UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

FERNANDO MORETTI FERNANDES NABARRO

O NÚMERO PI NO ENSINO BÁSICO

CURITIBA

2024

FERNANDO MORETTI FERNANDES NABARRO

O NÚMERO PI NO ENSINO BÁSICO

The number pi in Basic Education

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática, Área de Concentração: Matemática na Educação Básica, no Programa Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR.
Linha de Pesquisa: Divulgação e Popularização da Matemática da Educação Básica.
Orientador: Prof. Dr. Roy Wilhelm Probst.

CURITIBA

2024

4.0 Internacional

Esta licença permite que outros remixem, adaptem e criem a partir do trabalho licenciado para fins não comerciais, desde que atribuam ao autor o devido crédito e que licenciem as novas criações sob termos idênticos.

Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Curitiba

FERNANDO MORETTI FERNANDES NABARRO

O NÚMERO PI NO ENSINO BÁSICO

Trabalho de pesquisa de mestrado apresentado como requisito para obtenção do título de Mestre Em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Área de concentração: Matemática Na Educação Básica.

Data de aprovação: 17 de Dezembro de 2024

Dr. Roy Wilhelm Probst, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dr. Andre Krindges, Doutorado - Universidade Federal de Mato Grosso (Ufmt)

Dr. Andres David Baez Sanchez, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Documento gerado pelo Sistema Acadêmico da UTFPR a partir dos dados da Ata de Defesa em 17/12/2024.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, que sempre foram uma base sólida de apoio e motivação ao longo de toda a minha jornada de estudos.

À Deus, por Sua presença constante nos dando forças para seguir em frente, mesmo nos momentos mais difíceis.

Aos amigos, especialmente à Andressa, Cláudia e Paulo, que estiveram ao meu lado durante toda esta caminhada. Tivemos a oportunidade de compartilhar angústias em alguns momentos e, em muitos outros, a alegria da superação.

Aos professores, com um agradecimento especial ao professor Roy Wilhelm Probst, pela disponibilidade e por estar ao meu lado, promovendo o desenvolvimento deste trabalho.

À Sociedade Brasileira de Matemática que, na busca da melhoria do ensino de matemática na Educação Básica, viabilizou a implementação do PROFMAT.

À CAPES, pela recomendação do PROFMAT por meio do parecer do Conselho Técnico Científico da Educação Superior.

À Diretoria de Pesquisa e Pós-Graduação do Campus Curitiba da UTFPR, pela concessão de bolsa de estudos, conforme Edital 01/2023, pelo período de seis meses.

RESUMO

NABARRO, Fernando Moretti Fernandes. **O número pi no Ensino Básico**. 51 f. Dissertação - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2024.

Este trabalho apresenta, de forma concisa e prática para professores do Ensino Básico, os principais aspectos do ensino do número pi em sala de aula. Inicia-se com uma introdução histórica que contextualiza a necessidade e origem desse número. Em seguida, aborda-se a evolução das metodologias para a determinação de seu valor ao longo dos séculos e discute-se sua aplicação no contexto escolar. Além disso, o trabalho analisa o tratamento do número pi em livros didáticos da Educação Básica, considerando as exigências dos órgãos regulamentadores. Por fim, propõe-se uma atividade prática que busca promover a construção do conhecimento, priorizando a compreensão dos conceitos e suas aplicações.

Palavras-chave: Número pi; História da Matemática; Ensino de Matemática.

ABSTRACT

NABARRO, Fernando Moretti Fernandes. **The number pi in Basic Education**. 51 pg. Dissertation - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2024.

This paper presents a concise and practical approach for Basic Education teachers to address the main aspects of teaching the number Pi in the classroom. It begins with a historical introduction that contextualizes the necessity and origin of this number. Subsequently, it discusses the evolution of methodologies for determining its value over the centuries and examines its application in the school context. Additionally, this study analyzes how pi is treated in Basic Education textbooks, considering regulatory demands. Finally, a practical activity is proposed to encourage knowledge construction, prioritizing the understanding of concepts and their applications.

Keywords: Number pi; History of Mathematics; Mathematics Teaching.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Papiro de Rhind 12
Figura 3.1 – O octógono e a circunferência 17
Figura 3.2 – Circunferência entre dois polígonos 18
Figura 3.3 – Repartição do círculo e do hexágono 19
Figura 3.4 – Setor circular e triângulo equilátero 19
Figura 3.5 – Triângulo retângulo como setor do círculo 19
Figura 4.1 – Repartição do círculo 24
Figura 5.1 – Questão 146 - 2023 30
Figura 5.2 – Alternativas da questão 146 31
Figura 5.3 – Questão 147 - 2021 31
Figura 5.4 – Questão 151 - 2019 32
Figura 6.1 – A arte rupestre brasileira 35
Figura 6.2 – Os Elementos 35
Figura 6.3 – Polígono inscrito na circunferência 37
Figura 6.4 – Polígono inscrito na circunferência 38
Figura 6.5 – Construção da área do círculo 39
Figura 6.6 – Roda do sonho 40
Figura 6.7 – Aproximação do número π 41
Figura 6.8 – Arcos trigonométrico 42
Figura 6.9 – Círculo trigonométrico 42
Figura 6.10–Seno e cosseno 43
Figura 6.11–Atividades: Ciclo trigonométrico 44

LISTA DE TABELAS

Tabela 5.1 – Competência de Área 2 relacionada a π 28
Tabela 5.2 – Competência de Área 3 relacionada a π 29
Tabela 5.3 – Competência de Área 5 relacionada a π 29
Tabela 5.4 – Competência de Área 6 relacionada a π 29
Tabela 5.5 – Competências e habilidades cobradas nos últimos cinco anos 30
Tabela 5.6 – Simulação de notas do obtidas no ENEM 33

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 10

2 HISTÓRIA 12
2.1 Papiro de Rhind 12
2.2 Arquimedes 13
2.3 Demonstração de sua irracionalidade 14
2.4 Pi na cultura popular 15

3 MÉTODOS DE CÁLCULO 17
3.1 Estimativa pelos egípcios 17
3.2 Método de Arquimedes 17
3.3 Método utilizando polígonos 18
3.4 Métodos das séries 20
3.5 O valor de pi com a tecnologia 21

4 ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS 23
4.1 José Ruy Giovanni Júnior 23
4.2 Carlos N. C. de Oliveira e Felipe Fugita 24
4.3 Adilson Longen 25
4.4 Eduardo Chavante e Diego Prestes 26
4.5 Bonjorno, Giovanni Jr. e Paulo Câmara 26

5 ABORDAGEM NO ENEM 28

6 RECURSO EDUCACIONAL 34
6.1 7º Ano de Ensino Fundamental 35
6.2 8º Ano do Ensino Fundamental 37
6.3 2º Ano do Ensino Médio 39
6.4 Construção no GeoGebra 44

7 CONCLUSÃO 48

REFERÊNCIAS 49

1 INTRODUÇÃO

A constante π tem sido uma fonte de inspiração para matemáticos desde as antigas civilizações, que já reconheciam sua presença tanto em contextos algébricos quanto geométricos. Atualmente, π continua a motivar a comunidade matemática, especialmente devido à sua natureza irracional, impulsionando avanços computacionais para determinar um número cada vez maior de casas decimais e, assim, explorar suas propriedades com maior precisão e profundidade.

Segundo Palis (1989), π é uma constante que representa uma relação entre o comprimento de uma circunferência e seu diâmetro, e ao longo da história precisou de inúmeros estudos e investigações durante séculos para que houvesse uma aproximação ao seu valor que fosse considerável.

De acordo com Posamentier e Lehmann (2004), ao examinar a trajetória histórica do número π, desde suas primeiras menções em registros antigos até os métodos modernos de cálculo, destaca-se o Papiro de Rhind, um dos mais antigos documentos matemáticos, datado de aproximadamente 1650 a.C., no Egito Antigo. Este documento sugere que os egípcios já possuíam um conhecimento rudimentar sobre a relação entre o perímetro de um círculo e seu diâmetro. Contudo, foi na Grécia Antiga que π foi estudado de forma mais rigorosa, especialmente através do trabalho de Arquimedes de Siracusa, que desenvolveu um método geométrico e inovador para determinar com grande precisão o seu valor.

Além da relevante trajetória histórica associada ao número π, destacam-se suas propriedades de irracionalidade e transcendência, características que o classificam como um número especial. Segundo Figueiredo (2002), apenas em 1761 Johann Lambert conseguiu a prova da irracionalidade de π, isto é, a demonstração de que ele não pode ser escrito como uma razão entre números inteiros, enquanto que a transcendência de π implica que ele não é raiz de nenhuma equação polinomial com coeficientes racionais, diferenciando-o tanto dos números racionais quanto de muitos outros irracionais.

As aplicações do número π são amplas e abrangem áreas como engenharia, arquitetura, computação e ciências naturais. A compreensão dos métodos de cálculo de π é essencial para resolver problemas práticos, como a determinação de áreas e volumes de sólidos circulares e o desenvolvimento de sistemas de posicionamento global (GPS). Esses conhecimentos permitem uma precisão maior em aplicações que envolvem cálculos geométricos e tecnológicos, refletindo a importância de π em diversos campos da ciência e da engenharia.

A determinação de π é um tema muito abordado em programas de educação matemática, que variam os níveis de conhecimento desde o ensino fundamental até níveis mais avançados. Através de seu conceito abstrato, mas com aplicações práticas, explorando seu lado histórico e formas de determinação de seu valor pode-se desenvolver um incrível interesse dos estudantes.

Ao longo dos anos, o PROFMAT tem desenvolvido inúmeros trabalhos envolvendo o número π e abrangendo diversos assuntos, desde a área da álgebra com o trabalho A irracionalidade e a transcendência do número pi de João Miltom de oliveira, passando pela educação com a dissertação O número π na educação de Mariane Ribeiro até pontos mais individualizados como a tese Um problema de contagem e o número π de Isaias Guilherme de Souza Boruch, que serviram de inspiração para o desenvolvimento deste.

O objetivo geral deste trabalho é fornecer um texto voltado para professores do Ensino Básico que apresente o número π sob um aspecto mais amplo, integrando sua história, teoria, evolução e a prática pedagógica. Espera-se que o estudo contribua para uma compreensão mais aprofundada de π como conceito matemático e promova a melhoria do ensino deste tema nas escolas, incentivando uma abordagem mais rica e envolvente.

Para atingir o objetivo geral deste trabalho, os objetivos específicos são:

- Fazer um pesquisa sobre a história do aparecimento do número π.
- Apresentar métodos de cálculo do número π usados através da História.
- Fazer uma análise de como o número π é apresentado em livros didáticos.
- Mostrar como o número π aparece em questões de vestibulares e ENEM.
- Propor uma atividade de abordagem do número π no Ensino Básico.

Para atingir estes objetivos, o texto está dividido da seguinte maneira:

- Análise histórica (Capítulo 2).
- Métodos de cálculo (Capítulo 3).
- Análise de livros didáticos (Capítulo 4).
- Análise de questões (Capítulo 5).
- Proposta de recurso educacional (Capítulo 6).

2 HISTÓRIA

O número π contempla uma beleza matemática e uma universalidade indiscutível, se fazendo presente em diversas áreas do conhecimento e agregando sintonia a todas elas. Substituindo cada uma das palavras dos versos a seguir pelo números de letras que as formam, tem-se o número π até sua trigésima casa decimal: “Now I, even I, would celebrate In rhymes inapt, the great Immortal Syracusan, rivaled nevermore, Who in his wondrous lore, Passed on before, Left men his guidance how to circles mensurate” (Orr, 1906, p. 84).

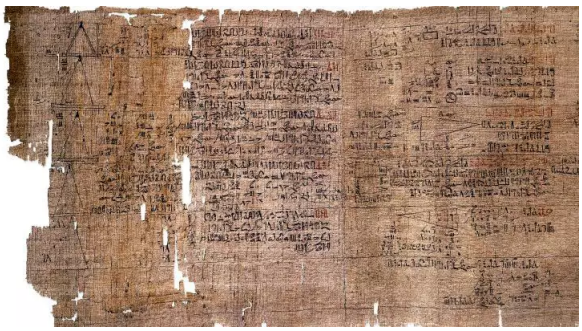
Apesar de sua vasta fama, o número π tem seu símbolo conhecido a cerca de 300 anos, quando foi implementado como a décima sexta letra do alfabeto grego.

2.1 PAPIRO DE RHIND

Há cerca de quatro mil de anos atrás as civilizações egípcias e babilônicas já tratavam do número π como uma razão entre o perímetro da circunferência e seu diâmetro, mas sem conhecer seu exato valor, fato que, apesar do grande avanço tecnológico, ocorre até os dias de hoje devido a sua irracionalidade. De acordo com Beckmann (1971), os valores determinados para π se deram no antigo Egito e na Babilônia como $4(8/9)^2$ e $3(1/8)$, respectivamente.

Os registros de π estão presentes em pergaminhos como o Papiro de Rhind (Figura 2.1), registrado em aproximadamente 1800 a.C o qual contém problemas que sugerem o cálculo de áreas de círculos pelas civilizações egípicias na antiga Mesopotâmia. O texto sugere a utilização de π como um número próximo a três e uma representação diferente e implícita da que utilizamos hoje. Segundo Sharp (2023), o Papiro de Rhind faz parte do acervo do Museu Britânico, o qual conta com alguns reparos e melhorias em sua estrutura para que o texto pudesse continuar a ser usado como referência.

Figura 2.1 – Papiro de Rhind



Fonte: Gaspar (2013).

De acordo com Posamentier e Lehmann (2004), o Papiro de Rhind mostra que “se construir um quadrado com um lado cujo comprimento é de oito nonos do diâmetro do círculo,

então a área do quadrado será igual à do círculo", isto é:

$$\pi R^2 = \left(\frac{8}{9} \cdot 2R\right)^2,$$

logo:

$$\pi \approx \frac{256}{81} = 3{,}160493827160493827...$$

Note que este valor se trata de uma aproximação razoável se comparado a época da descoberta. Ao longo dos anos novos métodos de determinação de π foram criados e um dos grandes responsáveis por este desenvolvimento foi Arquimedes.

2.2 ARQUIMEDES

Alguns anos mais tarde, a partir das investigações matemáticas da época surgiu a ideia de que o número π seria o quociente entre o comprimento de uma circunferência pelo seu diâmetro de uma maneira mais eficaz. De acordo com Eves (1997), o matemático Arquimedes, nascido no ano de 287 a.C. em Siracusa, foi um dos primeiros estudiosos a tratar do número π e a realizar determinações mais próximas de seu atual valor com a aplicação do método da exaustão. Para isso, utilizou-se de circunferências inscritas e circunscritas em polígonos regulares e chegou a conclusão de que quanto mais lados havia no polígono mais próximo era o valor do comprimento da circunferência, e desta forma, ao utilizar a ideia de limite demonstrou que o valor de π estava entre $3 + \frac{10}{71}$ e $3 + \frac{1}{7}$, ou seja, entre aproximadamente 3,14084507 e 3,142857142857... .

Apenas alguns séculos mais tarde foram implementadas outras formas de cálculo do número π, entre elas uma das mais significantes foi implementada por Leonhard Euler, 1748 quando em seu livro *Introduction in Analysin Infinitorum* já utilizava a letra grega π, implementada inicialmente pelo matemático galês William Jones em seu livro *Uma Sinopse das Conquistas Matemáticas* no ano de 1706, para a representação do quociente entre comprimento e diâmetro de uma circunferência.

Segundo Bigode (1994), o símbolo usado para representar a razão entre o contorno e o diâmetro de uma circunferência é a letra grega π, pois é a letra inicial da palavra contorno, escrita em grego. Foi popularizado pelo matemático suíço Leonhard Euler, em 1737 .

Além disso, Euler desenvolveu alguns métodos de cálculo do número π, um dos quais o que mais se aproximou dos valores atuais foi através do quadrado de uma série harmônica, que é dado por:

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$$

O número π carrega esta e inúmeras outras características peculiares, como a sua irracionalidade.

2.3 DEMONSTRAÇÃO DE SUA IRRACIONALIDADE

Provar a irracionalidade de π não é uma tarefa tão simples quanto demonstrar a irracionalidade de $\sqrt{2}$, principalmente devido ao fato de π ser um número transcendente. O termo "transcendente" é utilizado para descrever números que não podem ser expressos como solução de uma equação polinomial com coeficientes inteiros. Em outras palavras, isso significa que π não pode ser obtido por meio de operações aritméticas finitas.

O conceito de números transcendentes foi introduzido pelo matemático francês Joseph Liouville em 1844. Desde então, outros números transcendentes foram descobertos, como o número e, que é utilizado na base dos logaritmos naturais. Esse tipo de número apresenta propriedades matemáticas peculiares e desafiadoras, tornando a prova da irracionalidade de π um problema ainda mais complexo.

Existem várias formas de provar a irracionalidade de π (Wikipedia, 2024), dentre elas a prova de Mary Lucy Cartwright que ocorreu já no século XX e é baseada na utilização de cálculos de integrais e consiste no raciocínio recursivo. Já o alemão Johann Heinrich Lambert conseguiu realizar a demonstração ainda no século XVII através de frações contínuas, porém o método decorre uma enorme quantidade de cálculos.

A demonstração apresentada a seguir é do canadense Ivan Morton Niven, nascido na cidade de Vancouver em 25 de outubro de 1915, o qual foi graduado como doutor pela Universidade de Chicago em 1938.

Esta é considerada a mais bela prova da irracionalidade de π (Aigner; Ziegler, 2017) e está baseada no trabalho original de Niven (1947).

Teorema 2.1. *π é irracional.*

Prova. Considere $\pi = a/b$, o quociente de inteiros positivos, e os polinômios:

$$f(x) = \frac{x^n(a - bx)^n}{n!}$$

e

$$F(x) = f(x) - f''(x) + \cdots + (-1)^n f^{(2n)}(x),$$

para algum inteiro positivo n.

Como $n!f(x)$ tem coeficientes inteiros e termos em x de grau não inferior a n, $f(x)$ e suas derivadas $f^{(i)}(x)$ tem valores inteiros para $x = 0$ e também para $x = \pi = a/b$, pois $f(x) = f(a/b - x)$.

Do cálculo, temos que:

$$\frac{d}{dx}[F'(x)\operatorname{sen} x - F(x)\cos x] = F''(x)\operatorname{sen} x + F(x)\operatorname{sen} x = f(x)\operatorname{sen} x$$

e

$$\int_0^{\pi} f(x) \operatorname{sen} x \, dx = [F'(x) \operatorname{sen} x - F(x) \cos x]_0^{\pi} = F(\pi) + F(0). \tag{2.1}$$

Agora $F(\pi) + F(0)$ é um inteiro, pois $f^{(i)}(\pi)$ e $f^{(i)}(0)$ são inteiros. Mas para $0 < x < \pi$,

$$0 < f(x) \operatorname{sen} x < \frac{\pi^n a^n}{n!},$$

de modo que a integral em (2.1) é positiva, mas arbitrariamente pequena para n suficientemente grande. Assim, (2.1) é falso, e também o é a nossa suposição de que π é racional.

□

2.4 PI NA CULTURA POPULAR

O número π, além de ser amplamente estudado em diversas áreas da Matemática e utilizado como uma ferramenta para a solução de problemas em disciplinas como as engenharias, também está presente em diferentes manifestações culturais. Ele aparece em obras de arte, composições musicais, filmes, animações e pode ser explorado por meio de experimentos recreativos.

Entre os artistas que exploraram conceitos matemáticos em suas obras, destaca-se Leonardo da Vinci que é reconhecido por criações icônicas como Mona Lisa e A Última Ceia. Segundo Mathnasium (2018), Da Vinci também é responsável pelo Homem Vitruviano, uma representação que buscava abordar o problema da quadratura do círculo. Este problema, cuja origem remonta à época de Pitágoras, tem como objetivo construir, apenas com régua e compasso, um círculo cuja área seja igual à de um quadrado. Embora Da Vinci não tenha obtido sucesso em sua tentativa, resultado da irracionalidade de π, suas contribuições apresentaram soluções aproximadas que destacam sua genialidade e conexão entre arte e ciência.

Ao longo dos anos, o número π tornou-se tão significativo para a humanidade que inspirou a criação de composições musicais baseadas nos valores de suas casas decimais. Entre essas obras destaca-se a Pi Symphony, que não apenas aborda o número transcendental π, mas também explora o número de Euler, e. Para conhecer mais sobre essa composição musical, recomenda-se o canal pishymp disponível no YouTube (2007), onde é possível explorar detalhes dessa obra e sua relação com os números transcendentais.

O filme "Pi" (IMDb, 1998), dirigido por Darren Aronofsky, apresentou a história de um gênio matemático que acreditava que o universo era inteiramente composto por padrões matemáticos. O protagonista, ao explorar o número π por meio de supercomputadores aplicados à análise do mercado financeiro, identificou padrões que o fascinaram profundamente. No entanto, sua crescente obsessão com esses padrões levou-o à incapacidade de distinguir entre realidade e delírio, evidenciando os limites psicológicos impostos pela busca incessante por conhecimento absoluto.

Na série “Os Simpsons”, no episódio “Marge in Chains” (IMDb, 1993), Apu destaca sua memória ao afirmar que pode recitar 40.000 dígitos de π, uma cena que surgiu da colaboração entre os roteiristas e o matemático David Bailey, responsável por fornecer os dígitos solicitados. Inspirada por um recorde mundial recente, a inclusão de π no episódio reflete o uso criativo de referências científicas pela série, mesclando humor e cultura matemática.

Existem diversas abordagens formais para determinar aproximações do número π. No entanto, experimentos práticos podem ser explorados em sala de aula como uma forma de estimular o interesse dos estudantes, especialmente por meio de atividades investigativas. Um exemplo inspirador é o canal do YouTube “Stand-up Maths”, de Matt Parker (2009), que apresenta, a cada Dia do Pi (14 de março), novas e criativas formas de cálculo, oferecendo recursos valiosos para enriquecer o ensino do tema.

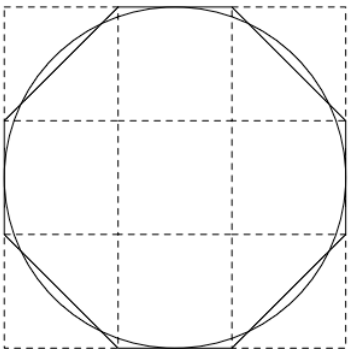
3 MÉTODOS DE CÁLCULO

Na antiguidade, civilizações como os babilônios e os egípcios já realizavam aproximações para o valor de π. Contudo, os valores obtidos por essas civilizações não eram tão precisos quando comparados aos valores atuais. O desenvolvimento da aproximação do valor de π ocorreu ao longo de toda a história, com diferentes métodos sendo desenvolvidos de acordo com os conhecimentos de cada época com modelos baseados na geometria, trigonometria, probabilidade e estatística.

3.1 ESTIMATIVA PELOS EGÍPCIOS

Embora não tenha sido registrado, Beckmann (1971) sugere que os egípcios tenham estimado o valor de π utilizando como referência a semelhança da área de um círculo inscrito em um quadrado de lado 9 e subdividido em quadrados de lado 3 e do octógono (Figura 3.1).

Figura 3.1 – O octógono e a circunferência



Fonte: O Autor.

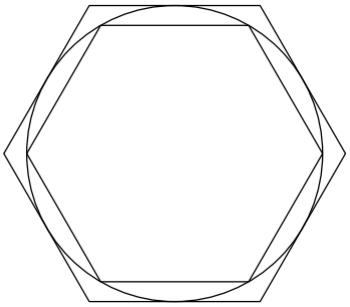
Desta forma, a área do octógono não regular é composta por 5 quadrado de lado três inteiros e outras quatro metades, totalizando 63 u.a.. Por outro lado, a área do círculo que possui raio 9/2 tem área aproximada de 63 u.a., valor próximo a 64 u.a.. Portanto, temos que $\pi r^2 \approx 64$, assim:

$$\pi \approx \frac{64}{(\frac{9}{2})^2} = \frac{256}{81} \approx 3{,}1605.$$

3.2 MÉTODO DE ARQUIMEDES

A determinação de π através do método de Arquimedes, baseia-se na construção de um polígono regular circunscrito e outro inscrito, ambos com o mesmo número de lados, a uma circunferência. Desta forma, o comprimento da circunferência será um valor intermédio entre o perímetro dos dois polígonos regulares (Figura 3.2).

Figura 3.2 – Circunferência entre dois polígonos



Fonte: O Autor.

Além disso, é notável que quanto maior a quantidade de lados do polígono mais próximo será sua forma será de uma circunferência e consequentemente melhor tem-se a aproximação de π. Através destes método geométrico Arquimedes de Siracusa inscreveu e circunscreveu polígonos regulares de 96 lados, concluindo que π está presente no intervalo $[223/71, 22/7]$, uma representação excelente para a época, considerando que $223/71 \approx 3{,}1408$ e $22/7 \approx 3{,}1429$.

Anos mais tarde, utilizando o método desenvolvido por Arquimedes, o matemático chinês Liu Hui conseguiu a aproximação de 3,14 para π após realizar a análise geométrica com um polígono de 96 lados. Mais tarde, trabalhando com um polígono de 3072 lados aperfeiçoou a aproximação para $\pi = 3{,}14159$.

3.3 MÉTODO UTILIZANDO POLÍGONOS

Realizando a análise de polígonos regulares, é possível notar através do método da exaustão que a razão entre seu perímetro P e sua diagonal d tendem a se aproximar da constante π, vejamos para polígonos de 4 e 6 lados com medidas de lado l:

No caso do quadrado, tem-se que o perímetro pode ser dado por $4l$, enquanto a medida de sua diagonal por $l\sqrt{2}$. Portanto, a razão a ser determinada é $P/d = 4l/l\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \approx 2{,}828$.

Analisando o hexágono regular de lado l, tem-se que seu perímetro pode ser dado por $6l$, enquanto sua diagonal mede $2l$. Portanto, a razão a ser determinada é $P/d = 6l/2l = 3$.

A análise de polígonos regulares com maior quantidade de lado, deixamos a cargo do leitor uma vez que esta aproximação da constante π é objeto de trabalho do método da exaustão. Para isso, sugerimos a construção de polígonos com auxílio do Geogebra.

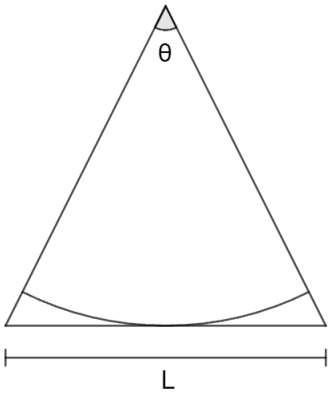
Desta forma, ao analisar o hexágono circunscrito a circunferência, podemos dividí-lo em seis triângulos equiláteros (Figura 3.3).

Desta forma, tomando o triângulo equilátero tal que L seja a medida do lado do hexágono regular e anotando a medida θ do arco central da circunferência (Figura 3.4).

Figura 3.3 – Repartição do círculo e do hexágono

Fonte: O Autor.

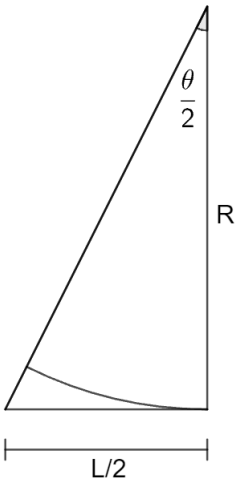
Figura 3.4 – Setor circular e triângulo equilátero



Fonte: O Autor.

Agora, tomando R como o raio da circunferência e traçamos a altura do triângulo (Figura 3.5).

Figura 3.5 – Triângulo retângulo como setor do círculo



Fonte: O Autor.

Aplicando a relação trigonométrica da tangente no triângulo retângulo obtido, concluímos que:

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\frac{L}{2}}{R}$$

Portanto.

$$L = 2R\tan\frac{\theta}{2}$$

Como o diâmetro D é o dobro do raio.

$$L = D\tan\frac{\theta}{2}$$

Além disso, como θ é a medida do ângulo central da circunferência ao ser dividida em n lados temos que.

$$\theta = \frac{360}{n}.$$

Logo:

$$L = D\tan\frac{180}{n}.$$

Assim, o perímetro P do polígono pode ser calculado por.

$$P = nL,$$

ou seja,

$$P = nD\tan\frac{180}{n}$$

Por fim, considerando que o perímetro do polígono seja uma aproximação para o comprimento da circunferência temos:

$$\pi \approx \frac{P}{D}$$

Substituindo o valor de P:

$$\pi \approx n\tan\frac{180}{n}.$$

Ao analisar o valor obtido, temos é possível concluir que a aproximação do valor de π depende apenas da quantidade n de lados do polígono, pois o valor D do diâmetro foi cancelado durante a execução dos cálculos.

3.4 MÉTODOS DAS SÉRIES

De acordo com Posamentier e Lehmann (2004), o matemático e filósofo alemão Gottfried Wilhelm Leibniz desenvolveu, no século XVII, uma série a qual, ao somar e subtrair alternadamente a fração com denominadores ímpares a partir de 1, chega-se à constante π/4:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots$$

Esta série resulta em valores que alternam entre ser maiores ou menores que π à medida que somamos os termos. Contudo, a aproximação do valor de π por meio desta série é muito lenta, sendo necessário cerca de cem mil termos para obter uma precisão de quatro casas decimais e cem milhões de termos para alcançar uma precisão de sete casas decimais.

No século seguinte, Leonhard Euler desenvolveu outras formas de determinar o valor de π na esperança de encontrar um padrão de repetição de suas casas decimais, isto é, na expectativa de mostrar sua racionalidade conseguiu obter a precisão de 126 casas decimais. Uma das formas da determinação de π foi através do quadrado da soma dos termos da série harmônica, assim obteve o seguinte resultado:

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots$$

Desta forma, com a soma de cem mil termos obtém-se a precisão de oito casas decimais.

3.5 O VALOR DE PI COM A TECNOLOGIA

Em 14 de agosto de 2020 foi batido o recorde mundial de casas decimais do número π, sendo determinado um total de 62,8 trilhões de casas decimais o recorde foi estabelecido pela Universidade de Ciências Aplicadas de Graubunden, na Suiça. Os cálculos foram efetuados em um supercomputador e com auxílio do software y-cruncher e o algoritmo utilizado se baseia na fórmula de Chudnovsky (Onody, 2021).

A fórmula de Chudnovsky foi publicado pelos dois irmãos David Volfovich Chudnovsky e Gregory Volfovich Chudnovsky em 1989 e o algoritmo se baseia na série geométrica a seguir:

$$\frac{1}{\pi} = 12 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(6k)!}{(3k)!(k!)^3} \frac{A + Bk}{C^{3k+\frac{3}{2}}},$$

onde $A = 13.591.409$, $B = 545.140.134$ e $C = 640.320$.

Além deste algoritmo ser utilizado para a quebra de recorde mundial em 2020, também foi utilizado para quebra de recordes em outros momentos, como em 1990 quando foram determinadas as primeiras dois bilhões de casas decimais de π.

Após esta marca, o recorde foi quebrado outras duas vezes. Em 2023 a Google Cloud utilizando o programa y-cruncher e o algoritmo de Chudnovsky conseguir chegar a incrível marca de 100 trilhões de casas decimais. Esta marca foi quebrada no dia em que se celebra o número π, 14 de março de 2024, (3/14 no formato americano), pela empresa norte americada Soligm que obteve o processamento de 105 trilhões de casas decimais.

Muito embora trilhões de casas decimais de π não venham a ser utilizadas, o procedimento de determinação de seu valor pode ser utilizado para avaliar a capacidade de processamento de supercomputadores.

Desta forma, é notável que existem diversas formas de determinar o valor de π, cada uma com diferentes abordagens e que podem ser adequadas a diferentes contextos e níveis de conhecimento. Portanto, é possível enriquecer os trabalhos realizados com o número π em diferentes graus de escolaridade, desde o Ensino Fundamental ao Ensino Superior.

4 ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS

Definido como a razão entre o comprimento de um circunferência e seu diâmetro, o número π tem papel fundamental na educação básica, servindo como fundamento para a compreensão de conceitos e aplicações em diversas áreas do conhecimento. De modo geral, inicialmente π é introduzido por meio do estudo do círculo e da circunferência, estabelecendo relações entre comprimento, área e relações angulares. À medida que o aprendizado matemático avança, π assume importância em outras áreas, como a trigonometria, de modo a estar intrinsecamente ligado as funções seno e cosseno as quais apresentam aplicações em diversas áreas do conhecimento, como o estudo de inúmeros fenômenos periódicos.

Visando investigar a adequação da abordagem dos conceitos do número π no Ensino Fundamental e Médio, analisamos as atuais formas de tratar deste conteúdo e realizamos uma reflexão sobre as características dos métodos abordados e se contemplam todos os itens exigidos na educação básica.

A abordagem dos livros didáticos deve abranger diversas realidades de todo o país, desta forma para que haja maior coerência e qualidade na educação de todo o país e que se garanta que todos os estudantes tenham acesso a uma formação básica mais comum independente da região em que vivem foi desenvolvido a Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Segundo a Secretaria de Educação do Paraná, a principal função é definir os objetivos de aprendizagem em diversas áreas do conhecimento, como a Matemática, Língua Portuguesa, Ciências Humanas entre outras, servindo de referência para a elaboração dos currículos escolares. Além disso, o Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) contribui com ações voltadas às escolas, estudantes e professores de toda a rede de ensino promovendo materiais pedagógicos e recursos de apoio à educação do Ensino Fundamental e Médio sem custos por meio do Fundo Nacional de Desenvolvimento Educacional (PNDE).

4.1 JOSÉ RUY GIOVANNI JÚNIOR

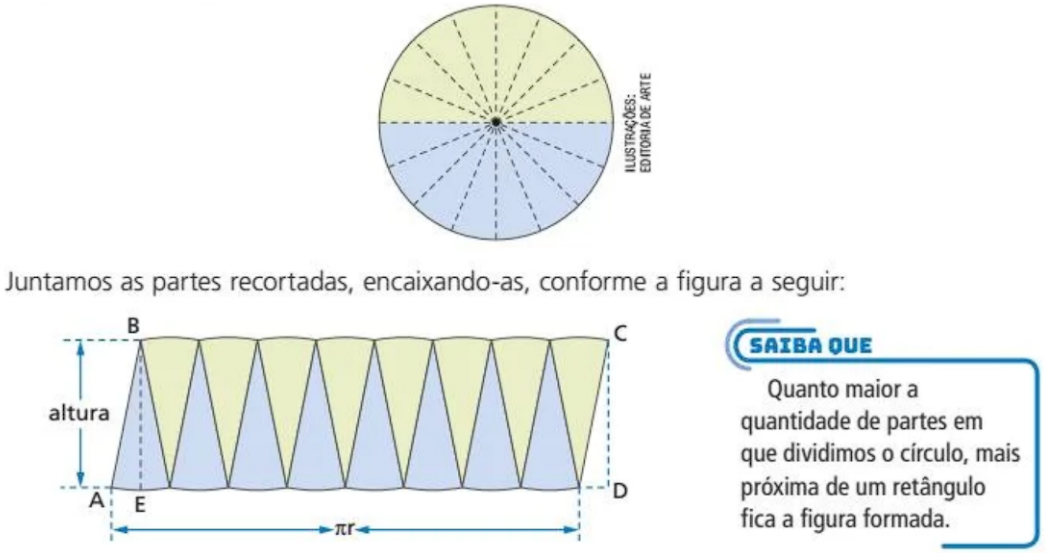
A coleção “A Conquista”, de José Ruy Giovanni Júnior (2022) é utilizada como ferramenta de estudo no Colégio Estadual Abraham Lincoln, localizado no município de Colombo. Ao explorar a coleção nota-se que a mesma aborda o número π em três dos quatros anos do Ensino Fundamental, sendo todas de diferentes formas e deixando-o sem aparição apenas no sexto ano.

No sétimo ano a coleção explora o número π começando com um experimento empírico. Inicialmente, os alunos realizam a medição do comprimento de objetos cilíndricos usando um barbante. Em seguida, calculam o quociente entre o comprimento da circunferência e o dobro da medida do raio do objeto em questão. Este procedimento permite obter estimativas do valor

numérico de π, uma vez que é dado com sabido que o comprimento da circunferência é o produto entre o diâmetro e π.

No oitavo ano, o tratamento do número π se mantém distante de sua história e teoria, sendo abordado outra vez de forma empírica. Realizando a divisão de um círculo em setores circulares (Figura 4.1), que ao serem posicionados lado a lado de modo coerente tendem a formar um retângulo com lados medindo π e πr. Desta forma, institui-se que a área do círculo tem mesma medida que a área do retângulo assim construído, ou seja, $A = \pi r^2$

Figura 4.1 – Repartição do círculo



Fonte: Júnior (2022).

No nono ano a abordagem é dada através das relações de comprimento de arco e área de setor circular. Estas relações são transmitidas realizando-se as proporções entre área ou comprimento de um círculo ou circunferência está proporcionalmente para uma volta completa, assim como a área ou comprimento de um arco α está para o arco α trabalhado. Desta forma, é possível obter-se as relações $A_{setor} = \alpha\pi r^2/360$ e $C_{setor} = \alpha 2\pi r/360$.

4.2 CARLOS N. C. DE OLIVEIRA E FELIPE FUGITA

A coleção “Geração Alpha”, escrita por Carlos N. C. de Oliveira e Felipe Fugita (2018), aborda concepções com o número π nos sétimo e oitavo anos do Ensino Fundamental, deixando o sexto e o nono ano sem contemplá-lo.

No sétimo ano, o valor de π é trabalhado através de um experimento semelhante que José Ruy Giovanni Júnior utiliza na coleção “A Conquista”. Esse experimento envolve medições do comprimento da circunferência, seguido pela divisão desse valor pela medida do diâmetro, resultando na determinação de valores aproximados para π.

Além disso, é trazido um quadro nomeado como “Matemática tem história”, o qual trata rapidamente da evolução do valor do número π ao longo dos anos. Relatando queo valor utilizado na Mesopotâmia era de $256/81$, enquanto em Alexandria o valor utilizado para π era $25/8$ e que Ptolomeu chegou a um valor mais próximo dado por $377/120$. Porém, o destaque vai para Arquimedes por ter determinado rigorosamente que o valor de π está entre 3,1408 e 3,1428.

No oitavo ano, o número π tem sua aparição com o conteúdo de área de figuras planas. Ao induzir os estudantes em uma repartição do círculo de modo a se criar um retângulo, assim como na coleção “A Conquista”, com um dos lados coincidente com o raio e o outro sendo a metade do comprimento da circunferência. Ao multiplicá-los, obtém-se que $A = \pi r^2$. Também é tratada a área do setor circular, apresentando-a através da proporcionalidade com a área do círculo, obtendo a fórmula $A_s = \alpha\pi r^2/360$. Além disso, o cilindro é abordado como um prisma, podendo ter o volume calculado como $V = A_b h$, onde $Ab = \pi r^2$. Porém, neste momento do Ensino Fundamental, não há nenhuma outra forma de abordagem além da determinação de formulários para a realização de cálculos de área e volume.

4.3 ADILSON LONGEN

A coleção “Apoema”, de Adilson Longen (2018), trás o número π no sétimo, oitavo e nono anos do Ensino Fundamental de diferentes maneiras, deixando de ser trabalhado no sexto ano.

No sétimo ano, é proposto aos estudantes que construam três circunferências com diâmetros de 8 cm, 12 cm e 16 cm. Em seguida, utilizando uma ferramenta de medição adequada, é realizada a medição do comprimento de cada uma delas. Desta forma, é possível determinar o quociente entre o comprimento e o diâmetro, constatando valores aproximados a $3{,}1$. Em sequência, é afirmado que *comprimento/diâmetro* $\approx 3{,}14159265$, logo $\pi \approx 3{,}14159265$ e $C = 2\pi r$. Apesar de não abordar nenhuma parte histórica do número π, é proposto aos estudantes que assistam o vídeo “Apresentando o número pi”, da OBMEP (2019) e que leiam “O geogebra na construção do significado do número pi”, de Dutra et al. (2011), para complementar os estudos realizados em sala.

Assim como as coleções mencionadas anteriormente, o livro do oitavo ano contempla a área do círculo com a utilização da repartição da circunferência de modo a se formar um retângulo de lados r e $C/2$. Assim, multiplicando seus lados é possível determinar a área do círculo e chegar a conclusão de que $A = \pi r^2$. Além disso, Adilson Longen contempla o comprimento de arcos de circunferência, que é trabalhado de acordo com a proporcionalidade com o comprimento da circunferência e seus arcos.

Por sua vez, o livro do nono ano aborda apenas a área do setor circular. Este conteúdo é trabalhado a partir das proporções de suas medidas de arco, obtendo a fórmula $A_s = \alpha\pi r^2/360$.

4.4 EDUARDO CHAVANTE E DIEGO PRESTES

Analisando a coleção “Quadrante”, de Eduardo Chavante e Diego Prestes (2016), voltada para o Ensino Médio, tem o número π sendo notado apenas na segunda e terceira séries, sem ter aparição no primeiro ano.

Apesar do livro da primeira série abordar a trigonometria no triângulo retângulo, lei dos senos e lei dos cossenos, o número π não é retratado neste momento.

Já na segunda série do Ensino Médio, o número π figura no momento de abordagem da trigonometria ao ser necessário a transformação entre as unidades de medida graus e radianos, sendo utilizado como referência para a medida de 180^o. Além disso, ainda na mesma série, o número irracional tem aparição ao tratar de área de figuras planas. Ao mencionar a área do círculo, o autor afirma que a área de um polígono regular pode ser dada pelo produto entre a apótema e o seu semi perímetro. Porém, se inserir um polígono regular em uma circunferência e fazer com que este polígono tenha uma quantidade ilimitada de lados, a apótema tende a ser o raio da circunferência enquanto o polígono tende a ser a circunferência e o semiperímetro passa a ser πr. Portanto, a área do polígono e da circunferência serão iguais, podendo ser calculadas pelo produto entre o semi perímetro πr e o raio. Assim, a área da circunferência é dada por $A = \pi r^2$.

Por fim, na terceira série, os autores abordam o volume e área total do cilindro, do cone e da esfera sem maiores especificidades ou demonstrações, apenas apresentando aos estudantes os formulários.

Desta forma, é notável que a Coleção Quadrante não possui foco específico em demonstração ou na parte histórica, como a do número π, abordando de forma mais enfática os processos de cálculo e de resolução prática de exercícios.

4.5 BONJORNO, GIOVANNI JR. E PAULO CÂMARA

A coleção “Prisma”, de José Roberto Bonjorno, José Ruy Giovanni Júnior e Paulo Roberto Câmara de Sousa (2020), aborda de maneira interessante e diferentemente do habitual o conteúdo dos Ensino Médio com uma coleção de livros dividas por temas e não por séries.

Ao tratar da geometria, os autores induzem a demonstração da área do círculo a partir de setores circulares que quando colocados lado a lado constituem um retângulo de base πr e altura r e, daí, concluem que a área do retângulo e da circunferência são iguais e calculadas por $A = \pi r^2$. Além disso, retratam a área do setor circular a partir das proporções entre área e ângulo e o cálculo da coroa circular através da diferença de áreas e circunferências, obtendo a fórmula $A = \pi(R^2 - r^2)$.

Ainda no livro de geometria, a coleção destina um momento específico para retratar um pouco da história da Matemática, relatando que esta é dividida em três principais setores, sendo eles a Geometria, a Álgebra e a Análise. Dentre estes setores, sugerem que o mais antigo é a

geometria, uma vez que ela surgiu da necessidade de medir terrenos, moradias, monumentos e etc. Em relação a circunferência, aborda um método mais antigo de cálculo sendo dado por $A = (d - d/9)^2$, uma vez que o valor conhecido de π na época era $3{,}16$.

Ao citar a geometria, aborda o livro “Elementos”, de Euclides, como relato das provas geométricas e a busca por transformá-la em ciência. Além disso, cita a importância do livro e do icônico matemático para o desenvolvimento de provas realizadas anos depois.

Por fim, promove o trabalho com os estudantes sobre o volume do cilindro e do cone através do princípio de Cavalieri, quando comparados a prismas e a pirâmides. Para a esfera, aborda a demonstração de forma simplória e intuitiva de seu volume com o uso do cilindro, já para a área, faz a divisão da esfera em uma quantidade ilimitada de pirâmides, com base coincidente com a casca da esfera e vértice com o centro.

Dessa forma, há várias maneiras de abordar o número π ao longo dos anos da educação básica, começando por conceitos introdutórios, como a relação entre o comprimento e o diâmetro de círculos, e avançando para contextos históricos e aplicações práticas. Em avaliações como vestibulares e ENEM, π é frequentemente explorado de maneira prática, focando na aplicação direta de seus conceitos. Essa abordagem visa promover uma compreensão mais profunda e estimular o raciocínio necessário para resolver situações-problema com flexibilidade e precisão.

5 ABORDAGEM NO ENEM

O Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) foi criado pelo governo federal em 1998, com o objetivo inicial de avaliar a educação básica dos estudantes em todo o território nacional e originalmente a aplicação do exame ocorria em um único dia.

Em 2004, o ENEM passou por uma significativa transformação, adquirindo características mais próximas do formato atual. Com a criação do Programa Universidade para Todos (Prouni), o ENEM passou a ser utilizado como métrica para a concessão de bolsas de estudo, descontos e até mesmo para o ingresso em universidades em todo o país.

Além de facilitar o acesso às universidades públicas e privadas, o ENEM também possibilita aos estudantes a participação em três programas governamentais promovidos pelo Ministério da Educação (MEC): o Sistema de Seleção Unificada (Sisu), o Prouni e o Fundo de Financiamento Estudantil (Fies).

Como ferramenta de avaliação do nível de formação dos estudantes da educação básica, o ENEM permite ao governo identificar as áreas de maior carência na qualidade do ensino. Dessa forma, é possível promover melhorias nos aspectos mais necessários, visando um ensino público mais eficaz e eficiente.

A matriz de referência de Matemática e suas Tecnologias do ENEM é baseada em competências, habilidades e objetos de conhecimento e é de responsabilidade do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Anísio Teixeira (INEP) (Brasil, 2024). Ao analisar a matriz de referência é notável que o número π pode estar presente nas competências de área C2, C3 e C5 através de certas habilidades como mostra os quadros a seguir.

Tabela 5.1 – Competência de Área 2 relacionada a π

Competência de Área 2	**Habilidades**
Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela, assim π é contemplado nas habilidades:	H7: Identificar características de figuras planas ou espaciais.
	H8: Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.
	H9: Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

Fonte: O Autor.

Tabela 5.2 – Competência de Área 3 relacionada a π

Competência de Área 3	**Habilidades**
Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano, o qual se faz presente na habilidade:	H14: Avaliar proposta de intervenção na realidade utilizando conhecimentos geométricos relacionados a grandezas e medidas.

Fonte: O Autor.

Além disso, através de funções e da análise de gráficos e tabelas o número π pode ser utilizado e trabalhado de forma indireta nas competências C5 e C6.

Tabela 5.3 – Competência de Área 5 relacionada a π

Competência de Área 5	**Habilidades**
Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas. Indiretamente, é possível trabalhar com o número π a partir das habilidades:	H19: Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.
	H20: Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas.
	H21: Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.
	H22: Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

Fonte: O Autor.

Tabela 5.4 – Competência de Área 6 relacionada a π

Competência de Área 6	**Habilidades**
Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.	H24: Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências.
	H25: Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.
	H26: Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos.

Fonte: O Autor.

Ao analisar as questões dos últimos cinco anos do ENEM, é possível identificar as competências e habilidades relacionadas ao número π necessárias para que o estudante seja capaz de ter um bom desempenho na avaliação. É notório que as competências 2 e 3 são mais frequentes, assim como suas respectivas habilidades 7, 8 e 14. Contudo, o conjunto completo de habilidades se faz necessário para pleitear vagas em universidades, principalmente as áreas de exatas.

Tabela 5.5 – Competências e habilidades cobradas nos últimos cinco anos

Ano	Questão	Caderno	Competência	Habilidades
2023	146	Cinza	6	H25, H26
2023	157	Preto	2	H7
2023	166	Preto	3	H14
2022	161	Preto	3	H14
2021	147	Amarelo	2 e 3	H8 e H14
2021	148	Preto	3	H14
2021	161	Preto	5	H20
2020	-	-	-	-
2019	146	Preto	2	H7
2019	149	Preto	3	H14
2019	151	Amarelo	2	H7 e H8
2019	178	Preto	3	H14
2019	180	Preto	5	H21

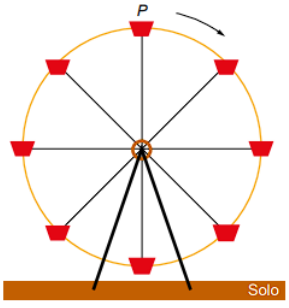
Fonte: O Autor.

A seguir tem-se as a apresentação de algumas questões para análise das competências de área e habilidades abordadas de acordo com as tabelas apresentadas anteriormente.

A primeira questão apresentada é a 146 do ano de 2023, presente no caderno cinza do segundo dia, a qual contempla a competência 6 e as habilidades H25 e H26.

(ENEM 2023 - Questão 146) A figura ilustra uma roda-gigante no exato instante em que a cadeira onde se encontra a pessoa P está no ponto mais alto dessa roda-gigante.

Figura 5.1 – Questão 146 - 2023

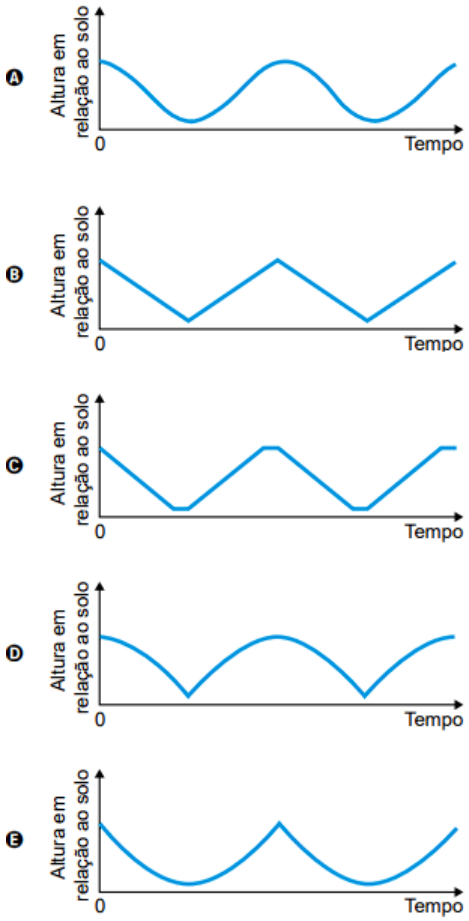


Fonte: ENEM (2023).

Com o passar do tempo, à medida que a roda-gigante gira, com velocidade angular constante e no sentido horário, a altura da cadeira onde se encontra a pessoa P, em relação ao solo, vai se alterando.

O gráfico que melhor representa a variação dessa altura, em função do tempo, contado a partir do instante em que a cadeira da pessoa P se encontra na posição mais alta da roda-gigante, é:

Figura 5.2 – Alternativas da questão 146

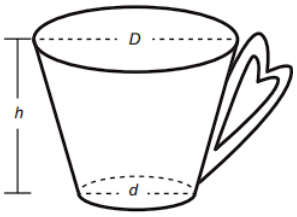


Fonte: ENEM (2023).

Note que para a solução deste exercício é necessário interpretar as informações trazidas a partir da leitura da imagem e dos gráficos, analisando as informações contidas e assim construir os argumentos necessários para assinalar a alternativa correta, exatamente como é tratada a C6 com as habilidades H25 e H26.

(ENEM 2021 - Questão 147) Uma pessoa comprou uma caneca para tomar sopa, conforme a ilustração.

Figura 5.3 – Questão 147 - 2021



Fonte: ENEM (2021).

Sabe-se que $1\text{cm}^3 = 1$ mL e que o topo da caneca é uma circunferência de diâmetro (D) medindo 10 cm, e a base é uma círculo de diâmetro (d) medindo 8 cm. Além disso, sabe-se que

a altura (h) dessa caneca mede 12 cm (distância entre o topo das circunferências do topo e da base). Utilize 3 como aproximação para π.

Qual é a capacidade volumétrica, em milimetro, dessa caneca?

a) 216 b) 408 c) 732 d) 2196 e) 2928

Observe que, para resolver a questão é imprescindível a aplicação de conhecimentos geométricos e a representação adequada da situação-problema. Isso implica na utilização de conceitos relacionados ao espaço e à geometria, bem como na compreensão e aplicação de unidades de medida pertinentes ao problema apresentado.

(ENEM 2019 - Questão 151) Uma administração municipal encomendou a pintura de dez placas de sinalização para colocar em seu pátio de estacionamento.

O profissional contratado para o serviço inicial pintará o fundo de dez placas e cobrará um valor de acordo com a área total dessas placas. O formato de cada placa é um círculo de diâmetro d = 40 cm, que tangencia lados de um retângulo, sendo que o comprimento total da placa é h = 60 cm, conforme ilustrado na figura. Use 3,14 como aproximação para π.

Figura 5.4 – Questão 151 - 2019

Fonte: ENEM (2019).

Qual é a soma das medidas das áreas, em centímetros quadrados, das dez placas?

a) 16628 b) 22280 c) 28560 d) 41120 e) 66240

Neste caso, o conhecimento necessário é baseado na interpretação geométrica da realidade, identificando características de figuras planas para resolver a situação-problema que envolve a geometria.

As provas do ENEM são separadas por dias e áreas. No primeiro dia são aplicadas as provas relacionadas a Linguagens, Códigos e suas Tecnologias, Redação e Ciências Humanas e suas Tecnologias, enquanto no segundo dias há os blocos de Ciências da Natureza e suas Tecnologias e Matemática e suas Tecnologias. Portanto, ao realizar as provas cada estudante irá obter cinco notas, sendo cada uma referente aos diferentes blocos trabalhados.

Além disso, o estudante que busca uma vaga na universidade deve identificar as suas notas obtidas em cada um dos blocos, que se dá de acordo com a quantidade de acertos de questões em seus diferentes níveis de dificuldade e em seguida consultar as especifidades de cada universidade e seus respectivos cursos, uma vez que a nota do ENEM possui diferentes pesos para cada curso pretendido. Por exemplo, a Universidade Tecnológica do Paraná (UTFPR) admite estudantes através de seu vestibular próprio ou utilizando as notas obtidas no ENEM. No caso da prova nacional é preciso identificar o peso que cada bloco possui para os diferentes cursos dentro da instituição. Estas informações são disponibilizadas pela própria instituição de ensino superior.

Para verificar a nota que a universidade irá considerar para admitir um possível universitário, é preciso determinar a média ponderada de acordo com o curso desejado pelo estudante, assim consideremos um candidato que tenha obtido as seguintes notas no ENEM:

Tabela 5.6 – Simulação de notas do obtidas no ENEM

Área de Conhecimento	**Nota**
Linguagens, Códigos e suas Tecnologias	890,5
Redação	908,6
Ciências Humanas e suas Tecnologias	850,8
Ciências da Natureza e suas Tecnologias	850,5
Matemática e suas Tecnologias	950,2

Fonte: O Autor.

Por exemplo, um estudante que esteja pleiteando uma vaga em Engenharia Civil na UTFPR tem suas notas de Linguagens, Códigos e suas Tecnologias, Ciências Humanas e suas Tecnologias, Redação, Ciências da Natureza e suas Tecnologia e Matemática e suas Tecnologias com pesos 1, 1, 1, 2 e 4, respectivamente. Portanto a sua nota a ser considerada para concorrer a este curso é dada pela média ponderada, logo sua nota final é dada da seguinte maneira:

$$\text{Nota final } = (890{,}5 + 908{,}6 + 850{,}8 + 850{,}5 \times 2 + 950{,}2 \times 4)/9 = 8151{,}7/9 = 905{,}74.$$

Desta forma, a nota que este estudante deve comparar aos de seus concorrentes é 905,74 pontos.

Portanto, para pleitear vagas em universidades, é imprescindível obter uma boa nota no ENEM. Nesse contexto, a formação na educação básica desempenha um papel importante na preparação dos candidatos, destacando a necessidade de um entendimento sólido dos conceitos relacionados ao número π.

6 RECURSO EDUCACIONAL

A introdução do número π na educação básica é uma prática fundamental, com raízes históricas e culturais profundas, que enriquece a formação matemática dos alunos. O π não é apenas uma constante matemática; é um símbolo da matemática ao longo dos séculos, e seu ensino oferece uma oportunidade de explorar essa herança. No entanto, essa abordagem não está isenta de desafios.

A complexidade conceitual do π pode ser um obstáculo para estudantes mais jovens. Com conceitos abstratos, como números irracionais e relações geométricas, é importante garantir que o ensino seja adaptado ao nível de compreensão dos alunos, proporcionando uma base sólida para o desenvolvimento do raciocínio lógico. Além disso, é essencial evitar uma abordagem excessivamente focada na memorização de dígitos em favor de uma ênfase na compreensão dos conceitos e aplicações práticas.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais:

> A atividade matemática não é 'olhar para as coisas prontas e definidas', mas a construção e a apropriação de um conhecimento pelo aluno, que se servirá dele para compreender e transformar sua realidade (...) o conhecimento matemático deve ser apresentado aos alunos como historicamente construído e em permanente evolução. O contexto histórico possibilita ver a Matemática em sua prática filosófica, científica e social e contribui para a compreensão do lugar que ela tem no mundo (Brasil, 2001, p. 19-20).

A falta de contextualização também é um desafio. O número π deve ser apresentado de maneira atraente e relacionado a aplicações práticas. A matemática é mais cativante quando os alunos podem ver sua relevância no mundo real. Além disso, a escolha entre uma abordagem padrão, que trata π como uma constante simples, e uma abordagem alternativa, que destaca sua irracionalidade, é um dilema pedagógico. Ambas têm méritos, mas a escolha deve ser feita com base no nível de conhecimento dos alunos, visando uma compreensão efetiva do número π em seu contexto matemático.

Segundo Castilho e Tônus:

> O Lúdico é um recurso indispensável para qualquer fase da educação escolar, assim é preciso considerar todas as atividades que contribuem para o desenvolvimento do educando e fazer dessa ferramenta pedagógica um elo de ligação entre ensino e aprendizagem. Os divertimentos lúdicos, para muitos filósofos, psicólogos e educadores é o berço obrigatório das atividades intelectuais e do desenvolvimento das funções superiores, por isso é indispensável à prática educativa (Castilho; Tônus, 2009, p. 02).

Desta forma, vejamos uma proposta para abordar o número π em cada um dos anos de acordo com a BNCC.

6.1 7º ANO DE ENSINO FUNDAMENTAL

A arte rupestre é o termo que denomina representações por meio de pinturas e gravuras nas cavernas durante a Pré-História e serve de fonte histórica para pesquisas sobre o surgimento dos primeiros seres humanos e seus costumes. Segundo Putnoki (1993), há cerca de 60 mil anos o homem realiza representações em pedras, as quais permitem entender seu cotidiano na época.

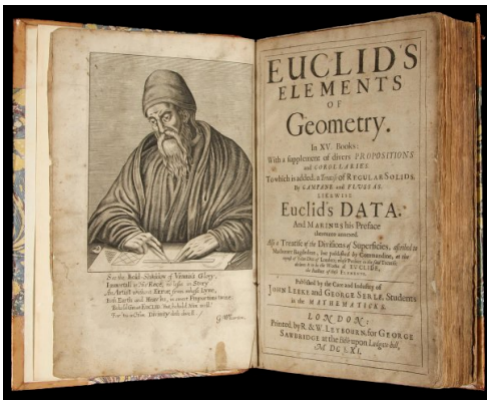
Figura 6.1 – A arte rupestre brasileira

Fonte: UNICAMP (2024a).

No Egito Antigo, o desenvolvimento de muitas civilizações dependia da fertilidade da terram em volta do Rio Nilo. Assim, era preciso demarcar as áreas de cada terreno e os responsáveis por esta tarefa eram denominados de Harpedonaptas, que significa esticador de cordas. Para realizar estas medições eram utilizadas algumas propriedades a Geometria.

O prefixo Geo, da palavra grega Geometria, significa terra, enquanto seu sufixo metria quer dizer medida. Portanto, as medidas de terra da época auxiliaram o desenvolvimento da Geometria. Cerca de 300 a.C., Euclides escreveu a obra “Os Elementos”, a qual uniu e organizou o conhecimento desenvolvido por diferentes culturas e representa um importante avanço para o entendimento da Matemática, mais especificamente da geometria.

Figura 6.2 – Os Elementos



Fonte: Blog (2024).

Provavelmente você já tenha se deparado com o símbolo π anteriormente, ele é uma letra grega a qual representa um número e é essencial em nossos estudos matemáticos. Faremos agora, uma investigação para determinar o número que esta letra representa e para isso iremos precisar de alguns materiais:

- Compasso
- Cola
- Barbante
- Régua
- Tesoura

Para identificar o valor do número π, siga o passo a passo a seguir.

I. Utilizando o compasso e as instruções do Professor, desenhe uma circunferência na folha de sulfite com o raio que você desejar.

II. Passe levemente cola sobre o desenho e, em seguida, posicione o barbante com precisão em cima da circunferência.

III. Antes que a cola aja, recorte o barbante e remova-o da circunferência.

IV. Utilizando a régua, meça o comprimento de barbante utilizado para contornar a circunferência e também anote o diâmetro.

V. Determine o quociente entre o comprimento de barbante utilizado e o diâmetro da circunferência.

Atividade.

1. Qual o quociente obtido?
   A expectativa é que o estudante obtenha valores próximos a 3,1.

2. Anote os valores obtidos por outros três colegas.
   Resposta pessoal.

3. O que você pode concluir sobre os valores anotados no item anterior?
   A expectativa é que os estudantes verifiquem que todos os valores anotados deveriam ser o mesmo.

Desta forma, podemos concluir que o número π é o quociente entre o comprimento e o diâmetro de uma circunferência, ou seja,

$$\pi = \frac{\text{comprimento}}{\text{diâmetro}} \approx 3{,}14.$$

Além disso, podemos concluir que o comprimento C de uma circunferência é dado pelo produto entre o diâmetro e o número π, assim $C = \text{diâmetro} \times \pi$. Como o diâmetro é o dobro do raio, é possível escrever o comprimento da circunferência da seguinte forma $C = 2\pi r$

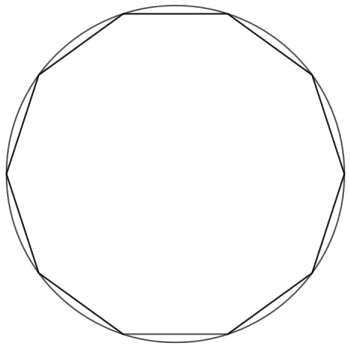
6.2 8º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Além de suas aplicações e do desenvolvimento de habilidades nas áreas da geometria, o número π se estende ao cálculo e à álgebra por meio de problemas que envolvem áreas de regiões curvilíneas e as equações que as representam. O conceito de que π é um número irracional também é abordado com os estudantes, uma vez que ele não pode ser expresso como uma fração. Essa abordagem contribui para a ampliação da compreensão matemática dos alunos. Assim, apresenta-se a proposta a seguir para explorar esse tema com uma turma do 8º ano do Ensino Fundamental.

Como é amplamente reconhecido, o número π pode ser expresso como o quociente entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro. Além disso, essa fração nunca pode ser representada de modo que o numerador e o denominador sejam números inteiros. Portanto, afirma-se que π é um número irracional.

Para determinar o valor de π, o matemático grego Arquimedes de Siracusa desenvolveu uma abordagem interessante para aproximá-lo. Ele inscreveu um polígono regular com um grande número de lados em uma circunferência e calculou seu perímetro, que denotaremos por P_i, ou seja, a soma de todos os lados desse polígono.

Figura 6.3 – Polígono inscrito na circunferência

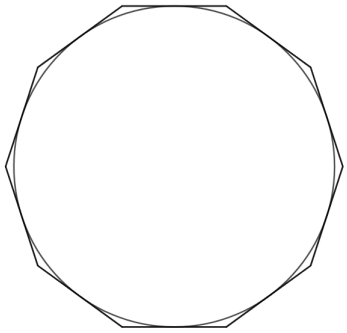


Fonte: O Autor.

Note que quanto maior a quantidade de lados do polígono inscrito mais próximo o perímetro do polígono será do comprimento da circunferência.

Por outro lado, Arquimedes fez o mesmo circunscrevendo um polígono a mesma circunferência e determinando o seu perímetro, o qual denotaremos por P_e.

Figura 6.4 – Polígono inscrito na circunferência



Fonte: O Autor.

Desta forma, temos que P_i é menor que o comprimento C da circunferência enquanto P_e é maior, ou seja, $P_i < C < P_e$. Assim, com esta desigualdade Arquimedes pôde determinar o valor de π com precisão duas casas decimais.

Relembrando: O comprimento da circunferência é dado por: $C = 2\pi r$.

Além do número π estar envolvido nos cálculos do comprimento da circunferência, ele também aparece na área do círculo. Para determinar a área do círculo faremos uma investigação, na qual será necessário alguns materiais:

- Compasso
- Cola
- Canetas coloridas
- Régua
- Tesoura

Para entender o valor da área do círculo, siga os passos a seguir:

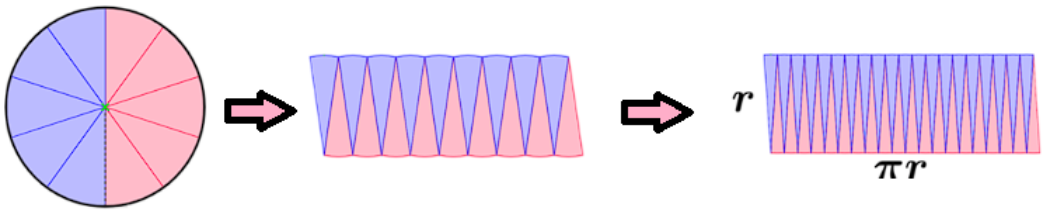
I. Utilizando o compasso, desenho uma circunferência do tamanho que desejar.

II. Utilizando as canetas coloridas, destaque a medida do raio. Em seguida, destaque de duas cores diferentes o comprimento da circunferência, de modo que ele seja dividido ao meio.

III. Recorte a circunferência da folha desenhada e em seguida separe-a em setores circulares de mesmo tamanho e de mesma quantidade entre as duas cores escolhidas.

IV. Posicione os setores circulares lado a lado intercalando as cores, de modo que as cores fique separadas e cole-os.

Figura 6.5 – Construção da área do círculo



Fonte: O Autor.

Note que a figura construída a partir do círculo desenhado se assemelha a um retângulo e que quanto mais setores circulares tivermos, mais próximo de um retângulo a figura estará. Além disto, veja que um dos lados do retângulo coincide com o raio da circunferência enquanto o outro com metade do comprimento da circunferência, isto é, πr.

Para determinar a área deste retângulo que é coincidente com a área do círculo inicial, basta multiplicarmos a base pela altura, assim: $A = r\pi r$, ou seja, $A = \pi r^2$.

Portanto, a área do círculo é dada por $A = \pi r^2$.

6.3 2º ANO DO ENSINO MÉDIO

O número π desempenha um papel fundamental no desenvolvimento de habilidades matemáticas e na compreensão de conceitos mais complexos. Inicialmente, π é um elemento central para a compreensão da geometria, permitindo que os estudantes estabeleçam conexões entre formas e o espaço. Além disso, sua presença na trigonometria fornece uma base sólida para o estudo de funções trigonométricas, sendo essencial para o entendimento de ângulos e movimentos periódicos. Diante disso, a seguir será apresentada uma proposta de abordagem do número π para a segunda série do Ensino Médio.

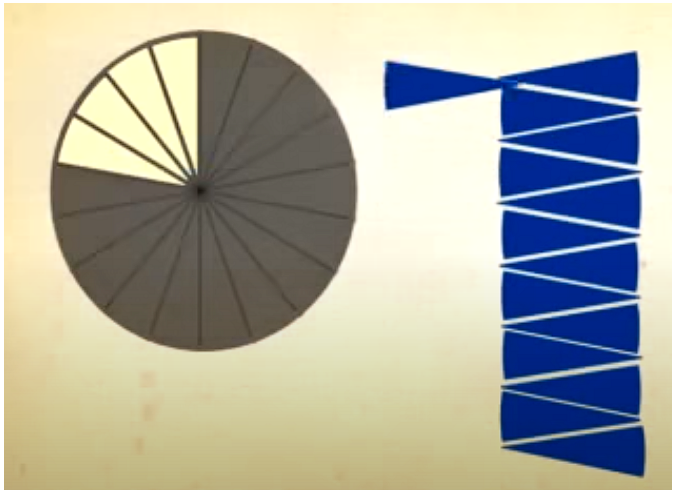
O número π, na Matemática, é uma constante numérica obtida a partir da relação entre o perímetro de uma circunferência e seu diâmetro, sendo classificado como um número irracional. Em muitos cálculos, é comum aproximar π para 3,14, e várias calculadoras científicas utilizam até seis casas decimais para esse arredondamento, ou seja, $\pi \approx 3{,}1415927$. Atualmente, supercomputadores já foram capazes de calcular mais de 62 trilhões de casas decimais de π.

Entre as primeiras tentativas rigorosas de determinação de π, destaca-se a realizada pelo renomado matemático Arquimedes, por volta do século III a.C. Utilizando polígonos de 96 lados inscritos e circunscritos a uma circunferência, Arquimedes estabeleceu que π deveria estar entre $223/71$ e $22/7$, ou seja, aproximadamente entre 3,1408 e 3,1429. Com o passar dos séculos, outras técnicas de aproximação foram desenvolvidas, permitindo uma determinação cada vez mais precisa de π.

Para retomar a importância do número π, vejamos o vídeo disponível no link:

<https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1173>

Figura 6.6 – Roda do sonho



Fonte: UNICAMP (2024b).

Agora que retomamos este conteúdo, vamos determinar uma aproximação para π de modo semelhante ao que Arquimedes realizou. Para isso, acesse o conteúdo desenvolvido no Geogebra através do link a seguir.

<https://www.geogebra.org/m/e5pnwnx5>

Com a atividade aberta, observe que quando o polígono inscrito e circunscrito possui três lados, temos $2{,}6 < \pi < 5{,}2$. Para verificar esta condição, podemos determinar o comprimento dos polígono inscritos e circunscritos, enquanto a fórmula utilizada no Geogebra será trabalhada posteriormente. Para $n = 3$, isto é, o polígono utilizado junto ao círculo trigonométrico é um triângulo temos os comprimentos a seguir.

Triângulo inscrito à circunferência

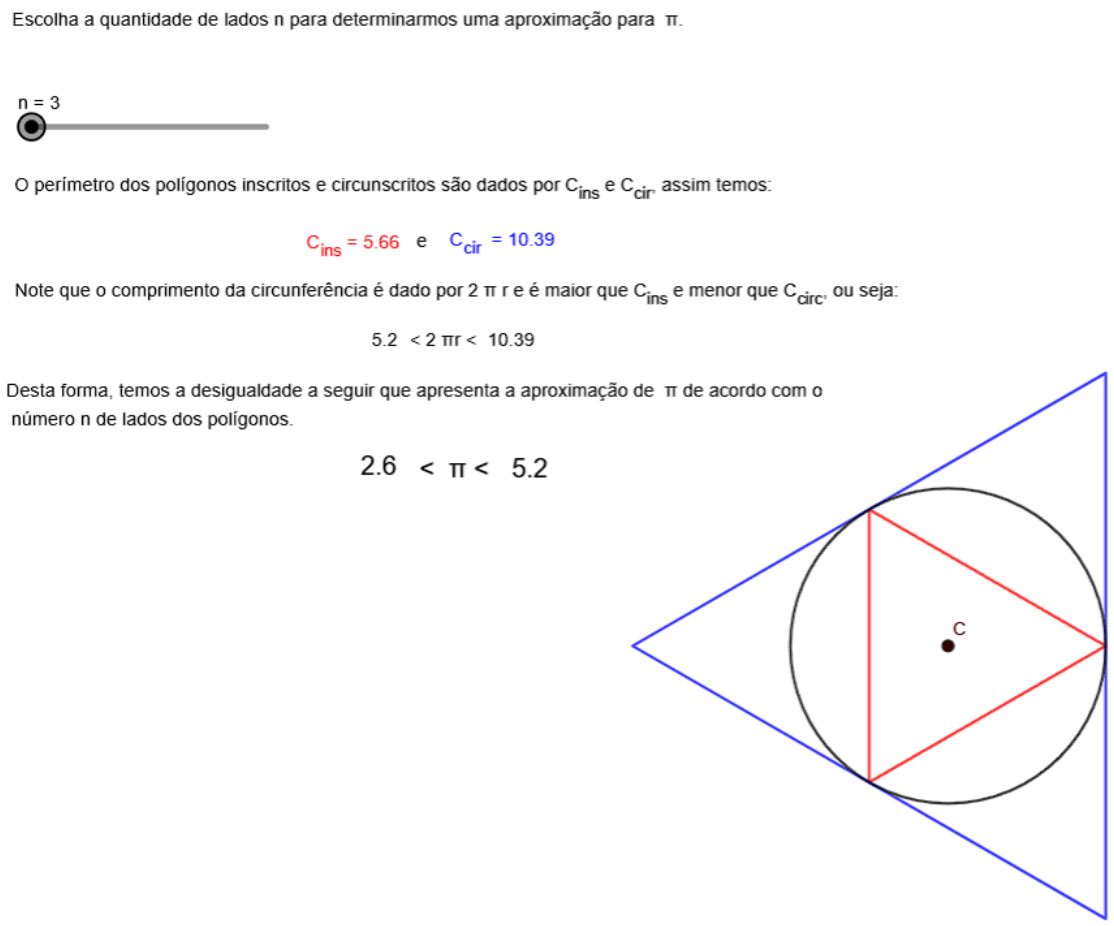
Note que o baricentro do triângulo coincide com o centro da circunferência e que o raio da circunferência é 1, assim temos que $(2/3)h = 1$, logo $h = 3/2$.

Como sabemos, a altura do triângulo equilátero é dada por $h = L\sqrt{3}/2$, substituindo a altura que determinamos anteriormente temos que $3/2 = L\sqrt{3}/2$, assim $L = \sqrt{3}$. Portanto o perímetro do triângulo inscrito C_{ins} é $C = 3\sqrt{3} \approx 5{,}2$.

Triângulo circunscrito à circunferência

Da mesma forma, temos que o baricentro do triângulo e o centro do círculo trigonométrico são coincidentes, porém neste caso o raio da circunferência é de $(1/3)h = 1$, logo $h = 3$.

Figura 6.7 – Aproximação do número π



Fonte: GeoGebra (2024a).

Agora, utilizando a fórmula da altura do triângulo equilátero e tomando $h = 3$, temos $L = 2\sqrt{3}$, assim o perímetro do triângulo circunscrito C_{cir} é $C = 6\sqrt{3} \approx 10{,}4$

Por fim, perceba que o comprimento da circunferência (C_c) é maior que o o perímetro do triângulo inscrito e menor que o perímetro do triângulo circunscrito, isto é, $C_{ins} < C_c < C_{cir}$. Desta forma temos $3\sqrt{3} < 2\pi < 6\sqrt{3}$, ou seja, aproximadamente $2{,}6 < \pi < 5{,}2$.

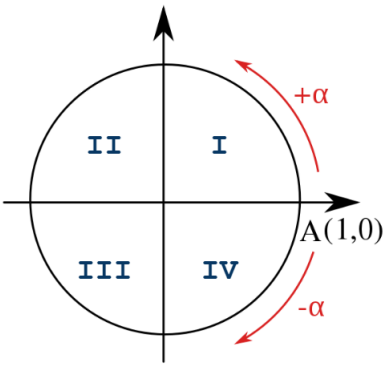
- Agora é sua vez de praticar. Verifique as desigualdades para os polígonos de quatro e seis lados. Lembre-se: são polígonos regulares e, portanto, o hexágono pode ser construído através de seis triângulos equiláteros.

Além de sua importância no cálculo do comprimento da circunferência e da área do círculo, π é fundamental para descrever inúmeros fenômenos periódicos. Na construção do círculo trigonométrico, adota-se um raio unitário, resultando em um comprimento total de 2π.

O círculo trigonométrico é posicionado de forma que seu centro coincide com a origem do plano cartesiano, dividindo-o em quatro quadrantes. Os arcos positivos são medidos a partir do ponto $A(1{,}0)$ no sentido anti-horário. Quando o arco é medido a partir do ponto inicial no

sentido horário, a medida dos arcos é considerada negativa. Esses arcos podem ser expressos em duas unidades de medida: graus e radianos.

Figura 6.8 – Arcos trigonométrico



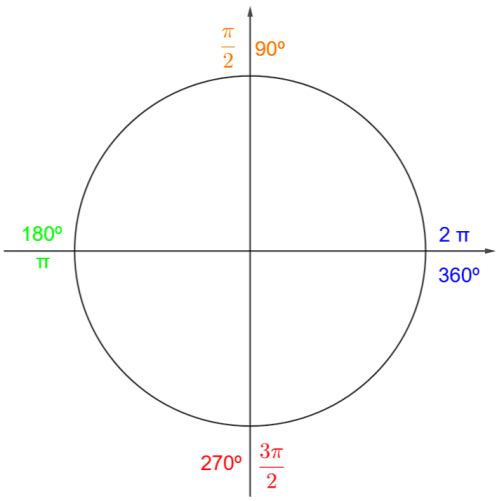
Fonte: O Autor.

O radiano é a unidade de medida do ângulo central de uma circunferência que determina um arco com comprimento igual ao raio dessa circunferência, sendo a unidade adotada no Sistema Internacional (SI).

Como o raio do círculo trigonométrico tem uma unidade, ao completar uma volta o comprimento total será de 2π rad, valor equivalente a $360°$. Portanto, é possível alterar a unidade de medida de arcos entre radianos ou graus utilizando esta proporção.

Observe que os arcos destacados com as mesmas cores no ciclo trigonométrico abaixo são equivalentes. Isso significa que eles possuem o mesmo valor, contudo anotados em unidades de medidas distintas.

Figura 6.9 – Círculo trigonométrico

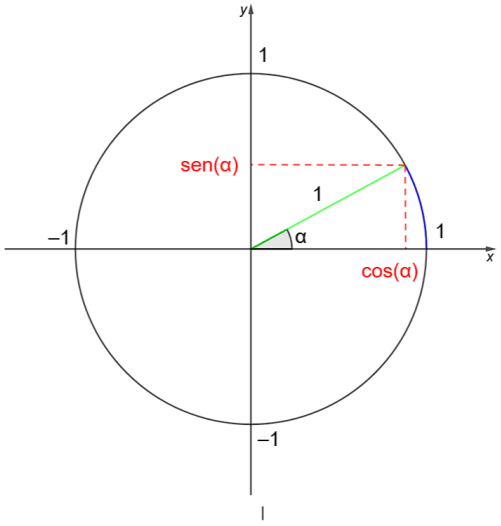


Fonte: O Autor.

Além disso, o ciclo trigonométrico é utilizado para determinar as medidas de seno e cosseno de um arco trigonométrico de medida α rad, de modo que a extremidade do arco seja

anotada no ponto $P(x,y)$. Assim, o seno de α ($\operatorname{sen}\alpha$) é dado pela ordenada do ponto P, enquanto o cosseno de α ($\cos\alpha$) é dado pela abscissa de P, conforme a figura a seguir.

Figura 6.10 – Seno e cosseno



Fonte: O Autor.

Note que na figura tem-se um triângulo retângulo, assim para qualquer medida de α é possível aplicar o Teorema de Pitágoras, logo:

$$\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1.$$

Esta igualdade é conhecida como a relação fundamental da Trigonometria.

Além disso, observe que se o ponto P pertence ao primeiro quadrante, então os valores de sua abscissa e ordenada são positivos. Consequentemente, os valores de $\cos\alpha$ e $\operatorname{sen}\alpha$ também serão positivos.

Se o ponto P pertence ao segundo quadrante, então o valor de sua abscissa será negativo e de sua ordenada positiva. Consequentemente, os valores de $\cos\alpha$ e $\operatorname{sen}\alpha$ serão negativo e positivo, respectivamente.

Se o ponto P pertence ao terceiro quadrante, então os valores de sua abscissa e ordenada são negativos. Consequentemente, os valores de $\cos\alpha$ e $\operatorname{sen}\alpha$ também serão negativos.

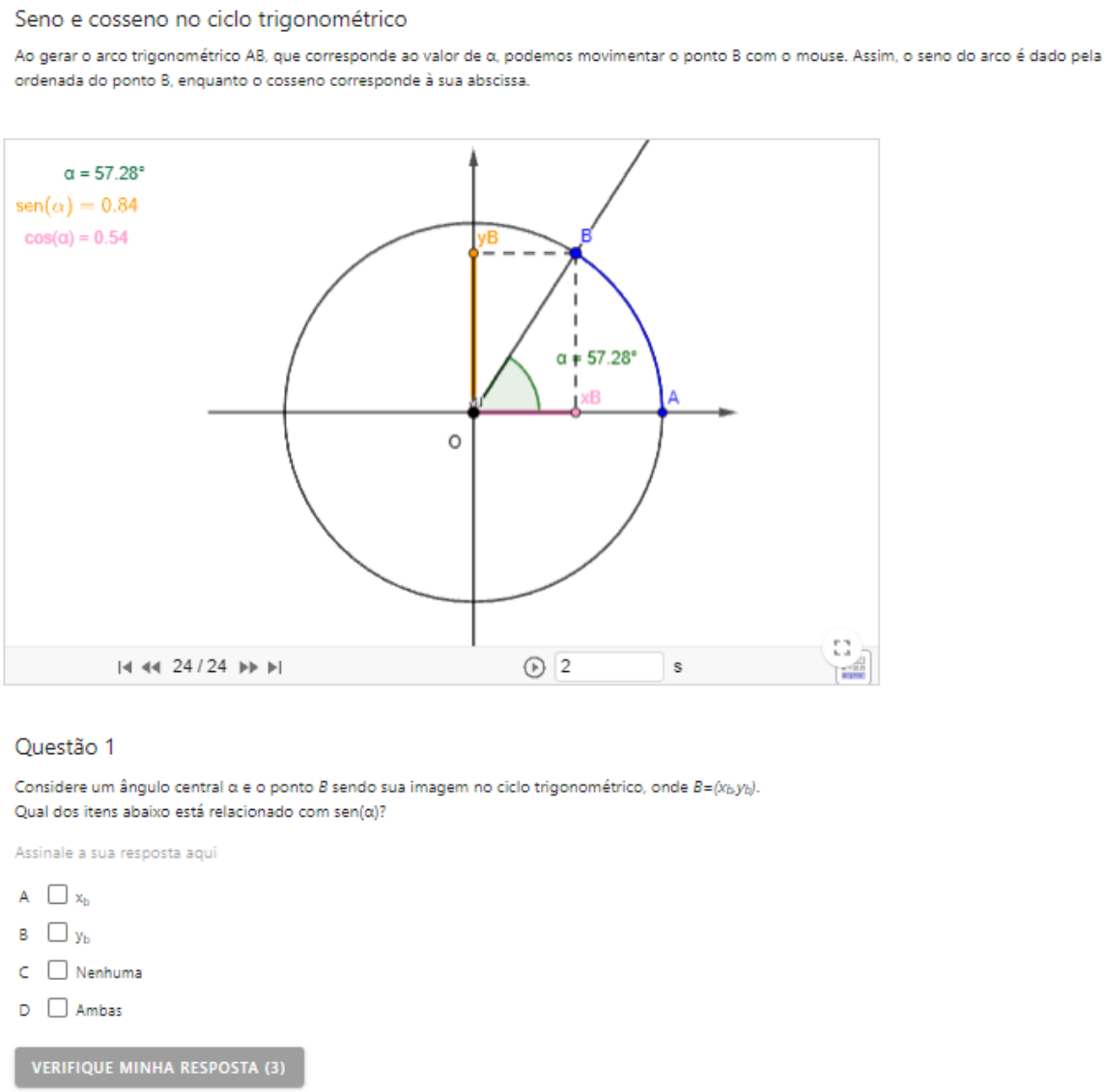
Por fim, se o ponto P pertence ao quarto quadrante, então o valor de sua abscissa será postivo e de sua ordenada negativo. Consequentemente, os valores de $\cos\alpha$ e $\operatorname{sen}\alpha$ serão positivo e negativo, respectivamente.

Para fixar os conceitos vistos, acesse o *link*:

<https://www.geogebra.org/m/a3nbfggw>.

Explore as ferramentas disponíveis e responda as questões propostas.

Figura 6.11 – Atividades: Ciclo trigonométrico



Fonte: GeoGebra (2024b).

Abordagens práticas e dinâmicas podem despertar o interesse dos estudantes, promovendo um desenvolvimento intelectual mais ágil e eficaz. Segundo Matos (2013), estimular a construção do conhecimento de forma prazerosa está diretamente ligado à experiência do educador com atividades lúdicas. Quanto maior essa vivência, maior será seu conhecimento e a probabilidade de tornar-se um profissional competente.

6.4 CONSTRUÇÃO NO GEOGEBRA

Para montar a primeira atividade no GeoGebra, é necessário construir uma circunferência com centro na origem do plano cartesiano e dividi-la em n partes iguais utilizando pontos. Ao conectar esses pontos, obtém-se um polígono inscrito na circunferência.

Por outro lado, para construir o polígono circunscrito, é preciso traçar retas tangentes

nos pontos previamente criados e marcar suas interseções. Ao unir essas interseções, forma-se o polígono circunscrito.

Para realizar essas construções no GeoGebra, siga o passo a passo a seguir:

- Marque um ponto no centro do plano cartesiano e, em seguida, construa uma circunferência utilizando a ferramenta "Círculo: centro e raio". Para isso, clique no ponto assinalado anteriormente e insira o valor do raio desejado.
- Em seguida, insira um valor variável que determinará a quantidade de lados dos polígonos inscritos e circunscritos na circunferência. Para isso, clique em "Controle deslizante", selecione a opção "Inteiro"e defina os valores mínimos e máximos nos campos "min"e "max", correspondendo à quantidade mínima e máxima de lados que os polígonos poderão ter, respectivamente.
- Neste passo, será realizada a divisão da circunferência em n partes iguais. Para isso, utilize o comando de sequência:

  l1=Sequência((cos(t*((360°)/(n))),sen(t*((360°)/(n)))),t,1,n).
- Com a circunferência já dividida em segmentos iguais, trace o polígono inscrito conectando os pontos sequenciais criados no item anterior. Para isso, insira o comando: t1=Polígono(l1).
- Agora, construiremos uma sequência de retas tangentes aos n pontos criados na circunferência utilizando o comando:

  l2=Sequência(Tangente((cos(t*((360°)/(n))),sen(t*((360°)/(n)))),c),t,1,n)
- Neste passo, construiremos a sequência de interseções entre as tangentes. Para isso, insira o comando:

  l3=Sequência(Interseção(Tangente((cos(t*((360°)/(n))),sen(t*((360°)/(n)))),c),Tangente ((cos((t+1)*((360°)/(n))),sen((t+1)*((360°)/(n)))),c)),t,1,n).
- Para traçar o polígono circunscrito à circunferência, basta conectar os pontos da última sequência criada. Para isso, insira o comando:

  pol1=Polígono(l3).
- Agora que os polígonos foram construídos, insira os textos desejados. Para isso, utilize a ferramenta "Texto", digite o conteúdo e posicione-o conforme sua preferência.

Já a segunda atividade apresentada pode ser elaborada selecionando o ícone "Criar"e, em seguida, a opção "Atividade". Assim, será possível adicionar diversos elementos para enriquecer sua atividade, como textos, vídeos, atividades do próprio GeoGebra, imagens, questões, entre outros, organizando-os da maneira que preferir.

Inicialmente, construiremos o ciclo trigonométrico apresentado na seção "A construção do ciclo trigonométrico". Para isso, siga as etapas a seguir:

- Selecione a ferramenta "Ponto"e marque a origem do plano cartesiano, que será o centro da circunferência a ser criada.
- Selecione a ferramenta "Círculo: centro e raio", em seguida clique no ponto construído e digite 1 como medida do raio.
- Novamente, selecione a ferramenta "Ponto"e marque o ponto de coordenada (1,0), que será o ponto de início das medições dos arcos trigonométricos.
- Agora, selecione a ferramenta "Ponto em objeto"e clique sobre a circunferência. O ponto inserido ficará sobre a circunferência e poderá ser movido ao longo dela.
- Selecione a ferramenta "Ângulo"e, em seguida, clique sobre os pontos de coordenada (1,0), (0,0) e o ponto móvel sobre a circunferência, nessa ordem. Note que o ângulo foi construído e já está visível em sua atividade.
- Selecione a ferramenta "Arco circular"e, em seguida, clique no centro da circunferência e nos pontos de extremidade dos arcos construídos. Acesse as configurações deste arco e altere a cor para a desejada.
- Por fim, selecione a ferramenta "Texto", digite 1, clique em "OK"e posicione o texto como desejar em seu ciclo trigonométrico. Repita este passo para anotar as outras medidas de 1 e -1.
- Salve a atividade em sua conta.

A construção do ciclo trigonométrico apresentada na seção "Seno e cosseno no ciclo trigonométrico"pode ser realizada seguindo os passos a seguir:

- Repita os passos realizados na atividade anterior.
- Selecione a ferramenta "Reta"e clique sobre os pontos de coordenadas (0,0) e (1,0).
- Selecione a ferramenta "Reta perpendicular"e clique sobre o ponto móvel na circunferência e sobre a reta construída anteriormente.
- Agora, escolha a ferramenta "Interseção de dois objetos"e selecione as duas retas perpendiculares construídas nos passos anteriores.
- Clique nos círculos ao lado da caixa de entrada que correspondem às retas perpendiculares. Isso fará com que as retas desapareçam da sua atividade, restando apenas o ponto de interseção entre elas.

- Selecione a ferramenta "Segmento"e clique nos pontos de coordenada (0,0) e no ponto de interseção das retas perpendiculares. Acesse as configurações do segmento e altere a cor para a desejada.
- Agora, clique na ferramenta "Texto"e digite "$\cos(\alpha) =$". Em seguida, clique em "Avançado", selecione o ícone do GeoGebra e escolha a letra correspondente ao segmento construído no passo anterior.
- Repita estes passos para construir o segmento que irá representar os valores de seno.
- Salve a atividade em sua conta.

A atividade proposta começa com a inserção de um texto. Para isso, selecione a caixa de texto, digite um título e, em seguida, insira o texto desejado. Após isso, clique no ícone "Incluir elemento", busque pela primeira atividade construída anteriormente, selecione-a e posicione-a de maneira adequada na sua apresentação. Repita esse processo para inserir o texto e a segunda atividade desenvolvida anteriormente.

Por fim, para criar as questões propostas, clique em "Incluir elemento"e selecione "Questão". Você poderá escolher entre uma questão aberta ou de múltipla escolha; selecione a opção desejada e digite a questão.

7 CONCLUSÃO

O presente trabalho explora o desenvolvimento do número π ao longo da história, desde suas primeiras menções no Papiro de Rhind, passando pelas contribuições de Arquimedes, com seus métodos para determinar a aproximação de π, até os avanços tecnológicos modernos, que permitiram o cálculo de trilhões de casas decimais por meio de supercomputadores.

A evolução da Matemática permitiu o desenvolvimento de diversos métodos para obter aproximações cada vez mais precisas de π. Entre os métodos mais relevantes, destacam-se o método de Arquimedes, que utilizava polígonos, o uso de séries matemáticas e, mais recentemente, a aplicação de softwares tecnológicos.

Por outro lado, desenvolver o conhecimento sobre π é um processo de formação que se dá a partir da problematização, que pode ser apresentada por textos ou temas que trabalhem os objetivos de aprendizagem, com foco na busca pelo planejamento e no desenvolvimento do conhecimento para realizar conexões com diferentes áreas, conforme Barbosa (2012).

Dessa forma, a análise das abordagens dos livros didáticos sobre o número π resultou em uma proposta voltada para a educação básica, com foco em atingir os objetivos de aprendizagem por meio da construção do conhecimento. Essa proposta busca promover uma análise conjunta com os estudantes, incentivando a problematização e o desenvolvimento de soluções.

Espera-se que, com essa abordagem mais contextualizada e exploratória, os estudantes compreendam o número π não apenas como uma fórmula a ser memorizada, mas como um conceito que evoluiu ao longo do tempo e continua desempenhando um papel central na matemática moderna. Ao vincular o ensino de π à sua rica história e relevância, há o potencial de tornar a matemática mais acessível e atraente para os alunos da educação básica, fortalecendo tanto seu entendimento quanto seu interesse pela disciplina.

Por fim, é importante destacar que o presente trabalho é promovido pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), que visa à formação continuada de professores da educação básica, prioritariamente da escola pública. Além de promover o desenvolvimento profissional dos educadores, o programa contribui para a melhoria da qualidade do ensino no país, criando um ambiente educacional mais qualificado e aumentando o padrão de aprendizado dos estudantes.

REFERÊNCIAS

AIGNER, M.; ZIEGLER, G. **Paul Erdős: as mais belas demonstrações matemáticas**. 5 ed. São Paulo: Blucher, 2017. ISBN 978-85-212-1005-4. 14

BARBOSA, E. P. **Leituras sobre o processo de implantação de uma licenciatura em ciências naturais e Matemática por área do conhecimento**. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual Paulista, 2012. 48

BECKMANN, P. **A history of pi**. Nova Iorque: St. Martin's Griffin, 1971. 12, 17

BIGODE, A. J. L. **Matemática atual**. São Paulo: Atual Editora, 1994. 13

BLOG. AFC Educação: Os elementos de Euclides. 2024. Disponível em: <https://www.afceducacao.com.br/noticia/430/os-elementos-de-euclides/>. Acesso em: 09 set. 2024. 35

BONJORNO, J. R.; JÚNIOR, J. R. G.; SOUSA, P. R. C. de. **Coleção prisma**. São Paulo: Editora FTD, 2020. v. 1. 26

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Introdução aos parâmetros curriculares nacionais**. Brasília, 2001. Disponível em: <https://www.novaconcursos.com.br/blog/pdf/parametros-curriculares-pref-mairipora-sp.pdf>. Acesso em: 01 dez. 2023. 34

BRASIL. Matriz de referência ENEM. 2024. Disponível em: <https://download.inep.gov.br/download/enem/matriz_referencia.pdf>. Acesso em: 31 jul. 2024. 28

CASTILHO, M. de A.; TÔNUS, L. H. O lúdico e sua importância na educação de jovens e adultos. **Synergismus scyentifica UTFPR**, v. 3, n. 23, 2009. 34

DUTRA, A. et al. O geogebra na construção do significado do número pi. **I Conferência Latino-Americana de GeoGebra**, PUC, 2011. Disponível em: <http://www4.pucsp.br/geogebrala/submissao/pdfs/63alinedutra_apres.pdf>. Acesso em: 03 mai. 2024. 25

EVES, H. **Introdução à história da Matemática**. Campinas: Editora Unicamp, 1997. 13

FIGUEIREDO, D. G. de. **Números irracionais e transcendentes**. Rio de Janeiro: INEP, 2002. v. 3. 10

GASPAR, J. Matemática no antigo egito. 2013. Disponível em: <https://www.mat.uc.pt/~mat0703/PEZ/antigoegito2%20.htm>. Acesso em: 25 ago. 2013. 12

GEOGEBRA. Aproximação do número pi. 2024. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/e5pnwnx5>. Acesso em: 07 nov. 2024. 41

GEOGEBRA. Ciclo trigonométrico. 2024. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/a3nbfggw>. Acesso em: 07 nov. 2024. 44

IMDB. Marge in Chains. 1993. Disponível em: <https://www.imdb.com/title/tt0701171/>. Acesso em: 06 jan. 2025. 16

IMDB. Pi. 1998. Disponível em: <https://www.imdb.com/title/tt0138704/>. Acesso em: 06 jan. 2025. 15

JÚNIOR, J. R. G. **A conquista**. São Paulo: FTD, 2022. 23, 24

LONGEN, A. **Geração apoema**. São Paulo: Editora do Brasil, 2018. 25

MATHNASIUM. Mathematics in the art of Leonardo da Vinci. 2018. Disponível em: <https://www.mathnasium.com/blog/mathematics-in-the-art-of-leonardo-da-vinci>. Acesso em: 27 dez. 2024. 15

MATOS, M. M. O lúdico na formação do educador: contribuições na educação. **Cairu em Revista**, v. 2, p. 133–142, 2013. 44

NIVEN, I. A simple proof that π is irrational. **Bulletin of the American Mathematical Society**, v. 53, n. 6, p. 509, 1947. 14

OBMEP. Apresentando o número pi. **YouTube**, 2019. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=S9KBT3xB5b0>. Acesso em: 03 mai. 2024. 25

OLIVEIRA, C. N. C. de; FUGITA, F. **Geração alpha**. São Paulo: SM, 2018. 24

ONODY, R. N. O número pi com 62,8 trilhões de casas decimais. 2021. Disponível em: <https://www2.ifsc.usp.br/portal-ifsc/o-numero-pi-com-628-trilhoes-de-casas-decimais/>. Acesso em: 12 jul. 2024. 21

ORR, A. Pi in verse. **Literary Digest**, v. 32, p. 84, 1906. 12

PALIS, G. de L. R. Comprimento da circunferência no ensino fundamental. **Revista do Professor de Matemática**, v. 14, p. 29–36, 1989. 10

PARKER, M. Canal Stand-up Maths. **YouTube**, 2009. Disponível em: <https://www.youtube.com/@standupmaths>. Acesso em: 06 jan. 2025. 16

PISYMPH. Canal Pi Symphony. **YouTube**, 2007. Disponível em: <https://www.youtube.com/@pisymph>. Acesso em: 06 jan. 2025. 15

POSAMENTIER, A. S.; LEHMANN, I. **A biography of the world's most mysterious number**. New York: Prometheus Books, 2004. 324 p. 10, 12, 20

PRESTES, E. C. e D. **Coleção quadrante**. São Paulo: Editora SM, 2016. v. 1. 26

PUTNOKI, J. C. **Elementos de geometria e desenho geométrico**. São Paulo: Scipione, 1993. 35

SHARP, H. Preserving papyrus: caring for 4000 year old documents. 2023. Disponível em: <https://www.britishmuseum.org/blog/preserving-papyrus-caring-4000-year-old-documents>. Acesso em: 16 fev. 2024. 12

UNICAMP. Centro de Teoria da Filologia da Unicamp promove exposição sobre arte brasileira rupestre em Atenas. 2024. Disponível em: <https://unicamp.br/unicamp/noticias/2023/11/01/centro-de-teoria-da-filologia-da-unicamp-promove-exposicao-sobre-arte/>. Acesso em: 09 set. 2024. 35

UNICAMP. Roda do sonho. 2024. Disponível em: <https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1173>. Acesso em: 07 nov. 2024. 40

WIKIPEDIA. Proof that π is irrational. 2024. Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/Proof_that_%CF%80_is_irrational>. Acesso em: 12 mar. 2024. 14