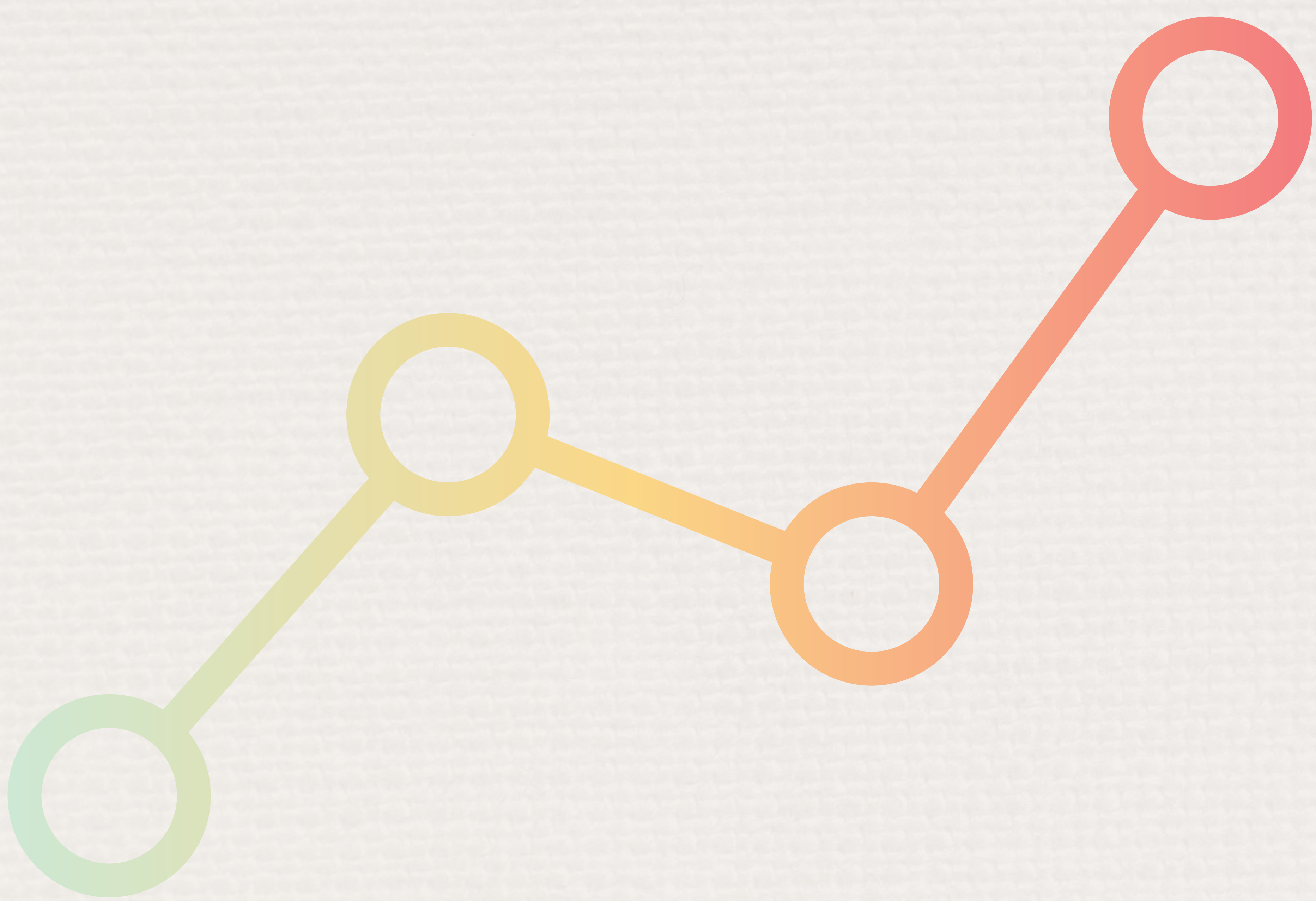
Da teoria à prática:
uma proposta de ensino de EDO para apoiar o raciocínio matemático de estudantes



Tais Mara dos Santos
Henrique Rizek Elias

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

Tais Mara dos Santos
Henrique Rizek Elias

Da teoria à prática: uma proposta de ensino de EDO para apoiar o raciocínio matemático de estudantes

From theory to practice: a proposal for teaching EDO to support students' mathematical reasoning

2025

Folha de aprovação

Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Londrina

TAIS MARA DOS SANTOS

UMA ANÁLISE DAS AÇÕES DO PROFESSOR QUE APOIAM O RACIOCÍNIO MATEMÁTICO NA DISCIPLINA EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS EM CURSOS DE ENGENHARIA

Trabalho de pesquisa de mestrado apresentado como requisito para obtenção do título de Mestre Em Ensino De Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Área de concentração: Ensino De Matemática.

Data de aprovação: 05 de Dezembro de 2024

Dr. Henrique Rizek Elias, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Eliane Maria De Oliveira Araman, - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dr. Gabriel Loureiro De Lima, Doutorado - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (Pucsp)

SUMÁRIO

Apresentação

Este produto educacional é um material pedagógico destinado a professores do Ensino Superior e foi desenvolvido como resultado de uma pesquisa de mestrado profissional realizado no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGMAT) pela estudante de mestrado Tais Mara dos Santos, sob a orientação do Prof. Dr. Henrique Rizek Elias. A pesquisa teve por objetivo identificar e discutir as ações do professor que apoiam o raciocínio matemático durante a realização de uma tarefa exploratória em uma turma de Engenharia na disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO).

Os dados da pesquisa foram produzidos em um ambiente real de sala de aula da disciplina de EDO, cujo professor da turma foi o orientador da pesquisa. A disciplina foi ministrada em conjunto para os cursos de Engenharia Química e Engenharia Ambiental da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR) *campus* Londrina.

Durante as aulas, o professor trabalhou com uma tarefa exploratória que envolveu o tópico EDO de primeira ordem e o modelo matemático abordado foi a Lei do resfriamento de Newton.

A tarefa matemática proposta consistiu na medições de temperatura da água, na elaboração de um modelo matemático utilizando uma EDO e na análise desse modelo.

Com o objetivo de compartilhar conhecimentos e práticas inovadoras, preparamos este material destinado a professores que ensinam EDO. Neste material, iniciamos com uma apresentação de algumas considerações acerca da noção dos processos do raciocínio matemático e as ações do professor, detalhando como essas ações do professor podem apoiar o raciocínio matemático dos estudantes, conforme apontam Araman, Serrazina e Ponte (2019).

Além disso, apresentamos uma tarefa junto com a proposta de sua aplicação, incluindo os materiais necessários, uma sugestão de procedimento e possíveis intervenções. Visando aprimorar o desenvolvimento desta tarefa, sugerimos o uso de recursos tecnológicos como o *GeoGebra* e o *Phyton*. Pensando nisso, apresentamos o passo a passo para a elaboração da EDO de resfriamento, utilizando tais recursos. Também indicamos como esses recursos podem ser acessados de forma online, disponibilizando links que permitem ao leitor acesso direto aos sites correspondentes.

Raciocínio matemático e as ações do professor

Mata-Pereira e Ponte (2018, p. 782) consideram que “raciocinar matematicamente consiste em fazer inferências justificadas, ou seja, utilizar informação matemática já conhecida para obter, justificadamente, novas conclusões”. Para Ponte, Quaresma e Mata-Pereira (2010, p. 10), “Há uma variedade de aspectos e processos que podem estar envolvidos no raciocínio matemático... Conjecturar, generalizar e justificar destacam-se como processos essenciais do raciocínio matemático”. Santos (2025) elaborou um quadro (Quadro 1) que mostra as definições desses processos segundo os autores. Para tanto, a autora se fundamentou em Morais, Serrazina e Ponte (2018) que, por sua vez, caracterizam esses processos com base em Ellis (2011) e Lannin et al. (2011).

Quadro 1: Processos do raciocínio matemático

Processos	Definição
Conjecturar	“É um processo que envolve raciocinar sobre relações matemáticas, desenvolvendo afirmações, denominadas conjecturas, que requerem maior exploração para verificar se são verdadeiras ou não” (Morais; Serrazina; Ponte, 2018, p. 555, tradução nossa).
Generalizar	É “uma atividade onde as pessoas, que partilham um contexto socio matemático específico, estão envolvidas em pelo menos uma de três ações: (i) identificar pontos em comum entre os casos; (ii) estender o raciocínio para além do caso inicial; ou (iii) extrair resultados mais amplos de casos particulares” (Morais; Serrazina; Ponte, 2018, p. 556, tradução nossa).
Justificar	“Tem como objetivo convencer a si mesmo e aos outros (Morais; Serrazina; Ponte, 2018, p. 556, tradução nossa)”. A justificação não só mostra que uma afirmação é verdadeira, mas também fornece razões pelas quais é verdadeira ou válida em todos os casos possíveis (p. 556).

Fonte: Santos, (2025 p. 42)

Temos que o raciocínio matemático dos alunos se desenvolve a partir de conhecimentos prévios e por meio desses processos (conjecturar, generalizar e justificar) e com uma tarefa com tal potencial, os alunos são capazes de produzir novos conhecimentos. Mas, para todo esse processo acontecer o professor tem um papel importante, ele é o responsável por gerenciar a aula e orientar os alunos, o que não é algo simples. Com o intuito de auxiliar o professor durante este processo, Araman, Serrazina e Ponte (2019) elaboraram um quadro de análise das ações do professor que apoiam o raciocínio matemático dos estudantes. Neste quadro (Quadro 2), os autores apresentam as categorias de ações e como elas podem ser executadas pelo professor durante o desenvolvimento da tarefa.

Quadro 2: Quadro de análise das ações do professor que apoiam o raciocínio matemático

CATEGORIAS	AÇÕES
Convidar	- Solicita respostas para questões pontuais. - Solicita relatos de como fizeram.
Guiar/Apoiar	- Fornece pistas aos alunos. - Incentiva a explicação. - Conduz o pensamento do aluno. - Focaliza o pensamento do aluno para fatos importantes. - Encoraja os alunos e re-dizerem suas respostas. - Encoraja os alunos a re-elaborarem suas respostas.
Informar/Sugerir	- Valida respostas corretas fornecidas pelos alunos. - Corrige respostas incorretas fornecidas pelos alunos. - Re-elabora respostas fornecidas pelos alunos. - Fornece informações e explicações. - Incentiva e fornece múltiplas estratégias de resolução.
Desafiar	- Solicita que os alunos apresentem razões (justificativas). - Propõe desafios. - Encoraja a avaliação. - Encoraja a reflexão. - Pressiona para a precisão. - Pressiona para a generalização.

Fonte: Araman, Serrazina e Ponte (2019 p. 476).

De acordo com Araman, Serrazina e Ponte (2019), a categoria Convidar envolve as ações do professor que solicitam informações dos alunos a respeito do que fizeram, tendo como objeto observar como os alunos estão pensando e qual a compreensão estão tendo sobre aquele tema. A categoria ***Guiar/Apoiar*** envolve as ações “em que o professor, a partir de perguntas ou explicações, conduz o pensamento do aluno para uma determinada situação ou focaliza fatos importantes ou ainda quando o professor fornece pistas aos alunos e os encoraja a pensarem sobre suas respostas” (Araman; Serrazina; Ponte, 2019, p. 476). A categoria ***Informar/Sugerir*** abarca as ações pelas quais o professor valida ou corrige uma resposta dada pelos alunos, ou, ainda, quando fornece explicações ou informações e solicita ou apresenta outras estratégias de solução. A categoria ***Desafiar*** envolve “as ações nas quais o professor tenta colocar os alunos em situação desafiadora de modo que estes avancem em seu raciocínio matemático, procurando novas formas de representação, estabelecendo novas conexões, refletindo e avaliando a situação, generalizando e justificando” (Araman; Serrazina; Ponte, 2019, p. 476).

Tarefa

Nesta seção, apresentamos a tarefa, incluindo uma proposta detalhada para a sua implementação, oferecendo um guia prático para o professor. Além disso, apresentamos sugestões de intervenções pedagógicas que podem apoiar os alunos a mobilizarem os processos de raciocínio matemático, como conjecturar, generalizar e justificar.

Tendo como base as categorias e ações apresentadas no Quadro 2, identificamos e classificamos diferentes estratégias que o professor pode utilizar para promover o desenvolvimento do raciocínio matemático.

As sugestões apresentadas visam auxiliar o professor a criar um ambiente de aprendizagem que favoreça a construção de conhecimentos matemáticos pelos alunos.

Por meio dos dados coletados, o objetivo da tarefa é encontrar um modelo matemático que permita obter a temperatura da água em qualquer instante t, depois discutir e analisar esse modelo obtido.

Para isso, sugerimos dividir a tarefa em três etapas, onde cada etapa é dependente da anterior, conforme descrito a seguir:

Primeira etapa: realizar as medições da temperatura da água.

Segunda etapa: com os dados obtidos na primeira etapa, desenvolver um modelo matemático que permita obter a temperatura da água em qualquer instante t.

Terceira etapa: discutir e analisar o modelo matemático obtido na etapa anterior.

Primeira etapa: realizar as medições de temperatura da água

Materiais

- ***Recipientes com água*** (quente ou fria). Uma sugestão é que cada grupo utilize um recipiente diferente (copo de plástico, de vidro, de plástico, de alumínio);
- Disponibilizar um ***termômetro culinário*** para cada grupo (se houver uma quantidade suficiente, se não, fazer o rodizio de termômetro);
- ***Relógio ou cronômetro***;
- ***Uma folha para o registro*** das medições de temperatura, conforme apresentada em anexo (***pronta para a impressão)***.

Sugestão de procedimento

Inicialmente, o professor deve separar os alunos em grupo e orientar os alunos a anotarem a temperatura ambiente no momento do início da aula e a realizarem a primeira medição da temperatura da água. A partir daí, cada grupo ficará responsável por medir a temperatura da água, deixada em temperatura ambiente, a cada 10 minutos por cerca de 100 minutos.

O professor poderá auxiliar os grupos na coleta das temperaturas, orientando-os a seguir o procedimento: os alunos devem colocar o termômetro culinário no recipiente com água, esperar um pouco (até a medida do termômetro estabilizar) e, em seguida, anotar na folha de registro o horário e a temperatura observada naquele instante.

Durante esse processo de coleta de dados, o professor poderá fazer perguntas aos alunos, estimulando-os a começar a formular conjecturas sobre a tarefa.

Possíveis intervenções

Para iniciar a tarefa, o professor pode ***convidar*** os alunos a participarem da realização da tarefa, contextualizando-a com os conteúdos teóricos já estudados. Essa conexão é importante para que os alunos percebam a relevância da tarefa e se sintam mais engajados.

Durante o processo de coleta de dados o professor em ação de ***guiar/apoiar*** visando incentivar a explicação, pode fazer perguntas abertas que incentivem os alunos a interpretar os resultados. Exemplos:

- O que vocês observam nesses dados?
- O que acontece com a temperatura do objeto ao longo do tempo?
- A variação é constante?
- Quais fatores envolvem a situação? (temperatura do ambiente, temperatura do líquido, a superfície exposta, o calor específico da água, características do meio ambiente)

Caso os estudantes mencionem que a variação da temperatura está diminuindo (ou aumentando, a depender da temperatura da água de cada grupo), o professor pode, em ação de ***informar/sugerir,*** validar a resposta correta fornecida pelos alunos, corrigir respostas incorretas fornecidas pelos alunos, ou até mesmo re-elaborar as respostas fornecidas por eles. O objetivo é que os alunos compreendam a relação que existe com a temperatura ambiente.

Possíveis intervenções

Após os alunos acumularem uma quantidade significativa de dados, o professor, em ação de ***guiar/apoiar,*** pode direcionar a atenção dos alunos para a organização e análise dos resultados. Neste momento, ele pode levantar questões como:

- Como podemos estruturar os dados coletados para facilitar a análise?
- Que tipo de gráfico seria mais apropriado para ilustrar essas informações?
- Qual gráfico vocês acreditam que melhor demonstraria a relação entre tempo e temperatura? E qual seria a justificativa?

Essas indagações podem estimular uma reflexão sobre as melhores maneiras de visualizar e interpretar os resultados. Ao fomentar a discussão sobre a seleção da representação gráfica, o professor contribui para que os alunos desenvolvam habilidades em visualização de dados e compreendam a relevância de escolher a ferramenta mais adequada para cada análise.

Possíveis intervenções

Depois que os alunos coletarem uma quantidade significativa de dados, é possível que eles indaguem ao professor até quando será necessário continuar a coleta. Caso eles não façam essa pergunta, o professor pode aproveitar o momento para ***desafiar*** os alunos, questionando:

- Será que precisamos coletar mais dados? Até que ponto?
- É necessário coletar dados até a temperatura do objeto se igualar à temperatura ambiente? Por quê?
- Qual é a quantidade ideal de dados para que possamos obter resultados confiáveis?

Essas perguntas incentivam os alunos a refletirem sobre a real necessidade de continuar coletando dados e a considerar a qualidade das informações já obtidas.

Segunda etapa: com os dados obtidos na primeira etapa, desenvolver um modelo matemático que permita obter a temperatura da água em qualquer instante t.

Materiais

- Entregue aos alunos, ***os dados coletados no primeiro dia***. Você pode optar por entregar a folha do próprio grupo, cópias dos dados dos outros grupos ou até mesmo fornecer os dados digitados junto com um enunciado, selecionando os dados de um grupo que utilizou água gelada e de outro utilizou água quente. Em nossa experiência, optamos por entregar duas folhas com os dados (uma referente à água quente e a outra à água fria) com o seguinte enunciado: *Encontrar um modelo matemático que permita obter a temperatura da água em qualquerinstantet* , conforme apresentado a seguir:

Dados coletados no dia 12 de abril.
Tipo de material utilizado: Copo UTFPR (Plástico)
Temperatura do ambiente: 26,4° C

Horário	**Temperatura da água** Termômetro culinário
16h10	74,6 °C
16h19	61 °C
16h29	53,8 °C
16h39	48,1 °C
16h50	43,6 °C
17h	40,2 °C
17h10	38,1 °C
17h21	36,3 °C

Encontrar um modelo matemático que permita encontrar a temperatura da águaemqualquerinstantet.

Dados coletados no dia 12 de abril.

Tipo de material utilizado: Copo de vidro (água gelada)

Temperatura do ambiente: 26,4° C

Horário	**Temperatura da água** Termômetro culinário
16h06	3,3 °C
16h18	8,9 °C
16h28	12,1 °C
16h38	15 °C
16h49	17,3 °C
17h	19,2 °C
17h09	20,1 °C
17h19	20,9 °C

Encontrar um modelo matemático que permita encontrar a temperatura da águaemqualquerinstantet.

Por meio dos dados coletados e do enunciado da tarefa, o professor esperava que os alunos compreendessem que, na situação proposta, a taxa da variação da temperatura é proporcional à diferença entre a temperatura T e a temperatura ambiente Ta, isto é,

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a) \qquad (onde\ k > 0)$$

Ou seja, no modelo matemático que representa a Lei do resfriamento de Newton. É importante destacar que este modelo matemático é classificado com uma EDO de 1° ordem, linear e de variáveis separáveis

Sugestão de procedimento

Caso a etapa seja feita em outro dia, comece organizando a sala mantendo os mesmos grupos da etapa anterior.

Caso você opte por devolver a folha com os dados que o próprio grupo conseguiu coletar ou cópias dos dados dos outros grupos, seria interessante incluir uma folha adicional ou escrever no quadro a seguinte instrução: “Encontre um modelo matemático que permita obter a temperatura da água em qualquer instante t”, pois isso dará uma direção para os alunos.

Além disso, seria bom sugerir que os alunos tragam seus *notebooks* nessa etapa, caso tenham interesse, para que possam analisar os dados utilizando algum *software*.

Durante o desenvolvimento da tarefa, o professor deve fazer perguntas aos alunos, apoiando o desenvolvimento dos processos de raciocínio matemático.

Possíveis intervenções

Para dar continuidade à tarefa, o professor pode ***convidar*** os alunos a utilizarem o conjunto de dados que foram coletados no primeiro momento. Eles deverão fazer uma análise e criar um modelo que possibilite determinar uma expressão capaz de calcular a temperatura em qualquer instante.

Durante o desenvolvimento da tarefa, o professor pode ***convidar*** os alunos a apresentarem relatos de como estão desenvolvendo a tarefa. Como eles já vão ter os dados em mãos, o professor, em ação de ***guiar/apoiar***, pode direcionar a atenção dos alunos para a organização e análise dos resultados.

Caso os alunos estejam organizando os dados no papel, o professor, em ação de ***informar/sugerir,*** pode incentivar os alunos a reproduzir procedimento e analisar os dados com auxílio de algum *software*, pois, com isso, o professor está incentivando os alunos a fornecerem múltiplas estratégias de resolução.

Com os dados organizados, o professor pode, em ação de ***guiar/apoiar***, direcionar a atenção dos alunos para a construção do gráfico. Neste momento, conceitos como variável dependente (temperatura) e independente (tempo) podem ser revisados e aplicados na prática. Perguntas como:

Possíveis intervenções

- Qual é a variável dependente neste experimento? E a variável independente?
- Qual tipo de gráfico vocês acham que melhor representará a relação entre essas duas variáveis? Por quê?
- Como vocês irão escolher a escala para cada eixo do gráfico?

Podem estimular a reflexão sobre a escolha da representação gráfica mais adequada.

Caso os alunos não apresentem um modelo matemático utilizando uma EDO, o professor pode aproveitar o momento para ***desafiar***, questionando-os:

- Com o passar do tempo t, o que se pode dizer a respeito da variação da temperatura T?
- O que seria a taxa de variação da temperatura, neste caso?
- É possível estabelecer alguma relação entre essa taxa de variação e as temperaturas T e Ta? Qual?

Essas perguntas incentivam os alunos a refletirem sobre o modelo a ser construído.

Terceira etapa: discutir e analisar o modelo matemático obtido na etapa anterior.

Sugestão de procedimento

Comece a terceira etapa convidando um representante de cada grupo a apresentar o modelo matemático construído para a turma toda, promovendo uma discussão e análise coletiva de cada um desses modelos e faça questionamentos sobre isso. Após as apresentações dos grupos sobre as EDO que construíram, o professor deve orientá-los a resolverem suas EDO (sem indicar um método específico para resolução) e, em seguida, validar o modelo construído. Para essa validação, os alunos podem voltar aos dados coletados pelos seus próprios grupos no primeiro dia ou utilizarem os dados de outros grupos caso o professor entregue. Assim como na etapa anterior, se desejarem, permita que os alunos utilizem livremente o *software GeoGebra* ou outra ferramenta semelhante. Após finalizarem a resolução e a validação, o professor pode convidar novamente os alunos a compartilharem suas resoluções para a turma, permitindo que apresentem diferentes abordagens de resolução (seja de forma algébrica ou e geométrica, por exemplo) além de diferentes ferramentas computacionais, se for o caso.

Por último, o professor deve realizar uma sistematização das aprendizagens dos alunos, dialogando com cada grupo a respeito das conclusões que tiraram, principalmente a respeito da validade do modelo obtido, do significado da constante de proporcionalidade, do papel da condição inicial para a determinação da constante de integração que surge na integral indefinida e das limitações do modelo quando comparado à realidade.

Possíveis intervenções

Para iniciar a finalização da tarefa, o professor pode ***convidar*** que cada grupo apresente e comente o modelo matemático que foi construído no momento anterior para toda a turma. Isso irá promover uma discussão e uma análise coletiva de cada modelo. Em ação de ***desafiar*** o professor pode ir fazendo perguntas sobre os modelos apresentados.

Pode acontecer dos grupos apresentarem modelos parecidos, por exemplo:

- dC/dt = k*(26,4 - C) (Grupo 1)
- dC/dt = k*(C - 26,4) (Grupo 2)
- dC/dt=k*C (Grupo 3)

Se isso acontecer o professor pode desafiar os alunos questionando:

- O que muda nas equações apresentadas pelos grupos?
- No caso dos Grupos 1 e 2, que diferença faz estar 26,4 menos T, e estar T menos 26,4? O que muda essa ordem estar trocada?
- O que acontece com a taxa de resfriamento quando a temperatura do objeto se aproxima de 26,4ºC em cada um dos modelos?
- Como podemos verificar experimentalmente qual dos modelos está mais próximo da realidade?
- Quais dados experimentais poderíamos utilizar para comparar os modelos?

Com este tipo de questionamento, o professor estimula os alunos a pensarem criticamente sobre os modelos matemáticos que eles construíram, relacionando-os com o fenômeno físico observado.

Possíveis intervenções

Depois da discussão do modelo, os alunos precisam resolver a EDO. Nesse momento, é comum que eles enfrentem algumas dificuldades, tais como:

- **Esquecimento da constante de integração:** é importante lembrar os alunos que a integração é um processo inverso da derivação e que, em uma integral indefinida, sempre surge uma constante arbitrária. Essa constante poderá ser determinada pelas condições iniciais do problema de valor inicial.
- **Dificuldade em determinar a constante de integração:** a constante de integração pode ser encontrada utilizando as condições iniciais do problema de valor inicial. Por exemplo, no caso da Lei de Resfriamento de Newton, a temperatura inicial do objeto é uma condição inicial que permite determinar o valor da constante.
- **Erros de cálculo:** É comum cometer erros de cálculo, especialmente em problemas mais complexos. Para evitar esses erros, os alunos podem utilizar calculadoras ou *softwares* de cálculo simbólico para verificar seus resultados.

Nesse contexto, em ação de ***desafiar*** os alunos, o professor pode sugerir o uso de ferramentas computacionais para validar seus resultados e visualizar o comportamento dos dados. A validação dos resultados é fundamental para garantir a confiabilidade do modelo matemático. Ao comparar os resultados teóricos com os dados experimentais, os alunos podem identificar possíveis discrepâncias e ajustar o modelo, se necessário.

Uso da tecnologia

A tecnologia desempenha um papel cada vez mais importante na resolução de problemas matemáticos. Ferramentas computacionais como o *GeoGebra* e o *Python* oferecem recursos poderosos para visualizar, analisar e validar soluções de equações diferenciais.

Com essas ferramentas, podemos visualizar o comportamento da solução de forma intuitiva, explorar diferentes cenários, comparar os resultados com dados experimentais e economizar tempo em cálculos complexos.

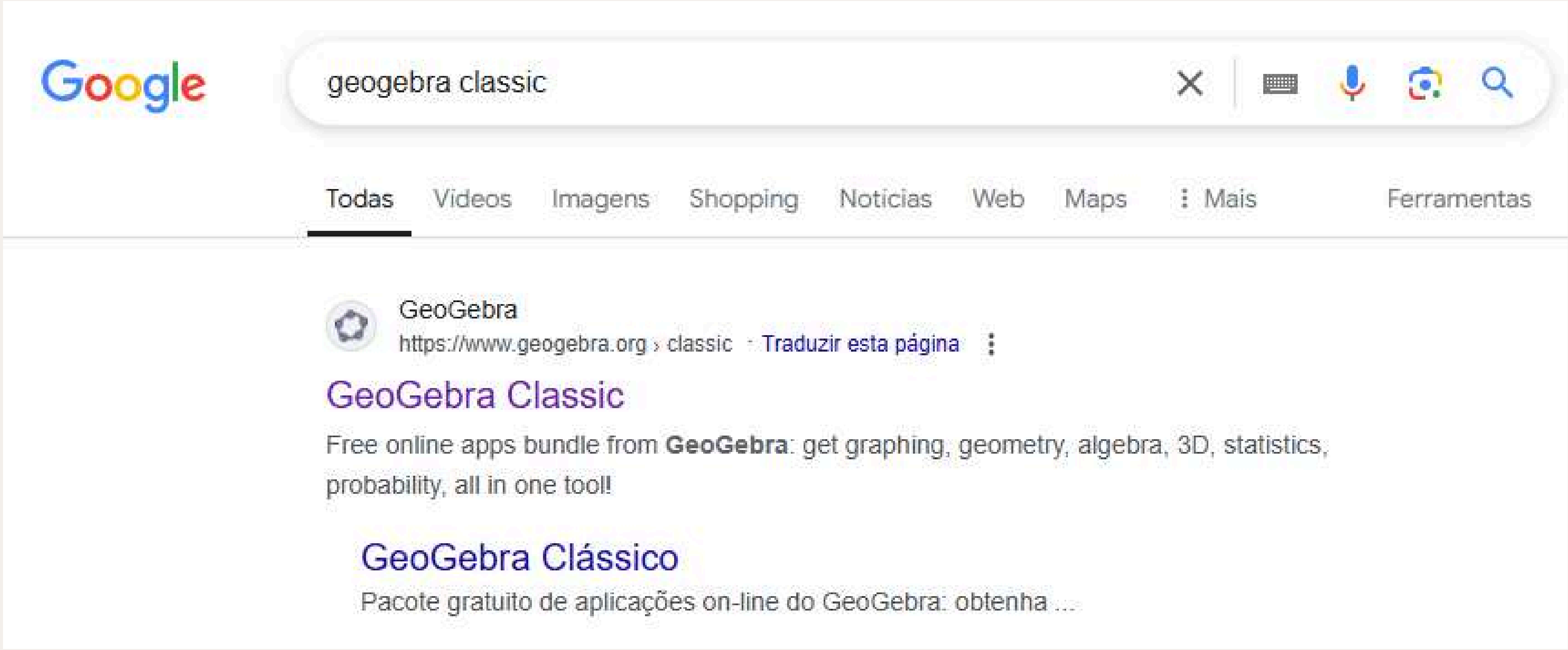
Nesta seção, iremos aprender a utilizar essas ferramentas para auxiliar na resolução da EDO que modela o resfriamento de um objeto, além de explorar suas diversas aplicações.

Com isso em mente, apresentamos um guia passo a passo para o desenvolvimento da EDO de resfriamento, utilizando tais recursos. Também vamos mostrar como esses recursos podem ser acessados de forma online, disponibilizando links que permitem ao leitor acesso direto aos sites correspondentes.

GeoGebra

Você pode utilizar o *GeoGebra* instalando o programa no seu computador ou acessando a versão online.

Se optar pela versão online, basta fazer uma busca no Google por "*GeoGebra Classic*" e acessar o primeiro link, como apresentado na imagem a seguir:

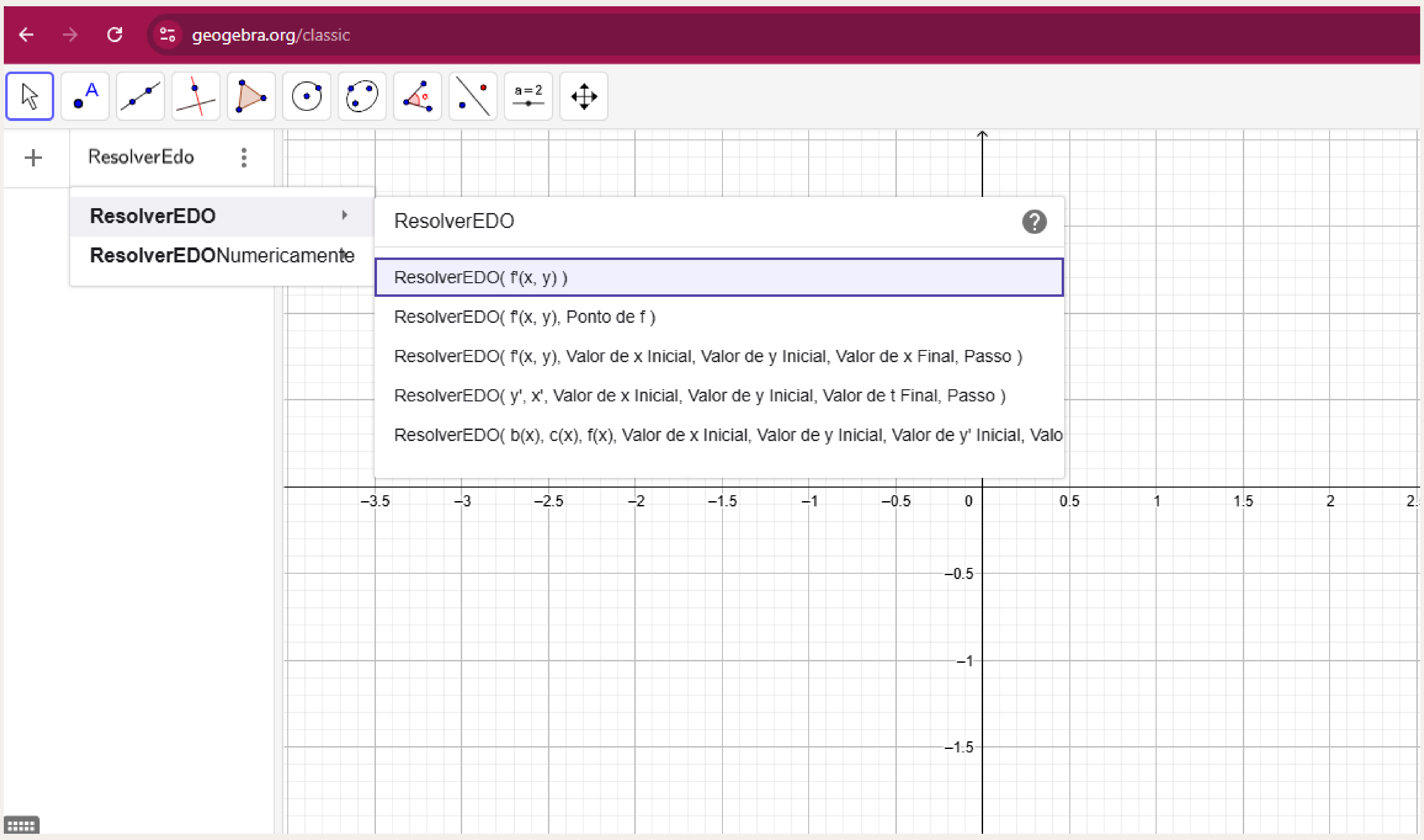


Alternativamente, você pode acessar diretamente por este link:

https://www.geogebra.org/classic

DESENVOLVIMENTO DA EDO DE RESFRIAMENTO UTILIZANDO O GEOGEBRA

No campo "Entrada" do *GeoGebra*, ao escrever "ResolverEDO", aparecerão diferentes opções, conforme mostra a figura abaixo:



Escolhendo a opção "ResolverEDO[<f'(x, y)>, <Ponto de f>]", é necessário:

1) informar a função *f'(x, y)* sendo que, neste caso, $\frac{dy}{dx}$ = *f'(x, y)*; e

2) informar um ponto *(x, f(x))* dado que pertence ao gráfico da solução da equação diferencial. Esse ponto, muitas vezes indicado por $y(x_0) = y_0$, é a ***condição inicial*** e, junto com a equação diferencial dada, forma um ***Problema de Valor Inicial*** (PVI).

Utilizando a EDO:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a) \qquad (k > 0)$$

assumindo Ta como sendo 26,4° C.

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - 26.4) \qquad (k > 0)$$

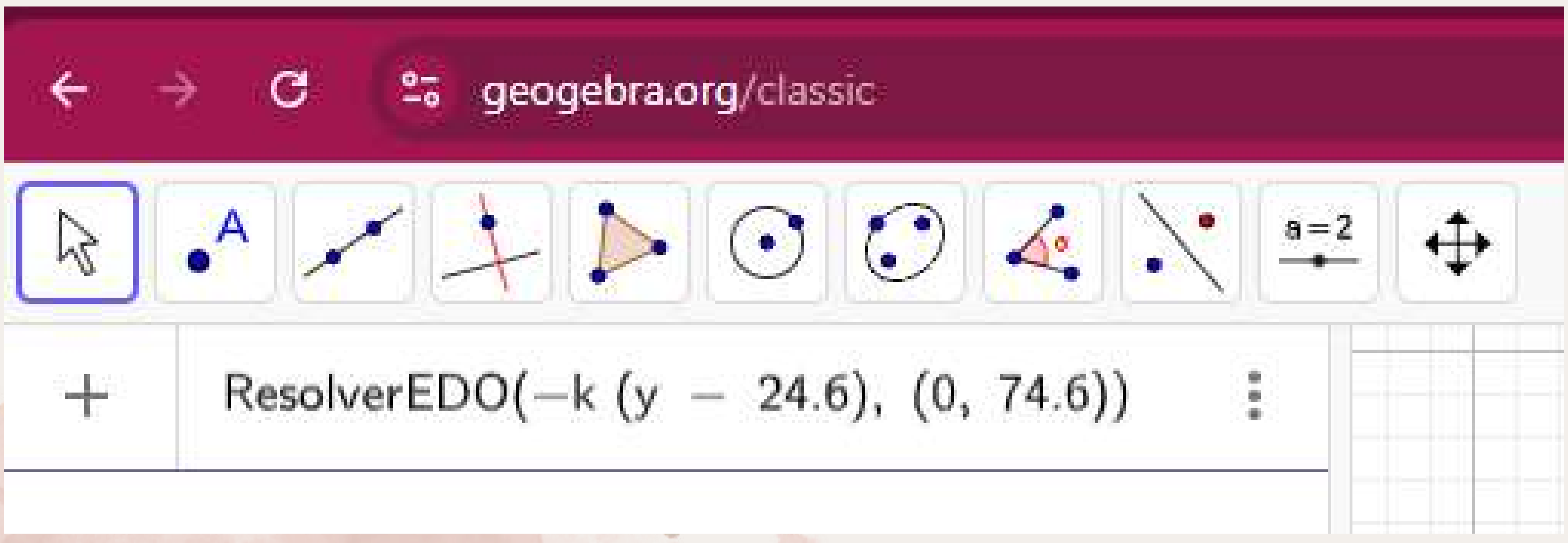
E considerando a condição inicial como sendo (0, 74.6), isto é, no instante x = 0, a temperatura inicial da água era 74,6.

É importante ressaltar que, no *GeoGebra*, as variáveis são representadas pelas letras *x* (variável dependente) e *y* (variável independente). Também é importante destacar que a forma decimal de um número é representada utilizando ponto e não vírgula. Por exemplo, a temperatura inicial é 74.6.

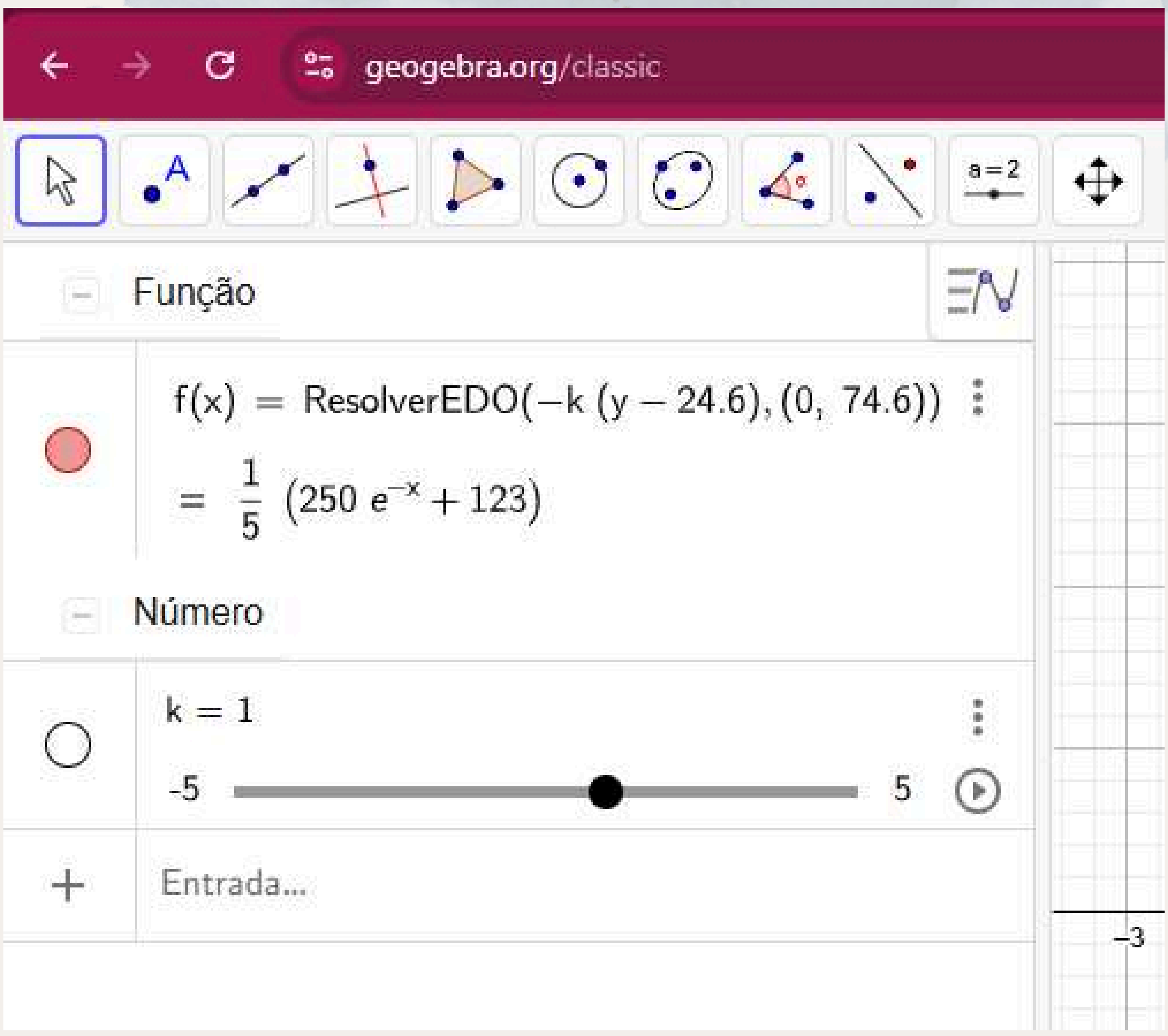
Para inserir essas informações no GeoGebra, fizemos:

ResolverEDO(-k(y - 24.6),(0, 74.6))*

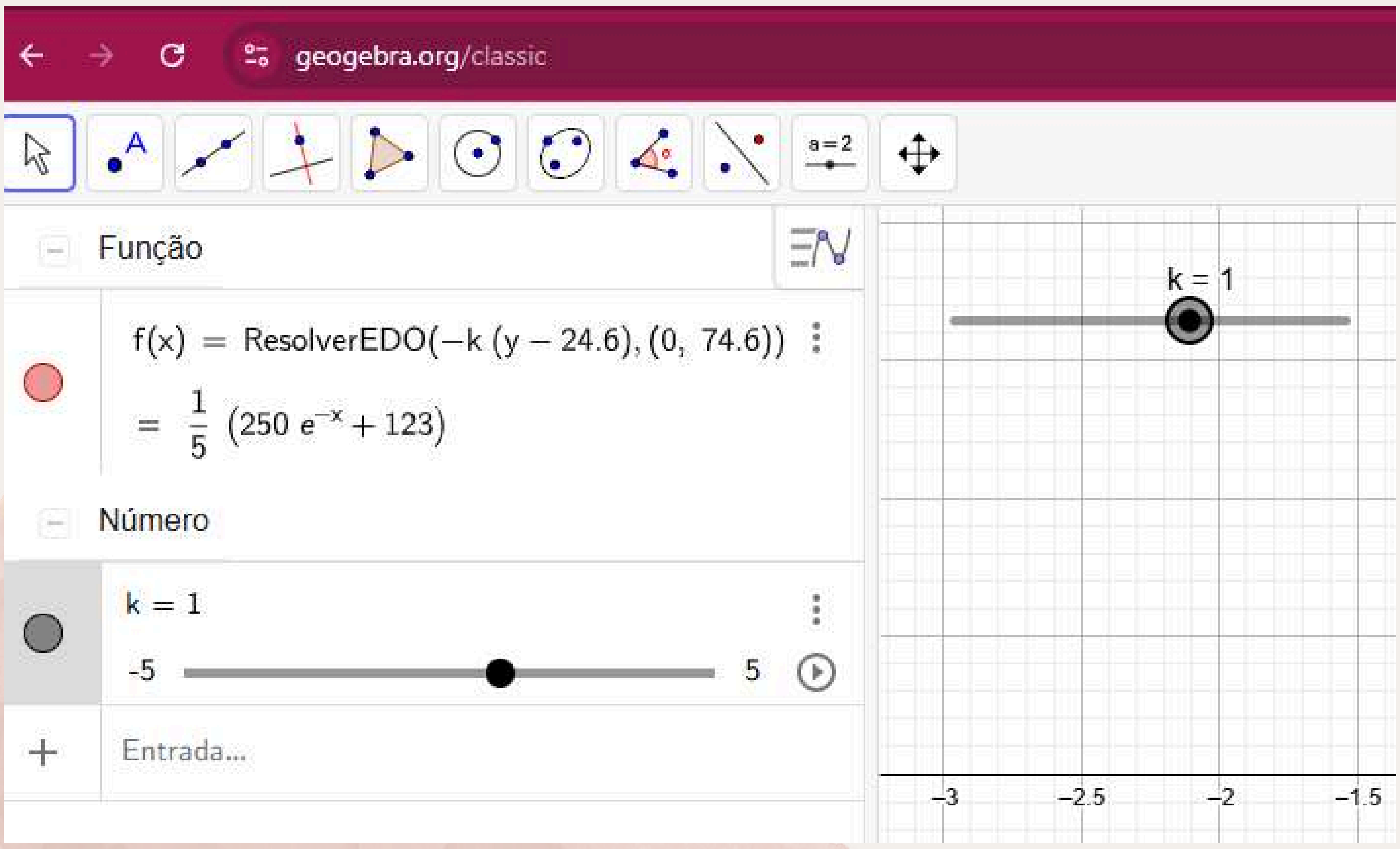
Como mostra a imagem abaixo:



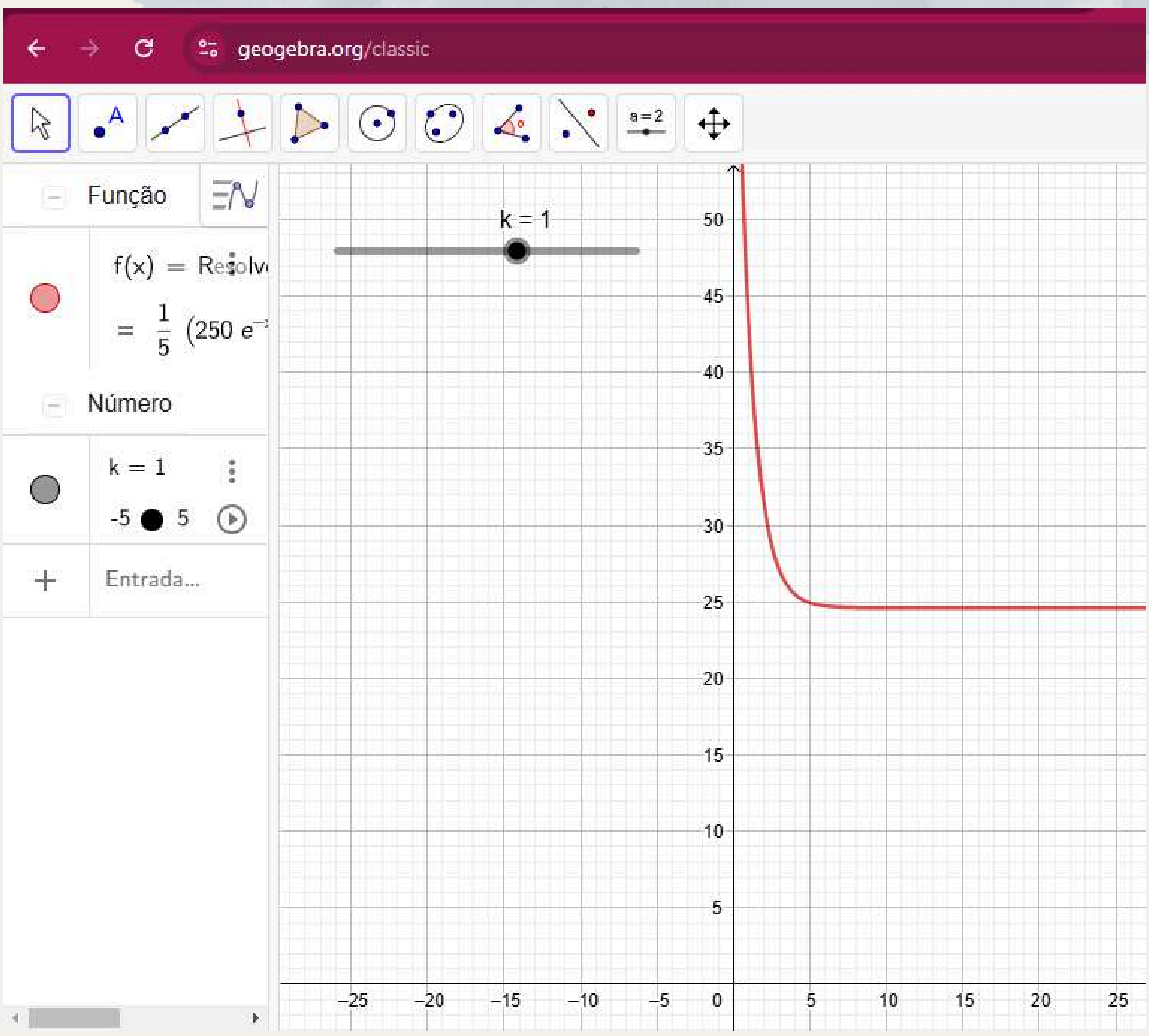
Assim que você apertar a tecla *Enter* do seu computador o *GeoGebra* irá criar um controle deslizante para a constante *k*, conforme apresentada na imagem abaixo:



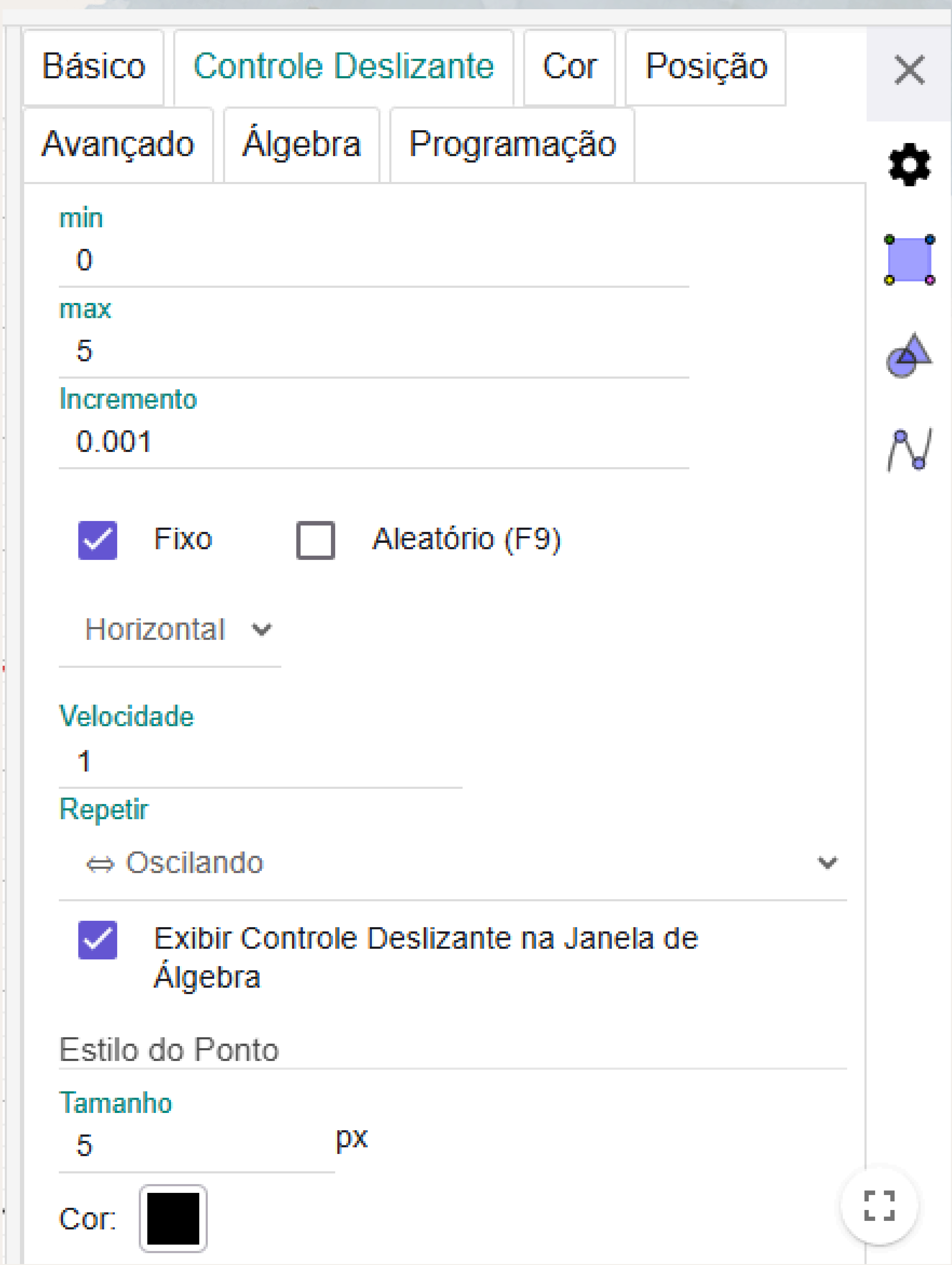
Dica: Toque no ícone (bolinha branca) do controle deslizante. Ao selecionar essa opção, um atalho aparecerá no *GeoGebra,* tornando mais fácil a manipulação dos valores.



Ao criar o controle deslizante para k, o *GeoGebra* irá gerar o gráfico da solução da EDO, que variará de acordo com o valor de k, conforme indica a figura abaixo.



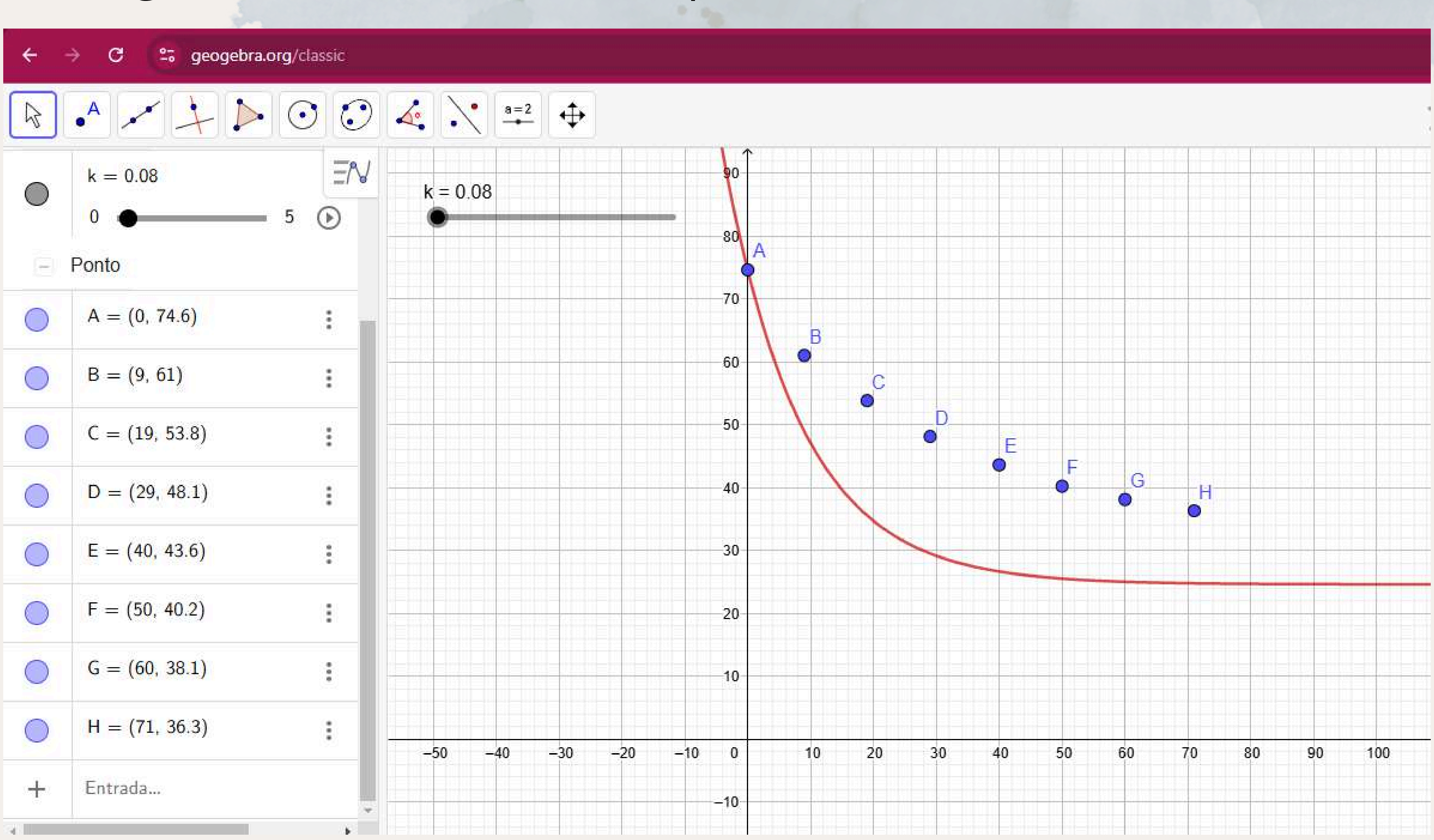
Ao clicar duas vezes sobre o controle deslizante k, irá aparecer uma janela aonde será possível modificar o intervalo e o incremento com que k varia. Caso a janela não apareça dessa forma, é possível clicar com o botão secundário do mouse (botão direito) e escolher a opção *configurações*. Na figura abaixo, fizemos k variar de 0 a 5 e incremento 0.001



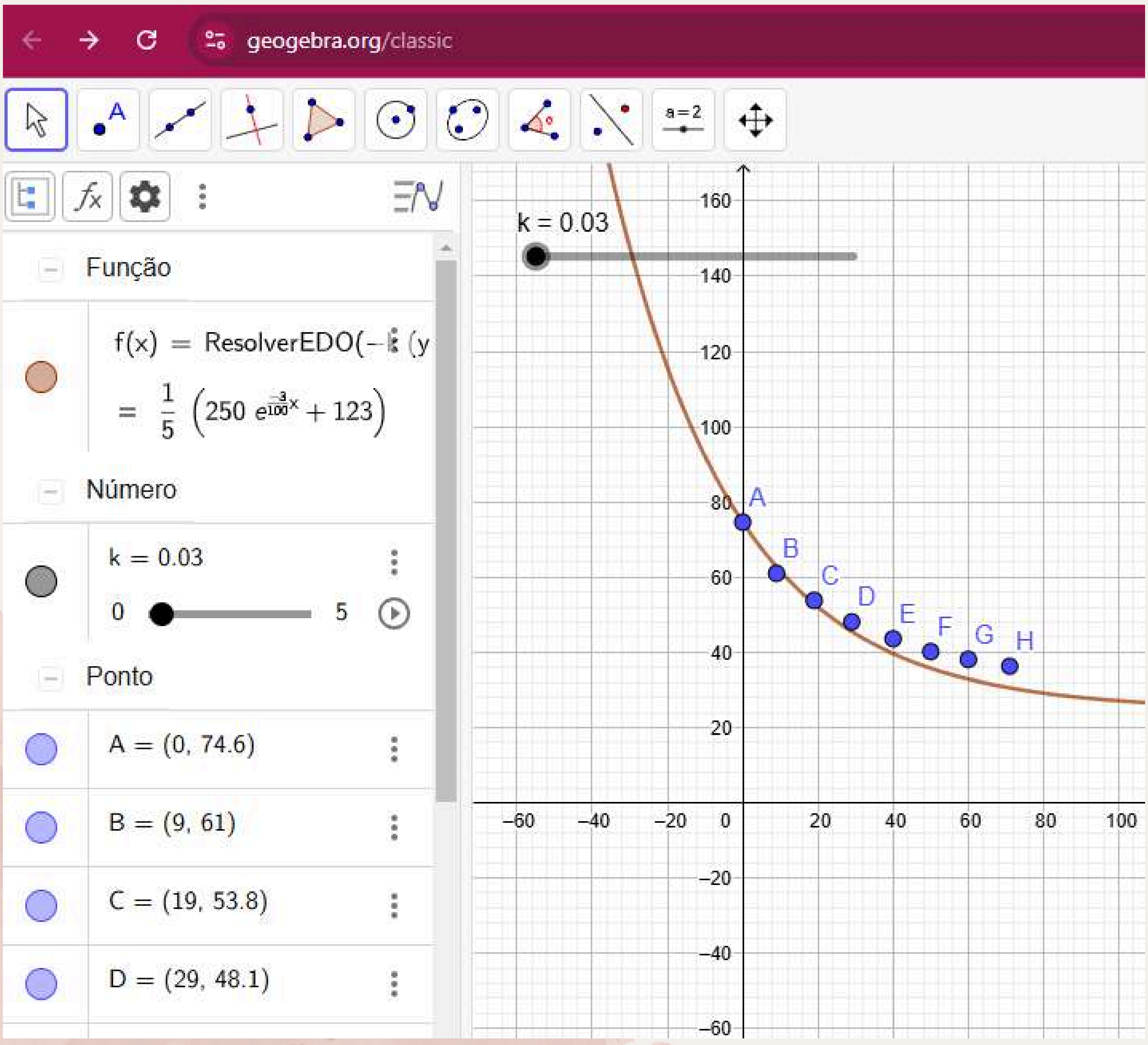
Pronto, agora é possível fazer a constante *k* assumir diferente valores e analisar o comportamento do gráfico da solução da EDO.

Para estimar um valor para *k* de modo que o gráfico da solução se aproxime do comportamento dos pontos (*t*, T(*t*)) da tabela obtida a partir da medição das temperaturas a cada instante *t*, criamos os pontos A, B, C, D, E, F, G e H no *GeoGebra*. Para tanto, na “Entrada”, digitamos “A=(0, 74.6)”, “B=(9, 61)”, “C=(19, 53.8)” e assim por diante.

A figura abaixo ilustra esses pontos:



Ao movermos o controle deslizante *k* para aproximadamente *k=0.03* , obtemos o gráfico abaixo:

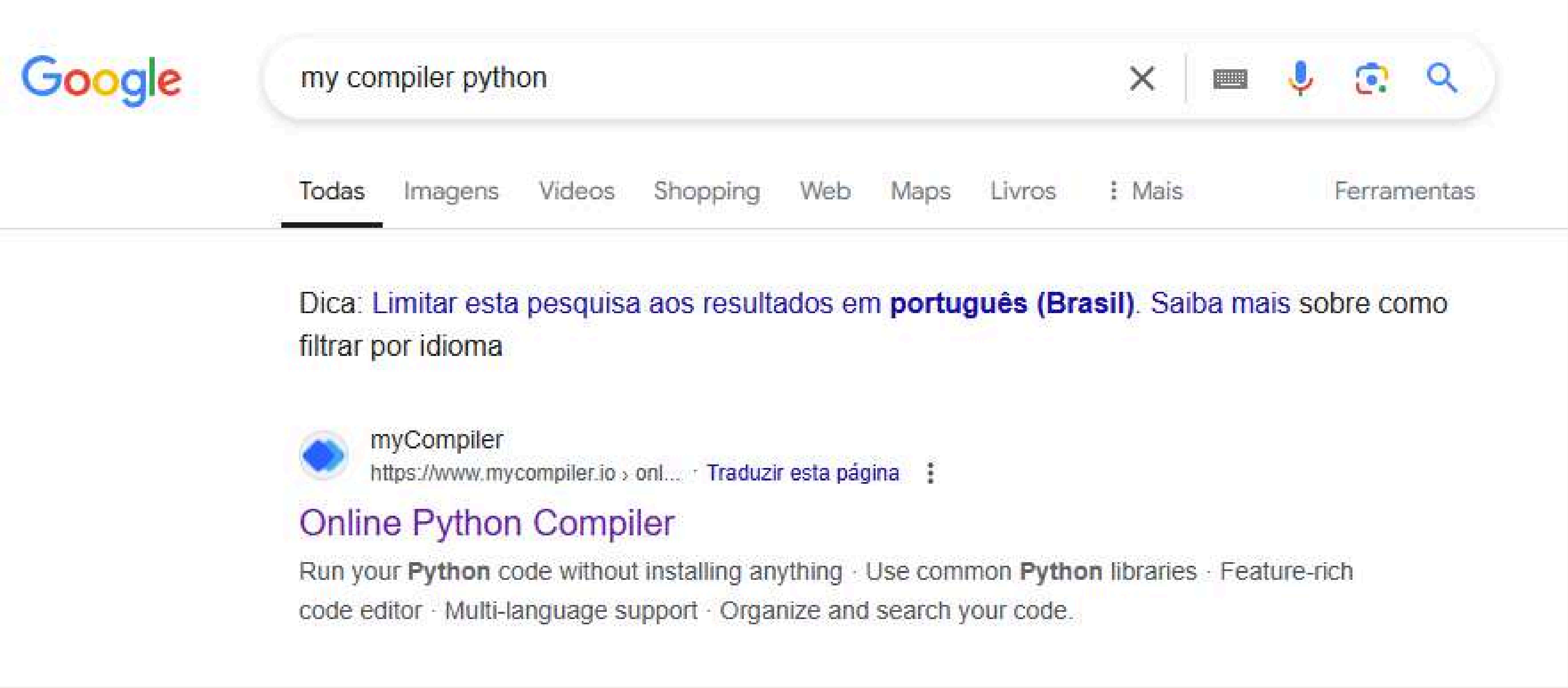


Na janela de Álgebra, temos a função:

$$f(x) = \frac{1}{5}\left(250\, e^{\frac{-3}{100}x} + 123\right)$$

É possível usar o P*ython* instalando o programa em seu computador, mas caso prefira, existem várias opções para programar online com *Python*, incluindo editores e compiladores disponíveis de forma online.

Se optar pela versão online, sugerimos o site MyCompiler. Basta fazer uma pesquisa no Google por *"my compiler python"* e acessar o primeiro link que aparecer, como apresentado na imagem a seguir:



Se preferir, você pode acessar diretamente por este link:

https://www.mycompiler.io/pt/new/python

DESENVOLVIMENTO DA EDO DE RESFRIAMENTO UTILIZANDO O PYTHON

Será apresentado o passo a passo da resolução e, em seguida, o código com valores de exemplo[1].

1.Importar bibliotecas necessárias para a resolução do problema:

```
import numpy as np
from scipy.integrate import odeint #integrar
import matplotlib.pyplot as plt #plotar gráfico
```

2.Definir a função do problema:

```
#função que retorna dy/dt
def temperatura(y,t):
    dydt = -0.02*(y-25) #considerando k=0,02 e Ta = 25°
    return dydt
```

3.Definir condição inicial do problema:

```
#condição inicial (ex: T0 = 80°)
y0 = 80
```

4. Definir o intervalo que resfriamento ocorre (utilizar função *Linspace do NumPy* para criar sequência de números uniformemente espaçados, apresentando os valores inicial e final):

```
#intervalo de tempo (ex: T0 = 0s e tn= 300s)
t = np.linspace(0,300)
```

1 Agradecemos à estudante Mariana Martini Rodrigues do curso de Engenharia Química da UTFPR pela colaboração no desenvolvimento da EDO de Resfriamento de Newton utilizando Python durante sua Iniciação Científica orientada pelo professor HenriqueRizekElias .

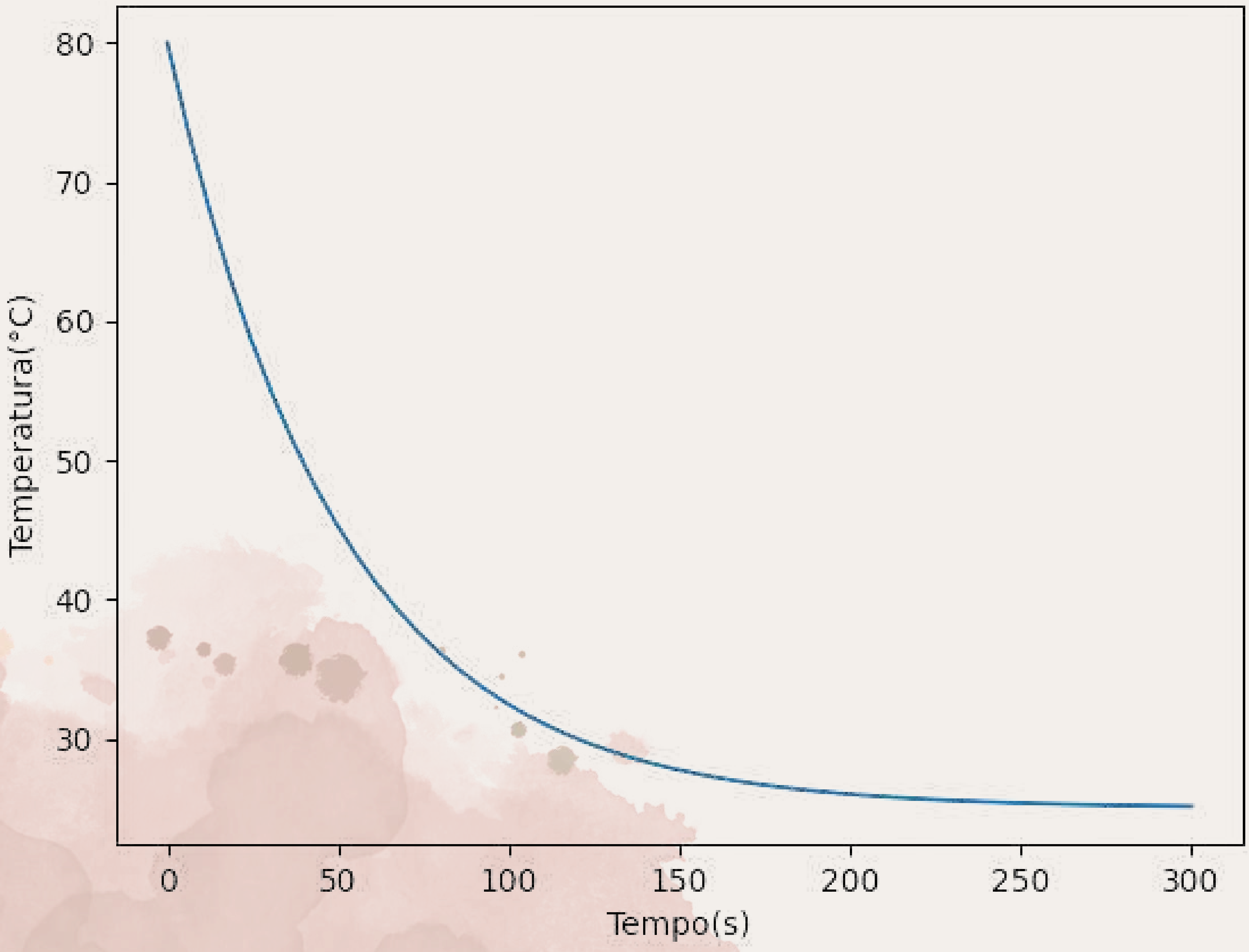
5.Resolver EDO utilizando função Odeint importada de SciPy:

```
#resolver EDO
y = odeint(temperatura, y0, t)
```

6.Plotar gráfico que represente o comportamento da EDO apresentada:

```
#plotar resultados
plt.plot(t,y)
plt.xlabel('Tempo(s)') #nome do eixo x
plt.ylabel('Temperatura(°C)') #nome do eixo y
plt.show()
```

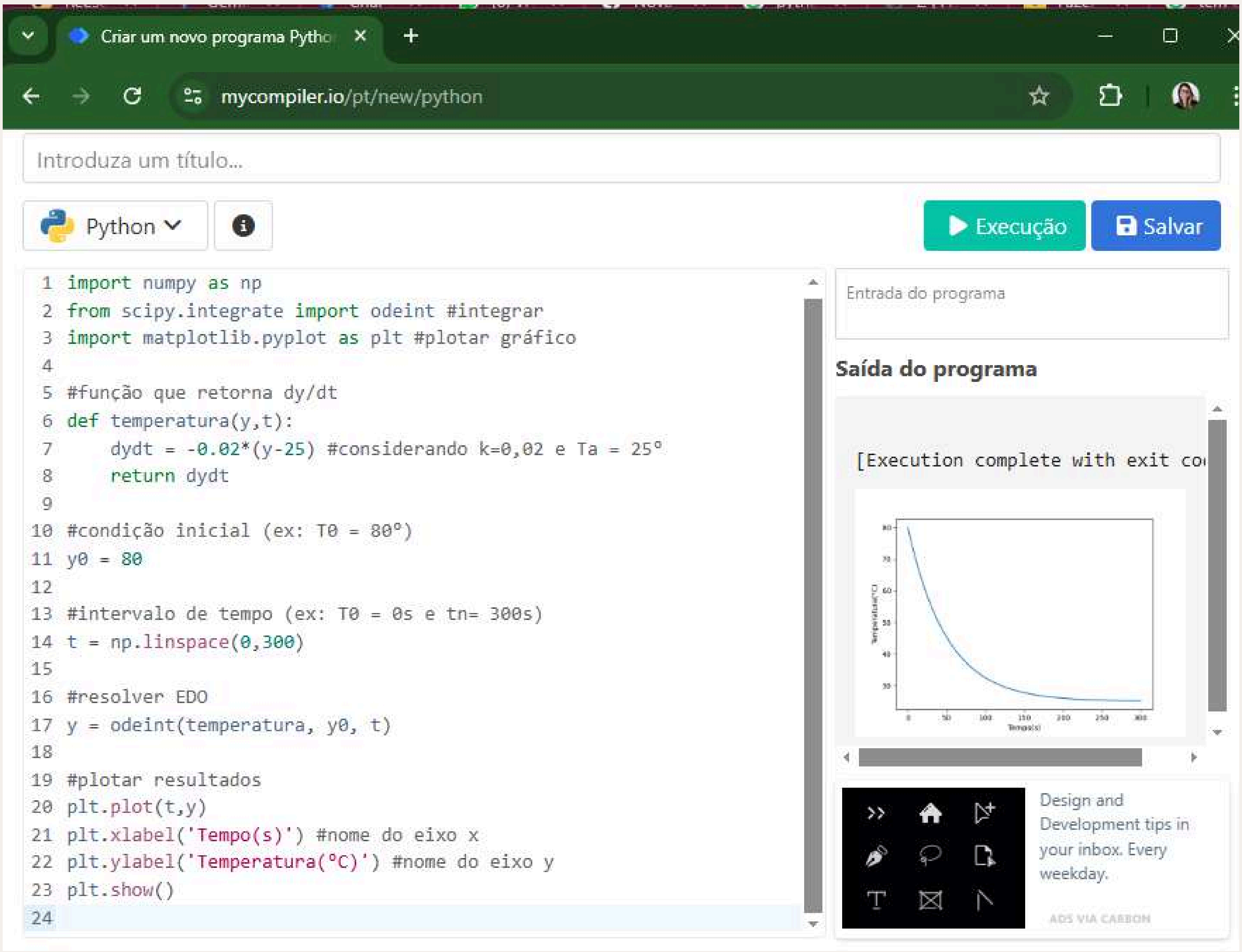
7. A imagem a seguir apresenta o resultado em forma gráfica, onde pode-se observar a redução da temperatura do fluido com o passar do tempo:



A seguir, apresentamos o **código completo**, implementado em *Python*, que foi utilizado:

```
import numpy as np
from scipy.integrate import odeint #integrar
import matplotlib.pyplot as plt #plotar gráfico

#função que retorna dy/dt
def temperatura(y,t):
    dydt = -0.02*(y-25) #considerando k=0,02 e Ta = 25°
    return dydt

#condição inicial (ex: T0 = 80°)
y0 = 80

#intervalo de tempo (ex: T0 = 0s e tn= 300s)
t = np.linspace(0,300)

#resolver EDO
y = odeint(temperatura, y0, t)

#plotar resultados
plt.plot(t,y)
plt.xlabel('Tempo(s)') #nome do eixo x
plt.ylabel('Temperatura(°C)') #nome do eixo y
plt.show()
```

Dica: Se você optar pela versão online “MyCompiler”, basta copiar o código *Python* apresentado na página anterior e colá-lo diretamente na área de código do site. Essa área é onde você digita ou insere o código que deseja executar. Após colar o código, clique no botão ***Execução,*** ao clicar nesse botão, o MyCompiler irá processar o seu código e mostrar o resultado. Conforme ilustra a imagem a seguir:



Algumas Considerações

Neste Produto Educacional, apresentamos uma proposta pedagógica inovadora para o ensino de Equações Diferenciais Ordinárias, com foco na Lei do Resfriamento de Newton. A tarefa exploratória proposta visa estimular a compreensão dos alunos sobre a relação entre a taxa de variação da temperatura e a diferença entre a temperatura do objeto e a temperatura ambiente.

Ao longo deste ebook, detalhamos as ações do professor que podem apoiar o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos, desde a introdução do conceito até a resolução da EDO. Além disso, fornecemos um guia passo a passo para a utilização de ferramentas computacionais como o *GeoGebra* e o *Python*, facilitando a visualização e a análise dos resultados.

Esperamos que este material sirva como inspiração para outros professores que buscam inovar em suas práticas pedagógicas. A tarefa proposta pode ser adaptada para diferentes níveis de ensino e contextos, permitindo a exploração de diversos aspectos das EDOs.

Reconhecemos que a implementação de práticas inovadoras demanda tempo e dedicação. No entanto, acreditamos que os benefícios em termos de aprendizagem dos alunos justificam o esforço.

Referências

ARAMAN, E. M. D. O.; SERRAZINA, M. D. L.; DA PONTE, J. P. "Eu perguntei se o cinco não tem metade": ações de uma professora dos primeiros anos que apoiam o raciocínio matemático. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 21, n. 2, p. 466-490, 2019.

MATA-PEREIRA, J.; PONTE, J. P. Promover o Raciocínio Matemático dos Alunos: uma investigação baseada em design. **Bolema**. Rio Claro, v. 32, n. 62, p. 781–801, 2018.

MORAIS, C.; SERRAZINA, L.; PONTE, J. P.. Mathematical reasoning fostered by (fostering) transformations of rational number representations. **Acta Scientiae**, v. 20, n. 4, 2018.

PONTE, J. P; QUARESMA, M.; MATA-PEREIRA, J. Como desenvolver o raciocínio matemático na sala de aula? **Educação e Matemática,** n. 156, p. 7-11, 2020.

Grupo ____

Nomes dos integrantes do grupo:

____

____

____

____

____

____

Tipo de material (copo ou garrafa) utilizado:

Temperatura do ambiente:

Horário	Temperatura da água