIEL, 2020).

Exemplo 9. *Supondo que uma pessoa normal tenha, em média, 150.000 fios de cabelos e que nenhuma pessoa tenha mais de 500.000 fios de cabelo.*

Segundo o IBGE, a estimativa de habitantes da cidade de Curitiba em 2020 era de aproximadamente 1.948.626, então, em Curitiba há, pelo menos,

$$\lfloor \frac{(1.948.626)}{500.000} \rfloor + 1 = 4$$

pessoas com a mesma quantidade de fios de cabelo.

Este último exemplo nos remete aos estudos de Jean Leurechon, comentados no primeiro Capítulo 1, que afirmou que "é necessário que dois homens tenham o mesmo número de cabelos, ouro, e outros".

4 APLICAÇÕES SIMPLES

Neste capítulo apresentaremos aplicações simples do Princípio das Gavetas de Dirichlet, que utilizam conceitos matemáticos básicos e de fácil entendimento. Os conteúdos abordados serão Geometria, Aritmética, Análise Combinatória, Probabilidade e Funções. Algumas dessas aplicações podem, inclusive, ser estudadas por alunos de Ensino Médio, ou incorporadas em um conteúdo já desenvolvido pelo professor.

Os exercícios aqui presentes foram retirados dos materiais (STEFFENON; GUARNIERI, 2016), (BOGOMOLNY, 2018), (SANTOS; MELLO; MURARI, 1995).

4.1 Aplicações simples que envolvem Geometria

Aplicação 1. *Em cada casa de um tabuleiro 5×5 , tem uma pulga. Todas as pulgas irão pular para uma casa adjacente (duas casas são adjacentes se compartilham uma aresta). É possível que depois de todas as pulgas terem pulado para novas casas, a configuração seja igual à anterior, com uma pulga em cada casa?*

Não. Se imaginarmos o tabuleiro como um tabuleiro de xadrez, com casas brancas e pretas alternadas, supomos, sem perda de generalidade, que teremos 13 casas pretas e 12 casas brancas. As pulgas que estão nas casas pretas só poderão pular para as casas brancas. Considerando as 13 casas pretas como objetos e as 12 casas brancas como as gavetas, segue, pelo Princípio das Gavetas de Dirichlet, que, pelo menos, duas pulgas que saíram das casas pretas, pularão para a mesma casa branca.

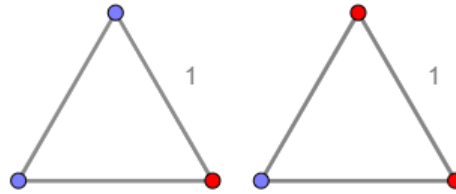
Aplicação 2. *Se cada ponto do plano está colorido de vermelho ou azul, então existem dois pontos da mesma cor de distância 1 entre eles.*

Demonstração. Tomamos três pontos que formam um triângulo equilátero de lado 1. Considerando os três pontos como os objetos e as duas cores como as gavetas, segue, pelo Princípio das Gavetas de Dirichlet, que, pelo menos, dois pontos terão a mesma cor, logo, existem dois pontos da mesma cor de distância 1 entre eles.

□

Para uma melhor visualização da aplicação 2, veja Figura 1.

Figura 1 – Triângulo equilátero com pontos azuis ou vermelhos



Fonte: Autoria Própria.

Os próximos dois exercícios podem ser discutidos e resolvidos em uma sala de aula regular de matemática, após ser desenvolvido o conteúdo Teorema de Pitágoras. Os enunciados das aplicações podem ser adaptados, retirando a obrigatoriedade da demonstração completa e adicionando a pergunta "Qual será a maior distância possível entre qualquer um dos pontos e seu ponto mais próximo?".

Aplicação 3. Se marcarmos 13 pontos no interior de um retângulo 3×4 , mostre que existem dois pontos tais que sua distância é menor ou igual a $\sqrt{2}$.

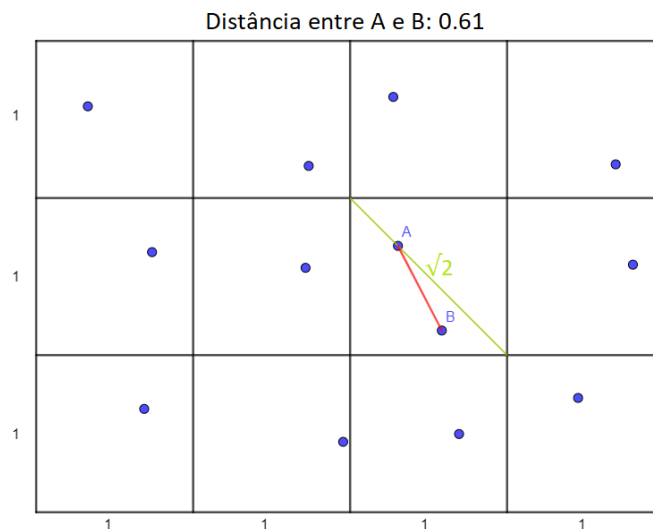
Demonstração. Dividimos o retângulo em 12 quadrados de lado 1. Dois pontos dentro de um quadrado de lado 1 não terão distância maior que a medida da sua diagonal, que é $\sqrt{2}$.

Considerando os 13 pontos como objetos e os 12 quadrados como gavetas, segue que pelo Princípio das gavetas de Dirichlet, pelo menos, dois pontos estarão dentro de um mesmo quadrado, logo, esses dois pontos terão distância menor ou igual a $\sqrt{2}$.

□

Um exemplo da configuração dos pontos da maneira determinada pela aplicação anterior pode ser visualizada na Figura 2.

Figura 2 – 13 pontos em um retângulo 3x4



Fonte: Autoria Própria.

Aplicação 4. *Mostre que, dentre 9 pontos quaisquer de um cubo de aresta 2, existem, pelo menos, dois pontos que se encontram a uma distância menor ou igual a $\sqrt{3}$ um do outro.*

Demonstração. Podemos dividir o cubo de aresta 2 em oito cubos menores, de aresta 1. Considerando os 9 pontos como os objetos e os 8 cubos menores como gavetas, segue, pelo Princípio das Gavetas de Dirichlet, que, pelo menos, um cubo contém mais de um ponto.

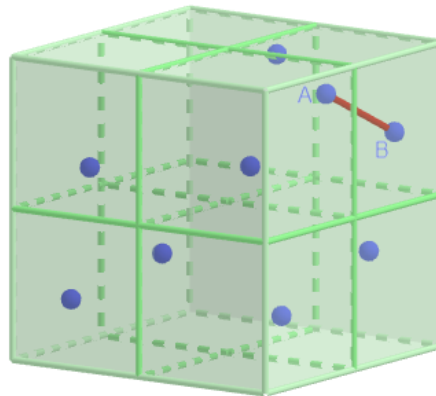
A maior distância possível entre dois pontos dentro de um cubo de aresta a é a medida da sua diagonal, que é dada por $d = \sqrt{3}a$. Como a aresta dos cubos menores é 1, sua diagonal medirá $d = \sqrt{3}$.

□

Na Figura 3, podemos visualizar um exemplo da aplicação anterior.

Figura 3 – 9 pontos em um cubo de lado 1

Distância entre A e B é 0,3



Fonte: Autoria Própria.

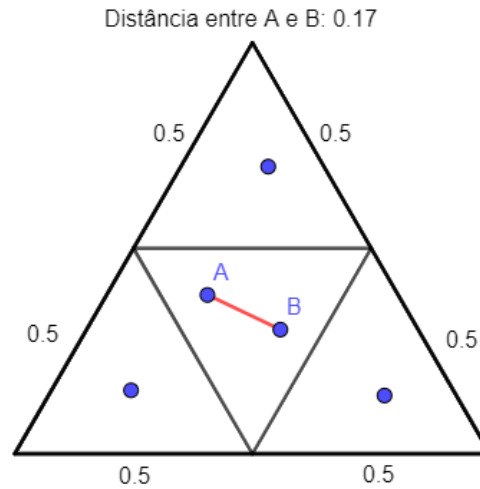
Aplicação 5. *Prove que de 5 pontos selecionados dentro de um triângulo equilátero de lado 1, sempre existirá um par de pontos cuja distância entre eles não será maior que 0,5.*

Demonstração. O triângulo pode ser dividido em quatro triângulos equiláteros menores, de lado 0,5. A maior distância possível entre dois pontos selecionados em um triângulo equilátero pequeno será a medida de seu lado que é 0,5.

Considerando os 5 pontos como os objetos e os 4 triângulos menores como as gavetas, segue, pelo Princípio das Gavetas de Dirichlet, que, pelo menos, dois pontos estarão dentro do mesmo triângulo, logo, a distância entre eles será menor ou igual a 0,5.

□

Cinco pontos dentro de um triângulo equilátero de lado 1, podem ser dispostos como na Figura 4.

Figura 4 – 5 pontos em um triângulo de lado 1

Fonte: Autoria Própria.

Aplicação 6. *Mostre que um triângulo equilátero não pode ser totalmente coberto por outros dois triângulos equiláteros menores.*

Demonstração. Seja T um triângulo equilátero. Se R e S são dois triângulos equiláteros que cobrem o triângulo T , então todos os pontos de T estarão em R ou S . Considerando os três vértices do triângulo T como os objetos e os dois triângulos R e S como as gavetas, segue, pelo Princípio das Gavetas de Dirichlet, que, pelo menos, dois vértices de T estarão dentro de um mesmo triângulo R ou S . Se dois vértices de T pertencem a um dos triângulos, digamos R , então um dos lados do triângulo T está em R , isso só é possível se R tiver lado maior ou igual a T .

□

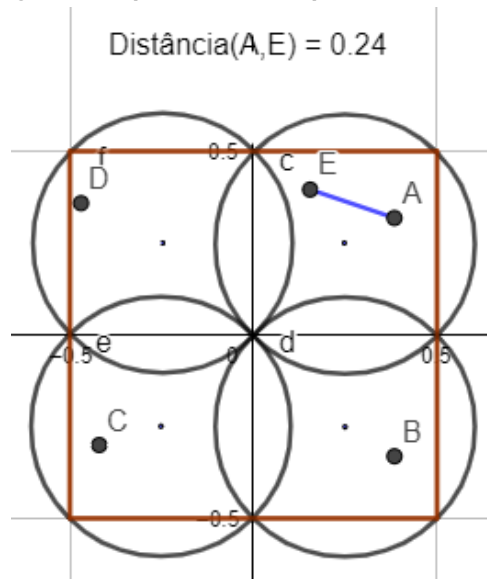
Aplicação 7. *Mostre que algum par de quaisquer cinco pontos em um quadrado de lado 1 terá distância menor ou igual a $\frac{\sqrt{2}}{2}$, e que algum par de quaisquer oito pontos terá distância menor ou igual a $\frac{\sqrt{5}}{4}$.*

Demonstração. Fixando os vértices do quadrado em $(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2})$, é possível cobrir todo o quadrado com quatro discos de diâmetro $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e centros $(\pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{4})$.

Considerando os cinco pontos como os objetos e os quatro discos como as gavetas, segue, pelo Princípio das Gavetas de Dirichlet, que, pelo menos, dois pontos estarão dentro do mesmo disco e terão distância menor ou igual ao diâmetro do disco, que é $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

A Figura 5 mostra uma maneira de dispor esses pontos em um quadrado de lado 1.

Figura 5 – 5 pontos em um quadrado de lado 1



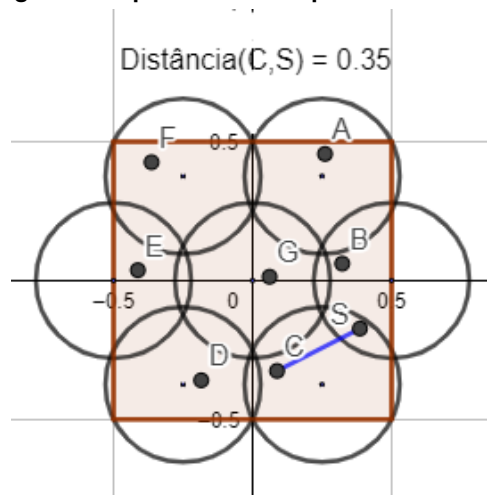
Fonte: Autoria Própria.

Definindo um quadrado de vértices $(\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2})$ é possível cobri-lo com sete discos de diâmetro $\frac{\sqrt{5}}{4}$ com centros em $(\pm \frac{1}{4}, \pm \frac{3}{8})$, $(\pm \frac{1}{2}, 0)$ e $(0,0)$.

Considerando os oito pontos como os objetos e os sete discos como as gavetas, segue, pelo Princípio das Gavetas de Dirichlet, que, pelo menos, dois pontos estarão dentro do mesmo disco e terão distância menor ou igual ao diâmetro do disco, que é $\frac{\sqrt{5}}{4}$.

Na Figura 6 podemos visualizar como isso acontece.

Figura 6 – 8 pontos em um quadrado de lado 1



Fonte: Autoria Própria.

4.2 Aplicações simples que envolvem Aritmética

Aplicação 8. *Prove que existem duas potências de 3 cuja diferença é divisível por 1997.*

Demonstração. Para que a diferença entre dois números seja divisível por 1997, basta que esses dois números tenham o mesmo resto na divisão por 1997. Os restos possíveis na divisão por 1997 são $0, 1, 2, \dots, 1996$.

Existem infinitas potências de 3. Particularmente, existem 1998 potências de 3.

Considerando as 1998 potências de 3 como os objetos e os 1997 possíveis restos como as gavetas, segue, pelo Princípio das Gavetas de Dirichlet, que, pelo menos, duas potências de 3 deixarão mesmo resto na divisão por 1997.

□

Aplicação 9. *Se escolhermos mais do que n números do conjunto $\{1, 2, \dots, 2n\}$ então dois desses números são primos entre si.*

Demonstração. Consideramos os n pares de elementos consecutivos: 1 e 2 , 3 e $4, \dots, 2n - 1$ e $2n$.

Escolhendo ao menos $n + 1$ números no conjunto $\{1, 2, \dots, 2n\}$, como objetos e os n pares como gavetas, segue, pelo Princípio das Gavetas de Dirichlet, que, pelo menos, dois números serão um dos pares considerados como gavetas, sendo assim consecutivos. Logo, dois desses números serão primos entre si.

□

Aplicação 10. *Mostre que $(a - b)(a - c)(b - c)$ é par para quaisquer a, b e c inteiros.*

Demonstração. Primeiro, vamos verificar que a diferença entre dois inteiros ímpares será par.

Dados $a = 2m + 1$ e $b = 2n + 1$ com $m, n \in \mathbb{Z}$, temos que

$$a - b = (2m + 1) - (2n + 1) = 2m + 1 - 2n - 1 = 2m - 2n = 2(m - n).$$

Da mesma maneira, a diferença entre dois inteiros pares será par, pois, dados $a = 2m$ e $b = 2n$ com $m, n \in \mathbb{Z}$, temos

$$a - b = 2m - 2n = 2(m - n).$$

Sabemos que todo número multiplicado por um número par será par.

Assim, conseguimos definir a, b e c como os objetos e "par" ou "ímpar" como as gavetas, garantindo, pelo Princípio das Gavetas de Dirichlet que, pelo menos, dois inteiros serão pares ou, pelo menos, dois inteiros serão ímpares.

Logo, pelo menos uma das diferenças $a - b, a - c$ ou $b - c$ será par, fazendo com que $(a - b)(a - c)(b - c)$ seja par.

□

Aplicação 11. Sejam $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ elementos distintos do conjunto $\{1, 2, \dots, 106\}$. Mostre que o conjunto $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{10}\}$ possui dois subconjuntos não vazios e disjuntos cuja soma dos elementos é a mesma.

Demonstração. Sabemos que o conjunto $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{10}\}$ possui $2^{10} - 1$ subconjuntos não vazios.

A soma dos elementos dos subconjuntos do conjunto A a serem considerados é no mínimo 1 e no máximo $97 + 98 + \dots + 106 = 1015$. Temos, assim, 1015 possíveis resultados para a soma dos elementos dos subconjuntos de A .

Considerando os $2^{10} - 1 = 1023$ subconjuntos como os objetos e as 1015 somas como as gavetas, segue pelo Princípio das gavetas de Dirichlet que o conjunto A tem dois subconjuntos cuja soma de elementos é a mesma.

Se os subconjuntos forem disjuntos, a demonstração estará completa. Se não forem disjuntos, basta retirar os elementos em comum e os novos conjuntos serão disjuntos e permanecerão tendo a mesma soma.

□

Aplicação 12. Prove que se escolhermos $n + 1$ números distintos no conjunto $\{1, \dots, 2n - 1\}$, então existem, pelo menos, dois deles cuja soma é igual a $2n$.

Demonstração. Podemos escrever $2n$ como soma de dois números inteiros, da seguinte forma

$$\begin{aligned} 1 + 2n - 1 &= 2n \\ 2 + 2n - 2 &= 2n \\ &\vdots \\ (n - 1) + (n + 1) &= 2n \\ n + n &= 2n. \end{aligned}$$

Considerando os $n + 1$ números escolhidos como os objetos e os n conjuntos $\{1, 2n - 1\}, \{2, 2n - 2\}, \dots, \{n - 1, n + 1\}, \{n\}$ como as gavetas, segue, pelo Princípio das Gavetas de Dirichlet, que, pelo menos, dois números escolhidos formarão uma das somas listadas acima, que resultam em $2n$.

□

A próxima aplicação é semelhante a anterior e, também, tem sua resolução parecida. Mas agora, o conjunto escolhido é formado por elementos de uma progressão aritmética.

Aplicação 13. Considere A um conjunto de 19 inteiros escolhidos da progressão aritmética $1, 4, 7, \dots, 100$. Prove que existirão dois inteiros distintos em A cuja soma será 104.

Demonstração. Podemos escrever 104 como soma de dois números da progressão aritmética 1, 4, 7, ..., 100 da seguinte maneira.

$$4 + 100 = 104$$

$$7 + 97 = 104$$

$$10 + 94 = 104$$

$$\vdots$$

$$49 + 55 = 104$$

que pode ser generalizada por $(3n + 1) + ((33 - n)3 + 4)$, com $n = 1, 2, \dots, 16$.

Assim, consideramos o conjunto B de subconjuntos de $\{1, 4, 7, \dots, 100\}$ formados pelos pares que satisfazem a condição da soma de dois elementos de A resultarem 104, e os subconjuntos $\{1\}$ e $\{52\}$.

$$B = \{\{4, 100\}, \{7, 97\}, \dots, \{49, 55\}, \{1\}, \{52\}\}.$$

Considerando os 19 elementos do conjunto A como os objetos e os 18 elementos do conjunto B como as gavetas, segue, pelo Princípio das Gavetas de Dirichlet, que, pelo menos, dois elementos de A formarão um par de B .

□

Aplicação 14. Mostre que entre sete inteiros positivos distintos menores do que 127 sempre haverá um par, digamos x e y tal que $1 < \frac{y}{x} \leq 2$.

Demonstração. Definindo o conjunto $A = \{1, 2, \dots, 126\}$, podemos determinar 6 subconjuntos da seguinte maneira:

$$A_n = \{2^n - 1, 2^n, 2^n + 1, \dots, 2 \cdot (2^n - 1)\} \quad \text{com } 1 \leq n \leq 6.$$

É fácil perceber que a divisão entre dois elementos distintos de um conjunto A_n será menor ou igual a 2.

Considerando os sete inteiros distintos como os objetos e os seis conjuntos A_n como gavetas, segue, pelo Princípio das Gavetas de Dirichlet, que, pelo menos, dois números serão escolhidos de um mesmo conjunto. Sendo esses números x e y onde $y > x$, temos que

$$1 < \frac{y}{x} \leq 2.$$

□

4.3 Aplicações simples que envolvem probabilidade

Aplicação 15. *Princípio Probabilístico das Gavetas de Dirichlet ou Problema dos Aniversários:* Em um grupo de n pessoas, a probabilidade de que haja, pelo menos, duas que façam aniversário no mesmo dia é igual a

$$1 - \frac{365 \times 364 \times \dots \times (366 - n)}{365^n}.$$

Demonstração. Vamos, na verdade, calcular a probabilidade de que nenhuma das n pessoas façam aniversário no mesmo dia.

O total de possibilidades de aniversários para um grupo de n pessoas é 365^n . Esse é nosso espaço amostral.

Para que nenhuma das n pessoas façam aniversário no mesmo dia, temos para a primeira pessoa 365 possibilidades de dias de aniversário, a segunda tem 364 e assim por diante. O total de possibilidades será $365 \times 364 \times \dots \times (366 - n)$. Esse é nosso evento favorável.

Pela Lei do Espaço Amostral, a probabilidade de que, num grupo de n pessoas, nenhuma faça aniversário do mesmo dia é de

$$\frac{365 \times 364 \times \dots \times (366 - n)}{365^n}.$$

Logo, a probabilidade do evento complementar (pelo menos duas pessoas fazerem aniversário no mesmo dia) é de

$$1 - \frac{365 \times 364 \times \dots \times (366 - n)}{365^n}.$$

□

Esse problema é interessante pois, se considerarmos um grupo de 23 pessoas, podemos pensar, intuitivamente, que a chance de duas delas fazerem aniversário no mesmo dia é baixa, já que 23 é um número pequeno em comparação com os 365 dias do ano. Vamos verificar esse resultado utilizando a fórmula apresentada e demonstrada acima.

$$1 - \frac{365 \times 364 \times \dots \times (366 - 23)}{365^{23}} = 1 - \frac{365 \times 364 \times \dots \times 343}{365^{23}} = 0,492702765 \approx 0,5 = 50\%.$$

Na verdade, em grupo de 23 pessoas, a chance de duas delas fazerem aniversário no mesmo dia já é 50%! Veja a probabilidade para alguns valores de n .

n	$P(n)$
5	0,02
10	0,11
20	0,41
23	0,50
30	0,70
45	0,94
60	0,99

Tabela 2 – Probabilidade de, dadas n pessoas, duas fazerem aniversário no mesmo dia.

A situação fica ainda mais intrigante quando relacionamos o Problema dos Aniversários com Princípio das Gavetas de Dirichlet e chegamos a um paradoxo.

Veja que, se considerarmos 60 pessoas de um grupo como objetos e 365 dias do ano como gavetas, o Princípio de Dirichlet não é capaz de nos garantir que haverá duas pessoas que fazem aniversário no mesmo dia, visto que muitas gavetas permanecerão vazias. Mas, podemos ver na tabela 2 que a chance de termos dois objetos na mesma gaveta é 99%.

4.4 Aplicações simples que envolvem funções

Aplicação 16. *Sejam A e B conjuntos finitos. Prove que não existe função injetora $f : A \rightarrow B$ tal que $|A| > |B|$.*

Demonstração. Como $|A| > |B|$ então o domínio de f tem mais elementos que o contradomínio. Considerando os elementos de A como os objetos e os elementos de B como as gavetas, segue, pelo Princípio das Gavetas de Dirichlet, que, pelo menos, um dois elementos de A estarão associados a um mesmo elemento de B . $\square$

4.5 Aplicações simples que envolvem Análise combinatória

Aplicação 17. *Entre n pessoas existem duas com o mesmo signo. Qual o menor valor de n que garante esse fato?*

Solução: De acordo com o Princípio das Gavetas de Dirichlet, a quantidade de objetos necessária para garantir que, pelo menos, dois estejam na mesma gaveta é $n + 1$, sendo n o número de gavetas.

Nesse caso, sendo 12 a quantidade de signos do zodíaco, entre 13 pessoas, poderemos garantir que duas terão o mesmo signo.

Aplicação 18. *Uma prova de concurso é formada por questões de múltipla escolha, com 4 alternativas por questão. Admita que nenhum candidato deixe questões sem responder.*

a) Qual é o número mínimo de candidatos para que seja possível garantir que, pelo menos, 3 deles darão exatamente as mesmas respostas nas 5 primeiras questões?

Solução: Considerando as $4^5 = 1024$ possibilidades de escolha das 4 alternativas em cada uma das 5 questões como gavetas e sabendo que queremos garantir que $3 = 2 + 1$ objetos estarão na mesma gaveta, então, pelo Teorema 3 a quantidade de objetos necessária é $1024 \cdot 2 + 1 = 1049$. Assim, o número mínimo de candidatos para que seja possível garantir que, pelo menos, 3 deles darão exatamente as mesmas respostas nas 5 primeiras questões é 1049.

b) Qual é o valor máximo de n para o qual é possível garantir que, em um concurso com 1000 candidatos, pelo menos, 2 darão as mesmas respostas nas n primeiras questões?

Solução: Considerando os 1000 candidatos como objetos, queremos determinar o maior valor de n natural que satisfaça $4^n + 1 \leq 1000$. Dessa maneira, encontramos $n = 4$ já que $257 \leq 1000$. Assim, em um concurso com 1000 candidatos, podemos garantir, pelo Princípio das Gavetas de Dirichlet, que, pelo menos, 2 darão a mesma resposta nas 4 primeiras questões.

5 APLICAÇÕES AVANÇADAS

Neste capítulo trazemos aplicações avançadas, que utilizam conceitos e ferramentas matemáticas mais refinadas. Os conteúdos abordados serão Aritmética, Análise, Trigonometria, Álgebra Linear, Funções e Análise Combinatória. Algumas dessas aplicações podem ser resolvidas por alunos do Ensino Superior, em disciplinas de matemática.

As aplicações aqui presentes foram retiradas dos materiais (STEFFENON; GUARNIERI, 2016), (GUICHARD, 2023?), (BOGOMOLNY, 2018), (GASARCH, 2023?), (NEW, 2016) e (BRADY, 2016).

5.1 Aplicações avançadas que envolvem Aritmética

Aplicação 19. *Mostre que 11 divide infinitos números da forma $36363636 \cdots 36$.*

Demonstração. Considere os doze números a seguir:

36
 3636
 363636
 36363636
 3636363636
 363636363636
 36363636363636
 3636363636363636
 363636363636363636
 36363636363636363636
 3636363636363636363636
 363636363636363636363636

Considerando os 12 números acima como os objetos e os 11 elementos de $\mathbb{Z}_{11}$, segue, pelo Princípio das Gavetas de Dirichlet, que, pelo menos, dois desses números serão iguais módulo 11.

Isso significa que a diferença entre esses números será divisível por 11. Esta diferença será dada da forma

$$36 \cdots 3600 \cdots 00 = 36 \cdots 36 \cdot 10^k, \quad \text{com } 2 \leq k \leq 22.$$

Como 11 é primo, 11 não divide 10^k . Logo, $11 \nmid 36 \cdots 36$.

Portanto, repetindo esse processo, teremos infinitos números da forma $363636 \cdots 36$ que são divisíveis por 11.

□

Aplicação 20. Se escolhermos mais do que n números do conjunto $\{1, 2, \dots, 2n\}$, então um deles será múltiplo do outro.

Demonstração. Uma consequência do Teorema Fundamental da Aritmética é que todo inteiro positivo pode ser escrito como $m = 2^k b$, onde $k \geq 0$ e b é ímpar.

Repare que cada parte ímpar dos $n + 1$ números escolhidos está contida no conjunto $\{1, 2, \dots, 2n\}$. Escolhemos $n + 1$ números do conjunto $\{1, 2, \dots, 2n\}$. Considere a parte ímpar desses $n + 1$ números como os objetos e os n números ímpares do conjunto $\{1, 2, \dots, 2n\}$ como gavetas, segue, pelo Princípio das Gavetas de Dirichlet, que, pelo menos, dois números terão o mesmo valor de b .

Esses dois números podem ser escritos como $r = 2^k b$ e $s = 2^t b$. O maior entre eles será múltiplo do outro.

□

Aplicação 21. Seja $a \neq 0$ um algarismo no sistema decimal. Todo número natural n tem um múltiplo que se escreve apenas com os algarismos 0 e a .

Demonstração. Considerando os $n + 1$ números da forma $a, aa, aaa, \dots, \underbrace{aa \dots aaa}_{n+1 \text{ algarismos}}$ como os objetos e os n possíveis restos na divisão por n como as gavetas, segue, pelo Princípio das Gavetas de Dirichlet, que, pelo menos, dois números terão o mesmo resto na divisão por n .

Sendo estes números da forma $r = \underbrace{aa \dots aaa}_p \text{ algarismos}$ e $s = \underbrace{aa \dots aaa}_q \text{ algarismos}$ com $p > q$, então $r - s = a \dots a 0 \dots 00$ é divisível por n e será composto apenas de algarismos zero e a .

□

A aplicação 10 demonstrada no capítulo anterior pode ser generalizada para um maior número de inteiros, onde os $n + 1$ produtos de suas diferenças será divisível por n . Podemos fazer isso utilizando o produtório apresentado a seguir.

Aplicação 22. Se $a_0, a_1, \dots, a_n$ são inteiros, mostre que o produto

$$\prod_{0 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$$

é divisível por n .

Demonstração. Temos os inteiros $a_0, a_1, \dots, a_n$ (objetos) e sabemos que a divisão por n pode deixar os restos $0, 1, \dots, n - 1$ (gavetas). Assim, pelo Princípio das Gavetas de Dirichlet, podemos garantir que, pelo menos, dois inteiros a_i e a_j com $i < j$ terão o mesmo resto na divisão por n . Logo, o produto que contém $a_j - a_i$ é divisível por n .

□

Aplicação 23. Dada uma sequência de n inteiros, positivos ou negativos, não necessariamente distintos, a soma dos termos de alguma subsequência de termos consecutivos é divisível por n .

Demonstração. Seja $a_1, a_2, \dots, a_n$ uma sequência de n inteiros, positivos ou negativos, não necessariamente distintos. Considere S_i a soma dos termos da subsequência $a_1, a_2, \dots, a_i$, onde $i = 1, 2, \dots, n$.

Se, para algum i , S_i é divisível por n , a condição será satisfeita.

Agora, supomos que isso não aconteça. Considerando as n somas como os objetos e os $1, 2, \dots, n - 1$ restos na divisão por n como as gavetas, segue, pelo Princípio das Gavetas de Dirichlet, que, pelo menos, duas somas S_i deixarão o mesmo resto na divisão por n .

Sejam essas somas S_k e S_j , com $k > j$. Assim, temos

$$S_k - S_j = (a_1 + \dots + a_j + \dots + a_k) - (a_1 + \dots + a_j) = a_{j+1} + \dots + a_k$$

que é a soma de uma subsequência de termos consecutivos da sequência original.

Como S_k e S_j deixam o mesmo resto na divisão por n , então $S_k - S_j$ será divisível por n .

□

Aplicação 24. Mostre que se escolhermos $n + 1$ números do conjunto $\{1, 2, \dots, 3n\}$, então dois desses números, digamos x e y , são tais que $xy + 1$ ou $4xy + 1$ é um quadrado perfeito.

Demonstração. Considere três números consecutivos da forma $3k - 2, 3k - 1, 3k$. Vamos mostrar que quaisquer dois desses números são tais que $xy + 1$ ou $4xy + 1$ é um quadrado perfeito.

Substituindo $x = 3k - 2$ e $y = 3k - 1$ em $4xy + 1$:

$$4(3k - 2)(3k - 1) + 1 = 4(9k^2 - 9k + 2) + 1 = 36k^2 - 36k + 9 = (6k - 3)^2.$$

Substituindo $x = 3k - 2$ e $y = 3k$ em $xy + 1$:

$$(3k - 2)3k + 1 = 9k^2 - 6k + 1 = (3k - 1)^2.$$

Substituindo $x = 3k - 1$ e $y = 3k$ em $4xy + 1$:

$$4(3k - 1)3k + 1 = 12k(3k - 1) + 1 = 36k^2 - 12k + 1 = (6k - 1)^2.$$

Agora considere os seguintes conjuntos com três elementos $A_1 = \{1, 2, 3\}$, $A_2 = \{4, 5, 6\}$, ..., $A_n = \{3n - 2, 3n - 1, 3n\}$.

Considerando as $n + 1$ escolhas como os objetos e os n subconjuntos A_i com $1 \leq i \leq n$, segue, pelo Princípio das Gavetas de Dirichlet, que, pelo menos, dois números escolhidos estarão no mesmo subconjunto A_i .

Assim, sendo os números escolhidos x e y , $xy + 1$ ou $4xy + 1$ é um quadrado perfeito.

□

Aplicação 25. Prove que de qualquer conjunto com $2^{n+1} - 1$ números inteiros positivos sempre é possível escolher 2^n elementos tais que a soma destes é divisível por 2^n .

Demonstração. Vamos provar utilizando indução em n e o Princípio das Gavetas de Dirichlet.

Para $n = 1$, temos que um conjunto com $2^{1+1} - 1 = 2^2 - 1 = 3$ números inteiros positivos é possível escolher $2^1 = 2$ elementos cuja soma seja divisível por 2, pois, de 3 números inteiros, sempre haverá, pelo menos, 2 números de mesma paridade, logo, a soma entre eles é par, sendo assim, divisível por 2.

Suponhamos que o resultado vale para algum $k \geq 1$, ou seja, de qualquer conjunto com $2^{k+1} - 1$ números inteiros positivos sempre é possível escolher 2^k elementos tais que a soma destes é divisível por 2^k e provaremos que vale para $k + 1$.

Tomemos um conjunto X com $2^{k+1+1} - 1$ números inteiros. Pela hipótese de indução podemos encontrar $a_1, a_2, \dots, a_{2^k} \in X$ tais que

$$\sum_{j=1}^{2^k} a_j = 2^k a \text{ com } a \in \mathbb{Z}$$

Tomemos um conjunto $Y = X - \{a_1, a_2, \dots, a_{2^k}\}$ com $2^{k+1+1} - 1 - 2^k = 3 \cdot 2^k - 1$ números inteiros. Pela hipótese de indução podemos encontrar $b_1, b_2, \dots, b_{2^k} \in Y \subset X$ tais que

$$\sum_{j=1}^{2^k} b_j = 2^k b \text{ com } b \in \mathbb{Z}$$

Tomemos um conjunto $Z = Y - b_1, b_2, \dots, b_{2^k}$ com $3 \cdot 2^k - 1 - 2^k = 2 \cdot 2^k - 1 = 2^{k+1} - 1$ números inteiros. Pela hipótese de indução podemos encontrar $c_1, c_2, \dots, c_{2^k} \in Z \subset X$ tais que

$$\sum_{j=1}^{2^k} c_j = 2^k c \text{ com } c \in \mathbb{Z}$$

Pelo Princípio das Gavetas de Dirichlet, pelo menos, dois dos três inteiros a, b, c têm a mesma paridade. Digamos, sem perda de generalidade, que a e b têm mesma paridade. Assim, $a + b = 2m$ com $m \in \mathbb{Z}$ e $a_1, a_2, \dots, a_{2^k}, b_1, b_2, \dots, b_{2^k}$ são $2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$ inteiros do conjunto X cuja soma é igual a $a \cdot 2^k + b \cdot 2^k = (a + b)2^k = 2m \cdot 2^k = m \cdot 2^{k+1}$.

□

Aplicação 26. Mostre que, para algum inteiro $k > 1$, 3^k termina com 0001.

Demonstração. Tome as potências $3^1, 3^2, 3^3, \dots, 3^{10001}$ reduzidas módulo 10000. Considerando as 10001 potências como objetos e os 10000 elementos de $\mathbb{Z}_{10000}$ como gavetas, segue, pelo Princípio das Gavetas de Dirichlet, que, pelo menos, duas potências, digamos $\overline{3^k}$ e $\overline{3^l}$ serão $\overline{3^k} = \overline{3^l} \in \mathbb{Z}_{10000}$.

Podemos, sem perda de generalidade, supor que $k > l$, logo $\overline{3^{k-l}} = \overline{1} \in \mathbb{Z}_{10000}$.

Dessa maneira, 3^{k-l} deixa resto 1 na divisão por 10000, portanto termina com 0001.

□

Aplicação 27. Mostre que se 9 pontos são escolhidos do reticulado $\mathbb{Z}^3$, então o segmento que une dois desses pontos contém outro ponto do reticulado $\mathbb{Z}^3$.

Demonstração. Reduzindo os 9 pontos módulo 2, teremos 9 pontos em $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}_2^3$, podemos considerar os 9 pontos como objetos e os 8 elementos de $\mathbb{Z}_2^3$ como as gavetas, então, segue, pelo Princípio das Gavetas de Dirichlet, que dois pontos, digamos A e B são iguais em $\mathbb{Z}_2^3$.

Assim, $A + B = \bar{0} \in \mathbb{Z}_2^3$, o que significa que as coordenadas de $A + B$ são números pares, logo o ponto médio dos pontos A e B é $\frac{1}{2}(A + B)$, cujas coordenadas são inteiras. Então $\frac{1}{2}(A + B)$ pertence a $\mathbb{Z}^3$. $\square$

Para a próxima aplicação, precisamos conhecer um pouco sobre os Números de Fibonacci.

Os Números de Fibonacci são termos de uma sequência recursiva onde cada termo é a soma dos dois termos anteriores, ou seja, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ para $n \geq 0$, com $a_0 = 0$ e $a_1 = 1$. Assim, os primeiros números de Fibonacci são $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 3, a_5 = 5, a_6 = 8, a_7 = 13$.

A definição dos Números de Fibonacci pode ser estendida para subíndices inteiros negativos usando a fórmula $a_n = a_{n+2} - a_{n+1}$, que nos permite incluir termos negativos à sequência. Como por exemplo $a_{-1} = 1, a_{-2} = -1, a_{-3} = 2, a_{-4} = -3, a_{-5} = 5$.

Aplicação 28. Mostre que existe um número de Fibonacci que termina em 9999.

Demonstração. Podemos formar pares (a_k, a_{k+1}) e reduzi-los módulo 10000. Considerando os infinitos pares da forma (a_k, a_{k+1}) como os objetos, e os 10000 elementos de $\mathbb{Z}_{10000}$ como as gavetas, segue, pelo Princípio das Gavetas de Dirichlet, que pelo menos, dois pares, digamos (a_k, a_{k+1}) e (a_l, a_{l+1}) são tais que $(\overline{a_k}, \overline{a_{k+1}}) = (\overline{a_l}, \overline{a_{l+1}}) \in \mathbb{Z}_{10000} \times \mathbb{Z}_{10000}$.

Vamos provar, por indução completa em i , a seguinte afirmação:

$$\overline{a_{k+i}} = \overline{a_{l+i}} \in \mathbb{Z}_{10000} \text{ para } i \geq 0.$$

O caso base foi provado acima utilizando o Princípio das Gavetas, isto é, para $i = 0$ temos que $a_k = a_l \in \mathbb{Z}_{10000}$ e para $i = 1$ temos que $a_{k+1} = a_{l+1} \in \mathbb{Z}_{10000}$.

Supomos que a afirmação é válida para i e $i - 1$. Mostremos que a afirmação é válida para $i + 1$.

Pela recorrência $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, sabemos que $a_{k+i+1} = a_{k+i} + a_{k+i-1}$. Pela hipótese de indução $\overline{a_{k+i}} + \overline{a_{k+i-1}} = \overline{a_{l+i}} + \overline{a_{l+i-1}}$. Que, por fim, é igual a $\overline{a_{l+i+1}}$.

Para $i < 0$, analogamente, teremos

$$\overline{a_{k+i}} = \overline{a_{k-(-i)}} = \overline{a_{l-(-i)}} = \overline{a_{l+i}} \in \mathbb{Z}_{10000}.$$

Portanto, $\overline{a_{k+i}} = \overline{a_{l+i}} \in \mathbb{Z}_{10000}$ para todo $i \in \mathbb{Z}$.

Em particular, para $i = -k - 2$ onde $\overline{a_{l-k-2}} = \overline{a_{-2}} = \overline{-1} \in \mathbb{Z}_{10000}$. Dessa maneira, a_{l-k-2} termina com os dígitos 9999. $\square$

Aplicação 29. *Toda sequência $a_1, a_2, \dots, a_{mn+1}$ de $mn+1$ números reais distintos possui uma subsequência crescente de, ao menos, $m+1$ termos ou uma subsequência decrescente de, ao menos, $n+1$ termos.*

Demonstração. Seja t_i o número de termos da subsequência crescente mais longa iniciada em a_i para $i = 1, 2, \dots, mn+1$. Se $t_i \geq m+1$ para algum i , a proposição é verdadeira.

Suponha que $t_i < m+1$ para $i = 1, 2, \dots, mn+1$. Assim, a maior subsequência crescente iniciada em a_i , com $i \in \{1, 2, \dots, mn+1\}$, terá $s \in \{1, 2, \dots, m\}$ termos. Considerando as subsequências crescentes mais longas iniciadas em cada um dos termos da sequência $a_1, a_2, \dots, a_{mn+1}$ como os objetos e as $s \in \{1, 2, \dots, m\}$ quantidades de termos como as gavetas, segue, pelo Teorema 3, que, pelo menos, $n+1$ subsequências terão a mesma quantidade s de termos.

Chamamos os primeiros termos dessas subsequências como $a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_{n+1}}$ com $j_1 < j_2 < \dots < j_{n+1}$. Agora, considere dois números consecutivos a_k, a_{k+1} para todo $k \in \{j_1, j_2, \dots, j_{n+1}\}$. Se $a_k < a_{k+1}$, então teríamos uma subsequência de s termos iniciada em a_{k+1} e conseqüentemente, uma subsequência de $s+1$ termos iniciada em a_k , que é uma contradição. Assim, $a_k > a_{k+1}$. Logo, $a_{j_1} > a_{j_2} > \dots > a_{j_{n+1}}$ formando uma subsequência decrescente de $n+1$ termos.

□

Um caso particular da aplicação anterior é quando $m = n$, que foi provado pela primeira vez por Erdős-Szekeres em 1935. Esse teorema é frequentemente chamado de Teorema da Subsequência.

Este caso foi estudado por outros matemáticos da época. Um deles foi Martin Kruskal. Veremos agora a demonstração feita por ele em 1948.

Teorema 5. *Toda sequência $x_1, \dots, x_{n^2+1}$ de n^2+1 números reais distintos possui uma subsequência crescente ou decrescente de $n+1$ termos.*

Demonstração. Para $n = 1$ temos uma sequência x_1, x_2 . Se $x_1 < x_2$ então temos uma subsequência crescente de dois elementos. Se $x_2 < x_1$ então temos uma subsequência decrescente de dois elementos.

Supomos que para algum $n \in \mathbb{N}$, toda sequência de n^2+1 números reais distintos possui uma subsequência crescente ou decrescente de $n+1$ termos e mostremos que a propriedade vale para $n+1$. Para tanto, utilizaremos a equivalência contrapositiva.

Assumimos que o resultado não é válido para $n+1$ e mostraremos que não é válido para n .

Como o resultado é falso para $n+1$, então, existe uma sequência

$$x_1, \dots, x_{(n+1)^2+1}$$

que não possui subsequência crescente ou decrescente com $n + 2$ termos.

Sejam

$$A = \{x_i \mid x_j < x_i \text{ para todo } j > i\} \text{ e } B = \{x_i \mid x_j > x_i \text{ para todo } j > i\}.$$

Afirmção 1: $|A| \leq n + 1$ e $|B| \leq n + 1$.

Demonstração: Pela definição de A , A é uma sequência decrescente. Como a sequência original não possui uma subsequência de $n + 2$ termos, então $|A| \leq n + 1$. Para B é análogo.

Afirmção 2: $|A \cap B| = 1$.

Demonstração: Note que $x_{(n+1)^2+1} \in A \cap B$. Agora supomos, por contradição, que $i < (n + 1)^2 + 1$ e $x_i \in A \cap B$. Se $x_i < x_{(n+1)^2+1}$, então $x_i \notin A$ e se $x_i > x_{(n+1)^2+1}$, então $x_i \notin B$. De qualquer maneira, é um absurdo. Logo, $x_{(n+1)^2+1}$ é o único elemento em $A \cap B$.

Combinando as afirmações 1 e 2, temos que $|A \cup B| \leq 2n + 1$. Ao remover os elementos de $A \cup B$ da sequência original, a quantidade de elementos que sobrarão na sequência é, pelo menos,

$$(n + 1)^2 + 1 - (2n + 1) = n^2 + 2n + 2 - 2n - 1 = n^2 + 1.$$

Afirmção 3: A nova sequência não tem uma subsequência crescente ou decrescente de $n + 1$ termos.

Demonstração: Supomos, por contradição, que existe uma subsequência crescente $x_{i_1} < \dots < x_{i_{n+1}}$ de $n + 1$ termos.

Perceba que $x_{i_{n+1}}$ estava na sequência original e não foi retirado. Assim, existe algum elemento x_j , com $j > i_{n+1}$ tal que $x_j > x_{i_{n+1}}$. Logo, temos a sequência crescente $x_1 < \dots < x_{i_{n+1}} < x_j$ de $n + 2$ termos, o que é um absurdo, já que a sequência original não possui uma subsequência crescente de $n + 2$ termos.

Dessa maneira, assumindo que o Teorema é falso para $n + 1$, obtemos que o Teorema é falso para n .

□

Alguns teoremas importantes da aritmética podem ser provados utilizando o Princípio das Gavetas de Dirichlet, como feitos abaixo, seguidas de suas demonstrações usuais.

Aplicação 30 (Teorema de Bézout). *Sejam a e b dois números inteiros não nulos e d o máximo divisor comum de a e b . Então existem dois números inteiros x e y tais que $d = ax + by$.*

Demonstração. Dividindo a equação por d temos $1 = rx + sy$ onde $r = \frac{a}{d}$ e $s = \frac{b}{d}$. Encontrando solução para esta equação, bastará multiplicar por d para encontrar a solução da equação original.

Tem-se que o máximo divisor comum entre r e s é 1. Tomemos o conjunto $A = \{r, 2r, 3r, \dots, sr\}$. Iremos mostrar que algum elemento do conjunto A tem resto 1 na

divisão por s . Vamos supor que nenhum elemento de A deixe resto 1 na divisão por s . Considerando os s elementos de A como os objetos e os $0, 2, 3, \dots, s-1$ possíveis restos como gavetas, segue, pelo Princípio das Gavetas de Dirichlet, que, pelo menos, dois elementos de A , terão mesmo resto na divisão por s . Tomando lr e kr como esses elementos, onde $l > k$, então $lr - kr = (l - k)r$ é divisível por s . Como r e s são primos entre si, s não é divisor de r , então s divide $l - k$, o que é uma contradição, já que $0 < l - k < s$. Assim, existe um elemento em A que deixa resto 1 na divisão por s .

Tomando esse elemento como um rx , podemos escrevê-lo como $rx = sy + 1$, para algum inteiro y . Portanto, existem x e y inteiros tais que $rx + s(-y) = 1$.

□

Teorema 6 (Teorema de Bézout - demonstração usual). *Sejam a e b dois números inteiros não nulos, então existem dois números inteiros x e y tais que $\text{mdc}(a, b) = ax + by$.*

Demonstração. Considere o conjunto S de todas as combinações lineares positivas de a e b :

$$S = \{au + bv \mid au + bv > 0; u, v \in \mathbb{Z}\}.$$

Primeiramente, podemos verificar que S não é vazio, pois, se $a \neq 0$, então $|a| = au + 0 \cdot b$ está em S , bastando tomar $u = \pm 1$. Pelo Princípio da Boa Ordem, S deve conter um menor elemento $d = ax + by$. Vamos mostrar que $d = \text{mdc}(a, b)$.

Pelo Algoritmo de Divisão Euclidiana, podemos obter q e r tais que $a = qd + r$ com $0 \leq r < d$. Então r pode ser escrito como

$$r = a - qd = a - q(ax + by) = a(1 - qx) + b(-qy).$$

Se $0 < r$ então $r \in S$, o que seria uma contradição, já que $r < d$ e d é o menor elemento de S . Logo, $r = 0$, portanto $d \mid a$.

Analogamente, $d \mid b$.

Pela Proposição 3, tomando c um inteiro positivo que divide a e b , então $c \mid ax + by$ ou $c \mid d$. Portanto d é o maior divisor comum de a e b .

□

Aplicação 31 (Teorema Chinês do Resto). *Se m e n são primos entre si e $0 \leq a < m$ e $0 \leq b < n$, então existe um inteiro x tal que $x \equiv a \pmod{m}$ e $x \equiv b \pmod{n}$.*

Demonstração. Tomando os inteiros $a, a + m, a + 2m, \dots, a + (n-1)m$, é fácil perceber que terão resto a na divisão por m . Basta mostrar que um desses inteiros terá resto b na divisão por n .

Suponha, por contradição, que nenhum dos inteiros $a, a + m, a + 2m, \dots, a + (n-1)m$ tenha resto b na divisão por n . Sejam os restos $r_0 \equiv a \pmod{n}, r_1 \equiv a + m \pmod{n}, r_2 \equiv a + 2m \pmod{n}, \dots, r_{n-1} \equiv a + (n-1)m \pmod{n}$. Considerando os n restos $r_0, r_1, \dots, r_{n-1}$ como objetos e os $n-1$ possíveis restos $0, 1, 2, \dots, b-1, b+1, \dots, n-1$ na divisão por n

como gavetas, segue, pelo Princípio das Gavetas de Dirichlet, que, pelo menos, dois r_i serão iguais.

Sendo estes r_i e r_j com $j > i$, temos $a + im = q_1n + r$ e $a + jm = q_2n + r$ para alguns inteiros q_1 e q_2 .

$$\begin{aligned} a + jm - (a + im) &= q_2n + r - (q_1n + r) \\ (j - i)m &= (q_2 - q_1)n. \end{aligned}$$

Como m e n são primos entre si, segue que n divide $(j - i)m$, o que é um absurdo, já que j e i são números distintos de $\{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$, então $0 < j - i < n$, logo, $j - i$ não é divisível por n .

Dessa maneira, algum dos inteiros $a, a + m, a + 2m, \dots, a + (n - 1)m$ deixa resto b na divisão por n . Logo, existe um inteiro que deixa resto a na divisão por m e resto b na divisão por n , ou seja, $x \equiv a \pmod{m}$ e $x \equiv b \pmod{n}$.

□

Teorema 7 (Teorema Chinês do Resto - Demonstração usual). *Seja $\text{mdc}(m_i, m_j) = 1$ sempre que $i \neq j$.*

Então o sistema

$$\begin{aligned} x &\equiv a_1 \pmod{m_1} \\ x &\equiv a_2 \pmod{m_2} \\ &\vdots \\ x &\equiv a_r \pmod{m_r} \end{aligned}$$

possui uma única solução módulo $M = m_1m_2 \dots m_r$. As soluções são

$$x = M_1y_1a_1 + M_2y_2a_2 + \dots + M_ry_ra_r + tM,$$

onde $t \in \mathbb{Z}$, $M_i = \frac{M}{m_i}$ e y_i é a solução de $M_iY \equiv 1 \pmod{m_i}$ para $i = 1, \dots, r$.

Demonstração. Vamos mostrar que x é uma solução do sistema. De fato, como $m_i | M_j$ se $i \neq j$ e $M_iy_i \equiv 1 \pmod{m_i}$ temos

$$\begin{aligned} x &= M_1y_1a_1 + M_2y_2a_2 + \dots + M_ry_ra_r + tM \equiv M_iy_ia_i \pmod{m_i} \\ M_iy_ia_i &\equiv a_i \pmod{m_i}. \end{aligned}$$

Dessa maneira, x é solução do sistema.

Se x' é outra solução para o sistema, então

$$x \equiv x' \pmod{m_i}, \text{ para todo } i, \text{ com } i = 1, \dots, r.$$

Como $\text{mdc}(m_i, m_j) = 1$ para $i \neq j$, segue-se que $\text{mmc}(m_1, m_2, \dots, m_r) = m_1 m_2 \cdots m_r = M$, ver (HEFEZ, 2016). Portanto, $x \equiv x' \pmod{M}$.

□

Aplicação 32 (Pequeno Teorema de Fermat). *Seja p um número primo e suponha que $p \nmid a$. Então $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.*

Demonstração. Considere os primeiros $p - 1$ múltiplos positivos de a

$$a, 2a, 3a, \dots, (p-1)a.$$

Afirmção: Os números $a, 2a, 3a, \dots, (p-1)a$ são congruentes, módulo p , a todos os números $1, 2, \dots, p-1$ em alguma ordem.

Demonstração da afirmação: Suponha, por contradição, que um dos números $1, 2, \dots, p-1$, digamos i , não é igual a nenhum $a, 2a, 3a, \dots, (p-1)a$ módulo p .

Logo, considerando $a, 2a, 3a, \dots, (p-1)a$ os primeiros $p-1$ múltiplos de a como os objetos e os $p-2$ números $1, \dots, i-1, i+1, \dots, p-1$ como gavetas, segue, pelo Princípio das Gavetas de Dirichlet, que, pelo menos, dois múltiplos $a, 2a, 3a, \dots, (p-1)a$ serão iguais a um dos números $1, \dots, i-1, i+1, \dots, p-1$, módulo p .

Assim, existem ka e la com $k, l = 1, 2, \dots, p-1$ que são iguais a um mesmo valor de $1, \dots, i-1, i+1, \dots, p-1$, módulo p , isto é, $ka \equiv la \pmod{p}$. Logo, pela Proposição 7 segue que $k \equiv l \pmod{p}$. O que é um absurdo, já que $1 < k \neq l < p$. E isso prova a afirmação.

Agora que sabemos que $a, 2a, 3a, \dots, (p-1)a$ são, de fato, congruentes a $1, 2, 3, \dots, p-1$ módulo p , temos que

$$a \cdot 2a \cdot 3a \cdots (p-1)a \equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (p-1) \pmod{p},$$

que é o mesmo que

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (p-1) a^{p-1} \equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (p-1) \pmod{p}.$$

De novo, pela Proposição 7, cada j entre 1 e $p-1$ tem um inverso multiplicativo módulo p . Portanto, $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

□

Para demonstrarmos o Pequeno Teorema de Fermat sem utilizar o Princípio das Gavetas de Dirichlet, precisaremos do seguinte lema.

Lema 1. *Se p é um número primo, os números $\binom{p}{i}$ onde $0 < i < p$, são todos divisíveis por p .*

Demonstração. Para $i = 1$

$$\binom{p}{1} = \frac{p!}{1!(p-1)!} = \frac{p \cdot (p-1)!}{(p-1)!} = p$$

é divisível por p .

Para $1 < i < p$

$$\binom{p}{i} = \frac{p!}{i!(p-i)!} = \frac{p \cdot (p-1) \cdot (p-2) \cdot (p-3) \dots (p-i+1)}{i!}.$$

Dessa maneira, temos que $i! | p \cdot (p-1) \cdot (p-2) \cdot (p-3) \dots (p-i+1)$ e como $\text{mdc}(i!, p) = 1$, então $i! | (p-1) \cdot (p-2) \cdot (p-3) \dots (p-i+1)$.

Logo, $p | \binom{p}{i}$.

□

Agora, podemos seguir para o Teorema.

Teorema 8 (Pequeno Teorema de Fermat). *Seja p um número primo e suponha que $p \nmid a$. Então $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.*

Demonstração. Para $p = 2$

$$a^2 - a = (a-1)a.$$

Como o produto de dois números consecutivos é par, então $2 | a^2 - a$.

Supomos que p é ímpar. Primeiro, vamos mostrar para $a \geq 0$.

$P(a) : p | a^p - a$ para todo $a \geq 0$.

$$0^p - 0 = 0.$$

Como $p | 0$, temos que $P(0)$ é válida.

Agora, vamos supor que $P(a)$ é verdadeira para algum $a \in \mathbb{N}$ e vamos mostrar que $P(a+1)$ é válida.

Utilizando o binômio de Newton, temos a igualdade

$$\begin{aligned} (a+1)^p - (a+1) &= a^p + \binom{p}{1}a^{p-1} + \binom{p}{2}a^{p-2} + \dots + \binom{p}{p-1}a + 1 - a - 1 \\ &= a^p - a + \binom{p}{1}a^{p-1} + \binom{p}{2}a^{p-2} + \dots + \binom{p}{p-1}a \end{aligned}$$

Pela hipótese de Indução, $p | a^p - a$. Pelo Lema anterior, $p | \binom{p}{i}$ para todo $0 < i < p$. Dessa maneira,

$$p | \binom{p}{1}a^{p-1} + \binom{p}{2}a^{p-2} + \dots + \binom{p}{p-1}a.$$

Portanto, $p|(a+1)^p - (a+1)$.

Pelo Princípio da Indução temos que $p|a^p - a$ para todo $a \geq 0$.

Agora, suponha que $a \in \mathbb{Z}$ e $a < 0$.

Dessa maneira, $-a$ é positivo. Então, temos que $p|(-a)^p - (-a)$. Ou seja, existe um k inteiro tal que $pk = (-a)^p - (-a)$. Mas como p é ímpar, $(-a)^p$ será sempre negativo. Logo

$$pk = (-a)^p - (-a) = -a^p + a = -(a^p - a) \Rightarrow p(-k) = a^p - a.$$

Assim, $p|a^p - a$ para todo $a \in \mathbb{Z}$. Logo, $a^p \equiv a \pmod{p}$. Pela Proposição 7, $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

□

5.2 Aplicações avançadas que envolvem Análise

Aplicação 33. Seja α um número real qualquer e N um inteiro positivo. Dentre os números $\alpha, 2\alpha, \dots, (N+1)\alpha$ existe um tal que sua diferença com certo número inteiro é menor a $1/N$.

Demonstração. Considere os números $a_i = i\alpha - [i\alpha]$ onde $i \in \{1, 2, \dots, N+1\}$. Assim, $0 \leq a_i \leq 1$. Sejam os intervalos $I_i = [\frac{i-1}{N}, \frac{i}{N})$ para $i = 1, 2, \dots, N$, temos que $\bigcup_{i=1}^N I_i = [0, 1)$.

Considerando os $N+1$ números a_i como os objetos e os N intervalos I_i em $\bigcup_{i=1}^N I_i$ como as gavetas, segue, pelo Princípio das Gavetas de Dirichlet, que, pelo menos, dois a_i estarão no mesmo intervalo I_i .

Sejam os números a_k e a_l onde $a_k, a_l \in I_j$ para algum $1 \leq j \leq N$. Sabendo que I_j tem comprimento $\frac{1}{N}$, segue que $|a_l - a_k| < \frac{1}{N}$.

Assim,

$$|a_l - a_k| = |l\alpha - [l\alpha] - (k\alpha - [k\alpha])| = |(l-k)\alpha - ([l\alpha] - [k\alpha])| < \frac{1}{N}$$

onde $l-k \in \{1, 2, \dots, N\}$ e $[l\alpha] - [k\alpha]$ é inteiro.

□

Proposição 8. Um número real α é irracional se, e somente se, existem duas seqüências de números inteiros $p_1, p_2, \dots$ e $q_1, q_2, \dots$ tais que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_n \alpha - p_n = 0 \text{ e } q_n \alpha - p_n \neq 0 \text{ para todo } n \geq 1.$$

Demonstração. ($\Rightarrow$) Seja α um número irracional. Para cada inteiro positivo n , pela aplicação anterior, existem inteiros p_n e q_n com $1 \leq q_n \leq n$ tais que $|q_n \alpha - p_n| < \frac{1}{n}$. Pela definição de limite, segue que $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n \alpha - p_n = 0$ e como α é irracional e p_n e q_n são inteiros, $q_n \alpha - p_n \neq 0$ para todo $n \geq 1$.

($\Leftarrow$) Supomos que $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n \alpha - p_n = 0$ e $q_n \alpha - p_n \neq 0$ para todo $n \geq 1$. Agora, suponha, por absurdo, que α é racional, então $\alpha = \frac{a}{b}$ com $a, b \in \mathbb{Z}$ e $b \geq 1$. Temos

$$|q_n \alpha - p_n| = \left| \frac{q_n a - p_n b}{b} \right| \geq \frac{1}{b}.$$

Mas isso contradiz o fato de que $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n \alpha - p_n = 0$.

□

Corolário 3. Se α é um número irracional e n é um inteiro positivo, então existe um número racional $\frac{p}{q}$ tal que $1 \leq q \leq n$ e $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{nq}$.

Demonstração. Basta considerar $q = l - k$ e $p = \lfloor l\alpha \rfloor - \lfloor k\alpha \rfloor$ na Aplicação 33.

□

Note que o que foi feito acima mostra que o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é denso no conjunto dos números reais, isso significa que, dado qualquer número real x , existe, um número racional tão próximo de x quanto se queira.

Podemos mostrar que $\sqrt{2}$ é irracional utilizando a demonstração por absurdo, comumente usada em aritmética, como veremos a seguir.

Demonstração. Suponha que $\sqrt{2}$ é racional, ou seja, $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ com p e q primos entre si. Elevando os dois lados da equação ao quadrado, segue

$$\sqrt{2}^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 \Rightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow p^2 = 2q^2.$$

Assim, temos que p^2 é par, logo p é par.

Então, existe k tal que $p = 2k$. Logo, $4k^2 = (2k)^2 = 2q^2$. De onde, q^2 é par, logo, q é par. O que é uma contradição, já que p e q são primos entre si.

Portanto, $\sqrt{2}$ é irracional.

□

Porém, podemos fazer uso da Proposição 8 e demonstrar a irracionalidade de $\sqrt{2}$ da seguinte forma:

Demonstração. Seja n inteiro positivo e como $\sqrt{2}^2 = 2$ segue, pelo binômio de Newton, que $(\sqrt{2} - 1)^n = q_n \sqrt{2} - p_n$, com p_n, q_n inteiros.

Como $|\sqrt{2} - 1| < 1$, segue que, $\lim_{n \rightarrow +\infty} q_n \sqrt{2} - p_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{2} - 1)^n = 0$.

Além disso, como $(\sqrt{2} - 1) \neq 0$, então $q_n \sqrt{2} - p_n = (\sqrt{2} - 1)^n \neq 0$.

Portanto, $\sqrt{2}$ é irracional.

□

Aplicação 34. Prove que $e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$ é um número irracional.

Demonstração. Iremos encontrar duas sequências de números inteiros q_n e p_n tais que $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n e - p_n = 0$ e $q_n e - p_n \neq 0$ para todo $n \geq 1$.

Sejam $q_n = n!$ e $p_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$. Então

$$q_n e - p_n = n! \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} - n! \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n!}{k!}.$$

que é positivo para todo $n \geq 1$.

Além disso, para $k \geq n+1$ temos que

$$\frac{1}{k!} = \frac{1}{k \cdot \dots \cdot (n+1)} \frac{1}{n!}.$$

Como podemos observar que $\underbrace{k \cdot \dots \cdot (n+1)}_{k-n} \geq (n+1)^{k-n}$, chegamos à desigualdade

$$\frac{1}{k!} = \frac{1}{k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot (n+1)} \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{n!} \frac{1}{(n+1)^{k-n}}.$$

Dessa maneira, segue que

$$q_n e - p_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n!}{k!} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} n! \frac{1}{n!} \frac{1}{(n+1)^{k-n}} = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^m} = \frac{1}{n}.$$

Logo, $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n e - p_n = 0$, portanto e é irracional.

□

5.3 Aplicações avançadas que envolvem Trigonometria

Aplicação 35. Dados cinco números reais arbitrários distintos, mostre que existem dois deles, digamos x e y , tais que $0 \leq \frac{x-y}{1+xy} \leq 1$.

Demonstração. Note que, $\frac{x-y}{1+xy}$ lembra a seguinte fórmula trigonométrica

$$\operatorname{tg}(a-b) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}.$$

Sejam x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 os cinco números reais.

Como a função tangente é uma bijeção entre o intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ e $\mathbb{R}$, para cada x_i existe um $a_i \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ tal que $\operatorname{tg} a_i = x_i$.

Considerando os cinco números reais a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 como objetos e os 4 subintervalos de comprimento $\frac{\pi}{4}$ do intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ como gavetas, segue, pelo Princípio das Gavetas de Dirichlet, que, pelo menos, dois números estarão no mesmo subintervalo, assim $0 \leq a_i - a_j \leq \frac{\pi}{4}$.

Como a tangente é crescente no intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, é possível aplicar a tangente na relação $0 \leq a_i - a_j \leq \frac{\pi}{4}$.

$$\operatorname{tg} 0 \leq \operatorname{tg}(a_i - a_j) \leq \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \Rightarrow 0 \leq \frac{\operatorname{tg} a_i - \operatorname{tg} a_j}{1 + \operatorname{tg} a_i \operatorname{tg} a_j} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{x_i - x_j}{1 + x_i x_j} \leq 1.$$

□

5.4 Aplicações avançadas que envolvem Álgebra Linear

Aplicação 36. Sejam A e B matrizes 2×2 com entradas inteiras tais que $A, A + B, A + 2B, A + 3B$ e $A + 4B$ são matrizes invertíveis cujas inversas têm entradas inteiras. Mostre que a matriz $A + 5B$ é invertível e que sua inversa tem entradas inteiras.

Demonstração. Lembre-se que uma matriz A é inversível, se e somente se, seu determinante é diferente de zero. Além disso, o determinante de uma matriz com entradas inteiras, será inteiro. Então, por hipótese, $\det(A), \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} \in \mathbb{Z}$, o que só é possível se $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} = 1$ ou $\det(A) = \frac{1}{\det(A)} = -1$.

Sejam

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

onde $a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{Z}$ para $i, j \in \{1, 2\}$. Logo,

$$A + \alpha B = \begin{pmatrix} a_{11} + \alpha b_{11} & a_{12} + \alpha b_{12} \\ a_{21} + \alpha b_{21} & a_{22} + \alpha b_{22} \end{pmatrix}$$

com α um número inteiro.

Dessa maneira,

$$\begin{aligned} \det(A + \alpha B) &= ((a_{11} + \alpha b_{11}) \cdot (a_{22} + \alpha b_{22})) - ((a_{12} + \alpha b_{12}) \cdot (a_{21} + \alpha b_{21})) \\ &= a_{11}a_{22} + a_{11}\alpha b_{22} + a_{22}\alpha b_{11} + \alpha^2 b_{11}b_{22} \\ &\quad - (a_{12}a_{21} + a_{12}\alpha b_{21} + a_{21}\alpha b_{12} + \alpha^2 b_{12}b_{21}) \\ &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} + \alpha(a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11} - a_{12}b_{21} - a_{21}b_{12}) \\ &\quad + \alpha^2(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) \\ &= a + \alpha h + \alpha^2 b, \end{aligned}$$

onde $a = \det(A)$, $b = \det(B)$ e $h = a_{11}b_{22} + a_{22}ab_{11} - a_{12}b_{21} - a_{21}b_{12}$.

Assim, temos que $\det(A + \alpha B)$ é um polinômio de grau 2. Por hipótese, $\det(A + \alpha B) \in \{-1, 1\}$ para $\alpha \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Considerando os objetos como $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ e as gavetas como $\{-1, 1\}$, segue, pelo Teorema 3, que, pelo menos, 3 matrizes $A + \alpha B$ terão o mesmo determinante $a + \alpha h + \alpha^2 b$. Mas isso só é possível se $h = b = 0$, já que o polinômio de grau 2 não admite resultado igual para três valores distintos. Portanto, para todo α temos que $\det(A + \alpha B) = a = \det(A) \in \{-1, 1\}$. Em particular, é válido para $\alpha = 5$.

□

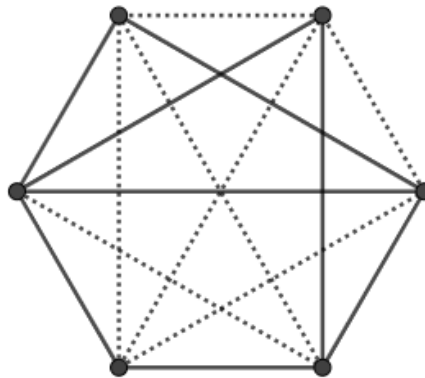
5.5 Aplicações avançadas que envolvem Análise Combinatória

Aplicação 37. Em uma reunião, há 6 pessoas. Mostre que, necessariamente, existem 3 pessoas que se conhecem mutuamente ou 3 pessoas que não se conhecem mutuamente.

Demonstração. Primeiramente, admitimos que, se a conhece b , b conhece a .

Para melhor visualizarmos o problema, podemos entender cada pessoa como o vértice de um hexágono. Vamos ligar cada um dos pontos por um segmento contínuo, caso as pessoas se conheçam ou por um segmento pontilhado, caso as pessoas não se conheçam. Como visto na Figura 7 seguir:

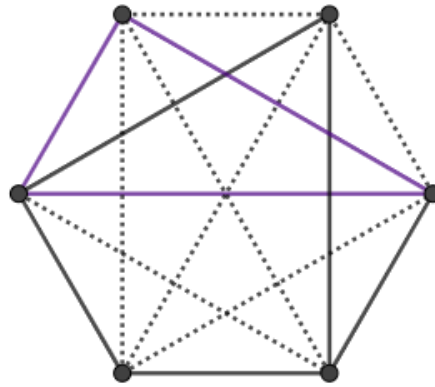
Figura 7 – Seis pessoas que se conhecem ou não se conhecem



Fonte: Autoria Própria.

Para que três pessoas se conheçam mutuamente ou não se conheçam mutuamente, é necessário que se forme um triângulo, composto somente por segmentos contínuos ou somente por segmentos pontilhados. Como mostra a Figura 8 seguinte.

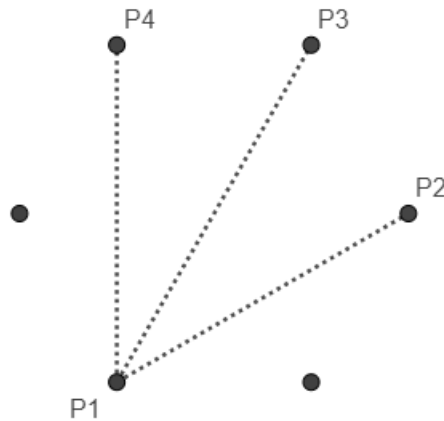
Figura 8 – Exemplo em que 3 pessoas se conhecem mutuamente



Fonte: Autoria Própria.

Vamos escolher um ponto $P1$ qualquer do hexágono. Desse ponto partirão 5 segmentos. Considerando estes 5 segmentos como os objetos e os dois tipos (contínuo ou pontilhado) como as gavetas, segue, pelo Teorema 3 que, pelo menos, 3 segmentos serão do mesmo tipo. A Figura 9 mostra três segmentos do mesmo tipo, no caso, pontilhados.

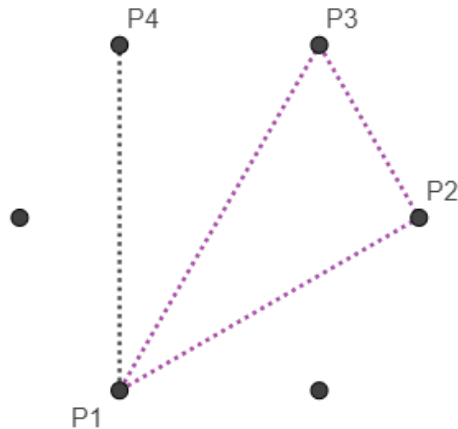
Figura 9 – Exemplo em que uma pessoa não conhece três pessoas



Fonte: Autoria Própria.

Estudemos somente esses 3 segmentos. Indiquemos por P_2 , P_3 e P_4 os vértices ligados a P_1 por segmentos pontilhados. Se algum dos segmentos $\overline{P_2P_3}$, $\overline{P_2P_4}$ ou $\overline{P_3P_4}$ é pontilhado, então obteremos um triângulo pontilhado. Assim, teremos três pessoas que não se conhecem mutuamente, como mostra a Figura 10.

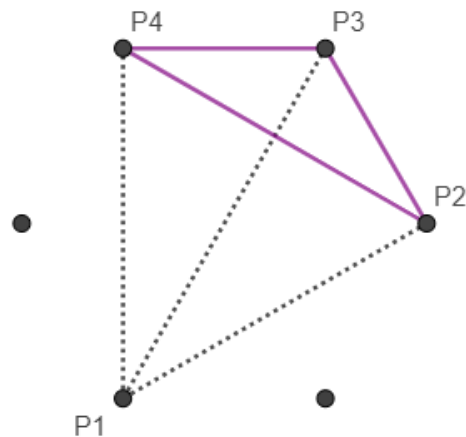
Figura 10 – Exemplo de três pessoas que não se conhecem mutuamente



Fonte: Autoria Própria.

Caso isso não aconteça, temos que os segmentos $\overline{P_2P_3}$, $\overline{P_2P_4}$ e $\overline{P_3P_4}$ formarão um triângulo de segmentos contínuos. Assim, teremos três pessoas que se conhecem mutuamente, como mostra a Figura 11.

Figura 11 – Exemplo de três pessoas que se conhecem mutuamente



Fonte: Autoria Própria.

□

Esta aplicação é um caso particular do Teorema de Ramsey, que diz que dado qualquer inteiro $k \geq 3$, existe um inteiro $R(k)$ tal que, em uma reunião de $R(k)$ pessoas, sempre existem k pessoas que se conhecem mutuamente ou k pessoas que não se conhecem mutuamente. Este teorema geralmente é demonstrado utilizando teoria de grafos.

5.6 Aplicações Avançadas que envolvem funções

Antes de partirmos para a aplicação que aborda o conteúdo de funções, será necessário provar o seguinte resultado.

Proposição 9. *Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$. Temos que $a - b \mid a^n - b^n$.*

Demonstração. Vamos provar utilizando indução em n .

Para $n = 1$ temos que $a - b$ divide $a^1 - b^1 = a - b$.

Agora, supomos que $a - b \mid a^n - b^n$ para algum $n \in \mathbb{N}$ e provemos que $a - b \mid a^{n+1} - b^{n+1}$.

$$a^{n+1} - b^{n+1} = a^n a - b^n b = a^n a - b a^n + b a^n - b^n b = (a - b)a^n + (a^n - b^n)b.$$

Como $a - b \mid a - b$ e, pela hipótese de indução, $a - b \mid a^n - b^n$, concluímos que $a - b \mid a^{n+1} - b^{n+1}$.

Pelo Princípio da Indução, temos que $a - b \mid a^n - b^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

□

Aplicação 38. *Suponha que $f(x)$ é uma função polinomial de coeficientes inteiros. Se $f(x) = 2$ para três inteiros diferentes a, b e c , prove que, não existe inteiro d tal que $f(d) = 3$.*

Demonstração. Seja $f(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0$, com $c_n, c_{n-1}, \dots, c_1, c_0 \in \mathbb{Z}$. Assim, temos $f(p) - f(q)$ como

$$\begin{aligned} f(p) - f(q) &= c_n p^n + c_{n-1} p^{n-1} + \dots + c_1 p + c_0 - (c_n q^n + c_{n-1} q^{n-1} + \dots + c_1 q + c_0) \\ &= c_n (p - q)^n + c_{n-1} (p - q)^{n-1} + \dots + c_1 (p - q). \end{aligned}$$

Como $(p - q) \mid (p^k - q^k)$ para todo $k > 0$, então $(p - q) \mid f(p) - f(q)$.

Agora, supomos, por contradição, que existe um inteiro d tal que $f(d) = 3$. Dessa maneira, teremos que

$$(d - a) \mid 3 - 2 = 1, \quad (d - b) \mid 3 - 2 = 1 \quad \text{e} \quad (d - c) \mid 3 - 2 = 1.$$

Portanto, três números distintos, dividem 1. Mas sabemos que os divisores de 1 são apenas 1 e -1 . Considerando $d - a$, $d - b$ e $d - c$ como os objetos e os divisores 1 e -1 como as gavetas, segue, pelo Princípio das Gavetas de Dirichlet, que, pelo menos, dois números $d - a$, $d - b$ e $d - c$ serão iguais. Se, por exemplo, $d - a = d - b$ então teremos $a = b$, o que é um absurdo. Isso acontece, de maneira análoga, para os outros casos.

Logo, se $f(x) = 2$ para três inteiros diferentes a, b e c , não existe inteiro d tal que $f(d) = 3$.

□

Assim, concluímos este trabalho mostrando as várias aplicações do Princípio das Gavetas de Dirichlet, desde resoluções de problemas simples a provas de teoremas mais avançados, ressaltando a beleza desta ferramenta.

6 CONCLUSÃO

Neste trabalho apresentamos a relevância do Princípio das Gavetas de Dirichlet nas abordagens de suas aplicações em diversas áreas da matemática. Desta maneira, foi possível entender o Princípio das Gavetas de Dirichlet como uma poderosa ferramenta, capaz de facilitar a resolução de problemas de existência, como foi evidenciado no trabalho, na demonstração de teoremas clássicos de aritmética e resultados de análise, entre outros.

Acreditamos que o Princípio das Gavetas de Dirichlet pode ser introduzido no Ensino básico com assuntos simples de aritmética e geometria. Também poderia ser mais explorado nos cursos de Licenciatura em Matemática.

Por fim, esperamos que este trabalho sirva de apoio aos estudantes na procura de um melhor entendimento do Princípio das Gavetas de Dirichlet.

REFERÊNCIAS

- BOGOMOLNY, A. **Pigeonhole Principle**. 2018. Disponível em https://www.cut-the-knot.org/do_you_know/pigeon.shtml Acesso em: 27/05/2022.
- BRADY, N. **First Results in Elementary Number Theory**. 2016. Disponível em <https://math.ou.edu/~nbrady/teaching/s16-2513/ENT.pdf> Acesso em: 11/05/2023.
- BURTON, D. M. **Elementary Number Theory**. [S.l.]: Mc Graw-Hill, 2011.
- GASARCH, W. **Five Proofs of the Subsequence Theorem An Exposition by William Gasarch**. 2023? Disponível em <https://www.cs.umd.edu/~gasarch/BLOGPAPERS/subseq4proofs.pdf> Acesso em: 11/05/2023.
- GUICHARD, D. **The Pigeonhole Principle**. 2023? Disponível em https://www.whitman.edu/mathematics/cgt_online/book/section01.06.html Acesso em: 11/05/2023.
- HEEFFER, A. The pigeonhole principle, two centuries before dirichlet. **The Mathematical Intelligencer**, v. 36, n. 2, p. 27–29, 2014.
- HEFEZ, A. **Aritmética**. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matemática, 2016.
- MACIEL, J. W. da S. **Dirichlet e Ramsey: uma bela combinação**. São Gonçalo: [s.n.], 2020. 50 p. Disponível em <https://www.btdt.uerj.br:8443/bitstream/1/18995/2/Disserta%C3%A7%C3%A3o%20-%20Jefferson%20Wallace%20da%20Silva%20Maciel%20-%202020%20-%20Completa.pdf> Acesso em: 01/06/2023.
- NEW, S. **Lesson 2: Solutions to the Pigeonhole Principle Problems**. 2016. Disponível em <https://www.math.uwaterloo.ca/~snew/Contests/ProblemSessions/Problems2015/Lesson2soln.pdf> Acesso em: 11/05/2023.
- SANTOS, J. P. O.; MELLO, M. P.; MURARI, I. T. C. **Introdução à Análise Combinatória**. [S.l.]: Editoria Ciência Moderna, 1995.
- STEFFENON, R.; GUARNIERI, F. **Belos Problemas de matemática - Indução e Contagem**. [S.l.]: SBM, 2016.