



**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA**

TAIS MARA DOS SANTOS

**UMA ANÁLISE DAS AÇÕES DO PROFESSOR QUE APOIAM O RACIOCÍNIO
MATEMÁTICO NA DISCIPLINA EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS EM
CURSOS DE ENGENHARIA**

LONDRINA

2025

TAIS MARA DOS SANTOS

**UMA ANÁLISE DAS AÇÕES DO PROFESSOR QUE APOIAM O RACIOCÍNIO
MATEMÁTICO NA DISCIPLINA EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS EM
CURSOS DE ENGENHARIA**

**AN ANALYSIS OF TEACHER ACTIONS THAT SUPPORT MATHEMATICAL
REASONING IN THE DISCIPLINE ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS IN
ENGINEERING COURSES**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, câmpus Cornélio Procopio e Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Henrique Rizek Elias

LONDRINA
2025



[4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)

Esta licença permite que outros remixem, adaptem e criem a partir do trabalho para fins não comerciais, desde que atribuam o devido crédito e que licenciem as novas criações sob termos idênticos.

Conteúdos elaborados por terceiros, citados e referenciados nesta obra não são cobertos pela licença.



TAIS MARA DOS SANTOS

**UMA ANÁLISE DAS AÇÕES DO PROFESSOR QUE APOIAM O RACIOCÍNIO MATEMÁTICO NA
DISCIPLINA EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS EM CURSOS DE ENGENHARIA**

Trabalho de pesquisa de mestrado apresentado como requisito para obtenção do título de Mestre Em Ensino De Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Área de concentração: Ensino De Matemática.

Data de aprovação: 05 de Dezembro de 2024

Dr. Henrique Rizek Elias, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Eliane Maria De Oliveira Araman, - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dr. Gabriel Loureiro De Lima, Doutorado - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (Pucsp)

Documento gerado pelo Sistema Acadêmico da UTFPR a partir dos dados da Ata de Defesa em 23/01/2025.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus por todas as oportunidades e bençãos recebidas ao longo desta jornada. A fé em um propósito maior me impulsionou a superar os desafios e alcançar meus objetivos.

Agradeço à minha família, em especial aos meus pais, por todo o amor, apoio incondicional e compreensão durante este período de intensa dedicação aos estudos.

Ao meu namorado, agradeço pela paciência, companheirismo e incentivo constantes.

Agradeço aos meus colegas de curso e de trabalho, que compartilharam comigo momentos de estudo, dúvidas e conquistas.

Agradeço imensamente aos professores Dr. Gabriel Loureiro de Lima e Dra. Eliane Maria de Oliveira Araman por aceitaram participar da minha banca examinadora e por suas valiosas contribuições, que enriqueceram significativamente este trabalho.

Não poderia deixar de agradecer ao professor Dr. Henrique Rizek Elias, meu orientador. Ter um profissional tão dedicado e experiente como ele ao meu lado fez toda a diferença nesta jornada. Sua orientação, marcada pela paciência, exigência e incentivo, foi essencial para que eu pudesse superar os desafios e alcançar meus objetivos.

Agradeço à Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), em especial à Diretoria de Pesquisa e Pós-Graduação do *Campus* Cornélio Procopio e Londrina, pelo investimento na minha formação através da concessão da bolsa de estudos. O apoio financeiro proporcionado por esta instituição foi fundamental para a realização deste trabalho. Agradeço também à oportunidade de realizar esta pesquisa, que contribuiu significativamente para meu desenvolvimento profissional.

SANTOS, Tais Mara dos. **Uma análise das ações do professor que apoiam o raciocínio matemático na disciplina Equações Diferenciais Ordinárias em cursos de Engenharia.** 2025. 134f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2025.

RESUMO

Este trabalho tem por objetivo identificar e discutir as ações do professor que apoiam o raciocínio matemático dos estudantes durante a realização de uma tarefa exploratória em uma turma de Engenharia na disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO). A pesquisa é de natureza qualitativa e os dados foram produzidos em um ambiente natural de sala de aula da disciplina de EDO, cujo professor da turma é o orientador desta pesquisa. A disciplina foi ofertada conjuntamente para dois cursos de Engenharia da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR) *campus* Londrina, os cursos de Engenharia Química e Engenharia Ambiental. Durante as aulas, o professor trabalhou com uma tarefa exploratória que envolveu o tópico EDO de primeira ordem e o modelo matemático abordado foi a Lei do resfriamento de Newton. A tarefa matemática em questão envolveu a realização de medições de temperatura da água, a elaboração de um modelo matemático utilizando uma EDO e a análise do modelo. Para o registro de dados, foram utilizados gravadores de áudio e a produção escrita dos estudantes. A partir da transcrição dos diálogos capturados pelos gravadores, os dados foram analisados considerando categorias de ações do professor definidas *a priori*, a saber: convidar, guiar/apoiar, informar/sugerir e desafiar. As análises das interações em sala de aula ao longo dos três dias do desenvolvimento da tarefa revelaram que as ações do professor apoiaram o raciocínio matemático dos estudantes, levando-os a formular conjecturas, justificar e validar suas respostas, e, em determinadas situações, o professor os desafiou a buscar generalizações. As conclusões indicam que a tarefa proposta e desenvolvida em sala de aula engajou os estudantes em diversas atividades – como a coleta de dados sobre a temperatura da água, a elaboração de um modelo matemático e a exploração no software *GeoGebra* –, sempre mediadas pelas ações do professor. Apesar de a maioria das intenções do professor tenha sido positiva, observou-se que, em alguns momentos o professor acabou direcionando o pensamento dos estudantes, indicando o caminho a ser seguido. Essa prática, embora compreensível, pode ter limitado a autonomia dos estudantes e reduzido o nível de desafio cognitivo da tarefa matemática em algumas situações. No entanto, é importante destacar que o professor buscou encontrar um equilíbrio entre o apoio necessário com a promoção da autonomia dos estudantes. Ao final da pesquisa, foi elaborado um produto educacional que consiste em um material pedagógico destinado a professores que ensinam EDO no Ensino Superior que desejam compreender que ações podem apoiar o raciocínio matemático dos estudantes.

Palavras-chave: Ações do Professor. Equações Diferenciais Ordinárias. Tarefas Exploratórias. Raciocínio Matemático. Lei do Resfriamento de Newton.

SANTOS, Tais Mara dos. **An analysis of teacher actions that support mathematical reasoning in the discipline Ordinary Differential Equations in engineering courses.** 2025. 134f. Dissertation (Master's degree in Mathematics Education) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2025.

ABSTRACT

This work aims to identify and discuss the teacher's actions that support students' mathematical reasoning during the performance of an exploratory task in an Engineering class in the discipline of Ordinary Differential Equations (ODE). The research is qualitative, and the data were produced in a natural classroom environment of the ODE discipline, whose teacher of the class is the research advisor. The discipline was offered jointly to two engineering courses at the Federal Technological University of Paraná (UTFPR) Londrina campus, the Chemical Engineering and Environmental Engineering courses. During the classes, the teacher worked on an exploratory task involving first-order ODE, and the mathematical model addressed was Newton's Law of Cooling. The mathematical task involved taking water temperature measurements, developing a mathematical model using an ODE, and analyzing the model. Audio recorders and the students' written production were used for data recording. Based on the transcription of the dialogues captured by the recorders, the data were analyzed considering categories of teacher actions defined a priori: inviting, guiding/supporting, informing/suggesting, and challenging. The analyses of the interactions in the classroom over the three days of the task development revealed that the teacher's actions supported the students' mathematical reasoning, leading them to formulate conjectures, justify and validate their answers, and the teacher challenged them to seek generalizations. The conclusions indicate that the task proposed and developed in the classroom engaged the students in several activities – such as collecting data on water temperature, developing a mathematical model, and exploring in the GeoGebra software –, always mediated by the teacher's actions. Although most of the teachers' intentions were positive, it was observed that the teacher directed the students' thinking, indicating the path to be followed. This practice, although understandable, may have limited the students' autonomy and reduced the level of cognitive challenge of the mathematical task in some situations. However, it is important to highlight that the teacher sought to balance the necessary support and promote student autonomy. At the end of the research, an educational product was developed consisting of pedagogical material intended for teachers who teach ODE in Higher Education who wish to understand what actions can support students' mathematical reasoning.

Keywords: Teacher's Actions. Ordinary Differential Equations. Exploratory Tasks. Mathematical Reasoning. Newton's Law of Cooling.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Tipos de tarefa	39
Figura 2: Quadro de análise das ações do professor que apoiam o raciocínio matemático	44
Figura 3: Folha para anotação das medições de temperatura	48
Figura 4: Medições de temperatura feitas pelos grupos	49
Figura 5: Folha entregue aos alunos no segundo dia, contendo informações registradas pelos alunos do Grupo 1.....	50
Figura 6: Folha entregue aos alunos no segundo dia, contendo informações registradas pelos alunos do Grupo 4.....	50
Figura 7: Comando “ResolverEDO” no <i>GeoGebra</i>	52
Figura 8: Registro escrito da resolução do Grupo 1 e sua transcrição	73
Figura 9: Registro do uso do GeoGebra	73
Figura 10: Resolução do Grupo 1 utilizando o <i>GeoGebra</i>	75
Figura 11: Registro escrito da resolução dos alunos do Grupo 1	77

LISTA DE QUADROS

Quadro 1: Organização dos trabalhos analisados	17
Quadro 2: Organização dos artigos analisados	19
Quadro 3: Organização do trabalho analisado	20
Quadro 4: Organização dos artigos analisados	20
Quadro 5: Os objetivos apresentados nas pesquisas levantadas	22
Quadro 6: Principais fundamentações teóricas das pesquisas levantadas.....	25
Quadro 7: Informações presentes nas pesquisas levantadas	27
Quadro 8: Ideias matemáticas presentes nas pesquisas levantadas.....	31
Quadro 9: Ações intencionais do professor na prática de ensino exploratório da Matemática	42
Quadro 10: Processos do raciocínio matemático	43
Quadro 11: Tarefa exploratória desenvolvida na turma.....	47
Quadro 12: Recipiente e temperatura da água referente a cada Grupo	48
Quadro 13: Ações do professor que apoiaram os processos de raciocínio matemático dos alunos.....	77

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	9
2 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS	15
2.1 REVISÃO DA LITERATURA	15
2.2 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS.....	35
3 REFERENCIAL TEÓRICO	38
3.1 TAREFA MATEMÁTICA.....	38
3.2 ENSINO EXPLORATÓRIO E AS AÇÕES DO PROFESSOR.....	40
3.3 RACIOCÍNIO MATEMÁTICO E AS AÇÕES DO PROFESSOR.....	43
4 METODOLOGIA.....	46
5 ANÁLISE DOS DADOS	54
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	80
REFERÊNCIAS.....	84
ANEXO A – FICHA DE AVALIAÇÃO DE PRODUTO/PROCESSO EDUCACIONAL	89
APÊNDICE A – PRODUTO EDUCACIONAL	93

1 INTRODUÇÃO

Início esta introdução descrevendo, brevemente, minha trajetória profissional enquanto professora e apresentando como ela se conecta com a pesquisa realizada. Eu iniciei o curso de Licenciatura em Matemática na Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR) *campus* Cornélio Procopio no primeiro semestre de 2013 e conclui no primeiro semestre de 2017.

Em 2018, no início do ano, decidi me mudar para Florianópolis-SC, pois fui aprovada no mestrado da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). Permaneci em Florianópolis até julho do mesmo ano, quando acabei desistindo do curso e retornei ao Paraná.

No final de outubro de 2018, comecei a trabalhar como professora da Educação Básica, fui admitida por dois meses, por meio de um Contrato em Regime Especial (CRES - Temporário) pela Secretaria Estadual de Educação do Paraná (SEED) na Escola Estadual Professor Aídes Nunes da Silva, que fica localizada na cidade de Congonhinhas-PR.

Desde que me formei, percebia o quão desafiador era conseguir aulas (como professora temporária) no estado do Paraná. Sem a necessidade de provas e com o processo seletivo baseado apenas em currículo e experiência profissional, os recém-formados, incluindo eu, enfrentavam dificuldades para conseguir aulas e, quando obtinham, geralmente eram substituições de curto prazo, como ocorreu comigo em 2018. Contudo, durante minha estadia em Florianópolis, pude notar uma realidade distinta. Lá, as oportunidades eram maiores devido à seleção por meio de exame, especialmente na área de Matemática. Com mais chances de obter aulas, decidi participar do processo seletivo e, após ser aprovada, optei por voltar a morar em Florianópolis.

No início de 2019, fui admitida pela Prefeitura Municipal de Florianópolis em Caráter Temporário (ACT) e comecei a trabalhar como professora na Escola Básica Municipal Mâncio Costa. Nos anos de 2020 e 2021 continuei trabalhando no mesmo local, porém, com um desafio novo, pois, a escola foi reestruturada como Escola do Futuro.¹ Além desse desafio, ainda houve uma pandemia e as aulas começaram a ser realizadas de forma remota (virtual), tornando assim um desafio ainda maior para os processos de ensino e de aprendizagem.

No início de 2021, eu fiz, como participante externo, a disciplina “Conhecimento Matemático do Professor” no curso de Mestrado Profissional do Programa de Pós-Graduação

¹ São escolas de ensino básico que contam com educação em tempo integral e ampliação de jornada. Contempla o ensino de múltiplas linguagens, como Português, Inglês, Língua Brasileira de Sinais (Libras) e Letramento Digital. Este último item refere-se a modos de ler, escrever e interpretar informações, códigos e sinais verbais e não verbais com o uso de dispositivos digitais (Prefeitura Municipal de Florianópolis, 2020).

em Ensino de Matemática (PPGMAT) *multicampi* Cornélio Procópio e Londrina. Naquela época, as aulas do Mestrado estavam sendo realizadas no formato remoto devido à pandemia, o que permitiu minha participação, uma vez que estava vivendo em outro estado. Após essa experiência, posso afirmar que gostei tanto da disciplina quanto do Programa. Por conta disso, decidi me inscrever no processo seletivo do PPGMAT para me tornar estudante regular e, para a minha alegria, fui aprovada.

Voltei a morar no Paraná em dezembro de 2021 para iniciar o curso de Mestrado no início do ano seguinte. Optei por não assumir aulas em 2022 e me dedicar integralmente ao Mestrado, período no qual realizaria todas as disciplinas necessárias.

Como eu não estava lecionando naquele ano de 2022, o professor Henrique, meu orientador, perguntou-me se eu tinha interesse em desenvolver minha pesquisa em sua turma da disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) ofertada aos cursos de Engenharia Química e Engenharia Ambiental da UTFPR *campus* Londrina. A proposta do professor Henrique era trabalhar com tarefas matemáticas de uma maneira diferente daquela que ele vinha fazendo até então em suas turmas de EDO. Mas, para isso, ele queria realizar uma investigação sobre essa sua nova prática em sala de aula, pois, por meio dos processos sistemáticos de organização e de produção de conhecimento próprios de uma pesquisa científica, seria possível analisar e compreender com maior profundidade aspectos daquela sua nova experiência.

Ele me convidou para acompanhar suas aulas na disciplina de EDO no primeiro semestre de 2022. Seria um momento apenas para observar as aulas, sem envolver qualquer procedimento de pesquisa. Aceitei o convite, pois seria uma oportunidade para relembrar conceitos de EDO, conhecer sua abordagem de ensino e tomar a decisão de aceitar ou não realizar minha pesquisa de mestrado naquele contexto.

Após acompanhar as aulas e aceitar a proposta de pesquisa, meu orientador e eu, juntos, passamos² a definir os próximos passos da pesquisa, buscando compreender qual seria o foco e a relevância acadêmica da investigação a ser desenvolvida no contexto de EDO para cursos de Engenharia.

A Resolução CNE/CES nº 2 de 24 de abril 2019, que institui as Diretrizes Curriculares Nacionais do Curso de Graduação em Engenharia (DCN de Engenharia), prevê que o curso de graduação em Engenharia deve proporcionar aos seus egressos, ao longo da formação, algumas

² A partir de agora, passo a escrever na primeira pessoa do plural, pois não se trata mais de minha trajetória, trata-se de uma construção coletiva que envolveu meu orientador e outras pessoas que influenciaram o desenvolvimento da pesquisa, como os membros do grupo de estudos *Matemática Escolar: práticas, pesquisas e estudos* (MEPPE) do qual faço parte.

competências gerais, dentre elas destacamos a importância de os engenheiros serem capazes de “analisar e compreender os fenômenos físicos e químicos por meio de modelos simbólicos, físicos e outros, verificados e validados por experimentação” (Brasil, 2019a, p. 2).

A matriz curricular de um curso de Engenharia é composta por diversas disciplinas matemáticas que têm o potencial de permitir ao aluno a oportunidade de modelar fenômenos físicos e químicos, uma delas é a disciplina de EDO, já que diversos desses modelos podem ser escritos por meio de uma equação diferencial. Evidentemente, esse potencial só irá se efetivar se tais disciplinas não forem pautadas pelas técnicas de resoluções e a partir da mera reprodução modelos. A organização e condução das disciplinas precisam promover um ambiente favorável para o trabalho com modelos desses fenômenos. A Resolução destaca ainda que os engenheiros devem “ser capaz de modelar os fenômenos, os sistemas físicos e químicos, utilizando as *ferramentas matemáticas*, estatísticas, *computacionais* e de simulação, entre outras (Brasil, 2019a, p. 2, destaques nossos)”. Ou seja, essa modelagem deve ser desenvolvida utilizando algumas ferramentas, dentre elas destacamos as computacionais e matemáticas, que podem ser utilizadas de maneira conectada.

Levando esses aspectos em consideração, decidimos iniciar nossa pesquisa de mestrado buscando investigar e analisar por meio de uma revisão da literatura, trabalhos (dissertações, teses e artigos) que já haviam sido publicadas sobre o ensino e a aprendizagem de EDO em cursos de Engenharias no Brasil. Para localizar as dissertações e teses, utilizamos o Catálogo de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes)³, que é uma plataforma que permite o acesso a informações sobre teses e dissertações defendidas em Programas de Pós-Graduação do país. Para obter os artigos, consideramos os periódicos Qualis A1 e A2 da área de Ensino (levando em consideração a classificação do Quadriênio 2017-2020) e os artigos apresentados no Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia (COBENGE).

Mais detalhes sobre esta revisão da literatura serão apresentados no capítulo 2, mas, em resumo, podemos destacar o fato de que todas as pesquisas encontradas no levantamento (nove dissertações e teses e três artigos) possuem uma parte prática, isto é, todas elas desenvolveram uma sequência de atividades em turmas (regulares ou não) de Engenharia, mostrando uma característica intervencionista dessas investigações sobre EDO no Brasil, sendo a Modelagem Matemática a abordagem de ensino mais utilizada nas pesquisas. Outra constatação foi que é

³ Link: <https://catalogodeteses.capes.gov.br/catalogo-teses/#!/>. Acessado em 25 de abril de 2023.

comum as pesquisas sobre o ensino de EDO fazerem uso de modelos matemáticos tradicionais (por exemplo, decaimento radioativo, crescimento populacional, Lei de Resfriamento de Newton etc.) para diferentes cursos de Engenharia.

Percebemos que nenhuma pesquisa analisada no levantamento teve como foco as ações do professor que ensina EDO em cursos de Engenharia. As ações do professor são essenciais para apoiar o raciocínio matemático dos estudantes e, para isso, “[...] as discussões em sala de aula devem concentrar-se tanto em ideias matemáticas importantes quanto no desenvolvimento de significados matemáticos por meio de processos comunicativos” (Ellis; Özgür; Reiten, 2018 p. 2 *apud* Araman; Serrazina; Ponte, 2020, p. 445).

Segundo Araman, Serrazina e Ponte (2020), o professor desempenha um papel fundamental na construção do conhecimento matemático, abrangendo desde a seleção de tarefas apropriadas até o incentivo à participação dos alunos. Boaler e Brodie (2004), em estudo sobre a importância, a natureza e o impacto das perguntas do professor, concluem que as perguntas feitas pelos professores guiam os alunos no percurso matemático das aulas. Segundo os autores, essas perguntas ensinam os alunos a fazerem perguntas importantes sobre seu próprio trabalho. Por exemplo, quando os professores fazem mais questões conceituais, os alunos começam, eles próprios, a fazerem questões conceituais, indicando que as perguntas dos professores ajudam a moldar o fluxo e a direção das aulas (Boaler; Brodie, 2004).

Ou seja, o professor desempenha um papel fundamental na sala de aula, desde o planejamento da tarefa até a sua execução, e são as ações do professor que irão direcionar os alunos para a promoção do raciocínio matemático. Considerando que, no levantamento mencionado, não foi encontrada nenhuma pesquisa com foco as ações do professor que ensina EDO em cursos de Engenharia, consideramos essencial que pesquisas científicas a esse respeito sejam realizadas.

Levando esse aspecto em consideração, desenvolvemos esta pesquisa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática que tem por objetivo *identificar e discutir as ações do professor que apoiam o raciocínio matemático durante a realização de uma tarefa exploratória em uma turma de Engenharia da UTFPR -Londrina na disciplina de EDO*.

Os dados da pesquisa foram produzidos nos dias 12, 17 e 19 de abril de 2023, em um ambiente natural de sala de aula da disciplina de EDO, cujo professor da turma é o orientador desta pesquisa. A disciplina é ofertada conjuntamente para dois cursos de Engenharia da UTFPR *campus* Londrina, os cursos de Engenharia Química e Engenharia Ambiental. Durante as aulas, o professor trabalhou com uma tarefa exploratória que envolveu o tópico Equações

Diferenciais Ordinárias de primeira ordem e o modelo matemático abordado foi a Lei do resfriamento de Newton.

A tarefa matemática em questão envolveu a realização de medições de temperatura da água, a elaboração de um modelo matemático utilizando uma EDO e a análise do modelo. Para o registro de dados, foram utilizados gravadores de áudio e a produção escrita dos estudantes. Diálogos capturados pelos gravadores foram transcritos e analisados considerando as categorias de ações do professor definidas *a priori* (convidar, guiar/apoiar, informar/sugerir e desafiar) segundo Araman, Serrazina e Ponte (2019).

Como se trata de um Mestrado Profissional, há a exigência de elaboração de um Produto Educacional como resultado da pesquisa. De acordo com o Documento da Área de Ensino da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), um Produto Educacional pode, por ser um recurso que pode ser utilizado no processo de ensino e aprendizagem, abrangendo desde sequência didáticas até recursos tecnológicos, como aplicativos e jogos. “A dissertação/tese deve ser uma reflexão sobre a elaboração e aplicação do produto educacional respaldado no referencial teórico metodológico escolhido” (Brasil, 2019b, p. 15).

O Produto Educacional elaborado nesta pesquisa (Apêndice A) é um material pedagógico destinado a professores que ensinam EDO no Ensino Superior. Foi produzida uma proposta de ensino para EDO de primeira ordem, pautada na tarefa exploratória planejada, desenvolvida e analisada nesta pesquisa. Além de uma breve fundamentação teórica detalhando as ações do professor que podem apoiar o raciocínio matemático (Araman; Serrazina; Ponte, 2019), o Produto Educacional contém uma tarefa junto com a proposta de sua aplicação, incluindo os materiais necessários, uma sugestão de procedimento e possíveis intervenções.

Esta dissertação está estruturada em seis capítulos. O primeiro capítulo apresenta uma introdução concisa, delineando a trajetória profissional da pesquisadora e contextualizando a pesquisa. O segundo capítulo aborda Equações Diferenciais Ordinárias, dividindo-se em duas seções: primeiramente, é feita uma revisão da literatura e, em seguida, são apresentados conceitos básicos de EDO, com base em Zill e Cullen (2008). No terceiro capítulo, encontra-se o referencial teórico da pesquisa, estruturado em três seções: a primeira explora tarefas matemáticas, seguindo a abordagem de Ponte (2005; 2014); a segunda concentra-se no ensino exploratório e as ações do professor (Oliveira; Menezes; Canavarro, 2013); e a terceira seção trata do raciocínio matemático e as ações do professor (Araman; Serrazina; Ponte, 2019). No quarto capítulo é detalhada a metodologia utilizada, ou seja, todos os processos realizados durante a pesquisa. No quinto capítulo descrevemos os três dias de aula visando identificar as

ações do professor: *Convidar*, *Guiar/Apoiar*, *Informar/Sugerir* e *Desafiar* (Araman; Serrazina; Ponte, 2019) e buscamos discutir as ações do professor que apoiam o raciocínio matemático dos estudantes. Por fim, no sexto capítulo serão apresentadas as considerações finais deste trabalho.

2 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Apresentamos, inicialmente, uma revisão da literatura visando identificar pesquisas realizadas sobre o ensino e a aprendizagem de EDO em cursos de Engenharia que pudessem contribuir com nosso trabalho e para conhecermos o que já se tem publicado a respeito do tema. Em seguida, descrevemos alguns conceitos básicos de EDO, com base em Zill e Cullen (2008), que são fundamentais para a pesquisa realizada.

2.1 REVISÃO DA LITERATURA

Realizamos uma revisão da literatura de trabalhos científicos acerca do ensino e da aprendizagem de EDO em cursos de Engenharia no Brasil, com a finalidade de conhecer e analisar tais trabalhos. Segundo Brizola e Fantin (2016), a revisão da literatura contribui para, entre outras coisas, delimitar o problema da pesquisa, auxiliar na busca de novas linhas de investigação para o problema que o pesquisador deseja investigar, identificar trabalhos já realizados e partir para outra abordagem e evitar que o pesquisador faça mais do mesmo.

Para Lima e Miotto (2007) há uma distinção entre os termos pesquisa bibliográfica e revisão de literatura (ou revisão bibliográfica). Segundo as autoras, a revisão de literatura “é apenas um pré-requisito para a realização de toda e qualquer pesquisa, ao passo que a pesquisa bibliográfica implica em um conjunto ordenado de procedimentos de busca por soluções, atento ao objeto de estudo, e que, por isso, não pode ser aleatório” (p. 38).

Nesse sentido, a revisão da literatura aqui realizada configura-se como uma “parte integrante do trabalho” (Brizola; Fantin, 2016, p. 28), não como o foco central do trabalho, e tem como finalidade reunir “ideias de diferentes autores sobre determinado tema, conseguidas através de leituras, de pesquisas realizadas pelo pesquisado” (Brizola; Fantin, 2016, p. 27). Apesar de realizarmos a revisão da literatura com procedimentos metodológicos bem estabelecidos, não nos preocupamos com o rigor de uma pesquisa bibliográfica (Lima; Miotto, 2007) ou com a abrangência na cobertura da literatura de uma pesquisa do tipo estado da arte (Ferreira, 2002).

Esta revisão da literatura ocorreu em quatro etapas distintas. Na primeira etapa, conforme descrito em Santos e Elias (2022), foram analisadas dissertações e teses. Os materiais foram pesquisados em 22 de junho de 2022 no Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES e não foi definido um recorte temporal. Na segunda etapa, descrita em Santos e Elias (2023), foram incluídas análises de artigos dos periódicos Qualis A1 e A2 (levando em consideração a

classificação do Quadriênio 2017-2020), com dados consultados em 25 de abril de 2023. A terceira etapa, é uma extensão da primeira, incluindo trabalhos adicionados ao banco de dados até 26 de julho de 2024, seguindo os mesmos critérios da primeira etapa. Por fim, a quarta etapa, que complementa a revisão da literatura, investiga os artigos apresentados no Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia (COBENGE).

Para as dissertações e teses, a pesquisa foi realizada na base de dados do Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES. Como termo de pesquisa, foi utilizada, entre aspas, a palavra-chave “equações diferenciais ordinárias”. Isso resultou na identificação de 480 trabalhos.

Posteriormente, foram aplicados filtros para refinar a busca, delimitando os trabalhos encontrados de acordo com o nosso objetivo. Os filtros utilizados foram: i) Grande área de conhecimento: Multidisciplinar; ii) Área de conhecimento: Ensino e Ensino de Ciências e Matemática. Tais filtros foram adotados em função do contexto em que esta pesquisa está inserida, um curso de mestrado em um Programa de Pós-Graduação situado na Área de Avaliação de Ensino da Capes (dentro da grande área Multidisciplinar). Com esses filtros, buscamos focar em trabalhos que investigassem o ensino e/ou a aprendizagem de EDO em cursos de Engenharia. Desta forma, apenas 16 estudos foram mantidos após a seleção, ou seja, foram excluídos 464 trabalhos que não atendiam aos filtros acima definidos.

Importante mencionar que no Catálogo de Dissertações e Teses da Capes, ao visualizar a relação de trabalhos encontrados na busca, há um link em cada trabalho, que redireciona o leitor para o site da Plataforma Sucupira, local em que é possível acessar o trabalho na íntegra. Entretanto, alguns desses trabalhos foram desenvolvidos antes da criação da Plataforma Sucupira e, por isso, não estão disponíveis pelo link. Alguns desses trabalhos podem ser localizados por meio de outros sites (repositórios, domínio público, google acadêmico), mas outros não possuem sua versão completa disponibilizada de forma *online*.

Após a leitura dos resumos dos 16 trabalhos, sete foram descartados por não estarem alinhados com nossos objetivos: três trabalhos foram descartados porque o tema da pesquisa não era “Equações Diferenciais Ordinárias”⁴ e quatro foram descartados porque o foco estava em cursos de Licenciaturas em vez de Engenharia, que é nosso foco.

Ao término do processo, sobraram 9 trabalhos que foram analisados. Esses trabalhos foram organizados no Quadro 1, incluindo informações como título, autor/ano, instituição e

⁴ Por exemplo, o trabalho de Faria (2012 p. 6), embora tenha sido incluído no levantamento e permanecido mesmo após a aplicação dos filtros estabelecidos, não faz menção a “Equações Diferenciais Ordinárias”. Na verdade, o “objetivo principal desta pesquisa era investigar quais contribuições a exploração de Padrões Fractais em um software de geometria dinâmica traz ao processo de generalização de conteúdos matemáticos”.

nível de ensino (mestrado acadêmico/profissional ou doutorado), e estão apresentados em ordem cronológica.

Quadro 1: Organização dos trabalhos analisados

Título	Autor/ano	Instituição	Nível
Modelagem matemática nas aulas de cálculo: uma estratégia que pode contribuir com a aprendizagem dos alunos de engenharia	Alyne Maria Rosa de Araújo, 2008.	Universidade Federal do Pará	Mestrado Acadêmico
A modelagem matemática na introdução ao estudo de equações diferenciais em um curso de engenharia	Vagner Donizeti Tavares Ferreira, 2010.	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo	Mestrado Profissional
Uma estratégia metodológica para a introdução de um curso de equações diferenciais ordinárias	Galvina Maria de Souza, 2011.	Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais	Mestrado Acadêmico
A resolução de problemas físicos com equações diferenciais ordinárias lineares de 1ª e 2ª ordem: análise gráfica com o software Maple	Aníbal Ataídes Barros Filho, 2012.	Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais	Mestrado Acadêmico
Uma engenharia didática para abordar o conceito de equação diferencial em cursos de engenharia	Eliane Alves de Oliveira, 2014.	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo	Doutorado
Equações diferenciais ordinárias no contexto dos registros de representação semiótica e da modelagem matemática	Michele Carvalho de Barros, 2017.	Universidade Estadual de Maringá	Doutorado
Análise de fenômenos físicos no ensino de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem em cursos de engenharia	Jonathan Weverton Silva Buéri, 2019.	Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais	Mestrado Acadêmico
Aplicações de equações diferenciais ordinárias em fenômenos físicos: análise por representações gráficas e algébrica	Michelle Cristina Goncalves Pereira, 2021.	Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais	Mestrado Profissional
Equações diferenciais ordinárias de variáveis separáveis na engenharia civil: uma abordagem contextualizada a partir de um problema de transferência de calor	Rieuse Lopes Pinto, 2021.	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo	Doutorado

Fonte: Santos e Elias (2023)

Na pesquisa dos artigos, foram utilizados dois métodos complementares. Inicialmente, foram aplicados filtros na página do Qualis Periódicos⁵, a saber: no campo “Evento de Classificação” foi considerado o período do quadriênio 2017-2020, no campo “Área de

⁵ Link:

<https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/veiculoPublicacaoQualis/listaConsultaGeralPeriodicos.jsf>. Acessado em 25 de abril de 2023.

Avaliação” foi selecionada a área Ensino, no campo “Título” foi definido o termo “Educação Matemática” e no campo “Classificação” foram selecionados os estratos A1 e A2. Assim, identificaram-se três periódicos que possuem o termo “Educação Matemática” no título e que são Qualis A1 na área de Ensino: (i) Bolema: Boletim de Educação Matemática, (ii) Educação Matemática Pesquisa e (iii) Revista Internacional de Pesquisa Em Educação Matemática (RIPEM); e dois periódicos que possuem o termo “Educação Matemática” no título e que são Qualis A2 na área de Ensino: (i) Educação Matemática em Revista; e (ii) Perspectivas da Educação Matemática. Posteriormente, acessamos os sites desses cinco periódicos e, utilizando a ferramenta “Buscar” presente em cada página, buscamos pela palavra-chave “equações diferenciais ordinárias”. Como resultado, localizamos cinco artigos, sendo dois publicados no periódico Bolema e três no periódico Educação Matemática Pesquisa.

O segundo método adotado foi utilizando a ferramenta BUSCAd 2.7.1 (Mansur; Altoé, 2021). De acordo com Mansur e Altoé (2021), BUSCAd é uma abreviação para Buscador Acadêmico e a ferramenta foi:

[...] desenvolvida e aprimorada a partir das necessidades de Mestrandos e Doutorandos do Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática (EDUCIMAT), do Instituto Federal do Espírito Santo (Ifes), em realizarem Revisões de Literatura de suas investigações. É um artefato desenvolvido no Microsoft Excel [...] A linguagem de programação utilizada é o Visual Basic for Applications (VBA5), com código fechado e gratuito (Mansur; Altoé, 2021, p. 12).

Esta ferramenta contribuiu para complementarmos nossa pesquisa em periódicos, permitindo-nos realizar o levantamento no portal Periódicos Capes e no Scielo. A pesquisa foi feita utilizando a palavra-chave “equações diferenciais ordinárias” e o filtro considerando os Qualis A1 e A2. Uma das vantagens de utilizar a ferramenta BUSCAd nessa etapa complementar de nossa pesquisa foi a agilidade na busca em periódicos diferentes daqueles que continham “Educação Matemática” em seu nome, como tínhamos feito no primeiro caminho⁶.

Por meio do BUSCAd, identificamos 15 artigos distribuídos em oito periódicos, a saber: (i) Bolema: Boletim de Educação Matemática (dois artigos), (ii) Educação Matemática Pesquisa (um artigo), (iii) Revista Brasileira de Ensino de Física (dois artigos); (iv) Journal of the Brazilian Chemical Society (seis artigos); (v) Revista de Ensino de Ciências e Matemática (REnCiMa) (um artigo); (vi) Conexões - Ciência e Tecnologia (um artigo); (vii) Uniciencia (Costa Rica) (um artigo); (viii) Alexandria (um artigo).

⁶ A quantidade de revistas A1 e A2 cuja área mãe é Ensino é grande e seria trabalhoso visitar todos os sites de revistas sem “Educação Matemática” em seu nome. Por isso, BUSCAd agilizou nosso processo.

É relevante mencionar que o portal Periódico Capes limitou as pesquisas anteriores ao ano de 2008, o que resultou na ausência de dois artigos do periódico Educação Matemática Pesquisa, encontrados no levantamento feito no primeiro caminho, isto é, esses dois artigos não apareceram no levantamento feito pela ferramenta BUSCAAd, uma vez que foram publicados em 2004 e em 2007.

Os resumos dos 17 artigos (juntando os artigos encontrados no primeiro e no segundo caminhos e retirando as repetições) foram lidos e, em seguida, 14 foram descartados, uma vez que não se alinhavam aos nossos objetivos. Dez trabalhos foram descartados devido a sua abordagem sobre Equações Diferenciais Ordinárias não ser na perspectiva do ensino ou da aprendizagem, pois são trabalhos teóricos sobre o desenvolvimento de modelos de áreas específicas (Física ou Química, por exemplo). Quatro artigos foram também descartados porque o foco estava em cursos de Licenciaturas (em Matemática, em Química ou em Ciências Exatas) ou Bacharelado em Química e não em Engenharia.

No final, restaram três artigos que foram analisados. Esses artigos foram organizados, em ordem cronológica, no Quadro 2, contendo: título, autores/ano e nome do periódico.

Quadro 2: Organização dos artigos analisados

Título	Autores/ano	Periódico
Investigando a iniciação à modelagem matemática nas ciências com equações diferenciais	João Bosco Laudares e Dimas Felipe de Miranda, 2007.	Educação Matemática Pesquisa (Qualis A1)
A resolução de problemas em ciências com equações diferenciais ordinárias de 1ª e 2ª ordem usando análise gráfica.	Aníbal Ataides Barros Filho, João Bosco Laudares e Dimas Felipe de Miranda, 2014.	Educação Matemática Pesquisa (Qualis A1)
Conhecimentos matemáticos, físicos e de Transferência de Calor mobilizados por graduandos em Engenharia Civil em uma abordagem contextualizada de Equações Diferenciais Ordinárias	Rieuse Lopes e Gabriel Loureiro de Lima, 2022.	Revista de Ensino de Ciências e Matemática (REnCiMa) (Qualis A2)

Fonte: Santos e Elias (2023)

A terceira etapa é uma continuação da primeira etapa, apresentada em Santos e Elias (2022). Em 26 de julho de 2024, foi realizada uma nova busca na base de dados do Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES, seguindo os mesmos critérios anteriores.

Para dar início à nova busca, foi utilizada, entre outras, a palavra-chave “equações diferenciais ordinárias”. Isso resultou na identificação de 527 trabalhos, o que representa um aumento de 47 trabalhos em relação à quantidade encontrada na primeira consulta à base de dados. Entretanto, ao aplicar os filtros estabelecidos, constatou-se que restaram apenas 9

trabalhos. A nova busca, com os filtros estabelecidos, identificou os seguintes trabalhos que já foram incluídos na primeira etapa: Olivera (2014), Barros (2017), Buéri (2019), Pereira (2021) e Pinto (2021). Por outro lado, não foram encontrados os trabalhos de Araújo (2008), Ferreira (2010), Souza (2011) e Barros Filho (2012). Além disso, foram encontrados mais quatro trabalhos, mas três deles foram descartados, pois não estavam alinhados aos nossos objetivos: dois deles foram descartados por focarem em cursos de Licenciatura e um terceiro em formação inicial, ou seja, nenhum deles estava com foco em engenharia.

Ao concluirmos a análise, notamos que apenas um trabalho atendeu aos filtros estabelecidos e ao nosso objetivo (isto é, trabalhos que focassem o ensino e/ou a aprendizagem de equações diferenciais ordinárias em cursos de Engenharia). Esse trabalho específico está detalhado no Quadro 3, contendo informações como título, autor/ano, instituição e nível de ensino (mestrado acadêmico/profissional ou doutorado).

Quadro 3: Organização do trabalho analisado

Título	Autor/ano	Instituição	Nível
Uma proposta de ensino de equações diferenciais em cursos de Engenharia Civil à luz da teoria a matemática no contexto das ciências	Alessandro Rosa Silva, 2022.	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo	Doutorado

Fonte: Dados da pesquisa

A quarta etapa investiga os artigos apresentados no Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia (COBENGE). A pesquisa foi feita nos anais⁷ que abrangem os eventos de todos os anos, utilizando como palavra-chave: equações diferenciais ordinárias, isso possibilitou a identificação de 10 artigos, embora um deles tenha sido duplicado, dessa forma, a pesquisa resultou em 9 artigos distintos.

Dos 9 artigos identificados, um foi descartado devido à falta de acesso ao seu arquivo nos anais do evento, o que impediu sua análise. Os resumos dos outros 8 artigos foram lidos e analisados, e estão organizados, em ordem cronológica, no Quadro 4, contendo: título, autores/ano e evento apresentado.

Quadro 4: Organização dos artigos analisados

Título	Autores/ano	Evento
---------------	--------------------	---------------

⁷ Link: https://www.abenge.org.br/sis_artigos.php Acessado em 27 de Julho de 2024.

O desenvolvimento de uma Toolbox para auxílio no ensino e aprendizagem de equações diferenciais ordinárias e parciais aplicadas;	Moisés Dantas dos Santos, 2017	COBENGE17
Metodologia para resolução de problemas de fenômenos com equações diferenciais ordinárias para cursos de engenharia	João Bosco Laudares e Saulo Furletti, 2017	COBENGE17
Aprendizagem baseada em problemas no ensino de simulações computacionais de equações diferenciais ordinárias em cursos de engenharia	Paulo Henrique Farias Xavier, Leandro Brito Santos, Jose Vicente Cardoso Santos e Renelson Ribeiro Sampaio, 2018	COBENGE18
Percepção dos discentes sobre o uso do software <i>pythonTM</i> na aplicação do método de euler para resolução de equações diferenciais	Edneide de Matos Oliveira, Maria Valderes Ponte Rocha e Francisco Jeandson Rodrigues da Silva, 2018	COBENGE18
Problema de valor inicial: enchimento de um tanque – solução analítica e numérica	Vanderlei Galina, Pedro Guilherme Costacurta da Silva, Eduardo Ghiraldi Barbosa e Jocelaine Cargnelutti, 2019.	COBENGE19
Flambagem de vigas verticais: construção de uma Prensa artesanal para comparação entre dados Analíticos e experimentais.	João Leonardo Dos Santos, Samuel Bomfin Araldi, Gabriel Felipe Pizzinatto, Diony Monteiro da Silva, Jocelaine Cargnelutti e Rodnny Jesus Mendoza Fakhye, 2019	COBENGE19
O uso do software scilab no curso de engenharia: relato de uma experiência na resolução de problemas numéricos	Lucas Vinicius Dias, Erika Janine Maia Afonso, Gabrieli Aparecida Vicentini, Viviane Bocato e Glaucia Rubyane de Souza Silva, 2019	COBENGE19
Estudo analítico e empírico da deflexão de vigas e eixos por abordagem de equações diferenciais ordinárias e experimental de baixo custo	Cristian Comin, Adabiel Oleone da Silva, Jocelaine Cargnelutti, Vanderlei Galina e Suellen Ribeiro Pardo Garcia, 2020	COBENGE20

Fonte: Dados da pesquisa

Sobre os Quadros 1 e 3, em termos de nível, são quatro pesquisas de doutorado e seis de mestrado, sendo quatro de mestrado acadêmico e duas de mestrado profissional. Chama a atenção o fato de oito dos dez trabalhos de dissertação ou tese terem sido realizados em uma Pontifícia Universidade Católica (PUC), sendo quatro na PUC-MG e quatro na PUC-SP. Observa-se ainda, uma repetição de orientadores em algumas das pesquisas, indicando uma possível influência na escolha dos temas e metodologias. No caso da PUC-MG, o pesquisador João Bosco Laudares orientou três trabalhos, são eles: Barros Filho (2012), Buéri (2019) e

Pereira (2021), enquanto na PUC-SP, o pesquisador Gabriel Loureiro de Lima, orientou duas pesquisas: Pinto (2021) e Silva (2023).

Ao analisarmos os artigos, conforme os Quadros 2 e 4, notamos novamente a presença do pesquisador Laudares, sendo autor ou coautor de três dos onze artigos levantados. O artigo de Barros Filho, Laudares e Miranda (2014) é, como eles próprios indicam, um recorte da pesquisa de mestrado de Barros Filho (2012), orientada por Laudares. Da mesma forma, o artigo Lopes e Lima (2022) é um recorte da tese de doutorado de Pinto (2021), orientada por Lima. Assim, dois dos três artigos apresentados no Quadro 2 são resultados de duas pesquisas (uma de mestrado e outra de doutorado) levantadas no Quadro 1. Além disso, ao focar nos artigos, observamos a contribuição da pesquisadora Jocelaine Cagnelutti, que é coautora de três dos onze artigos mencionados, a saber: A7, A8 e A10.

Para as análises, foram lidos os dez trabalhos na íntegra, assim como os onze artigos, a fim de destacar os seguintes aspectos: i) o objetivo da pesquisa; ii) as principais fundamentações teóricas; iii) o contexto em que foi realizada a pesquisa; e iv) os tópicos de EDO focalizados e os modelos matemáticos mais utilizados.

i) Objetivo da pesquisa

Quadro 5: Os objetivos apresentados nas pesquisas levantadas

Tipo	Pesquisa	Objetivos apresentados nas pesquisas
A1	Laudares e Miranda (2007)	Apresentar resultados de investigação qualitativa da <i>prática educativa</i> do processo de ensino-aprendizagem da iniciação a <i>modelagem nas ciências</i> com equações diferenciais ordinárias em cursos de Engenharia.
M1	Araújo (2008)	Analisar os possíveis efeitos que o uso da <i>Modelagem Matemática</i> , enquanto estratégia de ensino, provoca no <i>processo de aprendizagem</i> dos alunos da disciplina Cálculo III – EDO.
M2	Ferreira (2010)	Investigar como a utilização da <i>modelagem</i> na introdução ao estudo de equações diferenciais em um curso de engenharia pode <i>contribuir para estimular a habilidade de relacionar a Matemática</i> com fenômenos do mundo real, que envolvam variação; além de tomar decisões a respeito de tais fenômenos do mundo real, com base na interpretação das informações contidas na solução da equação.
M3	Souza (2011)	Investigar o ensino das Equações Diferenciais Ordinárias, indagando sobre como o resgate dos conceitos fundamentais de Cálculo Diferencial e Integral e o uso da <i>modelagem algébrica de problemas</i> , classicamente enunciados, na fase introdutória de um curso de Equações Diferenciais Ordinárias, podem <i>contribuir para o ensino e aprendizagem</i> dessas equações.
M4	Barros Filho (2012)	Buscar as contribuições das metodologias de <i>Resolução de Problemas e Descoberta Guiada, mediadas por Tecnologias de Informação e Comunicação</i> tanto para uma <i>aprendizagem mais significativa</i> no Ensino de Equações Diferenciais Ordinárias quanto para aplicações em situações problemas das ciências.

D1	Oliveira (2014)	Investigar <i>estratégias de ensino</i> com vistas a <i>favorecer a aprendizagem</i> de estudantes acerca de Equações Diferenciais Ordinárias e suas aplicações em cursos de graduação em engenharia.
A2	Barros Filho, Laudares e Miranda (2014)	Apresentar resultados de uma Pesquisa de Mestrado que objetivou buscar as <i>contribuições das metodologias de Resolução de Problemas e Descoberta Guiada com situações problemas das Ciências, mediadas por Tecnologias de Informação e Comunicação</i> , visando uma <i>aprendizagem mais significativa</i> de Equações Diferenciais Ordinárias.
D2	Barros (2017)	Investigar o <i>potencial de uma sequência de situações</i> , envolvendo problemas no contexto da Modelagem Matemática, na perspectiva dos registros de representação semiótica e das mudanças de domínio, na condução do <i>processo de aprendizagem</i> das EDOs para estudantes dos cursos de engenharias.
A3	Santos (2017)	Discutir uma ferramenta computacional criada por discentes do curso de Bacharelado em Matemática Computacional da Universidade Federal da Paraíba (UFPB) que <i>visa dar suporte à aprendizagem das EDs</i> .
A4	Laudares e Furletti (2017)	Apresentar recortes de uma pesquisa <i>sobre uma metodologia inovadora para o estudo de Equações Diferenciais Ordinárias</i> , a partir da introdução de Resolução de Problemas privilegiando diversas representações de modelos. É um <i>material didático</i> endereçado aos alunos em um livro editado, especialmente, para os cursos das ciências exatas, que possuem em seus currículos a disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias.
A5	Xavier <i>et al.</i> (2018)	Aplicar o método Problem-Based Learning em um grupo de estudantes do curso de Engenharia Mecânica do Centro Universitário SENAI CIMATEC, desta forma, o problema proposto para essa pesquisa <i>visa à veracidade ou não do ensino de EDOs</i> .
A6	Matos Oliveira <i>et al.</i> (2018)	Abordar a utilização do método numérico de Euler para resolução de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) pelos alunos da disciplina de Métodos Matemáticos e Computacionais Aplicados a Engenharia Química ministrada no Curso de Engenharia Química da Universidade Federal do Ceará (UFC), sendo realizado por pesquisas de campo e bibliográfica
A7	Galina <i>et al.</i> (2019)	<i>Promover a interdisciplinaridade de conteúdos</i> , por meio da comparação entre dados analíticos e numéricos resultantes da análise de um problema, modelado por equações diferenciais, envolvendo o enchimento de um tanque com água, em que, inicialmente, a vazão de entrada é maior do que a vazão de saída.
A8	Santos <i>et al.</i> (2019)	<i>Comparar os resultados analíticos e experimentais</i> , obtidos a partir da resolução da equação diferencial ordinária que modela a flambagem de vigas verticais finas em aço feitas de aço, utilizadas na construção civil.
A9	Dias <i>et al.</i> (2019)	Apresentar o relato de uma experiência que utilizou o software Scilab como uma <i>ferramenta computacional auxiliadora para solucionar problemas</i> que envolvam o uso de equações diferenciais ordinárias na disciplina de Métodos Numéricos.
M5	Buéri (2019)	Analisar a <i>metodologia de estudo de fenômenos físicos</i> com Equações Diferenciais Ordinárias de primeira ordem em cursos de Engenharia, com utilização da técnica de pesquisa de grupo controle.
A10	Comin <i>et al.</i> (2019)	<i>Promover a interdisciplinaridade na avaliação</i> de deflexão de vigas e eixos para pequenas deformações, situação recorrente na engenharia civil estrutural.
M6	Pereira (2021)	<i>Criação de um Produto Educacional</i> estruturado, com atividades para <i>desenvolver habilidades dos estudantes</i> na contextualização das Equações Diferenciais.

D3	Pinto (2021)	Investigar a <i>aprendizagem de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)</i> de variáveis separáveis a partir de uma <i>abordagem contextualizada</i> com estudantes de um curso de Engenharia Civil, em consonância aos pressupostos da Teoria A Matemática no Contexto das Ciências (TMCC).
A11	Lopes e Lima (2022)	Explicitar as <i>compreensões acerca de conhecimentos</i> vinculados a conceitos da Matemática, Física e Transferência de Calor manifestadas por um grupo de 21 estudantes do segundo período de Cálculo do curso de Engenharia Civil de uma instituição particular.
D4	Silva (2022)	Analisar, do ponto de vista cognitivo, os <i>resultados obtidos por meio da implementação de uma estratégia didática com base em atividades problematizadoras e contextualizadoras</i> tendo por objeto o estudo de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) de variáveis separáveis

Fonte: a autora

Com base nos objetivos e nos trechos por nós destacados em itálico, é possível perceber que, de um modo geral, as pesquisas visavam investigar como uma determinada metodologia de ensino pode contribuir para a aprendizagem dos estudantes ou, nos termos de alguns pesquisadores, para desenvolver habilidades dos estudantes. Observamos que três delas apresentam especificidades: M5, que dá ênfase à metodologia da pesquisa, mencionando a técnica do grupo de controle já no objetivo; M6, que, ao definir seu objetivo, enfatiza a criação de um Produto Educacional, possivelmente em decorrência da pesquisa ter sido realizada em um curso de mestrado profissional; e M4, que ressalta, desde seu objetivo, a centralidade do uso da tecnologia em sua proposta.

No que diz respeito aos artigos, identificamos que sete deles também apresentam especificidades: A2, A3 e A9 que, desde seus objetivos, ressaltam a importância do uso da tecnologia em suas propostas; A4 que apresenta recortes de um material didático oriundo de uma pesquisa sobre uma metodologia inovadora para o estudo de Equações Diferenciais Ordinárias; A6, que destaca em seu objetivo que realizou uma pesquisa bibliográfica e de campo; e A7 e A10 que tiveram como objetivo promover a interdisciplinaridade.

ii) as principais fundamentações teóricas e/ou abordagens metodológicas;

Todos os trabalhos utilizaram a metodologia de pesquisa qualitativa, mas, três deles utilizaram também a pesquisa quantitativa. Pereira (2021, p. 13) realizou uma “análise quantitativa simples de dados em diagramas”, Buéri (2019, p. 59) comenta que sua pesquisa “possui muitas vertentes da pesquisa quantitativa, uma delas é a utilização da técnica de pesquisa experimental, grupo de controle” e Xavier *et al.* (2018, p. 4) ressalta que “a pesquisa teve abordagem qualitativa, contendo tratamento de dados quantitativos”.

A respeito das principais fundamentações teóricas, as organizamos no Quadro 6. Nele, incluímos o que percebemos ser central nos trabalhos analisados, de acordo com os termos que os próprios autores utilizam. O que estamos chamando de “fundamentação teórica” no Quadro 6 é amplo e não faz distinções, por exemplo, entre abordagens de ensino e teorias de aprendizagem; entre o uso de tecnologias no ensino e aspectos relacionados especificamente às Equações Diferenciais Ordinárias.

Quadro 6: Principais fundamentações teóricas das pesquisas levantadas

Tipo	Pesquisa	Principais fundamentações teóricas
A1	Laudares e Miranda (2007)	- Modelagem matemática: Bassanezzi (2002), Biembengut (1999); - Investigação matemática (2003).
M1	Araújo (2008)	- Modelagem Matemática: Bassanezi (2002).
M2	Ferreira (2010)	- Modelagem Matemática: Bassanezi (2006).
M3	Souza (2011)	- Modelagem Matemática: Bassanezi (2006); - Atividades Matemáticas: Zabala (1998).
M4	Barros Filho (2012)	- Resolução de Problemas: Polya (2006); - Descoberta Guiada: Mayer (2004); - Tecnologias de Informação e Comunicação: Santiago (2006), Coscarelli (2003), Borba e Penteadó (2003).
D1	Oliveira (2014)	- Teoria das Situações Didáticas: Brousseau (1986); - Engenharia Didática: Artigue (1988).
A2	Barros Filho, Laudares e Miranda (2014)	- Descoberta Guiada: Mayer (2004); - Resolução de Problemas: Polya (2006);
D2	Barros (2017)	- Registros de Representação Semiótica: Duval (1993; 2009); - Modelagem Matemática: Bassanezi (2015); - Engenharia Didática de Artigue (1988).
A3	Santos (2017)	- O artigo não traz informações a respeito disso.
A4	Laudares e Furletti (2017)	- Resolução de Problemas: Polya (1994); - Ensino de Equações Diferenciais Ordinárias: Laudares <i>et al.</i> (2017).
A5	Xavier <i>et al.</i> (2018)	- Teoria dos Campos Conceituais: Vergnaud (1982); - <i>Problem-Based Learning</i> (PBL): Barrows e Tamblyn, (1996)
A6	Matos Oliveira <i>et al.</i> (2018)	- Fases de resolução de problemas na Engenharia: Chapra e Canole (2011)
A7	Galina <i>et al.</i> (2019)	- Aprendizagem Baseada em Problemas (<i>Problem-Based Learning</i> - PBL): Filho e Ribeiro (2009).
A8	Santos <i>et al.</i> (2019)	- O artigo não traz informações a respeito disso.
A9	Dias <i>et al.</i> (2019)	- O artigo não traz informações a respeito disso.
M5	Buéri (2019)	- Resolução de Problemas: Pólya (1995); - Ensino de Equações Diferenciais Ordinárias: Laudares <i>et al.</i> (2017).
A10	Comin <i>et al.</i> (2019)	- O artigo não traz informações a respeito disso.

M6	Pereira (2021)	- Ensino de Equações Diferenciais Ordinárias: Resolução Algébrica: Buéri (2019); Resolução Analítica e Geométrica: Barros Filho (2012); Resolução Numérica: Lima (2013).
D3	Pinto (2021)	- Teoria A Matemática no Contexto das Ciências: Camarena (1987); - Teoria dos Campos Conceituais: Vergnaud (1990); - Teoria dos Registros de Representação Semiótica: Duval (1993).
A11	Lopes e Lima(2022)	- Teoria A Matemática no Contexto das Ciências: Camarena (1987); - Teoria dos Registros de Representação Semiótica: Duval (1993).
D4	Silva (2022)	- Teoria A Matemática no Contexto das Ciências: Camarena (1987; 1995; 2001; 2005); - Teoria dos Campos Conceituais: Vergnaud (1990);

Fonte: a autora

Do Quadro 6, notamos que cinco pesquisas estão fundamentadas na Modelagem Matemática na perspectiva de Rodney Bassanezi e quatro estão fundamentadas na Resolução de Problemas na perspectiva de George Pólya, o que indica que essas duas abordagens de ensino são potenciais para se trabalhar com EDO em cursos de Engenharia. É possível perceber a influência da Didática da Matemática nas pesquisas levantadas, por meio de referenciais como a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, a Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau, Engenharia Didática de Michèle Artigue e a Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud.

M5, além da perspectiva de Pólya (1995) para a Resolução de Problemas, fundamenta-se em um trabalho produzido pelo próprio orientador (LAUDARES *et al.*, 2017) para abordar o ensino de EDO o mesmo ocorre em A4 no artigo que tem como autor principal o Laudares. Já M6, fundamenta-se em M4 e M5, ambas orientadas por Laudares, para formar suas categorias de análises. A constatação da relação entre essas pesquisas (ora produzida pelo pesquisador, ora orientadas por ele e ora produzida por ele) evidencia o trabalho conjunto de um grupo de pesquisadores que se dedica a investigar uma determinada temática. Constatação que é reforçada quando incluímos os artigos A1, A2 e A4, produzidos por Laudares e um deles (A2) é consequência de M4.

No caso dos trabalhos D3 e A11, como A11 é um recorte de D3, a fundamentação teórica dos Campos Conceituais de Vergnaud utilizada em D3 não permaneceu em A11.

Os artigos A3, A8, A9 e A10 não fornecem informações precisas sobre a fundamentação teórica, o que pode ser resultado da limitação de páginas imposta pelo evento, levando os autores a priorizar outros aspectos. O A3, por exemplo, apresenta uma ferramenta computacional desenvolvida pelos alunos e é utilizada como apoio didático no

estudo de Equações Diferenciais. No A8, há uma comparação entre os resultados analíticos e experimentais obtidos pela resolução de uma equação diferencial ordinária, onde Santos *et al.* (2019, p. 2) mencionam que “foi utilizado um referencial teórico que se estende pelas disciplinas de equações diferenciais ordinárias e de resistência dos materiais”. Já o A9 relata uma experiência em que o software Scilab foi utilizado como uma ferramenta computacional para auxiliar na resolução de problemas relacionados a equações diferenciais ordinárias, no contexto da disciplina de Métodos Numéricos. Por outro lado, o A10 visa integrar a interdisciplinaridade, focando principalmente na combinação dos conhecimentos de equações diferenciais, mecânica e resistência dos materiais.

iii) o contexto em que foi realizada a pesquisa;

No Quadro 7, sintetizamos e organizamos informações referentes ao contexto em que a pesquisa foi realizada, explicitando em qual curso de Engenharia foi desenvolvido o trabalho e indicamos, brevemente, a maneira como foram produzidos os dados.

Quadro 7: Informações presentes nas pesquisas levantadas

Tipo	Pesquisa	Contexto	Turma(s) participante(s)	Aspectos metodológicos
A1	Laudares e Miranda (2007)	Disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias	Engenharia de controle e Automação	Foram analisadas a atuação dos estudantes na realização de três atividades investigativas de dois fenômenos físicos através da iniciação a modelagem com equações diferenciais.
M1	Araújo (2008)	Disciplina de Cálculo III– EDO	Engenharia da Computação	Foram desenvolvidas quatro atividades de modelagem.
M2	Ferreira (2010)	Projeto com participação voluntária dos alunos	Engenharias: Elétrica, Mecânica, Mecatrônica e Produção.	Foram realizadas seis atividades, elaboradas segundoos princípios da modelagem matemática e do estudo de modelos, que foram desenvolvidas em quatro encontros.
M3	Souza (2011)	Disciplina de Cálculo IV– Equações Diferenciais ¹⁰	Engenharias: Computação, Controle e Automação, Produção, Química e Telecomunicações	Foi elaborada, aplicada e analisada uma sequência de atividades.
M4	Barros Filho (2012)	Disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias	Engenharia Elétrica	Foram desenvolvidas cinco atividades de Equações Diferenciais Ordinárias Lineares de 1ª e 2ª ordem.

D1	Oliveira (2014)	Projeto com participação voluntária dos alunos	Engenharias: Ambiental e Produção	Foi desenvolvida uma engenharia didática que envolvesse situações-problema.
A2	Barros Filho, Laudares e Miranda (2014)	Disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias	Engenharia Elétrica	Foram desenvolvidas cinco atividades de Equações Diferenciais Ordinárias Lineares de 1ª e 2ª ordem. Neste artigo é apresentada umadas atividades (atividade quatro) com sua estrutura e resolução.
D2	Barros (2017)	Curso de extensão ministrado pela pesquisadora	Engenharias: Alimentos, Ambiental, Civil e Eletrônica.	Foi desenvolvida uma sequência de situações baseadanos pressupostos da engenhariadidática.
A3	Santos (2017)	Não menciona o contexto em que a pesquisa foi desenvolvida	Não menciona em qual turma a aplicação ocorreu	O artigo se limita a descrever o funcionamento da ferramenta computacional, apresentando apenas exemplos.
A4	Laudares e Furletti (2017)	Não menciona o contexto em que a pesquisa foi desenvolvida	Não menciona em qual turma a aplicação ocorreu	O artigo apresenta a resolução de um problema relacionado a um fenômeno físico, destacando o processo passo a passo para sua resolução.
A5	Xavier <i>et al.</i> (2018)	Disciplina de Cálculo A	Engenharia Mecânica	Foram realizados estudos e testes utilizando o modelo tradicional de ensino. Depois, para aprimorar a compreensão, foi proposto a utilização do método PBL, juntamente com a aplicação da Teoria dos Campos Conceituais e avaliações, visando analisar o comportamento e a atitude dos alunos em relação às ações desse método.
A6	Matos Oliveira <i>et al.</i> (2018)	Disciplina de Métodos Matemáticos e Computacionais Aplicados a Engenharia Química	Engenharia Química	A pesquisa bibliográfica analisou diversas fontes, como: artigos, livros, sites de internet. Já a pesquisa de campo, foi desenvolvida por meio de uma entrevista e resposta a um questionário.
A7	Galina <i>et al.</i> (2019)	Não menciona o contexto em que a pesquisa foi desenvolvida	Não menciona em qual turma a aplicação ocorreu	O artigo apresenta o desenvolvimento, resultados e discussões da comparação entre dados analíticos e numéricos resultantes da análise de um problema.
A8	Santos <i>et al.</i> (2019)	O artigo menciona que a prensa artesanal, utilizada na pesquisa, foi desenvolvida por alunos do curso de	Engenharia Civil	O artigo apresenta o desenvolvimento, resultados e discussões referentes à comparação entre os dados analíticos e experimentais, obtidos a partir da resolução da equação diferencial ordinária em um problema

		Engenharia Civil, no entanto, não especifica o contexto em que a pesquisa foi desenvolvida.		relacionado à construção civil.
A9	Dias <i>et al.</i> (2019)	Disciplina de métodos numéricos	Engenharia Civil	Foi desenvolvida uma sequência de quatro horas aula: 1°. Retomada da resolução de um exercício de EDO, manualmente, utilizando o método de Runge Kutta de 4ª ordem; 2°. Apresentação em slide sobre a história e a interface do software aos participantes; 3°. Explicação sobre o algoritmo que deveria ser reproduzido no Scilab para solucionar os problemas propostos; 4°. Resolução do exercício que foi aplicado no 1º passo, porém agora utilizando o software para comparação direta sobre as duas técnicas; 5°. Resolução da lista composta por situações-problemas; 6°. Aplicação do questionário.
M5	Buéri (2019)	Dois grupos de estudantes: i) Disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias ii) Disciplina de Cálculo	Engenharias: Civil, Elétrica, Mecânica e Química.	Por meio da técnica de grupo de controle, um grupo estudou por meio de modelos de um fenômeno, com interpretação gráfica e verbalização do comportamento dos modelos, e o outro grupo estudou por um método tradicional.
A10	Comin <i>et al.</i> (2019)	O artigo menciona que a análise experimental foi realizada por acadêmicos de um curso de Engenharia Civil, no entanto, não especifica o contexto em que a pesquisa foi desenvolvida.	Engenharia Civil	Atividade prática relacionada ao estudo da deflexão máxima suportada por uma viga engastada, por meio da comparação do resultado obtido no experimento com o teórico.
M6	Pereira (2021)	Disciplina de Cálculo Diferencial III	Engenharias: Elétrica, Eletrônica e Mecânica.	Caderno de Atividades, dividido em quatro momentos: i) conceitos iniciais da matéria; ii) trabalho com método de resolução utilizando o campo de direção; iii) atividades com Problemas de Valor Inicial – PVI e Problemas de Valores de Contorno – PVC; iv) questionário final.
D3	Pinto (2021)	Projeto no período vespertino, fora do horário regular de uma disciplina,	Engenharia Civil	Foi desenvolvida uma situação relacionada à Transferência de Calor por condução em paredes de alvenaria planas, um problema

		com participação voluntária dos alunos		integrador entre disciplinas matemáticas e disciplinas não matemáticas.
A11	Lopes e Lima (2022)	Não menciona se trata de uma disciplina específica do curso, menciona apenas que eram estudantes da turma de Cálculo da professora-pesquisadora.	Engenharia Civil	Foi desenvolvido um problema que investiga a transferência de calor por condução em paredes de alvenaria planas, utilizando conhecimentos vinculados a conceitos de Matemática na Educação Básica, do Cálculo, da Física e da Transferência de Calor, estudados em disciplinas da Engenharia.
D4	Silva (2022)	Fora do horário de aula, de maneira remota (plataforma Google Classroom).	Engenharia Civil	Desenvolveu-se, com base em uma situação relacionada à inclinação de vigas em balanço submetidas a carga concentrada na extremidade livre, um Evento Contextualizado (EC) – problema integrando disciplinas matemáticas (no caso, Cálculo) e não matemáticas (neste estudo, Resistência dos Materiais) presentes na matriz curricular de determinado curso de graduação

Fonte: a autora

Podemos perceber, por meio de uma análise feita no Quadro 7, que algumas pesquisas foram desenvolvidas durante as aulas regulares de disciplinas obrigatórias do próprio curso, enquanto outras ocorreram em horários alternativos, por meio de cursos e projetos, contando assim com a participação voluntária dos alunos. Há ainda aquelas que não especificam o contexto em que a pesquisa foi realizada.

Todos os trabalhos analisados desenvolveram atividades no âmbito do Ensino de Equações Diferenciais Ordinárias em diversos cursos de Engenharia. D2, menciona em sua tese que realizou um teste piloto nas turmas de engenharia e aplicou, também, algumas atividades com alunos do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID) do curso de Licenciatura em Matemática, mas, apresenta apenas os resultados obtidos com os alunos de engenharia. Os artigos A3, A4 e A7 não mencionam o contexto em que a pesquisa foi realizada, nem a turma em que as atividades foram aplicadas. Contudo, por se tratar de artigos retirados dos anais de um evento brasileiro voltado à Educação em Engenharia, presume-se que se trata de pesquisas que foram desenvolvidas em turmas de engenharia ou voltadas para elas.

Em todas as pesquisas, as atividades foram desenvolvidas sempre em um mesmo grupo de estudantes, exceto M5 que analisou e comparou o desempenho de dois grupos de estudantes (devido à metodologia de grupo controle) que utilizaram metodologias diferentes para estudar o conceito de equações diferenciais ordinárias.

iv) os tópicos de EDO focalizados e os modelos matemáticos mais utilizados.

No Quadro 8, buscamos sintetizar e organizar os principais temas e modelos matemáticos utilizados nas pesquisas. Para identificar essas informações, demos atenção aos instrumentos de coleta de dados das pesquisas e aos dados coletados. Muitas pesquisas apresentam uma discussão teórica sobre EDO, abarcando diversos conceitos, mas consideramos somente o que, de fato, a pesquisa se dedicou a investigar.

Quadro 8: Ideias matemáticas presentes nas pesquisas levantadas

Tipo	Pesquisa	Principais tópicos de EDO	Principais modelos matemáticos abordados
A1	Laudares e Miranda (2007)	Noções básicas de equações diferenciais. Matematização e resolução de EDO de primeira ordem - equações de variáveis separáveis	- Lei do Resfriamento de Newton - Crescimento populacional
M1	Araújo (2008)	Noções básicas de equações diferenciais. EDO de de 1ª ordem. Foco na elaboração de modelos matemáticos. Resolução de EDO de primeira ordem - equações lineares usando fator integrante e equações de variáveis separáveis.	- Objeto em queda livre; - Fluxo de Corrente Elétrica; - Lei do Resfriamento de Newton; - Misturas de Substâncias.
M2	Ferreira (2010)	Noções básicas de equações diferenciais. EDO de de 1ª ordem. Foco na elaboração de modelos matemáticos. Resolução de EDO de primeira ordem - equações de variáveis separáveis.	- Sistema mola-amortecedor; - Despoluição de lagoas; - Absorção de drogas no organismo.
M3	Souza (2011)	Foco no resgate de conceitos do Cálculo Diferencial e Integral 1. Noções básicas de equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem. Equações de variáveis separáveis. Uso do software <i>GeoGebra</i> para interpretar a solução geral da EDO.	- Lei do Resfriamento de Newton; - Decaimento radioativo; - Objeto em queda livre.
M4	Barros Filho (2012)	Equações Diferenciais Ordinárias de 1ª e 2ª ordem, com foco na interpretação gráfica (campo de direções e gráfico das soluções) e uso de recursos computacionais. As resoluções das equações diferenciais feitas utilizando o software <i>Maple</i> .	- Objeto em queda livre; - Lei do Resfriamento de Newton; - Circuito resistor-indutor (circuito RL); - Decaimento radioativo; - Sistema massa-mola.
D1	Oliveira (2014)	Noções básicas de equações diferenciais ordinárias. Interpretação geométrica (campos de direções e gráficos das soluções de uma EDO utilizando <i>GeoGebra</i>). Resolução de EDO de primeira ordem - equações de variáveis separáveis.	- Crescimento populacional; - Decaimento radioativo; - Lei do Resfriamento de Newton.

A2	Barros Filho e Laudares, Miranda (2014)	Equações Diferenciais Ordinárias de 1ª ordem (variáveis separáveis), com foco na interpretação gráfica (campo de direções e gráfico das soluções) e uso de recursos computacionais. As resoluções das equações diferenciais feitas utilizando o software <i>Maple</i> .	- Decaimento radioativo.
D2	Barros (2017)	Equações Diferenciais Ordinárias de 1ª ordem. Foco na transição entre as representações algébrica e geométrica (campos de direções e gráficos das soluções de uma EDO), utilizando o <i>Maple</i> e o <i>GeoGebra</i> . Resolução de EDO de primeira ordem - foco em equações de variáveis separáveis.	- Decaimento radioativo; - Lei do Resfriamento de Newton; - Circuito resistor-indutor (circuito RL); - Objeto em queda livre; - Desmatamento da floresta Amazônica.
A3	Santos (2017)	Equações Diferenciais Ordinárias e Parciais.	- Equação do calor; - Equação da onda.
A4	Laudares e Furletti (2017)	Equações Diferenciais Ordinárias e Transformadas de Laplace.	- Vibração de molas: Movimento harmônico simples.
A5	Xavier <i>et al.</i> (2018)	Conceitos de derivada, taxa de variação, integrais e modelagem algébricas de problemas, especificamente no ensino introdutório de EDOs	- Não menciona nenhum modelo matemático que foi abordado.
A6	Matos Oliveira <i>et al.</i> (2018)	Equações Diferenciais Ordinárias de 1ª ordem utilizando o método numérico de Euler	- Não menciona nenhum modelo matemático que foi abordado.
A7	Galina <i>et al.</i> (2019)	Equações Diferenciais Ordinárias de 1ª ordem utilizando o método numérico de Euler	- Enchimento de um tanque.
A8	Santos <i>et al.</i> (2019)	Equação diferencial ordinária linear de primeira ordem	- Deflexão de vigas.
A9	Dias <i>et al.</i> (2019)	Método de Runge-Kutta de 4ª ordem	- Não menciona nenhum modelo matemático que foi abordado.
M5	Buéri (2019)	Equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem. Matematização de fenômeno físico. Resolução de EDO de primeira ordem - equações de variáveis separáveis.	- Decaimento exponencial (decaimento de massa).
A10	Comin <i>et al.</i> (2019)	Equação diferencial ordinária linear de primeira ordem	- Deflexão de vigas.
M6	Pereira (2021)	Noções básicas de equações diferenciais. EDO de de 1ª ordem. Matematização de fenômeno físico. Interpretação geométrica (campos de direções utilizando <i>GeoGebra</i>). Resolução de EDO de primeira ordem - equações de variáveis separáveis.	- Lei do Resfriamento de Newton;
D3	Pinto (2021)	Equações diferenciais ordinárias de primeira ordem - equações de variáveis separáveis. Uso do software <i>GeoGebra</i> para interpretar a solução geral da EDO.	- Problema de transferência de calor por condução em paredes de alvenaria planas.

A11	Lopes e Lima (2022)	Equações diferenciais ordinárias de primeira ordem - equações de variáveis separáveis.	- Problema de transferência de calor por condução em paredes de alvenaria planas.
D4	Silva (2022)	Introdução de conceitos fundamentais no estudo de EDO, com foco específico nas de variáveis separáveis.	- Flexão de vigas.

Fonte: a autora

Com base no Quadro 8, observamos que a maioria das pesquisas analisadas focou em EDO de 1ª ordem. Contudo, M4 faz menção a EDO de 2ª ordem, enquanto A9 indica que empregou o Método de Runge-Kutta de 4ª ordem e A3 trabalhou com Equações Diferenciais Ordinárias e Parciais. No caso das dissertações e teses, por não terem limitações de página, diversos trabalhos iniciam a parte prática da pesquisa com uma revisão de noções do Cálculo Diferencial e Integral 1, sendo que M3 focaliza mais esse aspecto. Notamos que é comum as dissertações e teses abordarem noções básicas de EDO (por exemplo, o que é uma equação diferencial, o que é uma solução de uma EDO, problemas de valor inicial e problemas de valores de contorno etc.) antes de partirem para os modelos matemáticos. Em contrapartida, nos artigos, possivelmente devido a limitação do número de páginas e à necessidade de sintetizarem informações, não são encontradas revisões sobre Cálculo Diferencial e Integral 1 e nem explicações mais detalhadas sobre as noções básicas de EDO.

Observamos que é comum as pesquisas sobre o ensino de EDO utilizarem modelos matemáticos tradicionais, como decaimento radioativo, crescimento populacional, Lei de Resfriamento de Newton, entre outros, para diferentes cursos de Engenharia. As pesquisas que se concentraram de maneira mais específica em um único curso foram dedicadas exclusivamente à Engenharia Civil. Dentre elas, D3 e A11 focaram no modelo de transferência de calor por condução em paredes de alvenaria planas, enquanto A8 e A10 abordaram a deflexão de vigas, e D4 trabalhou com a flexão de vigas.

É importante destacar a predominância da EDO de variáveis separáveis, talvez por ser um tipo de EDO mais simples para ser resolvida e, também, por alguns dos modelos matemáticos tradicionais utilizados caírem em uma EDO de variáveis separáveis.

M4, apesar de utilizar EDO de variáveis separáveis em sua pesquisa, não se restringiu a esse tipo de EDO, e os participantes de sua pesquisa utilizaram o *Maple* para resolver as equações trabalhadas. No caso de A2, por ser um recorte de M4, somente uma atividade foi analisada no artigo e essa atividade envolvia EDO de primeira ordem de variáveis separáveis.

Algumas pesquisas focalizam as interpretações geométricas, tanto por meio dos campos de direções como por meio dos gráficos das soluções da equação. Nesses casos, as pesquisas

fizeram uso de algum *software* para se trabalhar com EDO⁸. M3, D1, D2, M6 e D3 fizeram uso do *GeoGebra*; A1, A2, D2 e M4 fizeram uso do *Maple*. Outras pesquisas também recorreram a *softwares*, A3 fez o uso de uma ferramenta desenvolvida no *MATLAB*, A5 utilizou o *WINPLOT*, A6 utilizou o *Phyton* e A7 e A9 utilizaram o *Scilab*. As pesquisas que não fizeram uso de softwares parecem ter seus focos no processo de elaboração dos modelos matemáticos ou da matematização de fenômenos.

Como mencionamos em Santos e Elias (2023), consideramos que realizar esse levantamento trouxe contribuições não apenas para a Educação Matemática, uma vez que permite um olhar mais organizado para algumas pesquisas já produzidas a respeito do tema, mas, também, para este trabalho de mestrado profissional que desenvolvemos. Em nossa pesquisa, também realizamos uma investigação com caráter intervencionista como as aqui analisadas. Por este motivo, consideramos que ter conhecimento dos objetivos, dos principais referenciais teóricos, dos contextos e dos tópicos de EDO abordados nas pesquisas contribui significativamente para as escolhas e delimitação desta investigação.

Por exemplo, quando iniciamos o levantamento, no ano de 2022, tínhamos a pretensão de fazer uso da linguagem de programação *Python* durante a intervenção. A pesquisa de levantamento, entre outros aspectos, objetivada conhecer como as pesquisas na área de Ensino abordava as equações diferenciais utilizando *Python*. Para tanto, pesquisas como A6 nos auxiliariam nesse aspecto. Entretanto, a pretensão de utilizar *Python* não se concretizou, uma vez que os alunos de ambas as turmas em que a pesquisa foi realizada⁹ não, necessariamente, tiveram contato com a linguagem *Python* anteriormente, o que poderia ser um dificultador. O professor da turma avaliou que não haveria tempo suficiente para introduzir a linguagem *Python* antes ou até mesmo durante a intervenção. Por isso, trabalhos como D1 nos auxiliaram a cogitar a possibilidade de uso do *GeoGebra* ou outro *software* mais fácil de manipular.

O levantamento também nos inspirou na escolha do modelo matemático a ser utilizado na pesquisa e nos auxiliou durante o planejamento da tarefa matemática. Por exemplo, D2 traz discussões pertinentes sobre a Lei do Resfriamento de Newton durante uma atividade de

⁸ Alguns softwares foram utilizados nas pesquisas, mas sem relação direta com o estudo de EDO. Por exemplo, Barros Filho (2012) utilizou o *Camtasia* para gravar a tela do computador e registrar os dados. Pinto (2021) menciona o uso da linguagem *Python*, mas não para o estudo de EDO. O uso desses recursos não relacionados especificamente ao estudo de EDO não está sendo considerado em nossa análise.

⁹ Na UTFPR-Londrina, o curso de Engenharia Química tem trabalhado com a linguagem *Python* desde o primeiro semestre, em diferentes disciplinas. No entanto, o curso de Engenharia Ambiental não trabalha com essa linguagem de programação. Nesse sentido, o professor da disciplina entendeu que inserir o *Python* durante a intervenção planejada poderia ser um complicador e preferiu considerar o uso de um *software* mais popular e, em certa medida, mais fácil de lidar, como o *GeoGebra* ou *Excel*.

modelagem sobre o resfriamento do refrigerante. D2 apresenta também diálogos e produções escritas de alunos, o que nos ajudou a antecipar formas de resolver nossa tarefa e elaborar possíveis perguntas a serem feitas durante a intervenção.

Por outro lado, percebemos que nenhum trabalho analisado no levantamento teve como foco as ações do professor que ensina EDO em cursos de Engenharia. Por isso, acreditamos que a pesquisa de mestrado que desenvolvemos poderá trazer novas contribuições para o ensino e a aprendizagem de EDO no Ensino Superior.

2.2 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Como mencionado na seção anterior, notamos que diversas pesquisas sobre EDO em cursos de Engenharia fazem uma seção para apresentar, teoricamente, os conceitos principais a serem abordados no decorrer a investigação. Inspirados nelas, nesta seção, fizemos uso do livro Zill e Cullen (2008) para definirmos alguns dos conceitos centrais para a nossa pesquisa. Apresentamos algumas definições e classificações, mas deixamos outras de lado para evitar que ficasse um texto carregado de definições ou teoremas que não fossem necessários para a compreensão da pesquisa.

A escolha pelo livro Zill e Cullen (2008) se deu pelo fato de ser um dos três livros presentes na bibliografia básica da disciplina Equações Diferenciais Ordinárias dos dois cursos investigados nesta pesquisa. Portanto, a maneira como esses autores apresentam as definições e conceitos é, muitas vezes, a maneira como os estudantes acessam a teoria.

Definição: “Uma equação que contém as derivadas ou diferenciais de uma ou mais variáveis dependentes, em relação a uma ou mais variáveis independentes, é chamada de equação diferencial (ED)” (Zill; Cullen, 2008, p. 2).

Podemos classificar as equações diferenciais levando em consideração o **tipo**, a **ordem** e a **linearidade**.

Em relação ao **tipo**, temos que uma equação diferencial é chamada de **equação diferencial ordinária (EDO)** se ela possuir “somente derivadas ordinárias de uma ou mais variáveis dependentes, com relação a uma única variável dependente”. E “uma equação que envolve as derivadas parciais de uma ou mais variáveis dependentes de duas ou mais variáveis independentes é chamada de **equação diferencial parcial (EDP)**” (Zill; Cullen, 2008, p. 2).

Temos que a **ordem** de uma equação diferencial, é dada por meio da maior ordem de derivação que a equação possui.

No que diz respeito à **linearidade**, Zill e Cullen (2008, p. 4) afirmam que

Uma equação diferencial é chamada de **linear** quando pode ser escrita na forma

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0 y = g(x).$$

Observe que as equações diferenciais lineares são caracterizadas por duas propriedades:

- (i) A variável dependente y e todas as suas derivadas são do primeiro grau; isto é, a potência de cada termo envolvendo y é 1.
- (ii) Cada coeficiente depende apenas da variável independente x .

Uma equação que não é linear é chamada de **não-linear**.

Outro aspecto relevante a ser considerado é a **solução para uma ED**.

Definição: “Qualquer função f definida em algum intervalo I , que, quando substituída na equação diferencial, reduz a equação a uma identidade, é chamada de **solução** para a equação no intervalo” (Zill; Cullen, 2008, p. 4).

Resolver uma ED não é uma tarefa fácil, e o método de resolução empregado dependerá do modelo de ED em questão. Isso ocorre porque o método que funciona para um tipo de ED nem sempre é aplicável a outro tipo. Aqui, vamos abordar o procedimento para solucionar equações separáveis de primeira ordem.

Definição: “Uma equação diferencial da forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}$$

é chamada de **separável** ou tem **variáveis separáveis**” (Zill; Cullen, 2008, p. 44).

Para resolver uma equação diferencial separável, basta reorganizar a equação (colocando cada variável em um membro) e realizar a integração em ambos os membros da equação.

No que diz respeito à solução de uma ED, também podemos definir o problema de valor inicial. Temos que, “o problema:

$$\text{Resolva: } \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

$$\text{Sujeito a: } y(x_0) = y_0$$

é chamado de **problema de valor inicial**” (Zill; Cullen, 2008, p. 39). Pensando geometricamente, “estamos procurando uma solução para a equação diferencial, definida em algum intervalo I tal que o gráfico da solução passe por um ponto (x_0, y_0) determinado *a priori*” (Zill; Cullen, 2008, p. 39).

A disciplina de EDO, conforme destacado na introdução deste trabalho, pode, a depender da forma como é conduzida, possibilitar ao aluno a oportunidade de modelar fenômenos físicos e químicos, uma vez que diversos modelos podem ser escritos por meio de uma equação diferencial. Através da revisão da literatura, pudemos perceber que essa teoria tem aplicabilidade em diversas áreas do conhecimento. No entanto, a complexidade teórica pode dificultar a compreensão dos estudantes, sendo fundamental buscar estratégias que tornem o ensino das EDO mais acessível.

No próximo capítulo, apresentaremos o referencial teórico que fundamenta nossa proposta de ensino, com foco nas ações do professor que apoiam o raciocínio matemático por meio de uma tarefa matemática.

3 REFERENCIAL TEÓRICO

Este capítulo está dividido em três seções: a primeira que discute sobre tarefas matemáticas, caracterizando as tarefas exploratórias segundo Ponte (2005; 2014); a segunda que trata do ensino exploratório e as ações do professor, apontando as ações intencionais do professor na prática de ensino exploratório (Oliveira; Menezes; Canavarro, 2013), que é a perspectiva de ensino assumida na pesquisa; e a terceira seção que aborda o raciocínio matemático e as ações do professor, descrevendo as ações do professor que apoiam o raciocínio matemático (Araman; Serrazina; Ponte, 2019).

3.1 TAREFA MATEMÁTICA

Para Ponte (2014), “[...] as tarefas são ferramentas de mediação fundamentais no ensino e na aprendizagem da Matemática” (p. 16) e “[...] são usualmente (mas não necessariamente) propostas pelo professor, mas, uma vez propostas, têm de ser interpretadas pelo aluno e podem dar origem a atividades muito diversas (ou a nenhuma atividade)” (p. 15). Levando em consideração essas definições, é possível perceber que há uma diferenciação entre tarefa e atividade. Temos que:

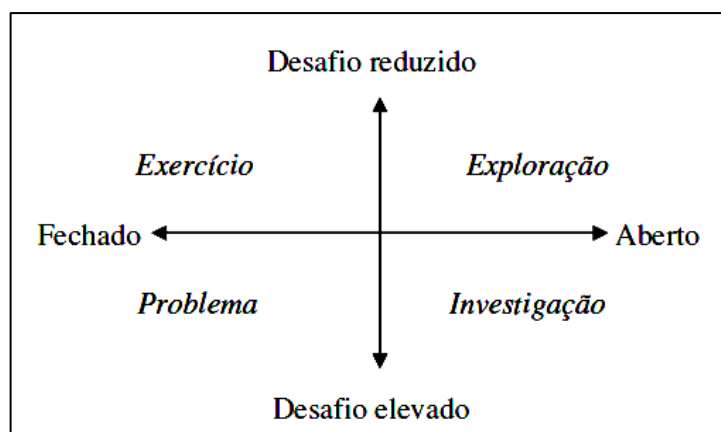
[...] a atividade, que pode ser física ou mental, diz respeito essencialmente ao aluno e refere-se àquilo que ele faz num dado contexto. Pelo seu lado, a tarefa representa apenas o objetivo de cada uma das ações em que a atividade se desdobra e é exterior ao aluno (embora possa ser decidida por ele) (Ponte, 2014, p. 15).

Ou seja, o desenvolvimento de uma tarefa depende do ambiente de aprendizagem estabelecido em sala de aula, ele é o responsável por proporcionar atividades diversas aos alunos.

De acordo com Ponte (2005), as tarefas possuem duas dimensões fundamentais, são elas: grau de desafio matemático e o grau de estrutura. O grau de desafio matemático está relacionado com o nível de dificuldade da tarefa e pode variar entre dois polos: “reduzido” e “elevado”. O grau de estrutura está relacionado com a dimensão da tarefa, que também é classificada entre dois polos: “aberto” e “fechado”. Nesse caso, “Uma tarefa fechada é aquela na qual é claramente dito o que é dado e o que é pedido, e uma tarefa aberta é a que comporta um grau de indeterminação significativo no que é dado, no que é pedido, ou em ambas as coisas” (Ponte, 2005, p. 7-8).

Levando em consideração essas duas dimensões e suas respectivas propriedades, Ponte (2005) classifica as tarefas em quatro quadrantes, conforme ilustra a Figura 1:

Figura 1: Tipos de tarefa



Fonte: PONTE, 2005, p. 8

Ou seja, os tipos de tarefas ilustradas na Figura 1 são apresentadas por Ponte (2005) da seguinte maneira:

- **Exploração:** é uma tarefa aberta e de desafio reduzido (1º quadrante)
- **Exercício:** é uma tarefa fechada e de desafio reduzido (2º quadrante)
- **Problema:** é uma tarefa fechada e de desafio elevado (3º quadrante)
- **Investigação:** é uma tarefa aberta e de desafio elevado (4º quadrante)

Ao planejar suas aulas, é recomendado que o professor considere os diferentes tipos de tarefa, pois cada um desempenha um papel específico na aprendizagem dos alunos (Ponte *et al.* 2015). Para o desenvolvimento das aulas analisadas em nossa pesquisa, utilizamos uma tarefa de exploração (aberta e de desafio reduzido), considerando que “[...] as tarefas abertas (explorações e investigações) ajudam os alunos a desenvolver a capacidade de lidar com situações complexas, interpretando-as matematicamente” (Ponte *et al.*, 2015, p. 112) e que “[...] as tarefas com um grau de desafio mais reduzido (exercícios e explorações) favorecem o sucesso dos alunos e promovem a sua autoconfiança” (Ponte *et al.*, 2015, p. 112).

Acreditamos que esse tipo de tarefa contribui para a aprendizagem dos alunos, possibilita discussões matemáticas produtivas (Stein *et al.*, 2008) e permite analisar as ações do professor durante o processo.

3.2 ENSINO EXPLORATÓRIO E AS AÇÕES DO PROFESSOR

Ao se tratar sobre o ensino de matemática, podemos distinguir duas estratégias básicas: o “ensino direto” e o “ensino-aprendizagem exploratório” (Ponte, 2005).

Temos que:

No ensino directo, o professor assume um papel fundamental como elemento que fornece informação de modo tanto quanto possível claro, sistematizado e atractivo. Assume-se que o aluno aprende ouvindo o que lhe é dito e fazendo exercícios, cujo objectivo é mobilizar os conceitos e técnicas anteriormente explicados e exemplificados pelo professor. O ensino directo tem subjacente a ideia da transmissão do conhecimento. Já o “ensino-aprendizagem exploratório”, a sua característica principal é que o professor não procura explicar tudo, mas deixa uma parte importante do trabalho de descoberta e de construção do conhecimento para os alunos realizarem. A ênfase desloca-se da actividade “ensino” para a actividade mais complexa “ensino aprendizagem” (Ponte, 2005, p. 12-13).

Diante disso, podemos dizer que o ensino direto pode ser entendido como “transmissor de conhecimento”, visto que nele o professor explica o conteúdo, apresenta exemplos, para só depois o aluno resolver os exercícios, ou seja, primeiro vem a “teoria” e depois a “prática”. Enquanto no ensino-aprendizagem-exploratório, trata-se do caminho inverso, pois o aluno inicia com uma atividade prática e por meio dela o aluno pode elaborar uma fundamentação teórica (Ponte, 2005, p. 15).

Stein *et al.* (2008) sugerem que para se promover discussões matemáticas produtivas em uma sala de aula, em que o aluno desenvolve o seu conhecimento, a dinâmica deve ocorrer em três fases: *lançamento* da tarefa, *exploração* pelos alunos e *discussão e sintetização*.

A primeira fase é o *lançamento* da tarefa, neste momento o professor é o responsável por apresentar a tarefa aos alunos, o enunciado da tarefa bem como sua explicação devem ser claras, pois os alunos precisam entender qual é o objetivo da tarefa além disso, eles precisam se sentir desafiados e motivados a desenvolver a tarefa.

A segunda fase é a *exploração* pelos alunos, neste momento o professor assume o papel de acompanhar e incentivar os alunos (individualmente ou em pequenos grupos) a trabalharem de forma autônoma, pois, nesta fase é o momento que os alunos vão buscar estratégias para resolver a tarefa, o professor pode orientá-los para que os alunos ou grupos utilizem diversas estratégias, pois isso irá permitir uma boa discussão futura.

Por fim, temos a fase da *discussão e sintetização*, neste momento os grupos compartilham as suas resoluções para todos os alunos. Nesta fase, o professor precisa intermediar as apresentações, promovendo uma discussão interessante e que gere resoluções

diferentes entre os grupos, garantindo assim uma diversidade de explicações e argumentações, para que então, de forma coletiva, cheguem em um consenso sobre a solução final.

Já Oliveira, Menezes e Canavarro (2013), ao conceitualizarem o ensino exploratório, reformulam essas três fases propostas por Stein *et al.* (2008), dividindo a fase de *discussão e sintetização* em duas, pois consideram importante dar mais destaque à fase de discussão, além de adotar a terminologia *sistematização* ao invés de *sintetização*.

Oliveira, Menezes e Canavarro (2013) ressaltam que:

A prática de ensino exploratório tem uma natureza marcadamente interativa e, como tal, não depende apenas da natureza da tarefa matemática e do objetivo com que é proposta ou da experiência anterior dos alunos, mas, essencialmente da forma como estes vão interagindo com a professora e entre eles nos vários momentos da aula (Oliveira; Menezes; Canavarro. 2013, p. 21).

Ou seja, a troca de informações entre professor e aluno desempenha um papel fundamental no desenvolvimento de uma tarefa por meio do ensino exploratório.

Canavarro (2012), destaca que:

É na relação com os alunos que as tarefas revelam o seu potencial, sendo aqui determinante o papel do professor na sua exploração. As formas de trabalho que escolher, os recursos que proporcionar, a gestão que fizer do tempo e das interações na sala de aula, o papel que se reservar a si mesmo e aos alunos, vão limitar ou potenciar as oportunidades de aprendizagem criadas a partir das tarefas (Smith; Stein, 1998 *apud* Canavarro 2012, p. 101).

Ou seja, o professor é o responsável por todo o desenvolvimento da tarefa, envolvendo a preparação, execução e finalização da tarefa.

Com o propósito de orientar o professor neste desenvolvimento, Oliveira, Menezes e Canavarro (2013, p. 6), elaboraram um quadro, no qual descrevem as práticas de ensino exploratório da Matemática e identificam as “ações instrucionais do professor e as intenções principais subjacentes a essas ações”. Eles organizaram o Quadro 9, destacando que o ensino exploratório ocorre em quatro fases: introdução da tarefa, realização da tarefa, discussão da tarefa e sistematização das aprendizagens matemáticas, em cada uma dessas fases, eles destacam também que o professor possui dois objetivos: promoção da aprendizagem matemática e gestão da aula.

Em resumo, o Quadro 9 está organizado da seguinte forma: na primeira coluna são apresentadas as fases do ensino exploratório e na segunda e terceira coluna, é evidenciado quais são as ações que o professor pode desenvolver para promover a aprendizagem matemática e ter uma boa gestão na aula, em cada uma das fases.

Quadro 9: Ações intencionais do professor na prática de ensino exploratório da Matemática

	Promoção da aprendizagem matemática	Gestão da aula
INTRODUÇÃO DA TAREFA	<i>Garantir a apropriação da tarefa pelos alunos:</i> — Familiarizar com o contexto da tarefa — Esclarecer a interpretação da tarefa — Estabelecer objetivos <i>Promover a adesão dos alunos à tarefa:</i> — Estabelecer conexões com experiência anterior — Desafiar para o trabalho	<i>Organizar o trabalho dos alunos:</i> — Estipular tempos para o trabalho a desenvolver em cada uma das fases da aula — Definir formas de organização do trabalho (individual, pares, pequenos grupos, ...) — Organizar materiais da aula
REALIZAÇÃO DA TAREFA	<i>Garantir o desenvolvimento da tarefa pelos alunos:</i> — Colocar questões e dar pistas — Sugerir representações — Focar ideias produtivas — Pedir clarificações e justificações <i>Manter o desafio cognitivo e autonomia dos alunos:</i> — Cuidar de promover o raciocínio dos alunos — Cuidar de não validar a correção matemática das respostas dos alunos	<i>Promover o trabalho de pares/grupos:</i> — Regular as interações entre alunos — Providenciar materiais para o grupo <i>Garantir a produção de materiais para a apresentação pelos alunos:</i> — Pedir registos escritos — Fornecer materiais a usar — Dar tempo para preparar a apresentação <i>Organizar a discussão a fazer:</i> — Identificar e selecionar resoluções variadas (com erro a explorar, menos ou mais completas, com representações relevantes) — Sequenciar as resoluções selecionadas
DISCUSSÃO DA TAREFA	<i>Promover a qualidade matemática das apresentações dos alunos:</i> — Pedir explicações claras das resoluções — Pedir justificações sobre os resultados e as formas de representação utilizadas — Discutir a diferença e eficácia matemática das resoluções apresentadas <i>Regular as interações entre os alunos na discussão:</i> — Incentivar o questionamento para clarificação de ideias apresentadas ou esclarecimento de dúvidas — Incentivar análise, confronto e comparação entre resoluções — Identificar e colocar à discussão erros matemáticos das resoluções	<i>Criar ambiente propício à apresentação e discussão:</i> — Dar por terminado o tempo de resolução da tarefa pelos alunos — Providenciar a reorganização dos lugares/ espaço para a discussão — Promover atitude de respeito e interesse genuíno pelos diferentes trabalhos apresentados <i>Gerir relações entre os alunos:</i> — Definir a ordem das apresentações — Cuidar de justificar as razões da não apresentação de algumas resoluções — Promover e gerir as participações dos alunos na discussão
SISTEMATIZAÇÃO DAS APRENDIZAGENS MATEMÁTICAS	<i>Institucionalizar ideias ou procedimentos relativos a tópicos matemáticos suscitados pela exploração da tarefa:</i> — Identificar conceito(s) matemático(s), clarificar a sua definição e explorar representações múltiplas — Identificar procedimento(s) matemático(s), clarificar as condições da sua aplicação e rever a sua utilização — Reconhecer o valor de uma regra com letras. <i>Institucionalizar ideias ou procedimentos relativos a capacidades transversais suscitadas pela exploração da tarefa:</i> — Identificar e relacionar dimensões da(s) capacidade(s) transversal(ais) presentes — Reforçar aspetos-chave para o seu desenvolvimento <i>Estabelecer conexões com aprendizagens anteriores:</i> — Evidenciar ligações com conceitos matemáticos, procedimentos ou capacidades transversais anteriormente trabalhados	<i>Criar ambiente adequado à sistematização:</i> — Focar os alunos no momento de sistematização coletiva — Promover o reconhecimento da importância de apurar conhecimento matemático a partir da tarefa realizada <i>Garantir o registo escrito das ideias resultantes da sistematização:</i> — Fazer registo em suporte físico ou informático (quadro, QI, acetato, cartaz ...) por aluno ou professor — Pedir registo escrito nos cadernos dos alunos

Fonte: Oliveira, Menezes e Canavarro (2013, p. 5)

O Quadro 9 apresenta detalhes minuciosos que auxiliam o professor na busca de potencializar a promoção da aprendizagem matemática dos alunos e a manter uma boa gestão

da aula. Entretanto, é evidente que seu enfoque está na abordagem do ensino exploratório e no nosso trabalho vamos destacar as ações do professor que apoiam o raciocínio matemático.

3.3 RACIOCÍNIO MATEMÁTICO E AS AÇÕES DO PROFESSOR

Mata-Pereira e Ponte (2018, p. 782) definem que “raciocinar matematicamente consiste em fazer inferências justificadas, ou seja, utilizar informação matemática já conhecida para obter, justificadamente, novas conclusões”.

“Há uma variedade de aspectos e processos que podem estar envolvidos no raciocínio matemático... *Conjecturar, generalizar e justificar* destacam-se como processos essenciais do raciocínio matemático” (Ponte; Quaresma; Mata-Pereira, 2020, p. 10).

O Quadro 10 apresenta as definições desses processos segundo Morais, Serrazina e Ponte (2018) que, por sua vez, caracterizam esses processos com base em Ellis (2011) e Lannin *et al.* (2011).

Quadro 10: Processos do raciocínio matemático

Processos	Definição
Conjecturar	“É um processo que envolve raciocinar sobre relações matemáticas, desenvolvendo afirmações, denominadas conjecturas, que requerem maior exploração para verificar se são verdadeiras ou não” (Morais; Serrazina; Ponte, 2018, p. 555, tradução nossa).
Generalizar	É “uma atividade onde as pessoas, que partilham um contexto socio matemático específico, estão envolvidas em pelo menos uma de três ações: (i) identificar pontos em comum entre os casos; (ii) estender o raciocínio para além do caso inicial; ou (iii) extrair resultados mais amplos de casos particulares” (Morais; Serrazina; Ponte, 2018, p. 556, tradução nossa).
Justificar	“Tem como objetivo convencer a si mesmo e aos outros (Morais; Serrazina; Ponte, 2018, p. 556, tradução nossa)”. A justificação não só mostra que uma afirmação é verdadeira, mas também fornece razões pelas quais é verdadeira ou válida em todos os casos possíveis (p. 556).

Fonte: A autora, baseada em Morais, Serrazina e Ponte (2018)

Temos que o raciocínio matemático dos alunos se desenvolve a partir de conhecimentos prévios e por meio desses processos (conjecturar, generalizar e justificar) e com uma tarefa com tal potencial, os alunos são capazes de produzir novos conhecimentos.

Mas, para todo esse processo acontecer o professor tem um papel importante, ele é o responsável por gerenciar a aula e orientar os alunos. Porém, isso não é algo simples. Com o intuito de auxiliar o professor durante este processo, Araman, Serrazina e Ponte (2019)

elaboraram um quadro de análise das ações do professor que apoiam o raciocínio matemático dos estudantes, conforme Figura 2. Neste quadro, os autores apresentam as categorias de ações e como elas podem ser executadas pelo professor durante o desenvolvimento da tarefa.

Figura 2: Quadro de análise das ações do professor que apoiam o raciocínio matemático

C A T E G O R I A S	Convidar	- Solicita respostas para questões pontuais. - Solicita relatos de como fizeram.	A Ç Õ E S
	Guiar/Apoiar	- Fornece pistas aos alunos. - Incentiva a explicação. - Conduz o pensamento do aluno. - Focaliza o pensamento do aluno para fatos importantes. - Encoraja os alunos e re-dizerem suas respostas. - Encoraja os alunos a re-elaborarem suas respostas.	
	Informar/Sugerir	- Valida respostas corretas fornecidas pelos alunos. - Corrige respostas incorretas fornecidas pelos alunos. - Re-elabora respostas fornecidas pelos alunos. - Fornece informações e explicações. - Incentiva e fornece múltiplas estratégias de resolução.	
	Desafiar	- Solicita que os alunos apresentem razões (justificativas). - Propõe desafios. - Encoraja a avaliação. - Encoraja a reflexão. - Pressiona para a precisão. - Pressiona para a generalização.	

Fonte: Araman, Serrazina e Ponte (2019, p. 476).

De acordo com Araman, Serrazina e Ponte (2019), a categoria *Convidar* envolve as ações do professor que solicitam informações dos alunos a respeito do que fizeram, tendo como objeto observar como os alunos estão pensando e qual a compreensão estão tendo sobre aquele tema. A categoria *Guiar/Apoiar* envolve as ações “em que o professor, a partir de perguntas ou explicações, conduz o pensamento do aluno para uma determinada situação ou focaliza fatos importantes ou ainda quando o professor fornece pistas aos alunos e os encoraja a pensarem sobre suas respostas” (Araman; Serrazina; Ponte, 2019, p. 476). A categoria *Informar/Sugerir* abarca as ações pelas quais o professor valida ou corrige uma resposta dada pelos alunos, ou, ainda, quando fornece explicações ou informações e solicita ou apresenta outras estratégias de solução. A categoria *Desafiar* envolve “as ações nas quais o professor tenta colocar os alunos em situação desafiadora de modo que estes avancem em seu raciocínio matemático, procurando novas formas de representação, estabelecendo novas conexões, refletindo e avaliando a situação, generalizando e justificando” (Araman; Serrazina; Ponte, 2019, p. 476).

Os autores destacam que, embora o quadro apresente as categorias em uma ordem, não existe obrigatoriedade de sequência entre elas, nem de hierarquização. Embora as ações de

desafiar sejam as que possuem maior potencial para promover o raciocínio dos alunos, as ações de convidar, guiar/apoiar e de informar/sugerir dão suporte para as ações de desafiar (Araman; Serrazina; Ponte, 2019). Isso significa que o desenvolvimento do raciocínio matemático ocorre de forma gradual, por mais que a ação de desafiar represente um maior potencial, ela só é alcançada se as outras ações forem executadas de maneira integrada.

Para o avanço desta pesquisa, adotando uma abordagem exploratória no ensino de matemática, a escolha da tarefa é fundamental. A tarefa escolhida precisa ter o potencial de promover o desenvolvimento do raciocínio matemático, já que, por meio das ações do professor e da condução do ensino exploratório, os alunos deverão ser capazes de construir novos conhecimentos, principalmente no que diz respeito às equações diferenciais ordinárias.

Com base nesse referencial, este estudo buscou identificar e discutir as ações do professor que apoiam o raciocínio matemático durante a realização de uma tarefa exploratória em uma turma de Engenharia na disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO). Para conduzir esta pesquisa, foi realizada uma pesquisa qualitativa em uma turma composta por alunos dos cursos de Engenharia Química e Engenharia Ambiental da UTFPR de Londrina.

No próximo capítulo, detalharemos a metodologia utilizada para a coleta e análise de dados. Com base na transcrição das aulas e na análise das produções escritas dos estudantes, buscamos identificar as ações específicas do professor que se enquadram nas categorias propostas (*Convidar, Guiar/Apoiar, Informar/Sugerir e Desafiar*) e discutir as ações e o seu impacto no desenvolvimento dos processos (*Conjeturar, generalizar e justificar*) de raciocínio matemático dos alunos. Os resultados dessa análise permitirão compreender como as ações do professor podem promover uma aprendizagem mais profunda e significativa de conceitos matemáticos complexos.

4 METODOLOGIA

Foi realizada uma pesquisa qualitativa, que na perspectiva de Esteban (2010), é definida como:

[...] a pesquisa qualitativa é uma atividade sistemática orientada à compreensão em profundidade de fenômenos educativos e sociais, à transformação de práticas e cenários socioeducativos, à tomada de decisões e também ao descobrimento e desenvolvimento de um corpo organizado de conhecimentos (Esteban, 2010, p.127).

Os dados da pesquisa foram produzidos nos dias 12, 17 e 19 de abril de 2023, com duas aulas de 50 minutos em cada dia, resultando em um total de seis aulas. Durante toda a produção de dados, mesmo distribuída ao longo de três dias de aula, o professor colocou um gravador de áudio na mesa de cada grupo e permaneceu com um gravador consigo, para capturar todos os diálogos entre ele e os alunos.

A pesquisa ocorreu em um ambiente natural de sala de aula da disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias. A turma participante é composta por alunos dos cursos de Engenharia Química e Engenharia Ambiental da UTFPR de Londrina em que o orientador da pesquisa é o professor.

Desde 2019, o professor Henrique lecionava a disciplina¹⁰ de EDO para os alunos das duas Engenharias em uma mesma turma. Ao longo desses anos lecionando a disciplina, as aulas do professor foram pautadas no ensino direto (Ponte, 2005) e as tarefas de exploração, que envolviam aplicações de EDO para as Engenharias, nunca eram realizadas em sala de aula, eram sempre deixadas para serem realizadas em momentos extraclasse e enviadas pela Plataforma Moodle. Em sala de aula, o professor costumava trabalhar com tarefas do tipo exercício (Ponte, 2005), isto é, tarefas fechadas e de desafio reduzido, como uma reprodução dos métodos de resolução de EDO ensinados durante as aulas.

De maneira distinta, as aulas desenvolvidas no contexto desta pesquisa, no primeiro semestre de 2023, visaram trabalhar na perspectiva do ensino exploratório e utilizando uma tarefa de exploração. Essa tarefa, realizada no ambiente natural de sala de aula pela primeira

¹⁰ Na UTFPR as disciplinas são semestrais. Isso significa que até a realização da pesquisa, no primeiro semestre de 2023, o professor havia lecionado a disciplina para a Engenharia Química e a Engenharia Ambiental conjuntamente, em uma mesma turma, por oito semestres seguidos. A ementa da disciplina durante esse período, inclusive na época da realização da pesquisa, era: Equações Diferenciais de Primeira Ordem. Equações Diferenciais ordinárias lineares de primeira ordem e ordem superior. Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias Lineares. Resolução de Equações Diferenciais em Séries de Potências.

vez em sua prática, envolveu o tópico EDO de Primeira Ordem e o modelo matemático abordado foi a Lei do resfriamento de Newton.

O Quadro 11 apresenta a tarefa exploratória utilizada. Tal tarefa foi dividida em três momentos, considerando as três aulas destinadas à pesquisa.

Quadro 11: Tarefa exploratória desenvolvida na turma

Primeiro momento (dia 12 de abril)	Realize as medições de temperaturas da água.
Segundo momento (dia 17 de abril)	Com base nos dados, encontre um modelo matemático que permita obter a temperatura da água em qualquer instante t .
Terceiro momento (dia 19 de abril)	Discuta e analise o modelo matemático obtido na aula anterior.

Fonte: a autora

Consideramos a tarefa como sendo de exploração, pois o enunciado é aberto, já que “comporta um grau de indeterminação significativo no que é dado” (Ponte, 2005, p. 7), e de desafio reduzido, uma vez que os alunos já tinham estudado EDO de primeira ordem (de variáveis separáveis, lineares e exatas) durante as aulas anteriores e já haviam realizado tarefas de aplicação de EDO de mesmo nível em momentos extraclasse, com tempo (duas semanas) para buscarem os modelos matemáticos a serem utilizados (por exemplo, o modelo do Crescimento Populacional e o modelo da Mistura de duas soluções em um tanque).

Para o trabalho com a tarefa de exploração, mesmo dividida ao longo de três dias de aula, o professor considerou as fases do ensino exploratório.

No primeiro dia (duas aulas de 50 minutos cada), o professor *introduziu a tarefa* (Oliveira; Menezes; Canavarro, 2013), separando os alunos em pequenos grupos (foram cinco grupos com seis alunos e um grupo com cinco alunos) e explicou o que seria feito e a dinâmica da aula. Em seguida, entregou aos grupos os materiais necessários para a coleta das informações: cada grupo recebeu um recipiente com água, de acordo com o Quadro 6, juntamente com uma folha para anotarem as medições, conforme Figura 3.

Figura 3: Folha para anotação das medições de temperatura

Grupo ____

Nomes dos integrantes do grupo:

Tipo de material (copo ou garrafa) utilizado: _____

Temperatura do ambiente: _____

Horário	Temperatura da água

Fonte: dados da pesquisa

O professor orientou os alunos a anotarem a temperatura ambiente naquele exato momento (início da aula), que era de 26,4 °C, e a realizarem a primeira medição da temperatura da água. A partir de então, cada grupo mediria a temperatura da água, deixada em temperatura ambiente, a cada 10 minutos por cerca de 100 minutos e registraram esses valores.

Quadro 12: Recipiente e temperatura da água referente a cada Grupo

Grupo	Recipiente	Água
1	Caneca de Plástico	Quente
2	Caneca <i>Stanley</i>	Gelada
3	Caneca de Plástico	Gelada
4	Copo de vidro	Gelada
5	Caneca de alumínio	Quente
6	Garrafa Plástica	Gelada

Fonte: dados da pesquisa

Neste dia, a pesquisadora esteve presente durante a aula e atuou como observadora e auxiliou apenas na coleta das temperaturas pelos grupos, que ocorreu da seguinte forma: os alunos colocavam o termômetro culinário dentro do recipiente com água, esperavam um pouco (até a medida do termômetro estabilizar) e em seguida anotavam na folha qual era o horário e

a temperatura do líquido naquele momento. O professor e a pesquisadora foram auxiliando os alunos durante a coleta de dados e, por meio de perguntas realizadas pelo professor, os alunos começaram a levantar conjecturas sobre a tarefa. A Figura 4 mostra as informações coletadas pelos grupos ao final do primeiro dia de aula:

Figura 4: Medições de temperatura feitas pelos grupos

Grupo 1 (Caneca de Plástico)		Grupo 2 (Copo Stanley)		Grupo 3 (Caneca de Plástico)	
Horário	Temperatura da água	Horário	Temperatura da água	Horário	Temperatura da água
16h10	74,6° C	16h07	0,9° C	16h13	4,1° C
16h19	61° C	16h19	1,1° C	16h22	5,9° C
16h29	53,8° C	16h29	1,3° C	16h31	8,4° C
16h39	48,1° C	16h39	1,8° C	16h42	10,7° C
16h50	43,6° C	16h49	2,1° C	16h56	13,3° C
17h	40,2° C	16h59	2,8° C	17h04	14,9° C
17h10	38,1° C	17h09	3,3° C	17h14	16,1° C
17h21	36,3° C	17h19	3,8° C	17h22	17,2° C

Grupo 4 (Copo de vidro)		Grupo 5 (Caneca de alumínio)		Grupo 6 (Garrafa de plástico)	
Horário	Temperatura da água	Horário	Temperatura da água	Horário	Temperatura da água
16h06	3,3° C	16h16	87,1° C	16h14	2,6° C
16h18	8,9° C	16h24	66,8° C	16h22	3,6° C
16h28	12,1° C	16h33	56,1° C	16h32	5,9° C
16h38	15° C	16h44	47,8° C	16h42	6,2° C
16h49	17,3° C	16h58	40,8° C	16h56	6,6° C
17h	19,2° C	17h07	38° C	17h05	8,9° C
17h09	20,1° C	17h16	36° C	17h14	11,2° C
17h19	20,9° C	17h26	34,1° C	17h24	13,4° C

Fonte: dados da pesquisa

Vale ressaltar que, conforme as orientações da tarefa, as medições deveriam ser realizadas a cada 10 minutos, no entanto, os intervalos de tempo variaram, pois só tinha um termômetro culinário e ele estava sendo compartilhado entre todos os grupos.

No segundo dia (duas aulas de 50 minutos cada), o professor pediu que os alunos se organizassem nos mesmos grupos da aula anterior. Para essa aula, o professor entregou, em folhas separadas, os dados coletados pelos Grupos 1 e 4 no primeiro dia e *introduziu a tarefa* (Oliveira; Menezes; Canavarro, 2013) para cada grupo, mas agora com o enunciado, conforme as Figuras 5 e 6, contendo os dados obtidos na aula anterior. Todos os seis grupos *discutiram a tarefa* (Oliveira; Menezes; Canavarro, 2013) e geraram um modelo matemático (utilizando uma EDO) a partir das observações e análises dos dados obtidos pelos grupos 1 e 4.

Figura 5: Folha entregue aos alunos no segundo dia, contendo informações registradas pelos alunos do Grupo 1

Dados coletados no dia 12 de abril.	
Tipo de material utilizado: Copo UTFPR (Plástico)	
Temperatura do ambiente: 26,4° C	
Horário	Temperatura da água Termômetro Culinário
16h10	74,6° C
16h19	61° C
16h29	53,8° C
16h39	48,1° C
16h50	43,6° C
17h	40,2° C
17h10	38,1° C
17h21	36,3° C

Encontrar um modelo matemático que permita obter a temperatura da água em qualquer instante t .

Fonte: dados da pesquisa

Figura 6: Folha entregue aos alunos no segundo dia, contendo informações registradas pelos alunos do Grupo 4

Dados coletados no dia 12 de abril.	
Tipo de material utilizado: Copo de vidro (água gelada)	
Temperatura do ambiente: 26,4° C	
Horário	Temperatura da água Termômetro Culinário
16h06	3,3° C
16h18	8,9° C
16h28	12,1° C
16h38	15° C
16h49	17,3° C
17h	19,2° C
17h09	20,1° C
17h19	20,9° C

Encontrar um modelo matemático que permita obter a temperatura da água em qualquer instante t .

Fonte: dados da pesquisa

Como pode ser observado nas Figuras 5 e 6, a orientação contida nas folhas entregues pelo professor era: “Encontrar um modelo matemático que permita obter a temperatura da água em qualquer instante t ”. O professor sugeriu que neste dia os alunos levassem seus *notebooks*, pois, caso desejassem, poderiam utilizar o software *GeoGebra* para trabalhar com os dados e identificar o comportamento do gráfico da função que descreveria a situação.

Durante essa aula, a pesquisadora atuou como observadora não participante e o professor ficou circulando entre os grupos com o objetivo de dialogar com os alunos e conduzi-los a chegarem a um modelo. O professor visava estimular os alunos a compreenderem que, na situação proposta, a taxa de variação da temperatura é proporcional à diferença entre a temperatura T e a temperatura ambiente T_a , isto é,

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a) \quad (\text{onde } k > 0)$$

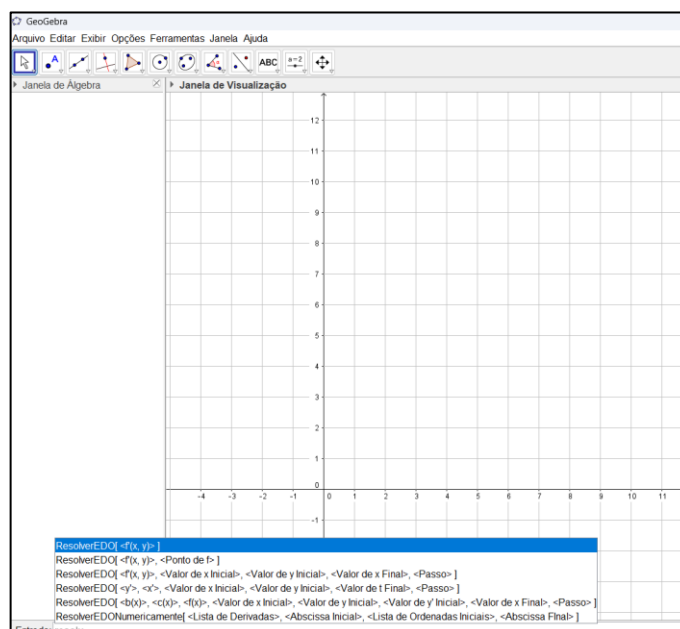
Ou seja, no modelo matemático que representa a Lei do resfriamento de Newton. É importante destacar que este modelo matemático é classificado com uma EDO de 1º ordem, linear e de variáveis separáveis.

No terceiro dia (duas aulas de 50 minutos cada), sem a presença da pesquisadora na sala, o professor iniciou a aula realizando a *discussão da tarefa* (Oliveira; Menezes; Canavarro, 2013), convidando os alunos a apresentarem seus modelos para a turma toda e fazendo questionamentos. Após os seis grupos apresentarem as EDOs que construíram, o professor orientou-os a resolverem suas EDOs (sem indicar um método específico para resolução) e validar o modelo construído. Para validar o modelo, os alunos poderiam voltar aos dados coletados pelos seus próprios grupos no primeiro dia, não ficando restritos aos dados dos Grupos 1 e 4 entregues pelo professor. Assim como no segundo dia, os alunos poderiam utilizar livremente o software *GeoGebra*. Não houve nenhuma orientação específica, por parte do professor, quanto ao uso do *GeoGebra*. Os alunos poderiam utilizar da maneira como quisessem, fazendo uso dos comandos que soubessem¹¹ utilizar.

Ao final do terceiro dia, após os alunos analisarem e resolverem a equação diferencial ordinária considerando diferentes conjuntos de dados (do Grupo 1, do Grupo 4 ou do próprio grupo), o professor apresentou aos alunos o comando “Resolver EDO” (conforme Figura 7), até então desconhecido pelos alunos.

¹¹ Foi a primeira vez que o professor desenvolveu uma tarefa em que os alunos utilizaram o *GeoGebra* em sala de aula na disciplina. O conhecimento que os estudantes tinham sobre o *software* veio de momentos anteriores no curso. Até então, os estudantes não conheciam o comando “Resolver EDO” no *GeoGebra*, que foi apresentado pelo professor.

Figura 7: Comando “ResolverEDO” no *GeoGebra*



Fonte: os autores

Após esse momento, o professor realizou a *sistematização das aprendizagens dos alunos* (Oliveira; Menezes; Canavarro, 2013), dialogando com cada grupo a respeito das conclusões que tiraram, principalmente a respeito da validade do modelo obtido, do significado da constante de proporcionalidade, do papel da condição inicial para a determinação da constante de integração que surge na integral indefinida e das limitações do modelo quanto comparado à realidade.

Para esta pesquisa, utilizamos os áudios gravados durante as interações que o professor fez no Grupo 1. Essa delimitação foi necessária, uma vez que, ao todo, temos sete gravadores (seis dos grupos mais o gravador do professor) com cerca de 300 minutos cada. Escolhemos o Grupo 1, pois foi um dos grupos que mais interagiu com o professor durante as aulas. Outro motivo foi que o grupo, composto por seis integrantes, contou com a participação de todos eles durante os três dias de desenvolvimento da tarefa. Além disso, no último dia, o Grupo 1 utilizou um dos notebooks do próprio professor para utilizar o *GeoGebra*, o que facilitou o registro dos gráficos feitos no *software* por parte dos alunos.

Portanto, os dados analisados nesta pesquisa são: áudios do gravador que ficou sobre a mesa do Grupo 1 durante os três dias de aplicação; áudios do gravador que ficou com o professor enquanto caminhava pela sala e interagiu com os alunos durante os três dias de aplicação, especialmente nos momentos em que o professor interagiu com o Grupo 1; produções escritas dos estudantes do Grupo 1. Esses áudios foram transcritos para a realização das análises.

A pesquisa teve aprovação do Comitê de Ética em Pesquisas envolvendo Seres Humanos (CEP – UTFPR) sob o número CAAE: 65033822.6.0000.5547. Para manter o anonimato dos participantes, demos nomes fictícios a eles, a saber: Lucas, Daniela, Mário, Talita, Jairo e Carlos.

A partir da transcrição dos áudios do gravador que permaneceu com o professor durante os três dias, foi realizada uma leitura dos diálogos e cada fala do professor foi classificada segundo as categorias de ações do professor, de acordo com os dados apresentados na Figura 2.

Em seguida, a partir da transcrição dos áudios do gravador que permaneceu sobre a mesa do Grupo 1 durante os três dias, buscamos corroborar a classificação das falas do professor feita anteriormente e, principalmente, buscamos identificar de que maneira aquelas ações do professor apoiavam o raciocínio matemático dos alunos, com base nos processos apresentados no Quadro 10.

As análises dos dados estão detalhadas no Capítulo 5.

5 ANÁLISE DOS DADOS

Neste capítulo, descrevemos os três dias de aula visando identificar as ações do professor: *Convidar*, *Guiar/Apoiar*, *Informar/Sugerir* e *Desafiar* (Araman, Serrazina e Ponte, 2019) e buscamos discutir como essas ações do professor podem apoiar os processos: *Conjeturar*, *generalizar* e *justificar* (Ponte; Quaresma; Mata-Pereira, 2020; Moraes; Serrazina; Ponte, 2018) do raciocínio matemático dos estudantes.

Como já mencionamos, os dados da pesquisa foram produzidos em três dias, com duas aulas de 50 minutos cada, totalizando seis aulas. No primeiro dia, os estudantes mediram a temperatura da água; no segundo dia, utilizando os dados coletados anteriormente, os estudantes procuraram encontrar um modelo matemático que permitisse obter a temperatura da água em qualquer instante t ; por fim, no terceiro dia, eles discutiram e analisaram o modelo obtido.

O professor inicia o primeiro dia comentando com os alunos sobre a coleta e análise dos dados, em seguida, convida a todos a participarem da atividade e se organizarem em grupos.

[1] Professor: *Na aula de hoje, a gente vai fazer uma coleta de dados para analisar segundo o que a gente tem estudado aqui em EDO. Então, hoje vai ser uma coleta de dados para utilizar e analisar na segunda-feira (próximo dia de aula), tá? [convidar]*

Para o desenvolvimento da tarefa, o professor pede para os alunos se organizarem em grupo. Ele conta os alunos presentes na sala de aula e decide que os alunos podem fazer 5 grupos de 6 alunos e 2 grupos de 7 alunos. Antes de se organizarem, o professor explica que os alunos irão utilizar alguns recipientes com água fria e água quente, para a medição da temperatura a cada 10 minutos até o final da aula.

Em um determinado momento da explicação da tarefa, o professor diz: “Cada grupo deverá fazer uma medição, aí depois a gente vai chegar em uma EDO que modela essa situação, pra gente chegar numa função que nos permite dizer a variação da temperatura ao longo do tempo”. Este trecho de fala em específico não está destacado no texto como os demais, pois não se trata de uma ação que apoia o raciocínio matemático. No entanto, essa afirmação merece destaque, pois, embora não tenha sido intencionalmente diretiva, pode ter influenciado o raciocínio do aluno. É possível que eles já imaginassem que o trabalho teria relação com EDO, tema da disciplina, mas ao mencionar explicitamente a EDO, o professor pode ter limitado as possibilidades que os alunos poderiam explorar, direcionando-os para uma solução específica.

Depois da explicação, os alunos se organizam em grupos e o professor realizou a medição da temperatura ambiente e informou aos alunos que a mesma se encontrava em $26,4^{\circ}\text{C}$, orientando-os a registrar esse dado, pois será necessário mais adiante. Em seguida, o

professor distribuiu os materiais (copo/garrafa com água quente/fria) e uma folha para os alunos anotarem o horário e a temperatura naquele instante.

Como só tinha um termômetro culinário, o professor foi circulando entre os grupos, levando o termômetro e orientando os alunos durante as medições. O professor comenta que o intervalo entre as medições é de 10 minutos e explica como os alunos devem anotar os dados na folha. Depois de um período de coleta de dados, o professor iniciou discussões com os grupos sobre os dados coletados até o momento. Aqui, vamos abordar particularmente o Grupo 1, como mencionado anteriormente.

Para dar início a discussão, o professor guia/apoia (em [2]) os alunos para que eles expliquem o que os dados coletados até o momento indicam.

[2] Professor: *Deixa eu fazer uma pergunta pra vocês, com esses dados que vocês já coletaram, o que esses dados indicam? O que vocês podem dizer a partir desses dados?*

[guiar/apoiar – incentiva a explicação]

[3] Lucas: *Com o tempo a variação foi diminuindo.*

[4] Daniela: *A variação vai diminuindo.*

[5] Professor: *A variação foi diminuindo!* [informar/sugerir - valida respostas corretas fornecidas pelos alunos]. *Quando você diz variação...* [guiar/apoiar – conduz o pensamento do aluno]

[6] Lucas: *É tipo a temperatura, porque o daqui deu 13, aí daqui já deu 8 e aqui já deu menos.*

[7] Daniela: *Eu acho que tem alguma relação, sei lá, com a temperatura do ambiente, tipo 26, então pode ser que a variação seja menor conforme vai chegando mais perto do 26.*

[8] Professor: *Que seria, o 26 que você está falando seria a temperatura ambiente.* [guiar/apoiar – conduz o pensamento do aluno]

[9] Daniela: *Eu já fiz um exercício parecido com isso daí, tipo, se t, se o tempo né, tender ao infinito, a temperatura do líquido vai ser igual a temperatura ambiente.*

[10] Professor: *E você viu isso, você concordou com isso?* [desafiar – encoraja a avaliação]

[11] Daniela: *Sim.*

[12] Professor: *O que isso daqui indica? Esses dados que vocês estão botando aí, esses valores* [guiar/apoiar - focaliza o pensamento dos alunos para fatos importantes]

[13] Daniela: *Está se aproximando da temperatura ambiente, aí quanto mais esfria, mais devagar é esse processo.*

[14] Professor: *Mais esfria no sentido, a água de vocês é quente, né?* [guiar/apoiar – conduz o pensamento do aluno]

[15] Daniela: *Sim.*

Lucas (em [3]) e Daniela (em [4]) perceberam que a variação da temperatura estava decrescendo ao longo do tempo. O professor guia/apoia o raciocínio dos alunos (em [5]) em relação a variação da temperatura, o que permitiu que eles elaborassem conjecturas a respeito disso. Daniela (em [7]) diz que deve ter alguma relação com a temperatura ambiente, então

pode ser que a variação seja menor conforme vai chegando mais perto do 26° C (temperatura ambiente). O professor a guia/apoia (em [12]) para pensar sobre os dados apresentados e, então, Daniela justifica (em [13]) sua resposta dizendo que está se aproximando da temperatura ambiente e que quanto mais esfria, mais devagar é esse processo.

[16] Daniela: *Tipo assim, vai ter a temperatura ambiente, a temperatura ambiente é a solução de equilíbrio ou não?*

[17] Professor: *O que é a solução de equilíbrio aí?* [guiar/apoiar – incentiva a explicação]

[18] Daniela: *Eu não lembro a definição, eu só lembro que sabe aquelas curvas integrais, ela servia pra definição da solução de equilíbrio. Na teoria ele desce mais rápido, ele vai diminuindo quando está chegando mais perto da temperatura ambiente né? Até encontrar a solução.*

[19] Professor: *Aí você fala que a temperatura ela vai variando menos, é isso né?* [guiar/apoiar – encoraja os alunos a redizerem suas respostas]

[20] Daniela: (inaudível)

[21] Professor: *Aí ela diminui infinitamente?* [guiar/apoiar – conduz o pensamento do aluno]

[22] Daniela: *Até chegar na temperatura ambiente que ela estabiliza. A primeira desceu 13, a segunda 9, a outra 7, 5 e agora desceu acho que 4.*

Daniela comenta (em [16]), sobre a solução de equilíbrio. O professor, então, aproveita a oportunidade e apoia (em [17]) a aluna a explicar o conceito de solução de equilíbrio nesse contexto, e (em [18]) Daniela compartilha suas reflexões sobre isso.

O professor guia/apoia (em [19]) os alunos a redizerem suas observações sobre o decrescimento da variação da temperatura. Em [21], ele guia/apoia a aluna questionando-a se esse decrescimento será infinito. Dessa forma, Daniela [22] traz as informações novamente sobre as diferenças entre as temperaturas e menciona que esse decrescimento vai ocorrer até chegar na temperatura ambiente, momento em que a temperatura se estabilizará.

No trecho a seguir, o professor desafia [23] os alunos a pensarem nos dados por meio de um gráfico.

[23] Professor: *Você fez um modelo aí, mas no formato de gráfico, como seria isso?* [desafiar – encoraja a reflexão]

[24] Daniela: *Na descida eu comecei descer mais rápido, desce 13, aí depois desce 9, 7, 5, 4 desce assim pra chegar no gráfico.*

[25] Professor: *No gráfico do quê?* [guiar/apoiar – incentiva a explicação]

[26] Daniela: *Exponencial.*

[27] Professor: *Aqui, o que você acha?* [desafiar – encoraja a reflexão]

[28] Daniela: *Eu acho que não vai ser tão (inaudível) igual uma exponencial.*

[29] Mário: *Não acho que vai ser necessariamente uma exponencial, mas é parecido com o exponencial.*

[30] Daniela: *Acho que é a noção de equilíbrio.*

[31] Mário: *É que na verdade, ele desce mais rápido, depois ele desce 13, aí depois desce 7, aí depois desce 5 enquanto ele vai naqueles 10 minutos. O gráfico que eu falo aqui, o gráfico que eu tô falando aqui é temperatura por ... aqui passou dez minutos, desceu tudo isso aí. Mais 10 minutos desceu um pouquinho menos, entendeu?*

Ao observar a folha de respostas dos alunos, o professor percebeu que a Daniela elaborou um “esboço” geométrico com os dados. Com isso, ele desafia [23] a aluna a pensar como tal “esboço” pode ser representado por meio de um gráfico. Daniela [24] explica como fez esse esboço e como ela pode chegar em um gráfico. O professor aproveita a oportunidade para guiar/apoiar [25] Daniela a pensar em qual gráfico os dados representam, isso permitiu que ela elaborasse uma conjectura [26], dizendo que se trata de um gráfico exponencial. Mais adiante, o professor desafia [27] os alunos a pensarem se esta resposta está correta e Daniela [28], [30] junto com Mário [29], [31], elaboram argumentos para justificar as suas respostas.

Neste momento o professor circula entre os demais grupos, enquanto isso o Grupo 1 não se envolve em debates sobre a tarefa, mas, eles continuam coletando as medições da temperatura. Após um período, o professor retorna ao Grupo 1.

- [32] Daniela: *Vai ter mais professor?* (referindo-se à medição da temperatura da água)
 [33] Professor: *A gente vai fazer mais, porque vocês acham que a gente precisa fazer mais? Ou que precisaria fazer mais?* [desafiar – encoraja a reflexão]
 [34] Mário: *Pra chegar na temperatura ambiente.*
 [35] Lucas: *É mais perto da temperatura ambiente que deu 26, aí que vai dar, acho que uns 30 e...*
 [36] Mário: *É que agora pra chegar na temperatura ambiente vai demorar.*
 [37] Lucas: *Vai dar uns 33, 34.*
 [38] Mário: *Não, uns 36 eu acho.*
 [39] Daniela: *Cada vez vai ser bem menos, desceu uns 40 em 50 minutos, mas... cada vez, essa daí desceu menos de 2 graus, eu acho que foi 2 ponto alguma coisa, 2 ponto 2, algo do tipo? Então ele vai continuar diminuindo, então até diminuir mais 10 graus vai demorar.*
 [40] Professor: *Então quer dizer, se a gente for ficar coletando informações até a temperatura ambiente, a gente fica aqui um tempão?* [guiar/apoiar – focaliza o pensamento dos alunos para fatos importantes]

Daniela [32], pergunta para o professor se haverá mais coletas de dados. Neste momento, o professor decide desafiar [33] os alunos a refletirem se é realmente necessário prosseguir com a coleta de dados. Mario [34], menciona que a coleta deve continuar até atingir a temperatura ambiente, porém, logo em seguida [36] aponta que isso tomará bastante tempo. Tanto Lucas quanto Daniela concordam com a afirmação de Mario sobre a longa duração do processo. O professor, então, guia [40] os alunos focalizando para fatos importante, destacando

que se optarem por continuar coletando dados até chegar na temperatura ambiente, o processo será demorado e que eles não dispõem de todo esse tempo.

- [41] Mário: *Tipo assim, temperatura eixo* (inaudível). *Isso, temperatura eixo y e tempo eixo x, vai ficar uma assíntota, eu acho, tipo uma raiz de 3? Raiz ao cubo?*
- [42] Lucas: *Eu acho que é o contrário né? Não é o tempo.*
- [43] Professor: *A água de vocês é?* [guiar/apoiar – focaliza o pensamento do aluno para fatos importantes]
- [44] Daniela: *A quente.*
- [45] Lucas: *E a temperatura? Então tipo, com o passar do tempo... a temperatura.*
- [46] Mário: *É vai ser a mesma coisa, assim né, pra cima.*
- [47] Daniela: *Começa em cima e vai...*
- [48] Lucas: *Eu acho que é tempo por temperatura, não é? Ou não, temperatura por tempo... É temperatura por tempo.*
- [49] Mário: *Vai criar uma assíntota né, que fala?*
- [50] Daniela: *É, tendendo até o infinito.*
- [51] Mário: *É, não sei se é no eixo x ou no y.*
- [52] Daniela: *Espera aí, esse aqui é qual eixo? Eixo y?*
- [53] Mário: *É eixo y.*
- [54] Daniela: *Ah, então y é igual a* (inaudível).
- [55] Mário: *É a temperatura ambiente.*
- [56] Professor: *Beleza,* [informar/sugerir – valida respostas corretas fornecidas pelos alunos] *matematicamente o que a assíntota representa?* [desafiar – encoraja a reflexão]
- [57] Lucas: *É tipo uma...*
- [58] Mário: *A gente pode pensar em termos de limite.*
- [59] Professor: *Mas, por que você chamou de assíntota? Por que você está enxergando uma assíntota?* [desafiar – encoraja a reflexão]
- [60] Daniela: *Porque ela vai diminuindo cada vez mais, vai ficando constante.*
- [61] Professor: *Vai diminuindo e aí no infinito o que isso vai acontecer?* [guiar/apoiar – incentiva a explicação]
- [62] Lucas: *Vai ficar na temperatura ambiente.*
- [63] Professor: *Vai se aproximar ali.* [informar/sugerir – valida respostas corretas fornecidas pelos alunos]
- [64] Mário: *É se fosse ideal, a temperatura da sala não tivesse mudando também, eu acho que a temperatura do copo, quer dizer da água, iria equilibrar com a do ambiente, então não ia passar, não ia descer de 26.*
- [65] Professor: *Certo,* [informar/sugerir – valida respostas corretas fornecidas pelos alunos] *então se a gente deixar o copo aqui eternamente, a temperatura do copo não iria ultrapassar a temperatura do ambiente. Matematicamente, então, no infinito, essa curva vai se aproximar, mas não vai chegar a uma reta horizontal* (assíntota horizontal), *que no caso é a temperatura ambiente.* [informar/sugerir - fornece informações e explicações]

No fragmento anterior, os alunos iniciam a construção do gráfico organizando os dados nos eixos correspondentes. No início, surge certa confusão sobre qual eixo representa a temperatura e qual seria o tempo, mas logo chegam a uma conclusão. Mário [49] elabora uma conjectura dizendo que o gráfico será representado por uma assíntota, com isso o professor

aproveita a oportunidade para desafiar [56], [59] os alunos a justificarem por que acham que se trata de uma assíntota e qual é o seu significado matemático. Mario [58] sugere pensar em termos de limite e Daniela [60] destaca que “ela vai diminuindo cada vez mais, vai ficando constante”. A afirmação de Daniela evidencia uma sua percepção sobre o comportamento assintótico dos dados, no entanto, a afirmação “vai ficando constante” não é precisa do ponto de vista matemático. De acordo com Leithold (1994, p. 94), “A reta $y = b$ é denominada uma **assíntota horizontal** do gráfico da função f se pelo menos uma das seguintes afirmações for válida: (i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ e para um número N , se $x > N$, então $f(x) \neq b$; (ii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$ e para um número N , se $x < N$, então $f(x) \neq b$ ”.

O professor guia/apoia [61] os alunos a explicarem o que acontece quando a temperatura vai diminuindo quando t tende a infinito. Então, Lucas [62] explica que a temperatura do líquido se iguala à temperatura ambiente. Mário concorda com essa afirmação e destaca que, após o período de coletas, a temperatura ambiente não será, necessariamente, 26° C, pois não há garantias de que a temperatura do ambiente permanecerá estável devido a fatores externos (como janelas abertas, portas abertas, ausência de ar-condicionado, entre outros). No entanto, ele destaca que, em um ambiente ideal, onde a temperatura se mantém constante, a temperatura do líquido vai se igualar a temperatura do ambiente inicial.

Em [65], o professor valida a resposta do estudante e fornece explicações sobre o fato de que, matematicamente, a ideia de assíntota (horizontal) mencionada pelos alunos indicaria que, quando t tende a infinito, a temperatura da água se aproximaria da temperatura ambiente, mas não se igualaria a ela, ações previstas na categoria informar/sugerir. Tal fato seria um dos pontos a serem discutidos na análise do modelo matemático a ser realizada no terceiro dia, uma vez que, na realidade, a temperatura da água se igualaria à temperatura ambiente. Deste modo, os alunos têm a possibilidade de encontrar um modelo matemático para fazer uma generalização, evitando assim a necessidade de coletar os dados até atingir a temperatura ambiente.

Logo em seguida, um aluno de outro grupo se aproximou para tirar dúvidas e o professor se deslocou até o seu grupo para ajudá-los. Em seguida, o professor caminhou entre os outros grupos antes de finalizar a atividade. Ao concluir esse primeiro dia de pesquisa, ele comunicou aos alunos que na próxima aula (segundo dia) a discussão seria retomada.

No segundo dia, o professor distribuiu as folhas aos grupos contendo os dados coletados na aula anterior. Em seguida, fornece informações e explicações para que os alunos possam dar continuidade à tarefa.

[66] Professor: *Aí, eu vou entregar essa folha...uma folha por grupo, além de vocês colocarem o nome, eu quero que vocês registrem aqui as discussões, as respostas de vocês em uma folha só, uma por grupo. Tudo bem? [...]* Para esse segundo momento, a partir das medições que vocês fizeram na semana passada, o objetivo é chegar ao modelo matemático para descrever essa situação que vocês coletaram os dados. Pra gente ter uma discussão conjunta, eu selecionei apenas dois conjuntos de dados, um de água fria e um de água quente, pra todo mundo discutir a mesma situação. Depois de discutir essa situação, depois de chegado no modelo eu vou devolver para vocês as medições que vocês fizeram, tá? Então esses dados aqui que eu vou compartilhar nessa folha são dados que um grupo, eu não lembro qual, coletou a partir de água gelada e um outro a partir de água quente, tudo bem? [convidar]

Após a distribuição das atividades e a organização dos alunos em grupos, o professor fornece novamente algumas informações e explicações aos alunos.

[67] Professor: *Então, a ideia é vocês analisarem esse conjunto de dados, criar um modelo para essa situação que permita chegar a uma expressão pra gente encontrar a temperatura em qualquer instante. Para fazer isso, a gente vai usar informações que vocês também perceberam na semana passada. Primeiro vamos analisar a partir desses dados. O que esses dados estão dizendo? Então, a partir disso, dessas observações, a gente vai criar um modelo, tá?* [convidar].

Em seguida, o professor começa a circular entre os grupos na sala de aula, oferecendo suporte e orientação aos alunos durante o desenvolvimento da tarefa. Em determinado momento, ele se aproxima do Grupo 1 e se inicia o seguinte diálogo:

[68] Professor: *O que vocês estão fazendo? Só por...* [convidar – solicita relatos de como os alunos fizeram]

[69] Lucas: *A gente vai colocar, colocar o gráfico.*

[70] Mário: *É, vai fazer um gráfico do tempo e da temperatura, por enquanto.*

[71] Lucas: *Isso, só pra analisar a reta.*

[72] Professor: *E daí vocês vão pegar essas informações aí, essas daí e vão colocar no gráfico. O que vai no eixo horizontal?* [guiar/apoiar – incentiva a explicação]

[73] Lucas: *Eu estava pensando em colocar o tempo.*

[74] Professor: *Por quê?* [desafiar – solicita que os alunos apresentem razões justificativas]

[75] Mário: *Porque é padrão.*

[76] Lucas: *Geralmente tudo é tempo né (risos).*

[77] Professor: *É comum a gente colocar no eixo horizontal o que? Qual das variáveis?* [guiar/apoiar – focaliza o pensamento do aluno para fatos importantes]

[78] Mário: *A Independente.*

[79] Professor: *Independente* [informar/sugerir – valida respostas corretas fornecidas pelos alunos], *então nesse caso a gente pode pensar que a temperatura.* [guiar/apoiar – conduz o pensamento do aluno]

[80] Lucas: *Depende do tempo.*

[81] Professor: *Ela varia.* [informar/sugerir – valida respostas corretas fornecidas pelos alunos]. *Aí na hora que vocês colocarem esses pontos aqui, vocês me chamam que eu quero voltar pra gente ver junto o que vai acontecer. Eu vou trazer um computador para vocês depois analisarem pelo GeoGebra, tá?* [informar/sugerir – incentiva e fornece múltiplas estratégias de resolução].

[82] Lucas: *Ah beleza, vamos ver como a gente vai colocar.*

Pelo trecho, é possível notar que o professor executa diversas vezes ações previstas na categoria guiar/apoiar. Os alunos vão construir um gráfico com base nos dados fornecidos pelo professor, com o intuito de analisar o comportamento da “reta” [69], [70] e [71]. O professor, aproveita a oportunidade e guia/apoia [72] os alunos a explicarem qual informação deve ser representada no eixo horizontal. Nesse momento, Lucas [73] sugere que seja a variável tempo e, então, o professor o guia/apoia [74] para que ele explique sua resposta. Mário [75], então, comenta que isso é padrão. O professor aproveita a fala de Mário e guia/apoia [77] os alunos para um fato importante, questionando sobre qual variável é geralmente representada no eixo horizontal, e então, Mário [78] responde que é a variável independente. Dessa forma, o professor conduz [79] o raciocínio dos alunos até que Lucas [80] conclui que a temperatura depende do tempo, ação da categoria guiar/apoiar.

Durante essa discussão, ficou evidente que os alunos compreenderam que o tempo é a variável independente, representada no eixo horizontal, e que a temperatura é a variável dependente, descrita no eixo vertical. Para finalizar essa discussão, o professor observa que os alunos estão organizando os dados no papel e os informa/sugere [81] a reproduzir procedimento e analisar os dados com auxílio do software *GeoGebra*.

Embora essa ação incentive os alunos a fornecerem múltiplas estratégias de resolução, o professor direciona-os a deixar de lado a análise feita com lápis e papel, sugerindo que podem usar um *software* específico: o *GeoGebra*. Ele poderia ter aproveitado a oportunidade para desafiar os alunos com a seguinte proposta: “E se vocês tentassem complementar essa análise que fizeram com lápis e papel utilizando um recurso tecnológico, como um *software*? Que tal tentarem fazer isso? Se precisarem, posso trazer um computador para que possam explorar essa ideia”. Assim, os alunos teriam a oportunidade de sugerir outros softwares, como o *Python*, por exemplo.

Logo após, o professor se encaminha para um outro grupo e os alunos seguem com a tarefa.

[83] Talita: *61. 0 – 74,6°; 09 – 61°; 19 – 53,8°; 29 – 48,1°; 40 – 43,6°, 50 – 40,2°* (referindo-se aos dados sobre a temperatura da água quente em cada intervalo de tempo)

[84] Lucas: *Eu acho que tem uma opção no GeoGebra, que liga certo também, eu acho. Daí a gente vai fazer ela pra fria também né?*

- [85] Talita: *60 – 38,1° e 71 – 36,3°.*
 [86] Daniela: *Vocês estão refazendo a tabela?*
 [87] Talita: *Estamos fazendo a tabela para colocar no GeoGebra.*
 [88] Daniela: *Mas vocês estão fazendo de água gelada ou de água quente?*
 [89] Mário: *Esse é quente.*
 [90] Talita: *Que é o nosso. Aqui ó, é esse modelo matemático que a gente vai usar.*
 [91] Lucas: *Dá pra colocar tipo as cores, a gente coloca tipo o verde, tipo quente vermelho e o verde frio.*

Os alunos estão organizando os dados em uma tabela do *Excel*, revisando cuidadosamente as informações. Após a inserção dos dados, Lucas [91] sugeriu realizar ajustes na cor para distinguir entre os dados da água fria e quente. Inicialmente eles começaram com os dados referentes à água quente [89].

Depois de um tempo, Mário [92] apresentou à turma o resultado do gráfico:

- [92] Mário: *Olha gente, o gráfico ficou assim.*
 [93] Lucas: *Nossa, que legal. Vamos chamar o professor?*
 [94] Mário: *Eu não sei ligar os pontos.*
 [95] Lucas: *Eu acho que tem ferramentas né? Aqui, ó, intersecção, otimização, raízes.*
 [96] Mário: *Reta de regressão.*
 [97] Daniela: *Eu acho que é isso, reta de regressão.*
 [98] Mário: *Reta de regressão?*
 [99] Daniela: *Não tem como selecionar o menu?*
 [100] Mário: *Não dá pra clicar e puxar ao mesmo tempo.*
 [101] Daniela: *Dá sim, tenta com as duas mãos, com os dois dedos.*
 [102] Mário: *É, foi uma reta, não foi uma curva*
 [103] Lucas: *Será que não tem curva aí? Porque aqui tá reto, tem curva? Aqui embaixo, acho que tinha, não tinha?*

Nesse momento, os alunos estão procurando no *Excel* a opção que realiza o ajuste de curva mais preciso para os dados coletados. Vale destacar que Mário [102] está usando os termos “reta” e “curva” no senso comum, deixando de considerar que “*toda reta é uma curva de curvatura nula*” (Henriques e Almouloud, 2016, p. 475, destaque dos autores).

Como não obtiveram sucesso, optaram por solicitar auxílio ao professor, que se juntou ao grupo e os convidou [104] a relatarem os passos realizados:

- [104] Professor: *O que vocês estão pensando? E aí? O que vocês chegaram?* [convidar – solicita relatos de como os alunos fizeram]
 [105] Mário: *A gente está tentando ligar os pontos.*
 [106] Daniela: *Fazer uma função.*
 [107] Professor: *Tá. Vocês jogaram os pontos das duas, das duas colunas de dados.* [guiar/apoiar – conduz o pensamento dos alunos]
 [108] Lucas: *O vermelho é o quente e o frio é o...*
 [109] Mário: *azul.*

- [110] Professor: *E o que vocês analisaram em relação a esse comportamento?* [guiar/apoiar – incentiva a explicação]
- [111] Lucas: *Que eles estão tendendo para a temperatura ambiente.*
- [112] Professor: *E de que modo que eles estão tendendo? Qual que é o comportamento desses pontos aí?* [guiar/apoiar – incentiva a explicação]
- [113] Lucas: *Parece uma metade de parábola.*
- [114] Professor: *Vocês acham que é uma parábola? Pedaco de uma parábola? Qual que é a questão?* [desafiar – encoraja a reflexão]
- [115] Daniela: *É uma parte de uma parábola.*
- [116] Mário: *É.*
- [117] Professor: *Isso, [informar/sugerir – valida respostas corretas fornecidas pelos alunos] e por quê?* [desafiar – solicita que os alunos apresentem razões (justificativas)]
Se for uma parábola, eu imagino que vocês estão dizendo uma parábola porque ele tá vindo aqui, uma parábola ela tem alguma característica, né? Que é em algum momento estamos com concavidade pra cima ou concavidade para baixo, então, no azulzinho, em algum momento isso vai começar a baixar. Faz sentido isso? Em algum momento essa temperatura... [informar/sugerir – fornece informações e explicações]
- [118] Lucas: *Eu acho que...*
- [119] Daniela: *Não.*
- [120] Lucas: *Eu acho que não vai baixar, por exemplo essa daqui, né? A quente. Ela não vai começar a esquentar depois, então eu acho que não tem como ser uma parábola, nem...*
- [121] Mário: *Então, mas eu imagino que a curva ali vai estar pra cá, né? Tipo aqui, ou aqui? Tá virada pro...*
- [122] Professor: *Mas aí como que seria? Como que essa parábola viria daqui?* [guiar/apoiar – incentiva a explicação]
- [123] Mário: *Seria aqui.*
- [124] Professor: *Onde que tá o vértice dessa parábola?* [guiar/apoiar – focaliza o pensamento do aluno para fatos importantes]
- [125] Mário: *Seria por aqui, ó.*
- [126] Professor: *Mas ela seria assim?* [guiar/apoiar – conduz o pensamento do aluno]
- [127] Mário: *É.*
- [128] Professor: *Então ela não seria uma função daí, né? Ela estaria na horizontal, ela estaria deitada, não seria uma função, se a gente faz o teste da reta vertical* [informar/sugerir – fornece informações e explicações]
- [129] Mário: *Isso, verdade.*
- [130] Professor: *Pensa aí, pensa aí.* [desafiar – encoraja a reflexão]
- [131] Daniela: *É difícil pra chegar no ponto.*
- [132] Mário: *Pra chegar no ponto eu acho que não dá, acho que pode chegar perto.*

Mário [105] inicia sua fala ao professor dizendo que eles estão tentando ligar os pontos representados no *Excel*, em seguida, Daniela [106] complementa informando que estão tentando criar uma função.

O professor guia/apoia [107] os alunos, conduzindo seus raciocínios em relação aos dados projetados. Em seguida, guia/apoia [110] novamente, desta vez, buscando incentivar a análise do comportamento dos dados. Lucas [111] aponta que os dados estão se aproximando

da temperatura ambiente, e o professor o guia o raciocínio dos alunos [112] em relação ao comportamento dos pontos no gráfico, com isso eles puderam formular conjecturas. Lucas [113] menciona que se assemelha a uma metade de parábola, e Daniela e Mário [115, 116] concordam com essa ideia. Aproveitando a oportunidade, o professor desafia [117] os alunos a refletirem sobre as características de uma parábola, uma vez que o gráfico crescente passaria a decrescer (parábola com concavidade para baixo), indicando que a água fria (chamada pelo professor de “azulzinho”) que estava esquentando passaria a esfriar em algum momento.

Daniela e Lucas [119, 120] refutam essa ideia, mas Mário [121] explica ao professor que essa parábola estaria “virada”. Mário [125] chega até a formular uma conjectura sobre a posição do vértice, mas o professor guia/apoia [126] e informa/sugere [128] aos alunos a pensarem sobre essa posição, pois, se considerarmos o raciocínio de Mário, a parábola teria seu eixo de simetria na horizontal, mas, de acordo com o teste da reta vertical, isso não representaria uma função da temperatura em relação ao tempo, uma vez que os alunos estavam considerando a variável dependente temperatura no eixo vertical e a variável independente tempo no eixo horizontal.

Por um lado, a fala [128] do professor leva Mário [129] a refletir sobre sua conjectura inicial, ação da categoria guiar/apoiar. Por outro lado, a fala do professor fornece um caminho a seguir, reduzindo a demanda cognitiva da tarefa. O professor problematiza se o gráfico sugerido pelos alunos seria gráfico de uma função, mas o próprio professor indica uma resposta, sugerindo o teste da reta vertical. Mesmo com um caminho sugerido pelo professor, os alunos poderiam, por exemplo, conjecturar que se tratava de uma função do tipo $f(x) = \sqrt{x}$, o que não aconteceu. O professor se encaminhou para outro grupo, mas, antes, desafiou [130] os alunos a continuarem refletindo sobre o assunto.

Os alunos começaram a testar algumas funções para verificar se se ajustavam bem aos dados. Eles até encontraram uma função que se ajustava bem, porém um ponto ainda permanecia excluído. Após muitos testes e discussões, o professor se aproxima do grupo e apoia [133] os alunos a explicarem como está o andamento das discussões.

[133] Professor: *Como é que, o que vocês chegaram aqui?* [guiar/apoiar – incentiva a explicação]

[134] Lucas: *Aí professor tá difícil.*

[135] Professor: *Tá difícil? Ó, o que vocês pensaram então? Alguma coisa vocês já pensaram?* [guiar/apoiar – incentiva a explicação]

[136] Daniela: *É, a gente está tentando algumas equações, vê se parece a função inicial*

[137] Professor: *Isso, mas vamos caminhar então pra... Uma ideia é eu tentar imaginar uma equação, que vocês podem fazer, mas vamos tentar imaginar uma equação*

diferencial. Ó, o que vocês percebem aqui com relação à variação da temperatura?

[guiar/apoiar – conduz o pensamento do aluno]

[138] Lucas: *Que ela vai diminuindo.*

[139] Professor: *A variação vai diminuindo, conforme o tempo passa. Então, pode falar.*

[guiar/apoiar – conduz o pensamento do aluno]

[140] Lucas: *Ah, não, eu tinha comentado sobre o tempo ser inverso a variação. Porque quanto mais o tempo passa, menor a variação, a gente estava pensando em alguma coisa assim.*

[141] Talita: *Eu acho que quanto mais o tempo está próximo do...*

[142] Professor: *Então... essa é uma questão interessante porque tem alguma relação de proporcionalidade. A variação da temperatura ela tá ocorrendo... proporcional a...*

[informar/sugerir – fornece informações e explicações]

[143] Lucas: *Ao tempo.*

[144] Professor: *Na verdade, proporcional* [informar/sugerir – corrige respostas incorretas fornecidas pelos alunos]. *É que conforme o tempo passa, a dife...*

[guiar/apoiar – focaliza o pensamento dos alunos para fatos importantes]

[145] Daniela: *A diferença, ela é proporcional ao quão próximo ela está da temperatura ambiente.*

[146] Professor: *Exato,* [informar/sugerir – valida respostas corretas fornecidas pelos alunos] *o que que é isso? Você estava falando, né? A diferença... O que seria? A diferença do quê? É isso que você falou... Ela é proporcional... Ó, ó, a variação da temperatura, ela está acontecendo de uma maneira diferente, de um ponto para outro, né? Quanto mais próximo do T igual a zero, no início quando a gente começou a medir, a temperatura ambiente e a temperatura do líquido tinham uma diferença grande. Aí, para o segundo momento, a variação foi uma variação grande. Mas, conforme o tempo foi passando, essa variação foi diminuindo, junto com a diferença entre a temperatura (da água) e a temperatura ambiente.* [informar/sugerir – fornece informações e explicações] *O que que isso significa? Isso que eu acabei de falar, como eu expressei isso numa equação?* [desafiar – pressiona para a generalização]

[147] Daniela: *Vamos falar que a taxa de temperatura perdida é a linha (a'). A linha é igual a vezes tempo e temperatura, não sei.*

[148] Professor: *O que é a ?* [guiar/apoiar – focaliza o pensamento dos alunos para fatos importantes]

[149] Daniela: *O a vai ser... a temperatura no momento?*

[150] Professor: *Ó, pensem sobre isso aqui, a variação, quando eu falo variação, taxa de variação, o que eu quero dizer com taxa de variação? Derivada. Essa variação aí, ela está acontecendo numa relação que eu consigo perceber proporcional a essa diferença, entre a temperatura do líquido e a temperatura do ambiente. Porque quanto maior, olha no gráfico, quanto maior a diferença entre a temperatura do líquido e a temperatura do ambiente, maior a variação com o passar do tempo. Então a taxa de variação ela está sendo proporcional a essa diferença entre a temperatura e a temperatura do ambiente.* [informar/sugerir – fornece informações e explicações]

Os alunos relatam que estão enfrentando dificuldades para encontrar o modelo matemático, o professor guia/ apoia [135, 137, 139 e 144] e fornece informações e explicações [142] para os alunos repensarem sobre a variação da temperatura, porém agora com foco na proporcionalidade. Em [137], por mais que o professor conduza o pensamento do aluno, ele

acaba os direcionando ao dizer que a equação que eles devem imaginar é uma equação diferencial. Em dado momento, Daniela [145] comenta que a diferença é proporcional à proximidade da temperatura ambiente. Em [146] enquanto o professor valida a resposta da Daniela, ele faz questionamentos importantes: “*A diferença... O que seria? A diferença do quê?*” mas acaba por responder os seus próprios questionamentos, isso impede que os alunos tenham a oportunidade de demonstrar seus conhecimentos, contudo, ao final, ele propõe um desafio aos alunos para que reflitam sobre a variação da temperatura em um modelo matemático, visando uma possível generalização.

Em [150], o professor dá início à discussão perguntando aos seus alunos: “*o que eu quero dizer com taxa de variação?*”, este questionamento pode ser visto como uma ação de desafiar (encoraja a reflexão), mas, novamente, ele se antecipa e explica que o conceito da taxa de variação está relacionado com a derivada e a relação de proporcionalidade que há entre a diferença da temperatura do líquido com a temperatura ambiente, resultando assim em uma ação de informar/sugerir. Logo em seguida o professor se encaminha para outro grupo e os alunos começam a discutir qual seria o modelo matemático que representa esses dados.

Próximo ao término da aula, o grupo 1 chama o professor.

[151] Professor: *Quem que me chamou? Foi esse grupo aqui?*

[152] Daniela: *Foi, professor, a gente pensou, o “a” linha (A') de t é igual ao A de t menos a temperatura ambiente vezes alguma coisa.*

[153] Professor: *Certo* [informar/sugerir – valida respostas corretas fornecidas pelos alunos]

[154] Daniela: *Uma constante.*

[155] Professor: *Isso.* [informar/sugerir – valida respostas corretas fornecidas pelos alunos]

[156] Daniela: *Alguma coisa ou uma função de alguma coisa, que a gente não sabe. Aí gente pensou em pegar e colocar ela e fazer substituir os valores e isolar o k de alguma coisa ali e tentar fazer...*

[157] Professor: *E achar esse valor do k* [guiar/apoiar – conduz o pensamento do aluno]

[158] Daniela: *É mais ou menos assim, uma função ou alguma coisa.*

[159] Professor: *Mas aí como é que você achou esses A linha? O que é A linha?* [guiar/apoiar – incentiva a explicação]

[160] Lucas: *É a temperatura no tempo x .*

[161] Professor: *Não, é a variação.* [informar/sugerir – corrige respostas incorretas fornecidas pelos alunos]. *Então A linha, na verdade, é a derivada dessa função, que você não conhece ainda, né? Que na verdade, então, seria, pela definição, seria aquele limite quando você pega o intervalo tendendo a zero, né? O h tendendo a zero, lembra? Definição de derivada* [informar/sugerir – fornece informações e explicações]

[162] Lucas: *É, a gente estava procurando agora.*

Daniela [152 e 154] após uma discussão com o seu grupo apresenta ao professor a sua conjectura, que resulta em um modelo matemático expresso por: $A'(t) = (A(t) - 26,4)$ vezes k

alguma coisa. No entanto, ela ainda tem dúvidas em relação ao que acompanha o k , pois não consegue definir se é uma função ou uma constante [156]. Assim, ela sugere [158] substituir os valores para isolar o k e chegar a uma solução. O professor, então, apoia [159] os alunos a explicarem o significado de A linha. Lucas [160] responde que “é a temperatura no tempo x ”, em [161] ao mesmo tempo em que o professor corrige uma resposta incorreta fornecida pelo aluno ele informa através de explicações que esse A' indica a derivada.

[163] Professor: *Isso. Então, vamos pensar o seguinte, sem precisar jogar esses pontos, porque o A linha a gente não conhece a função A ainda, a gente quer descobrir. Vamos nessa linha de raciocínio aqui que você estava pensando. A linha A, o que é a função A aí? É a temperatura que você está chamando? Vocês chamaram de A?* [guiar/apoiar – conduz o pensamento do aluno]

[164] Daniela: *Isso, temperatura em dado momento*

[165] Professor: *Então a taxa de variação, vamos seguir a linha de raciocínio aí que é esse k que você está multiplicando. A gente percebe que quando a diferença entre a temperatura do líquido e a temperatura ambiente é grande, a taxa de variação também é grande. Então quanto maior for essa diferença entre a temperatura do ambiente e a temperatura do líquido, maior a taxa de variação. Quando menor for essa diferença, menor a taxa de variação. Então existe uma relação... vai, acho que teve um insight ali* [informar/sugerir – fornece informações e explicações]

[166] Talita: *Não, não, foi um (inaudível) mesmo.*

[167] Professor: *Anota matematicamente.* [desafiar – pressiona para a generalização]

[168] Daniela: *Mas não segue uma ideia linear?*

[169] Professor: *Não, se fosse linear, essa variação seria constante.* [informar/sugerir – corrige respostas incorretas fornecidas pelos alunos]

[170] Daniela: *Ah, é verdade.*

[171] Professor: *E aí essa variação não é constante. Mas essa variação ela é proporcional a essa diferença.* [informar/sugerir – fornece informações e explicações]

[172] Mário: *Então é tudo isso multiplicado por 1 sobre alguma coisa.*

[173] Professor: *Multiplicado por um k . Se quanto maior a diferença, maior a taxa de variação, quanto menor a diferença, menor a taxa de variação, existe uma relação de proporcionalidade. Quanto maior um maior o outro, então a taxa de variação é proporcional a essa diferença de temperatura. O que é essa ideia de proporção, então? É a ideia de um k que está multiplicando essa diferença, então isso que você está falando aqui, que você não chegou a esse valor, seria uma constante de proporcionalidade multiplicando essa diferença.* [informar/sugerir – fornece informações e explicações]

[174] Mário: *Pra achar essa constante daí.*

[175] Professor: *A gente vai achar depois, a gente vai usar os dados.* [informar/sugerir – fornece informações e explicações]

[176] Daniela: *Que dados?*

[177] Professor: *Os dados obtidos aqui. Pra achar essa constante depois a gente vai achar a partir desses dados.* [informar/sugerir – fornece informações e explicações]

[178] Lucas: *Mas aqui até agora o raciocínio tá ok?*

[179] Professor: *Tá ok.* [informar/sugerir – valida respostas corretas fornecidas pelos alunos] *Só que monta essa equação considerando uma constante de proporcionalidade* [guiar/apoiar - conduz o pensamento do aluno]

[180] Daniela: *Tá, uma k , um k . Então, tipo, tipo vezes alguma coisa.*

- [181] Professor: *Exato, então aí você usa isso. Isso aqui é uma equação diferencial. Qual que é a função aí? A é a função de T. A linha é uma derivada, k é uma constante de proporcionalidade que eu não sei qual que é.* [informar/sugerir – valida respostas corretas fornecidas pelos alunos] *Resolvo essa EDO, como que eu resolvo essa EDO?* e [guiar/apoiar – encoraja os alunos a elaborarem suas respostas]
- [182] Daniela: *Método de separáveis?*
- [183] Professor: *Como?* [guiar/apoiar – encoraja os alunos a elaborarem suas respostas]
- [184] Daniela: *É, passa esse termo que tem o A de t pra cá, deixa k aqui integra em relação a t aqui.*
- [185] Professor: *Passa o “dt” daqui pra lá?* [apoiar - conduz o pensamento do aluno]
- [186] Daniela: *É, integra em relação a t aqui.*
- [187] Mário: *É um sobre A de t.*
- [188] Daniela: *Aí a constante vai dar um negócio meio.*
- [189] Professor: *Deixa a constante ali, depois a gente acha ela.* [informar/sugerir – fornece informações e explicações]
- [190] Mário: *Esse A linha de t é?*
- [191] Professor: *dA/dt* [informar/sugerir – fornece informações e explicações]
- [192] Daniela: *Daí a gente resolve a EDO?*
- [193] Professor: *Resolve isso, vai surgir uma constante de integração e vai ter esse K. Tudo bem, deixa as duas, encontrem uma função A, deixa essas duas constantes aí, depois a gente lida com elas* [guiar/apoiar – focaliza o pensamento dos alunos para fatos importantes]

O professor guia/apoia [163], informa/sugere [165, 169, 171 e 173] e desafia [167], até que os alunos entendam a ideia de proporção. Em [173], o professor poderia ter utilizado a ação de guiar/apoiar, conduzindo o pensamento do aluno, especialmente ao abordar: “O que é essa ideia de proporção, então?”. Porém, ele responde à própria pergunta, o que acaba levando à ação de informar/sugerir.

Ele informa/sugere [175] que o valor da constante será encontrado posteriormente com base nos dados obtidos e em [179] valida a resposta de Daniela e sugere que ela desenvolva uma equação considerando uma constante de proporcionalidade. para então resolver a EDO e guia/apoia [181] os alunos a elaborarem suas respostas de como poderiam resolver a EDO. Daniela então [182, 184 e 186] diz que é pelo método de separáveis e explica o passo a passo desse método. O professor finaliza guiando os alunos para fatos importantes, depois que eles integrarem vai surgir uma constante de integração e como já tem um k, é pra deixar as duas constantes pra trabalhar com elas posteriormente.

Depois o professor se encaminha para outro grupo e os começam a resolver a EDO utilizando o método de variação de separáveis. Ao concluir o segundo dia de pesquisa, o professor informou que a discussão seria retomada e concluída na próxima aula (terceiro dia).

O professor inicia o terceiro dia convidando cada grupo a comentar o modelo matemático elaborado na aula anterior.

[194] Professor: *Hoje a gente vai finalizar essa atividade. A ideia vai ser discutir modelos que alguns já chegaram, alguns chegaram próximo, né? Então a gente vai finalizar esse modelo e depois analisar esse modelo matemático. Analisar no sentido de que eu vou devolver para vocês a coleta de dados que os grupos fizeram no primeiro dia e a gente vai analisar isso, e nesse momento de análise o GeoGebra vai ajudar em alguns aspectos. Nesse primeiro momento eu gostaria de contar com a ajuda de vocês, quem se dispôr, a comentar pra todo mundo, pra toda a sala do seu modelo, como chegou no seu modelo e explicar brevemente sobre isso. Alguém se dispõe? Algum grupo? Uma pessoa do grupo?* [convidar]

A partir desse momento, os grupos começam a se manifestar. O primeiro grupo a se manifestar relatou que o modelo construído foi $\frac{dC}{dt} = k(26,4 - C)$, onde k é a constante de proporcionalidade e C a temperatura em função do tempo t . O Grupo 1 foi o segundo grupo a se manifestar.

[195] Lucas: *O nosso ficou parecido.*

[196] Professor: *Parecido?* [guiar/apoiar - Encoraja os alunos e redizerem suas respostas]

[197] Lucas: *É, a única coisa é que o nosso ficou a temperatura menos o 26,4.*

[198] Professor: *Tá, então, que letra que vocês usaram?* [convidar – solicita respostas para questões pontuais]

[199] Lucas: *A gente usou A.*

[200] Professor: *A. A é a temperatura, né?* [guiar/apoiar – incentiva a explicação]

[201] Lucas: *Aí ficou $\frac{dA}{dt}$ igual a A de t menos 26,4. Aí tudo isso vezes k.*

[202] Professor: *Tudo isso vezes k?* [guiar/apoiar – incentiva a explicação]

[203] Lucas: *Isso.*

[204] Professor: *Aqui, esse A de t, nesse caso aqui* [comparando com a resolução do grupo anterior] *seria C de t?* [guiar/apoiar – incentiva a explicação]

[205] Lucas: *É, a temperatura em função de t.*

O modelo construído pelo Grupo 1 foi $\frac{dA}{dt} = k(A(t) - 26,4)$. Para além do uso das letras C e A , o grupo percebe que há uma diferença nos modelos, como pode ser visto em [197]. O professor aguardou que os demais grupos apresentassem seus modelos para discutir com a turma toda sobre essa diferença.

[206] Professor: *O que muda nessas equações aí? Que diferença faz estar 26,4 menos T, ou C, ou A, e estar A menos 26,4? O que muda essa ordem estar trocada?* [desafiar – encoraja a reflexão]

[207] Alunos/Alunas: *O sinal de menos.*

[208] Professor: *O sinal de menos.* [informar/sugerir – valida respostas corretas fornecidas pelos alunos] *E isso interfere em alguma coisa na análise?* [desafiar – encoraja a avaliação]

[209] Alunos/Alunas: *Na constante.*

[210] Professor: *O que na constante?* [desafiar – encoraja a reflexão]

[211] Alunos/Alunas: *No sinal da constante.*

[212] Professor: *No sinal da constante* [informar/sugerir – valida respostas corretas fornecidas pelos alunos]. *Uma análise que a gente pode fazer a respeito desse sinal é: o que essa derivada, eu vi que muitos grupos fizeram no GeoGebra e jogaram os dados, pegaram os dados da planilha e jogaram pra ver o comportamento. O que essa derivada representa neste gráfico que vocês fizeram?* [desafiar – pressiona para a precisão]

[213] Alunos/Alunas: *A inclinação da reta tangente.*

No trecho acima, o professor desafia os alunos [206, 208, 210, 212] a refletirem a respeito da diferença entre escrever $\frac{dC}{dt} = k(26,4 - C)$ ou $\frac{dC}{dt} = k(C - 26,4)$, levando em consideração a interpretação geométrica da derivada como o coeficiente angular da reta tangente à curva em um dado ponto. Essa discussão se prolonga e o professor conduz a análise tanto para o caso da água gelada que, com o passar do tempo, vai aquecendo, como para o caso da água quente que vai esfriando. Passamos para outro momento em que o professor conversa especificamente com o Grupo 1 sobre a resolução da equação $\frac{dA}{dt} = -k(A(t) - 26,4)$. No trecho abaixo, o grupo está buscando encontrar o valor de k utilizando os valores de t e $A(t)$ dados nas Figuras 5 e 6.

[214] Professor: *Como é que vocês estão?* [convidar – solicita relatos de como fizeram]

[215] Lucas: *Professor, a gente...cada ponto vai passar diferente* [no gráfico]?

[216] Professor: *Por que que isso acontece?* [desafiar – a encoraja avaliação]

[217] Lucas: *É que a gente tentou fazer com o outro ponto, e deu quase a metade desse, professor, ficou muito estranho.*

[218] Professor: *Pra achar o valor do k ?* [guiar/apoiar – incentiva a explicação]

[219] Lucas: *É, ficou muito discrepante.*

[220] Professor: *Como assim? Vocês pegaram, primeiro...* [guiar/apoiar – incentiva a explicação]

[221] Lucas: *Isso, a gente fez com esse valor aqui de água quente, no tempo 9 deu 61 [61°C]. Aí deu esse k aqui. Só que a gente foi tentar fazer com outro valor, acho que nesse 19 [$t=19$] e 53,8 [53,8°C], deu metade desse quase.*

[222] Daniela: *Deu 0,17.*

[223] Lucas: *É, 0,17... menos 0,17*

[224] Professor: *Menos 0,17. Ahn, vocês estão sem computador, eu vou pegar meu computador ali e vou pegar o GeoGebra, porque eu acho que ele vai ajudar vocês a pensarem isso.* [informar/sugerir – incentiva e fornece múltiplas estratégias de resolução]

Pelo trecho, percebemos que os alunos estavam com dificuldades para definir qual o valor que k poderia assumir. Ao chegar ao grupo, o professor convida [214] os alunos a explicarem como estavam desenvolvendo a tarefa. Em seguida, para tentar compreender seus raciocínios, o professor os desafia [216] e os guia [218 e 220] e, por fim informa/sugere [224]

que o *GeoGebra* poderia auxiliá-los a pensarem sobre as dúvidas e isso permite que eles elaborem conjecturas a respeito da solução, como mostra a Figura 8.

Em um momento posterior, o professor retorna ao Grupo 1 para verificar se o *GeoGebra* tinha auxiliado no desenvolvimento da tarefa e no raciocínio dos estudantes. Como fica evidente no trecho a seguir, os alunos utilizaram o comando “controle deslizante” para dar continuidade na tentativa de definir um valor adequado para a constante de proporcionalidade k .

[225] Professor: *Como é que vocês fizeram isso aí?* [convidar – solicita relatos de como fizeram]

[226] Lucas: *A gente foi colocar a função* [no *GeoGebra*]. *Aí a gente foi testando os valores* [de k], *só que nenhum valor está dando próximo.*

[227] Professor: *Mas cadê o k aí?* [guiar/apoiar – incentiva a explicação]

[228] Daniela: *O k é o que está substituindo.*

[229] Lucas: *Ele dá pra mexer.* [referindo-se ao comando “controle deslizante” do *GeoGebra*]

[230] Professor: *Vocês não estão colocando a função errada, não?* [desafiar – encoraja a avaliação]

[231] Lucas: *É assim, não é, oh? $A(t)$ é igual a e elevado a menos kx , porque o t está no eixo x , mais 26,4. Tá certo, não tá?*

[232] Professor: *Qual é o valor de k que deu na conta de vocês?* [guiar/apoiar – incentiva a explicação]

[233] Lucas e Daniela: *Tem vários, várias possibilidades.*

[234] Professor: *Então, mas aí, então tem alguma coisa estranha. Como é que vocês acharam o valor de C* [constante]? [desafiar – encoraja avaliação]

[235] Lucas: *O que é C mesmo?*

[236] Professor: *Quando vocês integraram ali, não surgiu uma constante?* [desafiar – encoraja a avaliação]

[237] Lucas: *Não.*

[238] Professor: *Aqui está errado, quando vocês integram de cada lado, a integral disso surge uma constante C .* [informar/sugerir – corrige respostas incorretas fornecidas pelos alunos]

[239] Lucas: *Verdade, a gente esqueceu!*

[240] Professor: *Então, é essa constante C surge da resolução da EDO* [informar/sugerir – fornece informação]

[241] Lucas: *A gente esqueceu completamente.*

[242] Professor: *Aí essa constante C , vocês vão precisar encontrar.* [guiar/apoiar – conduz o pensamento do aluno.]

[243] Lucas: *Pegar um ponto.*

[244] Professor: *Pegar um ponto, coloca a constante C aí que está errado.* [guiar/apoiar – encoraja os alunos a re-elaborarem suas respostas]

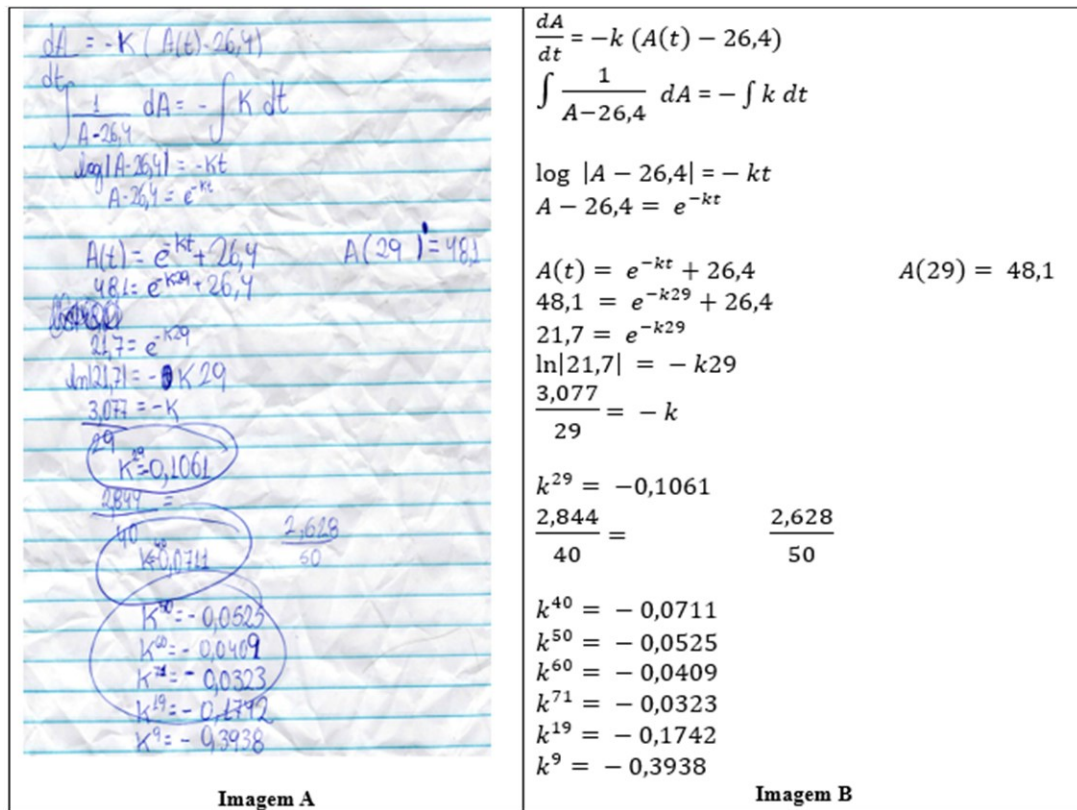
Ao convidar os alunos [225] a manifestarem seus raciocínios, o professor pode perceber que havia um erro na resolução da equação diferencial ordinária, uma vez que os alunos não colocaram a constante de integração que surge ao resolver uma integral indefinida. Por meio do *GeoGebra*, os próprios alunos puderam refutar a solução encontrada, como pode ser visto em [226]. Em [234], o professor percebe que tinha algo estranho na conta dos alunos e, ao

indagar como eles chegaram ao valor de C , Lucas [235] pergunta: “O que é C mesmo?” Neste momento, o professor desafia [236] os alunos, perguntando se surgiu alguma constante durante o processo de integração. Lucas [237] responde que não, e o professor afirma que o aluno estava errado, oferecendo uma explicação adequada. Contudo, ele poderia ter incentivado os alunos a refletirem mais sobre a questão antes de considerá-los errados. Apesar de sua intervenção ter contribuído para o raciocínio da turma, uma orientação mais sugestiva poderia ter sido mais produtiva. A partir daí, o grupo revê sua solução e apresenta uma nova conjectura sobre como encontrar o valor da constante C , como mencionado por Lucas [243].

No trecho anterior [226 e 229], fica evidente que o *GeoGebra*, por meio do comando “controle deslizante”, teve o papel de agilizar o procedimento que os alunos já vinham fazendo em [221], só que utilizando folha e caneta. Tanto pelos cálculos feitos no papel como pelo gráfico feito no *GeoGebra*, os alunos perceberam que a curva não estava coincidindo com os dados da Figura 5.

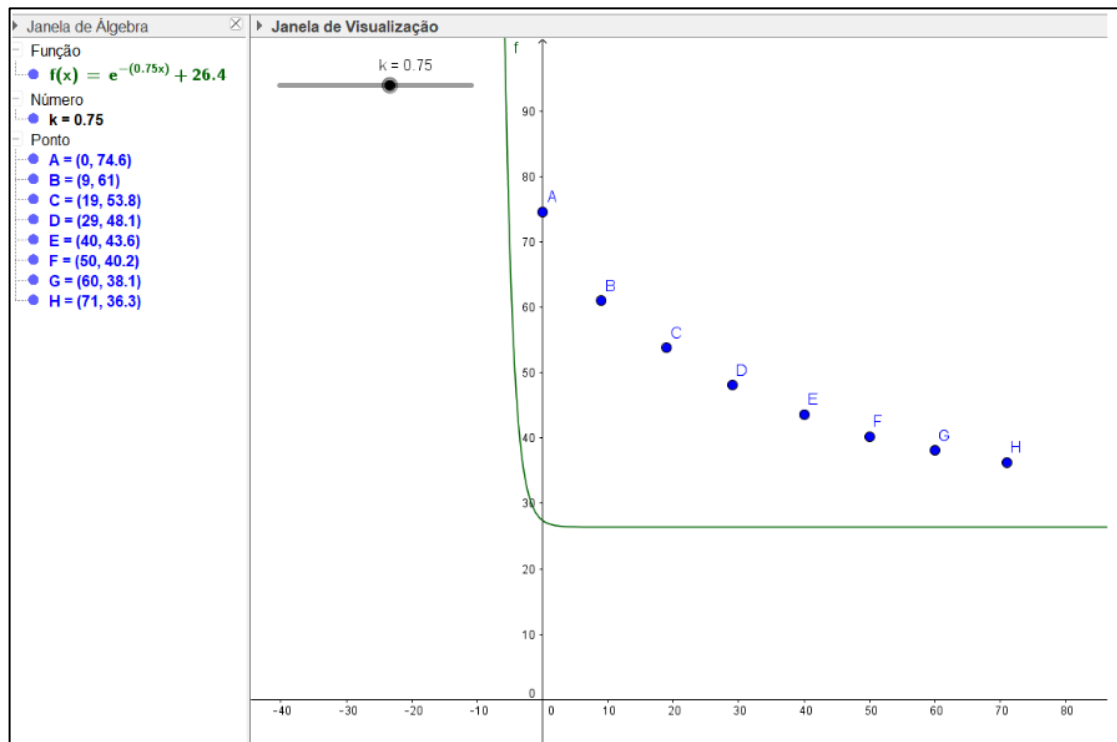
A Figura 8 traz uma das resoluções feitas pelo Grupo 1. A Imagem A ilustra a maneira como os alunos resolveram a equação diferencial ordinária no papel, calculando diversas possibilidades para a constante de proporcionalidade k . A Imagem B representa sua transcrição, visto que a imagem A não apresenta uma boa resolução. A Figura 9 ilustra o uso do *GeoGebra* pelos alunos. Em ambos os casos, os alunos não consideraram a constante de integração C , que surge de uma integral indefinida.

Figura 8: Registro escrito da resolução do Grupo 1 e sua transcrição



Fonte: os autores

Figura 9: Registro do uso do GeoGebra



Fonte: os autores

Após guiar/apoiar os alunos do Grupo 1 [242 e 244], o professor circulou entre os demais grupos. Algum tempo depois, retornou ao Grupo 1 para ver como estava o andamento.

[245] Lucas: *Foi a constante mesmo, professor, que a gente esqueceu. Agora deu certo.*

[246] Professor: *a solução escrita, assim, a completa. É isso aqui? Aqui está o quê? Mas, o k... você já achou o valor da solução com o k?* [convidar – solicita relatos de como fizeram]

[247] Lucas: *A gente foi chutando* [valores para o k].

[248] Professor: *Vocês pegaram o controle deslizante e foram ajustando até chegar próximo* [a uma função que se adequasse aos dados], [informar/sugerir – re-elabora respostas fornecidas pelos alunos] *é uma ideia* [informar/sugerir – valida respostas corretas fornecidas pelos alunos].

[249] Professor: *Tem um jeito que a gente poderia usar algebricamente pra achar também o valor de K. Como?* [informar/sugerir - incentiva múltiplas estratégias de resolução.].

[250] Mário: *Isola na EDO?*

[251] Professor: *Como que vocês acharam o valor de C?* [guiar/apoiar – incentiva a explicação]

[252] Lucas: *Ah, substituindo por um valor.*

[253] Professor: *Qual valor?* [guiar/apoiar – incentiva explicação]

[254] Lucas: *Substitui por um valor da temperatura, neh? Temperatura por tempo.*

[255] Professor: *Vocês substituíram qual valor pra achar o C?* [guiar/apoiar – incentiva explicação]

[256] Lucas: *Deixa eu ver. Aqui olha, 9 e 61* [$t=9$ e $A(9)=61$].

[257] Professor: *Pra achar o valor de C?* [guiar/apoiar – focalizar o pensamento do aluno para fatos importantes]

[258] Lucas: *Isso. Que no 9 minutos tinha dado 61, tava 61, neh, que era água quente.*

[259] Professor: *Mas e aí? Como é que vocês...* [guiar/apoiar – incentiva a explicação]

[260] Lucas: *Aí eu substituí o 61 mais. Vê se está certo, professor.*

[261] Professor: *Deixa eu ver. 61 igual a e elevado a menos 9k Ah, e aí vocês acharam o C em função do k?* [guiar/apoiar – incentiva explicação]

[262] Lucas: *Isso, aí eu substituí esse C aqui. Aí o k, esse 9k eu já somei aqui, porque está multiplicando, neh!*

[263] Professor: *E colocou o k em evidência* [guiar/apoiar – incentiva explicação]

[264] Lucas: *Aham, é que ficou feinho, mas aí eu...*

[265] Professor: *Entendi. Aí, essa é uma forma de fazer* [informar/sugerir – valida respostas corretas fornecidas pelos alunos]. *Aí depois vocês chutaram o valor de k a partir do controle deslizante.* [guiar/apoiar – incentiva a explicação]

[266] Lucas: *Isso.*

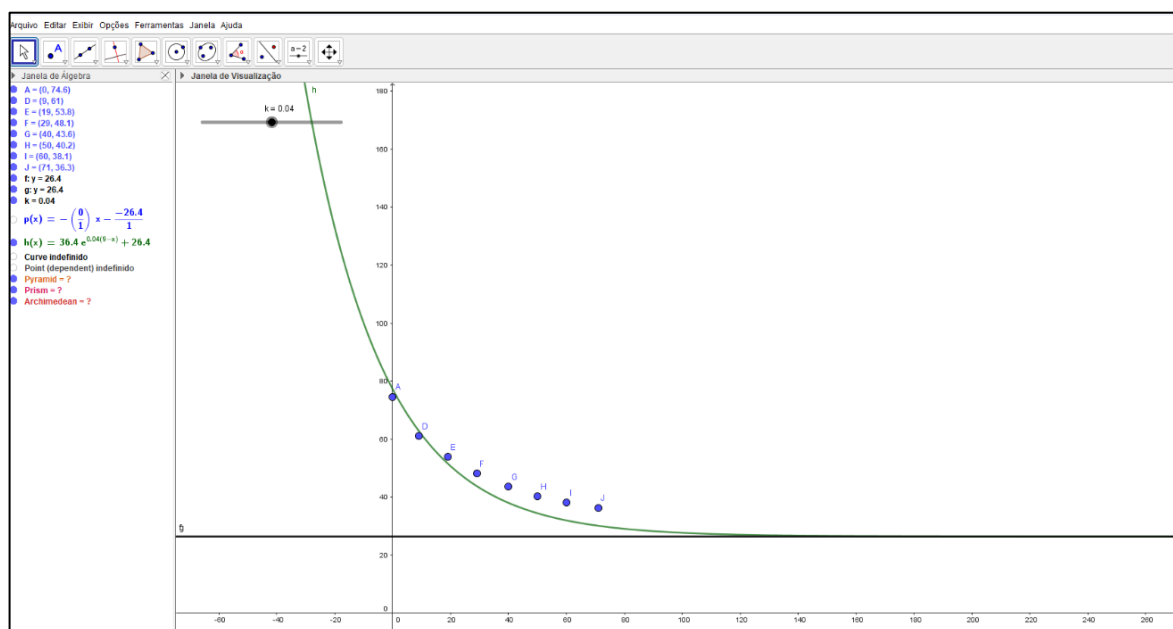
[267] Professor: *É um jeito interessante de fazer, vocês chegaram em um modelo* [informar/sugerir – valida respostas corretas fornecidas pelos alunos].

O professor convida [246] os alunos a relatarem os procedimentos que fizeram, Lucas em [247] responde “a gente foi chutando” se referindo aos valores de k. O professor percebe que, apesar de a resposta de Lucas estar correta, ele não conseguiu se expressar de maneira

adequada. Assim, em [248] para além de validar a resposta, o professor aproveita para reelaborar a resposta fornecida pelo aluno esclarecendo para à turma a forma correta de se referir ao uso do controle deslizante.

Após as ações do professor, o Grupo 1 avançou na resolução da equação diferencial, incluindo a constante de integração C e encontrando seu valor, substituindo $t = 9$ e $A(9) = 61$ na equação $A(t) = Ce^{-kt} + 26,4$, como mencionado em [256, 261 e 262]. Os alunos chegaram em $C = 34,6e^{9k}$, o que resultou na função $A(t) = 34,6e^{(-t+9)k} + 26,4$. Para atribuir um valor para k , os alunos do Grupo 1 permaneceram com a mesma estratégia inicial, mas agora eles conseguiram, por meio do “controle deslizante” do *GeoGebra*, justificar a sua resposta chegando a uma curva que se aproximasse dos pontos obtidos a partir dos dados. Como é possível observar na Figura 9, ao colocarem o $k = 0.04$ no “controle deslizante”, os alunos chegaram a uma curva mais próxima do esperado, dada pela função $h(x) = 36.4e^{0.04(9-x)} + 26.4$ (h e x são as letras que aparecem na Figura 10).

Figura 10: Resolução do Grupo 1 utilizando o *GeoGebra*



Fonte: os autores

A validação [265 e 267] das respostas dos alunos foi possibilitada pela justificação fornecida por eles ao professor.

Em [249] o professor informa/sugere aos alunos, incentivando-os a pensarem em uma resolução algébrica para confirmar o que foi encontrado por meio do *GeoGebra*, permitindo que os alunos justifiquem de uma outra maneira as suas conclusões (Figura 10).

[268] Professor: *Uma maneira de pensar é, aqui, esse e elevado a C vocês podem chamar de constante, beleza. Se vocês usam a condição inicial...Quando eu comecei a marcar, a temperatura era quanto?* [convidar – solicita respostas para questões pontuais]

[269] Lucas: 74.

[270] Professor: *74,6. Então, substituindo o zero e a temperatura por 74,6, o que vai acontecer quando o t for zero aqui?* [desafiar – encoraja a reflexão]

[271] Lucas: *ah, o e vai dar 1.*

[272] Professor: *o e vai ficar elevado a zero, que é 1* [informar/sugerir – re-elabora respostas fornecidas pelos alunos]. *Aí 1 vezes uma constante, que eu quero descobrir qual que é, mais 26,4 igual a esse valor* [informar/sugerir – fornece informações e explicações]

[273] Jairo: *Aí você deixa em função de k.*

[274] Professor: *Aí você acha o valor de C.* [guiar/apoiar – conduz o pensamento do aluno]

[275] Lucas: *É que a gente tinha esquecido do C aquela hora que você veio aqui. A gente tinha feito sem esse e elevado a C.*

[276] Professor: *Ahan, isso, no primeiro momento vocês tinham esquecido C. Aí, usando a condição inicial, vocês conseguem achar o valor de C. Depois de achar o valor de C, pega um outro ponto e acha o valor de k.* [guiar/apoiar – conduz o pensamento do aluno]

[277] Mário: *Aí faz todos eles e vê qual ponto fica mais próximo?*

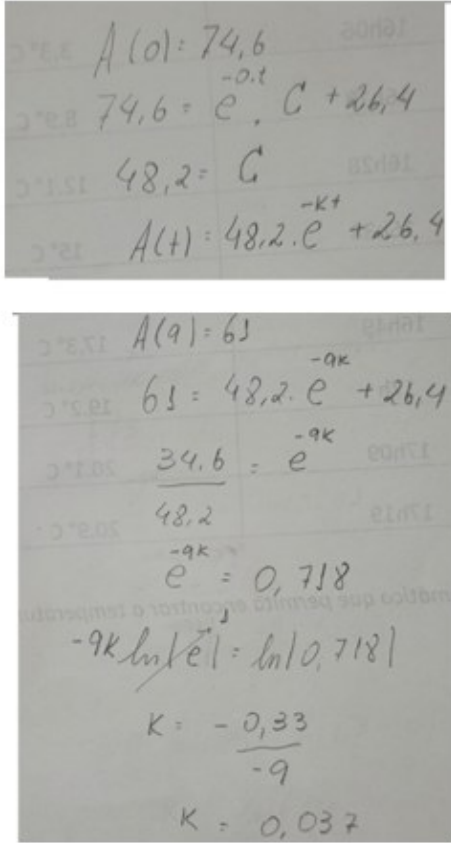
[278] Professor: *É, você pode... escolhe um ponto, não precisa fazer em todos. A condição inicial é interessante pra o primeiro caso, pelo fato de t ser zero, vai ficar e elevado a zero e vocês vão conseguir achar a constante C facilmente. Mas aí, pra achar o valor de K, você substitui outro ponto* [informar/sugerir – fornece informações e explicações] e [guiar/apoiar – conduz o pensamento do aluno]. *Aí vocês vão conseguir achar uma expressão pra solução da EDO sem precisar fazer esse procedimento, mas a saída de vocês foi boa, com o GeoGebra* [informar/sugerir – incentiva e fornece múltiplas estratégias de resolução].

O professor convida [268] os alunos a repensarem em uma nova abordagem para a resolução do problema, desta vez levando em conta a condição inicial. Para isso, em [270] ele encoraja os alunos a refletirem sobre a resolução do problema de valor inicial, considerando o tempo como zero e a temperatura naquele instante, que corresponde à temperatura ambiente. Lucas, em [271] apresenta a sua resposta, e em [272] o professor reelabora a resposta fornecida por ele, validando-a e acrescentando informações, tornando-a assim matematicamente mais correta.

Depois, por meio das ações de guiar/apoiar, o professor conduz o pensamento dos alunos, permitindo que eles raciocinem de uma forma diferente daquela como vinham fazendo. Em [278], ao mesmo tempo em que informa e guia os alunos para outra estratégia possível, o professor valida a maneira como o grupo vinha fazendo utilizando o *GeoGebra*. A Figura 11 apresenta o registro escrito da resolução dos alunos após a intervenção do professor. A Imagem A ilustra a maneira como os alunos resolveram a EDO no papel, calculando a constante C e a

constante de proporcionalidade k . A Imagem B representa sua transcrição, visto que a imagem A pode não apresentar uma boa resolução em caso de impressão.

Figura 11: Registro escrito da resolução dos alunos do Grupo 1

 Imagem A	$A(0) = 74,6$ $74,6 = e^{-0 \cdot t} \cdot C + 26,4$ $48,2 = C$ $A(t) = 48,2 \cdot e^{-k \cdot t} + 26,4$ $A(9) = 61$ $61 = 48,2 \cdot e^{-9 \cdot k} + 26,4$ $\frac{34,6}{48,2} = e^{-9 \cdot k}$ $e^{-9 \cdot k} = 0,718$ $-9k \ln e = \ln 0,718 $ $k = \frac{-0,33}{-9}$ $k = 0,037$ Imagem B
---	--

Fonte: os autores

A Figura 11 mostra que os alunos chegaram no valor (aproximado) de $k = 0,037$. Dessa forma, os alunos puderam comparar esse valor de k com aquele encontrado utilizando o “controle deslizante” do *GeoGebra*, validando sua resposta.

Com base na análise de dados realizada, foi possível perceber que as ações do professor: *convidar, guiar/apoiar, informar/sugerir e desafiar* (Araman; Serrazina; Ponte, 2019) apoiaram o raciocínio matemático dos alunos, uma vez que, durante as discussões, foram observados os processos de: *Conjeturar, generalizar e justificar* (Ponte; Quaresma; Mata-Pereira, 2020). O Quadro 13 resume as evidências encontradas na pesquisa, destacando de que maneira as ações do professor influenciaram os processos de raciocínio matemático dos alunos.

Quadro 13: Ações do professor que apoiaram os processos de raciocínio matemático dos alunos

Trechos de fala do professor/ ações do professor	Trechos de fala dos alunos/ processo do raciocínio matemático
Deixa eu fazer uma pergunta pra vocês, com esses dados que vocês já coletaram, o que esses	Eu acho que tem alguma relação, sei lá, com a temperatura do ambiente, tipo 26, então pode ser

dados indicam? O que vocês podem dizer a partir desses dados? [guiar/apoiar – incentiva a explicação]	que a variação seja menor conforme vai chegando mais perto do 26. [conjeturar]
Você fez um modelo aí, mas no formato de gráfico, como seria isso? [desafiar – encoraja a reflexão] No gráfico do quê? [guiar/apoiar – incentiva a explicação]	Exponencial [conjeturar]
Aqui, o que você acha? [desafiar – encoraja a reflexão]	Eu acho que não vai ser tão (inaudível) igual uma exponencial. [justificar] Não acho que vai ser necessariamente uma exponencial, mas é parecido com o exponencial. [justificar] Acho que é a noção de equilíbrio. [justificar] É que na verdade, ele desce mais rápido, depois ele desce 13, aí depois desce 7, aí depois desce 5 enquanto ele vai naqueles 10 minutos. [justificar]
Matematicamente o que a assíntota representa? [desafiar – encoraja a reflexão] Mas, por que você chamou de assíntota? Por que você está enxergando uma assíntota? [desafiar – encoraja a reflexão]	Vai criar uma assíntota né, que fala? [conjeturar] A gente pode pensar em termos de limite. [justificar] Porque ela vai diminuindo cada vez mais, vai ficando constante. [justificar]
Então se a gente deixar o copo aqui eternamente, a temperatura do copo não iria ultrapassar a temperatura do ambiente. Matematicamente, então, no infinito, essa curva vai se aproximar, mas não vai chegar a uma reta horizontal (assíntota horizontal), que no caso é a temperatura ambiente. [informar/sugerir - fornece informações e explicações]	Os alunos têm a possibilidade de encontrar um modelo matemático para fazer uma generalização , evitando assim a necessidade de coletar os dados até atingir a temperatura ambiente.
Onde que tá o vértice dessa parábola? [guiar/apoiar – focaliza o pensamento do aluno para fatos importantes] Então ela não seria uma função daí, né? Ela estaria na horizontal, ela estaria deitada, não seria uma função, se a gente faz o teste da reta vertical [informar/sugerir – fornece informações e explicações]	Seria por aqui, ó. [conjeturar] Isso, verdade. [reflexão sobre a sua conjectura]

<i>O que que isso significa? Isso que eu acabei de falar, como eu expressei isso numa equação?</i> [desafiar – pressiona para a generalização]	<i>Vamos falar que a taxa de temperatura perdida é a linha (a'). A linha é igual a vezes tempo e temperatura, não sei.</i> [buscando uma generalização]
<i>O que muda nessas equações aí? Que diferença faz estar 26,4 menos T, e estar T menos 26,4? O que que muda essa ordem estar trocada?</i> [desafiar – encoraja a reflexão] <i>E isso interfere em alguma coisa na análise?</i> [desafiar – encoraja a avaliação]	<i>O sinal de menos.</i> [justificar] <i>No sinal da constante.</i> [conjecturar]
<i>Aí essa constante C, vocês vão precisar encontrar.</i> [guiar/apoiar – conduz o pensamento do aluno.]	<i>Pegar um ponto.</i> [conjecturar]

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta pesquisa, tivemos como objetivo *identificar e discutir as ações do professor que apoiam o raciocínio matemático durante a realização de uma tarefa exploratória em uma turma de Engenharia da UTFPR - Londrina na disciplina de EDO*.

Os dados da pesquisa foram produzidos durante o desenvolvimento de uma tarefa de exploração, que envolveu em seis aulas (de 50 minutos cada) divididas em três dias: no primeiro dia, foram realizadas as medições das temperaturas da água quente ou fria; no segundo dia, ocorreu a formulação do modelo matemático com base nos dados coletados; e no terceiro dia, foi feita a resolução da equação diferencial ordinária e análise do modelo.

Com base na análise de dados realizada, foi possível perceber que as ações do professor de *convidar, guiar/apoiar, informar/sugerir e desafiar* (Araman; Serrazina; Ponte, 2019) apoiaram o raciocínio matemático dos alunos, uma vez que, durante as discussões, foram observados os processos de *conjecturar, generalizar e justificar* (Ponte; Quaresma; Mata-Pereira, 2020).

No primeiro dia, ao propor a tarefa e promover a discussão em grupo, o professor estimulou os alunos a formularem conjecturas sobre o comportamento dos dados e a buscarem justificativas para suas ideias. A retomada de conceitos como assíntota horizontal e a discussão sobre a relação entre a variação da temperatura e do tempo contribuíram para a generalização dos resultados e para a construção de um modelo matemático que descrevesse esse fenômeno. As ações do professor em guiar, apoiar e desafiar os alunos colaboraram para o desenvolvimento de habilidades como a de conjecturar, generalizar e justificar, demonstrando a importância de um ambiente de aprendizagem que valorize a construção do conhecimento de forma coletiva e significativa.

No segundo dia, ao guiar/apoiar os alunos na construção de gráficos e na interpretação de dados, o professor proporcionou um ambiente propício para a formulação de conjecturas, como quando questionou os alunos sobre o comportamento da “reta” e sugeriu a análise de uma possível parábola. As ações de desafiar, permitiu que os alunos justificassem suas respostas, como ao questionar sobre as características de uma parábola. Além disso, o professor utilizou de forma estratégica a linguagem matemática, retomando introduzindo conceitos como derivada e taxa de variação, e promovendo a discussão sobre a relação entre a variação da temperatura e o tempo. No entanto, observamos que em alguns momentos o professor assumiu um papel mais diretivo, fornecendo explicações e repostas prontas, o que limita a autonomia dos alunos. Neste caso, sugerimos que o professor busque um equilíbrio entre o guiar/apoiar e

o desafiar, incentivando os alunos a explorarem diferentes estratégias de resolução e a construir seu próprio conhecimento

No terceiro dia, ao propor a discussão de diferentes modelos matemáticos e ao desafiar os alunos a justificarem suas escolhas, o professor incentivou a formulação de conjecturas e a construção de argumentos sólidos. Por exemplo, quando o professor questionou “O que muda nessa equação aí? Que diferença faz estar 26,4 menos T, ou C, ou A, e estar A menos 26,4?”, ele estimulou os alunos a refletirem sobre o significado de parâmetros da equação e a analisar as implicações de diferentes formas de representá-la. A utilização de ferramentas tecnológicas, como o *GeoGebra*, permitiu aos alunos visualizar os dados de forma mais clara e testarem diferentes hipóteses, contribuindo para a generalização dos resultados. Ao solicitar que os alunos explicassem como chegaram a determinada solução e ao desafiá-los a justificar suas escolhas, tais ações realizadas pelo professor, em conjunto, contribuíram para o raciocínio matemático dos alunos e, conseqüentemente, para a aprendizagem matemática desses conceitos relacionados a EDO. Além disso, as ações do professor em guiar e apoiar os alunos na resolução da equação diferencial foram cruciais para o desenvolvimento de habilidades de modelagem matemática. Por exemplo, ao questionar os alunos sobre o significado da constante de integração e ao sugerir utilizar a condição inicial para determinar o seu valor, o professor auxiliou os alunos a construírem uma compreensão mais profunda do problema.

A análise das interações em sala de aula ao longo dos três dias do desenvolvimento da tarefa revelou a importância das ações do professor em estimular o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos. Uma prática particularmente relevante é quando o professor re-elabora as respostas fornecidas pelos alunos, pois, embora o professor saiba que o aluno esteja correto, muitas vezes o aluno pode não conseguir expressar isso de forma adequada. Com isso, o professor além de validar a resposta do aluno, ele esclarece a questão para a turma toda. Essa prática demonstra a importância da mediação do professor no processo de ensino e aprendizagem, uma vez que ele não se limita a transmitir informações, mas também a construir significados em conjuntos com os alunos.

Concluimos que a tarefa proposta e desenvolvida em sala de aula proporcionou aos alunos diversas atividades, desde a coleta de dados até a exploração no software *GeoGebra* e o professor teve um papel fundamental neste desenvolvimento e que as ações do professor podem apoiar o raciocínio matemático dos alunos durante a realização de uma tarefa exploratória, pois a ação do professor corresponde a uma reação do aluno.

Embora as ações de desafiar sejam as que possuem maior potencial para promover o raciocínio dos alunos, as ações de convidar, guiar/apoiar e de informar/sugerir dão suporte para

as ações de desafiar (Araman; Serrazina; Ponte, 2019). Isso significa que o desenvolvimento do raciocínio matemático ocorre de forma gradual, por mais que a ação de desafiar represente um maior potencial, ela só é alcançada se as outras ações forem executadas de maneira integrada. Através desta pesquisa, percebemos que uma tarefa bem elaborada e aplicada na perspectiva do ensino exploratório, e, principalmente, as ações do professor são fundamentais para esse processo ser alcançado.

De acordo com Canavarro (2011), quando se trabalha com o ensino exploratório, o professor possui um papel fundamental na construção do conhecimento matemático dos alunos. Ao proporcionar um ambiente de aprendizagem colaborativo, o professor possibilita que os alunos vejam a matemática como uma disciplina significativa e conseguem desenvolver habilidades essenciais, “como resolução de problemas, raciocínio matemático e a comunicação matemática” (Canavarro, 2011, p. 11).

A autora também destaca alguns desafios para a prática de ensino exploratório. Um deles se refere à orquestração das discussões coletivas, uma atividade complexa, pois exige que o professor equilibre a necessidade de guiar os alunos e permitir que eles exponham suas próprias ideias, evitando direcionar demasiadamente suas respostas. Nos trechos de falas mencionados, observamos momentos em que o professor assume um papel excessivamente diretivo [81, 128, 146, 150, 173], fazendo perguntas relevantes e, ele mesmo, as respondendo. Desta forma, em vez de realizar uma ação de guiar/apoiar ou desafiar, o que estimularia o raciocínio dos alunos, sua abordagem se transforma em uma ação de informar/sugerir. Com isso, o professor direciona excessivamente o caminho a ser seguido, limita a autonomia dos alunos e acaba por reduzir o nível de desafio cognitivo da tarefa matemática (Stein; Smith, 2009).

Outro desafio apontado por Canavarro (2011) refere-se à criação de um ambiente de aprendizagem. É fundamental criar um ambiente de sala de aula que seja motivadora, onde os alunos tenham vontade de participar ativamente e se sintam confortáveis para compartilhar suas opiniões e questionamentos. Esse desafio pode ser observado nos trechos das falas [248 e 272], em que o professor conseguiu contornar a situação, permitindo que os alunos se sentissem à vontade para expressar suas ideias, mesmo enfrentando dificuldades em utilizar a linguagem matemática correta. O professor soube re-elaborar suas respostas de maneira a não apenas validar as contribuições dos alunos, mas também a esclarecer, diante da turma, a forma adequada de se referir aos termos em questão.

Embora este estudo tenha contribuído para a compreensão das ações do professor que apoiam o raciocínio matemática dos alunos em EDO, algumas limitações podem ser apontadas.

A análise se concentrou em um único grupo de alunos, o que restringe a compreensão global dos processos de raciocínio matemático manifestados e apoiados pelas ações do professor no contexto investigado. A análise de outros grupos poderia revelar novas perspectivas sobre as ações do professor nas aulas investigadas. Além disso, a indicação prévia de um software específico limitou as possibilidades de os alunos explorarem outros softwares, escolhidos por eles próprios.

Uma análise mais aprofundada das tipologias de questões empregadas pelo professor, segundo Boaler e Broader (2004), poderia revelar padrões interessantes e contribuir para uma compreensão mais completa das ações do professor que apoiam o raciocínio matemático. Para futuras pesquisas, sugere-se a ampliação das análises, considerando diferentes contextos e a investigação da contribuição de diferentes softwares na construção do raciocínio matemático.

Como resultado desta pesquisa, foi desenvolvido o produto educacional (Apêndice A) *“Da teoria à prática: uma proposta de ensino de EDO para apoiar o raciocínio matemático de estudantes”*, que consiste em um material pedagógico destinado a professores que ensinam Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) no Ensino Superior.

Foi produzida uma proposta de ensino de EDO de primeira ordem, pautada na tarefa exploratória analisada nesta pesquisa. O objetivo desse material pedagógico é compartilhar conhecimentos e práticas a partir da experiência aqui investigada, que, conforme mencionado na Introdução desta dissertação, teve origem no interesse do orientador de trabalhar com tarefas matemáticas de uma maneira diferente daquela tradicional que vinha fazendo até então em suas turmas de EDO.

O material apresenta uma seção com referencial teórico sobre o raciocínio matemático e sobre as ações do professor que podem apoiar o raciocínio matemático (Araman; Serrazina; Ponte, 2019). Além disso, apresentamos uma tarefa junto com a proposta de sua aplicação, incluindo os materiais necessários, uma sugestão de procedimento e possíveis intervenções. Visando aprimorar o desenvolvimento desta tarefa, sugerimos o uso de recursos tecnológicos como o *GeoGebra* e o *Phyton*. Pensando nisso, apresentamos o passo a passo para a elaboração da EDO de resfriamento, utilizando tais recursos. Também indicamos como esses recursos podem ser acessados de forma *online*, disponibilizando links que permitem ao leitor acesso direto aos sites correspondentes.

REFERÊNCIAS

- ARAMAN, E. M. D. O.; SERRAZINA, M. D. L.; DA PONTE, J. P. “Eu perguntei se o cinco não tem metade”: ações de uma professora dos primeiros anos que apoiam o raciocínio matemático. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 21, n. 2, p. 466-490, 2019.
- ARAMAN, E. M. D. O.; SERRAZINA, M. D. L.; PONTE, J. P. Raciocínio Matemático nos Primeiros Anos: ações de duas professoras ao discutir tarefas com seus alunos. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 34, p. 441-461, 2020.
- ARAÚJO, A. M. R. **Modelagem matemática nas aulas de cálculo**: uma estratégia que pode contribuir com a aprendizagem dos alunos de engenharia. 2008. 94f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas) – Núcleo de Pesquisa e Desenvolvimento da Educação Matemática, Universidade Federal do Pará, Belém, 2008.
- BARROS, M. C. **Equações diferenciais ordinárias no contexto dos registros de representação semiótica e da modelagem matemática**. 2017. 258 f. Tese (Doutorado em Educação para a Ciência e a Matemática) - Universidade Estadual De Maringá, Maringá, 2017.
- BARROS FILHO, A. A. **A resolução de problemas físicos com equações diferenciais ordinárias lineares de 1ª e 2ª ordem**: análise gráfica com o software maple. 2012. 228 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2012.
- BARROS FILHO, A. A.; LAUDARES, J. B.; DE MIRANDA, D. F. A resolução de problemas em ciências com equações diferenciais ordinárias de 1ª e 2ª ordem usando análise gráfica. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 16, n. 2, p. 323-348. 2014.
- BOALER, J.; BRODIE, K. The importance, nature and impact of teacher questions. In: MCDOUGALL, D.E; ROSS, J. A. (Eds.). **Proceedings of the twenty-sixth annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**. Toronto: OISE/UT, 2004. p. 774-782.
- BRASIL. Conselho Nacional de Educação/Câmara de Educação Superior. **Resolução nº 2 de 24 de abril de 2019**. Institui as Diretrizes Curriculares Nacionais do Curso de Graduação em Engenharia. 2019. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=112681-rces002-19&category_slug=abril-2019-pdf&Itemid=30192. Acesso em 23 mar. 2024.
- BRIZOLA, J.; FANTIN, N. Revisão da literatura e revisão sistemática da literatura. **Revista de Educação do Vale do Arinos**, Juara/MT/Brasil, v. 3, n. 2, p. 23-39, jul./dez. 2016.
- BUERI, J. W. S. **Análise de fenômenos físicos no ensino de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem em cursos de engenharia**. 2019. 117 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2019.

CANAVARRO, A. P. Ensino exploratório da Matemática: práticas e desafios, Educação e Matemática. Lisboa, n.115, p.11-17, 2011.

CANAVARRO, A. P.; SANTOS, L. (2012). Explorar tarefas matemáticas. In A. P. Canavarro, L. Santos, A. Boavida, H. Oliveira, L. Menezes & S. Carreira (Eds.), **Investigação em Educação Matemática - Práticas de ensino da Matemática**, 99-104.

COMIN, C. *et al.* **Estudo analítico e empírico da deflexão de vigas e eixos por abordagem de equações diferenciais ordinárias e experimental de baixo custo.**

In: XLVIII Congresso Brasileiro de Educação de Engenharia e III Simpósio Internacional de Educação em Engenharia da ABENGE. 2020, Anais [...]. Disponível em: https://www.abenge.org.br/sis_artigos.php?cod_trab=3088. Acesso em: 27 jul. 2024.

DIAS, L. V. *et al.* **O uso do software scilab no curso de engenharia:** relato de uma experiência na resolução de problemas numéricos. In: XLVII Congresso Brasileiro de Educação de Engenharia e II Simpósio Internacional de Educação em Engenharia da ABENGE. 2019, Anais [...]. Disponível em:

https://www.abenge.org.br/sis_artigos.php?cod_trab=2235. Acesso em: 27 jul. 2024.

ESTEBAN, M. P. S. Pesquisa qualitativa em educação: fundamentos e tradições. Porto Alegre: **Artmed**, 2010. 268 p.

FARIA, R. W. S. **Padrões fractais: contribuições ao processo de generalização de conteúdos matemáticos.** 2012. 195 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, São Paulo, 2012.

FERREIRA, N. S. A. As pesquisas denominadas “Estado da Arte”. **Educação & Sociedade**, São Paulo, ano 23, n. 79, p.257-272, ago. 2002.

FERREIRA, V. D. T. **A modelagem matemática na introdução ao estudo de equações diferenciais em um curso de Engenharia.** 2010. 116 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010.

FIORENTIN, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática:** percursos teóricos e metodológicos. Campinas: Editores Associados, 2006 (Coleção formação de professores).

GALINA, V. *et al.* **Problema de valor inicial: enchimento de um tanque - solução analítica e numérica.** In: XLVII Congresso Brasileiro de Educação de Engenharia e II Simpósio Internacional de Educação em Engenharia da ABENGE. 2019, Anais [...]. Disponível em: https://www.abenge.org.br/sis_artigos.php?cod_trab=2091. Acesso em: 27 jul. 2024.

HENRIQUES, A; ALMOULOU, S. A. Teoria dos registros de representação semiótica em pesquisas na Educação Matemática no Ensino Superior: uma análise de superfícies e funções de duas variáveis com intervenção do *software* Maple. **Ciênc. Educ.**, Bauru, v. 22, n. 2, p. 465-487, 2016;

LAUDARES, J. B.; DE MIRANDA, D. F. Investigando a iniciação à modelagem matemática nas ciências com equações diferenciais. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 9, n. 1, p.103-120. 2007.

LAUDARES, J. B.; FURLETTI, S. **Metodologia para resolução de problemas de fenômenos com equações diferenciais ordinárias para cursos de engenharia**. In: XLV Congresso Brasileiro de Educação de Engenharia. 2017, Anais [...]. Disponível em: https://www.abenge.org.br/sis_artigos.php?cod_trab=52. Acesso em: 27 jul. 2024.

LAUDARES, J. B. *et al.* **Equações Diferenciais Ordinárias e Transformadas de Laplace: Análise gráfica de fenômenos com resolução de problemas Atividades com softwares livres**. 1a. ed. Belo Horizonte: Artesã, 2017. v. 1. 319 p.

LEITHOLD, Louis. **O Cálculo com Geometria Analítica**. 3. ed. Tradução: Cyro de Carvalho Patarra. São Paulo: HARBRA Ltda, 1994.

LIMA, T. C. S.; MIOTO, R. C. T. Procedimentos metodológicos na construção do conhecimento científico: a pesquisa bibliográfica. **Revista Katál**. Florianópolis, v. 10, n. esp., p. 37-45, 2007.

LOPES, R.; LIMA, G. L. Conhecimentos matemáticos, físicos e de Transferência de Calor mobilizados por graduandos em Engenharia Civil em uma abordagem contextualizada de Equações Diferenciais Ordinárias. **REnCiMa**. São Paulo, v. 13, n. 5, p. 1-22. 2022.

MATA-PEREIRA, J.; PONTE, J. P. Promover o Raciocínio Matemático dos Alunos: uma investigação baseada em design. **Bolema**. Rio Claro, v. 32, n. 62, p. 781–801, 2018.

MATOS OLIVEIRA, E. D. *et al.* **Percepção dos discentes sobre o uso do software Python TM na aplicação do método de Euler para resolução de equações diferenciais**. In: XLVI Congresso Brasileiro de Educação de Engenharia e 1º Simpósio Internacional de Educação em Engenharia. 2018, Anais [...]. Disponível em: https://www.abenge.org.br/sis_artigos.php?cod_trab=1523. Acesso em: 27 jul. 2024.

MORAIS, C.; SERRAZINA, L.; PONTE, J. P.. Mathematical reasoning fostered by (fostering) transformations of rational number representations. **Acta Scientiae**, v. 20, n. 4, 2018.

OLIVEIRA, E. A. **Uma engenharia didática para abordar o conceito de equação diferencial em cursos de engenharia**. 2014. 159 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2014.

OLIVEIRA, H.; MENEZES, L.; CANAVARRO, A. P. Conceptualizando o ensino exploratório da Matemática: Contributos da prática de uma professora do 3º ciclo para a elaboração de um quadro de referência. **Quadrante**, v. 22, n. 2, p. 29-54, 2013. Disponível em: https://repositorio.ipv.pt/bitstream/10400.19/1957/1/Quadrante_XXII_2_2013_pp029-054_52a5bafb92acd.pdf. Acesso em: 15 jan. 2024.

PEREIRA, M. C. G. **Aplicações de equações diferenciais ordinárias em fenômenos físicos: análise por representações gráficas e algébricas**. 2021. 93 f. Dissertação (Mestrado em Ensino

de Ciências e Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2021.

PINTO, R. L. **Equações diferenciais ordinárias de variáveis separáveis na engenharia civil: uma abordagem contextualizada a partir de um problema de transferência de calor.** 2021. 313 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2021.

PÓLYA, G. A Arte de Resolver Problemas: um novo aspecto do método matemático. ARAÚJO, H. L. (Trad.). 1. ed. Rio de Janeiro: **Interciência**, 1995.

PONTE, J. P. Gestão curricular em Matemática. **O professor e o desenvolvimento curricular**, p. 11-34, 2005.

PONTE, J. P. Tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática. In: PONTE, J. P. (Org.), **Práticas Profissionais dos Professores de Matemática**. Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, 2014, p. 13-27.

PONTE, J. P. *et al.* Exercícios, problemas e explorações: Perspetivas de professoras num estudo de aula. **Quadrante**, v. 24, n. 2, p. 111-134, 2015. Disponível em: <<https://repositorio.ul.pt/handle/10451/22628>>. Acesso em: 31 ago. 2022.

PONTE, J. P.; QUARESMA, M.; MATA-PEREIRA, J. Como desenvolver o raciocínio matemático na sala de aula? **Educação e Matemática**, n. 156, p. 7-11, 2020.

PREFEITURA MUNICIPAL DE FLORIANÓPOLIS. **Prefeitura de Florianópolis inaugura a primeira Escola do Futuro.** 2020. Disponível em: <<https://www.pmf.sc.gov.br/noticias/index.php?pagina=notpagina¬i=22002>>. Acesso em 20 mar. 2024.

SANTOS, J. L. D. *et al.* **Flambagem de vigas verticais: construção de uma prensa artesanal para comparação entre dados analíticos e experimentais.** In: XLVII Congresso Brasileiro de Educação de Engenharia e II Simpósio Internacional de Educação em Engenharia da ABENGE. 2019, Anais [...]. Disponível em: https://www.abenge.org.br/sis_artigos.php?cod_trab=1910. Acesso em: 27 jul. 2024.

SANTOS, M. D. D. **Desenvolvimento de uma toolbox para auxílio no ensino e aprendizagem de equações diferenciais ordinárias e parciais aplicadas.** In: XLV Congresso Brasileiro de Educação de Engenharia. 2017, Anais [...]. Disponível em: https://www.abenge.org.br/sis_artigos.php?cod_trab=508. Acesso em: 27 jul. 2024.

SANTOS, T. M.; ELIAS, H. R. Equações Diferenciais Ordinárias em cursos de Engenharia: um levantamento bibliográfico. **Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática**, 2023, v. 7, n. 3, p. 363-381.

SANTOS, T. M.; ELIAS, H. R. **Pesquisas sobre equações diferenciais ordinárias em cursos de engenharia.** XVI Encontro Paranaense de Educação Matemática (EPREM), Foz do Iguaçu, 2022.

SILVA, A. R. **Uma proposta de ensino de equações diferenciais em cursos de Engenharia Civil à luz da teoria a matemática no contexto das ciências**. 2022. 276 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2022.

SOUZA, G. M. **Uma Estratégia Metodológica Para A Introdução De Um Curso De Equações Diferenciais Ordinárias**. 2011. 141 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2011.

STEIN, M.; SMITH, M. Tarefas matemáticas como quadro para a reflexão: Da investigação à prática (artigo original publicado em 1998). *Educação e Matemática*, 105, p. 22–28, 2009.

STEIN, M. K. *et al.* Orchestrating productive mathematical discussions: Helping teachers learn to better incorporate student thinking. **Mathematical Thinking and Learning**, v.10, n.4, p. 313-340, 2008.

XAVIER, P. H. F. *et al.* **Simulações computacionais de equações diferenciais ordinárias em cursos de engenharia: uma abordagem com PBL**. In: XLVI Congresso Brasileiro de Educação de Engenharia e 1º Simpósio Internacional de Educação em Engenharia. 2018, Anais [...]. Disponível em: https://www.abenge.org.br/sis_artigos.php?cod_trab=1360. Acesso em: 27 jul. 2024.

ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. **Equações diferenciais vol. 1**. Pearson Makron Books, 2008.

ANEXO A – FICHA DE AVALIAÇÃO DE PRODUTO/PROCESSO EDUCACIONAL

Ficha de Avaliação de Produto/Processo Educacional

Adaptado de: Rizzatti, I. M. *et al.* Os produtos e processos educacionais dos programas de pós-graduação profissionais: proposições de um grupo de colaboradores. **ACTIO**, Curitiba, v. 5, n. 2, p. 1-17, mai./ago. 2020. Disponível em: <https://periodicos.utfpr.edu.br/actio/article/view/12657>. Acesso em 14 de dezembro de 2020.

Instituição de Ensino Superior	Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Programa de Pós-Graduação	Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGMAT)
Título da Dissertação	Uma Análise Das Ações Do Professor Que Apoiam O Raciocínio Matemático Na Disciplina Equações Diferenciais Ordinárias Em Cursos De Engenharia
Título do Produto/Processo Educacional	Da teoria à prática: uma proposta de ensino de EDO para apoiar o raciocínio matemático de estudantes
Autores do Produto/Processo Educacional	Discente: Tais Mara dos Santos
	Orientador: Henrique Rizek Elias
	Outros (se houver):
Data da Defesa	05 de dezembro de 2024

FICHA DE AVALIAÇÃO DE PRODUTO/PROCESSO EDUCACIONAL (PE)	
Esta ficha de avaliação deve ser preenchida pelos membros da banca do exame de defesa da dissertação e do produto/processo educacional. Deve ser preenchida uma única ficha por todos os membros da banca, que decidirão conjuntamente sobre os itens nela presentes.	
Aderência: avalia-se se o PE apresenta ligação com os temas relativos às linhas de pesquisas do Programa de Pós-Graduação. <u>*Apenas um item pode ser marcado.</u> Linhas de Pesquisa do PPGMAT: <i>L1: Formação de Professores e Construção do Conhecimento Matemático</i> (abrange discussões e reflexões acerca da formação inicial e em serviço dos professores que ensinam Matemática, bem como o estudo de tendências em Ensino de Matemática, promovendo reflexões críticas e analíticas a respeito das potencialidades de cada uma no processo de construção do conhecimento matemático nos diferentes níveis de escolaridade); <i>L2: Recursos Educacionais e Tecnologias no Ensino de Matemática</i> (trata da análise e do desenvolvimento de recursos educacionais para os processos de ensino e de aprendizagem matemática, atrelados aos aportes tecnológicos existentes).	() Sem clara aderência às linhas de pesquisa do PPGMAT. (X) Com clara aderência às linhas de pesquisa do PPGMAT.

Aplicação, aplicabilidade e replicabilidade: refere-se ao fato de o PE já ter sido aplicado (mesmo que em uma situação que simule o funcionamento do PE) ou ao seu potencial de utilização e de facilidade de acesso e compartilhamento para que seja acessado e utilizado de forma integral e/ou parcial em diferentes sistemas. <u>*Apenas um item pode ser marcado.</u> A propriedade de aplicação refere-se ao processo e/ou artefato (real ou virtual) e divide-se em três níveis: 1) aplicável – quando o PE tem potencial de utilização direta, mas não foi aplicado; 2) aplicado – quando o PE foi aplicado uma vez, podendo ser na forma de um piloto/protótipo; 3) replicável – o PE está acessível e sua descrição permite a utilização por outras pessoas considerando a possibilidade de mudança de contexto de aplicação. Para o curso de Mestrado Profissional, o PE deve ser aplicável e é recomendado que seja aplicado.	() PE tem características de aplicabilidade, mas não foi aplicado durante a pesquisa. () PE foi aplicado uma vez durante a pesquisa e não tem potencial de replicabilidade. (X) PE foi aplicado uma vez durante a pesquisa e tem potencial de replicabilidade (por estar acessível e sua descrição permitir a utilização por terceiros, considerando a possibilidade de mudança de contexto de aplicação). () PE foi aplicado em diferentes ambientes/momentos e tem potencial de replicabilidade (por estar acessível e sua descrição permitir a utilização por terceiros, considerando a possibilidade de mudança de contexto de aplicação).
Abrangência territorial: refere-se a uma definição da abrangência de aplicabilidade ou replicabilidade do PE (local, regional, nacional ou internacional). Não se refere à aplicação do PE durante a pesquisa, mas à potencialidade de aplicação ou replicação futuramente. <u>*Apenas um item pode ser marcado e a justificativa é obrigatória.</u>	() Local () Regional () Nacional (X) Internacional Justificativa (<i>obrigatória</i>): o tema matemático (conteúdo) abordado é de abrangência e interesse internacional; o texto está escrito e língua portuguesa, língua falada em outros países; o material ficará disponível no Repositório e terá livre acesso.
Impacto: considera-se a forma como o PE foi utilizado e/ou aplicado no sistema relacionado à prática profissional do discente (não precisa ser, necessariamente, em seu local de trabalho). <u>*Apenas um item pode ser marcado.</u>	() PE não utilizado no sistema relacionado à prática profissional do discente (esta opção inclui a situação em que o PE foi utilizado e/ou aplicado em um contexto simulado, na forma de protótipo/piloto). (X) PE com aplicação no sistema relacionado à prática profissional do discente.
Área impactada	() Econômica;

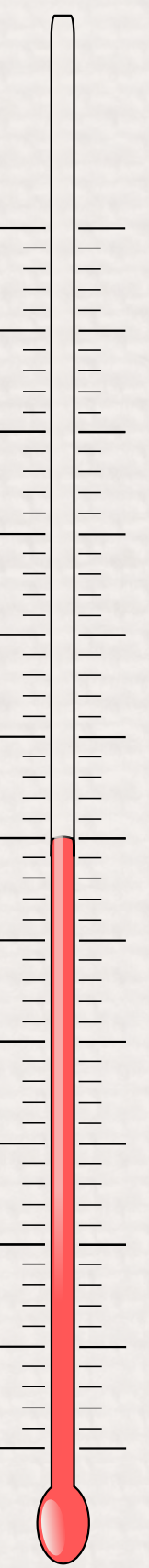
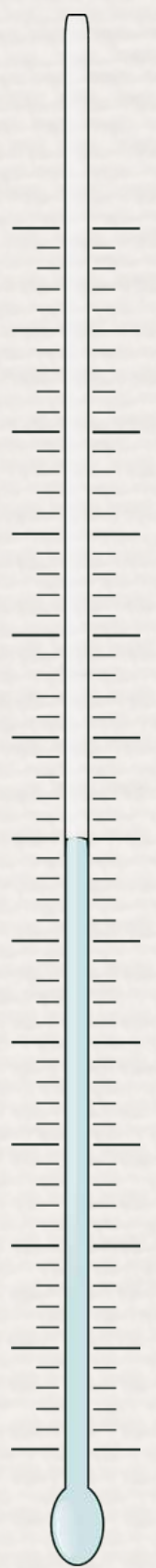
<u>*Apenas um item pode ser marcado.</u>	() Saúde; (X) Ensino; () Cultural; () Ambiental; () Científica; () Aprendizagem.
Complexidade: compreende-se como uma propriedade do PE relacionada às etapas de elaboração, desenvolvimento e/ou validação do PE. <u>*Podem ser marcados nenhum, um ou vários itens.</u>	(X) O PE foi concebido a partir de experiências, observações e/ou práticas do discente, de modo atrelado à questão de pesquisa da dissertação. () A metodologia apresenta clara e objetivamente, no texto da dissertação, a forma de elaboração, aplicação (se for o caso) e análise do PE. (X) Há, no texto da dissertação, uma reflexão sobre o PE com base nos referenciais teóricos e metodológicos empregados na dissertação. () Há, no texto da dissertação, apontamentos sobre os limites de utilização do PE.
Inovação: considera-se que o PE é inovador, se foi criado a partir de algo novo ou da reflexão e modificação de algo já existente revisitado de forma inovadora e original. A inovação não deriva apenas do PE em si, mas da sua metodologia de desenvolvimento, do emprego de técnicas e recursos para torná-lo mais acessível, do contexto social em que foi utilizado ou de outros fatores. Entende-se que a inovação (tecnológica, educacional e/ou social) no ensino está atrelada a uma mudança de mentalidade e/ou do modo de fazer de educadores.	() PE de alto teor inovador (desenvolvimento com base em conhecimento inédito). (X) PE com médio teor inovador (combinação e/ou compilação de conhecimentos preestabelecidos). () PE com baixo teor inovador (adaptação de conhecimentos existentes).

Membros da banca examinadora de defesa

Nome	Instituição
Henrique Rizek Elias	UTFPR – Londrina
Eliane Maria De Oliveira Araman	UTFPR – Cornélio Procópio
Gabriel Loureiro De Lima	PUC-SP

APÊNDICE A – PRODUTO EDUCACIONAL

Da teoria à prática:
uma proposta de ensino de
EDO para apoiar o raciocínio
matemático de estudantes



Tais Mara dos Santos
Henrique Rizek Elias



UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

ppgmat

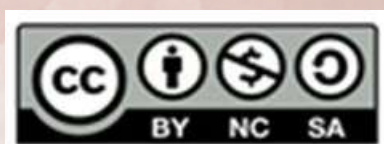
PROGRAMA DE
PÓS-GRADUAÇÃO
EM ENSINO
DE MATEMÁTICA

Tais Mara dos Santos
Henrique Rizek Elias

Da teoria à prática: uma proposta de ensino de EDO para
apoiar o raciocínio matemático de estudantes

From theory to practice: a proposal for teaching EDO to
support students' mathematical reasoning

2025



[4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)

Esta licença permite que outros remixem, adaptem e criem a partir do trabalho para fins não comerciais, desde que atribuam o devido crédito e que licenciem as novas criações sob termos idênticos.

Conteúdos elaborados por terceiros, citados e referenciados nesta obra não são cobertos pela licença.

Folha de aprovação



Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Londrina



TAIS MARA DOS SANTOS

UMA ANÁLISE DAS AÇÕES DO PROFESSOR QUE APOIAM O RACIOCÍNIO MATEMÁTICO NA DISCIPLINA EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS EM CURSOS DE ENGENHARIA

Trabalho de pesquisa de mestrado apresentado como requisito para obtenção do título de Mestre Em Ensino De Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Área de concentração: Ensino De Matemática.

Data de aprovação: 05 de Dezembro de 2024

Dr. Henrique Rizek Elias, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Eliane Maria De Oliveira Araman, - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dr. Gabriel Loureiro De Lima, Doutorado - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (Pucsp)

Documento gerado pelo Sistema Acadêmico da UTFPR a partir dos dados da Ata de Defesa em 23/01/2025.

SUMÁRIO

❄ Apresentação 4

❄ Raciocínio matemático e as ações do professor..... 6

❄ Tarefa 9

- ❄ Materiais
- ❄ Sugestão de procedimento
- ❄ Possíveis intervenções

❄ Uso da Tecnologia 24

- ❄ GeoGebra
- ❄ Python

❄ Algumas considerações 38

❄ Referências 39

❄ Anexos 40

- ❄ **Folha para o registro** das medições de temperatura

Apresentação

Este produto educacional é um material pedagógico destinado a professores do Ensino Superior e foi desenvolvido como resultado de uma pesquisa de mestrado profissional realizado no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGMAT) pela estudante de mestrado Tais Mara dos Santos, sob a orientação do Prof. Dr. Henrique Rizek Elias. A pesquisa teve por objetivo identificar e discutir as ações do professor que apoiam o raciocínio matemático durante a realização de uma tarefa exploratória em uma turma de Engenharia na disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO).

Os dados da pesquisa foram produzidos em um ambiente real de sala de aula da disciplina de EDO, cujo professor da turma foi o orientador da pesquisa. A disciplina foi ministrada em conjunto para os cursos de Engenharia Química e Engenharia Ambiental da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR) *campus* Londrina.

Durante as aulas, o professor trabalhou com uma tarefa exploratória que envolveu o tópico EDO de primeira ordem e o modelo matemático abordado foi a Lei do resfriamento de Newton.

A tarefa matemática proposta consistiu na medições de temperatura da água, na elaboração de um modelo matemático utilizando uma EDO e na análise desse modelo.

Com o objetivo de compartilhar conhecimentos e práticas inovadoras, preparamos este material destinado a professores que ensinam EDO. Neste material, iniciamos com uma apresentação de algumas considerações acerca da noção dos processos do raciocínio matemático e as ações do professor, detalhando como essas ações do professor podem apoiar o raciocínio matemático dos estudantes, conforme apontam Araman, Serrazina e Ponte (2019).

Além disso, apresentamos uma tarefa junto com a proposta de sua aplicação, incluindo os materiais necessários, uma sugestão de procedimento e possíveis intervenções. Visando aprimorar o desenvolvimento desta tarefa, sugerimos o uso de recursos tecnológicos como o *GeoGebra* e o *Phyton*. Pensando nisso, apresentamos o passo a passo para a elaboração da EDO de resfriamento, utilizando tais recursos. Também indicamos como esses recursos podem ser acessados de forma online, disponibilizando links que permitem ao leitor acesso direto aos sites correspondentes.

Raciocínio matemático e as ações do professor

Mata-Pereira e Ponte (2018, p. 782) consideram que “raciocinar matematicamente consiste em fazer inferências justificadas, ou seja, utilizar informação matemática já conhecida para obter, justificadamente, novas conclusões”. Para Ponte, Quaresma e Mata-Pereira (2010, p. 10), “Há uma variedade de aspectos e processos que podem estar envolvidos no raciocínio matemático... Conjeturar, generalizar e justificar destacam-se como processos essenciais do raciocínio matemático”. Santos (2025) elaborou um quadro (Quadro 1) que mostra as definições desses processos segundo os autores. Para tanto, a autora se fundamentou em Moraes, Serrazina e Ponte (2018) que, por sua vez, caracterizam esses processos com base em Ellis (2011) e Lannin et al. (2011).

Quadro 1: Processos do raciocínio matemático

Processos	Definição
Conjeturar	“É um processo que envolve raciocinar sobre relações matemáticas, desenvolvendo afirmações, denominadas conjecturas, que requerem maior exploração para verificar se são verdadeiras ou não” (Moraes; Serrazina; Ponte, 2018, p. 555, tradução nossa).
Generalizar	É “uma atividade onde as pessoas, que partilham um contexto socio matemático específico, estão envolvidas em pelo menos uma de três ações: (i) identificar pontos em comum entre os casos; (ii) estender o raciocínio para além do caso inicial; ou (iii) extrair resultados mais amplos de casos particulares” (Moraes; Serrazina; Ponte, 2018, p. 556, tradução nossa).
Justificar	“Tem como objetivo convencer a si mesmo e aos outros (Moraes; Serrazina; Ponte, 2018, p. 556, tradução nossa)”. A justificação não só mostra que uma afirmação é verdadeira, mas também fornece razões pelas quais é verdadeira ou válida em todos os casos possíveis (p. 556).

Fonte: Santos, (2025 p. 42)

Temos que o raciocínio matemático dos alunos se desenvolve a partir de conhecimentos prévios e por meio desses processos (conjeturar, generalizar e justificar) e com uma tarefa com tal potencial, os alunos são capazes de produzir novos conhecimentos. Mas, para todo esse processo acontecer o professor tem um papel importante, ele é o responsável por gerenciar a aula e orientar os alunos, o que não é algo simples. Com o intuito de auxiliar o professor durante este processo, Araman, Serrazina e Ponte (2019) elaboraram um quadro de análise das ações do professor que apoiam o raciocínio matemático dos estudantes. Neste quadro (Quadro 2), os autores apresentam as categorias de ações e como elas podem ser executadas pelo professor durante o desenvolvimento da tarefa.

Quadro 2: Quadro de análise das ações do professor que apoiam o raciocínio matemático

C A T E G O R I A S	Convidar	- Solicita respostas para questões pontuais. - Solicita relatos de como fizeram.	A Ç Õ E S
	Guiar/Apoiar	- Fornece pistas aos alunos. - Incentiva a explicação. - Conduz o pensamento do aluno. - Focaliza o pensamento do aluno para fatos importantes. - Encoraja os alunos e re-dizerem suas respostas. - Encoraja os alunos a re-elaborarem suas respostas.	
	Informar/Sugerir	- Valida respostas corretas fornecidas pelos alunos. - Corrige respostas incorretas fornecidas pelos alunos. - Re-elabora respostas fornecidas pelos alunos. - Fornece informações e explicações. - Incentiva e fornece múltiplas estratégias de resolução.	
	Desafiar	- Solicita que os alunos apresentem razões (justificativas). - Propõe desafios. - Encoraja a avaliação. - Encoraja a reflexão. - Pressiona para a precisão. - Pressiona para a generalização.	

Fonte: Araman, Serrazina e Ponte (2019 p. 476).

De acordo com Araman, Serrazina e Ponte (2019), a categoria Convidar envolve as ações do professor que solicitam informações dos alunos a respeito do que fizeram, tendo como objeto observar como os alunos estão pensando e qual a compreensão estão tendo sobre aquele tema. A categoria **Guiar/Apoiar** envolve as ações “em que o professor, a partir de perguntas ou explicações, conduz o pensamento do aluno para uma determinada situação ou focaliza fatos importantes ou ainda quando o professor fornece pistas aos alunos e os encoraja a pensarem sobre suas respostas” (Araman; Serrazina; Ponte, 2019, p. 476). A categoria **Informar/Sugerir** abarca as ações pelas quais o professor valida ou corrige uma resposta dada pelos alunos, ou, ainda, quando fornece explicações ou informações e solicita ou apresenta outras estratégias de solução. A categoria **Desafiar** envolve “as ações nas quais o professor tenta colocar os alunos em situação desafiadora de modo que estes avancem em seu raciocínio matemático, procurando novas formas de representação, estabelecendo novas conexões, refletindo e avaliando a situação, generalizando e justificando” (Araman; Serrazina; Ponte, 2019, p. 476).

Tarefa

Nesta seção, apresentamos a tarefa, incluindo uma proposta detalhada para a sua implementação, oferecendo um guia prático para o professor. Além disso, apresentamos sugestões de intervenções pedagógicas que podem apoiar os alunos a mobilizarem os processos de raciocínio matemático, como conjecturar, generalizar e justificar.

Tendo como base as categorias e ações apresentadas no Quadro 2, identificamos e classificamos diferentes estratégias que o professor pode utilizar para promover o desenvolvimento do raciocínio matemático.

As sugestões apresentadas visam auxiliar o professor a criar um ambiente de aprendizagem que favoreça a construção de conhecimentos matemáticos pelos alunos.

Por meio dos dados coletados, o objetivo da tarefa é encontrar um modelo matemático que permita obter a temperatura da água em qualquer instante t , depois discutir e analisar esse modelo obtido.

Para isso, sugerimos dividir a tarefa em três etapas, onde cada etapa é dependente da anterior, conforme descrito a seguir:

Primeira etapa: realizar as medições da temperatura da água.

Segunda etapa: com os dados obtidos na primeira etapa, desenvolver um modelo matemático que permita obter a temperatura da água em qualquer instante t .

Terceira etapa: discutir e analisar o modelo matemático obtido na etapa anterior.

Primeira etapa: realizar as medições de temperatura da água

Materiais

- ***Recipientes com água*** (quente ou fria). Uma sugestão é que cada grupo utilize um recipiente diferente (copo de plástico, de vidro, de plástico, de alumínio);
- Disponibilizar um ***termômetro culinário*** para cada grupo (se houver uma quantidade suficiente, se não, fazer o rodizio de termômetro);
- ***Relógio ou cronômetro***;
- ***Uma folha para o registro*** das medições de temperatura, conforme apresentada em anexo (***pronta para a impressão***).

Sugestão de procedimento

Inicialmente, o professor deve separar os alunos em grupo e orientar os alunos a anotarem a temperatura ambiente no momento do início da aula e a realizarem a primeira medição da temperatura da água. A partir daí, cada grupo ficará responsável por medir a temperatura da água, deixada em temperatura ambiente, a cada 10 minutos por cerca de 100 minutos.

O professor poderá auxiliar os grupos na coleta das temperaturas, orientando-os a seguir o procedimento: os alunos devem colocar o termômetro culinário no recipiente com água, esperar um pouco (até a medida do termômetro estabilizar) e, em seguida, anotar na folha de registro o horário e a temperatura observada naquele instante.

Durante esse processo de coleta de dados, o professor poderá fazer perguntas aos alunos, estimulando-os a começar a formular conjecturas sobre a tarefa.

Possíveis intervenções

Para iniciar a tarefa, o professor pode **convidar** os alunos a participarem da realização da tarefa, contextualizando-a com os conteúdos teóricos já estudados. Essa conexão é importante para que os alunos percebam a relevância da tarefa e se sintam mais engajados.

Durante o processo de coleta de dados o professor em ação de **guiar/apoiar** visando incentivar a explicação, pode fazer perguntas abertas que incentivem os alunos a interpretar os resultados. Exemplos:

- O que vocês observam nesses dados?
- O que acontece com a temperatura do objeto ao longo do tempo?
- A variação é constante?
- Quais fatores envolvem a situação? (temperatura do ambiente, temperatura do líquido, a superfície exposta, o calor específico da água, características do meio ambiente)

Caso os estudantes mencionem que a variação da temperatura está diminuindo (ou aumentando, a depender da temperatura da água de cada grupo), o professor pode, em ação de **informar/sugerir**, validar a resposta correta fornecida pelos alunos, corrigir respostas incorretas fornecidas pelos alunos, ou até mesmo re-elaborar as respostas fornecidas por eles. O objetivo é que os alunos compreendam a relação que existe com a temperatura ambiente.

Possíveis intervenções

Após os alunos acumularem uma quantidade significativa de dados, o professor, em ação de **guiar/apoiar**, pode direcionar a atenção dos alunos para a organização e análise dos resultados. Neste momento, ele pode levantar questões como:

- Como podemos estruturar os dados coletados para facilitar a análise?
- Que tipo de gráfico seria mais apropriado para ilustrar essas informações?
- Qual gráfico vocês acreditam que melhor demonstraria a relação entre tempo e temperatura? E qual seria a justificativa?

Essas indagações podem estimular uma reflexão sobre as melhores maneiras de visualizar e interpretar os resultados. Ao fomentar a discussão sobre a seleção da representação gráfica, o professor contribui para que os alunos desenvolvam habilidades em visualização de dados e compreendam a relevância de escolher a ferramenta mais adequada para cada análise.

Possíveis intervenções

Depois que os alunos coletarem uma quantidade significativa de dados, é possível que eles indaguem ao professor até quando será necessário continuar a coleta. Caso eles não façam essa pergunta, o professor pode aproveitar o momento para **desafiar** os alunos, questionando:

- Será que precisamos coletar mais dados? Até que ponto?
- É necessário coletar dados até a temperatura do objeto se igualar à temperatura ambiente? Por quê?
- Qual é a quantidade ideal de dados para que possamos obter resultados confiáveis?

Essas perguntas incentivam os alunos a refletirem sobre a real necessidade de continuar coletando dados e a considerar a qualidade das informações já obtidas.

Segunda etapa: com os dados obtidos na primeira etapa, desenvolver um modelo matemático que permita obter a temperatura da água em qualquer instante t .

Materiais

- Entregue aos alunos, ***os dados coletados no primeiro dia***. Você pode optar por entregar a folha do próprio grupo, cópias dos dados dos outros grupos ou até mesmo fornecer os dados digitados junto com um enunciado, selecionando os dados de um grupo que utilizou água gelada e de outro utilizou água quente. Em nossa experiência, optamos por entregar duas folhas com os dados (uma referente à água quente e a outra à água fria) com o seguinte enunciado: *Encontrar um modelo matemático que permita obter a temperatura da água em qualquer instante t* , conforme apresentado a seguir:

Dados coletados no dia 12 de abril.
Tipo de material utilizado: Copo UTFPR
(Plástico)
Temperatura do ambiente: 26,4° C

Horário	Temperatura da água Termômetro culinário
16h10	74,6 °C
16h19	61 °C
16h29	53,8 °C
16h39	48,1 °C
16h50	43,6 °C
17h	40,2 °C
17h10	38,1 °C
17h21	36,3 °C

Encontrar um modelo matemático que permita encontrar a temperatura da água em qualquer instante t.

Dados coletados no dia 12 de abril.
Tipo de material utilizado: Copo de vidro (água gelada)
Temperatura do ambiente: 26,4° C

Horário	Temperatura da água Termômetro culinário
16h06	3,3 °C
16h18	8,9 °C
16h28	12,1 °C
16h38	15 °C
16h49	17,3 °C
17h	19,2 °C
17h09	20,1 °C
17h19	20,9 °C

Encontrar um modelo matemático que permita encontrar a temperatura da água em qualquer instante t.

Por meio dos dados coletados e do enunciado da tarefa, o professor esperava que os alunos compreendessem que, na situação proposta, a taxa da variação da temperatura é proporcional à diferença entre a temperatura T e a temperatura ambiente T_a , isto é,

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a) \quad (\text{onde } k > 0)$$

Ou seja, no modelo matemático que representa a Lei do resfriamento de Newton. É importante destacar que este modelo matemático é classificado com uma EDO de 1º ordem, linear e de variáveis separáveis

Sugestão de procedimento

Caso a etapa seja feita em outro dia, comece organizando a sala mantendo os mesmos grupos da etapa anterior.

Caso você opte por devolver a folha com os dados que o próprio grupo conseguiu coletar ou cópias dos dados dos outros grupos, seria interessante incluir uma folha adicional ou escrever no quadro a seguinte instrução: “Encontre um modelo matemático que permita obter a temperatura da água em qualquer instante t ”, pois isso dará uma direção para os alunos.

Além disso, seria bom sugerir que os alunos tragam seus *notebooks* nessa etapa, caso tenham interesse, para que possam analisar os dados utilizando algum *software*.

Durante o desenvolvimento da tarefa, o professor deve fazer perguntas aos alunos, apoiando o desenvolvimento dos processos de raciocínio matemático.

Possíveis intervenções

Para dar continuidade à tarefa, o professor pode **convidar** os alunos a utilizarem o conjunto de dados que foram coletados no primeiro momento. Eles deverão fazer uma análise e criar um modelo que possibilite determinar uma expressão capaz de calcular a temperatura em qualquer instante.

Durante o desenvolvimento da tarefa, o professor pode **convidar** os alunos a apresentarem relatos de como estão desenvolvendo a tarefa. Como eles já vão ter os dados em mãos, o professor, em ação de **guiar/apoiar**, pode direcionar a atenção dos alunos para a organização e análise dos resultados.

Caso os alunos estejam organizando os dados no papel, o professor, em ação de **informar/sugerir**, pode incentivar os alunos a reproduzir procedimento e analisar os dados com auxílio de algum *software*, pois, com isso, o professor está incentivando os alunos a fornecerem múltiplas estratégias de resolução.

Com os dados organizados, o professor pode, em ação de **guiar/apoiar**, direcionar a atenção dos alunos para a construção do gráfico. Neste momento, conceitos como variável dependente (temperatura) e independente (tempo) podem ser revisados e aplicados na prática. Perguntas como:

Possíveis intervenções

- Qual é a variável dependente neste experimento? E a variável independente?
- Qual tipo de gráfico vocês acham que melhor representará a relação entre essas duas variáveis? Por quê?
- Como vocês irão escolher a escala para cada eixo do gráfico?

Podem estimular a reflexão sobre a escolha da representação gráfica mais adequada.

Caso os alunos não apresentem um modelo matemático utilizando uma EDO, o professor pode aproveitar o momento para **desafiar**, questionando-os:

- Com o passar do tempo t , o que se pode dizer a respeito da variação da temperatura T ?
- O que seria a taxa de variação da temperatura, neste caso?
- É possível estabelecer alguma relação entre essa taxa de variação e as temperaturas T e T_a ? Qual?

Essas perguntas incentivam os alunos a refletirem sobre o modelo a ser construído.

Terceira etapa: discutir e analisar o modelo matemático obtido na etapa anterior.

Sugestão de procedimento

Comece a terceira etapa convidando um representante de cada grupo a apresentar o modelo matemático construído para a turma toda, promovendo uma discussão e análise coletiva de cada um desses modelos e faça questionamentos sobre isso. Após as apresentações dos grupos sobre as EDO que construíram, o professor deve orientá-los a resolverem suas EDO (sem indicar um método específico para resolução) e, em seguida, validar o modelo construído. Para essa validação, os alunos podem voltar aos dados coletados pelos seus próprios grupos no primeiro dia ou utilizarem os dados de outros grupos caso o professor entregue. Assim como na etapa anterior, se desejarem, permita que os alunos utilizem livremente o *software GeoGebra* ou outra ferramenta semelhante. Após finalizarem a resolução e a validação, o professor pode convidar novamente os alunos a compartilharem suas resoluções para a turma, permitindo que apresentem diferentes abordagens de resolução (seja de forma algébrica ou e geométrica, por exemplo) além de diferentes ferramentas computacionais, se for o caso.

Por último, o professor deve realizar uma sistematização das aprendizagens dos alunos, dialogando com cada grupo a respeito das conclusões que tiraram, principalmente a respeito da validade do modelo obtido, do significado da constante de proporcionalidade, do papel da condição inicial para a determinação da constante de integração que surge na integral indefinida e das limitações do modelo quando comparado à realidade.

Possíveis intervenções

Para iniciar a finalização da tarefa, o professor pode **convidar** que cada grupo apresente e comente o modelo matemático que foi construído no momento anterior para toda a turma. Isso irá promover uma discussão e uma análise coletiva de cada modelo. Em ação de **desafiar** o professor pode ir fazendo perguntas sobre os modelos apresentados.

Pode acontecer dos grupos apresentarem modelos parecidos, por exemplo:

- $dC/dt = k*(26,4 - C)$ (Grupo 1)
- $dC/dt = k*(C - 26,4)$ (Grupo 2)
- $dC/dt = k*C$ (Grupo 3)

Se isso acontecer o professor pode desafiar os alunos questionando:

- O que muda nas equações apresentadas pelos grupos?
- No caso dos Grupos 1 e 2, que diferença faz estar 26,4 menos T, e estar T menos 26,4? O que muda essa ordem estar trocada?
- O que acontece com a taxa de resfriamento quando a temperatura do objeto se aproxima de 26,4°C em cada um dos modelos?
- Como podemos verificar experimentalmente qual dos modelos está mais próximo da realidade?
- Quais dados experimentais poderíamos utilizar para comparar os modelos?

Com este tipo de questionamento, o professor estimula os alunos a pensarem criticamente sobre os modelos matemáticos que eles construíram, relacionando-os com o fenômeno físico observado.

Possíveis intervenções

Depois da discussão do modelo, os alunos precisam resolver a EDO. Nesse momento, é comum que eles enfrentem algumas dificuldades, tais como:

- **Esquecimento da constante de integração:** é importante lembrar os alunos que a integração é um processo inverso da derivação e que, em uma integral indefinida, sempre surge uma constante arbitrária. Essa constante poderá ser determinada pelas condições iniciais do problema de valor inicial.
- **Dificuldade em determinar a constante de integração:** a constante de integração pode ser encontrada utilizando as condições iniciais do problema de valor inicial. Por exemplo, no caso da Lei de Resfriamento de Newton, a temperatura inicial do objeto é uma condição inicial que permite determinar o valor da constante.
- **Erros de cálculo:** É comum cometer erros de cálculo, especialmente em problemas mais complexos. Para evitar esses erros, os alunos podem utilizar calculadoras ou *softwares* de cálculo simbólico para verificar seus resultados.

Nesse contexto, em ação de **desafiar** os alunos, o professor pode sugerir o uso de ferramentas computacionais para validar seus resultados e visualizar o comportamento dos dados. A validação dos resultados é fundamental para garantir a confiabilidade do modelo matemático. Ao comparar os resultados teóricos com os dados experimentais, os alunos podem identificar possíveis discrepâncias e ajustar o modelo, se necessário.

Uso da tecnologia

A tecnologia desempenha um papel cada vez mais importante na resolução de problemas matemáticos. Ferramentas computacionais como o *GeoGebra* e o *Python* oferecem recursos poderosos para visualizar, analisar e validar soluções de equações diferenciais.

Com essas ferramentas, podemos visualizar o comportamento da solução de forma intuitiva, explorar diferentes cenários, comparar os resultados com dados experimentais e economizar tempo em cálculos complexos.

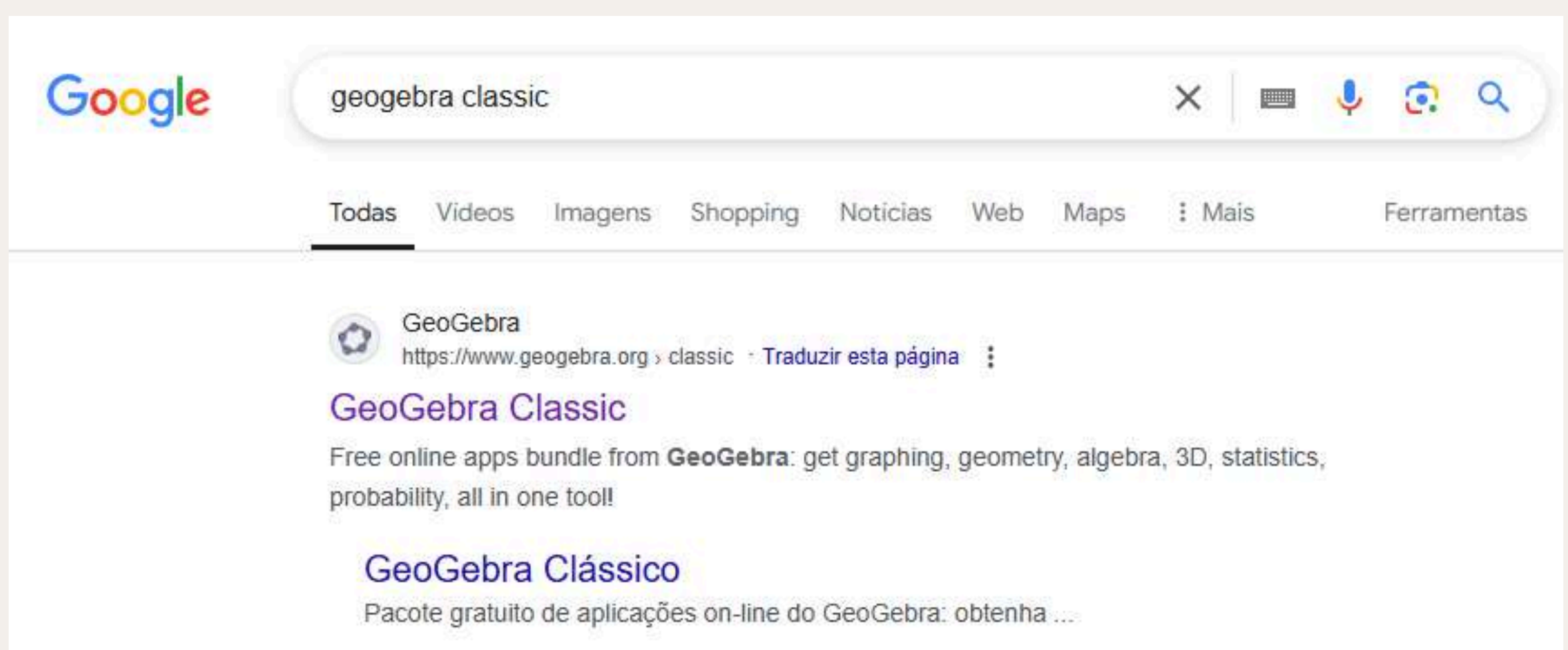
Nesta seção, iremos aprender a utilizar essas ferramentas para auxiliar na resolução da EDO que modela o resfriamento de um objeto, além de explorar suas diversas aplicações.

Com isso em mente, apresentamos um guia passo a passo para o desenvolvimento da EDO de resfriamento, utilizando tais recursos. Também vamos mostrar como esses recursos podem ser acessados de forma online, disponibilizando links que permitem ao leitor acesso direto aos sites correspondentes.

GeoGebra

Você pode utilizar o *GeoGebra* instalando o programa no seu computador ou acessando a versão online.

Se optar pela versão online, basta fazer uma busca no Google por "*GeoGebra Classic*" e acessar o primeiro link, como apresentado na imagem a seguir:

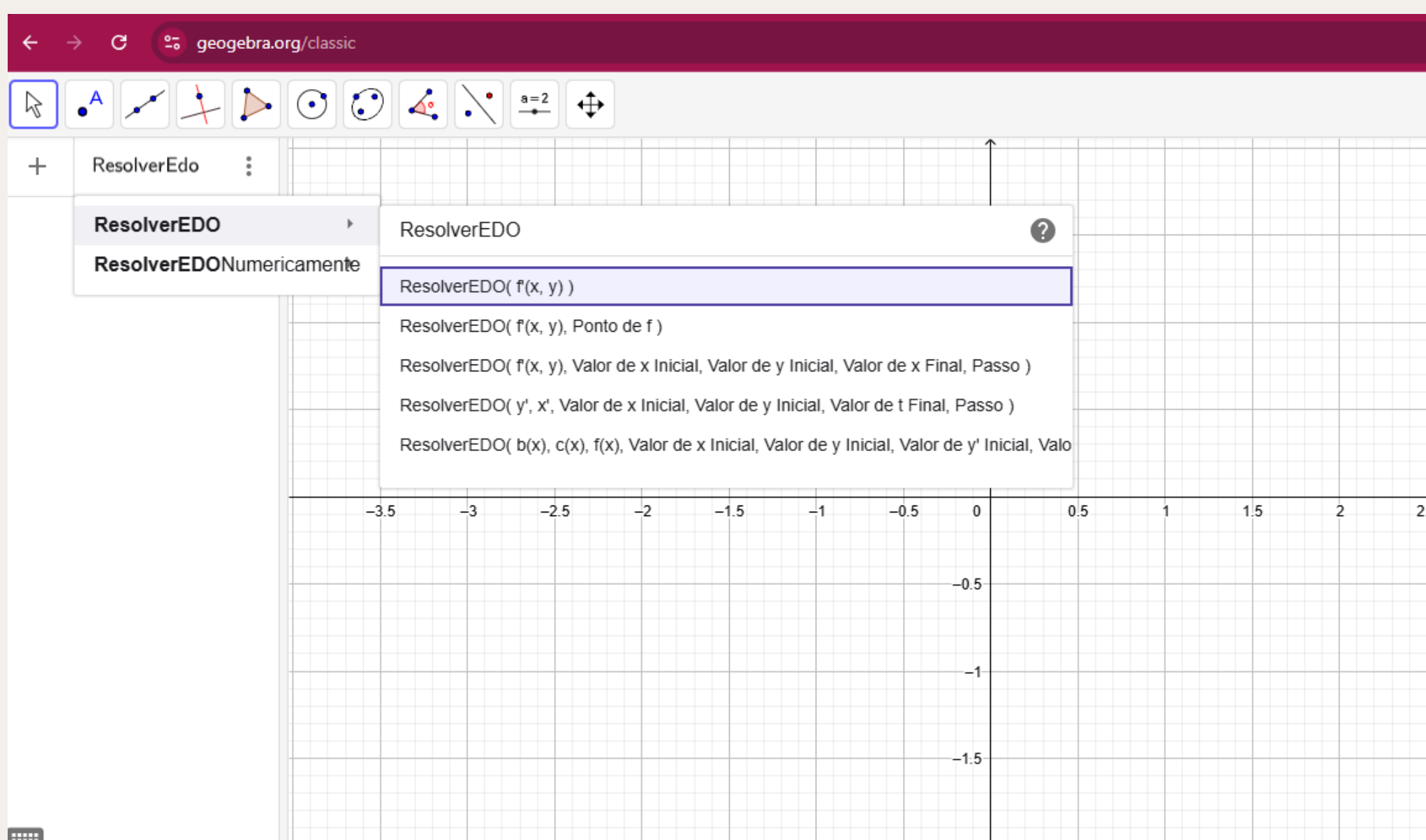


Alternativamente, você pode acessar diretamente por este link:

<https://www.geogebra.org/classic>

DESENVOLVIMENTO DA EDO DE RESFRIAMENTO UTILIZANDO O GEOGEBRA

No campo “Entrada” do *GeoGebra*, ao escrever “ResolverEDO”, aparecerão diferentes opções, conforme mostra a figura abaixo:



Escolhendo a opção “ResolverEDO[<f'(x, y)>, <Ponto de f>]”, é necessário:

1) informar a função $f'(x, y)$ sendo que, neste caso, $\frac{dy}{dx} = f'(x, y)$; e

2) informar um ponto $(x, f(x))$ dado que pertence ao gráfico da solução da equação diferencial. Esse ponto, muitas vezes indicado por $y(x_0) = y_0$, é a **condição inicial** e, junto com a equação diferencial dada, forma um **Problema de Valor Inicial** (PVI).

Utilizando a EDO:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a) \quad (k > 0)$$

assumindo T_a como sendo $26,4^\circ \text{C}$.

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - 26.4) \quad (k > 0)$$

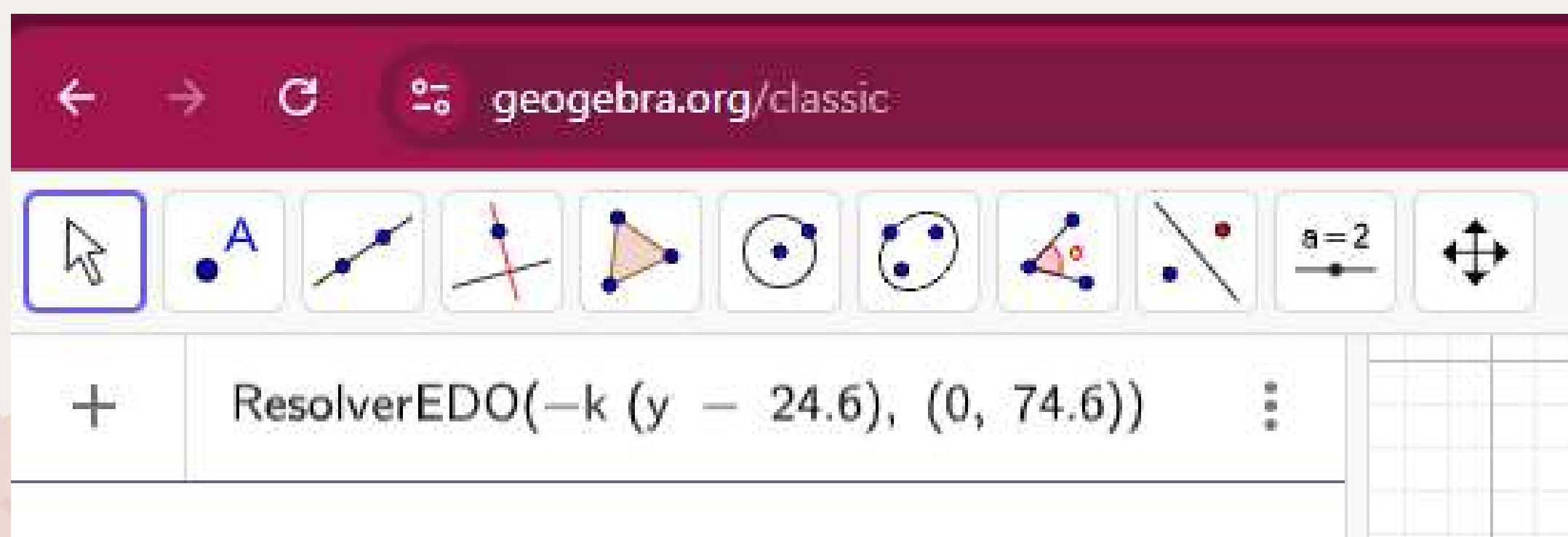
E considerando a condição inicial como sendo $(0, 74.6)$, isto é, no instante $x = 0$, a temperatura inicial da água era $74,6$.

É importante ressaltar que, no *GeoGebra*, as variáveis são representadas pelas letras x (variável dependente) e y (variável independente). Também é importante destacar que a forma decimal de um número é representada utilizando ponto e não vírgula. Por exemplo, a temperatura inicial é 74.6 .

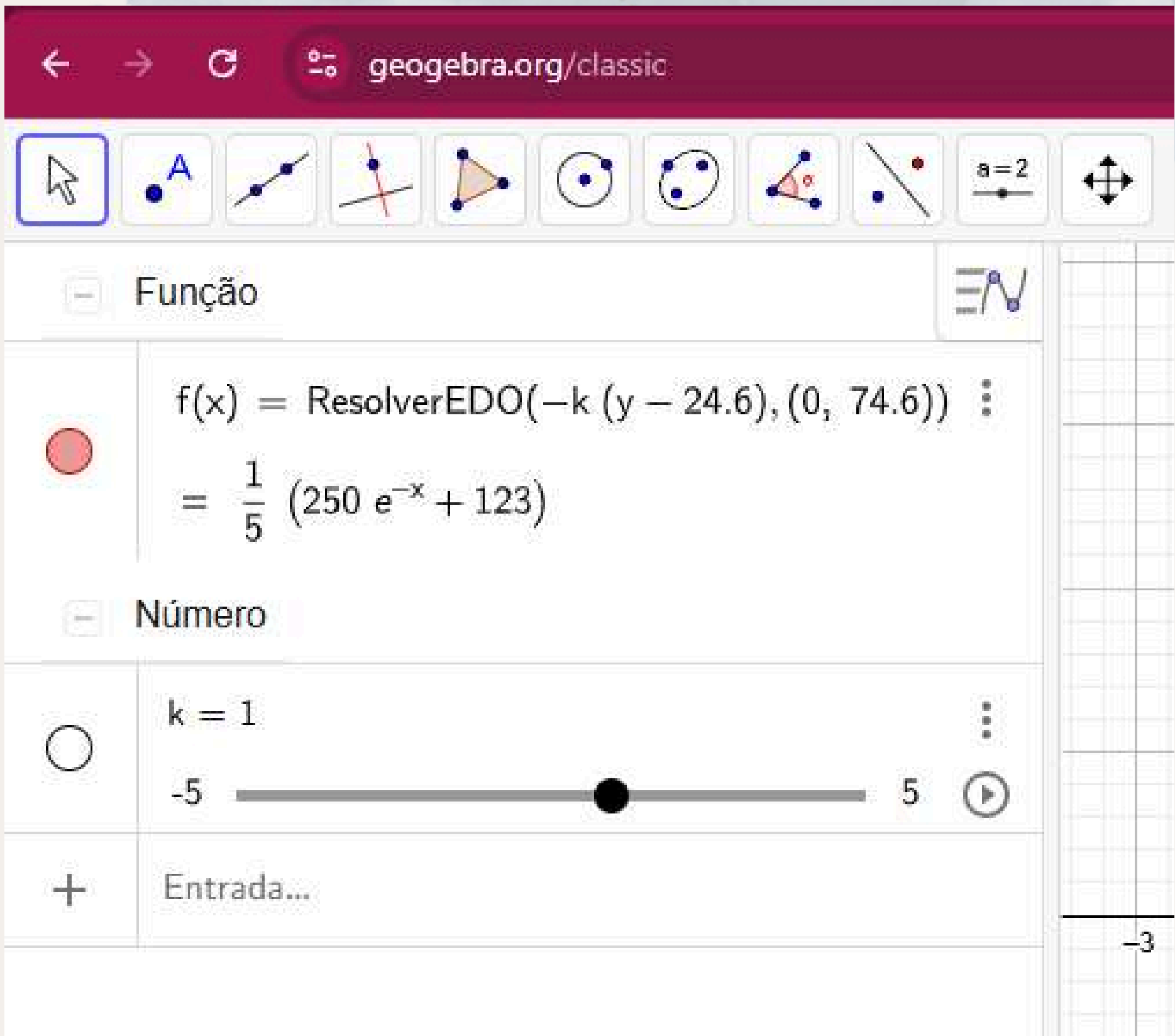
Para inserir essas informações no GeoGebra, fizemos:

$$\text{ResolverEDO}(-k*(y - 24.6), (0, 74.6))$$

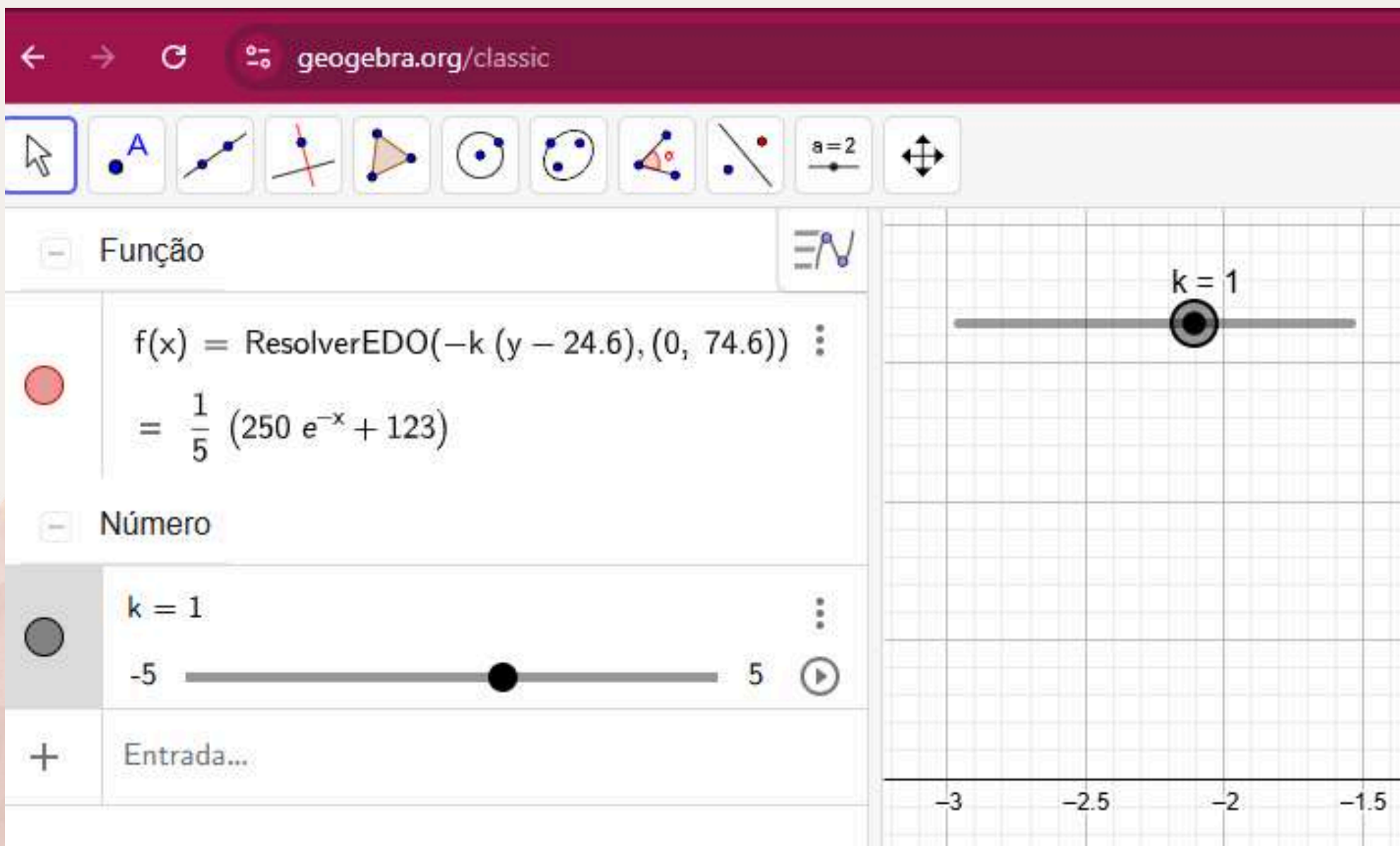
Como mostra a imagem abaixo:



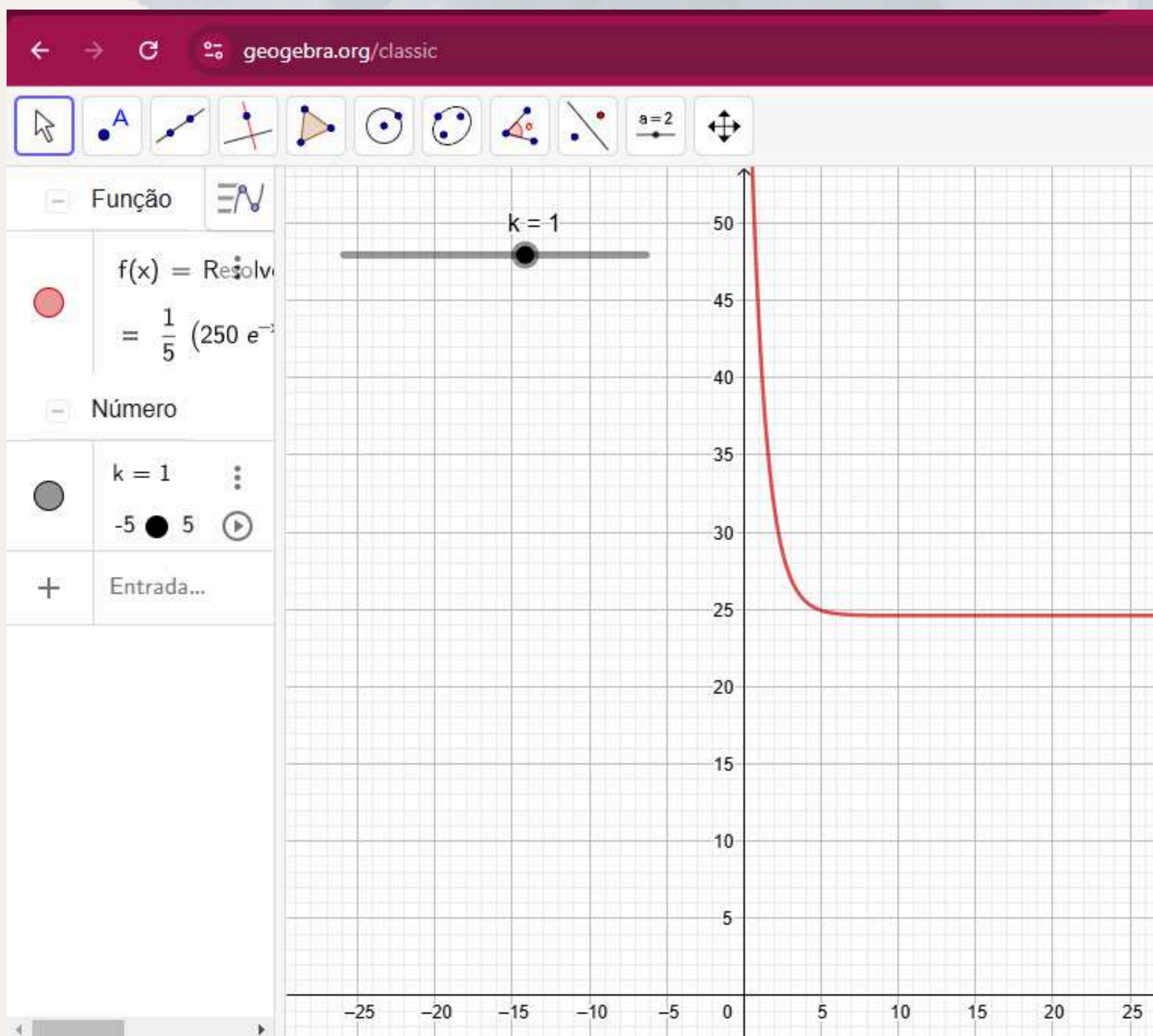
Assim que você apertar a tecla *Enter* do seu computador o *GeoGebra* irá criar um controle deslizante para a constante k , conforme apresentada na imagem abaixo:



Dica: Toque no ícone (bolinha branca) do controle deslizante. Ao selecionar essa opção, um atalho aparecerá no *GeoGebra*, tornando mais fácil a manipulação dos valores.



Ao criar o controle deslizante para k , o *GeoGebra* irá gerar o gráfico da solução da EDO, que variará de acordo com o valor de k , conforme indica a figura abaixo.



Ao clicar duas vezes sobre o controle deslizante k , irá aparecer uma janela aonde será possível modificar o intervalo e o incremento com que k varia. Caso a janela não apareça dessa forma, é possível clicar com o botão secundário do mouse (botão direito) e escolher a opção *configurações*. Na figura abaixo, fizemos k variar de 0 a 5 e incremento 0.001

Básico

Controle Deslizante

Cor

Posição

Avançado

Álgebra

Programação

min

0

max

5

Incremento

0.001

☒ Fixo
☐ Aleatório (F9)

Horizontal

Velocidade

1

Repetir

↔ Oscilando

☒ Exibir Controle Deslizante na Janela de Álgebra

Estilo do Ponto

Tamanho

5

px

Cor:

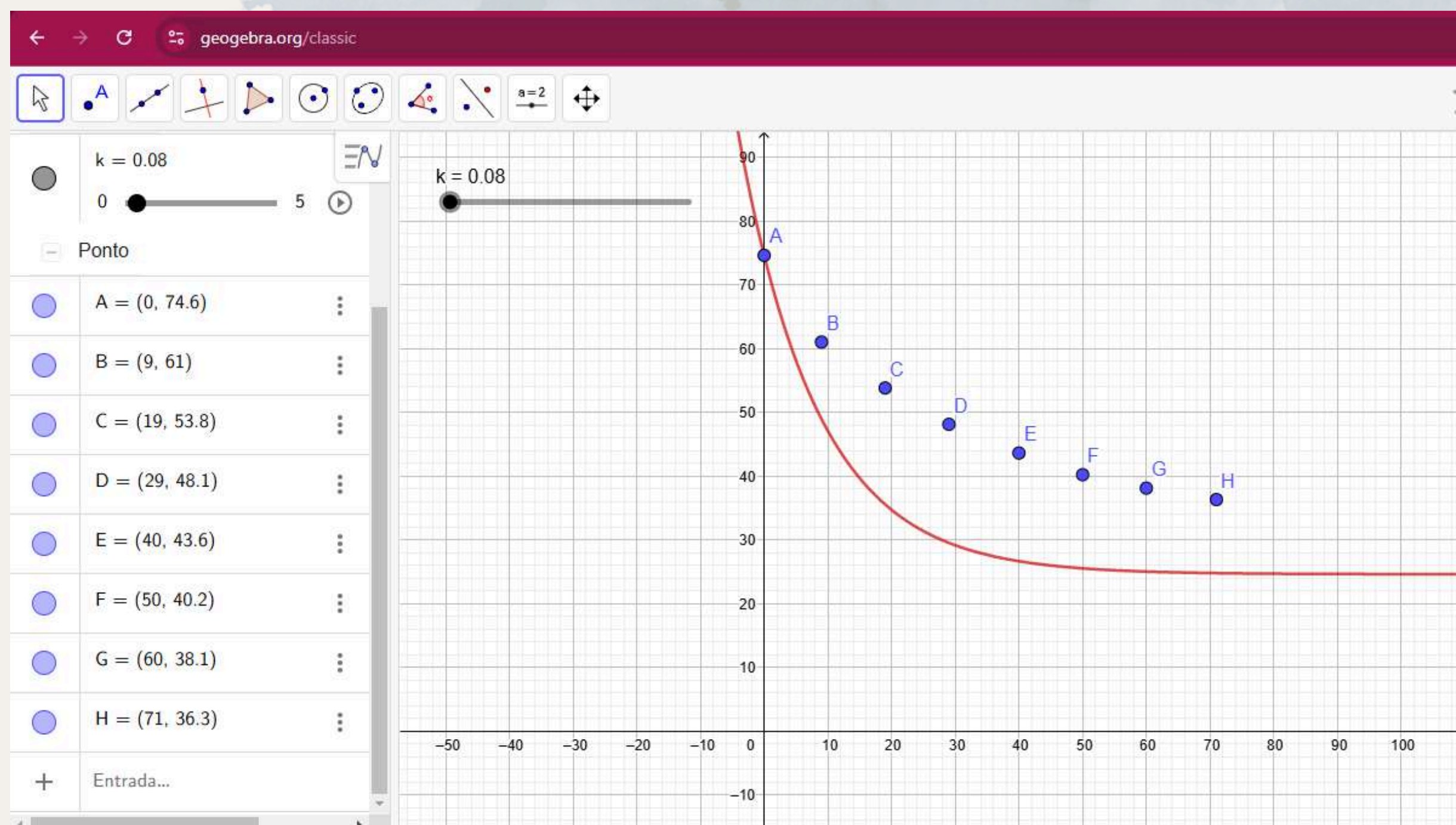
✕

⚙️

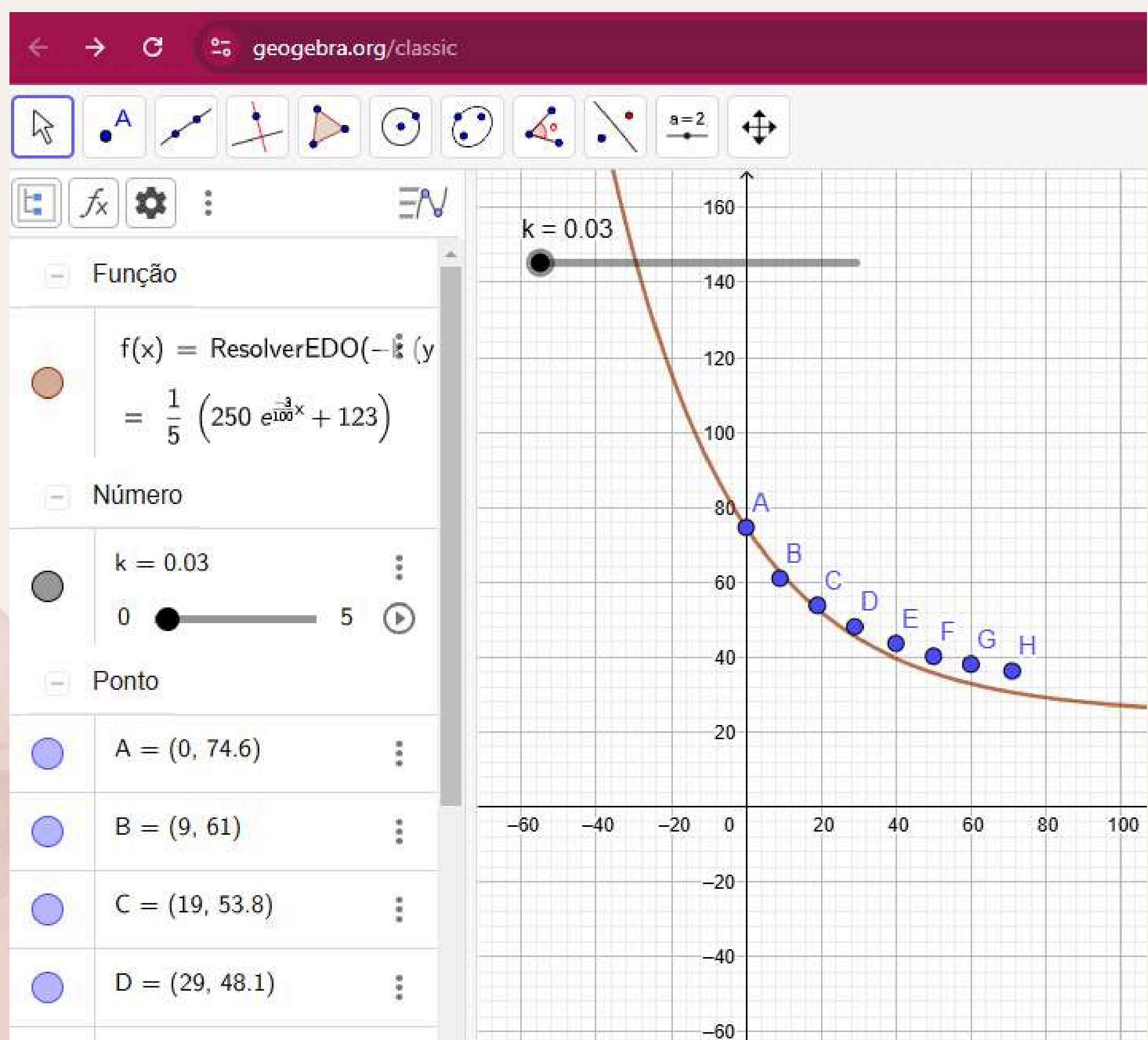
Pronto, agora é possível fazer a constante k assumir diferentes valores e analisar o comportamento do gráfico da solução da EDO.

Para estimar um valor para k de modo que o gráfico da solução se aproxime do comportamento dos pontos $(t, T(t))$ da tabela obtida a partir da medição das temperaturas a cada instante t , criamos os pontos A, B, C, D, E, F, G e H no *GeoGebra*. Para tanto, na “Entrada”, digitamos “A=(0, 74.6)”, “B=(9, 61)”, “C=(19, 53.8)” e assim por diante.

A figura abaixo ilustra esses pontos:



Ao movermos o controle deslizante k para aproximadamente $k=0.03$, obtemos o gráfico abaixo:



Na janela de Álgebra, temos a função:

$$f(x) = \frac{1}{5} \left(250 e^{\frac{-3}{100}x} + 123 \right)$$



É possível usar o *Python* instalando o programa em seu computador, mas caso prefira, existem várias opções para programar online com *Python*, incluindo editores e compiladores disponíveis de forma online.

Se optar pela versão online, sugerimos o site MyCompiler. Basta fazer uma pesquisa no Google por "*my compiler python*" e acessar o primeiro link que aparecer, como apresentado na imagem a seguir:



Se preferir, você pode acessar diretamente por este link:

<https://www.mycompiler.io/pt/new/python>

DESENVOLVIMENTO DA EDO DE RESFRIAMENTO UTILIZANDO O PYTHON

Será apresentado o passo a passo da resolução e, em seguida, o código com valores de exemplo¹.

1.Importar bibliotecas necessárias para a resolução do problema:

```
import numpy as np
from scipy.integrate import odeint #integrar
import matplotlib.pyplot as plt #plotar gráfico
```

2.Definir a função do problema:

```
#função que retorna dy/dt
def temperatura(y,t):
    dydt = -0.02*(y-25) #considerando k=0,02 e Ta = 25°
    return dydt
```

3.Definir condição inicial do problema:

```
#condição inicial (ex: T0 = 80°)
y0 = 80
```

4. Definir o intervalo que resfriamento ocorre (utilizar função *Linspace* do *NumPy* para criar sequência de números uniformemente espaçados, apresentando os valores inicial e final):

```
#intervalo de tempo (ex: T0 = 0s e tn= 300s)
t = np.linspace(0,300)
```

¹ Agradecemos à estudante Mariana Martini Rodrigues do curso de Engenharia Química da UTFPR pela colaboração no desenvolvimento da EDO de Resfriamento de Newton utilizando Python durante sua Iniciação Científica orientada pelo professor HenriqueRizekElias .

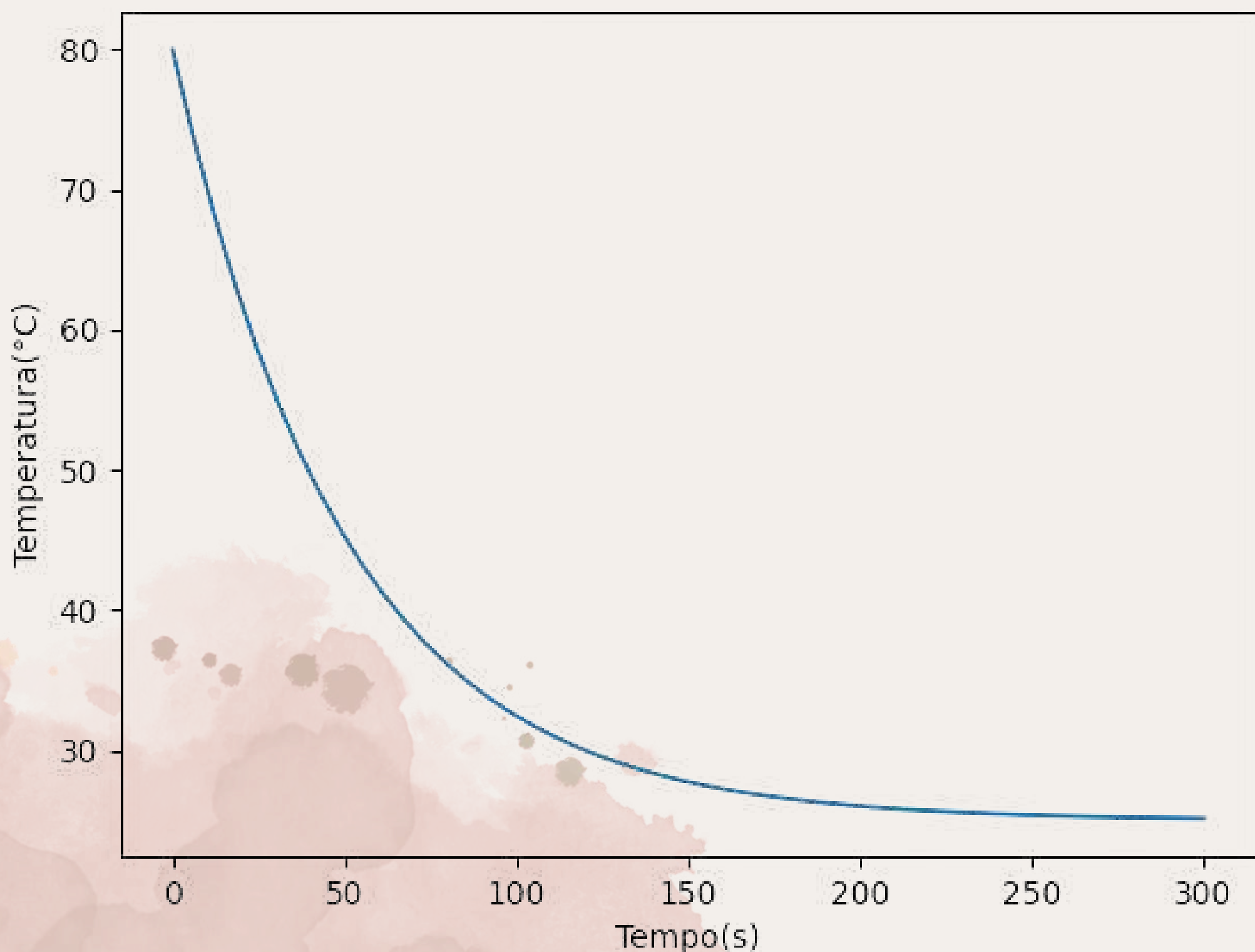
5. Resolver EDO utilizando função Odeint importada de SciPy:

```
#resolver EDO
y = odeint(temperatura, y0, t)
```

6. Plotar gráfico que represente o comportamento da EDO apresentada:

```
#plotar resultados
plt.plot(t,y)
plt.xlabel('Tempo(s)') #nome do eixo x
plt.ylabel('Temperatura(°C)') #nome do eixo y
plt.show()
```

7. A imagem a seguir apresenta o resultado em forma gráfica, onde pode-se observar a redução da temperatura do fluido com o passar do tempo:



A seguir, apresentamos o **código completo**, implementado em *Python*, que foi utilizado:

```
import numpy as np
from scipy.integrate import odeint #integrar
import matplotlib.pyplot as plt #plotar gráfico

#função que retorna dy/dt
def temperatura(y,t):
    dydt = -0.02*(y-25) #considerando k=0,02 e Ta = 25°
    return dydt

#condição inicial (ex: T0 = 80°)
y0 = 80

#intervalo de tempo (ex: T0 = 0s e tn= 300s)
t = np.linspace(0,300)

#resolver EDO
y = odeint(temperatura, y0, t)

#plotar resultados
plt.plot(t,y)
plt.xlabel('Tempo(s)') #nome do eixo x
plt.ylabel('Temperatura(°C)') #nome do eixo y
plt.show()
```


Dica: Se você optar pela versão online “MyCompiler”, basta copiar o código *Python* apresentado na página anterior e colá-lo diretamente na área de código do site. Essa área é onde você digita ou insere o código que deseja executar. Após colar o código, clique no botão **Execução**, ao clicar nesse botão, o MyCompiler irá processar o seu código e mostrar o resultado. Conforme ilustra a imagem a seguir:

The screenshot shows the MyCompiler.io website interface. At the top, there's a browser tab labeled "Criar um novo programa Python" and the address bar shows "mycompiler.io/pt/new/python". Below the browser bar, there's a text input field for a title, a language selector set to "Python", and buttons for "Execução" (Execution) and "Salvar" (Save). The main area is a code editor containing the following Python code:

```
1 import numpy as np
2 from scipy.integrate import odeint #integrar
3 import matplotlib.pyplot as plt #plotar gráfico
4
5 #função que retorna dy/dt
6 def temperatura(y,t):
7     dydt = -0.02*(y-25) #considerando k=0,02 e Ta = 25°
8     return dydt
9
10 #condição inicial (ex: T0 = 80°)
11 y0 = 80
12
13 #intervalo de tempo (ex: T0 = 0s e tn= 300s)
14 t = np.linspace(0,300)
15
16 #resolver EDO
17 y = odeint(temperatura, y0, t)
18
19 #plotar resultados
20 plt.plot(t,y)
21 plt.xlabel('Tempo(s)') #nome do eixo x
22 plt.ylabel('Temperatura(°C)') #nome do eixo y
23 plt.show()
24
```

To the right of the code editor, there's a section for "Saída do programa" (Program Output). It shows the message "[Execution complete with exit co" and a line plot. The plot has "Tempo(s)" on the x-axis (ranging from 0 to 300) and "Temperatura(°C)" on the y-axis (ranging from 30 to 80). The curve starts at 80°C at 0s and decays exponentially towards 25°C.

At the bottom right, there's a sidebar with a dark theme icon set and a promotional message: "Design and Development tips in your inbox. Every weekday. ADS VIA CARBON".

Algumas Considerações

Neste Produto Educacional, apresentamos uma proposta pedagógica inovadora para o ensino de Equações Diferenciais Ordinárias, com foco na Lei do Resfriamento de Newton. A tarefa exploratória proposta visa estimular a compreensão dos alunos sobre a relação entre a taxa de variação da temperatura e a diferença entre a temperatura do objeto e a temperatura ambiente.

Ao longo deste ebook, detalhamos as ações do professor que podem apoiar o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos, desde a introdução do conceito até a resolução da EDO. Além disso, fornecemos um guia passo a passo para a utilização de ferramentas computacionais como o *GeoGebra* e o *Python*, facilitando a visualização e a análise dos resultados.

Esperamos que este material sirva como inspiração para outros professores que buscam inovar em suas práticas pedagógicas. A tarefa proposta pode ser adaptada para diferentes níveis de ensino e contextos, permitindo a exploração de diversos aspectos das EDOs.

Reconhecemos que a implementação de práticas inovadoras demanda tempo e dedicação. No entanto, acreditamos que os benefícios em termos de aprendizagem dos alunos justificam o esforço.

Referências

ARAMAN, E. M. D. O.; SERRAZINA, M. D. L.; DA PONTE, J. P. “Eu perguntei se o cinco não tem metade”: ações de uma professora dos primeiros anos que apoiam o raciocínio matemático. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 21, n. 2, p. 466-490, 2019.

MATA-PEREIRA, J.; PONTE, J. P. Promover o Raciocínio Matemático dos Alunos: uma investigação baseada em design. **Bolema**. Rio Claro, v. 32, n. 62, p. 781–801, 2018.

MORAIS, C.; SERRAZINA, L.; PONTE, J. P.. Mathematical reasoning fostered by (fostering) transformations of rational number representations. **Acta Scientiae**, v. 20, n. 4, 2018.

PONTE, J. P; QUARESMA, M.; MATA-PEREIRA, J. Como desenvolver o raciocínio matemático na sala de aula? **Educação e Matemática**, n. 156, p. 7-11, 2020.

Grupo ____

Nomes dos integrantes do grupo:

Tipo de material (copo ou garrafa) utilizado:

Temperatura do ambiente:

Horário	Temperatura da água