

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

ADRIANO ALFREDO SCHNEIDER

**SISTEMAS DINÂMICOS E DIFEOMORFISMOS NO CÍRCULO:
HIPERBOLICIDADE E ESTABILIDADE**

TOLEDO

2023

ADRIANO ALFREDO SCHNEIDER

**SISTEMAS DINÂMICOS E DIFEOMORFISMOS NO CÍRCULO:
HIPERBOLICIDADE E ESTABILIDADE**

**Dynamical systems and diffeomorphisms on the circle:
hyperbolicity and stability**

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação
apresentado como requisito para obtenção do
título de Licenciado em Matemática do Curso
de Licenciatura em Matemática da Universidade
Tecnológica Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Leandro Antunes

TOLEDO

2023



[4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

Esta licença permite compartilhamento, remixe, adaptação e criação a partir do trabalho, mesmo para fins comerciais, desde que sejam atribuídos créditos ao(s) autor(es). Conteúdos elaborados por terceiros, citados e referenciados nesta obra não são cobertos pela licença.

ADRIANO ALFREDO SCHNEIDER

**SISTEMAS DINÂMICOS E DIFEOMORFISMOS NO CÍRCULO:
HIPERBOLICIDADE E ESTABILIDADE**

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação
apresentado como requisito para obtenção do
título de Licenciado em Matemática do Curso
de Licenciatura em Matemática da Universidade
Tecnológica Federal do Paraná.

Data de aprovação: 01 de dezembro de 2023

Leandro Antunes
Doutorado
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Wilian Francisco de Araujo
Doutorado
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Rodrigo Manoel Dias Andrade
Doutorado
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

**TOLEDO
2023**

AGRADECIMENTOS

Primeiramente gostaria de agradecer a minha família, que sempre me serviu de apoio, aos meus pais, Roberto e Lourdes, as pessoas que mais se preocuparam e me incentivaram em ter um futuro acadêmico. Agradeço também a minha irmã, Pâmela, por servir de exemplo de pessoa e profissional, e nunca deixar eu desanimar com a faculdade.

Agradeço ao meu orientador Prof. Dr. Leandro Antunes, principalmente pelo conhecimento, mas também pelo incentivo, paciência e apoio durante essa jornada, pois, ao concluí-la também ganhei um amigo.

Agradeço também a todos os professores do curso, sem eles essa passagem pela UTFPR não teria sido a mesma. Em especial, agradeço aos professores Rodrigo e Wilian, que deixaram marcas profundas na minha formação que acabaram me levando a esse trabalho.

Aos meus colegas e amigos Nilson, Felipe O., Felipe R. e Kellen, pelo apoio, momentos de estudos e descontração. Em especial, agradeço aos meus amigos que me acompanharam durante toda a trajetória, Daiane, Kauana e Mateus. Vocês permitiram que esse período fosse mais leve, foram minha família na universidade.

Enfim, a todos que fazem parte da minha vida e me fizeram chegar até aqui.

RESUMO

O presente trabalho discorre sobre alguns conceitos iniciais da teoria dos sistemas dinâmicos, tendo como foco principal o círculo. São estudados vários conceitos importantes, como pontos fixos, órbita, hiperbolicidade e estabilidade. O texto tem caráter exploratório, buscando uma introdução aos assuntos dos sistemas dinâmicos. Começamos introduzindo o que são os sistemas dinâmicos e explicando as iterações. O círculo é apresentado como um espaço métrico e com pontos 0 e 1 identificados. São apresentados então as primeiras propriedades de sistemas dinâmicos, como pontos fixos e periódicos, além das órbitas de um ponto. Abordamos o que são os pontos hiperbólicos e classificamos eles em pontos hiperbólicos atratores ou repulsores. Definimos o que são os difeomorfismos Morse-Smale e encontramos toda a dinâmica deles, através das propriedades vistas anteriormente. Por último, trabalhamos com a conjugação de difeomorfismos, observando sua estabilidade e demonstrando que difeomorfismos Morse-Smale são estruturalmente estáveis.

Palavras-chave: difeomorfismos Morse-Smale; rotações; pontos hiperbólicos.

ABSTRACT

This work discusses some initial concepts of the theory of dynamic systems, with the circle as its main focus. Several important concepts are studied, such as fixed points, orbit, hyperbolicity and stability. The text is exploratory in nature, seeking an introduction to the subjects of dynamic systems. We start by introducing what dynamic systems are and explaining iterations. The circle is presented as a metric space and with points 0 and 1 identified. The first properties of dynamic systems are then presented, such as fixed and periodic points, in addition to the orbits of a point. We address what hyperbolic points are and classify them as attractor or repulse hyperbolic points. We define what Morse-Smale diffeomorphisms are and find all their dynamics, through the properties seen previously. Finally, we work with the conjugation of diffeomorphisms, observing their stability and demonstrating that Morse-Smale diffeomorphisms are structurally stable.

Keywords: Morse-Smale diffeomorphisms; rotations; hyperbolic points.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Iteração da função $f(x) = \text{sen}(x)$ para $x_0 = 2$	11
Figura 2 – Iteração da função $f(x) = \text{cos}(x)$ para $x_0 = 1,42$	11
Figura 3 – Iteração da função $f(x) = 3,839x(1 - x)$ para $x_0 = 0,67$	12
Figura 4 – Iteração da função $f(x) = 3,839x(1 - x)$ para $x_0 = 0,48917$	12
Figura 5 – O círculo S^1	13
Figura 6 – Exemplos de funções contínuas do círculo	14
Figura 7 – Exemplo de pontos fixos	15
Figura 8 – Iterações da função $f(x) = \sqrt{x}$ para $x_0 = 0.3$ e $x_1 = 2.3$	17
Figura 9 – Gráfico da rotação para $\alpha = \frac{2}{3}$	18
Figura 10 – Gráfico da rotação para $\alpha = \frac{1}{2}$ e exemplo de iteração para um ponto qualquer	19
Figura 11 – Gráfico para $\alpha = 0$ ou 1 com ponto x fixo.	19
Figura 12 – Um ponto fixo não hiperbólico	22
Figura 13 – Um ponto fixo atrator	24
Figura 14 – Um ponto fixo repulsor	24
Figura 15 – Gráfico de $f(x) = \frac{\text{sen}(10 \cdot \pi \cdot x)}{20 \cdot \pi} + x$	25

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	7
2	CONCEITO INICIAIS	9
2.1	Sistemas dinâmicos	9
3	O CÍRCULO	13
3.1	Representação gráfica	14
3.2	Dinâmica no círculo	15
3.3	Rotações	18
4	HIPERBOLICIDADE E DINÂMICA DOS DIFEOMORFISMOS MORSE-SMALE	21
4.1	Pontos Hiperbólicos	21
4.2	Intervalos Monótonos	26
4.3	Difeomorfismos Morse-Smale	27
5	ESTABILIDADE DOS DIFEOMORFISMOS MORSE-SMALE	29
5.1	A métrica C^1 e Conjugações	29
5.2	Estabilidade Local	30
5.3	Estabilidade Global	31
6	CONCLUSÃO	35
	REFERÊNCIAS	36
	APÊNDICE A DEFINIÇÕES IMPORTANTES	38

1 INTRODUÇÃO

Observar padrões, criar modelos e tentar prever o futuro são áreas estudadas por matemáticos desde a Grécia antiga, porém, segundo Devaney (1989) apenas nos últimos 60 anos houve uma explosão de interesse no estudo de sistemas dinâmicos não lineares. Com o uso da geometria e de técnicas qualitativas foi possível compreender sistemas uma vez considerados impossíveis de serem trabalhados ou entendidos.

Podemos chamar de sistema um conjunto de objetos que podem ser agrupados, seja por alguma interação ou interdependência, e que existam relações entre os eventos que acontecem entre os seus elementos. Caso algumas de suas grandezas que caracterizam seus objetos variem com o tempo, chamamos esse sistema de dinâmico.

De forma mais simples, segundo Devaney (1989), podemos descrever um sistema dinâmico como ao digitar uma operação em uma calculadora e apertar o botão de igual repetidas vezes. Esse processo é um exemplo de sistema dinâmico discreto.

O que vimos no exemplo da calculadora é a iteração de funções, ou seja, sua composição, onde cada vez pegamos o resultado da função anterior e partimos dela para obter o próximo resultado.

Os sistemas dinâmicos são usados em várias áreas do conhecimento que vão além da matemática. Podemos encontrar eles em qualquer modelo que busca prever acontecimentos futuros, ou simplesmente acontecimentos que evoluem com o tempo. Dois exemplos de onde podem ser encontrados são: na biologia, em um modelo que descreva a população de determinada espécie com o passar do tempo; e na física, onde podemos determinar a posição de um pêndulo em certo momento dado o movimento que ele realiza.

Além disso, existem diversas razões para que busquemos determinar, ainda que teoricamente, a evolução temporal das grandezas que caracterizam um sistema. Algumas razões que podemos nomear aqui são: a não existência do sistema na prática; tentar explicar o comportamento de sistemas já existentes; e ainda o teste experimental ser muito caro ou perigoso para ser testado na prática.

Existem diversas formas de trabalharmos com os sistemas dinâmicos, podendo ser usado: na modelagem matemática, onde se pretende criar um modelo para representar determinado evento com o passar do tempo; podendo seguir na matemática pura, onde existem diversos caminhos a serem seguidos dentro do conteúdo, podendo ser uma análise inicialmente mais simples, como será visto neste trabalho, como podendo ir até sistemas dinâmicos discretos e o estudo do caos.

Este trabalho busca ser um estudo inicial sobre sistemas dinâmicos discretos, partindo de contextos simples, buscando ser uma motivação pela busca dos conceitos mais aprofundados.

Neste trabalho, serão feitos estudos apenas da parte de sistemas dinâmicos em uma dimensão, mais especificamente, no círculo. No Capítulo 2, será feita uma introdução mais

formal do que são sistemas dinâmicos e também algumas definições que serão importantes durante o trabalho. No Capítulo 3, definiremos o nosso objeto de estudo, o círculo, além de começar a entender alguns conceitos da dinâmica. No Capítulo 4, trataremos de compreender a dinâmica dos Difeomorfismos Morse-Smale. E por último, no Capítulo 5, serão tratados os temas sobre a estabilidade dos Difeomorfismos Morse-Smale ao sofrer pequenas perturbações de outros difeomorfismos.

Este trabalho teve como principais referências (ABDENUR; FRANÇA, 2007) e (FRANÇA, 2008), sendo utilizadas algumas referências de apoio como (COSTA JÚNIOR, 2017), (DEVANEY, 1989) e (LIMA, 2011).

2 CONCEITO INICIAIS

Neste capítulo abordaremos algumas definições, propriedades e conceitos necessários para o desenvolvimento do Trabalho de Conclusão de Curso.

2.1 Sistemas dinâmicos

Quando trabalhamos com sistemas dinâmicos, normalmente usamos modelos matemáticos que buscam prever acontecimentos futuros de determinado assunto a que o modelo se refere.

Uma área em que surgem sistemas dinâmicos utilizando modelos matemáticos que podemos citar é na biologia, como as equações diferenciais de crescimento exponencial ou decaimento, onde queremos determinar qual será a quantidade de indivíduos de uma população.

Nesse modelo, a população aumenta ou diminui de forma diretamente proporcional à quantidade de indivíduos no momento anterior. Denotado por $P(t)$ a quantidade da população em cada tempo t , temos o seguinte modelo matemático:

$$\frac{dP}{dt} = kP,$$

onde k é a constante de proporcionalidade.

Resolvendo essa equação temos a seguinte solução:

$$P(t) = P_0 e^{kt}$$

onde P_0 é $P(0)$, ou seja, a população inicial é a população no tempo 0. O comportamento da função depende qual valor k , a constante de proporcionalidade, irá assumir. Se $k > 0$ então $P(t) \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow \infty$, levando a população a uma explosão de crescimento. Se $k < 0$ então $P(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, levando a população a extinção. Este é um exemplo de sistema dinâmico contínuo, isto é, em que o tempo varia continuamente no intervalo $[0, +\infty)$.

Por outro lado, esse modelo também pode ser estudado a partir de uma lei de crescimento em que a população da próxima geração é diretamente proporcional à geração presente.

$$P_{n+1} = kP_n$$

onde P_n é a população depois de n gerações, sendo n um número natural, e k novamente uma constante. Então temos:

$$\begin{aligned} P_1 &= kP_0 \\ P_2 &= kP_1 = k^2P_0 \\ P_3 &= kP_2 = k^3P_0 \\ &\vdots \\ P_n &= kP_{n-1} = k^nP_0 \end{aligned}$$

Nesse caso ainda é fácil determinar qual será o comportamento da população, se $k > 1$ então $P_n \rightarrow \infty$; se $0 < k < 1$ então $P_n \rightarrow 0$. Agora estamos trabalhando com um sistema dinâmico com tempo discreto, isto é, onde as variáveis n são números naturais, no caso, o número de gerações.

De forma generalizada, podemos dizer que um sistema dinâmico discreto é obtido pela iteração de uma função com ela mesma repetidas vezes. Dada uma função $f : X \rightarrow X$ em um conjunto qualquer X , e um valor inicial $x_0 \in X$, temos um sistema dinâmico discreto ao iterar a função f no ponto x_0 . Ou seja, temos a sequência

$$(x_0, f(x_0), f(f(x_0)), f(f(f(x_0))), \dots)$$

Também podemos denotar as iterações de f da seguinte forma:

$$f^n(x) \equiv \underbrace{(f \circ f \circ f \dots \circ f)}_{n \text{ vezes}}(x)$$

Isso nos permite uma associação dos sistemas dinâmicos discretos com uma noção intuitiva de tempo que vem com a iteração da função, onde x_0 pode ser considerado o hoje, $f(x_0)$ amanhã, $f^2(x_0)$ depois de amanhã, e assim por diante. Também temos a noção de tempo para o passado, onde $f^{-1}(x_0)$ é ontem, $f^{-2}(x_0)$ é antes de ontem, e assim por diante.

No exemplo anterior, poderíamos escrever da seguinte forma cada iteração:

$$\begin{aligned} x_0 &= P_0 \\ f(x_0) &= P_1 \\ f(f(x_0)) &= P_2 \\ f(f(f(x_0))) &= P_3 \end{aligned}$$

Alguns exemplos de iterações de funções que podemos encontrar em (DEVANEY, 1989), são $f(x) = \text{sen}(x)$ e $g(x) = \text{cos}(x)$, onde para qualquer $x_0 \in \mathbb{R}$ inicial, nos levará para

uma sequência de iterações que tendem para 0 e aproximadamente 0,739, respectivamente, os quais são pontos com a propriedade de que $f(0) = 0$ e $g(0,739) = 0,739$.

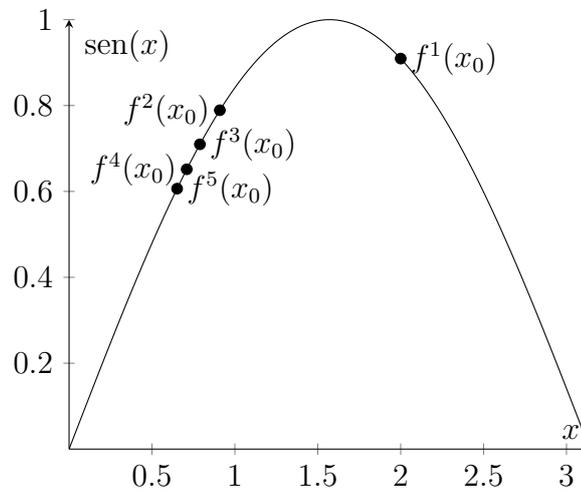


Figura 1 – Iteração da função $f(x) = \sin(x)$ para $x_0 = 2$

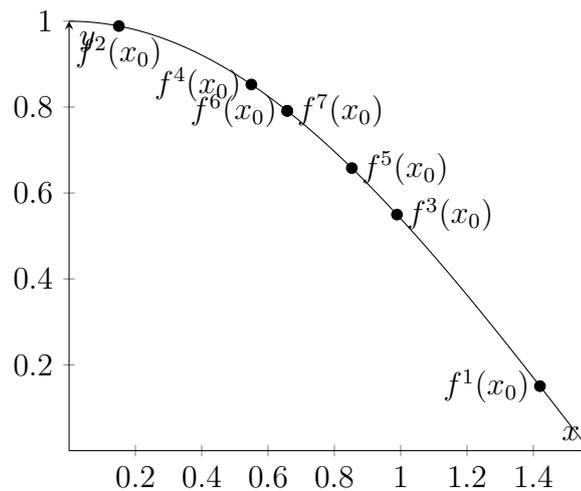


Figura 2 – Iteração da função $f(x) = \cos(x)$ para $x_0 = 1,42$

Porém, nem sempre isso acontece, isto é, nem sempre a sequência das iterações da função em um ponto converge para um valor fixo. Funções bem simples, até mesmo as mais simples das funções quadráticas na reta real, quando iteradas nos levam a resultados não esperados e imprevisíveis.

Um exemplo disso é a função $f(x) = 4x(1 - x)$, onde para qualquer valor inicial entre 0 e 1, os resultados obtidos nas iterações serão diferentes, às vezes se repetindo e às vezes não. O mais comum de acontecer nas iterações é os valores ficarem vagando no intervalo de 0 e 1 sem um padrão específico.

Porém, alterando o valor de 4 para 3,839, ao iterarmos a função ($f(x) = 3,839x(1 - x)$) partindo de um ponto inicial entre 0 e 1, poderemos observar que eventualmente a iteração irá se estabilizar e ficar repetindo um ciclo infinito de três números (0,14988..., 0,48917..., 0,95929...).

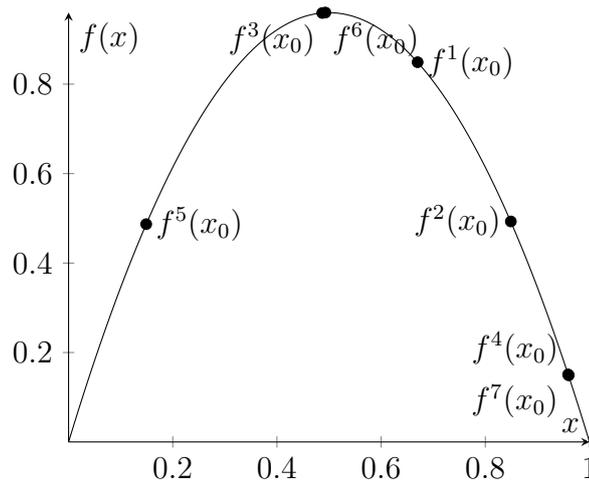


Figura 3 – Iteração da função $f(x) = 3,839x(1 - x)$ para $x_0 = 0,67$

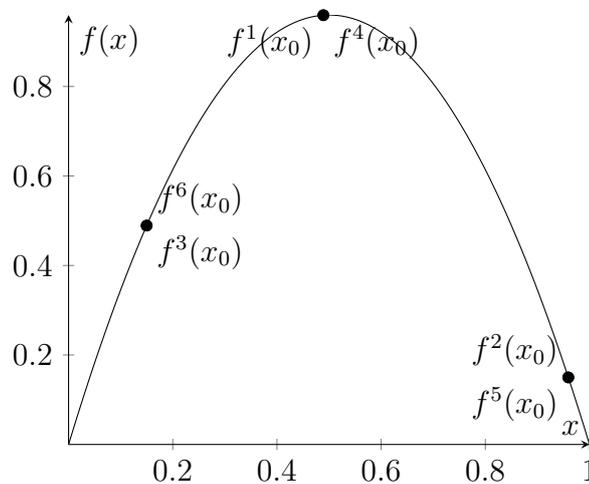


Figura 4 – Iteração da função $f(x) = 3,839x(1 - x)$ para $x_0 = 0,48917$

O primeiro exemplo, usando o 4, é uma boa representação de sistemas dinâmicos com um comportamento caótico. Já o segundo, usando o 3,839, converge para certos pontos, portanto sabemos para onde a função está convergindo, e com isso conseguimos determinar a dinâmica da função.

Entender o comportamento dos pontos do domínio sob iterações da função em que eles estão é estudar a dinâmica da função. Porém, em muitos casos não conseguimos entender o comportamento/dinâmica de todos os pontos, então algumas vezes nos contentamos de entender o comportamento de alguns pontos.

3 O CÍRCULO

Vamos denotar por S^1 o círculo de \mathbb{R}^2 com centro na origem e raio 1, isto é,

$$S^1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

Podemos também definir o círculo como o conjunto dos números reais módulo os inteiros,

$$S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z},$$

isto é, dois números reais x e y estarão na mesma classe de equivalência $[x]$ deste conjunto quociente se, e somente se, sua diferença $x - y$ for um número inteiro:

$$[x] = [y] \iff x - y \in \mathbb{Z}.$$

Ainda, podemos visualizar S^1 como o intervalo unitário fechado $I = [0,1]$ com os pontos extremos identificados, isto é, se nos deslocarmos em I para à direita, ao atingirmos o ponto 1 retornamos ao ponto 0. Para isso, basta considerarmos a função $f : [0,1] \rightarrow S^1$ definida por $f(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$. Como essa função é um homeomorfismo, as propriedades topológicas que serão apresentadas a seguir de S^1 e do intervalo $[0,1]$ com os extremos identificados são as mesmas.

Geometricamente o círculo S^1 será representado tendo $0 = 1$ na parte superior e crescendo no sentido horário, conforme a Figura 5

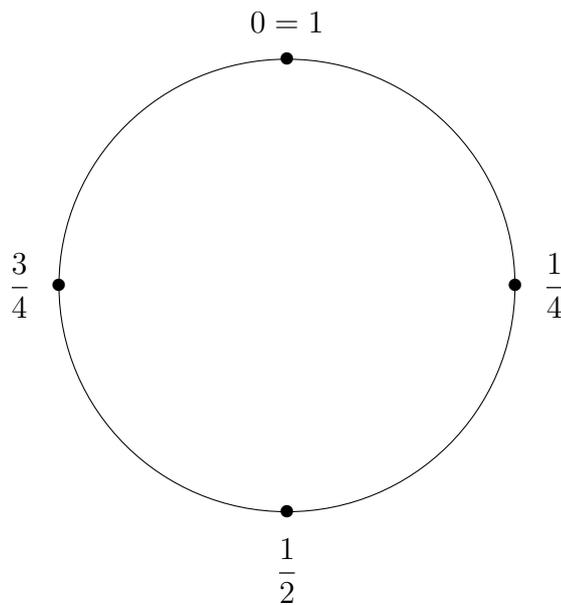


Figura 5 – O círculo S^1

Dados dois pontos $x, y \in S^1$, a distância entre eles é dada por:

$$d_{S^1}(x,y) := \min \{|x - y|, |x - y - 1|, |x - y + 1|\}$$

Agora, com a distância d_{S^1} , o círculo S^1 se torna um espaço métrico (veja o Apêndice A). A demonstração de que d_{S^1} é de fato uma métrica pode ser consultada em (COSTA JÚNIOR, 2017).

As noções topológicas da reta podem ser transportadas para S^1 utilizando o homeomorfismo $f : [1,0] \rightarrow S^1$, tal que

$$f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$$

3.1 Representação gráfica

Ao trabalharmos com os sistemas dinâmicos no círculo, lidamos com aplicações diferenciáveis do círculo nele mesmo. Essas aplicações serão representadas em gráficos no quadrado de lado 1, onde os pontos 0 e 1 são identificados, ou seja, representam o mesmo ponto. Para

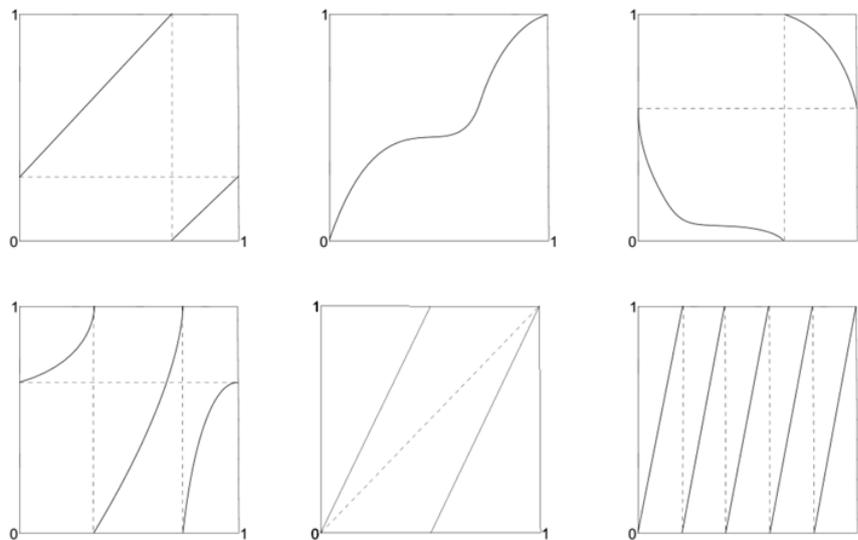


Figura 6 – Exemplos de funções contínuas do círculo

Fonte: (ABDENUR; FRANÇA, 2007)

que exista a continuidade nesse gráfico, a função deve intersectar o eixo vertical $x = 0$ na mesma coordenada horizontal na qual intersecta o eixo vertical $x = 1$, e o intersectar o eixo horizontal $y = 0$ na mesma coordenada vertical na qual intersecta o eixo horizontal $y = 1$.

Além disso, existem dois tipos de funções monótonas do círculo nele mesmo, as crescentes, também ditas que preservam a orientação, que os gráficos sobem da esquerda para a direita, e as decrescentes, também ditas que invertem a orientação, onde o gráfico desce da esquerda para a direita

3.2 Dinâmica no círculo

Agora veremos um pouco sobre sistemas dinâmicos no círculo, seguindo (ABDENUR; FRANÇA, 2007). Algumas das definições apresentadas a seguir não são exclusivas do círculo.

Definição 3.1. *Seja $f : X \rightarrow X$ uma função definida em um conjunto X . Dizemos que $x \in X$ é um ponto fixo se $f(x) = x$. Isso significa também que $f^n(x) = x$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Denotamos por $Fix(f)$ o conjunto de pontos fixos de f*

Exemplo 1. Considere a função $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, definida como $f(x) = \sqrt{x}$. Temos que os pontos $x = 1$ e $x = 0$ são pontos fixos de f , pois $f(1) = \sqrt{1} = 1$ e $f(0) = \sqrt{0} = 0$.

Exemplo 2. Podemos também visualizar os pontos fixos do círculo de maneira gráfica: os pontos fixos de uma função nada mais são que pontos que o gráfico da função intersectam a reta identidade. Na Figura 7, temos a função $f : [0,1] \rightarrow [0,1]$ dada por

$$f(x) = \frac{\text{sen}(4\pi x)}{4\pi} + x$$

os pontos de intersecção dessa função f com a reta identidade, e portanto os pontos fixos, são $(0, 0), (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$ e $(1, 1)$.

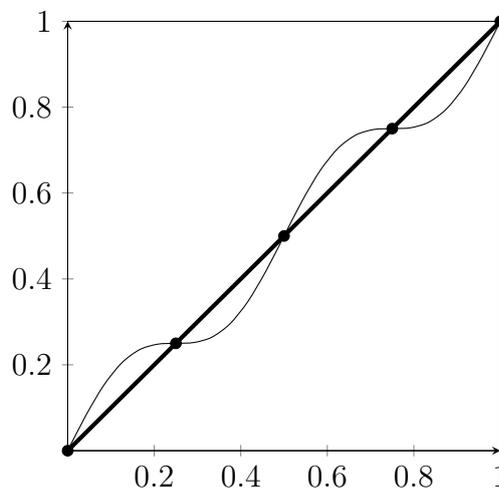


Figura 7 – Exemplo de pontos fixos

Definição 3.2. *Um ponto x_0 é dito periódico de período p para a dinâmica f se $f^p(x_0) = x_0$. Neste caso, p é o menor natural com esta propriedade. O conjunto dos pontos periódicos de f é denotado por $Per(f)$*

Exemplo 3. A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) : -x^3$ é um exemplo de função periódica que, para $x_0 = -1$, possui as seguintes iterações:

$$\begin{aligned} f^1(-1) &= -(-1)^3 = 1 \\ f^1(1) &= -(1)^3 = -1 \\ f^1(-1) &= -(-1)^3 = 1 \\ f^1(1) &= -(1)^3 = -1 \end{aligned}$$

Logo, a função f no ponto x_0 tem período 2.

Exemplo 4. A função $f(x) = 3,839x(1-x)$ vista anteriormente é outro exemplo de função que possui pontos periódicos. Seja $x = 0,14988$, temos as seguintes iterações para a função f :

$$\begin{aligned} f^1(0,14988) &= 0,48917 \\ f^2(0,14988) &= 0,95929 \\ f^3(0,14988) &= 0,14988 \\ f^4(0,14988) &= 0,48917 \\ f^5(0,14988) &= 0,95929 \\ f^6(0,14988) &= 0,14988 \\ &\vdots \end{aligned}$$

portanto, $x = 0,14988$ é um ponto periódico da função f com período $n = 3$.

Podemos interpretar o conjunto dos pontos fixos como o conjunto dos pontos periódicos de período $n = 1$. Logo, o conjunto dos pontos fixos está contido no conjunto dos pontos periódicos.

$$Fix(f) \subset Per(f)$$

Definição 3.3. Dado $f : X \rightarrow X$ e $x \in X$, a órbita futura de x é o conjunto $O^+(x) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{N}\}$. Se f for invertível, chamaremos de órbita passada o conjunto $O^-(x) = \{f^{-n}(x) : n \in \mathbb{N}\}$, e simplesmente de órbita de x o conjunto $O(x) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}\}$

Para pontos periódicos de período n , suas órbitas se repetem a cada n iterações de f . Enquanto conjunto, a órbita de um ponto periódico é finita e possui $n - 1$ elementos.

$$O(x) = \{f(x), f^2(x), \dots, f^{n-1}(x)\}$$

Já enquanto sequência ela é uma sequência infinita, cujos pontos se repetem a cada n posições.

Definição 3.4. Seja (x_n) uma sequência em um espaço métrico (X, d) . Dizemos que $a \in X$ é o limite da sequência (x_n) se para todo $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \implies d(x_n, a) < \epsilon.$$

Escreve-se então $a = \lim x_n$.

Definição 3.5. Dado um sistema dinâmico $f : X \rightarrow X$, dizemos que um ponto $x \in X$ converge para $a \in X$ se vale $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = a$

Exemplo 5. Podemos usar como exemplo novamente a função $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, definida como $f(x) = \sqrt{x}$, porém agora removendo o 0. Para qualquer valor x inicial dessa função temos que x converge para 1 (veja (LIMA, 2007, p. 30)). Podemos visualizar graficamente esse comportamento tomando os pontos iniciais $x_0 = 0,3$ e $x_1 = 2,3$

$f^1(x_0) = 0,5477\dots$	$f^1(x_1) = 1,5165\dots$
$f^2(x_0) = 0,7400\dots$	$f^2(x_1) = 1,2314\dots$
$f^3(x_0) = 0,8603\dots$	$f^3(x_1) = 1,1097\dots$
$f^4(x_0) = 0,9275\dots$	$f^4(x_1) = 1,0534\dots$

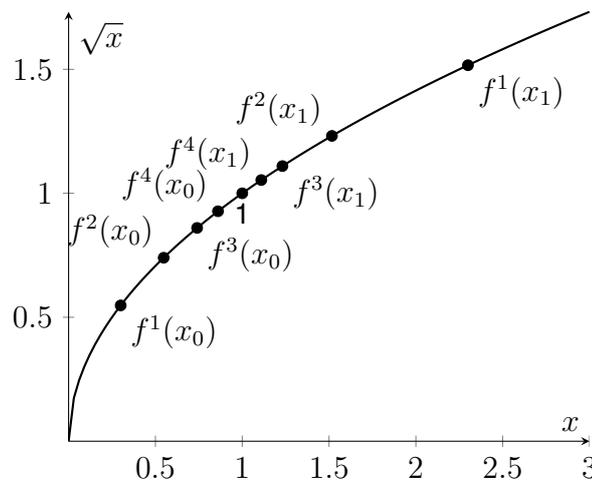


Figura 8 – Iterações da função $f(x) = \sqrt{x}$ para $x_0 = 0.3$ e $x_1 = 2.3$

3.3 Rotações

Um exemplo simples de sistema dinâmico no círculo são as rotações. Podemos definir a rotação por um ângulo α de S^1 como a aplicação $R_\alpha : S^1 \rightarrow S^1$ dada por

$$R_\alpha(x) = x + \alpha(\text{mod } 1),$$

onde $\alpha \in [0,1]$.

Para entender melhor como funciona a rotação no círculo, vejamos alguns exemplos:

- a) Para $\alpha = \frac{2}{3}$, significa que a partir do ponto x , a nossa função andar\u00e1 $\frac{2}{3}$ do c\u00edrculo a cada itera\u00e7\u00e3o, ou tamb\u00e9m, representando em graus, temos uma rota\u00e7\u00e3o de 240° . Podemos observar o comportamento da fun\u00e7\u00e3o no gr\u00e1fico da Figura 9.

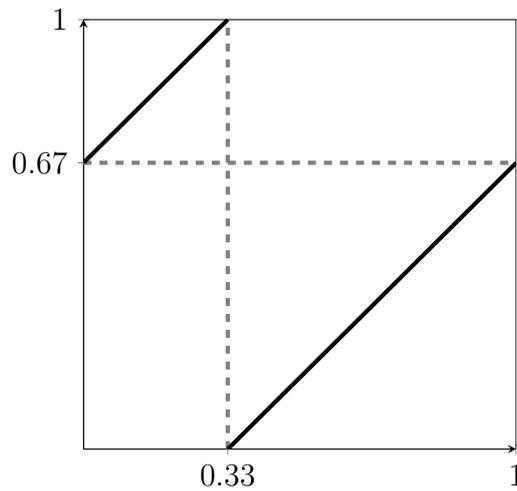


Figura 9 – Gráfico da rotação para $\alpha = \frac{2}{3}$

- b) Para $\alpha = \frac{1}{2}$, significa que a partir do ponto x , a nossa função andar\u00e1 $\frac{1}{2}$ do c\u00edrculo a cada itera\u00e7\u00e3o, ou tamb\u00e9m, representando em graus, temos uma rota\u00e7\u00e3o de 180° . Isso tamb\u00e9m significa que ela dar\u00e1 meia volta a cada itera\u00e7\u00e3o, ou seja, voltar\u00e1 ao mesmo ponto a cada duas itera\u00e7\u00f5es. Podemos observar o comportamento da fun\u00e7\u00e3o no gr\u00e1fico da Figura 10.
- c) Para $\alpha = 1$ ou $\alpha = 0$, temos que a rota\u00e7\u00e3o ser\u00e1 de 0° , ou seja, n\u00e3o ter\u00e1 altera\u00e7\u00e3o nenhuma, e conseq\u00fcentemente podemos chamar essa rota\u00e7\u00e3o de identidade, onde para cada x escolhido ele ser\u00e1 fixo sempre. Podemos observar esse comportamento da fun\u00e7\u00e3o no gr\u00e1fico da Figura 11.

Com isso, temos que a n -\u00e9sima itera\u00e7\u00e3o de uma rota\u00e7\u00e3o nada mais \u00e9 que $n \cdot \alpha$, ou seja, n vezes a quantidade de graus que α representa.

$$(R_\alpha)^n(x) = x + n \cdot \alpha \pmod{1} = R_{n \cdot \alpha}(x)$$

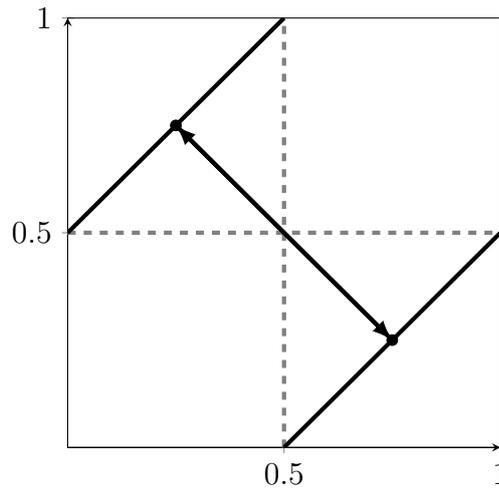


Figura 10 – Gráfico da rotação para $\alpha = \frac{1}{2}$ e exemplo de iteração para um ponto qualquer

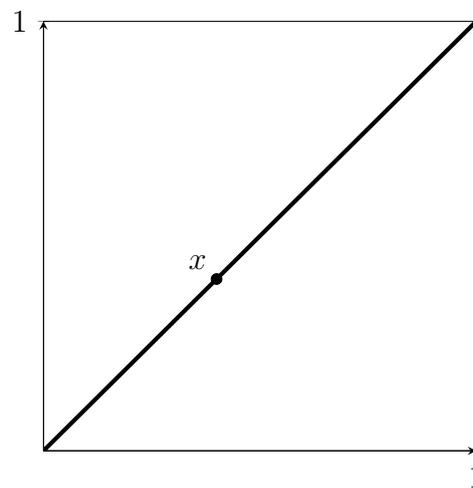


Figura 11 – Gráfico para $\alpha = 0$ ou 1 com ponto x fixo.

Observando a dinâmica do círculo, podemos dividir ela em dois casos distintos, onde α é racional e onde α é irracional.

Quando α for racional, para todo $x \in S^1$, teremos que x é um ponto periódico. Podemos ver isso usando a definição de número racional, quando $\alpha = \frac{p}{q}$, com p e q inteiros, a iteração com valor de q terá valor igual a x , ou seja, $(R_\alpha)^q(x) = x$. Como visto anteriormente, temos que $(R_\alpha)^q(x) = x + q \cdot \alpha \pmod{1}$, como $\alpha = \frac{p}{q}$,

$$(R_\alpha)^q(x) = x + q \cdot \frac{p}{q} \pmod{1} \Rightarrow x + p \pmod{1}.$$

Como p é um número inteiro, $p \pmod{1} = 0$, logo $(R_\alpha)^q(x) = x$.

Sempre que p e q forem primos entre si, de forma que $\frac{p}{q}$ seja irredutível, temos que todos os pontos periódicos de S^1 tem período igual a q . Caso p e q não fossem primos entre si e conseqüentemente a fração não fosse irredutível, ainda é possível tornar qualquer fração irredutível através do MDC.

Proposição 3.1. *Dado $\alpha \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ para todo $x \in S^1$, $R_\alpha(x)$ possui órbita densa em S^1 .*

Demonstração. Seja $\alpha \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ e seja $x \in S^1$. Vamos mostrar inicialmente que não é possível obter pontos periódicos. Supondo que seja possível, teríamos $R_\alpha^n(x) = (x + n \cdot \alpha) \bmod 1 = x$, para algum $n \in \mathbb{N}$. Porém, isso implica que $n \cdot \alpha = 0 \bmod 1$, o que implica $n \cdot \alpha \in \mathbb{Z}$, e portanto $\alpha \in \mathbb{Q}$.

Agora vamos mostrar que as órbitas de todo ponto x por rotações por ângulos irracionais são densas em S^1 . Vamos supor por absurdo que existe $x \in S^1$ que não possui órbita densa em S^1 . Então, temos um conjunto $A := S^1 \setminus \overline{O^+(x)}$ que é um aberto não-vazio do círculo.

Como $\overline{O^+(x)}$ é um conjunto invariante, isto é, todos os seus pontos permanecem no conjunto mesmo após a aplicação da função, temos que

$$R_\alpha(\overline{O^+(x)}) = \overline{O^+(x)} = (R_\alpha)^{-1}(\overline{O^+(x)})$$

Em decorrência disso temos que $R_\alpha(A) = A$. Fixando um componente conexa, isto é, um intervalo aberto I de A , que não pode estar contido propriamente em nenhum outro aberto conexo de A , temos que vale $R_\alpha^n(I) \cap I = \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Caso não fosse verdade essa afirmação, teríamos duas possibilidades:

- Existe um $k \in \mathbb{N}$ tal que $R_\alpha^k(I) = I$. Supondo que $I = (a, b)$, teríamos $R_\alpha^k(I) = (a + k \cdot \alpha \bmod 1, b + k \cdot \alpha \bmod 1) = (a, b)$. Logo $a = a + k \cdot \alpha \bmod 1$, o que implica que a é periódico, uma contradição.
- Existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $R_\alpha^k(I) \neq I$ e $R_\alpha^k(I) \cap I \neq \emptyset$. Portanto $R_\alpha^k(I) \cap I$ é um aberto conexo de A que contém propriamente I , uma contradição.

Vale então que $R_\alpha^k(I) \cap I = \emptyset$ para todo $k \in \mathbb{N}$, e portanto $R_\alpha^m(I) \cap R_\alpha^n(I) = \emptyset$, para todo $m, n \in \mathbb{N}$, tal que $m \neq n$. Caso contrário, teríamos que $R_\alpha^{m-n}(I) \cap I \neq \emptyset$.

Portanto, se iterações de I pela rotação não alteram o comprimento da componente conexa I , e então as iterações $R_\alpha^k(I)$ de I são todas mutuamente disjuntas, chegamos a uma contradição, pois o comprimento total de sua reunião seria infinito. \square

Apesar de podermos considerar sistemas dinâmicos no círculo mais complexos do que as rotações, é possível mostrar que todo homeomorfismo $f : S^1 \rightarrow S^1$ que preserva a orientação é semiconjugado a uma rotação, isto é, existe uma função $h : S^1 \rightarrow S^1$ monótona, contínua e sobrejetora tal que $h \circ f = R_\alpha \circ h$ para algum α . O número α é chamado de número de rotação de f . Para mais detalhes veja (ANTUNES, 2012).

Teorema 3.6. *Se $f : S^1 \rightarrow S^1$ é um homeomorfismo que preserva a orientação, então todos os pontos periódicos de f têm o mesmo período.*

Demonstração. Veja (KATOK; HASSELBLATT, 1995, p. 390). \square

4 HIPERBOLICIDADE E DINÂMICA DOS DIFEOMORFISMOS MORSE-SMALE

Nesse capítulo iremos estudar a dinâmica existente nos Difeomorfismos Morse-Smale. Para ser feito isso, se faz necessário inicialmente o estudo de pontos hiperbólicos, uma vez que a dinâmica de toda a função é determinada por eles.

Para denotar o conjunto de todos os difeomorfismos de classe C^1 , isto é, as bijeções $f : S^1 \rightarrow S^1$ diferenciáveis, com f' contínua e f^{-1} diferenciável com $(f^{-1})'$ contínua, do círculo nele mesmo que preservam a orientação, será usada a notação $\text{Diff}^1(S^1)$.

4.1 Pontos Hiperbólicos

Definição 4.1. Um ponto fixo x de um difeomorfismo $f \in \text{Diff}^1(S^1)$ é hiperbólico se $f'(x) \neq 1$. Se $f'(x) < 1$ dizemos que este ponto fixo é um atrator, e se $f'(x) > 1$ dizemos que é um ponto fixo repulsor.

Mais geralmente: dado $x \in \text{Diff}^1(S^1)$ um ponto periódico de período n , dizemos que é um ponto periódico hiperbólico, se x é ponto fixo hiperbólico de f^n . O ponto x será um atrator ou repulsor periódico conforme $(f^n)'(x)$ for menor ou maior que 1, respectivamente.

A partir dessa definição podemos dizer quando um ponto fixo é hiperbólico ou não. Podemos também visualizar essa definição graficamente, onde uma função precisa intersectar a reta identidade, e essa intersecção não pode ser tangente a reta identidade.

Na função

$$f(x) = \frac{\text{sen}(4\pi x)}{4\pi} + x$$

vista na Figura 7 temos alguns exemplos de pontos fixos hiperbólicos, onde a função intersecta a reta identidade com inclinação diferente de 1 nos pontos fixos.

Já na Figura 12 temos um exemplo de função que apenas tangencia a reta identidade, fazendo com que sua derivada no ponto fixo F seja 1, e conseqüentemente não hiperbólico. Note que os pontos à esquerda de F são atraídos para ele, enquanto os pontos à direita são repelidos.

Definição 4.2. Dizemos que a convergência de $f^n(x)$ é exponencial para a se existe λ , com $0 < \lambda < 1$, de modo que:

$$d(f^n(x), a) < \lambda \cdot d(f^{n-1}(x), a)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Podemos ler isso como a distância entre a n -ésima iteração e o limite é menor que a distância da iteração anterior do limite, vezes λ . Isso implica que

$$d(f^n(x), a) < \lambda^n \cdot d(x, a)$$

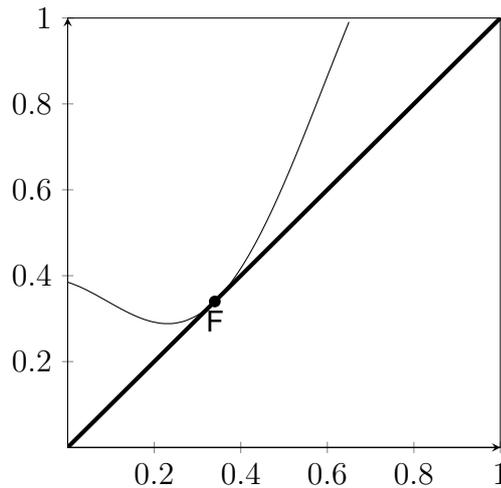


Figura 12 – Um ponto fixo não hiperbólico

Como $0 < \lambda < 1$, então $\lim \lambda^n = 0$ de forma que $\lim f^n(x) = a$.

Agora que sabemos que um ponto x em um sistema dinâmico pode convergir para um ponto a , podemos começar a pensar quais pontos as subsequências de f pode convergir. O ω -limite será o conjunto dos desses pontos.

Definição 4.3. O ω -limite de um ponto $x \in X$ é o conjunto dos pontos de aderência da órbita futura de x , isto é,

$$\omega(x) := \{y \in X : \text{existe uma subsequência } f^{n_i}(x) \text{ tal que } f^{n_i}(x) \rightarrow y\}$$

Se f for um bijeção, podemos definir o α -limite de um ponto x como

$$\alpha(x) := \{y \in X : \text{existe uma subsequência } f^{-n_i}(x) \text{ tal que } f^{-n_i}(x) \rightarrow y\}$$

Definição 4.4. Dizemos que uma aplicação $f : X \rightarrow X$ é topologicamente transitiva se existe $x \in X$ tal que $\overline{O^+}(x) = X$. Isto é, se existe algum ponto $x \in X$ que passeia densamente por X , isto é, passa por todos os pontos $x \in X$, à medida em que o tempo passa.

Se para todo $x \in X$ tivermos $\overline{O^+}(x) = X$, então dizemos que f é minimal. Toda aplicação minimal é topologicamente transitiva.

Podemos dizer portanto, que uma aplicação topologicamente transitiva é uma que possui um ponto cuja órbita é densa. E uma aplicação minimal é uma aplicação cujas todas as órbitas são densas.

A próxima proposição justifica a nomenclatura de ponto fixo atrator quando $|f'(x)| < 1$:

Proposição 4.1. Seja x um ponto fixo hiperbólico atrator de um difeomorfismo $f \in \text{Diff}^1(S^1)$, com $|f'(x)| < \lambda < 1$. Então dado $\epsilon > 0$ existe vizinhança U_ϵ de x tal que $f(U_\epsilon) \subset U_\epsilon$ e

$$d_{S^1}(f^n(y), x) < (\lambda + \epsilon)^n \cdot d_{S^1}(y, x)$$

para todo $y \in U_\epsilon$ e $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Seja $f : S^1 \rightarrow S^1$ um difeomorfismo do círculo, temos que f' é contínua, e portanto podemos tomar um intervalo U_ϵ tão pequeno quanto necessário, de modo que para todo ponto $z \in U_\epsilon$ temos $|f'(z)| < \delta + \epsilon < 1$, isto é, todo $z \in U_\epsilon$ mantém a inclinação menor que a soma de $\delta + \epsilon$ e a direção, continue sendo menor que 1 e portanto, sendo atraído.

Dado um ponto $y \in U_\epsilon$, temos pelo Teorema do Valor Médio (Teorema A.1) que existe um valor c entre x e y que satisfaça a seguinte desigualdade:

$$d_{S^1}(f(x), f(y)) = |f'(c)|d_{S^1}(x, y) < (\delta + \epsilon)d_{S^1}(x, y)$$

Como x é fixo, vale que $d_{S^1}(f(y), f(x)) = d_{S^1}(f(y), x)$, podemos substituir na desigualdade

$$d_{S^1}(x, f(y)) = d_{S^1}(f(x), f(y)) < (\delta + \epsilon)d_{S^1}(x, y)$$

Como escolhemos ϵ pequeno o suficiente para $\delta + \epsilon < 1$, temos então que $f(U_\epsilon) \subset U_\epsilon$ e portanto ao iterarmos a função f no ponto y , obtemos um ponto que também está no intervalo U_ϵ , pois $d_{S^1}(f(y)^2, x) < d_{S^1}(f(y), x)$. Aplicando isso na desigualdade obtemos

$$d_{S^1}(x, f(y)^2) = d_{S^1}(f(x)^2, f(y)^2) < (\delta + \epsilon)^2 d_{S^1}(x, y)$$

Se iterarmos a função n vezes, obtemos o resultado esperado

$$d_{S^1}(x, f(y)^n) < (\delta + \epsilon)^n d_{S^1}(x, y)$$

□

Isso implica que todo ponto y de U_ϵ converge exponencialmente para o ponto fixo x , a uma taxa arbitrariamente próxima de $f'(x)$ (bastando tomar U_ϵ pequena). Em particular vale $\omega(y) = \{x\}$. É possível visualizar esse comportamento na Figura 13.

Para os pontos fixos hiperbólicos repulsores vale a proposição a seguir.

Proposição 4.2. *Seja x um ponto fixo hiperbólico repulsor de um difeomorfismo $f \in \text{Diff}^1(S^1)$, com $f'(x) = \lambda > 1$. Então dado $\epsilon > 0$ existe vizinhança U_ϵ de x tal que*

$$d_{S^1}(f(y), x) > (\lambda - \epsilon) \cdot d_{S^1}(y, x)$$

para todo $y \in U_\epsilon$.

A demonstração é análoga à anterior.

Isso implica que todo ponto y de U_ϵ se afasta exponencialmente do ponto fixo x , a uma taxa arbitrariamente próxima de $f'(x)$, até ser expulso da vizinhança U_ϵ , isto é, sair dela. Em particular vale $\alpha(y) = \{x\}$. É possível visualizar esse comportamento na Figura 14.

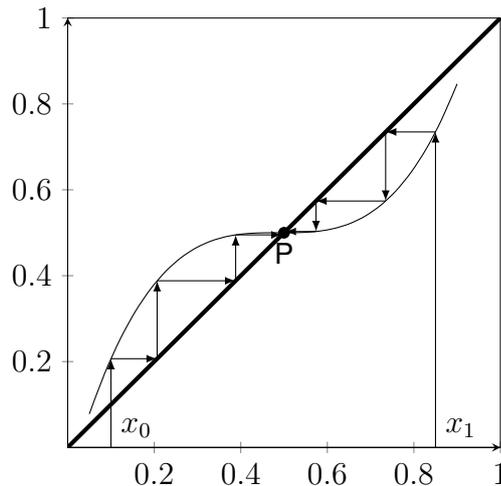


Figura 13 – Um ponto fixo atrator

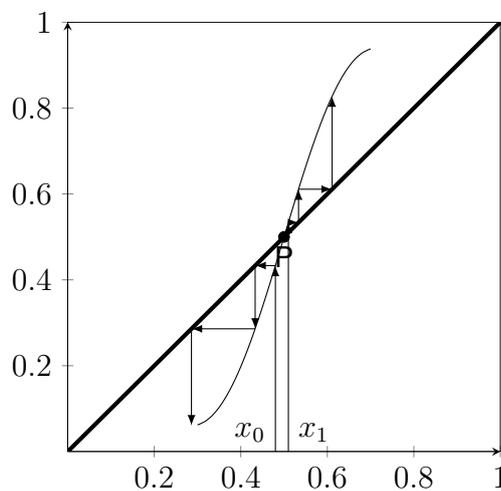


Figura 14 – Um ponto fixo repulsor

Corolário 4.4.1. *Todo ponto fixo hiperbólico x é isolado, isto é, existe uma vizinhança V de x tal que o único ponto fixo de f em V é o próprio x .*

Demonstração. Pelas proposições 4.1 e 4.2, existe uma vizinhança de x que é toda atraída para x , ou expulsa de x , e portanto não pode haver outro ponto fixo nessa vizinhança. No caso de f^{-1} , o papel apenas se inverte: o que era atrator se torna repulsor e vice-versa, e portanto não há outros pontos fixos na vizinhança de x também. Portanto, segue que todo ponto fixo é isolado. \square

Vejamos um exemplo de difeomorfismo do círculo onde podemos encontrar as definições e proposições citadas acima.

Seja $f : S^1 \rightarrow S^1$, definida como $f(x) = \frac{\text{sen}(10 \cdot \pi \cdot x)}{20 \cdot \pi} + x$. A Figura 15 mostra o gráfico da função f no intervalo $[0,1]$, e a função identidade (reta pontilhada) $Id(x) \equiv x$.

Sempre que a função $f(x) = x$ temos um ponto fixo, então a função f possui o total de 10 pontos fixos $x = \{0, \frac{1}{10}, \frac{1}{5}, \frac{3}{10}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{7}{10}, \frac{4}{5}, \frac{9}{10}\}$. Como a função f é um difeomorfismo, e

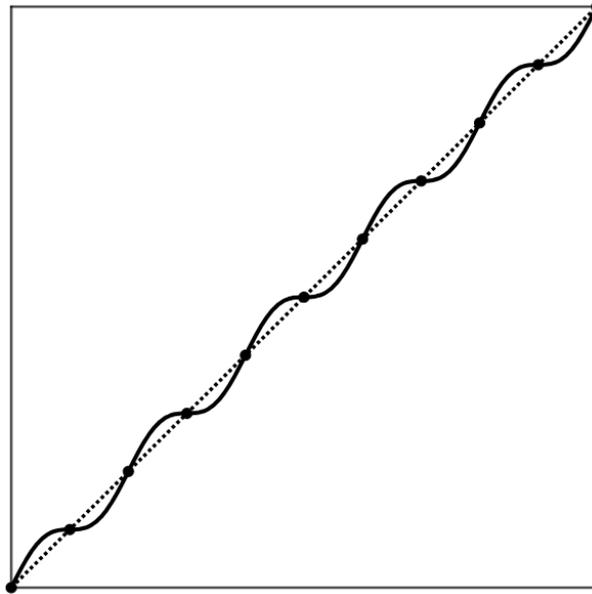


Figura 15 – Gráfico de $f(x) = \frac{\text{sen}(10 \cdot \pi \cdot x)}{20 \cdot \pi} + x$

portanto um homeomorfismo também, vale o Teorema 3.6, e portanto o período de todos os pontos periódicos é 1. Logo todos estão listados.

Derivando a função f , temos

$$f'(x) = \frac{\cos(10\pi x)}{2} + 1$$

e calculando as derivadas de cada um dos pontos fixos, temos que as derivadas são diferentes de 1:

$$\begin{aligned} f'(0) &= f'(\frac{1}{5}) = f'(\frac{2}{5}) = f'(\frac{3}{5}) = f'(\frac{4}{5}) = \frac{3}{2} \\ f'(\frac{1}{10}) &= f'(\frac{3}{10}) = f'(\frac{1}{2}) = f'(\frac{7}{10}) = f'(\frac{9}{10}) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Nos pontos fixos onde a derivada é maior que 1, temos que os pontos são empurrados para longe desses pontos fixos. Já nos pontos fixos onde a derivada é menor que 1, temos que os pontos são atraídos para próximo desses pontos fixos.

Dessa forma, conseguimos compreender totalmente a dinâmica do difeomorfismo de f quando temos alguns pontos de f fixos. Agora veremos qual é a dinâmica quando temos pontos periódicos, com período maior que 1.

Proposição 4.3. *Seja x um ponto periódico hiperbólico atrator com período k de um difeomorfismo $f \in \text{Diff}^1(S^1)$, com $(f^k)'(x) = \lambda < 1$. Então dado $\epsilon > 0$ existe vizinhança U_ϵ de x tal que*

$$d(f^n(y), f^n(x)) < ((\lambda + \epsilon))^{\frac{n}{k}} \cdot d(y, x)$$

para todo $y \in U_\epsilon$ e $n \in \mathbb{N}$.

A demonstração para essa proposição é parecida com a demonstração da proposição 4.1, bastando apenas aplicar a proposição 4.1 para cada f^k , que tenha x como ponto fixo e k como período, e usar a sequência $(f^{n \cdot k}(y))_{n \in \mathbb{N}}$ que converge y para x .

Ou seja, a órbita de todo ponto $y \in U_\epsilon$ converge exponencialmente para a órbita do ponto fixo x , a uma taxa arbitrariamente próxima de $((f^k)'(x))^{\frac{1}{k}}$ (bastando tomar U_ϵ pequena). Em particular vale $\omega(y) = O^+(x)$

Proposição 4.4. *Todo ponto periódico hiperbólico x é isolado: existe vizinhança V de x tal que o único ponto periódico de f em V é o próprio x .*

Demonstração. Essa demonstração é uma extensão da Proposição 4.1, bastando acrescentar que caso as iterações de f tenham período n , então o conjunto dos pontos periódicos $Per(f) = Fix(f^n)$ e portanto, a cada n repetições dos períodos, os pontos periódicos são fixos, e portanto isolados também. \square

4.2 Intervalos Monótonos

Seja f um homeomorfismo do intervalo compacto $[a, b]$ nele mesmo, onde os seus extremos, a e b , são os únicos pontos fixos de f no intervalo. Temos duas possibilidades para o comportamento da função nesse intervalo, $f(x) < x$ ou $f(x) > x$, $\forall x \in (a, b)$.

Podemos dizer então que o sinal da função $f(x) - x$ não muda no interior do intervalo $[a, b]$. Com as proposições a seguir conseguiremos determinar como é a dinâmica nesses intervalos.

Proposição 4.5. *Seja $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ um homeomorfismo de um intervalo compacto da reta $[a, b]$ nele mesmo tal que os únicos pontos fixos de f são a e b . Suponhamos que vale $f(x) - x > 0$ para todo $x \in (a, b)$. Então dado qualquer $x \in (a, b)$ vale*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x) = b \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f^{-n}(x) = a.$$

Demonstração. Para todo $x \in (a, b)$ temos que $f(x) > x$, portanto, dado $x_0 \in (a, b)$, temos que $f(x_0) > x_0$, $f^2(x_0) > f(x_0) > x_0$, e assim por diante. Temos então que a sequência $\{f^n(x_0)\}_n \in \mathbb{N}$ é crescente e limitada por b , portanto a sequência deve convergir para algum ponto $z \in (a, b)$ e pela continuidade de f , z deve ser um ponto fixo do intervalo. Como x_0 é qualquer no intervalo aberto (a, b) , então $x_0 > a$ e portanto, como a sequência das iterações é crescente, o ponto fixo z deve ser igual a b . Para $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{-n}(x) = a$ acontece o mesmo, porém a sequência $\{f^{-n}(x_0)\}_n \in \mathbb{N}$ é decrescente, converge para um ponto q e por $x_0 < b$ e a sequência ser decrescente, temos que $q = a$. \square

Proposição 4.6. *Seja $f : [a,b] \rightarrow [a,b]$ um homeomorfismo de um intervalo compacto da reta $[a,b]$ nele mesmo tal que os únicos pontos fixos de f são a e b . Suponhamos que vale $f(x) - x < 0$ para todo $x \in (a,b)$. Então dado qualquer $x \in (a,b)$ vale*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x) = a \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f^{-n}(x) = b.$$

A demonstração dessa proposição é análoga a anterior, bastando tomar f^{-1} no lugar de f e o f no lugar de f^{-1} .

Com as proposições acima conseguimos distinguir o comportamento nos dois casos possíveis.

Quando $(f - Id)|_{(a,b)} > 0$, isto é, as órbitas de f convergem para o futuro em direção ao extremo direito b , e no passado em direção ao extremo esquerdo a , chamamos esses intervalos de intervalos monótonos crescentes.

Quando $(f - Id)|_{(a,b)} < 0$, isto é, as órbitas de f convergem para o futuro em direção ao extremo esquerdo a , e no passado em direção ao extremo direito b , chamamos esses intervalos de intervalos monótonos decrescentes.

4.3 Difeomorfismos Morse-Smale

Definição 4.5. *Dizemos que um difeomorfismo $f \in \text{Diff}^1(S^1)$ de S^1 é Morse-Smale se:*

- i) *f possui pelo menos um ponto periódico; e*
- ii) *todo ponto periódico de f é hiperbólico.*

Se f é um difeomorfismo do círculo, utilizando as proposições já mostradas anteriormente podemos tirar algumas conclusões sobre f : todos os pontos periódicos têm o mesmo período, todos os pontos periódicos hiperbólicos são isolados e por o círculo ser um espaço compacto, o conjunto dos pontos periódicos $Per(f)$ de um difeomorfismo Morse-Smale será sempre finito.

Como vimos, as propriedades de pontos periódicos e pontos fixos são semelhantes, então para simplificar as próximas ideias será usado apenas a terminologia de pontos fixos.

Se temos finitos pontos fixos, onde todos são periódicos, podemos enumerá-los como p_1, p_2, \dots, p_n , onde sem perda de generalidade, podemos ordená-los como $p_1 < p_2 < \dots < p_n$. Vale ressaltar que $p_1 = p_{n+1}$.

Sejam dois pontos fixos consecutivos quaisquer p_i e p_{i+1} , não existe nenhum ponto fixo no intervalo (p_i, p_{i+1}) , logo vale que $f(x) \neq x, \forall x \in (p_i, p_{i+1})$. Logo, pela continuidade de f , temos que o sinal de $f - Id$ não se altera no intervalo, e portanto podemos concluir que cada intervalo $[p_i, p_{i+1}]$ é monótono em f .

Também podemos notar que pela hiperbolicidade de p_i , se o intervalo $[p_i, p_{i+1}]$ for crescente em relação à função $f - Id$, então os seus vizinhos $[p_{i-1}, p_i]$ e $[p_{i+1}, p_{i+2}]$ são intervalos monótonos decrescentes. Portanto, temos uma paridade, onde para cada intervalo monótono crescente, temos um intervalo monótono decrescente, o que nos garante que temos um número par de pontos hiperbólicos.

Com isso, conseguimos encontrar toda a dinâmica de qualquer difeomorfismo Morse-Smale f :

1. Existem finitos pontos fixos $p_1 < p_2 < \dots < p_n$ de f e todos são hiperbólicos;
2. O número n de pontos fixos é par;
3. Se p_i é atrator, o próximo ponto fixo p_{i+1} é repulsor, e se alternam em todo o círculo;
4. Os pontos fixos p_i dividem o círculo em n intervalos monótonos, I_1, I_2, \dots, I_n que irão se alternar entre crescentes e decrescentes.

Com isso conseguimos descobrir o que acontece com cada ponto de um difeomorfismo Morse-Smale. Os k pontos fixos permaneceram parados, atraindo ou repelindo, alternadamente. Os pontos pertencentes aos intervalos entre os pontos fixos convergiram para os pontos hiperbólicos atratores.

Para uma função g com pontos periódicos, com período maior que 1, ou seja, que não são fixos, temos algo parecido. Restringimos a função para cada período em que os pontos pertençam ao mesmo intervalo. Além disso, temos agora intervalos periódicos monótonos. Isso significa que temos os intervalos I_1, I_2, \dots, I_k , cujos extremos continuam sendo os pontos periódicos, e portanto para cada $k \in \{1, 2, \dots, k\}$ vale que $g^l(I_j) = I_j$, onde l é o período de g . Logo, cada intervalo I_j será um intervalo monótono, crescente ou decrescente para g^l .

5 ESTABILIDADE DOS DIFEOMORFISMOS MORSE-SMALE

Nesse capítulo se buscará entender a estabilidade de difeomorfismos sob algumas alterações, que chamaremos de perturbações de classe C^1 . Portanto estamos querendo saber se a dinâmica se mantém ou permanece parecida ao se alterar de alguma forma o difeomorfismo.

5.1 A métrica C^1 e Conjugações

Para obtermos a métrica C^1 precisamos inicialmente definir qual será a distância entre os difeomorfismos que serão conjugados. A definição a seguir nos fornece qual é a função distância da nossa conjugação.

Definição 5.1. *A distância C^1 entre dois difeomorfismos $f : X \rightarrow X$ e $g : X \rightarrow X$ de classe C^1 , onde $X = [a, b]$ ou $X = S^1$, é dada por*

$$d_1(f, g) \equiv \sup_{x \in X} \{ \max \{ d_{S^1}(f(x), g(x)), |f'(x) - g'(x)| \} \}$$

Isso equivale a dizer que dois difeomorfismos estão próximos se as imagens e as derivadas das funções, ou seja, suas inclinações, estão próximas em todos os pontos do intervalo.

Para nos referirmos a distância entre os difeomorfismos usaremos a notação f é $C^1 - \epsilon$ -próxima de g se $d_1(f, g) < \epsilon$. Podemos dizer então que g é uma perturbação de f .

Definição 5.2. *Sejam X e Y dois espaços métricos. Duas aplicações contínuas $f : X \rightarrow X$ e $g : Y \rightarrow Y$ são topologicamente conjugadas se existe um homeomorfismo $h : X \rightarrow Y$ tal que $h \circ f = g \circ h$. Ou seja, tal que o seguinte diagrama é comutativo:*

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ & X \longrightarrow X & \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ & Y \longrightarrow Y & \\ & g & \end{array}$$

Chamamos o homeomorfismo h de conjugação topológica entre f e g .

Como homeomorfismos são aplicações que preservam as propriedades topológicas do espaço, são eles que serão usados para verificar a semelhança entre as dinâmicas de dois difeomorfismos próximos.

Devido a isso, veremos que duas funções conjugadas possuem a mesma dinâmica topológica. Sejam f e g duas aplicações conjugadas por um homeomorfismo h . Se x é ponto fixo de f , então teremos que $h(x)$ será um ponto fixo de g , pois $h(x) = h \circ f(x) = g \circ h(x)$. Isso nos garante também que a quantidade de pontos fixos de f e g será a mesma. Para os pontos periódicos temos a seguinte proposição:

Proposição 5.1. *Se f é topologicamente conjugado a g pelo homeomorfismo h , então f^n é conjugado a g^n pelo homeomorfismo h para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Para mostrar que para qualquer iteração de f é conjugada a g , vamos escrever as n iterações utilizando o homeomorfismo h , temos que

$$h \circ f \circ h^{-1} = g$$

então

$$h \circ f^n \circ h^{-1} = \underbrace{(h \circ f \circ h^{-1}) \circ \dots \circ (h \circ f \circ h^{-1})}_{n \text{ vezes}} = g^n$$

Portanto para cada ponto periódico x de f , temos um ponto periódico $h(x)$ em g . \square

Essa proposição nos permite agora pensar na transitividade e a minimalidade em uma conjugação topológica, já que garantimos que as minhas iterações serão levadas pelo homeomorfismo.

Proposição 5.2. *Se $f : X \rightarrow X$ é conjugada a $g : Y \rightarrow Y$, sendo f transitiva, então g também é transitiva (tendo $h(x)$ com órbita densa em Y). Consequentemente, se f é minimal então g é minimal.*

Demonstração. Para mostrar que se f é transitiva então g deve ser transitiva, precisamos mostrar primeiro que h é um homeomorfismo que leva os conjuntos densos de X em conjuntos densos em Y .

Vamos tomar D denso em X , dado qualquer ponto $a \in X$, então existe uma sequência $\{u_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset D$ que o $\lim_{i \rightarrow +\infty} u_i = a$. Pela continuidade do homeomorfismo h , temos então $\lim_{i \rightarrow +\infty} h(u_i) = h(a)$.

Pegando agora um ponto $b \in Y$ qualquer, podemos considerar, sem perda de generalidade, que $a = h^{-1}(b) \in X$. Então, como existe uma sequência em D convergindo para a , existe uma sequência em $h(D)$ que converge para $h(a)$, logo, converge para b . Como b é um ponto qualquer, podemos concluir que $h(D)$ é denso em Y .

Podemos escrever também como $O^+(x)$ sendo denso em X , então

$$h(O^+(x)) = \{h(f^n(x)) | n \in \mathbb{N}\} = \{g^n(h(x)) | n \in \mathbb{N}\}$$

é denso em Y . Portanto a órbita de $h(x)$, quando X é denso, é densa em g . \square

5.2 Estabilidade Local

Nessa seção serão demonstradas algumas proposições sobre como os pontos fixos hiperbólicos se mantêm mesmo após pequenas perturbações do sistema.

Definição 5.3. Seja $X = [a,b]$ ou $X = S^1$. Dizemos que uma aplicação $f : X \rightarrow X$ é C^1 -estruturalmente estável se existir $\epsilon > 0$ tal que toda $g : X \rightarrow X$ que está $C^1 - \epsilon$ -próxima de f é topologicamente conjugado a f .

Proposição 5.3. Seja $f : X \rightarrow X$ um difeomorfismo com um ponto fixo hiperbólico p . Então existe $\epsilon > 0$ e uma vizinhança U de p em X tais que se g é um difeomorfismo $C^1 - \epsilon$ -próximo de f , então g possui um único ponto fixo (hiperbólico) p_g em U . Além disso p_g será atrator ou repulsor conforme p o for.

Demonstração. Usando o ponto p da hipótese como ponto fixo hiperbólico, podemos supor que ele é um ponto fixo repulsor, então $f'(p) > 1$.

Pela continuidade de f' , temos que existe um intervalo aberto $U = (a,b)$ tal que $p \in (a,b)$. Podemos dizer ainda que $f'(x) > 1$ em todo $x \in [a,b]$, $f(a) - a < 0$ e $f(b) - b > 0$.

Seja ϵ suficientemente pequeno, de modo que g esteja $C^1 - \epsilon$ -próxima de f , então $g'(x) > 1$ para todo $x \in [a,b]$.

Queremos agora usar o Teorema do Valor Intermediário (Teorema A.2) para mostrar que, dada a função $j(x) := g(x) - x$, existe um ponto $c \in (a,b)$ tal que $j(c) = 0$, ou seja $g(x) - x = 0 \Rightarrow g(x) = x$.

Para mostrar isso, precisamos mostrar que $g(a) - a < 0$ e $g(b) - b > 0$. Para isso, vamos pegar $\epsilon < \min \{|f(a) - a|, |f(b) - b|\}$, para obtermos

$$g(a) - a = (g(a) - f(a)) + (f(a) - a) < 0$$

e

$$g(b) - b = (g(b) - f(b)) + (f(b) - b) > 0$$

Logo, pelo Teorema A.2, c é o único ponto fixo de g no intervalo (a,b) .

Caso existisse outro ponto d fixo no intervalo (a,b) , de modo a $d \neq c$, teríamos pelo Teorema do Valor Médio, algum k entre c e d , de modo a $g'(k) = \frac{g(d)-g(c)}{d-c}$. Como supomos que c e d são fixos, então $g' = \frac{d-c}{d-c} = 1$, o que não pode ocorrer.

Para o caso de p ser um ponto fixo hiperbólico atrator a demonstração é análoga. □

5.3 Estabilidade Global

Proposição 5.4. Sejam $f : [a,b] \rightarrow [a,b]$ e $g : [c,d] \rightarrow [c,d]$ dois difeomorfismos tais que $f(x) > x$ para $x \in (a,b)$ e $g(y) > y$ para $y \in (c,d)$. Então f e g são topologicamente conjugadas.

Demonstração. Queremos mostrar que f e g são topologicamente conjugadas, então precisamos mostrar que existe um homeomorfismo que conjuga as duas funções.

Para isso, tomemos $\alpha \in (a,b)$ e $\beta \in (c,d)$ arbitrários. Por hipótese, f e g são crescentes e portanto $f^n(x) > \dots > f(x) > x$ e $g^n(y) > \dots > g(y) > y$. Isso nos permite escrever (a,b)

como a união dos intervalos disjuntos com início em $f^n(\alpha)$, inclusive, e término em $f^{n+1}(\alpha)$, e o mesmo para (c,d) e g , da seguinte forma:

$$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [f^n(\alpha), f^{n+1}(\alpha)) = (a,b) \quad \text{e} \quad \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [g^n(\beta), g^{n+1}(\beta)) = (c,d).$$

Por construção, é possível observar que a imagem de cada intervalo será o intervalo adjacente à direita (uma vez que estamos trabalhando com uma função crescente), portanto, dado um ponto $x \in (a,b)$, temos que $O(x)$ passa uma única vez em cada um dos intervalos dessa união disjunta. O mesmo acontecerá para cada $y \in (c,d)$ em relação à união dos intervalos de $g(\beta)$.

Agora podemos relacionar as funções f e g , em cada intervalo, com um homeomorfismo H . Esse homeomorfismo deve levar α em β , ou seja, $H(\alpha) = \beta$, e portanto

$$H : [\alpha, f(\alpha)) \rightarrow [\beta, g(\beta))$$

$$H(x) = \frac{g(\beta) - \beta}{f(\alpha) - \alpha} \cdot (x - \alpha) + \beta$$

Temos então para $x = \alpha$

$$H(\alpha) = \frac{g(\beta) - \beta}{f(\alpha) - \alpha} \cdot (\alpha - \alpha) + \beta = \frac{g(\beta) - \beta}{f(\alpha) - \alpha} \cdot 0 + \beta = \beta$$

e para $x = f(\alpha)$

$$H(\alpha) = \frac{g(\beta) - \beta}{f(\alpha) - \alpha} \cdot (f(\alpha) - \alpha) + \beta = g(\beta) - \beta + \beta = g(\beta)$$

Agora vamos supor que existe um h que faz H levar toda a dinâmica de (a,b) . Portanto

$$h : [a,b] \rightarrow [c,d]$$

e

$$h(x) = g^{-n} \circ H \circ f^n(x)$$

onde n é o único inteiro tal que x pertença a apenas um dos intervalos disjuntos da união, $h(a) = c$ e $h(b) = d$.

Para isso ser verdade, precisamos mostrar que h é um homeomorfismo que conjuga f e g .

Para mostrar que h é um homeomorfismo, primeiros precisamos mostrar que h é contínua em todo intervalo $[a,b]$. Como h foi construída utilizando H , e H é contínua em cada intervalo $[f^n(\alpha), f^{n+1}(\alpha))$, então h é contínua em todos os intervalos. Basta agora mostrar que

h é contínua nas fronteiras desses intervalos disjuntos, ou seja, mostrar que os limites laterais são iguais.

Vamos pegar duas sequências $x_k \rightarrow f^n(\alpha)_+$ e $y_k \rightarrow f^n(\alpha)_-$, resultando então

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow +\infty} h(x_k) &= \lim_{k \rightarrow +\infty} g^n \circ H \circ f^{-n}(x_k) \\ &= g^n \circ H(\alpha) \\ &= g^n(\beta) \\ &= g^{n-1}(g(\beta)) \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} g^{n-1} \circ H \circ f^{-n+1}(y_k) \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} h(y_k) \end{aligned}$$

O que garante h ser contínua em cada uma das fronteiras de $f^n(\alpha)$

Por h ser uma composição das funções f , g e H e essas funções serem bijetivas, então h será uma bijeção entre $[a, b]$ e $[c, d]$, e portanto possui uma inversa $h^{-1}(y) = f^{-n} \circ H^{-1} \circ g^n(y)$, onde n é o único inteiro tal que $g^n(y) \in (c, d)$, $h^{-1}(c) = a$ e $h^{-1}(d) = b$.

A continuidade de h^{-1} é provada usando um raciocínio análogo a prova para h .

Portanto h é um homeomorfismo.

Porém, ainda falta mostrar que h conjuga f e g . Tomando x com $f^k(x) \in [\alpha, f(\alpha))$, temos que:

$$\begin{aligned} h \circ f(x) &= g^{-k+1} \circ H \circ f^{k-1}(f(x)) \\ &= g \circ (g^{-k} \circ H \circ f^k)(x) \\ &= g \circ h(x) \end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar. □

Proposição 5.5. *Seja $f \in \text{Diff}^1(S^1)$ um difeomorfismo Morse-Smale com k pontos fixos. Então existe $\epsilon > 0$ tal que todo g que está em $C^1 - \epsilon$ -próximo de f é um difeomorfismo Morse-Smale com exatamente k pontos fixos.*

Demonstração. Sejam $p_1 < p_2 < \dots < p_k$ os pontos fixos de f , listados em ordem crescente. Para cada um dos pontos fixos de f , como demonstrado anteriormente, existe um intervalo aberto $U_i = (a_i, b_i)$ que o ponto fixo p_i está inserido nele. Cada um desses intervalos pode ser considerados disjuntos e constantes para $\epsilon_i > 0$. Seja $\epsilon' = \min\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_k\}$, então se g está $C^1 - \epsilon'$ -próxima de f , então existe apenas um ponto q_i de g fixo (hiperbólico atrator ou repulsor tal qual p_i for) em cada intervalo U_i .

Como não existem pontos fixos de f no complementar da união desses intervalos, $f(x) \neq x$ em $S^1 \setminus \bigcup_{i=1}^k U_i$, então podemos pegar um ϵ'' pequeno o suficiente para que o mesmo ocorra em g , $g(x) \neq x$ em $S^1 \setminus \bigcup_{i=1}^k U_i$, para qualquer difeomorfismo g ϵ'' -próxima de f .

Ao tomar $\epsilon = \min \{\epsilon', \epsilon''\}$, temos que se g estiver $C^1 - \epsilon$ -próxima de f , então todos, e únicos, pontos fixos de g são os q_i similares aos p_i . \square

Teorema 5.4. *Todo difeomorfismo Morse-Smale $f \in \text{Diff}^1(S^1)$ é estruturalmente estável.*

Demonstração. Seja $\{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ os pontos fixos de f enumerados por ordem crescente. Vamos considerar os intervalos $I_i := [p_i, p_{i+1}]$ para cada um dos $i = 1, 2, \dots, k$, e ainda $p_{k+1} \equiv p_1$ e portanto o intervalo $I_k = [p_k, p_1]$.

Pela proposição anterior, para cada um desses intervalos podemos restringir a função f , $f_i := f|_{I_i}$ e portanto existe um $\epsilon > 0$ tal que g está tão próxima de f quanto esse ϵ . Isso também nos garante que g tem a mesma quantidade k de pontos fixos, q_1, q_2, \dots, q_k , e eles podem ser relacionados um a um com cada ponto fixo de f . Então, da mesma forma que dividimos o círculo de f por seus pontos fixos, vamos dividir g através de seus pontos fixos, $J_i := [q_i, q_{i+1}]$. Como cada q_i tem a mesma hiperbolicidade que p_i , atrator ou repulsor, cada intervalo J_i terá o comportamento em relação a g igual o comportamento de I_i em relação a f .

Como a dinâmica de cada intervalo será igual, podemos pegar um homeomorfismo $h_i : I_i \rightarrow J_i$ como conjugação topológica entre f_i e g_i .

Podemos unir todos esses homeomorfismos h_i em $h : S^1 \rightarrow S^1$, de tal modo que $h(x) = h_i(x)$. Como os intervalos são fechados, para os pontos de fronteira (os pontos fixos), teremos que $h_i(p_i) = q_i = h_{i+1}(p_i)$. Portanto h será contínua em todo o S^1 .

Para ver que h é uma bijeção, basta tomar a inversa de cada intervalo $h_i^{-1}(y) = h^{-1}$ para cada $y \in J_i$, e portanto será contínua pelos mesmos motivos de h .

Além disso, temos que h conjuga f com g .

$$\begin{aligned} h \circ f(x) &= (h \circ f)|_i(x) \\ &= (h_i \circ f_i)(x) \\ &= (g_i \circ h_i)(x) \\ &= (g \circ h)|_i(x) \\ &= g \circ h(x) \end{aligned}$$

como queríamos mostrar.

\square

6 CONCLUSÃO

No desenvolvimento desse trabalho pudemos passar pelas diversas propriedades dos sistemas dinâmicos, e aplicá-las num objeto de estudo específico: o círculo. Além disso, buscamos compreender a dinâmica do círculo, estendendo-se aos difeomorfismos Morse-Smale, onde destes conseguimos determinar como funciona toda a sua dinâmica. A estabilidade dos difeomorfismos Morse-Smale foi demonstrada, sendo necessário o uso de praticamente todas as proposições vistas no decorrer do trabalho.

Disso podemos concluir, devido ao fato do círculo, juntamente com os difeomorfismos Morse-Smale, ter uma estrutura relativamente simples e ser possível determinar toda sua dinâmica, sendo uma ótima iniciação ao estudos dos pontos hiperbólicos, da estabilidade e dos sistemas dinâmicos como um todo.

REFERÊNCIAS

- ABDENUR, F.; FRANÇA, L. F. N. **Hiperbolicidade, estabilidade e caos em dimensão um**. Rio de Janeiro: IMPA, 2007. (Publicações Matemáticas). Disponível em: https://impa.br/wp-content/uploads/2017/04/26CBM_04.pdf.
- ANTUNES, L. **Comportamento genérico de difeomorfismos do círculo**. 2012. Dissertação (Mestrado em Matemática) — Programa de Pós-graduação em Matemática, Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2012. Disponível em: <https://teses.usp.br/teses/disponiveis/55/55135/tde-13042012-101930/pt-br.php>.
- COSTA JÚNIOR, B. P. d. **Estabilidade de difeomorfismos do círculo: uma introdução à dinâmica discreta**. 2017. Monografia (Bacharelado em Matemática) — Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2017. Disponível em: <https://repositorio.ufba.br/bitstream/ri/24909/1/Estabilidade%20de%20Difeomorfismos%20do%20C%C3%ADrculo.pdf>.
- DEVANEY, R. L. **An introduction to chaotic dynamical systems**. 2nd. ed. Redwood City: Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1989.
- FRANÇA, L. F. N. **Estabilidade e densidade dos difeomorfismos Morse-Smale do círculo**. 2008. Dissertação (Mestrado em Matemática) — Programa de Pós-graduação em Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008. Disponível em: <https://www.maxwell.vrac.puc-rio.br/colecao.php?strSecao=resultado&nrSeq=13321@1>.
- KATOK, A.; HASSELBLATT, B. **Introduction to modern theory of dynamical systems**. Cambridge: Cambridge University Press, 1995. (Encyclopedia of Mathematics and its Applications).
- LIMA, E. L. **Análise real: funções de uma variável**. Rio de Janeiro: IMPA, 2007. (Coleção Matemática Universitária).
- LIMA, E. L. **Espaços métricos**. 4. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2011. (Projeto Euclides).

APÊNDICE A – Definições importantes

A seguir temos algumas definições e teoremas que se fazem necessários no decorrer do trabalho. Elas foram retiradas de (ABDENUR; FRANÇA, 2007), (LIMA, 2011) e (LIMA, 2007).

Teorema A.1 (Teorema do valor médio). *Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b) , então existe um número $c \in (a, b)$ tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Teorema A.2 (Teorema do valor intermediário). *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua no intervalo $[a, b]$. Se y_0 é um número entre $f(a)$ e $f(b)$, então existe $x_0 \in (a, b)$ tal que $f(x_0) = y_0$.*

Definição A.3. *Uma função $f : X \rightarrow Y$ é injetiva se $f(x) \neq f(y)$ para todo $x \neq y$*

Definição A.4. *Uma função $f : X \rightarrow Y$ é sobrejetiva se para qualquer y em Y existe um $x \in X$ tal que $f(x) = y$.*

Definição A.5 (Métrica). *Uma métrica num conjunto X é uma função $f : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada par ordenado de elementos $x, y \in X$ um número real $d(x, y)$, chamado distância de x a y , de modo que sejam satisfeitas as seguintes condições para quaisquer $x, y, z \in X$:*

- $d(x, x) = 0$
- Se $x \neq y$ então $d(x, y) > 0$
- $d(x, y) = d(y, x)$
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Definição A.6 (Espaço métrico). *Um espaço métrico é um par (X, d) , onde X é um conjunto e d é uma métrica em X .*

Essas definições de métrica e espaço métrico, além de mais propriedades sobre o assunto, podem ser encontradas em (LIMA, 2011).

Definição A.7 (Homeomorfismo). *Sejam X e Y espaços métricos. Uma função $f : X \rightarrow Y$ é um homeomorfismo se f é uma bijeção contínua e $f^{-1} : Y \rightarrow X$ também é contínua.*

Definição A.8 (Difeomorfismos). *Sejam $X, Y = S^1$. Se uma função $f : X \rightarrow Y$ é um homeomorfismo diferenciável cuja inversa f^{-1} também é diferenciável, então f é dito um difeomorfismo.*