ppgmat

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

MICHAEL FELIPE KOGA
EMERSON TORTOLA

Atividades de Modelagem Matemática

um olhar a partir de usos da linguagem por alunos do Ensino Médio

PRODUTO EDUCACIONAL

2024

UTFPR
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

MICHAEL FELIPE KOGA

ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA:

UM OLHAR A PARTIR DE USOS DA LINGUAGEM POR ALUNOS DO ENSINO MÉDIO

PRODUTO EDUCACIONAL

LONDRINA

2024

MICHAEL FELIPE KOGA

ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA:

UM OLHAR A PARTIR DE USOS DA LINGUAGEM POR ALUNOS DO ENSINO MÉDIO

MATHEMATICAL MODELLING ACTIVITIES:

A LOOK FROM THE USES OF LANGUAGE BY HIGH SCHOOL STUDENTS

Produto Educacional apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campi Cornélio Procópio e Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Emerson Tortola

LONDRINA

2024

Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Londrina

MICHAEL FELIPE KOGA

PROBLEMAS DE MODELAGEM MATEMÁTICA NA VISÃO DE ALUNOS DO ENSINO MÉDIO: UMA PERSPECTIVA WITTGENSTEINIANA

Trabalho de pesquisa de mestrado apresentado como requisito para obtenção do título de Mestre Em Ensino De Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Área de concentração: Ensino De Matemática.

Data de aprovação: 28 de Junho de 2024

Dr. Emerson Tortola, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dr. Ademir Pereira Junior, Doutorado - Secretaria de Educação do Estado do Paraná

Dra. Andresa Maria Justulin, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

APRESENTAÇÃO

Prezado(a) professor(a)

Este Produto Educacional é parte integrante da dissertação de Mestrado intitulada "**Problemas de Modelagem Matemática na visão de alunos do Ensino Médio:** uma perspectiva wittgensteiniana" desenvolvida no Mestrado Profissional em Ensino de Matemática (PPGMAT) da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Tem como objetivo apresentar um conjunto de atividades de Modelagem Matemática para professores que ensinam matemática e que têm a intenção de implementar a Modelagem como alternativa pedagógica para as suas aulas.

Por meio dos encaminhamentos apresentados neste Produto Educacional, buscamos oferecer-lhe uma opção para utilizar atividades de Modelagem Matemática que proporcionem momentos coletivos de discussão e reflexão. Ao optar por trabalhar com atividades de Modelagem Matemática, é preciso ter ciência de que as experiências proporcionadas por esse tipo de atividade são diferentes das proporcionadas em aulas habituais de Matemática. Os problemas de Modelagem Matemática transcendem as fronteiras estabelecidas e, geralmente, bem definidas para a atividade matemática em sala de aula. Nesse contexto, os alunos são orientados a buscar na Matemática argumentos que lhes deem condições para interpretar, explicar ou até mesmo fazer previsões a respeito de uma situação-problema.

Outro ponto abordado neste produto é o conceito de "jogo de linguagem" de Wittgenstein, que ressalta a importância da linguagem na fundamentação da nossa atitude de pesquisa. Essa pesquisa envolve compreender como os alunos lidam com problemas e formulam problemas em atividades de Modelagem. O conceito de jogo de linguagem explica que a linguagem não é apenas um conjunto de regras gramaticais, mas está profundamente enraizada em atividades sociais, práticas culturais e formas de vida compartilhadas, todas fundamentadas nos usos das palavras.

Assim, organizamos a estrutura deste produto educacional em duas partes: a primeira contempla uma fundamentação teórica a respeito do que é Modelagem Matemática e o que caracteriza um problema de Modelagem Matemática, baseada em uma discussão sobre os conceitos de linguagem de Wittgenstein, para que possa compreender a mudança que pode ocorrer na abordagem matemática com os alunos; a segunda apresenta algumas atividades de Modelagem

Matemática com algumas sugestões de encaminhamentos, de modo que possa utilizá-las em suas aulas, adaptando-as a seu contexto.

Dessa forma, lhe encorajamos a implementar atividades de Modelagem Matemática em sua sala de aula, ao mesmo tempo em que o convidamos a refletir sobre as possíveis mudanças que podem ocorrer ao utilizar propostas que despertem o senso crítico nos alunos e provoquem transformações nos paradigmas vigentes em relação à matemática.

Para subsidiar este produto educacional, nos valemos de exemplos de encaminhamentos realizados nas minhas aulas de Matemática em turmas do 1º ano do Ensino Médio, no ano de 2022. Durante as aulas foram desenvolvidas três atividades com os alunos, com temáticas propostas por nós: “Diferença entre salários de homens e mulheres”, “Até onde a água vai?”, “Qual a colheita mais rentável?”. Além dessas, foram desenvolvidas mais seis atividades cujos temas e problemas foram escolhidos por eles: “Qual a altura do mastro da bandeira?”, “Carro ou ônibus?”, “Crescimento de uma colônia de bactérias”, “O quanto rende?”, “Consumo de Energia de uma Residência”, “Economia de Água com a Instalação de Torneiras Automáticas”.

O que intentamos é trazer para a comunidade uma possibilidade de disseminar a Modelagem Matemática no contexto da sala de aula a partir de uma proposta de um olhar diferente a respeito dos problemas a serem propostos para os alunos, ou seja, um olhar em que os alunos comecem a compreender e entender que a Matemática pode ser utilizada em sua vida para solucionar problemas que possam aparecer em sua vida, ou até mesmo como uma forma de desenvolver o senso crítico deles.

Além disso, convidamos você, professor(a), que possui interesse pela Modelagem Matemática, a conhecer a dissertação resultante de nossa pesquisa de mestrado, disponível no Repositório Institucional da UTFPR: http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/2119. Esperamos que as atividades apresentadas sejam de grande valia, e sirvam como ponto de partida ou como meio de reflexão sobre o Ensino de Matemática por meio da Modelagem Matemática. Desejamos um bom trabalho!

Michael Felipe Koga

Emerson Tortola

SUMÁRIO

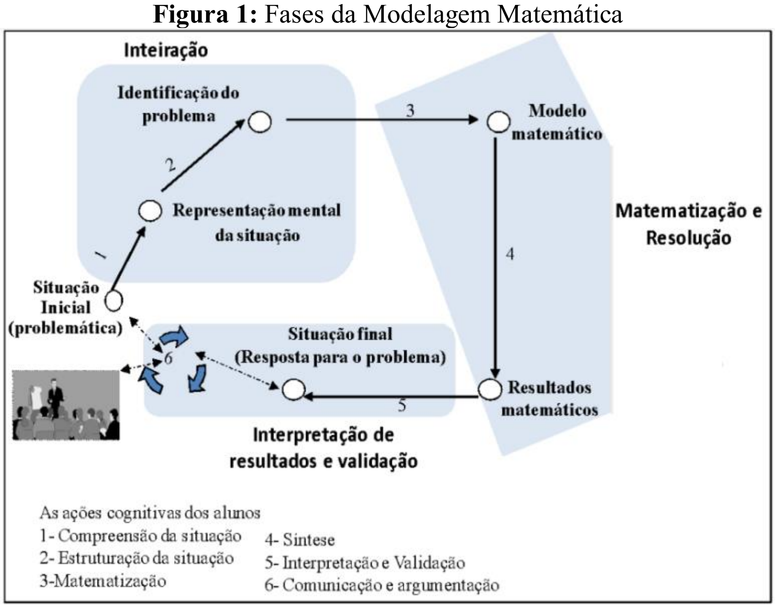
FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Compreendemos a Modelagem Matemática como "uma alternativa pedagógica em que se aborda, por meio da Matemática, um problema não essencialmente matemático" (Almeida; Silva; Vertuan, 2012, p. 9). A Modelagem Matemática pode ser uma ferramenta poderosa não apenas para o aprendizado da Matemática, mas também para outros conteúdos disciplinares, oferecendo um caminho enriquecedor na busca pelo conhecimento. Ao explorar e refletir sobre situações-problemas reais, os alunos têm a oportunidade de ampliar sua compreensão, percebendo o mundo sob uma nova perspectiva (Malheiros, 2014).

Segundo Omodei e Almeida (2019, p. 12), em uma atividade de modelagem, é essencial demonstrar um compromisso com a elaboração de modelos matemáticos que possam oferecer respostas observadas para o fenômeno em estudo.

Conforme descrito por Almeida, Silva e Vertuan (2012, p. 15), uma atividade de Modelagem Matemática abarca diversas fases que englobam os procedimentos necessários para seu desenvolvimento, como a inteiração, a matematização, a resolução, a interpretação dos resultados e a validação. Nesse sentido, nos orientamos pela abordagem de Almeida, Silva e Vertuan (2012), que delineiam as fases da Modelagem Matemática e as ações cognitivas dos alunos de acordo com o ciclo apresentado pela Figura 1.

Figura 1: Fases da Modelagem Matemática



Fonte: Almeida, Silva e Vertuan (2012).

Sugere-se que a inserção de atividades de Modelagem Matemática em sala de aula ocorra de forma gradativa, por exemplo, conforme três momentos de familiarização caracterizados por Almeida e Dias (2004). As autoras argumentam que, à medida que os estudantes concluem as atividades nos "diferentes momentos" sua compreensão sobre o processo de Modelagem, a resolução dos problemas e a reflexão sobre as soluções encontradas vai se consolidando.

As atividades do 1º momento podem ser caracterizadas como atividades de aquecimento, nas quais os alunos dependem mais de orientações do professor. Já as atividades do 2º e 3º momentos correspondem a atividades de acompanhamento, nas quais os alunos ganham maior autonomia na condução das atividades de modelagem.

Segundo Almeida e Dias (2004, p. 7), no 1º momento, são abordadas com todos os alunos situações que envolvem a dedução, análise e utilização de um conceito matemático, partindo de uma situação-problema estabelecida e apresentada pelo professor. Neste momento, a formulação de hipóteses e a investigação do problema, que leva à dedução do modelo, são realizadas coletivamente pelos alunos e pelo professor.

No 2º momento, uma situação-problema já reconhecida, juntamente com um conjunto de informações, pode ser sugerida pelo professor à classe. Os alunos, organizados em grupos, realizam a formulação das hipóteses simplificadoras e a dedução e validação do modelo matemático.

Finalmente, no 3º momento, os alunos, organizados em grupos, são incentivados a conduzir um processo de Modelagem partindo de um problema escolhido por eles, sendo devidamente orientados pelo professor.

Concordamos com Almeida e Silva (2015) que para implementar uma atividade de Modelagem Matemática é necessário que tanto os estudantes quanto os professores estejam familiarizados com o conceito e a prática da Modelagem.

Diversas situações reais podem servir como fontes para a criação de atividades de Modelagem Matemática, sendo intrinsecamente ligadas à realidade. A Modelagem Matemática, conforme Bassanezi (2004), é uma "arte" que transforma problemas da realidade em problemas matemáticos, alinhando-se à ideia de que ela envolve situações com referência à realidade (Barbosa, 2003). Almeida, Sousa e Tortola (2015) também enfatizam que a Modelagem Matemática lida com problemas originados na realidade.

Entretanto, a definição de “realidade” é complexa e sujeita a múltiplas interpretações (Tortola; Robim; Almeida, 2014). Tortola (2016) aponta que a Modelagem Matemática pode associar-se a diferentes realidades determinadas pela natureza das situações-problema, enquanto Cifuentes e Negrelli (2011) e Bean (2001) ressaltam a existência de múltiplas realidades. Berger e Luckmann (2008) exploram diferentes esferas da realidade, sublinhando a importância de uma abordagem crítica ao conceito de “realidade” na Modelagem Matemática.

Blum (2002) delimita o que entende por realidade usando o termo “mundo real”, que abrange natureza, sociedade, cultura, atividades diárias, conteúdos escolares e acadêmicos. Burak (1992) define modelagem a partir do estudo do cotidiano, explicando matematicamente fenômenos presentes na vida diária. “Cotidiano” refere-se a problemas integrados à rotina diária das pessoas, enquanto “não cotidiano” envolve fenômenos que, embora possam ser compreendidos e despertar interesse, não fazem parte de nossas atividades diárias, como o lançamento de foguetes.

A experimentação é fundamental no ensino, destacando-se por conectar teoria e prática e permitindo a visualização de fenômenos reais (Malheiro, 2009). Laburú (2006) enfatiza que atividades experimentais transformam conceitos abstratos em experiências concretas, construídas em contextos desafiadores. No contexto da Modelagem Matemática, Araki (2020) aponta que a experimentação possibilita a criação de modelos científicos para obter aproximações de teorias. Assim, a Modelagem Matemática se apresenta como uma abordagem inovadora que utiliza a experimentação para desenvolver modelos a partir do interesse dos envolvidos.

A compreensão da realidade pode ser vista como a realidade vivida, que ocorre no tempo e espaço do mundo-vida, onde pensamentos, ações e percepções de indivíduos acontecem (Bicudo, 1999). Bicudo e Rosa (2010) ampliam essa visão ao considerar as Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC), introduzindo conceitos como ciberespaço, realidade aumentada e virtual. Eles argumentam que o mundo cibernético, embora distinto da realidade física e objetiva da ciência moderna, constitui uma faceta da realidade. Essa reflexão sugere que o mundo cibernético não se encaixa nos parâmetros tradicionais da física clássica devido à sua natureza espacial única. Assim, a consideração dessas novas realidades desafia nossas concepções convencionais de espaço e tempo, destacando a necessidade de abordagens flexíveis e críticas para entender as diferentes manifestações da realidade.

Dalla Vecchia (2012) observa que ao integrar o mundo cibernético na investigação, é possível repensar a Modelagem Matemática, especialmente no contexto da aprendizagem, revelando a adaptação dinâmica e relevância dessa abordagem para os estudantes na era digital.

Durante a realização de atividades de Modelagem Matemática, os alunos se empenham em desenvolver modelos para abordar a questão inicial e, ao longo desse processo, as interpretações, descrições, hipóteses, explicações e justificativas são continuamente refinadas e reestruturadas pelos próprios alunos. Esse constante aprimoramento e reformulação desses elementos revelam-se fundamentais para o aprendizado matemático (Lesh; Doerr, 2003).

Na Modelagem Matemática, a compreensão de problemas do mundo real depende tanto do contexto em que esses problemas são apresentados quanto da forma como os alunos interpretam os dados e as informações fornecidas. Essa interpretação não ocorre de maneira isolada, mas está profundamente relacionada ao uso da linguagem e aos conhecimentos prévios dos estudantes, que moldam a maneira como eles se aproximam dos problemas.

Ao trabalhar com situações do cotidiano ou contextos sociais mais amplos, os alunos são convidados a aplicar conceitos matemáticos de forma crítica e criativa. Esse processo envolve tanto a compreensão das regras matemáticas quanto a habilidade de interpretar o problema em diferentes perspectivas, promovendo um pensamento mais flexível e crítico.

Esse entendimento gradual, no qual os estudantes são levados a ver um problema matemático sob diferentes prismas, reflete o quanto a linguagem e o contexto influenciam suas estratégias de resolução e sua visão da Matemática como uma ferramenta aplicável ao mundo real. Assim, a Modelagem Matemática não é apenas uma maneira de resolver problemas, mas também uma forma de os alunos enxergarem novas possibilidades de aplicação da Matemática em suas vidas.

A filosofia de Wittgenstein, que explora a natureza da significação das palavras, especialmente no contexto da Matemática com suas regras específicas, ao inserir os alunos nesse *jogo de linguagem*, principalmente em sua fase tardia, proporciona uma base conceitual sólida para compreender como os alunos abordam problemas e formulam questões em atividades de Modelagem, utilizando as proposições gramaticais.

Ao fundamentar-se na ideia de jogo de linguagem de Wittgenstein, a linguagem nos ajuda a entender como os alunos lidam com e formulam problemas em atividades de Modelagem. O conceito de *jogo de linguagem* sugere que a linguagem não é apenas um conjunto de regras gramaticais, mas está profundamente enraizada em atividades sociais, práticas culturais e formas de vida compartilhadas, fundamentadas nos usos das palavras. Os jogos de linguagem oferecem um quadro conceitual no qual as regras, práticas e interações sociais dão sentido e significado às palavras e expressões linguísticas. Nesse contexto, é possível compreender, por exemplo, porque um feirante ao determinar o preço de um abacaxi por 6 reais, vende dois por 10 reais. Nesse caso, 2 x 6 = 10? Não! Uma vez que a Matemática possui proposições gramaticais, ou seja, que não são invalidadas pelo empírico, mas nos guiam em como lidar com o empírico. Ou seja, a proposição 2 x 6 = 12 é uma regra, uma definição, é uma proposição normativa, que indica ao feirante que se ele determina o preço de um abacaxi por 6 reais, dois custarão 12 reais. Porém, influenciado pelo contexto, ele pode concluir que ao dar um desconto de 2 reais e cobrar 10 reais por 2, ele pode vender mais abacaxis e conseguir mais lucros com suas vendas (Tortola, 2016).

Desse modo, ao trabalhar com a Modelagem, é crucial que os alunos se familiarizem com essa abordagem, pois ela introduz um novo campo de problemas matemáticos, envolvendo dados baseados em situações reais. Para que os estudantes reconheçam tais problemas como problemas de Matemática, ou seja, passíveis de serem resolvidos matematicamente, é necessária uma mudança de perspectiva, conforme proposta por Wittgenstein. A ideia de mudança de aspecto enfatiza a fluidez e a relacionalidade dos conceitos, argumentando que essa mudança é essencial para uma compreensão mais profunda da linguagem, do pensamento e da realidade. Isso significa que nossa compreensão e interpretação do mundo estão sujeitas a revisões e reavaliações constantes, à medida que mudamos nossas perspectivas e enquadramentos conceituais.

ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA

Nesta seção, exploramos uma variedade de atividades de Modelagem Matemática, já desenvolvidas em sala de aula, como mencionamos na apresentação deste produto educacional, oferecendo exemplos detalhados de como ela pode ser implementada com os alunos. Ao destacar casos específicos e as suas respectivas abordagens, buscamos proporcionar entendimentos sobre a implementação da Modelagem Matemática em diversos contextos educacionais e profissionais.

Ao longo desta seção, são apresentados exemplos de problemas reais que foram abordados através da Modelagem Matemática. Acreditamos que tais atividades podem ser adaptadas a diferentes contextos, podendo ser implementadas em turmas de Ensino Médio e anos finais do Ensino Fundamental. Cada exemplo é acompanhado de uma descrição do problema e possíveis soluções que os alunos podem chegar.

Ao explorar essas atividades, esperamos mostrar não apenas a aplicabilidade da Modelagem Matemática em diferentes áreas do conhecimento, mas também a sua capacidade de desenvolver habilidades críticas de resolução de problemas e promover um aprendizado significativo e contextualizado.

Para o desenvolvimento das atividades, é importante que os alunos sejam organizados em grupos, conforme sugerem Almeida, Silva e Vertuan (2012). Quatro integrantes cada grupo é uma boa quantidade de alunos, conforme indicam nossas experiências. Além disso, sugerimos que a aluna seja organizada em quatro momentos:

1) momento em que o(a) professor(a) regente explica o contexto da atividade;
2) momento em que os alunos são organizados em grupos e desenvolvem a atividade;
3) momento da plenária, com a comunicação do desenvolvimento e das soluções;
4) momento de sistematização da matemática envolvida na atividade.

ATIVIDADE 01

Título: Até quando a diferença de gênero vai influenciar nos salários?

Realidade: Cotidiana.

Duração: 3 aulas.

Habilidade: (EM13MAT316) Resolver e elaborar problemas, em diferentes contextos, que envolvem cálculo e interpretação das medidas de tendência central (média, moda, mediana) e das medidas de dispersão (amplitude, variância e desvio padrão).

Problema: Com base nas informações e no levantamento apresentados, pode-se dizer que há uma perspectiva de equiparação salarial entre homens e mulheres nos próximos anos? Se sim, quando isso pode acontecer?

Descrição:

Fonte: IDados, a partir de dados da PNAD

Segundo a pesquisadora Thais Barcellos, da consultoria IDados e autora do levantamento, a desigualdade salarial é um problema estrutural do mercado de trabalho brasileiro e reflete não só o machismo da sociedade, mas também a ausência de mais políticas que favoreçam o ingresso de mulheres em ocupações e formações de maior remuneração.

Com base nas informações e no levantamento apresentados, pode-se dizer que há uma perspectiva de equiparação salarial entre homens e mulheres nos próximos anos? Se sim, quando isso pode acontecer?

Recomendamos que o momento 1 e o começo do momento 2 sejam feitos na primeira aula, porém, se a turma não tiver familiaridade com a Modelagem, será necessária uma aula a mais para eles trabalharem. Após o término da resolução dos problemas nos grupos, em uma terceira aula, pode ser realizada a plenária para a discussão das ideias e dos resultados (momentos 3 e 4).

Possível modelo:

Os alunos podem chegar em diferentes resoluções, a depender da interpretação que cada grupo possa ter, mas um dos possíveis modelos obtidos seria:

$$DS_{2021} = \frac{(DS_{2021} - DS_{2020}) + (DS_{2020} - DS_{2019}) + ...}{Q} \times (A - 2021)$$

Em que a diferença salarial (DS_A) foi calculado em com o seguinte modelo:

$$DS_A = \frac{SH_A - SM_A}{SH_A} \times 100$$

Sendo
A = Ano que possivelmente será zerada a diferença salarial.
DS_A = Diferença entre salários em A (ano) (%).
SH_A = Salário do homem em A (ano).
SM_A = Salário da mulher em A (ano)
Q = Quantidade de diferenças somadas.

A validação da atividade que estuda a equiparação salarial entre homens e mulheres ocorre por meio do próprio modelo matemático, utilizando séries históricas de salários para homens e mulheres. Ao aplicar técnicas de regressão linear e projeções com base nos dados disponíveis, os alunos podem calcular uma previsão de quando os salários se tornarão equivalentes. No entanto, além de ser uma atividade que desenvolve competências matemáticas, também leva a reflexões importantes sobre desigualdade de gênero e justiça social. Ao analisar dados reais, os estudantes são convidados a pensar criticamente sobre as disparidades salariais e o impacto que essas diferenças têm na sociedade, estimulando uma discussão que vai além dos números e promove a conscientização sobre questões de equidade.

ATIVIDADE 02

Título: Até onde a água pode chegar?

Realidade: Experimentação.

Duração: 3 aulas.

Habilidade: (EM13MAT101) Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

Problema: É possível determinar a pressão da água do chuveiro a partir do alcance da água observado no experimento em determinado ponto?

Descrição:

Até onde a água pode chegar?

Um chuveiro elétrico tem algumas condições para o seu bom funcionamento, uma delas diz respeito à altura do chuveiro em relação à caixa d'água.

Se a distância entre o chuveiro e a caixa d'água for muito pequena, a vazão da água também será, a ponto de nem mesmo ligar o chuveiro. Por outro lado, se a distância entre eles for muito grande – no caso de prédios, por exemplo –, a vazão da água poderá ser tão forte, que o chuveiro não conseguirá esquentar a água.

Para a instalação de um chuveiro elétrico recomenda-se que se observe a sua pressão de funcionamento. A imagem a seguir apresenta um recorte de um manual de instruções de instalação de um determinado fabricante de chuveiro, que apresenta as pressões de funcionamento máxima e mínima para dois modelos de chuveiro.

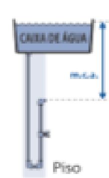
2 - CARACTERÍSTICAS TÉCNICAS

Especificação		Grau de proteção: IP 24	
Modelo		Duchas Advanced e Advanced Eletrônica	Duchas Advanced Turbo e Advanced Turbo Eletrônica
Pressão de Funcionamento	Mínima	10 kPa (1 m.c.a.)	7 kPa (0,7 m.c.a.)
	Máxima	400 kPa (40 m.c.a.)	40 kPa (4 m.c.a.)

Fonte: Manual de Instruções de Instalação e Garantia - Lorenzetti

Mas o que é m.c.a.?

m.c.a., ou metros de coluna d'água, é uma unidade de medida utilizada para mensurar a pressão. É frequentemente usada em hidráulica e comumente aplicada a chuveiros e torneiras. Exemplificando: 1 m.c.a. equivale à pressão que uma quantidade de água (coluna) exerce a 1 metro de altura.



Para melhor entendermos essa pressão de funcionamento, vamos utilizar uma garrafa PET e realizar um experimento. Siga atentamente as instruções do professor.

Problema:

É possível determinar a pressão da água do chuveiro a partir do alcance da água observado no experimento em determinado ponto?

Nesta atividade, recomendamos realizar o momento 1 realizando algumas medições para perfurar a garrafa pet. Comece a marcar a altura dessa garrafa por onde deve ficar o ponto mais alto, que representa a altura máxima da caixa d'água. Na segunda aula será realizado o experimento e as medições com a garrafa (momento 2). Após o término da atividade, em uma terceira aula, realiza-se a plenária para a discussão das ideias e dos resultados (momentos 3 e 4).

Possível modelo:

Os alunos podem começar a utilizar razões e proporções, e buscarem o conhecimento da fórmula da pressão de fluidos para comparar as pressões do chuveiro com a garrafa, utilizando a relação: "P = d.g.h", onde P é a pressão, d é a densidade, g é a aceleração da gravidade e h é a altura. Assim, podendo verificar quantas vezes a pressão de água da garrafa é maior que a do chuveiro e podendo determinar o quão mais longe vai a água do chuveiro através do experimento.

$$\frac{P_c}{P_g} = \frac{d.g.h_c}{d.g.h_g} = \frac{h_c}{h_g}$$

Sendo

P_c = Pressão da água do chuveiro
P_g = Pressão da água da garrafa
h_c = Altura máxima do chuveiro
h_g = Altura máxima do furo da garrafa
d = Densidade do líquido (997 kg/m³)
g = Gravidade (9,8 m/s²)

Uma forma de validar a atividade de compreensão da pressão da água é por meio da experimentação prática, permitindo que os alunos observem diretamente os efeitos da pressão em diferentes alturas de uma garrafa. Durante o experimento, os alunos podem fazer furos em diferentes níveis de uma garrafa de água e comparar a vazão da água em cada altura. Isso possibilitará que eles compreendam a relação entre a altura e a pressão da água.

ATIVIDADE 03

Título: Qual é a colheita mais rentável?

Realidade: Mundo Cibernético.

Duração: 3 aulas.

Habilidade: (EM13MAT501) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.

Problema: Qual é a plantação que nos dará mais lucro no início do jogo?

Descrição:

Qual é a colheita mais rentável?

Você conhece o *Hay Day*? Trata-se de um jogo para dispositivos móveis com a temática de fazenda, no qual o jogador tem como objetivo expandir a sua fazenda e deixá-la cada vez mais produtiva. Uma das dinâmicas do jogo é a economia, pois os jogadores precisam de moedas para expandir os seus negócios e a forma mais prática de conseguir moedas é vendendo itens para outros jogadores através da loja que o jogo disponibiliza.

Cada alimento produzido no jogo tem o seu tempo de cultivo e o seu preço no mercado da loja indicado na tabela abaixo.

Alimento	Tempo de cultivo (min)	Preço de mercado (moeda do jogo)
Trigo	2	1
Milho	5	2
Cenoura	10	2
Soja	20	3
Cana de açúcar	30	4

Nesta atividade, recomendamos realizar o momento 1 e apresentar o jogo para os alunos, caso eles não o conheçam. No segundo momento pode ser levantada a problemática para os alunos para que eles discutam. Após o término da atividade, em uma terceira aula, pode ser realizada a plenária para a discussão das ideias e dos resultados (momentos 3 e 4).

O jogo Hay Day está disponível para download gratuitamente e pode ser baixado através do link: https://play.google.com/store/apps/details?id=com.supercell.hayday&hl=pt_BR.

Possível resolução:

Uma das possíveis resoluções apresentadas pode ser a função de quanto rende cada alimento por minuto, para que assim possam comparar o ganho das moedas ao passar do tempo. Dessa forma, teríamos as funções:

$$d(t) = \frac{1}{2}t$$

$$d(m) = \frac{2}{5}m$$

$$d(c) = \frac{1}{5}c$$

$$d(s) = \frac{3}{20}s$$

$$d(a) = \frac{2}{15}a$$

Onde:

d = Moeda do jogo
t = Quantidade plantada de trigo
m = Quantidade plantada de milho
c = Quantidade plantada de cenoura
s = Quantidade plantada de soja
a = Quantidade plantada de cana de açúcar

Uma maneira de tornar a atividade "Qual a colheita mais rentável?" mais interessante e proporcionar uma validação prática seria incentivar os alunos a simular o cultivo de diferentes produtos em períodos consecutivos, comparando os resultados em termos de tempo de crescimento e rendimento. Os estudantes podem, por exemplo, calcular a rentabilidade de duas ou mais colheitas, levando em consideração o tempo de cultivo e o valor de mercado de cada produto. Dessa forma, ao observar qual colheita oferece maior retorno em um período fixo, os alunos podem validar os modelos matemáticos de maneira prática.

ATIVIDADE 04

Título: Qual a altura do mastro da bandeira?

Realidade: Experimentação.

Duração: 3 aulas.

Habilidade: (EF05MA12) Resolver problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta entre duas grandezas, para associar a quantidade de um produto ao valor a pagar, alterar as quantidades de ingredientes de receitas, ampliar ou reduzir escala em mapas, entre outros.

Problema: Qual a altura do mastro da bandeira?

Descrição:

Figura 3: Mastro da bandeira do Brasil

Fonte: do autor

Nesta atividade, recomendamos realizar o momento 1 e parte do momento 2 na primeira aula, porém é necessário sair da sala de aula. Na segunda aula, os alunos podem ser levados até o mastro (ou algum outro objeto ou construção considerado alto pelos alunos para ser medido diretamente) para aferir a medida a partir da sombra projetada pelo mastro no chão em um determinado momento do dia, usando uma régua ou fita métrica e a medida de sua sombra e sua própria altura, para a realização dos cálculos (momento 2). Após o término da atividade, em uma terceira aula, realiza-se a plenária para a discussão das ideias e dos resultados (momentos 3 e 4).

Possível modelo:

A altura do mastro pode ser determinada pela proporção entre a altura do objeto conhecido e a sua sombra, comparada com a altura do mastro e sua sombra (Teorema de Tales). A relação entre as alturas e as sombras pode ser expressa pela proporção:

$$\frac{h}{s} = \frac{h_p}{s_p} \rightarrow h = \frac{s.h_p}{s_p}$$

Onde:

h = Altura do mastro
h_p = Altura da pessoa
s = Sombra do mastro
s_p = Sombra da pessoa

Uma forma de validar a atividade de medir a altura do mastro utilizando proporção e sombras, seria pedir aos alunos que realizem a medição em dois momentos diferentes do dia, quando as sombras têm comprimentos distintos. Assim, os estudantes poderiam calcular a altura do mastro em diferentes condições de iluminação, aplicando os conceitos de proporção e verificando a consistência dos resultados. Isso não apenas enriquece a atividade ao inserir variação e desafio, como também oferece uma validação prática dos modelos matemáticos, reforçando a compreensão da relação entre proporção e sombras.

ATIVIDADE 05

Título: Ônibus ou carro?

Realidade: Cotidiano.

Duração: 3 aulas.

Habilidade: (EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

Problema: Qual é mais barato: ir para escola do ônibus ou de carro?

Descrição: Esta atividade foi proposta e desenvolvida pelos alunos durante as aulas de Matemática. Nela, os alunos foram desafiados a usar a Modelagem Matemática para decidir qual meio de transporte é mais econômico para ir à escola: o ônibus público ou o carro particular. A decisão envolveu o cálculo e a comparação dos custos associados a cada opção ao longo de um período específico, como um mês.

A primeira aula iniciou-se com a introdução do problema e a coleta de dados. Os alunos foram organizados em grupos, momento em que foi proposto o problema: determinar qual meio de transporte é mais econômico para ir à escola. Em seguida, os grupos listaram os dados necessários para resolver o problema, como custos de combustível, tarifas de ônibus, manutenção do carro, entre outros. Os alunos utilizaram celulares, computadores para coletar essas informações, focando em dados como a distância entre a casa deles e a escola, consumo de combustível do carro, preço do combustível, tarifa do ônibus, custo de manutenção do carro e outras despesas relevantes (momentos 1 e 2).

Na segunda aula, os alunos desenvolveram modelos matemáticos para calcular os custos mensais de cada opção de transporte. Foram sugeridas fórmulas específicas para os cálculos, por exemplo: para o carro, considerou-se o custo de combustível, manutenção mensal e outros custos, enquanto para o ônibus, considerou-se a tarifa multiplicada pelo número de dias úteis. Os grupos, então, iniciaram os cálculos comparativos, aplicando os modelos aos dados coletados, com a orientação do professor para resolver problemas e garantir a precisão dos cálculos (momento 2).

Na terceira aula, os alunos discutiram e interpretaram os resultados obtidos. Foi incentivada a reflexão sobre fatores não econômicos que podem influenciar a escolha do meio de transporte, como tempo de viagem, conveniência e impacto ambiental. Cada grupo apresentou seus resultados e conclusões para a turma, promovendo uma discussão geral sobre as diferentes conclusões e a eficácia da Modelagem Matemática na resolução do problema (momentos 3 e 4).

Possível modelo:

Para modelar o problema de decidir qual meio de transporte é mais econômico para ir à escola, foi criado um modelo matemático que considerou todos os custos associados ao automóvel, como: C_c= Custo mensal do automóvel, D = Distância entre casa e escola, C_f= Consumo do automóvel (km/l), P_f = Preço do combustível; e os custos associados ao ônibus, como: C_o = Custo mensal do ônibus, T = Tarifa do ônibus, N = Número de dias úteis no mês. Dessa forma, o seguinte modelo pôde ser construído:

$$C_C = 2.\frac{D}{C_f}.P_f.N$$

$$C_o = 2.T.N$$

Onde:

C_c= Custo mensal do automóvel
C_o = Custo mensal do ônibus
D = Distância entre casa e escola
C_f= Consumo do automóvel (km/l)
P_f = Preço do combustível
T = Tarifa do ônibus
N = Número de dias úteis no mês

Uma forma de tornar essa atividade mais envolvente para os alunos e, ao mesmo tempo, validar os cálculos realizados, é incentivar os estudantes a simular a aplicação dos gastos em dois cenários diferentes, comparando os resultados de forma prática. Assim, eles podem, por exemplo, calcular o custo de ir ao colégio de ônibus em um mês e, em outro mês, fazer o cálculo para o uso do carro, considerando variações como a distância percorrida, o preço do combustível e o valor da tarifa do transporte público. Essa validação dos modelos aplicados ajuda os alunos a enxergar a relevância da Matemática em suas decisões cotidianas.

ATIVIDADE 06

Título: O quanto rende?

Realidade: Cotidiano.

Duração: 3 aulas.

Habilidade: (EM13MAT303) Interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso.

Problema: Que tipo de investimento é mais rentável?

Descrição: Nesta atividade, os alunos exploraram diferentes opções de investimento e calculam o retorno sobre o investimento (ROI) ao longo do tempo. Eles aplicaram conceitos matemáticos como juros simples e compostos para comparar o crescimento do dinheiro investido em diferentes tipos de investimentos.

A primeira aula pode ser iniciada com uma introdução teórica abrangente sobre investimentos, onde discutiremos os diferentes tipos disponíveis, como poupança, CDB (Certificado de Depósito Bancário), fundos de investimento e ações. Também podem ser introduzidos os conceitos de juros simples e compostos, explicando como eles impactam o crescimento do dinheiro ao longo do tempo. Nesta aula, os alunos serão incentivados a escolher pelo menos dois tipos de investimento para análise detalhada nas aulas seguintes (momento 1).

Na segunda aula, os alunos podem tratar os dados iniciais coletados sobre os investimentos escolhidos. Eles precisam realizar cálculos de retorno sobre o investimento (ROI) após um período inicial, utilizando fórmulas de juros simples e compostos. Os alunos são desafiados a interpretar os resultados e discutir as observações feitas durante o processo de cálculo. É um momento para revisar os modelos matemáticos utilizados e discutir sua aplicabilidade na previsão do crescimento financeiro ao longo do tempo (momento 2).

Para a terceira aula, os alunos podem preparar os relatórios finais, podendo incluir gráficos comparativos e uma análise crítica dos resultados obtidos. Eles podem apresentar seus relatórios à turma, destacando as descobertas mais importantes e as lições aprendidas ao longo da atividade de Modelagem Matemática de investimentos. Essa aula pode focar na discussão dos pontos levantados nos relatórios, incentivando um debate sobre as estratégias de investimento mais eficazes com base nos resultados apresentados. Além disso, os alunos podem refletir sobre a importância da Modelagem Matemática na tomada de decisões financeiras informadas e considerarem como os conceitos aprendidos podem ser aplicados em situações práticas de investimento pessoal ou empresarial (momentos 3 e 4).

Possível modelo:

Para criar um modelo para esta aula será utilizada a fórmula, já conhecida por muitos, de juros compostos, e em seguida realizar a comparação entre o valor final obtido em cada investimento.

$$M = C.(1 + i)^t$$

Onde:

M = montante
C = Capital inicial
i = Taxa
t = Tempo

Uma ideia para a validação dos resultados obtidos nesta atividade e para deixá-la mais interessante aos alunos é simular com eles investimentos em pelo menos duas opções, mediante a condição de cada contexto, para ter uma validação dos modelos utilizados.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

É extremamente gratificante e satisfatório poder disponibilizar este material a você, professor(a). Uma das razões para essa gratidão é a oportunidade de disseminar conhecimentos nos quais confiamos e acreditamos que podem fazer a diferença na nossa vida como profissionais da educação e na vida dos nossos estudantes.

Além disso, nossa pesquisa permitiu articular a Modelagem Matemática com atenção aos usos da linguagem, na perspectiva filosófica de Wittgenstein, ajudando-nos a compreender como os estudantes mudam a forma de ver a Matemática através de atividades de Modelagem. Dessa forma, os convidamos novamente a conhecer nossa pesquisa publicada no Repositório Institucional da UTFPR, através do link: http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/2119. Lá você encontrará esta e outras dissertações de mestrado e produtos educacionais que apresentam resultados de pesquisas associadas ao ensino de Matemática.

Como mencionamos na apresentação deste Produto Educacional, esperamos que, ao implementar as atividades apresentadas neste trabalho com os seus alunos, você possa oferecer aulas de Matemática mais interessantes e envolventes. Assim, convidamos você, colega professor, a compartilhar conosco os seus resultados. Lembre-se que você está livre para adaptar as atividades a seu contexto, conforme discussões empreendidas pelos alunos, uma vez que atividades de Modelagem não possuem os procedimentos definidos de antemão, mas variam de acordo com cada atividade e participantes. O que apresentamos aqui são orientações e sugestões, mas vale destacar que, durante as aulas com Modelagem Matemática, todos podem participar ativamente, fazendo sugestões que contribuam para o desenvolvimento da atividade e para o aprendizado.

Finalizamos agradecendo a cada um de vocês que, assim como nós, acredita na possibilidade de melhoria do ensino, em particular, da Matemática.

Michael Felipe Koga
Emerson Tortola

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, L. M. W; DIAS, M. R. Um estudo sobre o uso da Modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem. **Bolema**, Rio Claro – SP, v. 17, n. 22, 2004.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A. P. Práticas de professores com Modelagem Matemática: algumas configurações. **Educação Matemática em Revista**, v. 1, p. 6-15, 2015.

ALMEIDA, L. W.; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na Educação Básica.** São Paulo: Contexto, 2012.

ALMEIDA, L. M. W.; SOUSA, B. N. P.; TORTOLA, E. The Formulation of Hypotheses in Mathematical Modelling Activities. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 23, n. 5, p. 66-93, set./out. 2021.

ARAKI, Paulo Henrique Hideki. **Atividades experimentais investigativas em contexto de aulas com Modelagem Matemática**: Uma análise semiótica. 2020. 177p. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Londrina, 2020.

BARBOSA, J. C. Uma perspectiva de Modelagem Matemática. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 3., 2003, Piracicaba. **Anais**… Piracicaba: UNIMEP. 2003.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática**: uma nova estratégia. 2. ed. São Paulo: Contexto, 2004.

BEAN, D. O que é modelagem matemática? **Educação Matemática em Revista**, São Paulo, v. 8, n. 9-10, p. 49-57, 2001.

BERGER, P. L.; LUCKMANN, T. **A construção social da realidade**: tratado de sociologia do conhecimento. 28. ed. Petrópolis: Vozes, 2008.

BICUDO, M. A. V. (Org.). **Pesquisa em Educação Matemática**: Concepções & Perspectivas. São Paulo: Editora Unesp, 1999.

BICUDO, M. A. V.; ROSA, M. Educação matemática na realidade do ciberespaço — que aspectos ontológicos e científicos se apresentam? **Relime**, Cidade do México, v.13. n.1. 2010.

BLUM, W. ICMI Study 14: Applications and modelling in mathematics education – Discussion document. **Educational Studies in Mathematics**, n. 51, p. 149–171 2002.

BURAK, D. **Modelagem matemática**: ações e interações no processo de ensino aprendizagem. 1992. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1992.

CIFUENTES, J. C.; NEGRELLI, L. G. O processo de Modelagem Matemática e a discretização de modelos contínuos como recurso de criação didática. In: ALMEIDA, L. M. W.; ARAÚJO, J. L.; BISOGNIN, E. (Org.). **Práticas de Modelagem Matemática na Educação Matemática**: relato de experiência e propostas pedagógicas. Londrina: Eduel, 2011. p. 123 - 140.

DALLA VECCHIA, R. D. **A Modelagem Matemática e a Realidade do Mundo Cibernético**. 2012. 274 p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2012.

LABURÚ, C. E. Fundamentos para um experimento cativante. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, v. 23, n. 3, p. 382-404, 2006.

LESH, R.; DOERR, H. M. Foundations of a Models and Modeling Perspective on Mathematics Teaching, Learning, and Problem Solving. In: LESH, R.; DOERR, H. M. **Beyond Constructivism**. London: Routledge. p. 31, 2003.

MALHEIRO, J. M. S. **A resolução de problemas por intermédio de atividades experimentais investigativas relacionadas à Biologia**: uma análise das ações vivenciadas em um curso de férias em Oriximiná (PA). 2009. 314 f. Tese (Doutorado em Educação para a Ciência) – Faculdade de Ciências, Universidade Estadual "Júlio de Mesquita Filho", Bauru, 2009.

MALHEIROS, A. P. S. Possibilidades da Modelagem Matemática na formação dos Professores dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. In: ALENCAR, E. S.; LAUTENSCHLAGER, E. (Orgs.). **Modelagem matemática nos anos iniciais**. São Paulo: Editora Sucesso, 2014. p. 25-36.

OMODEI, L. B. C.; ALMEIDA, L. M. W. Uma Atividade De Modelagem Matemática Com Aspectos Autênticos. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13., 2019, Cuiabá. **Anais**… Cuiabá: SBEM, 2019.

SWAN, M. The Impact of Task-Based Professional Development on Teachers' Practices and Beliefs: A Design Research Study. Inglaterra: **Journal of Mathematics Teacher Education**, v. 10. p. 217-237. 2007.

TORTOLA, E.; ROBIM, B. N. P. A. S.; ALMEIDA, L. M. W. A linguagem em atividades de modelagem matemática: caracterizações nos "três mundos da matemática". **Rencima**, São Paulo, v. 5, n. 1, p. 1-20. 2014.

TORTOLA, E. **Configurações de modelagem matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental**. 2016. 304 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.

WITTGENSTEIN, L. **Investigações Filosóficas**. 8. ed. Petrópolis: Vozes; Bragança Paulista: Editora Universitária São Francisco, 2013.