UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

MICHAEL FELIPE KOGA

PROBLEMAS DE MODELAGEM MATEMÁTICA NA VISÃO DE ALUNOS DO ENSINO MÉDIO: UMA PERSPECTIVA WITTGENSTEINIANA

LONDRINA
2024

MICHAEL FELIPE KOGA

PROBLEMAS DE MODELAGEM MATEMÁTICA NA VISÃO DE ALUNOS DO ENSINO MÉDIO: UMA PERSPECTIVA WITTGENSTEINIANA

MATHEMATICAL MODELLING PROBLEMS FROM THE VIEW OF HIGH SCHOOL STUDENTS: A WITTGENSTEINIAN PERSPECTIVE

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campi Cornélio Procópio e Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Emerson Tortola

LONDRINA

2024

Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Londrina

MICHAEL FELIPE KOGA

PROBLEMAS DE MODELAGEM MATEMÁTICA NA VISÃO DE ALUNOS DO ENSINO MÉDIO: UMA PERSPECTIVA WITTGENSTEINIANA

Trabalho de pesquisa de mestrado apresentado como requisito para obtenção do título de Mestre Em Ensino De Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Área de concentração: Ensino De Matemática.

Data de aprovação: 28 de Junho de 2024

Dr. Emerson Tortola, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dr. Ademir Pereira Junior, Doutorado - Secretaria de Educação do Estado do Paraná

Dra. Andresa Maria Justulin, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

AGRADECIMENTOS

Gostaria de expressar minha mais profunda gratidão a todos que contribuíram para a realização desta dissertação.

Primeiramente, agradeço aos meus pais, Vilma Alves Koga e Marcio Tetsuo Koga, por todo amor, apoio e incentivo que sempre me proporcionaram ao longo da minha jornada acadêmica e pessoal. Vocês são a base de todas as minhas conquistas e o exemplo que me guia. À minha irmã, Mariane Alves Koga, agradeço pelo carinho e pelo incentivo constantes. Vocês me inspiram diariamente a ser melhor e a continuar perseverando.

À Alice Santi Koga, minha recém-chegada filha, e à minha esposa, Tamara Cristina Santi Koga, minha eterna companheira, que sempre esteve ao meu lado nos momentos de alegria e nos desafios. Sua paciência, compreensão e apoio incondicional foram fundamentais para que eu pudesse concluir esta etapa. A vocês, dedico cada conquista, sabendo que são também suas.

À minha tia, Diomar Alves, por seu apoio e encorajamento ao longo deste caminho. Sua presença foi essencial em muitas etapas dessa trajetória.

Ao meu orientador, Emerson Tortola, agradeço imensamente pela orientação, pelas valiosas contribuições e pela confiança depositada em meu trabalho. Sua sabedoria e dedicação foram essenciais para o desenvolvimento desta dissertação.

Agradeço a todos os meus professores do curso, cujos ensinamentos e orientações foram fundamentais para o meu crescimento acadêmico e pessoal. Suas lições ficarão para sempre marcadas em minha trajetória.

Aos membros da minha banca, agradeço pela disponibilidade, pelas críticas construtivas e pelas sugestões que enriqueceram ainda mais este trabalho. Sua *expertise* foi de grande importância para a finalização desta pesquisa.

Por fim, agradeço a Deus por me conceder saúde, força e sabedoria para superar os desafios e alcançar os meus objetivos. Sua presença constante em minha vida me dá a certeza de que nunca estou sozinho.

A todos vocês, meu mais sincero e profundo agradecimento.

E esta luta somente tem sentido quando os oprimidos, ao buscar recuperar sua humanidade, que é uma forma de criá-la, não se sentem idealistamente opressores, nem se tornam, de fato, opressores dos opressores, mas restauradores da humanidade em ambos.

(FREIRE, 1987, p. 39)

KOGA, Michael Felipe. **Problemas de Modelagem Matemática na visão de alunos do ensino médio**: uma perspectiva wittgensteiniana. 2024. 71 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2024.

RESUMO

Este trabalho investiga a Modelagem Matemática como uma abordagem pedagógica, focando na interpretação e resolução de problemas pelos alunos do 1º ano do Ensino Médio. A pesquisa parte da premissa de problematizar situações da vida real, incentivando a formulação e a investigação de problemas matemáticos. Os problemas de Modelagem demandam uma participação ativa dos alunos, contrastando com o formato tradicional das aulas de Matemática. Destaca-se a importância de uma compreensão clara do problema a ser matematizado, incluindo a identificação de variáveis relevantes. Além disso, o estudo incorpora elementos da filosofia de Wittgenstein, explorando conceitos como “ver” e “ver-como” para compreender as perspectivas dos alunos na interpretação dos problemas. Ao longo da pesquisa, as atividades desenvolvidas foram organizadas conforme três momentos de familiarização com a Modelagem Matemática, visando desenvolver habilidades de modelagem nos alunos. A abordagem filosófica de Wittgenstein oferece *insights* valiosos sobre a natureza da percepção e interpretação, aspectos cruciais para compreender como os alunos enfrentam desafios matemáticos reais. Além disso, como produto educacional, foi desenvolvido um material com o intuito de proporcionar aos professores de matemática, alunos e demais interessados no tema da Modelagem Matemática uma perspectiva embasada nos princípios de Wittgenstein. Este material busca fornecer orientações práticas e reflexões teóricas para enriquecer o ensino e a aprendizagem da Matemática por meio da Modelagem, contribuindo assim para uma educação matemática e uma compreensão mais profunda e contextualizada da disciplina.

Palavras-chave: Educação Matemática. Modelagem Matemática. Linguagem. Wittgenstein. Ensino Médio.

KOGA, Michael Felipe. **Mathematical Modelling Problems from the Perspective of High School Students**: a wittgensteinian approach. 2024. 71 p. Dissertation (Master's degree in Mathematics Education) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2024.

ABSTRACT

This work investigates Mathematical Modelling as a pedagogical approach, focusing on the interpretation and problem-solving skills of first-year high school students. The research is based on the premise of problematizing real-life situations, encouraging the formulation and investigation of mathematical problems. Modelling problems require active participation from the students, contrasting with the traditional format of Mathematics classes. The importance of a clear understanding of the problem to be modeled is highlighted, including the identification of relevant variables. Additionally, the study incorporates elements of Wittgenstein's philosophy, exploring concepts such as "seeing" and "seeing-as" to understand students' perspectives in problem interpretation. Throughout the research, the activities developed were organized according to three stages of familiarization with Mathematical Modelling, aiming to develop modelling skills in students. Wittgenstein's philosophical approach provides valuable insights into the nature of perception and interpretation, crucial aspects for understanding how students face real mathematical challenges. Furthermore, as an educational product, a material was developed to provide mathematics teachers, students, and others interested in the topic of mathematical modelling with a perspective based on Wittgenstein's principles. This material aims to offer practical guidance and theoretical reflections to enrich the teaching and learning of Mathematics through Modelling, thus contributing to the improvement of mathematics education and a deeper and more contextualized understanding of the subject.

Keywords: Mathematics Education. Mathematical Modelling. Language. Wittgenstein. High School.

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1
A PESQUISA E SEUS ENCAMINHAMENTOS

1.1 INTRODUÇÃO

A Modelagem Matemática utiliza uma abordagem pedagógica que se apoia na ideia de problematizar e investigar, por meio da Matemática, situações com referência na realidade (Barbosa, 2004), essa abordagem é feita preferencialmente em temas sobre os quais os alunos possam despertar algum tipo de interesse. Nesse sentido, "coloca o aluno frente a situações autênticas que ele presencia, ou pode vir a presenciar em sua vida, e o leva a interpretá-las com o auxílio da matemática" (Tortola; Almeida, 2016, p. 85).

Para as atividades de Modelagem Matemática, espera-se que os estudantes e o professor apresentem "um comportamento ativo" (Almeida; Silva; Vertuan, 2012, p. 9), diferentemente do qual estão acostumados nas aulas de Matemática, nas quais, geralmente, os professores apresentam problemas com as informações e indicativos necessários para a sua resolução em seus enunciados.

Em contraponto, os problemas de Modelagem Matemática requerem investigação, ou uma formulação do problema, pois não existe uma resolução definida de antemão. A identificação clara e precisa do problema é essencial para desenvolver um modelo matemático robusto[1] e obter resultados significativos[2]. Antes de iniciar a formulação matemática, ou matematização, é crucial compreender o contexto no qual o problema está inserido. Isso envolve uma análise cuidadosa da situação real, suas características e peculiaridades. A definição clara do problema é o próximo passo, envolvendo a identificação dos objetivos da investigação e o que se pretende alcançar com o modelo matemático. Essa etapa é fundamental para orientar todo o processo de modelagem.

Downton (2013) destaca que a formulação de problemas, quando abordada no contexto da Modelagem Matemática, pode envolver tanto a reformulação de problemas quanto a criação de novos problemas. A formulação de problemas é uma habilidade importante que sustenta o

---

[1] Entende-se com modelo matemático robusto uma representação matemática que é confiável e versátil em descrever, explicar ou prever fenômenos do mundo real.

[2] Resultados significativos para um modelo matemático na educação referem-se a observações, conclusões ou previsões que têm relevância prática ou pedagógica e contribuem efetivamente para o entendimento e melhoria do processo educacional.

aprendizado matemático[3] dos alunos e envolve habilidades como questionamento, descrição, construção, justificativa e explicação. No entanto, para que os alunos desenvolvam essa habilidade, é necessário "ampliar os tipos de experiências problemáticas que apresentamos às crianças... e, ao fazê-lo, ajudar as crianças a se 'conectarem' com a matemática escolar" (English, 1998, p. 100 *apud* Downton, 2013).

Uma vez definido o problema, é necessário identificar as variáveis relevantes que desempenham um papel fundamental na compreensão e solução do problema. Essas variáveis podem ser quantidades físicas, propriedades, características ou parâmetros relacionados ao problema em questão. A identificação das variáveis apropriadas é essencial para garantir que o modelo matemático seja abrangente e adequado. Além de identificar as variáveis, é valioso estabelecer as relações e restrições que governam o problema. Essas relações podem ser expressas por meio de equações, desigualdades ou restrições lógicas. Compreender as interações entre as variáveis e as limitações impostas pelo problema é indispensável para criar um modelo matemático coerente e que apresente o problema investigado.

Quando as variáveis, suas relações e restrições foram identificadas, é possível traduzir o problema para a linguagem matemática. Isso envolve a estruturação de algoritmos, equações, funções, enfim, modelos matemáticos que apresentam características essenciais do problema. Essa estruturação é guiada pela formulação de hipóteses, suposições bem fundamentadas a partir das informações a respeito da situação associada ao problema, que estabelecem as condições matemáticas para que a resolução possa ser desenvolvida (Almeida; Sousa; Tortola, 2021). A matematização se operacionaliza a partir das hipóteses formuladas e a resolução deve ser estruturada de maneira a permitir a análise, solução e interpretação do problema.

Por fim, é preciso revisar e refinar a formulação do problema. Essa etapa envolve questionar as suposições feitas, desafiar a validade do modelo proposto e realizar ajustes conforme necessários. A revisão e o refinamento contínuos garantem que a formulação do problema seja congruente com os objetivos da investigação e subsidiam os conhecimentos contemplados no desenvolvimento da atividade de Modelagem.

A introdução da Modelagem Matemática em sala de aula pode ser feita por meio dos três momentos de familiarização propostos por Almeida e Vertuan (2011). Em um primeiro momento, o professor conduz uma atividade mais orientada, com um problema definido e fornecendo aos alunos as informações necessárias para resolvê-lo. Em um segundo momento, os alunos podem auxiliar o professor na delimitação do problema e na busca e seleção de

[3] O aprendizado matemático refere-se à aquisição de conhecimentos, habilidades, compreensão e capacidades relacionadas a conceitos e técnicas matemáticas.

informações, mas cabe a eles a matematização e a resolução, tendo o professor como orientador. Em um terceiro momento, espera-se que os alunos desenvolvam autonomamente uma atividade de Modelagem Matemática, desde a escolha do tema e definição do problema até a obtenção de uma solução, por meio da construção de um modelo matemático. Essa abordagem gradual possibilita que os alunos desenvolvam habilidades de modelagem como formulação de problemas e a aplicação de conceitos matemáticos em contextos reais.

Nesse sentido, para o desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática é necessário que os alunos *vejam* na situação um problema para investigação e, para isso, *vejam* esse problema *como* um problema matemático. *Vejam* um problema no sentido de interpretar na situação algo que não se sabe fazer, pelo menos não de antemão, mas se está interessado em resolver (Onuchic, 1999; Lester, 2013) e *vejam-como* um problema matemático no sentido de dissolver questões do tipo: *O que esse problema tem a ver com a matemática? Como podemos resolver isso usando matemática?*, engajando os alunos no pensamento e reflexão de ideias matemáticas importantes, proporcionando-lhes experiências a partir das quais eles têm a oportunidade de aprender algo de valor matemático (Hiebert *et al.*, 1997). Stillman (2015) orienta que a escolha do problema deve permitir que os alunos primeiro coloquem suas sugestões de problemas e apenas depois sejam avaliados quais são possíveis de serem matematizados. Isso possibilita que esses dois modos de *ver* sejam contemplados.

As expressões *ver* e *ver-como* são aqui utilizadas sob uma perspectiva filosófica de linguagem, atribuída principalmente à obra *Investigações Filosóficas*, que apresenta pensamentos e reflexões do filósofo austríaco Ludwig Wittgenstein, em sua fase tardia, na qual concebe a Filosofia como uma atividade terapêutica, com o objetivo de colocar sob análise os problemas filosóficos que, para ele, se davam na linguagem e podem se dissolver a partir de uma análise pragmática de seus usos.

Wittgenstein enfatiza a relação entre percepção visual e atribuição de significado. Para o autor, *ver* vai além da simples percepção dos objetos, envolvendo a compreensão e interpretação do que é visto. A interpretação está intrinsecamente ligada à linguagem e ao contexto em que as palavras são usadas. O significado das palavras não é determinado apenas pela correspondência direta com objetos, mas também pelas práticas linguísticas e pelo uso comum na comunidade. A compreensão do mundo e a comunicação dependem da interação entre *ver* e *interpretar*.

Os conceitos de *ver* e de *interpretar* estão relacionados à ideia de mudança de aspecto. Segundo Wittgenstein, nossa percepção e interpretação das coisas podem mudar à medida que alteramos nossa perspectiva ou contexto. A mudança de aspecto refere-se à capacidade de *ver* uma mesma coisa de maneiras diferentes, dependendo da perspectiva adotada. Isso desafia a ideia de uma percepção objetiva e mostra que a interpretação está sujeita ao contexto, convenções linguísticas e experiência pessoal. A mudança de aspecto nos convida a questionar nossa visão de mundo e a reconhecer que a realidade pode ser interpretada de várias maneiras. Isso nos incentiva a ser mais abertos e sensíveis à diversidade de interpretações e significados que surgem em diferentes situações.

Considerando essa perspectiva filosófica de linguagem, nesta pesquisa, nos propomos investigar como alunos do 1º ano do Ensino Médio *veem* problemas de Modelagem Matemática. Neste capítulo introdutório, expomos o delineamento da pesquisa, assim como a pertinência do tema ao contexto da Educação Matemática. Indicamos, também, a questão de pesquisa e os objetivos e, por fim, descrevemos a organização desta dissertação.

1.2 MOTIVAÇÃO PARA A PESQUISA

Atuo como professor de Matemática da rede estadual de ensino do Paraná desde 2012. Durante esse período estive em contato com alunos de diversas séries por conta do modo como eu sou contratado, porém profissionalmente sempre me identifiquei mais com alunos do Ensino Médio, principalmente os dois primeiros anos. Apesar de dificilmente estar no mesmo colégio por mais de um ano, as direções dos colégios em que atuei sempre me apoiaram em meus projetos e atividades em salas de aula, devido à boa convivência com os alunos e a equipe pedagógica, e por conta do trabalho que desenvolvi ao longo do ano no colégio.

Ao longo de minha formação na Licenciatura em Matemática tive o meu primeiro contato com a Modelagem Matemática, e justamente pelo fato de ser o primeiro contato de muitos dos participantes, a disciplina teve um caráter introdutório, para fins de apresentá-la. Dessa forma, o objetivo da disciplina foi que nós, à época futuros professores, tivéssemos conhecimento da sua existência e de aspectos metodológicos de sua implementação em sala de aula, porém não consegui desenvolver uma atividade dessa natureza em sala de aula antes de ingressar no mestrado. Foi suficiente para despertar em mim um interesse sobre o assunto, principalmente a respeito da formulação de problemas no contexto da Modelagem Matemática.

Nesse período em sala de aula, observei que muitas das atividades propostas em materiais didáticos e, por conseguinte, em sala de aula privilegiam um ensino da Matemática baseado na apresentação de métodos e técnicas, nos quais a memorização desempenha papel de destaque em detrimento da compreensão de ideias, de regras, da linguagem. Diante disso, em busca de alternativas que viabilizassem modos diferentes de ensinar e aprender Matemática, ingressei no curso de mestrado profissional no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná em 2021. Os estudos ocorridos durante as disciplinas e reuniões foram determinantes para que eu pudesse reconhecer minha dificuldade de não compreender a interpretação matemática dos alunos em situações cotidianas, desejando aprimorar meus estudos levando em consideração minha prática profissional.

Desde meu ingresso no Programa, participo do Grupo de Estudo e Pesquisas em Educação e Educação Matemática (GEPEEM) com meu orientador e seus orientados, em sua maioria também professores da Educação Básica. Essa participação ampliou consideravelmente as oportunidades de discutir, pensar e refletir sobre temáticas envolvendo a Modelagem Matemática e foi nesse contexto que fui apresentado à filosofia da linguagem na perspectiva de Wittgenstein.

Durante a minha caminhada acadêmica e profissional, pude constatar que a maioria dos estudantes tem grandes dificuldades, ou até mesmo, não conseguem interpretar situações de seu cotidiano como um problema para investigar matematicamente, e o trabalho com a Modelagem Matemática pode auxiliar os estudantes nesse aspecto. No âmbito curricular, também podemos vislumbrar no trabalho com a Modelagem uma forma de atender a orientações como feitas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que segure a necessidade de

> utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, ou ainda questões econômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a consolidar uma formação científica geral (Brasil, 2018, p. 524).

A Modelagem Matemática é uma abordagem que emprega conceitos matemáticos para a análise e resolução de problemas situados em contextos reais, por meio da construção de modelos matemáticos que podem ser aplicados a outras situações similares (Lesh; Doerr, 2003; Maaß; Gurlitt, 2009). Sendo assim, a Modelagem Matemática se configura como uma alternativa pedagógica que permite além de compreender, intervir em situações problemáticas em diferentes cenários do mundo real.

Para Almeida e Ferruzzi (2009, p. 132), a Modelagem Matemática pode ser caracterizada como uma prática investigativa, tanto para professores quanto para alunos, com isto pode-se oportunizar abordagens inesperadas, ou até mesmo originais, e desenvolver a expressão criadora dos alunos. Nesse contexto, os alunos são orientados a buscar na Matemática argumentos que lhes deem condições para interpretar, explicar ou até mesmo fazer previsões a respeito da situação-problema[4] em estudo (Almeida; Silva; Vertuan, 2012).

Essa abordagem requer que o professor tenha um diálogo constante com os alunos a fim de estabelecer um olhar matemático para a situação, em que eles são convidados a lançar uma nova *interpretação* com a intenção de que consigam "apresentá-los, representá-los, exemplificá-los, conectá-los e torná-los significativos" (Brasil, 2018, p. 16). Em uma atividade de Modelagem Matemática é possível que diferentes *interpretações* coexistam e, consequentemente, diferentes resoluções.

As ideias de *ver* e *ver-como* tratam a forma pela qual nós vemos e interpretamos os objetos/coisas, logo, o *ver* e o *interpretar* estão entrelaçados, uma vez que, de acordo com Wittgenstein, o interpretar também é uma forma de ver. Conforme Yuan (2020), a ideia de *ver* está intimamente conectada às nossas interpretações e considerações do que normalmente presumimos, assim, a visualização está intrinsecamente ligada ao significado, tal como compreendido por nós. Por outro lado, o conceito de *ver-como* é equiparado a um processo mental que atribui sentido a uma proposição e serve como uma ferramenta de desambiguação.

Foram os estudos realizados durante as reuniões do GEPEEM, que nos motivaram a investigar como os alunos *veem* e *interpretam* os problemas de Modelagem Matemática no Ensino Médio. Dessa forma, convidamos para participar da pesquisa três turmas de 33 alunos do 1º ano do Ensino Médio de um colégio público no município de Londrina - PR, no qual ministrei aulas de Matemática no ano de 2022. O convite aos participantes e o desenvolvimento das atividades foram realizados em conformidade com as orientações do Comitê de Ética em Pesquisa envolvendo Seres Humanos, aprovado conforme parecer nº 5.485.692.

1.3 PERTINÊNCIA DA PESQUISA

Entender o que é um problema é fundamental para o desenvolvimento de competências e habilidades que são essenciais para o sucesso acadêmico, profissional e pessoal. A BNCC estabelece competências gerais e específicas que os estudantes brasileiros devem desenvolver em cada etapa da Educação Básica, e a capacidade de identificar, compreender e resolver problemas é uma das competências mais relevantes. Ainda define que a competência geral de

[4] Uma situação-problema em Matemática é uma proposta inovadora e investigativa na qual o aluno é o centro do processo e possui atitude necessária para decidir seus caminhos na busca de novos conhecimentos, possibilitando ainda uma maior integração dos conteúdos desta disciplina com outras (PONTES, 2018).

"pensamento científico, crítico e criativo" como sendo fundamental para a resolução de problemas em diferentes áreas do conhecimento.

Além disso, outras competências gerais, como a "valorização da diversidade cultural e da convivência democrática" (BRASIL, 2016, p.18), também estão intimamente ligadas à capacidade de lidar com situações-problema de forma responsável e efetiva. Ademais, a BNCC estabelece a competência específica de "resolver e elaborar problemas que envolvam dados quantitativos ou espaciais, utilizando diferentes estratégias e representações". De maneira similar, a Modelagem Matemática está relacionada em desenvolver as habilidades dos estudantes em resolver e (re)formular problemas.

Porém quando nos atentamos à Modelagem Matemática, a maioria dos artigos trata de uma formação em Modelagem ou do desenvolvimento pelos alunos de atividades de Modelagem - também temas necessários -, mas dá pouca atenção a como os estudantes formulam problemas ou passam a ver problemas relativos a situações reais como problemas matemáticos.

Ao longo da atividade de Modelagem, os estudantes são capazes de perceber o uso da Matemática e, aos poucos, com o auxílio do professor, vão aprimorando sua habilidade em estabelecer relações e utilizar (e compreender) conceitos matemáticos (Bassanezi, 2002; Niss; Blum; Galbraith, 2007). Mas e a formulação e interpretação de problemas?

Em sua análise, Krug e Schukajlow (2013) chamam atenção que não se trata apenas de querer introduzir situações-problema reais em sala de aula, uma vez que observaram em determinadas situações que os estudantes demonstraram interesse ainda menor por problemas de Modelagem do que por problemas fantasiosos ou problemas intra-matemáticos. Uma explicação apresentada pelos autores é que os alunos se sentiram inseguros em relação às suas soluções, porque não estavam acostumados a resolver problemas de modelagem na escola.

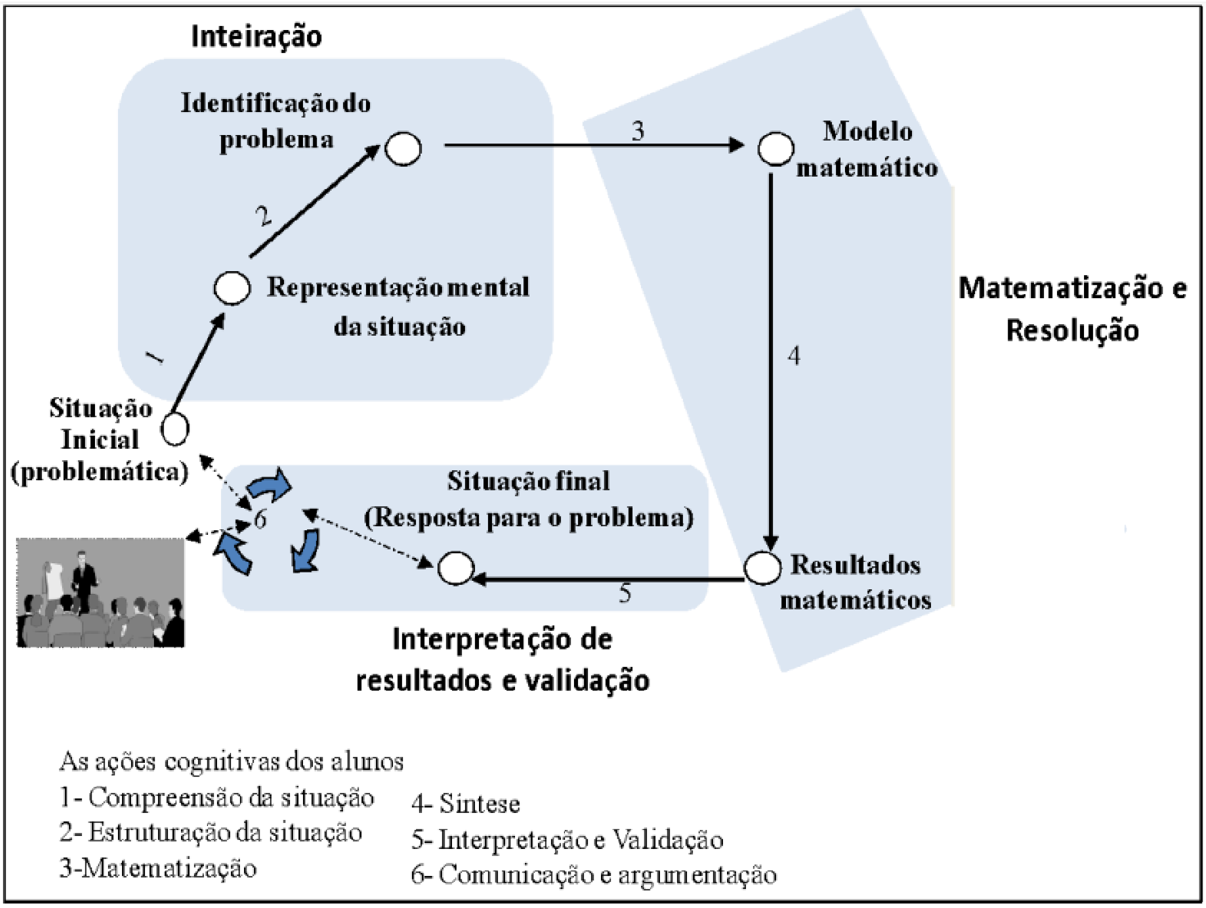
Por isso, é importante que o professor consiga compreender a forma como seus alunos pensam e resolvem problemas matemáticos. No entanto, essa compreensão é difícil de ser alcançada apenas por meio da apresentação de algoritmos, pois isso limita o espaço para o diálogo. É necessário encontrar alternativas que permitam aos professores investigar o pensamento matemático de seus alunos, conforme recomendado pelo *National Council of Teachers of Mathematics*[5] (NCTM, 2000) e por alguns educadores matemáticos (Wood; Merkel; Uerkwitz, 1996; Hiebert, *et al*., 1997).

---

[5] *National Council of Teachers of Mathematics* (Conselho Nacional de Professores de Matemática (Estados Unidos)) é uma organização profissional dos Estados Unidos dedicada à melhoria do ensino e da aprendizagem de matemática.

Normalmente o desenvolvimento de uma atividade de Modelagem é organizado a partir de algumas ações, inclusive na forma de ciclos, fases, diagramas, como apresentados na literatura (Almeida; Silva; Vertuan, 2012; Niss; Blum, 2020), propondo uma dinâmica diferente de como costumamos trabalhar com a Matemática em sala de aula. Por isso, Almeida e Vertuan (2011) indicam que a Modelagem seja inserida em sala de aula de uma forma gradativa a partir de momentos. A Figura 1 apresenta um exemplo de ciclo de Modelagem Matemática.

Figura 1 - Um ciclo de Modelagem Matemática



Fonte: Almeida, Silva e Vertuan (2012).

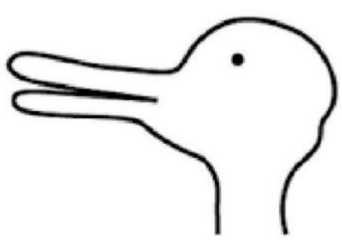
Ao realizar atividades de Modelagem Matemática, os estudantes se dedicam a criar modelos para resolver a questão inicial e, durante esse processo, as interpretações, descrições, hipóteses, explicações e justificativas são constantemente aprimoradas e reformuladas pelo aluno, o que se torna essencial para aprender Matemática (Doerr; English, 2003). Esse constante aprimoramento e reformulação desses elementos pelos alunos, revela-se crucial para um aprendizado matemático. A filosofia de Wittgenstein como se dá a significação das palavras, em especial em matemática, matemática com regras específicas, inserir os alunos no jogo de linguagem, especialmente em sua fase tardia, oferece uma base conceitual coesa para compreender como os alunos abordam problemas e formulam questões em atividades de Modelagem (uso das proposições gramaticais)

Ao fundamentar-se na ideia de jogo de linguagem, Wittgenstein ressalta que a linguagem, vem para fundamentar nossa atitude de pesquisa que envolve compreender como os alunos lidam com problemas e a formulação de problemas em atividades de Modelagem. O conceito do jogo de linguagem explica que a linguagem não é apenas uma coleção de regras gramaticais, mas está enraizada em atividades sociais, práticas culturais e formas de vida compartilhadas, fundamentadas nos usos das palavras. É uma metáfora usada por Wittgenstein para enfatizar a natureza contextual, relacional e pragmática da linguagem. Os jogos de linguagem fornecem um quadro conceitual no qual as regras, práticas e interações sociais dão sentido e significado às palavras e expressões linguísticas.

É necessário quando trabalhamos com a Modelagem que os alunos se familiarizem com essa forma de trabalho, pois ela nos traz um novo campo de problemas de matemática, envolvendo dados fundados em situações reais, e para que os estudantes vejam tais problemas como problemas de Matemática, ou seja, passíveis de se utilizar Matemática, uma mudança de aspecto, na perspectiva colocada por Wittgenstein, é necessária. A ideia de mudança de aspecto, conforme Wittgenstein, enfatiza a fluidez e a relacionalidade dos conceitos e argumenta que a mudança de aspecto é essencial para uma compreensão mais profunda da linguagem, do pensamento e da realidade, ou seja, nossa compreensão e interpretação do mundo estão sujeitas a revisões e reavaliações constantes, à medida que mudamos nossas perspectivas e enquadramentos conceituais.

O jogo de linguagem e a mudança de aspecto estão intimamente relacionados aos conceitos de *ver* e *ver-como*. Esses conceitos exploram a natureza subjetiva e contextual da percepção e da atribuição de significado, logo, o ver e o interpretar estão entrelaçados, uma vez que, de acordo com o autor, o interpretar também é uma forma de ver. Para exemplificar tais conceitos, consideremos a Figura 2.

Figura 2 - Pato Coelho



Fonte: Wittgenstein (2013)

Em relação à Figura 2, ambígua de Jastrow intitulada "Pato Coelho", podemos observar a mesma imagem e observar, o que se vê, a cabeça de um coelho? Ou a cabeça de um pato? Dependendo do aspecto da figura que "se destaca" de acordo com a da percepção em que o indivíduo observa "o fato de *ver* um objeto ora de um jeito, ora de outro, não está relacionado a processos mentais, mas ao domínio de técnicas", em outras palavras, uma pessoa pode não identificar a figura como um coelho caso tenha reconhecido a interpretação da imagem como sendo um pato, pois "nós é quem a interpretamos, e a *vemos* como a *interpretamos*" (Wittgenstein, 2013, p. 254, grifos do autor).

O processo de *ver-como* acontece por meio de diferentes interpretações que podem surgir nas situações. Na Matemática, por exemplo, por que os alunos frequentemente não reconhecem um apótema da pirâmide como sendo a hipotenusa de um triângulo retângulo? Ou ainda, por que os alunos não, que já estudaram proporção, não conseguem compreender que o Teorema de Tales é exatamente a aplicação deste conceito?

Quando apresentamos problemas do cotidiano que podem ser resolvidos com a Matemática, surge a pergunta: por que os alunos não usam os conceitos matemáticos para ajudar na solução do problema? Ou seja, é possível que um aluno passe a ver problemas em sua vida cotidiana *como* problemas que podem ser resolvidos com o suporte da Matemática?

Ao utilizar tal conceito wittgensteiniano, podemos entender que as dificuldades de interpretar um problema ou enxergar uma figura geométrica de uma determinada forma, por exemplo, não decorrem apenas pela falta de conhecimento, mas também da forma que os estudantes enxergam e interpretam os problemas propostos para eles. Essas são questões que pretendemos explorar ao analisar como as atividades de Modelagem Matemática podem beneficiar os estudantes.

Dessa forma, ao trabalharmos a Modelagem Matemática como uma forma de contato dos estudantes com problemas reais e transformá-los em problemas matemáticos para responder essas questões, pois nesta situação, convidamos os estudantes a interpretar tais situações pautadas em conhecimentos matemáticos. Nesse contexto, eles podem utilizar conhecimentos já estudados por eles ou novos conhecimentos, que podem ser introduzidos pelo professor, para auxiliá-los na resolução (Swan *et al*., 2007).

1.4 DEFINIÇÕES DA PESQUISA

O desenvolvimento desta pesquisa foi orientado pela questão: *como estudantes do 1º do Ensino Médio veem problemas de Modelagem Matemática?* A pesquisa se fundamenta em uma perspectiva filosófica de linguagem, de Wittgenstein, em sua fase tardia. A partir dessa questão, dois objetivos foram definidos:

1. Compreender como problemas de Modelagem Matemática são utilizados em práticas de sala de aula a partir de atividades descritas e/ou analisadas na literatura.
2. Compreender como estudantes do 1º ano do Ensino Médio interpretam problemas em atividades de Modelagem Matemática;

Diante do cenário descrito, vislumbramos a Modelagem Matemática como uma alternativa às práticas habituais de sala de aula com o intuito de analisar como os alunos do Ensino Médio *veem* problemas de Modelagem Matemática, uma vez que ao construir modelos matemáticos, os alunos podem interpretar situações associadas à realidade, observar e conjecturar padrões de comportamento de fenômenos, estabelecer relações, generalizar e descrever matematicamente tais padrões, usando linguagem apropriada.

Para isso, no ano de 2022, foram desenvolvidas nove atividades de Modelagem Matemática com três turmas de 1º ano de um colégio público. Três dessas atividades foram elaboradas pelos autores e as demais pelos estudantes. Algumas atividades serão utilizadas para a produção do produto educacional e três delas serão analisadas: duas delas de autoria dos autores e uma de autoria dos estudantes. As atividades foram desenvolvidas predominantemente no ambiente da sala de aula, com os alunos sempre organizados em grupos. Gravamos as aulas em que as atividades foram desenvolvidas e recolhemos os registros produzidos pelos alunos.

Com o objetivo de compreender os dados coletados, decidimos adotar uma abordagem qualitativa, que permite uma atenção cuidadosa aos participantes e às suas ideias, enfatizando a interpretação dos discursos e narrativas para estabelecer significado, uma vez que pesquisas com essa abordagem fornecem informações mais descritivas e focam no significado atribuído às ações (D'Ambrosio, 2006; Borba; Araújo, 2006).

Entendemos que essa abordagem é a mais apropriada para a nossa pesquisa, uma vez que é essencial descrever e analisar cuidadosamente as atividades de Modelagem Matemática para compreender como a produção, interpretação e análise de modelos matemáticos pelos alunos contribuem para a interpretação de fenômenos, bem como para o registro de regularidades e padrões utilizando a linguagem matemática.

1.5 PRODUTO EDUCACIONAL

O produto educacional, com base em Moreira (2004), consiste em um processo ou material articulado à pesquisa desenvolvida, que visa a melhoria do ensino na área específica, no caso a Matemática, e que, em forma e conteúdo, tem potencial para ser utilizado por outros professores. No caso desta pesquisa, o produto educacional desenvolvido consiste em um caderno de atividades voltado para o uso de professores no desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática em sala de aula. Ou seja, trata-se de um material no qual são apresentadas atividades de modelagem, fundamentadas na literatura e nas experiências vivenciadas nesta pesquisa, que contemplam temáticas diversas e podem ser utilizadas para promover discussões matemáticas pertinentes ao 1º ano do Ensino Médio.

Este caderno foi concebido com o objetivo de proporcionar uma ferramenta prática e acessível para facilitar a implementação de atividades de Modelagem Matemática em sala de aula, promovendo uma aprendizagem mais contextualizada. O caderno de atividades é estruturado para guiar os professores nas etapas do processo de Modelagem Matemática, desde a introdução dos conceitos básicos até a aplicação prática em diferentes contextos, sem, contudo, ser prescritivo, mas apresentando orientações de como o professor pode agir e lidar com determinadas situações.

Inclui uma variedade de atividades cuidadosamente elaboradas, cada uma acompanhada de instruções detalhadas, objetivos educacionais e sugestões de abordagem pedagógica. As atividades foram selecionadas e desenvolvidas de modo a abranger uma ampla gama de temas e níveis de complexidade, garantindo que possam ser adaptadas às necessidades e ao nível de conhecimento dos alunos.

Cada atividade no caderno é apresentada com uma descrição do problema a ser modelado, os passos metodológicos que podem ser empreendidos. Isso permite que os professores tenham uma base para orientar seus alunos durante o processo de modelagem, ao mesmo tempo em que incentivam a criatividade e o pensamento crítico, dando-lhes liberdade para tomar suas próprias decisões e agir conforme seu contexto de atuação.

Além disso, o caderno foi elaborado para ser um recurso flexível, que pode ser utilizado em diferentes disciplinas e áreas do conhecimento. A Modelagem Matemática, por sua natureza interdisciplinar, permite a integração de conteúdos de diversas disciplinas, enriquecendo o processo de ensino-aprendizagem e tornando-o mais relevante para os alunos.

O caderno de atividades de Modelagem Matemática representa um recurso valioso para os professores, oferecendo suporte prático e teórico para a implementação de atividades de modelagem em sala de aula. Ao proporcionar uma abordagem estruturada e flexível, este produto educacional visa não apenas melhorar a compreensão matemática dos alunos, mas também desenvolver habilidades essenciais como resolução de problemas, pensamento crítico e colaboração.

É preciso seriedade na implementação dessas atividades, para que não se entenda as instruções como um caminho pré-definido a ser seguido. É preciso ter consciência que o desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática tem como premissa a autonomia e interesses dos estudantes, dessa forma, o professor deve respeitar essas características, assim como os conhecimentos dos alunos, auxiliando-os e dando o suporte necessário, mas sem transformar essa abordagem em uma aula expositiva. Por isso, optamos por incluir também algumas orientações teóricas, de modo que os professores possam conhecer um pouco mais sobre modelagem e agir de acordo com o que se espera ao utilizar a sua abordagem.

1.6 ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO

A estrutura desta dissertação será inspirada em um formato de *multipaper*, ou seja, os três capítulos subsequentes à introdução tratam temáticas assim como geralmente é feito em um artigo científico, com uma introdução, problemática e objetivos anunciados, descrição da metodologia de pesquisa, resultados, discussões e conclusões. Dessa forma, cada um dos capítulos seguintes pode posteriormente ser submetido a periódicos científicos independentemente dos outros, com as devidas alterações, quando necessárias.

Com isso, a dissertação está organizada em 3 capítulos, sendo o primeiro essa apresentação da pesquisa e seus encaminhamentos, com uma introdução, com contextualização e definições gerais da pesquisa, bem como com a caracterização do caderno de atividades elaborado como produto educacional da pesquisa.

O segundo capítulo apresenta uma análise de artigos (comunicações científicas e relatos de experiência com atividades de modelagem descritas) presentes na décima primeira edição da Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática (XI CNMEM - 2019) que foi escolhido por ter sido a última conferência antes da elaboração desta dissertação e pelo fato de ser a maior conferência sobre Modelagem na Educação Matemática no Brasil, e tem como objetivo entender como os problemas de Modelagem Matemática são utilizados nas práticas apresentadas nessas pesquisas.

O terceiro capítulo apresenta a análise de atividades de Modelagem desenvolvidas por estudantes de um 1º ano do Ensino Médio, com o objetivo de responder como os alunos interpretam problemas de Modelagem Matemática, mas nesse caso com atividades por nós planejadas e desenvolvidas em sala de aula.

Por fim, são apresentadas as conclusões da pesquisa, retomando os resultados de cada capítulo e sistematizando-os a fim de responder a questão de pesquisa anunciada.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, L. M. W.; FERRUZZI, E. C. Uma aproximação socioepistemológica para a modelagem matemática. **Alexandria**, Florianópolis, v. 2, p. 117-134, 2009.

ALMEIDA, L. W.; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na Educação Básica.** São Paulo: Contexto, 2012.

ALMEIDA, L. M. W.; SOUSA, B. N. P.; TORTOLA, E. The Formulation of Hypotheses in Mathematical Modelling Activities. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 23, n. 5, p. 66-93, set./out. 2021.

ALMEIDA, L. M. W.; VERTUAN, R. E. **Práticas de modelagem matemática na educação matemática**. Londrina: EDUEL, 2011.

BARBOSA, J. C. Modelagem Matemática: O que é? Por que? Como? **Veritati**, n. 4, p. 73- 80, 2004.

BASSANEZI, R. C. Ensino-aprendizagem com modelagem matemática. Campinas: **Contexto**, 2002.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular. Ministério da Educação**. 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/abase/#fundamental/aarea-de-matematica>. Acesso em: 03 de abr. de 2023.

BLUM, W.; GALBRAITH, P.L.; HENN, H. W.; NISS, M. **Modelling and Applications in Mathematics Education**, v.10, p. 513-517, 2007.

DOWNTON, A. Problem Posing: A Possible Pathway to Mathematical Modelling. In: KAISER, G.; STILLMAN, G. A.; BLUM, W.; BROWN, J. P. **Teaching Mathematical Modelling: Connecting to Research and Practice.** Londres: Springer. p. 527-536, 2013.

FREIRE, P. **Pedagogia do oprimido**. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1987.

HIEBERT, J.; CARPENTER, T. P.; FENNEMA, E.; FUSON, K. C.; WEARNE, D.; MURRAY, H.; OLIVIER, A.; HUMAN, P. **Making sense**: teaching and learning mathematics with understanding. Portsmouth: Heinemann, 1997.

KRUG, S.; SCHUKAJLOW, A. Planning, Monitoring and Multiple Solutions While Solving Modelling Problems. **37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**, v.4, 177-184, 2013.

LESH, R.; DOERR, H. M. Foundations of a Models and Modeling Perspective on Mathematics Teaching, Learning, and Problem Solving. In: LESH, R.; DOERR, H. M. **Beyond Constructivism**. London: Routledge. p. 31, 2003.

LESTER, F. K. Thoughts About Research On Mathematical Problem-Solving Instruction. **The Mathematics Enthusiast**, v. 10, n. 1-2, p. 245-278, 2013.

MAAß, K.; GURLITT, J. Designing a Teacher Questionnaire to Evaluate Professional Development in Modelling. In: GUERRIER, V. D.; LAVERGNE, S. S.; ARZARELLO F. **CERME-6** – Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, p. 2056-2064. 2009.

MOREIRA, M. A. O mestrado (profissional) em ensino. **Revista Brasileira de Pós-Graduação**, Brasília, v. 1, n. 1, p. 131-142, jul. 2004.

NISS, M.; BLUM, W. **The Learning and Teaching of Mathematical Modelling**. ed. 1. Londres: Routledge. 2020.

ONUCHIC, L. R.; Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). **Pesquisa em Educação Matemática**: concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP. p.199-218, 1999.

PONTES, E. A. S. Modelo de ensino e aprendizagem de matemática baseado em resolução de problemas através de uma situação-problema. **Revista Sítio Novo.** Tocantins: UFT, p.44 - 56, 2018.

STILLMAN, G. PROBLEM FINDING AND PROBLEM POSING FOR MATHEMATICAL MODELLING. In: HOE, L. N; DAWN, N. K. E. **Mathematical modelling: from theory to practice**. Singapore: National Institute of Education, Nanyang Technological University. p. 41 - 56, 2015.

SWAN, M. **The Impact of Task-Based Professional Development on Teachers' Practices and Beliefs: A Design Research Study**. Inglaterra: Journal of Mathematics Teacher Education. v. 10. p. 217-237. 2007.

TORTOLA, E.; ALMEIDA, L. M. W. de. Um olhar sobre os usos da linguagem por alunos dos anos iniciais do ensino fundamental em atividades de modelagem matemática. **Revista Paranaense De Educação Matemática**, Campo Mourão, n. 5, p. 83–105, 2016.

WITTGENSTEIN, L. **Investigações Filosóficas**. 8. ed. Petrópolis: Vozes; Bragança Paulista: Editora Universitária São Francisco, 2013.

CAPÍTULO 2
PROBLEMAS DE MODELAGEM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA: UM OLHAR PARA ATIVIDADES PRESENTES EM ARTIGOS DA XI CNMEM SOB UMA PERSPECTIVA WITTGENSTEINIANA

Resumo: Este capítulo apresenta uma investigação acerca dos usos dos problemas em atividades de Modelagem Matemática desenvolvidas na Educação Básica e descritas e/ou analisadas em artigos científicos da décima primeira edição da Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática (XI CNMEM), realizada em 2019. Foi conduzida a partir de uma perspectiva filosófica pautada em considerações do filósofo austríaco Ludwig Wittgenstein, particularmente em suas ideias e reflexões apresentadas em sua obra póstuma Investigações Filosóficas. A escolha do material se deu pela representatividade que esse evento tem na comunidade de pesquisadores da Modelagem na Educação Matemática e por essa ser, à época, a edição mais recente do evento. A análise, realizada a partir das orientações de Laurence Bardin a respeito de como proceder uma Análise de Conteúdo, evidenciou três tipos de uso: problemas para tratar situações do mundo real; problemas que envolvem experimentos; e problemas no contexto de um mundo cibernético, os quais sinalizam a Modelagem Matemática como uma atividade plural e flexível, capaz de se (re)configurar para viabilizar uma investigação matemática e atribuir sentidos aos fenômenos sob investigação.

Palavras-Chave: Educação Matemática. Usos da Linguagem. Wittgenstein. Realidade. Análise de conteúdo.

Abstract

This paper presents an investigation into the uses of problems in mathematical modelling activities developed in Basic Education and described and/or analyzed in scientific papers from the eleventh edition of *the Conferência Nacional sobre Modelagem na Eduação Matemática* (XI CNMEM), held in 2019. It was conducted from a philosophical perspective based on considerations of the Austrian philosopher Ludwig Wittgenstein, particularly in his ideas and reflections presented in his posthumous work Philosophical Investigations. The choice of material was due to the representativeness that this event has in the community of researchers in Modelling in Mathematics Education, and because it was, at the time, the most recent edition of the event. The analysis, carried out following Laurence Bardin's guidelines on how to proceed with Content Analysis, revealed three types of use: problems to address reality, everyday or not; problems involving experiments; and problems in the context of a cybernetic world, which signal Mathematical Modelling as a plural and flexible activity, capable of (re)configuring itself to enable mathematical investigation and attribute meanings to the phenomena under investigation.

Keywords: Mathematics Education. Language Uses. Wittgenstein. Reality. Content Analysis.

2.1 INTRODUÇÃO

Atividades de Modelagem Matemática são geralmente caracterizadas na literatura pela investigação de problemas estruturados a partir da *realidade*. Porém, apesar da recorrência com que o termo é utilizado na literatura (Tortola; Robim; Almeida, 2014), não há uma definição assertiva, conduzindo a modelagem à uma pluralidade de entendimentos e práticas e, consequentemente, a problemas de naturezas diversas (Blum, 2002).

Em uma tentativa de delimitar um campo de atuação para os problemas de Modelagem Matemática, Barbosa (2004) indica que não considera situações não-fictícias ou situações criadas, no sentido estrito da palavra, por alguém no âmbito da modelagem. Para o autor interessam "situações cujas circunstâncias se sustentam no *mundo social*" (Barbosa, 2004, p. 3, grifos nossos).

Sob uma perspectiva mais abrangente, Blum (2002, p. 152), considera a Modelagem Matemática uma atividade que diz respeito às relações que são estabelecidas entre Matemática e *mundo real* e explica que entende mundo real como - tudo o que tem a ver com a natureza, a sociedade ou a cultura, incluindo atividades do dia a dia, assim como conteúdos da escola e da universidade ou disciplinas científicas e acadêmicas diferentes da Matemática.

Apesar dessa diversidade de entendimentos possuírem pontos de convergência, são os pontos divergentes que podem ser determinantes do que se considera ou não uma atividade de Modelagem Matemática. A pesquisadora e doutora Lourdes Maria Werle de Almeida, em entrevista à Revista Paranaense de Educação Matemática (Silva; Malheiros, 2021) nos alertou que é o nosso olhar sobre a atividade desenvolvida, fundamentado obviamente em conhecimentos teóricos, que vai nos dizer se foi ou não uma atividade de modelagem.

Dessa forma, cabe uma investigação a respeito dos *modos de ver* os problemas de Modelagem Matemática em sala de aula, uma vez que os problemas são considerados como ponto de partida de atividades de Modelagem Matemática, conforme caracterizações como a de Almeida, Silva e Vertuan (2012). Essa investigação está pautada em uma perspectiva filosófica, que busca encarar e lidar com possíveis confusões conceituais que podem surgir a partir dessa diversidade de entendimentos, assumindo uma atitude terapêutica que busca uma descrição dos usos na linguagem, assim como sugere o filósofo austríaco Ludwig Wittgenstein, em sua fase tardia.

Trata-se de um ensaio teórico cujo objetivo é investigar *como os problemas são utilizados em atividades de Modelagem Matemática desenvolvidas na Educação Básica*. Nesse primeiro momento nos dedicamos a analisar atividades de Modelagem Matemática descritas e analisadas em artigos científicos, a fim de obter uma visão panorâmica do que os pesquisadores e professores que atuam na área entendem por problemas de modelagem.

Diante desse objetivo, definimos como material de análise os relatos de experiência e comunicações científicas que trazem descrições de atividades de Modelagem Matemática desenvolvidas na Educação Básica da décima primeira edição da Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática (XI CNMEM), realizada em Belo Horizonte - MG, no ano de 2019, à época a edição mais recente do evento.

Para olhar para os usos dos problemas nessas atividades, nos pautamos nas investigações filosóficas de Wittgenstein a respeito de Filosofia, Linguagem e Matemática. Nossa intenção é identificar elementos que sinalizem aproximações e diferenças a fim de descrever algumas práticas de uso da modelagem. Para isso nos amparamos nas orientações de Laurence Bardin a respeito de como conduzir uma Análise de Conteúdo.

2.2 PROBLEMAS DE MODELAGEM MATEMÁTICA

Ao optar por trabalhar com atividades de Modelagem Matemática, o professor precisa ter consciência de que as experiências proporcionadas por esse tipo de atividade são diferentes das proporcionadas em aulas habituais de Matemática. Os problemas de Modelagem Matemática transcendem as fronteiras estabelecidas e, geralmente, bem definidas para a atividade matemática em sala de aula (Carvalho; Koga; Tortola, 2019).

Diferentemente dos problemas-padrão[6] de sala de aula, que envolvem ideias matemáticas recém explicadas pelo professor ou apresentadas pelos materiais didáticos, os problemas de modelagem apresentam-se como desafios singulares, que se distinguem por sua característica de abordar situações que podem ser de interesse aos alunos, mas principalmente que se ocupam de situações-problema que requerem contextos com significados e interpretações, ou seja, que os alunos tenham a possibilidade de escolhas no processo de resolução (Bliss; Libertini, 2016).

Problemas de modelagem não possuem um caminho para a resolução definido de antemão e não possuem indicativos de como proceder em seu enunciado, são problemas de natureza mais aberta (Giraldi, Sant'Ana, 2019). Com esse tipo de problema, convidamos os alunos a explorar territórios não mapeados, a expor suas ideias e interpretações, a formular hipóteses que os conduzam a diferentes caminhos e resoluções.

Nesse contexto, Downton (2013) discute a importância de os alunos também trabalharem na proposição de problemas, pois embora seja algo que aconteça de forma natural no dia a dia, não recebe a devida atenção na sala de aula - e como sinalizam Setti, Waideman e Vertuan (2021) também na pesquisa. Isso reflete no estranhamento que os alunos podem sentir ao lidar com problemas de modelagem e, de acordo com Downton (2013), pode inclusive influenciar no modo como eles veem a Matemática. É nesse contexto que nos interessa conhecer como os problemas de Modelagem Matemática são utilizados na literatura.

[6] Sua resolução envolve a aplicação direta de um ou mais algoritmos anteriormente aprendidos e não exige a elaboração de uma estratégia que vai além da aplicação desses algoritmos. A solução do problema já está direcionada no próprio enunciado e a tarefa básica é mapear as informações disponibilizadas, identificando as operações ou algoritmos necessários para resolvê-lo (Lesh; Doerr, 2003).

2.3 UMA VISÃO DE FILOSOFIA PAUTADA NOS USOS DA LINGUAGEM

Wittgenstein (2001), ao discutir como se constitui o significado das palavras, postulou que os significados estão intrinsecamente atrelados aos seus usos em contextos específicos, revestidos de práticas sociais. Veja, por exemplo, a palavra “triângulo”. Em uma aula de Matemática, não há dúvidas que essa palavra é utilizada para se referir a um polígono com três lados. Suas propriedades também ficam subentendidas: um triângulo possui três vértices, três lados e três ângulos; a soma de seus ângulos internos, na geometria euclidiana, é 180 graus.

Porém, se irmos além do contexto da Matemática, há diferentes usos pertinentes a essa palavra. No contexto do trânsito pode indicar um objeto de sinalização utilizado em caso de algum acidente ou imprevisto que possa acontecer com o automóvel. Quando preso a uma haste pode também indicar uma placa de sinalização que dentro das leis de trânsito significa que o motorista deve dar a preferência. Já na música, o triângulo tem ainda outro significado, indica um instrumento de percussão que consiste em uma barra de aço em forma triangular, muitas vezes aberta em um dos vértices. Ele é suspenso por um gancho e tocado batendo-se nele com uma baqueta de metal.

Esses exemplos mostram que os significados das palavras estão entrelaçados e enraizados nas complexidades das práticas sociais, no que Wittgenstein chama de “forma de vida” (Wittgenstein, 2013, § 23). Wittgenstein argumenta que é impossível compreender completamente o significado de uma palavra, dada a variedade de usos possíveis. Além disso, argumenta que os significados não são entidades isoladas, mas sim emergem das interações sociais, em determinados grupos culturais, nas formas de vida.

Cabe ressaltar que não nos envolvemos em uma forma de vida, mas em uma pluralidade delas, abrangendo desde as interações mais corriqueiras até contextos mais especializados, como os da ciência. Para Wittgenstein, não há como separar o significado de uma palavra da prática social que a envolve; são entidades inseparáveis e interdependentes e, desse modo, a compreensão de uma palavra implica uma compreensão internalizada das práticas sociais em que ela se insere, revelando um conhecimento a respeito de como a palavra é usada em cada prática, de acordo com a forma de vida, usos estes regulados pelo que Wittgenstein chama de “jogos de linguagem” (Wittgenstein, 2013, § 7).

Wittgenstein utiliza a metáfora dos jogos de linguagem para ilustrar como os usos da linguagem são determinados e contextualizados. Cada forma de vida, cada contexto social, traz jogos de linguagem particulares, com suas próprias regras e normas, que podem até possuir semelhanças, mas são determinantes dos usos das palavras. Assim como em diferentes tipos de jogos, os jogos de linguagem têm características particulares que delimitam significados. Cada "jogo de linguagem" estabelece um modo de agir, um conjunto específico de práticas e regras que moldam o significado das palavras e ganham significado em relação às atividades e interações particulares que ocorrem nesse jogo.

É, portanto, imperativo entender o contexto específico, ou o "jogo de linguagem", para compreender o significado ou significados de uma palavra. Os significados, assim, não são fixos ou universais, mas fluidos e moldados pelas nuances de diferentes jogos de linguagem. Wittgenstein destaca que a compreensão real de uma palavra só ocorre quando se compreende o jogo de linguagem, a prática social e os significados que emergem dessas interações.

São, portanto, elementos cruciais para entender o significado, os jogos de linguagem não se limitam a refletir, mas exercem influência sobre nossas atividades e compreensões. Quando Wittgenstein introduz o conceito de "jogo de linguagem", ele não apenas ilustra a diversidade contextual das práticas linguísticas, mas sugere implicitamente que esses jogos não são meros exercícios discursivos. A expressão "jogo de linguagem" abrange a totalidade formada pela linguagem e pelas atividades entrelaçadas a ela e destaca que esses jogos transcendem as palavras (Wittgenstein, 2012, p. 19), eles englobam práticas sociais, comportamentos e ações, ao regular o significado, esses jogos influenciam nossas atividades, moldando não apenas nossa fala, mas também nossas ações.

Nesse contexto, para Gottschalk (2018) e Carvalho e Silveira (2019), a Matemática pode ser caracterizada como um jogo de linguagem, e a atividade matemática pode ser considerada como uma atividade humana regida por regras convencionadas no âmbito de nossas práticas linguísticas.

Dessa forma, ao assumir uma atitude terapêutica, Wittgenstein sugere que olhemos para os usos, não apenas como expressões isoladas, mas como partes intrínsecas de práticas sociais complexas. Para Sousa e Tortola (2020, p. 8) "A perspectiva wittgensteiniana de linguagem se caracteriza como de natureza conceitual, pois embora sua terapia leve em consideração o contexto de uso das palavras, ela traz à tona a noção de gramática". Ainda nesse sentido.

> [...] a terapia filosófica mostra que a gramática dos conceitos engendra o objeto em si, assim como o destrói, anulando-o pela linguagem; daí sua autonomia. São gramaticais as condições de possibilidade do objeto em si, assim como o são as dos objetos naturais, suas propriedades empíricas, tais como estudadas pelo cientista (Moreno, 2003, p. 132).

Ao reconhecer essa dinâmica, não apenas desvendamos a natureza da linguagem, mas também compreendemos a Matemática como uma narrativa intrínseca à experiência humana, onde a terapia filosófica oferece um caminho para desvendar e refletir sobre as intrincadas conexões entre linguagem, prática e significado, promovendo uma compreensão mais profunda e enriquecedora de nosso mundo conceitual e suas possibilidades, como é o caso de nosso interesse sobre os problemas de modelagem.

2.4 ASPECTOS METODOLÓGICOS DA PESQUISA

Com a intenção de investigar *como os problemas são utilizados em atividades de Modelagem Matemática desenvolvidas na Educação Básica*, assumimos uma atitude terapêutica, pautada em considerações filosóficas que se alinham, sobretudo, às ideias e pensamentos apresentados na obra póstuma Investigações Filosóficas de Ludwig Wittgenstein. Para isso analisamos relatos de experiências e comunicações científicas com atividades de Modelagem Matemática desenvolvidas na Educação Básica descritas e/ou analisadas em artigos científicos publicados nos anais da XI CNMEM. Para a análise, nos orientamos nos pressupostos metodológicos apresentados por Bardin (2011) a respeito da Análise de Conteúdo.

A análise de conteúdo, conforme Bardin (2011), é uma abordagem metodológica robusta que busca estabelecer uma compreensão profunda e sistemática dos materiais sob análise, os quais possuem naturezas diversas, como entrevistas, questionários, textos, imagens, entre outros. Trata-se, portanto, de um conjunto de técnicas analíticas que podem ser aplicadas a diversas formas de comunicação, independentemente de seu suporte. Essa versatilidade é uma das características que tornam a análise de conteúdo uma ferramenta valiosa na pesquisa qualitativa. Permite extrair significados e padrões subjacentes aos textos, revelando insights valiosos sobre os temas abordados. Pode ser conduzida a partir de três fases: pré-análise; exploração do material; e tratamento dos resultados.

O uso da análise de conteúdo nesta pesquisa surge como uma ferramenta para desvelar e interpretar os usos dos problemas em atividades de modelagem descritas e/ou analisadas em artigos científicos da XI CNMEM. Com a análise de conteúdo, desenvolvemos uma exploração sistemática, em busca de padrões e tendências que revelassem características singulares a respeito dos usos dos problemas.

Na fase de pré-análise, preparamos o material para análise, isso envolveu a definição do *corpus* (20 textos foram selecionados, por apresentarem atividades de Modelagem Matemática com descrição de seu desenvolvimento), a codificação de unidades de registro (trechos dos textos selecionados), a escolha de critérios de seleção (conteúdos que sinalizam o uso do problema), o estabelecimento de aproximações e agrupamentos (tipos de situações que deram origem aos problemas) e a formulação de hipóteses iniciais (os diferentes tipos de problema moldam como vemos a Matemática e sua relação com o mundo).

Na fase de exploração do material, realizamos uma leitura cuidadosa do material selecionado e aplicamos as técnicas definidas na pré-análise, ou seja, definimos e codificamos as unidades de registro, indicando em que contexto da Educação Básica a atividade foi desenvolvida (anos iniciais ou finais do Ensino Fundamental ou Ensino Médio), o contexto do problema (situações cotidianas, situações não cotidianas, experimento, mundo cibernético), se os conteúdos abordados na atividade eram conhecidos pelos alunos ou tiveram que ser introduzidos e se a hipótese para desenvolvimento da atividade foi formulada pelos alunos ou pelos professores. Essas informações foram organizadas em uma planilha eletrônica. O Quadro 1 apresenta um recorte ilustrativo dessa planilha, o quadro completo está no Apêndice A.

Quadro 1 - Recorte dos artigos selecionados

Código	**Anos**	**Contexto**	**Os conteúdos eram conhecidos?**	**Foram introduzidos novos conteúdos?**	**A hipótese foi formulada pelos alunos ou professor?**
RE_CO_01	FINAIS	Cotidiano	Sim	Não	Professor
RE_EX_01	MÉDIO	Experimento	Sim	Não	Professor
RE_MC_01	FINAIS	Mundo Cibernético	Não se aplica	Não	Professor
CC_NC_01	INICIAIS	Não Cotidiano	Não se aplica	Sim	Professor

Fonte: Elaborado pelos autores.

No Quadro 1, os códigos são constituídos com duas letras que indicam a modalidade do trabalho em que a atividade está presente, RE para Relato de Experiência e CC para Comunicação Científica; duas letras que se referem ao contexto do problema, CO para problemas provenientes de situações cotidianas, NC para problemas provenientes de situações não cotidianas, EX para problemas que envolvem experimentos, e MC para problemas formulados no contexto de um mundo cibernético, estes contextos foram selecionados com base em sua predominância observada durante a fase da pré-análise. Durante essa fase, encontramos 10 artigos que contemplam situações cotidianas, 2 que contemplam experimentos, 1 que contempla o mundo cibernético e 8 que contemplam situações não cotidianas; e um número de dois algarismos que indica a ordem em que o artigo se encontra em nossa organização. As unidades de registro foram identificadas no arquivo utilizando a ferramenta destaque, como mostra a Figura 1.

Figura 1: Exemplo de identificação das unidades de registro

> Como atividade inicial pedi aos alunos que fizessem anotações sobre os alimentos consumidos durante o decorrer do dia de maneira mais detalhada possível, incluindo a quantidade de porções que eles consumiam. Neste primeiro momento, pude observar que a turma era bastante concentrada, fiquei bastante satisfeita com o interesse e a curiosidade de saber o que é que a Matemática tem a ver com a nossa alimentação.

Fonte: Material de Análise (RE_CO_09)

Além do trecho apresentado na Figura 1, são exemplos de unidades de registro: “os alunos foram convidados a realizar o experimento, abandonando a bolinha de alturas entre 1 a 5 metros, com, no mínimo, 20 centímetros de intervalo entre cada altura, e mensurando o tempo” (RE_EX_02); e “os estudantes foram convidados a discutir como deve ser feita a divisão da conta de água em um condomínio” (RE_CO_08).

Com a codificação das unidades de registro, observamos relações entre algumas delas, assim como particularidades, que nos conduziram a diferentes agrupamentos. Esses agrupamentos revelam padrões de uso dos problemas em atividades de Modelagem Matemática e, ao serem confrontados com dados teóricos, se constituíram em categorias. Três categorias foram definidas: problemas para tratar o mundo real; problemas que envolvem experimentos; e problemas no contexto de um mundo cibernético.

Na fase de tratamento dos resultados, nos dedicamos à interpretação dessas três categorias, construindo narrativas explicativas para cada uma delas, ou seja, descrevendo os jogos de linguagem associados a cada uso estabelecido para os problemas de Modelagem Matemática. Para isso, trazemos uma descrição dos usos pautada na apresentação de trechos dos artigos científicos tomados como unidades de registro. Buscamos nesse contexto, estabelecer uma interlocução teórica com pesquisas da área e analisar as implicações de cada uso para o desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática. É sobre a descrição de tais usos, sistematizados a partir das três categorias enunciadas, que nos dedicamos a seguir.

2.4.1 PROBLEMAS PARA TRATAR O MUNDO REAL

No âmbito da Modelagem Matemática, diversas situações se apresentam como fontes potenciais para a geração de atividades de modelagem, sendo que essas situações são, em sua maioria, intrinsecamente vinculadas à realidade. Nas definições comuns de Modelagem Matemática, a terminologia “realidade” é frequentemente empregada para contextualizar a origem dos problemas que demandam uma abordagem matemática.

Conforme destacado por Bassanezi (2004, p. 24), a Modelagem Matemática é a "arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos". Essa abordagem está alinhada com a ideia de que a Modelagem Matemática envolve "situações com referência à realidade", como observado por Barbosa (2003, p. 3). Da mesma forma, Almeida, Sousa e Tortola (2015, p. 2) enfatizam que a Modelagem Matemática lida com um "problema cuja origem está, de modo geral, associada a uma situação da realidade".

Entretanto, a complexidade emerge quando nos deparamos com a multiplicidade de interpretações do termo "realidade" (Tortola; Robim; Almeida, 2014). Os limites e fronteiras que delineiam o que constitui ou não a realidade, não são facilmente estabelecidos. Para Tortola (2016), a Modelagem Matemática pode ter realidades associadas a diferentes situações que são determinantes da natureza das situações-problema (por exemplo, cotidianas, não cotidianas, matemáticas, mundo cibernético, hipotéticas, etc.). Cifuentes e Negrelli (2011) argumentam que não se trata de uma única realidade, mas sim de diversas realidades. Bean (2001) ressalta a existência de múltiplos entendimentos da realidade. Além disso, a concepção de diferentes esferas da realidade é explorada por Berger e Luckmann (2008). Essas perspectivas múltiplas sobre a realidade sublinham a importância de uma abordagem crítica e reflexiva em relação ao conceito de "realidade" na Modelagem Matemática, uma vez que essas interpretações variadas podem influenciar significativamente a formulação e resolução dos problemas matemáticos.

Em uma tentativa de delimitar o que entende por realidade, Blum (2002, p. 152) utiliza a expressão *mundo real*, referindo-se a "tudo o que tem a ver com a natureza, a sociedade ou a cultura, incluindo atividades do dia a dia, assim como conteúdos da escola e da universidade ou disciplinas científicas e acadêmicas diferentes da Matemática". Dessa forma estariam incluídas situações de um mundo dado como efetivo em nossa vida diária, envolvendo situações cotidianas e não cotidianas.

Talvez essa seja a visão mais comum dos problemas em Modelagem Matemática. Há, inclusive, definições como a de Burak (1992, p. 62), que define modelagem a partir de estudo do cotidiano: "A Modelagem Matemática constitui-se em um conjunto de procedimentos cujo objetivo é construir um paralelo para tentar explicar, matematicamente, os fenômenos presentes no cotidiano do ser humano"

O termo "cotidiano" refere-se a fenômenos, situações ou problemas que estão integrados à vida diária das pessoas. São aspectos da realidade que fazem parte do cotidiano comum, envolvendo atividades, eventos ou questões que as pessoas encontram em suas rotinas habituais. Porém o cotidiano pode ser muito amplo, a depender da comunidade que o indivíduo está inserido e até mesmo da vivência de cada pessoa em sua individualidade.

São exemplos de usos de problemas no contexto de situações cotidianas as atividades apresentadas em: RE_CO_01; RE_CO_02; RE_CO_03; RE_CO_04; RE_CO_05; RE_CO_06; RE_CO_07; RE_CO_08; RE_CO_09; CC_CO_01.

Problemas associados a situações cotidianas ou problemas que tratam o mundo real, são aqueles que utilizam temas que estão presentes no cotidiano do aluno, por exemplo: quanto de tinta é utilizada para pintar de um muro do colégio (RE_CO_01) e qual o consumo de água de cada apartamento de um prédio onde não possui medidor individual (RE_CO_08). Podemos identificar a presença desta característica no momento que é mencionado nos artigos trechos como: “trabalhar matematicamente um tema que fosse confluente com a realidade dos estudantes” (RE_CO_02), tal atividade se trata da conscientização da utilização da água, pois no momento em que foi desenvolvido a atividade, toda a comunidade em torno do colégio, passava por um racionamento de água; “foi realizada uma roda de conversa com os participantes desse estudo com o objetivo de se repensar a questão do saneamento básico nas comunidades no qual a escola está inserida” (CC_CO_01), em que a comunidade em questão passa por um problema de falta de saneamento básico; foi destacado também por uma pesquisadora a importância de relacionar o conteúdo com o cotidiano do colégio “os alunos do 8° ano estavam começando a estudar áreas e sólidos geométricos e, foi estabelecido este tema como uma maneira de relacioná-lo diretamente com as propostas da escola” (RE_CO_01).

Já os problemas ditos “não cotidianos”, referem-se a fenômenos ou situações que podem não fazer parte da vivência imediata de uma pessoa e, nesse caso, podem não ser uma questão de interesse inicialmente, como por exemplo o lançamento de foguetes, que apesar de não ser algo que vivenciamos diariamente, ou mesmo que despertaria nosso interesse a ponto de nos fazer buscar informações a respeito, proposto no contexto de uma atividade de modelagem, pode nos provocar interesse para estudar a situação. São exemplos de usos de problemas no contexto de situações não cotidianas as atividades apresentadas em: RE_NC_01; RE_NC_02; RE_NC_03; RE_NC_04; CC_NC_01; CC_NC_02; CC_NC_03.

Problemas associados a situações não cotidianas são, por exemplo, o estudo feito pelas crianças, dos anos iniciais do Ensino Fundamental, do crescimento de um pé de feijão (CC_NC_02) e qual é o máximo de pessoas que podem caber em uma academia em que todos estão treinando (RE_NC_02). Podemos identificar a presença desta característica quando os alunos analisaram o quanto uma garrafa de água “soa” quando é preenchida com água gelada (CC_NC_03), que apesar de serem acontecimentos que ocorrem com uma certa frequência no dia a dia dos estudantes, não são situações que normalmente se analisa de uma forma matemática.

Conforme observado por Tortola (2016), a Modelagem Matemática abraça essa diversidade de realidades, com atividades que variam desde situações cotidianas até desafios não cotidianos. As atividades de situações cotidianas ancoram-se em temas do dia a dia dos alunos, enquanto as atividades de situações não cotidianas exploram conceitos que podem não ser parte de sua rotina. Essa ampla gama de abordagens na Modelagem Matemática ilustra sua versatilidade e adaptabilidade para abordar as diversas realidades que encontramos em nosso mundo complexo e em constante evolução.

2.4.2 PROBLEMAS QUE ENVOLVEM EXPERIMENTOS

A experimentação desempenha um papel crucial no contexto do ensino, destacando suas vantagens quando incorporada à sala de aula. Conforme Malheiro (2009), a experimentação se apresenta como uma ferramenta inseparável na interseção entre teoria e prática, capacitando os educadores a explorar uma ampla gama de conceitos por meio da visualização de fenômenos reais. Para o autor, a experimentação:

> [...] além de todas as contribuições positivas que pode dar para a aprendizagem significativa dos alunos, enfatiza o comportamento crítico e criativo dos estudantes diante do processo e dos resultados alcançados, como mais um dos inúmeros objetivos da experimentação (Malheiro, 2009, p. 66).

Em concordância com essa perspectiva, Laburú (2006) sustenta que um dos principais propósitos de uma atividade experimental reside na transformação de conceitos abstratos em experiências concretas, construídas a partir de um contexto desafiador e crítico.

Nesse cenário, é essencial que o contexto para a experimentação se origine na identificação de um problema que requer solução. Conforme indicado por Suart e Marcondes (2009), é fundamental priorizar o processo reflexivo e decisório ao determinar a sequência lógica a ser seguida durante uma atividade experimental. Isso implica evitar abordar situações que já possuam soluções óbvias e imediatas.

A inclusão de experimentos revela uma abordagem prática, estimulando a aprendizagem por meio da observação e aplicação de métodos científicos, porém foi constatado que dos artigos analisados, apenas 2 (10%) deles traziam algum experimento como atividade de Modelagem Matemática.

No contexto da Modelagem Matemática, podemos destacar Araki (2020, p. 37), que afirma que “a partir da experimentação, torna-se possível a obtenção de um modelo científico, uma criação cultural utilizada para a obtenção de ‘aproximações’ de uma teoria científica”.

Dessa forma, a Modelagem Matemática emerge como uma abordagem inovadora que, iniciando-se a partir do interesse dos envolvidos no processo, utiliza a experimentação para criar modelos científicos e obter aproximações de teorias.

São exemplos de usos de problemas que envolvem experimentos as atividades apresentadas em: RE_EX_01 e RE_EX_02.

O que podemos observar com os relatos que utilizaram este tipo de problema é o envolvimento mais ativo dos alunos, notado em afirmações como: "muitos alunos se espantaram quando concluíram que o elástico não sofreu variação do comprimento, um dos grupos chegou a trocar o elástico do dinamômetro por acreditar que estava danificado, mas não surtiu efeito" (RE_EX_01), e em "os alunos foram convidados a realizar o experimento, abandonando a bolinha de alturas entre 1 a 5 metros, com, no mínimo, 20 centímetros de intervalo entre cada altura, e mensurando o tempo" (RE_EX_02).

Dessa forma, a experimentação desempenha um papel fundamental no ensino, oferecendo vantagens significativas quando integrada à sala de aula. Como argumentado por diversos autores, incluindo Malheiro (2009), Laburú (2006), e Alves Filho (2000), a experimentação transcende a mera transmissão de conhecimento, fomentando a aprendizagem e promovendo habilidades críticas e criativas nos alunos. A ênfase na transformação de conceitos abstratos em experiências concretas, bem como na necessidade de criar contextos desafiadores e reflexivos, ilustra o potencial da experimentação como um recurso valioso na educação. Portanto, ao adotar uma abordagem que prioriza a experimentação bem estruturada e contextualmente relevante, os educadores podem alcançar um ambiente de aprendizado dinâmico e enriquecedor, capacitando os alunos a explorar e compreender o mundo que os cerca de maneira mais profunda e significativa.

2.4.3 PROBLEMAS NO CONTEXTO DE UM MUNDO CIBERNÉTICO

A compreensão da realidade pode ser concebida como uma realidade vivida, aquela que se desenrola na espacialidade e temporalidade do mundo-vida[7], constituindo o cenário natural onde todos os pensamentos, ações e percepções de cada indivíduo e dos diversos sujeitos que compartilham esse espaço ocorrem (Bicudo, 1999).

Contudo, Bicudo e Rosa (2010) provocam uma reflexão sobre essa perspectiva de realidade e mundo-vida, especialmente em relação à sua abrangência, ao considerar as

[7] Refere-se à interação dinâmica entre o mundo objetivamente percebido e a experiência subjetiva do indivíduo.

Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC). Com o advento das TIC, a discussão em torno do conceito de realidade se intensifica, resultando em termos descritivos como realidade do ciberespaço, realidade do mundo cibernético, realidade aumentada, realidade virtual, entre outras.

Bicudo e Rosa (2010) apresentam um conjunto de argumentos que visam lançar luz sobre a compreensão do mundo cibernético como uma das facetas da realidade. Nesse contexto, os autores enfatizam que a consideração do mundo cibernético como parte da realidade requer uma perspectiva diferente daquela defendida pela ciência moderna ao se referir à realidade física e objetiva. Esta última se relaciona ao espaço onde entidades mensuráveis (em termos espaciais e temporais) e manipuláveis em sua fisicalidade residem ou são colocadas. De acordo com esses autores, sob essa perspectiva, o mundo cibernético não pode ser categorizado como "real", uma vez que a dimensão espacial desse mundo se manifesta de maneira distintiva, não podendo ser acomodada dentro dos parâmetros cartesianos da física clássica.

Em última análise, a exploração das facetas da realidade, seja a realidade vivida no mundo-vida conforme discutida por Bicudo (1999) ou as novas realidades que emergem no contexto do mundo cibernético conforme debatido por Bicudo e Rosa (2010), reflete a contínua evolução da nossa compreensão do que é a realidade. O advento das Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) trouxe à tona discussões sobre novas dimensões da realidade, desafiando nossas concepções convencionais de espaço e tempo. A reflexão sobre essas perspectivas expande o escopo do que consideramos 'real', destacando a necessidade de adotar abordagens flexíveis e críticas para compreender as diferentes manifestações da realidade. A noção de realidade é dinâmica, e nossa capacidade de abraçar sua diversidade e complexidade é essencial para a evolução do nosso entendimento do mundo ao nosso redor.

A presença de problemas relacionados ao mundo cibernético indica uma adaptação contemporânea, explorando a influência da tecnologia nas atividades matemáticas e reconhecendo a relevância dessa temática para os estudantes imersos na era digital. Mas analisando essa temática, ainda estamos caminhando a passos lentos, pois nos anais do evento, apenas 1 artigo (5%) trouxe formas de utilizar a tecnologia para esse fim. O artigo consiste em uma comunicação científica e sendo assim não se tinha o desenvolvimento da atividade com alunos, mesmo assim foi possível verificar sua aplicabilidade por conta das possíveis respostas e direcionamentos que possa a ser utilizado em séries e turmas diferentes.

Para Dalla Vecchia (2012, p. 125) "Ao considerar o mundo cibernético como campo de abrangência para a investigação, pude repensar o modo como compreendia a própria MM [Modelagem Matemática], principalmente no que diz respeito às questões de aprendizagem quando esse espaço se faz presente". Este redimensionamento revelou nuances importantes, proporcionando uma visão mais aberta e contextualizada da Modelagem Matemática, evidenciando sua adaptação dinâmica e relevância para os estudantes, destacando a necessidade de uma abordagem flexível diante da crescente presença do mundo cibernético nas práticas educacionais.

São exemplos de usos de problemas no contexto de um mundo cibernético a atividade apresentada em: RE_MC_01.

Podemos notar essa outra "realidade" do mundo cibernético no trecho "Uma primeira discussão que pode ser feita com os alunos é sobre os preços dos itens, que podem ser negociados dentro de um intervalo estipulado pelo jogo" (CC_MC_01), onde o próprio jogo possui ferramentas em que deixa o jogador familiarizado com as suas mecânicas[8].

2.5 ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

No âmbito da Modelagem Matemática, a concepção de problemas cotidianos e não cotidianos assume relevância significativa. Problemas cotidianos, ligados à realidade imediata dos estudantes, foram identificados como uma abordagem que integra a Matemática com situações do dia a dia, proporcionando uma conexão mais palpável e relevante. Por outro lado, os problemas não cotidianos oferecem desafios que transcendem a esfera comum, contribuindo para a ampliação do repertório conceitual dos alunos.

A discussão sobre o papel do problema na Modelagem Matemática também destaca a importância de problemas relacionados ao mundo cibernético. Embora essa temática ainda esteja em estágios iniciais de exploração, ela reflete uma adaptação contemporânea, reconhecendo a influência da tecnologia nas atividades matemáticas. Contudo, observou-se que, dos artigos analisados, apenas um utilizou o contexto da tecnologia para esse fim.

Ao assumir que os problemas na Modelagem Matemática têm formas diferentes de serem interpretados pelos alunos, abre-se espaço para uma abordagem mais flexível e contextualizada. A variedade de tipos de problema reflete a capacidade da Modelagem Matemática de se adaptar a contextos distintos, proporcionando experiências educacionais diversificadas. Nesse sentido, compreender como os alunos *veem* e *interpretam* esses problemas

---

[8] A mecânica de um jogo eletrônico refere-se aos sistemas e regras que governam a interação do jogador com o ambiente virtual, os personagens, os objetos e os desafios apresentados dentro do jogo.

torna-se crucial, e a análise de conteúdo emerge como uma ferramenta valiosa para explorar essas percepções.

Ao analisar *como os problemas são utilizados em atividades de Modelagem Matemática na Educação Básica* através de uma perspectiva wittgensteiniana nos permite encarar e lidar com possíveis confusões conceituais, destacando que os significados dos termos utilizados em sala de aula estão intrinsecamente ligados aos seus usos específicos em contextos sociais. A filosofia de Wittgenstein nos oferece uma abordagem terapêutica que visa esclarecer como as práticas linguísticas moldam nossa compreensão dos conceitos matemáticos.

A utilização de problemas na Modelagem Matemática pode ser vista como uma forma de *jogo de linguagem* onde os alunos não apenas resolvem problemas, mas também participam de uma prática social que inclui a formulação de hipóteses, a experimentação e a interpretação de resultados. Essa abordagem permite uma investigação matemática onde os alunos, são incentivados a explorar diferentes caminhos e soluções, refletindo a pluralidade e flexibilidade que Wittgenstein atribui à linguagem.

Diante dessas considerações, o desafio futuro reside não apenas na identificação e formulação de problemas envolventes, mas também na compreensão mais aprofundada de como os alunos interpretam e respondem a esses problemas. Este estudo, ancorado na análise de conteúdo de Bardin, visa contribuir para essa compreensão, investigando a percepção dos estudantes da Educação Básica em relação aos problemas propostos em atividades de Modelagem Matemática descritas nos artigos da XI CNMEM.

A análise dos artigos da XI CNMEM revelou uma diversidade de uso de problemas na prática da Modelagem Matemática, destacando o papel crucial que a formulação e seleção de problemas desempenham nesse contexto. A filosofia de Wittgenstein, com sua ênfase no papel da linguagem na construção de significados, oferece uma lente valiosa para compreender como os problemas são abordados nesse processo.

Ao incorporar essa perspectiva filosófica e as análises dos artigos da XI CNMEM, nossa análise das atividades revela que os problemas utilizados são multifacetados e se adaptam às necessidades e contextos dos alunos. Os problemas que tratam situações do mundo real, problemas que envolvem experimentos e problemas no contexto de um mundo cibernético exemplificam como a Modelagem Matemática pode ser uma atividade dinâmica.

REFERÊNCIAS

ARAKI, P. H. H. **Atividades experimentais investigativas em contexto de aulas com Modelagem Matemática**: Uma análise semiótica. 2020. 177p. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Londrina, 2020.

ALMEIDA, L. W.; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na Educação Básica.** São Paulo: Contexto, 2012.

ALMEIDA, L. M. W.; SOUSA, B. N. P.; TORTOLA, E. The Formulation of Hypotheses in Mathematical Modelling Activities. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 23, n. 5, p. 66-93, set./out. 2021.

ALVES FILHO, J. P. **Atividades experimentais**: do método à prática construtivista. 2000. 448 f. Tese (Doutorado em Educação) – Centro de Ciências da Educação, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2000.

BARBOSA, J. C. Uma perspectiva de Modelagem Matemática. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 3., 2003, Piracicaba. **Anais**. Piracicaba: UNIMEP. 2003.

BARBOSA, J. C. Modelagem Matemática: O que é? Por que? Como? **Veritati**, n. 4, p. 73- 80, 2004.

BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. São Paulo: Edições 70. p. 229. 2011

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática:** uma nova estratégia. 2. ed. São Paulo: Contexto, 2004.

BEAN, D. O que é modelagem matemática? **Educação Matemática em Revista**, São Paulo, v. 8, n. 9-10, p. 49-57, 2001.

BERGER, P. L.; LUCKMANN, T. **A construção social da realidade:** tratado de sociologia do conhecimento. 28. ed. Petrópolis: Vozes, 2008.

BICUDO, M. A. V. (Org.). **Pesquisa em Educação Matemática**: Concepções & Perspectivas. São Paulo: Editora Unesp, 1999.

BICUDO, M. A. V.; ROSA, M. Educação matemática na realidade do ciberespaço — que aspectos ontológicos e científicos se apresentam? **Relime,** Cidade do México, v.13. n.1. 2010.

BLISS, K.; LIBERTINI, J. What is Mathematical Modeling? In: GARFUNKEL, S.; MONTGOMERY, M. GAIMME: **Guidelines for Assessment & Instruction in Mathematical Modeling Education.** COMAP, SIAM: Reston, Philadelphia, 2016.

BLUM, W. ICMI Study 14: Applications and modelling in mathematics education – Discussion document. **Educational Studies in Mathematics,** n. 51, p. 149–171 2002.

BURAK, D. **Modelagem matemática**: ações e interações no processo de ensino aprendizagem. 1992. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1992.

CARVALHO, E.; KOGA, M. F.; TORTOLA, E. Modelagem Matemática e Linguagem: a mudança de aspecto no ver gráficos como uma ideia matemática. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 14. **Anais**... Edição Virtual, SBEM, 2022.

CIFUENTES, J. C.; NEGRELLI, L. G. O processo de Modelagem Matemática e a discretização de modelos contínuos como recurso de criação didática. In: ALMEIDA, L. M. W.; ARAÚJO, J. L.; BISOGNIN, E. (Org.). **Práticas de Modelagem Matemática na Educação Matemática:** relato de experiência e propostas pedagógicas. Londrina: Eduel, 2011. p. 123 - 140.

DALLA VECCHIA, R. **A Modelagem Matemática e a Realidade do Mundo Cibernético.** 2012. 274 p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2012.

DANTE, L. R. **Formulação e resolução de problemas de matemática:** teoria e prática. São Paulo: Ática, 2009.

DOWNTON, A. Problem Posing: A Possible Pathway to Mathematical Modelling. In: KAISER, G.; STILLMAN, G. A.; BLUM, W.; BROWN, J. P. **Teaching Mathematical Modelling: Connecting to Research and Practice.** Londres: Springer. p. 527-536. 2015.

HIEBERT, J.; CARPENTER, T. P.; FENNEMA, E.; FUSON, K. C.; WEARNE, D.; MURRAY, H.; OLIVIER, A.; HUMAN, P. **Making sense**: teaching and learning mathematics with understanding. Portsmouth: Heinemann, 1997.

LABURÚ, C. E. Fundamentos para um experimento cativante. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, v. 23, n. 3, p. 382-404, 2006.

LESH, R.; DOERR, H. M. Foundations of a Models and Modeling Perspective on Mathematics Teaching, Learning, and Problem Solving. In: LESH, R.; DOERR, H. M. **Beyond Constructivism**. London: Routledge. p. 31, 2003.

MALHEIRO, J. M. S. **A resolução de problemas por intermédio de atividades experimentais investigativas relacionadas à Biologia**: uma análise das ações vivenciadas em um curso de férias em Oriximiná (PA). 2009. 314 f. Tese (Doutorado em Educação para a Ciência) – Faculdade de Ciências, Universidade Estadual "Júlio de Mesquita Filho", Bauru, 2009.

MORENO, A. R. Descrição Fenomenológica e Descrição Gramatical – ideias para uma pragmática filosófica. **Revista Olhar**, São Carlos, v. 4, n. 7, p. 93-139, 2003.

ROBIM, B. N. P. A. S.; TORTOLA, E.; ALMEIDA, L. M. W. O Fazer Modelagem Matemática: Uma Análise à Luz da Filosofia da Linguagem. In: ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12., Campo Mourão, 2014. **Anais**... Campo Mourão: SBEM-PR, 2014.

SILVA, K. A. P.; MALHEIROS, A. P. S. Entrevista: Um caminho para a prática de sala de aula e para a pesquisa sob o olhar da professora Lourdes Maria Werle de Almeida. **Revista Paranaense de Educação Matemática,** Campo Mourão, v. 10, n.23, p. 13-29, 2021.

SETTI, E. J. K.; WAIDEMAN, A. C.; VERTUAN, R. E. Percursos da Elaboração de um Problema no Contexto de uma Atividade de Modelagem Matemática. **Bolema**, Rio Claro, v. 35, n. 70, p. 959-980, 2021.

SOUSA, B. N. P. A.; TORTOLA, E. Modelos Matemáticos em Atividades de Modelagem Matemática: considerações a partir da filosofia da linguagem de Wittgenstein. **Rencima**, São Paulo, v.12, n.2, p. 1-25, 2021.

STILLMAN, G. PROBLEM FINDING AND PROBLEM POSING FOR MATHEMATICAL MODELLING. In: HOE, L. N; DAWN, N. K. E. **Mathematical modelling: from theory to practice**. Singapore: National Institute of Education, Nanyang Technological University. p. 41 - 56, 2015

TORTOLA, E.; ALMEIDA, L. M. W. de. Um olhar sobre os usos da linguagem por alunos dos anos iniciais do ensino fundamental em atividades de modelagem matemática. **Revista Paranaense De Educação Matemática**, Campo Mourão, n. 5, p. 83–105, 2016.

TORTOLA, E. **Configurações de modelagem matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental**. 2016. 304 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.

TORTOLA, E.; ROBIM, B. N. P. A. S.; ALMEIDA, L. M. W. A linguagem em atividades de modelagem matemática: caracterizações nos “três mundos da matemática”. **RENCIMA**, São Paulo, v. 5, n. 1, p. 1-20. 2014.

YUAN, M. S. Sobre la noción de interpretación en el “ver-como” de Ludwig Wittgenstein. **Ideas y Valores 77,** Bogotá, n. 179, p. 161-180. 2022.

WITTGENSTEIN, L. **Investigações Filosóficas**. 8. ed. Petrópolis: Vozes; Bragança Paulista: Editora Universitária São Francisco, 2013.

CAPÍTULO 3
UMA PERSPECTIVA WITTGENSTEINIANA SOBRE A INTERPRETAÇÃO DE PROBLEMAS DE MODELAGEM MATEMÁTICA

Resumo

Este estudo investiga como os alunos interpretam problemas de Modelagem Matemática. A pesquisa analisa, em uma perspectiva wittgensteiniana, a interpretação dos alunos sobre os problemas de Modelagem Matemática. Incorporando elementos da filosofia de Wittgenstein, explora-se como os alunos percebem e interpretam problemas, analisando três atividades de Modelagem Matemática: uma envolvendo experimentação, uma envolvendo mundo cibernético e uma envolvendo uma situação não cotidiana, de autoria dos alunos. A perspectiva filosófica oferece compreensões sobre a natureza da percepção e interpretação, que nos ajudam a entender como os alunos enfrentam situações reais, não essencialmente matemáticas, por meio da Matemática. Em nossa pesquisa, embora a perspectiva filosófica não seja aplicada diretamente nas aulas, ela é fundamental para nossa análise. Ela esclarece como os alunos interpretam problemas de Modelagem Matemática, revelando compreensões valiosas sobre como eles começam a perceber a matemática em seu cotidiano e a formalizar conceitos matemáticos a partir dessas atividades.

Palavras - Chaves: Modelagem Matemática. Educação Matemática. Filosofia de Wittgenstein. Interpretação de Problemas.

Abstract

This study investigates how students interpret Mathematical Modelling problems. The research analyzes, from a wittgensteinian perspective, students' interpretation on Mathematical Modelling problems. By incorporating elements of Wittgenstein's philosophy, it explores how students perceive and interpret problems, examining three Mathematical Modelling activities: one involving experimentation, one involving the cyber world, and one involving a non-routine situation authored by the students. The philosophical perspective provides insights into the nature of perception and interpretation, helping us understand how students deal with real-world situations, which are not inherently mathematical, through Mathematics. In our research, although the philosophical perspective is not directly applied in the classroom, it is fundamental to our analysis. It elucidates how students understand and interpret Mathematical Modelling problems, revealing valuable insights into how they begin to perceive mathematics in their everyday lives and formalize mathematical concepts through these activities.

Keywords: Mathematical Modelling; Mathematics Education; Wittgenstein's Philosophy; Problem Interpretation.

3.1 INTRODUÇÃO

A Modelagem Matemática, tanto como alternativa pedagógica quanto área de pesquisa, tem desempenhado um papel importante no desenvolvimento dos pensamentos crítico e criativo, que são demandas da formação matemática esperada para alunos na contemporaneidade (Maass *et al.*, 2022). Parte do pressuposto da abordagem de conceitos matemáticos a partir da investigação de situações-problema.

Como observa Stillman (2015), os problemas de modelagem não são simples exercícios encontrados em livros didáticos, eles surgem da necessidade de propor soluções a questões provenientes de fenômenos ou situações do mundo real, usando para isso uma lente matemática. Isso inclui uma abordagem que vai além da aplicação de fórmulas e algoritmos, demanda uma interpretação cuidadosa e contextualizada dos problemas sob investigação. Elfringhoff e

Schukajlow (2021) corroboram com essa visão, destacando a importância de problemas que envolvam contextos do mundo real para despertar o interesse dos alunos e promover a participação deles nas atividades.

No cerne dessa abordagem está a formulação e a resolução de problemas que emergem da problematização de fenômenos ou de situações reais, exigindo não apenas habilidades matemáticas, mas também uma compreensão das informações e características do contexto em questão. A forma com que os alunos interpretam esses problemas são, portanto, determinantes no uso e na relevância das soluções propostas. Almeida, Sousa e Tortola (2021) explicam que a modelagem envolve uma leitura, ou interpretação, idiossincrática, no sentido de que os rumos que a atividade pode tomar configuram-se conforme os conhecimentos e intenções dos sujeitos envolvidos.

Neste contexto, delineamos o objetivo deste capítulo: *compreender como os alunos interpretam problemas de Modelagem Matemática*. A pesquisa foi desenvolvida com três turmas do 1º ano do Ensino Médio de um colégio público na cidade de Londrina - PR, durante as aulas de Matemática ministradas pelo autor. Neste capítulo analisamos três atividades de Modelagem Matemática sob uma perspectiva wittgensteiniana, dentre as quais duas tiveram a problemática escolhida pelos pesquisadores e uma pelos alunos. A abordagem wittgensteiniana oferece uma lente terapêutica no sentido de lançar sobre a interpretação de problemas em Modelagem Matemática um olhar analítico, a fim de compreender os *modos de ver* dos alunos e como esses implicam nas interpretações que são empreendidas nas atividades analisadas.

3.2 FILOSOFIA DA LINGUAGEM NA PERSPECTIVA DE WITTGENSTEIN

Ludwig Wittgenstein (1889-1951) foi um filósofo austríaco que dedicou parte de suas reflexões à compreensão de como as pessoas atribuem significado aos fatos do mundo. Para o autor, a linguagem desempenha um papel central na significação da realidade e, ao questionar a concepção referencial, na qual o significado das palavras repousa sobre os objetos que representam, Wittgenstein estruturou a ideia de jogos de linguagem (Wittgenstein, 2013) que indica que os significados das palavras são constituídos conforme seus usos na linguagem, no interior das formas de vida (Wittgenstein, 2013). A linguagem, nessa perspectiva, é vista como uma atividade, cujos significados passam de estáticos para dinâmicos, e a interpretação que dá condições para a significação se dá de acordo com os modos de ver em cada contexto (Wittgenstein, 2013).

A noção de jogos de linguagem é discutida por Wittgenstein principalmente em sua obra Investigações Filosóficas, e se refere a formas específicas de uso da linguagem em determinados contextos. É no uso da linguagem que os significados são constituídos (Wittgenstein, 2013). De acordo com Ruy e Donat (2008), os significados das sentenças ou declarações dependem das situações ou contextos em que são proferidas, e diferentes reações são compreensíveis de acordo com o que Wittgenstein chama de forma de vida (Wittgenstein, 2013). Isso sugere que a interpretação de uma sentença ou expressão linguística está intrinsecamente ligada aos hábitos, costumes e crenças de um determinado grupo ou comunidade que regulam o jogo de linguagem. Ou seja, são os acordos historicamente e socialmente estabelecidos que definem os usos possíveis (ou não) da linguagem, denotando o papel fundamental dos jogos de linguagem na compreensão e na constituição de uma interpretação coerente.

No âmbito das formas de vida, portanto, são determinados os *modos de ver*, constituídos por hábitos, costumes, formas de agir e conhecimentos socialmente compartilhados que sugerem como interpretar tanto o dito quanto o não dito. Por exemplo, no contexto de uma sala de cirurgia, a palavra “bisturi” não precisa de explicações adicionais; ao ser proferida, o assistente sabe que deve entregar o bisturi ao cirurgião (Tortola, 2016). Esse entendimento revela como a linguagem está profundamente enraizada nas práticas sociais e nos contextos culturais. Palavras proferidas em diferentes contextos conduzem a significados distintos, mostrando que o significado das palavras não é fixo, mas moldado pelas circunstâncias em que são utilizadas. Dessa forma, os *modos de ver* são formados pela nossa imersão em formas de vida compartilhadas, nas quais a interpretação e a compreensão são continuamente moldadas pelo contexto e pela interação social. Veja, por exemplo, uma criança brincando com uma caixa de papelão, onde vemos uma caixa, a criança vê um foguete, um castelo, ou o que mais ela desejar, como fruto de sua imaginação, pois ela vê a mesma caixa que vemos como uma possibilidade de brincar.

Wittgenstein, ao discutir os *modos de ver*, ressalta a importância do contexto social e cultural em que estamos imersos. Nossas formas de vida, como destacam Silva, Junior, Costa e Dias (2022), moldam nossos *modos de ver* e influenciam diretamente nossas interpretações do mundo. Por exemplo, em diferentes culturas ou comunidades linguísticas, certos *modos de ver* podem ser privilegiados ou valorizados, levando a interpretações distintas dos mesmos eventos ou fenômenos. Essa dinâmica mostra como os *modos de ver* não são apenas produtos individuais, mas são construídos e compartilhados dentro de contextos sociais mais amplos.

Além disso, Wittgenstein (2013) enfatiza que os *modos de ver* podem se tornar enraizados e automáticos, dificultando a reflexão crítica sobre a sua natureza. Para o autor, muitas vezes nos fixamos em um determinado *modo de ver* sem questionar a sua origem ou validade, o que pode limitar a nossa capacidade de reconhecer outras perspectivas ou abordagens alternativas. Essa tendência à fixidez nos *modos de ver* pode obscurecer nossa compreensão, como os processos anímicos e o behaviorismo, nos impedindo de considerar novas possibilidades ou interpretações.

Dessa forma, a análise dos *modos de ver* não apenas nos permite entender como interpretamos o mundo, mas também nos convida a examinar criticamente as bases e os pressupostos subjacentes às nossas interpretações. Ao reconhecer a influência dos jogos de linguagem e das formas de vida em nossos *modos de ver*, podemos desenvolver uma compreensão mais reflexiva e contextualizada das questões e conceituais que enfrentamos.

A mudança de aspecto, outro conceito fundamental na filosofia de Wittgenstein, envolve a capacidade de *ver* uma situação de diferentes maneiras, alterando nossa perspectiva ou enfoque. Isso implica em uma revisão das interpretações existentes e na adoção de novos *modos de ver*. Como mencionado por Wittgenstein (2003), o passo decisivo no espetáculo de prestidigitação muitas vezes nos parece inocente, mas é esse passo que nos leva a fixar um determinado *modo de ver*. A mudança de aspecto desafia nossas concepções estabelecidas e nos convida a considerar novas perspectivas, enriquecendo nossa compreensão do mundo.

No âmbito da Modelagem Matemática, a filosofia da linguagem, na perspectiva de Ludwig Wittgenstein, oferece uma perspectiva para abordar os desafios e as complexidades associadas à interpretação de problemas. Ao reconhecer a influência dos jogos de linguagem, dos *modos de ver* e das formas de vida na construção de significados e na compreensão do mundo, os educadores e pesquisadores podem explorar novas abordagens para promover uma compreensão mais reflexiva e contextualizada dos problemas de Modelagem Matemática. Os estudantes, inicialmente, podem interpretar os problemas de uma determinada maneira, mas, através da atividade, são desafiados a adotar novos *modos de ver*, enriquecendo assim a sua compreensão e abordagem dos problemas por meio da Matemática. A mudança de aspecto, conforme Wittgenstein, oferece uma ferramenta para revisar interpretações existentes e adotar novos modos de ver, ampliando o repertório interpretativo dos estudantes e promovendo uma compreensão mais profunda e holística dos desafios e possibilidades inerentes à Modelagem Matemática.

3.3 MODO DE VER PROBLEMAS EM ATIVIDADES DE MODELAGEM

A Modelagem no âmbito da Educação Matemática é apontada como uma alternativa pedagógica que visa o uso da Matemática para abordar questões extramatemáticas (Almeida; Silva; Vertuan, 2012; Niss; Blum, 2020), preferencialmente questões de interesse dos alunos (Hermínio; Borba, 2010), os quais podem participar diretamente na escolha dos temas a serem investigados. Para Almeida e Brito (2005, p. 495), “as atividades de modelagem assumem para os estudantes sentido e significado que provavelmente diferem daqueles das aulas convencionais”.

Em aulas convencionais, os problemas, embora com um caráter desafiador, são geralmente propostos imediatamente após a explicação do conteúdo necessário para a sua resolução, com as informações cuidadosamente pensadas e disponibilizadas, enquanto em atividades de Modelagem Matemática, um contexto extramatemático é apresentado e o problema é definido a partir de uma situação condizente com a realidade a que pertence. Dessa forma, podem inicialmente parecer confusos, mal definidos e com informações imprecisas ou insuficientes para a resolução (Niss; Blum, 2020). Dessa forma, uma busca por informações é necessária, assim como discussões para definir os termos em que o problema será resolvido, sendo necessária a realização de simplificações, a definição de hipóteses e o estabelecimento de condições para a resolução (Bean, 2001; Pollak, 2015).

Nesse contexto, a problematização e a interpretação de problemas desempenham um papel fundamental no desenvolvimento de atividades de modelagem, sendo determinantes no engajamento dos alunos no uso da Matemática para a interpretação dos problemas. Segundo Elfringhoff e Schukajlow (2021), para despertar o interesse dos alunos, os problemas devem estar ancorados em contextos do mundo real, pois tal conexão possibilita que eles estabeleçam associações com experiências próprias, o que pode tornar a investigação do tema mais atrativa e cativante.

Sob uma perspectiva wittgensteiniana, entendemos que a atividade de Modelagem Matemática acontece quando ocorre uma mudança de aspecto no modo como os alunos veem a situação apresentada para investigação, quando eles passam a ver um problema pertencente a uma realidade extramatemática como um problema matemático, como se uma roupagem matemática lhe fosse atribuída (Pollak, 2015) e, nesse contexto, métodos e conceitos matemáticos podem ser empregados em sua resolução (Stillman, 2015).

Ao reconhecer o uso da Matemática em contextos extramatemáticos, ou do mundo real, como vários autores apontam (Blum, Galbraith, Henn, & Niss, 2007; Noss, Healy & Hoyles, 1997; Ponte, 2010), os alunos ampliam seus *modos de ver* o mundo, a Matemática e a relação entre ambos, passando a enxergar problemas de origens diversas sob uma ótica matemática, ou seja, passam a ver a Matemática como uma possibilidade para analisar tais problemas, sinalizando usos possíveis da Matemática para além da sala de aula, uma questão delicada no que se refere ao papel da Matemática escolar, muitas vezes vista como exclusivamente para fins educacionais.

Justamente por tratar de uma abordagem matemática diferente das quais os alunos estão acostumados, essa *mudança de aspecto* pode gerar certa insegurança, hesitação e confusão na resolução de problemas, uma vez que trabalhar com atividades de modelagem envolve um modo diferente de ver a Matemática, de usá-la, de agir em sala de aula e na sua aplicação, requer, portanto, uma atitude diferente até mesmo do professor, que passa a desempenhar um papel de orientador (Almeida; Silva; Vertuan, 2012), no qual para além de abordar aspectos teóricos e técnicos da Matemática, precisa viabilizar discussões e reflexões que apontam a Matemática como uma ferramenta poderosa e aplicável em uma variedade de contextos, contribuindo com a análise e compreensão de questões de naturezas diversas, sejam elas do âmbito social, financeiro, político, cultural etc. (Niss; Blum, 2020), mostrando sua utilidade e relevância para os alunos na problematização e interpretação de problemas associados a contextos extramatemáticos, isto é, é papel do professor, conforme explicam Tortola, Seki e Almeida (2022), introduzir os alunos a um novo jogo de linguagem, a um outro modo de usar a Matemática.

3.4 ASPECTOS METODOLÓGICOS E CONTEXTO DA PESQUISA

Com o intuito de *compreender como os alunos interpretam problemas de Modelagem Matemática*, três atividades de Modelagem Matemática, foram desenvolvidas nove atividades de Modelagem Matemática com três turmas de 1º ano do Ensino Médio de um colégio público na cidade de Londrina - PR, durante as aulas de Matemática do ano de 2022 ministradas pelo primeiro autor, três dessas atividades serão analisadas neste capítulo. Duas delas tiveram temáticas escolhidas pelos pesquisadores, com base na revisão bibliográfica apresentada no capítulo anterior, e uma delas teve temática escolhida pelos próprios alunos. Cada atividade de Modelagem Matemática teve duração de quatro horas-aula.

As atividades analisadas não representaram o primeiro contato dos alunos com a Modelagem Matemática. No início do ano letivo, o autor desenvolveu uma atividade introdutória de Modelagem Matemática para familiarizar os alunos com a metodologia. Esse primeiro contato proporcionou uma base sobre o processo e os objetivos da Modelagem Matemática, preparando os alunos para as atividades subsequentes.

As temáticas das atividades foram definidas de modo a relacionar a Matemática com situações familiares aos alunos. A primeira atividade, "Até onde a água pode chegar?", foi desenvolvida com as três turmas participantes da pesquisa, abordou uma experimentação com algo comum que ocorre no seu cotidiano. A segunda atividade, "Qual é a colheita mais rentável?", também trabalhada com as três turmas, envolveu uma análise matemática de um jogo popular entre os alunos, relacionando-se ao mundo cibernético. A terceira atividade, "Qual a altura do mastro da bandeira?", foi desenvolvida a partir de uma observação dos próprios alunos, que, ao se questionarem sobre a altura do mastro da bandeira no pátio do colégio, decidiram investigar matematicamente a resposta. As duas primeiras atividades foram propostas a partir de folhas impressas com as informações e o problema, e em seguida entregues aos alunos para facilitar a inteiração e a compreensão dos temas propostos.

Os dados foram produzidos através de gravações de áudio, feitas pelos celulares dos alunos e do professor, permitindo o registro das discussões durante as atividades. Imagens também foram registradas por meio de fotografias, em momentos considerados estratégicos pelo professor, assim como anotações em um diário de campo foram feitas durante e após o desenvolvimento de cada atividade. Além disso, também recolhemos as produções escritas dos alunos, que apresentam as resoluções dos alunos permitindo conhecer as estratégias e raciocínios empreendidos.

Para analisar as atividades adotamos uma perspectiva wittgensteiniana, pautada numa abordagem filosófica da linguagem, na qual a linguagem é entendida como uma atividade, cuja significação se dá a partir dos usos das palavras, símbolos, sentenças. Desse modo, assumimos que para compreender a interpretação dos problemas em Modelagem Matemática, precisamos olhar para os usos da linguagem pelos alunos nesse contexto. Ou seja, estamos interessados nas discussões empreendidas a partir do problema, em como os alunos encaminharam as resoluções e comunicaram os resultados. Em termos gerais, em como eles viram a Matemática e a usaram em uma situação não essencialmente matemática.

Trata-se, portanto, de uma abordagem qualitativa, cujo interesse reside em questões que se mostram presentes no cotidiano da sala de aula, à qual esta pesquisa está relacionada e onde atuam os pesquisadores. É uma pesquisa que se debruça sobre a complexidade que envolve uma realidade dinâmica, inextricável, constituída por práticas educacionais e associadas a elas (Lüdke; André, 1986, p. 7), cuja questão emerge de "uma curiosidade investigativa despertada por problemas revelados pela prática educacional".

Dessa forma, a análise incide sobre os *modos de ver* dos alunos a respeito dos problemas de atividades de Modelagem Matemática, particularmente em como se dá a mudança de aspecto que caracteriza a matematização da situação, na qual o problema passa a ser visto como um problema matemático e cujos resultados podem ser interpretados inclusive no contexto que lhe deu origem. Três foram os contextos investigados: experimentação, mundo cibernético e mundo real, seja por meio de situações cotidianas ou não. A seguir nos debruçamos sobre cada um deles. Vale ressaltar que a atividade que trata do mundo real, a qual foi desenvolvida e aplicada pelos autores, já foi objeto de análise no artigo “O que um problema de Modelagem tem a oferecer para as aulas de Matemática? Uma análise à luz da linguagem” (Koga; Tortola, 2022), apresentado e publicado nos anais do IX Encontro Paranaense de Modelagem na Educação Matemática (EPMEM), sendo a primeira atividade que as turmas trabalharam com a Modelagem Matemática e, por isso, foi excluída desta investigação.

3.4.1 ANÁLISE DA ATIVIDADE DE EXPERIMENTAÇÃO

Para a apresentação da atividade “Até onde a água pode chegar?”, foi promovida uma discussão sobre os problemas comuns relacionados à pouca água que sai do chuveiro, ou, inversamente, a pressão excessiva, especialmente em apartamentos. Essa discussão focou na relação entre a distância da caixa d’água e o chuveiro, e como isso afeta a pressão e o fluxo da água, a fim de contextualizar o problema de investigação: É possível determinar a pressão da água do chuveiro a partir do alcance da água observado no experimento em determinado ponto? Em seguida, foram disponibilizadas algumas informações iniciais, como esquemas de sistemas de encanamento e dados de pressão da água em diferentes alturas, a partir dos quais cada grupo começou a se organizar para a realização da atividade, como mostra a Figura 2.

Figura 2: Atividade de experimentação

Até onde a água pode chegar?

Um chuveiro elétrico tem algumas condições para o seu bom funcionamento, uma delas diz respeito à altura do chuveiro em relação à caixa d’água.

Se a distância entre o chuveiro e a caixa d’água for muito pequena, a vazão da água também será, a ponto de nem mesmo ligar o chuveiro. Por outro lado, se a distância entre eles for muito grande – no caso de prédios, por exemplo –, a vazão da água poderá ser tão forte, que o chuveiro não conseguirá esquentar a água.

Para a instalação de um chuveiro elétrico recomenda-se que se observe a sua pressão de funcionamento. A imagem a seguir apresenta um recorte de um manual de instruções de instalação de um determinado fabricante de chuveiro, que apresenta as pressões de funcionamento máxima e mínima para dois modelos de chuveiro.

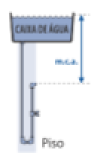
2 - CARACTERÍSTICAS TÉCNICAS

Especificação		Grau de proteção: IP 24	
Modelo		Duchas Advanced e Advanced Eletrônica	Duchas Advanced Turbo e Advanced Turbo Eletrônica
Pressão de Funcionamento	Mínima	10 kPa (1 m.c.a.)	7 kPa (0,7 m.c.a.)
	Máxima	400 kPa (40 m.c.a.)	40 kPa (4 m.c.a.)

Fonte: Manual de Instruções de Instalação e Garantia - Lorenzetti

Mas o que é m.c.a.?

m.c.a., ou metros de coluna d’água, é uma unidade de medida utilizada para mensurar a pressão. É frequentemente usada em hidráulica e comumente aplicada a chuveiros e torneiras. Exemplificando: 1 m.c.a. equivale à pressão que uma quantidade de água (coluna) exerce a 1 metro de altura.



Fonte: Dos autores

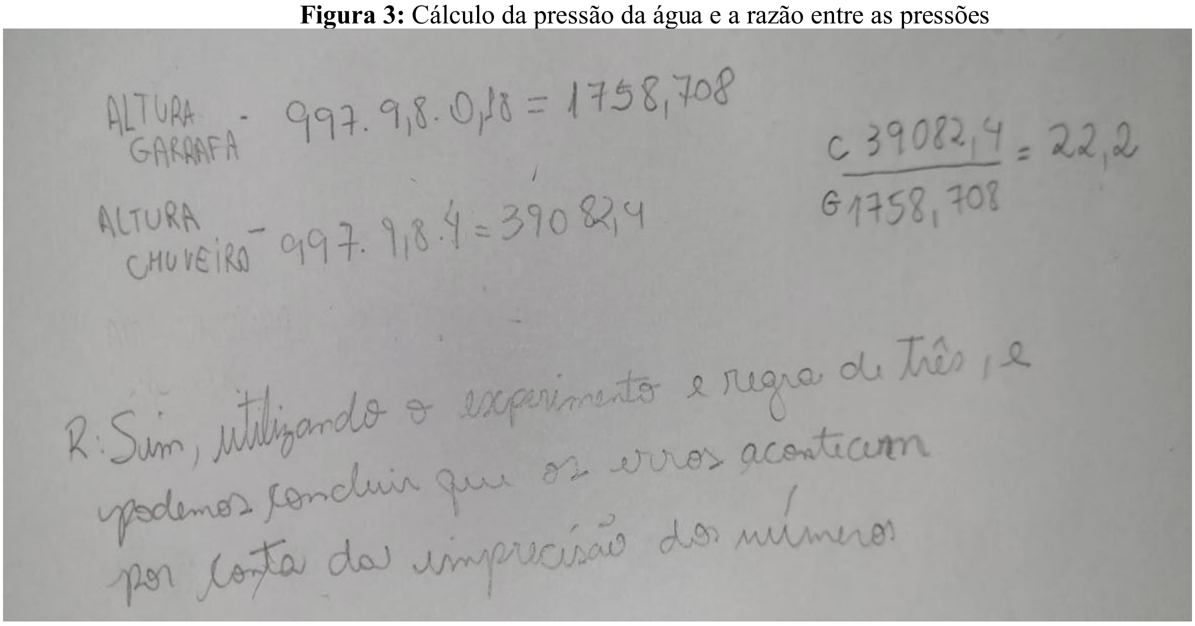
Como não se tratava da primeira experiência da turma com uma atividade de modelagem, os alunos já tinham alguma noção de por onde começar, eles iniciaram realizando alguns cálculos preliminares sobre a pressão da água e a altura da caixa d'água em relação aos pontos de uso antes de iniciar a experimentação prática. Isso envolveu medir alturas, calcular pressões e simular diferentes cenários, permitindo uma melhor preparação para os testes e observações que seriam conduzidos em seguida.

Os alunos fizeram dois furos em uma garrafa de 2 litros, um a 5 cm e outro a 14 cm da boca da garrafa. Eles encheram a garrafa com água e observaram a vazão da água de ambos os furos para entender a diferença na pressão exercida quando há mais ou menos água na garrafa. Essa observação prática ajudou-os a visualizar como a pressão da água varia de acordo com a altura.

Em seguida, os estudantes realizaram cálculos utilizando a fórmula "P = d.g.h" (em que P é a pressão, d é a densidade da água, 997 kg/m³, g é a aceleração da gravidade, 9,8 m/s² e h é a altura da coluna de água, 0,18 m para a garrafa e 4 m para o chuveiro) para comparar as pressões nos diferentes furos da garrafa. Eles aplicaram o mesmo conceito para entender a pressão da água no chuveiro em suas casas, considerando a altura da caixa d'água.

Quando os alunos perceberam que para solucionar o problema eles poderiam utilizar conteúdos com os quais já tiveram contato, como razões e proporções, os grupos começaram a vislumbrar possíveis caminhos que poderiam auxiliá-los a responder o problema. A Figura 3 apresenta os passos seguidos, bem como a resposta do problema.

Figura 3: Cálculo da pressão da água e a razão entre as pressões



ALTURA GARRAFA - 997.9,8.0,18 = 1758,708

ALTURA CHUVEIRO - 997.9,8.4 = 39082,4

$\frac{C\ 39082,4}{G\ 1758,708} = 22,2$

R: Sim, utilizando o experimento e regra de três, e podemos concluir que os erros acontecem por conta das imprecisão dos números

Fonte: Dos autores

Neste processo, o professor teve a oportunidade de explicar aos alunos que, em um problema, mais importante do que obter as respostas, são as interpretações a partir da análise de situações reais e os processos que se formulam como um problema matemático. Downton (2013) explica que em um problema, mais importante que se obter as respostas, são as interpretações a partir da análise de situações reais e os processos que formulam como um problema matemático. Essa discussão se mostrou necessária, pois, como apontam Elfringhoff e Schukajlow (2021, p. 14), “neste tipo de atividade conseguimos oferecer aos alunos a chance de desenvolver maior valor de utilidade e maior interesse”.

A relação com os aspectos a filosofia da linguagem de Wittgenstein pode ser vista na forma como os estudantes passaram a interpretar e compreender o problema. Segundo Wittgenstein (2013), a linguagem e o contexto são cruciais para entender o significado das palavras e das situações. Nessa atividade, os alunos utilizaram conceitos matemáticos que já conheciam, como razões e proporções, e os aplicaram a um problema do mundo real, fazendo a conexão entre a linguagem matemática e o contexto prático. Esse uso é um exemplo do conceito de “jogos de linguagem” de Wittgenstein, onde o significado é derivado do uso em contextos específicos. Além disso, ao discutir a fórmula da pressão de fluidos, os estudantes estavam mudando seu *modo de ver* o problema, um conceito wittgensteiniano que envolve a percepção e a interpretação de uma situação de diferentes maneiras. Eles passaram a *ver* a atividade cotidiana de tomar banho como um problema matemático plausível de ser resolvido, o que representa uma mudança de aspecto.

Essa mudança de perspectiva é fundamental na filosofia de linguagem de Wittgenstein, pois revela como a compreensão e a interpretação estão profundamente ligadas ao contexto e ao uso da linguagem. Assim, ao utilizar razões e proporções e buscar a fórmula da pressão de fluidos, os alunos mostraram que a matemática é uma linguagem que pode ser aplicada a situações do cotidiano.

Eles compreenderam que a pressão que o chuveiro recebia em suas casas era aproximadamente 22 vezes maior do que a pressão na garrafa, conectando os conteúdos aprendidos com a vida cotidiana. Esse processo destaca a relevância da matemática em resolver problemas concretos e exemplifica como os jogos de linguagem e os *modos de ver* de Wittgenstein podem ser aplicados na educação matemática para enriquecer a compreensão dos estudantes.

3.4.2 ANÁLISE DA ATIVIDADE DE MUNDO CIBERNÉTICO

Para a apresentação da atividade "Qual é a colheita mais rentável?", foi promovida uma discussão sobre um jogo popular entre os alunos (Hay Day[9]), no qual eles estavam sempre falando e jogando. Observando o interesse deles, resolvemos trazer uma abordagem matemática para o jogo, contextualizando o problema de investigação: Qual é a plantação que nos dará mais lucro no início do jogo? Em seguida, foram disponibilizadas algumas informações iniciais, como as regras do jogo, dados sobre diferentes tipos de colheitas e suas respectivas rendas e custos, a partir dos quais cada grupo começou a se organizar para a realização da atividade, como mostra a Figura 4.

Figura 4: Atividade envolvendo mundo cibernético

Qual é a colheita mais rentável?

Você conhece o *Hay Day*? Trata-se de um jogo para dispositivos móveis com a temática de fazenda, no qual o jogador tem como objetivo expandir a sua fazenda e deixá-la cada vez mais produtiva. Uma das dinâmicas do jogo é a economia, pois os jogadores precisam de moedas para expandir os seus negócios e a forma mais prática de conseguir moedas é vendendo itens para outros jogadores através da loja que o jogo disponibiliza.

Cada alimento produzido no jogo tem o seu tempo de cultivo e o seu preço no mercado da loja indicado na tabela abaixo.

Alimento	Tempo de cultivo (min)	Preço de mercado (moeda do jogo)
Trigo	2	1
Milho	5	2
Cenoura	10	2
Soja	20	3
Cana de açúcar	30	4

Fonte: Dos autores

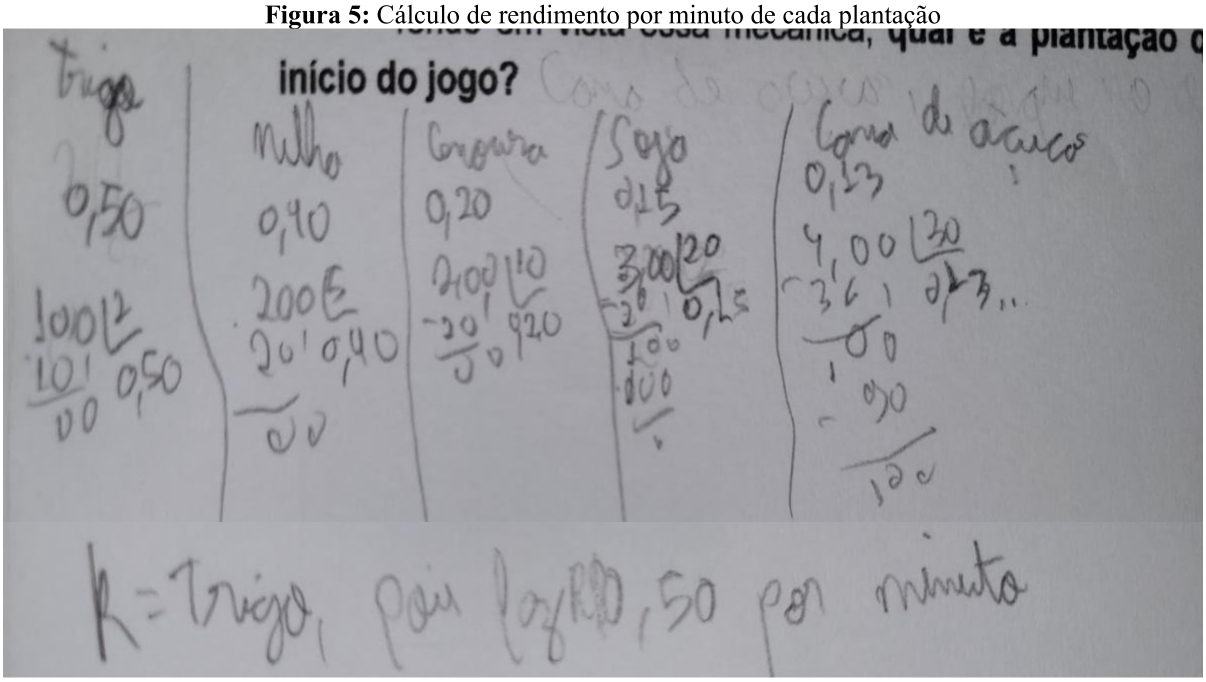
Os alunos começaram a se questionar como poderiam trazer uma "resposta" que eles já sabiam para um contexto matemático. Isso envolveu pensar em estratégias para calcular os lucros e os custos de cada colheita, adaptando seu conhecimento prévio do jogo para um formato mais quantitativo. Essa transição foi desafiadora, mas também estimulante, pois os alunos perceberam que poderiam aplicar conceitos matemáticos familiares a situações do jogo o tornando ainda mais envolvente e educativo.

Para solucionar isso, alguns alunos começaram a pensar no rendimento de cada item por minuto, enquanto outros consideraram o rendimento por hora, assumindo que o plantio seria contínuo. Isso significava que assim que uma colheita estivesse pronta para ser colhida, seria imediatamente replantada para maximizar o lucro.

[9] Hay Day é um jogo de simulação de fazenda desenvolvido pela Supercell, lançado em 2012. Disponível para dispositivos iOS e Android, o jogo permite que os jogadores administrem uma fazenda virtual, plantando e colhendo culturas, criando animais, produzindo bens e vendendo-os no mercado. O objetivo é expandir e melhorar a fazenda, completando tarefas e ganhando moedas e experiência.

Após dividirem o quanto cada alimento rendia pelo tempo de cultivo, os alunos descobriram que, o trigo era a colheita mais lucrativa. Eles calcularam que o rendimento do trigo era de 0,5 moedas por minuto, enquanto o milho rendia 0,4 moedas por minuto, a cenoura 0,2, a soja 0,15 e a cana-de-açúcar 0,13 moedas por minuto. Através dessa análise, os alunos puderam identificar que o trigo proporcionava o maior retorno financeiro no jogo, reforçando a importância de usar conceitos matemáticos para tomar decisões estratégicas, como mostra a figura 5.

Figura 5: Cálculo de rendimento por minuto de cada plantação



Fonte: Dos autores

Essa atividade permitiu aos alunos aplicar matemática prática ao jogo que já conheciam e gostavam, ajudando-os a *ver* a utilidade da matemática em contextos reais e lúdicos, ao mesmo tempo que desenvolviam habilidades de análise e planejamento. A aplicação da filosofia da linguagem de Wittgenstein pode ser observada de várias maneiras nesse contexto.

Wittgenstein introduz o conceito de "jogos de linguagem" para mostrar que o significado das palavras está em seu uso dentro de uma forma de vida específica. Na atividade, os alunos estavam inicialmente envolvidos em um jogo não matemático. Ao introduzir a questão da rentabilidade das colheitas, o professor trouxe um novo "jogo de linguagem" que envolvia conceitos matemáticos de rendimento e lucro. Os alunos tiveram que transitar entre esses jogos de linguagem: do jogo virtual, onde os rendimentos são parte da mecânica do jogo, para o jogo matemático, onde esses rendimentos são calculados e comparados.

A transição dos alunos entre diferentes *modos de ver* é fundamental na filosofia de Wittgenstein. Inicialmente, os alunos viam o jogo apenas como uma atividade lúdica. Ao serem desafiados a calcular a rentabilidade das colheitas, eles adotaram um novo modo de ver, onde o jogo também se tornou um problema matemático. Esse novo modo de *ver* exigiu que os alunos aplicassem conceitos matemáticos que já conheciam a um contexto familiar, mas de uma maneira nova. Esse processo de mudança de perspectiva é central para a compreensão de como a linguagem e a interpretação estão interligadas.

Os *modos de ver* de Wittgenstein estão intrinsecamente ligados às “formas de vida”, que são os contextos culturais e sociais em que a linguagem é utilizada. Os alunos, ao discutir e calcular a rentabilidade das colheitas, estavam aplicando a linguagem matemática a um contexto de jogo familiar. Esse uso mostra como a linguagem matemática faz sentido dentro de sua forma de vida, que, nesse caso, incluía tanto o contexto do jogo quanto a sala de aula. A forma como os alunos discutiram e resolveram o problema reflete a interação entre diferentes formas de vida: a escolar e a do jogo.

A mudança de aspecto ocorre quando se vê algo familiar de uma nova maneira. Inicialmente, os alunos viam as colheitas do jogo apenas como uma parte do jogo. Ao calcular a rentabilidade, eles começaram a *ver* essas colheitas como unidades de um problema matemático. Esse novo aspecto permitiu-lhes aplicar e reforçar suas habilidades matemáticas em um contexto familiar, mostrando o uso prático da matemática.

Dessa forma, essa atividade exemplifica como os conceitos de jogos de linguagem, *modos de ver*, formas de vida e mudança de aspecto de Wittgenstein podem ser aplicados na educação matemática. Ao utilizar um contexto familiar e interessante para os alunos, a atividade ajudou a transitar entre diferentes jogos de linguagem e *modos de ver*, promovendo uma compreensão mais profunda e prática da matemática. Essa abordagem não só facilita o aprendizado, mas também mostra a relevância e o uso da matemática no mundo real, conectando as formas de vida dos alunos dentro e fora da sala de aula.

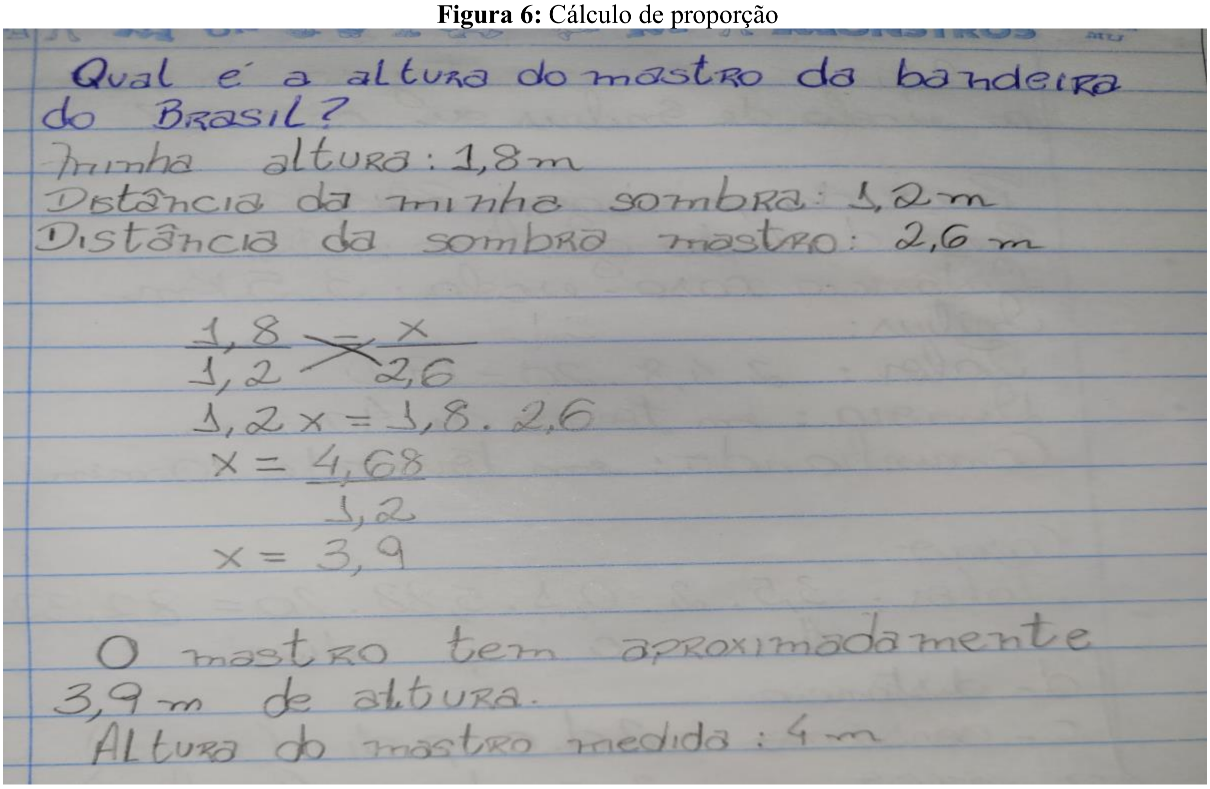
3.4.3 ANÁLISE DA ATIVIDADE DE DESENVOLVIMENTO DOS ALUNOS

A atividade “Qual a altura do mastro da bandeira?” foi desenvolvida completamente pelos próprios alunos, sem intervenção inicial do professor. Os alunos tiveram autonomia para explorar suas áreas de interesse e definir problemas matemáticos relevantes para eles. Durante o intervalo, um estudante do grupo se perguntou sobre o tamanho do mastro do colégio, o que despertou o interesse dos colegas. Esse questionamento levou ao desenvolvimento do problema de investigação: Qual é a altura do mastro da bandeira do colégio? Motivados pela curiosidade, os alunos começaram a se organizar para realizar a atividade, discutindo métodos e estratégias para medir a altura do mastro.

Os alunos começaram a se questionar como poderiam trazer uma “resposta” para essa questão aparentemente simples utilizando conceitos matemáticos. Eles decidiram usar a proporção entre o tamanho de um aluno e as sombras dele e do mastro para calcular a altura. Essa abordagem envolveu medir a sombra do aluno e a sombra do mastro, comparando as duas para encontrar uma relação proporcional. A transição do questionamento inicial para a formulação matemática foi desafiadora, mas também estimulante, pois os alunos perceberam que poderiam aplicar conceitos matemáticos familiares a um problema do cotidiano, possibilitando aprender matemática.

Para resolver essa questão, os estudantes refletiram sobre como poderiam abordar o problema e lembraram das aulas de matemática onde aprenderam sobre proporção. Decidiram então aplicar esse conhecimento à situação. Utilizando o artifício da razão e proporção, os estudantes aplicaram o Teorema de Tales, mesmo sem terem estudado formalmente sobre ele. Eles começaram medindo a altura de um dos integrantes do grupo e a sombra que ele projetava. Em seguida, mediram o comprimento da sombra do mastro da bandeira, conforme figura 6.

Figura 6: Cálculo de proporção



Qual é a altura do mastro da bandeira do Brasil?

Minha altura: 1,8 m

Dstância da minha sombra: 1,2 m

Distância da sombra mastro: 2,6 m

$$\frac{1,8}{1,2} = \frac{x}{2,6}$$

$$1,2x = 1,8 . 2,6$$

$$x = \frac{4,68}{1,2}$$

$$x = 3,9$$

O mastro tem aproximadamente 3,9 m de altura.

Altura do mastro medida: 4 m

Fonte: Dos autores

Usando o Teorema de Tales, os alunos calcularam que a altura do mastro era de 3,9 metros. Para validar esse resultado, o grupo utilizou a corda usada para içar a bandeira, medindo a distância do suporte da corda até o topo do mastro. Em seguida, mediram a distância do suporte ao chão e chegaram a uma altura de aproximadamente 4 metros, muito próxima do valor calculado.

Os estudantes concluíram que a pequena diferença entre os dois valores se deve às aproximações feitas ao medir a altura do estudante e as sombras, mas consideraram satisfatório o resultado obtido pelos cálculos. Eles reconheceram que medir a altura do mastro diretamente seria mais difícil sem a aplicação da matemática, mostrando assim a utilidade prática do conhecimento matemático no dia a dia.

Durante a atividade, podemos observar como a filosofia da linguagem de Wittgenstein se manifestam na prática educacional, especialmente na forma como os alunos passaram a *ver* aspectos cotidianos através de uma lente matemática. Segundo Wittgenstein, a linguagem é uma atividade prática que dá forma ao nosso entendimento do mundo, e isso se reflete nos jogos de linguagem que jogamos.

Ao questionarem a altura do mastro da bandeira, os estudantes não apenas viram um objeto físico, mas também interpretaram essa visão como um problema matemático a ser resolvido. Esse processo de interpretação e reinterpretação é central na filosofia da linguagem de Wittgenstein, cujo significado surge do uso da linguagem em contextos específicos. Inicialmente, o mastro era apenas parte do ambiente escolar; por meio da atividade de Modelagem Matemática, ele se transformou em um problema que exigia uma solução analítica. Essa mudança de aspecto – *ver* o mastro como um objeto de investigação matemática – é um exemplo claro de como os *modos de ver* podem ser alterados por meio da linguagem e da prática.

Os alunos utilizaram proporções e o teorema de Tales, revelando que já tinham internalizado certos conceitos matemáticos e estavam prontos para aplicá-los em novos contextos. Wittgenstein sugere que o aprendizado e a compreensão são profundamente contextuais e baseados em formas de vida compartilhadas. No caso dos estudantes, a "forma de vida" envolvia tanto a experiência escolar quanto às interações cotidianas, e a linguagem matemática que aprenderam permitiu-lhes recontextualizar o mastro como um problema matemático.

Além disso, a atividade também mostra como os jogos de linguagem são flexíveis e adaptáveis. Os alunos não só aplicaram a matemática para resolver o problema, mas também validaram seus resultados usando métodos práticos, como medir com a corda. Isso exemplifica o conceito de Wittgenstein de que a compreensão é uma prática ativa, não apenas teórica. Eles jogaram um jogo de linguagem matemático, no qual a verificação prática dos resultados fez parte do processo de entendimento.

Em suma, a atividade ilustra como os alunos, através dos conceitos de linguagem de Wittgenstein, começaram a *ver* problemas cotidianos sob uma nova ótica. Eles recontextualizaram um objeto familiar, aplicando conhecimentos matemáticos para resolver um problema prático. Essa experiência reforça a ideia de que a linguagem e a prática são indissociáveis na formação do conhecimento e na mudança de perspectiva, mostrando como a matemática pode ser integrada na compreensão do mundo cotidiano.

3.5 IMPLICAÇÕES E CONCLUSÕES

A análise das atividades “Até onde a água pode chegar?”, referente à experimentação, “Qual é a colheita mais rentável?”, referente ao mundo cibernético, e “Qual a altura do mastro da bandeira?”, atividade com temática escolhida pelos alunos e associada à realidade, revela implicações positivas do uso de atividades de modelagem para o ensino e a aprendizagem da Matemática. Sob uma perspectiva wittgensteiniana, a linguagem se mostra como uma atividade, que contempla aspetos pragmáticos que moldam nossa compreensão do mundo. Dessa forma, ao olhar para o desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática, uma alternativa pedagógica com uma proposta de ensino que se difere de práticas convencionais, vemos que os problemas que são investigados têm características diferentes dos problemas frequentemente trabalhados em sala de aula.

Trata-se de problemas fundamentados em dados reais, ou seja, coletados ou produzidos a partir de problemas que tratam o mundo real. Essa realidade, conforme sinaliza o mapeamento realizado no capítulo anterior, pode advir de diferentes contextos, dentre os quais abordamos três: experimentação, mundo cibernético e mundo real, seja por meio de situações cotidianas ou não. Nesse contexto, esta pesquisa se debruça sobre a interpretação de problemas de Modelagem Matemática, ou ainda, sob uma perspectiva wittgensteiniana, os *modos de ver* dos alunos problemas em atividades de Modelagem Matemática.

Essas atividades exemplificam como os alunos podem utilizar conhecimentos vistos como estritamente teóricos para a análise de contextos práticos, percebendo a Matemática não como um conjunto abstrato de regras, mas como uma gramática, com proposições normativas e que funciona como uma ferramenta útil para entender fenômenos empíricos, ditos da realidade. Essa percepção, conforme pressupostos de Wittgenstein (2013), fundamenta a significação da Matemática no jogo de linguagem que caracteriza o desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática (Seki; Almeida, 2021), ou seja, a partir de seus usos.

Na atividade “Até onde a água pode chegar?”, os estudantes utilizaram a razão e a proporção, conteúdos com os quais já estavam familiarizados, e exploraram a fórmula da pressão de fluidos para resolver o problema. Essa atividade exemplifica como os alunos podem transferir conhecimentos teóricos para contextos práticos, percebendo a matemática não como um conjunto abstrato de regras, mas como uma ferramenta útil para entender fenômenos do cotidiano. Essa realização é crucial porque, como apontado por Wittgenstein (2013), o significado surge do uso contextual da linguagem. Aqui, os alunos contextualizaram a matemática em uma situação prática, reforçando seu entendimento e seu uso.

A atividade “Qual é a colheita mais rentável?” permitiu aos alunos usaram conceitos de função linear para comparar qual das colheitas tem o maior rendimento, utilizando assim um conceito matemático no qual, até então, eles viam somente nas aulas convencionais de matemática. Através do conceito de jogos de linguagem de Wittgenstein, podemos ver que os alunos estavam jogando um novo jogo, o jogo de Modelagem Matemática, cujos significados e as regras foram adaptados para resolver um problema específico. Essa adaptação é essencial para o aprendizado, pois permite aos alunos *ver* a matemática como algo vivo e relevante.

Na atividade “Qual a altura do mastro da bandeira?”, os estudantes utilizaram razões e proporções, aplicando o Teorema de Tales para solucionar o problema. Através desta atividade, os alunos passaram a *ver* o mastro não apenas como parte da paisagem escolar, mas como um objeto de investigação matemática. Essa mudança de aspecto, conforme descrita por Wittgenstein (2013), ilustra como a interpretação e a percepção podem ser alteradas através da prática da linguagem matemática.

Essas descobertas têm implicações significativas para o ensino e a aprendizagem da Matemática. Primeiramente, elas mostram que quando os alunos têm contato constante com atividades de modelagem, eles desenvolvem uma habilidade maior para associar problemas matemáticos com situações cotidianas. Isso não apenas enriquece sua aprendizagem, mas também aumenta seu interesse e engajamento com a Matemática, pois eles começam a *ver* a relevância prática do que estão aprendendo. Percebem que a Matemática aprendida na sala de aula pode ser aplicada para resolver questões práticas, transformando a forma como *veem* a Matemática, o mundo ao seu redor e a relação entre eles.

Além disso, a abordagem wittgensteiniana contribuiu para uma compreensão da interpretação de problemas na Modelagem Matemática. Ao enfatizar o contexto e o uso prático da linguagem, essa abordagem ajuda os alunos a desenvolver uma visão integrada e aplicável da Matemática. Eles aprendem a *ver* problemas como exercícios abstratos durante as aulas expositivas e convencionais, mas com a modelagem passam a ver tais problemas como situações que podem ser analisadas e resolvidas utilizando ferramentas matemáticas. Essa mudança de perspectiva é crucial para o desenvolvimento de habilidades de pensamento crítico e resolução de problemas.

O objetivo deste capítulo foi *compreender como os alunos interpretam problemas de Modelagem Matemática*. As análises das atividades mostram que, quanto mais contato os alunos têm com atividades de modelagem, mais eles conseguem utilizar associações do seu cotidiano com a matemática, tornando o aprendizado aplicável. Ao incorporar os conceitos de linguagem de Wittgenstein ao analisar as atividades, podemos criar um ambiente de aprendizado onde os alunos não apenas aprendem matemática, mas também a *veem* como uma ferramenta vital para compreender e interagir com o mundo ao seu redor.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, L. M. W.; BRITO, D. S. Atividades de Modelagem Matemática: Que sentido os alunos podem lhe atribuir? **Ciência e Educação**, Bauru, v. 11, n. 3, p. 483-498, 2005.

ALMEIDA, L. M. W.; FERRUZZI, E. C. Uma aproximação socioepistemológica para a modelagem matemática. **Alexandria**, Florianópolis, v. 2, p. 117-134, 2009.

ALMEIDA, L. W.; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na Educação Básica.** São Paulo: Contexto, 2012.

ALMEIDA, L. M. W.; SOUSA, B. N. P.; TORTOLA, E. The Formulation of Hypotheses in Mathematical Modelling Activities. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 23, n. 5, p. 66-93, set./out. 2021.

ALMEIDA, L. M. W.; VERTUAN, R. E. **Práticas de modelagem matemática na educação matemática**. Londrina: EDUEL, 2011

BEAN, D. O que é modelagem matemática? **Educação Matemática em Revista**, São Paulo, v. 8, n. 9-10, p. 49-57, 2001.

Blum, W., Galbraith, P. L., Henn, H.-W., & Niss, M. **Modelling and applications in mathematics education**. New York: Springer. 2007.

BLUM, W. ICMI Study 14: Applications and modelling in mathematics education – Discussion document. **Educational Studies in Mathematics.** n. 51, p. 149–171 2002.

ELFRINGHOFF, M. S., & SCHUKAJLOW, S. O que torna um problema de modelação interessante? Fontes de interesse situacional em problemas de modelação. **Quadrante**, v. 30, n. 1, p. 8–30, 2021

HERMINIO, M. H. G. B. BORBA, M. C. A noção de interesse em projetos de modelagem matemática. **Educação Matemática e Pesquisa**, São Paulo, v.12, n. 1, p. 111-127, 2010.

LESH, R.; DOERR, H. M. Foundations of a Models and Modeling Perspective on Mathematics Teaching, Learning, and Problem Solving. In: LESH, R.; DOERR, H. M. **Beyond Constructivism**. London: Routledge. p. 31, 2003.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. **Pesquisa em educação:** abordagens qualitativas. São Paulo: E.P.U., 1986.

MAASS, K.; ZEHETMEIER, S.; WEIHBERGER, A.; Flöer, K. Analysing mathematical modelling tasks in light of citizenship education using the COVID-19 pandemic as a case study. **ZDM Mathematics Education**, Berlin, v. 55, n. 1, p. 131-145, 2022.

NISS, M.; BLUM, W. **The Learning and Teaching of Mathematical Modelling**. London: Routledge. 2020.

Noss, R., Healy, L., & Hoyles, C. The construction of mathematical meanings: Connecting the visual with the symbolic. **Educational Studies in Mathematics**, v. 33(2), 203–233. 1997.

POLLAK, H. O. **The Place of Mathematical Modelling in the System of Mathematics Education**: Perspective and Prospect. In: G. A. Stillman, W. Blum, & M. S. Biembengut (Eds). Mathematical Modelling in Education Research and Pratice. Cham, Switzerland: Springer, p. 265-276. 2015.

Ponte, J. P. Conexões no Programa de Matemática do Ensino Básico. **Educação e Matemática**, 110, p. 3–6. 2010.

RUY, M. C.; DONAT, M. O conceito de jogos de linguagem nas Investigações Filosóficas de Wittgenstein. SEMINÁRIO DE PESQUISA EM CIÊNCIAS HUMANAS. **Anais**... Londrina, p. 1-13, 2008.

STILLMAN, G. PROBLEM FINDING AND PROBLEM POSING FOR MATHEMATICAL MODELLING. In: HOE, L. N; DAWN, N. K. E. **Mathematical modelling: from theory to practice**. Singapore: National Institute of Education, Nanyang Technological University. p. 41 - 56, 2015.

SEKI, J. T. P.; ALMEIDA, L. M. W. A compreensão dos alunos em atividades de modelagem matemática: uma perspectiva wittgensteiniana. **Paradigma**, Maracay, v. 42, p. 106-129, 2021.

TORTOLA, E.; ALMEIDA, L. M. W. de. Um olhar sobre os usos da linguagem por alunos dos anos iniciais do ensino fundamental em atividades de modelagem matemática. **Revista Paranaense De Educação Matemática**, Campo Mourão, n. 5, p. 83–105, 2016.

WITTGENSTEIN, L. **Investigações Filosóficas**. 8. ed. Petrópolis: Vozes; Bragança Paulista: Editora Universitária São Francisco, 2013.

CONCLUSÃO

A conclusão desta dissertação enfatiza a importância da Modelagem Matemática como uma abordagem pedagógica valiosa, especialmente quando analisada à luz da filosofia da linguagem de Wittgenstein.

O objetivo desta pesquisa foi entender *como os estudantes do 1º ano do Ensino Médio interpretam problemas de Modelagem Matemática?* Para atingir esse objetivo, desenvolvemos e implementamos nove atividades de modelagem matemática ao longo do ano letivo de 2022, selecionando três delas para uma análise detalhada. Essas atividades proporcionaram um ambiente prático onde os alunos puderam aplicar e desenvolver suas habilidades de interpretação e resolução de problemas matemáticos em contextos variados. A coleta de dados durante a execução dessas atividades incluiu observações diretas, registros das resoluções dos alunos e feedbacks qualitativos, que foram cuidadosamente analisados.

Os resultados mostraram que, apesar dos desafios iniciais, os alunos gradualmente desenvolveram uma melhor compreensão e capacidade de resolver problemas de Modelagem Matemática. A prática contínua e o apoio pedagógico adequado foram fundamentais para esse progresso, evidenciando a eficácia da Modelagem Matemática como uma ferramenta pedagógica no Ensino Médio.

Os artigos analisados conversam diretamente com a vivência em sala de aula, evidenciando que ao trabalhar com atividades de modelagem, os alunos começam a ver certas situações como algo plausível de uma análise matemática. Esse processo de reconhecimento e interpretação é fundamental, pois promove um engajamento maior dos alunos com os problemas propostos, incentivando a participação ativa e o pensamento crítico. A filosofia de Wittgenstein, especialmente os conceitos de *ver* e *ver-como*, ajuda a explicar como os alunos passam a enxergar os problemas do cotidiano sob uma nova luz matemática, transformando sua percepção e entendimento.

Entender que os problemas de Modelagem Matemática são utilizados como ponto de formalização de conceitos matemáticos, ou aprofundamento deles, é crucial para a educação matemática. A Modelagem Matemática permite que os alunos usem teorias e fórmulas matemáticas em situações concretas, reforçando seu aprendizado e facilitando a retenção de conceitos. Wittgenstein argumenta que o significado surge do uso; assim, ao usar a matemática em contextos reais, os alunos não só compreendem melhor os conceitos matemáticos, mas também aprendem a usá-los de forma mais eficaz e significativa.

É significativo o trabalho em Modelagem Matemática com os alunos, pois eles começam a compreender que a matemática está presente em seu cotidiano. A Modelagem Matemática ajuda os alunos a perceberem que situações do dia a dia podem ser analisadas matematicamente, tornando a matemática mais relevante e acessível. Essa conscientização transforma a percepção dos alunos sobre o uso da matemática, mostrando que ela não se restringe apenas ao ambiente escolar, mas é uma ferramenta poderosa para interpretar e resolver problemas do mundo real. A abordagem wittgensteiniana de *ver* e *interpretar* o mundo através de diferentes aspectos é essencial aqui, pois os alunos aprendem a reconhecer a matemática em diversos contextos, mudando sua visão e aumentando sua compreensão.

Para futuras pesquisas, seria interessante explorar como diferentes contextos culturais influenciam a interpretação e a utilização da Modelagem Matemática pelos alunos. Além disso, investigar a eficácia de métodos alternativos de ensino que integrem a filosofia da linguagem de Wittgenstein pode proporcionar novas percepções para a prática pedagógica. As lacunas identificadas nesta pesquisa incluem a necessidade de uma maior diversidade de contextos de aplicação da Modelagem Matemática e uma análise mais aprofundada das interações entre professores e alunos durante essas atividades.

Em suma, a Modelagem Matemática, integrada com os princípios da filosofia de Wittgenstein, não apenas promove a aplicação prática da matemática, mas também enriquece a compreensão dos alunos, integrando a linguagem matemática ao seu entendimento do mundo real. Essa combinação de teoria e prática fortalece o ensino e a aprendizagem da matemática, tornando-a mais relevante e significativa para os alunos.

APÊNDICE A: QUADRO DOS ARTIGOS ANALISADOS

Códigos	Título	Tema	Os alunos já sabiam o conteúdo?	Foi introduzido novos conteúdos?	A hipótese saiu dos alunos ou do professor?
RE_CO_01	UM RELATO DE EXPERIÊNCIA SOBRE A MODELAGEM MATEMÁTICA: ASPECTOS VIVENCIADOS EM SALA DE AULA	Pintura de um muro do colégio	Sim	Não	Professor
RE_CO_02	REFLEXOS DA CONSTRUÇÃO DE UM AMBIENTE DE APRENDIZAGEM BASEADO NA MODELAGEM MATEMÁTICA NO DESENVOLVIMENTO DO AUTOCONCEITO ACADÊMICO EM MATEMÁTICA	Gasto de água	Sim	Não	Alunos/Professor
CC_CO_01	REPENSANDO A PRODUÇÃO DE LIXO EM COMUNIDADES PERIFÉRICAS: UMA ABORDAGEM CRÍTICA – DIALÓGICA	Produção de lixo pela comunidade	Sim	Não	Alunos/Professor
RE_CO_03	PINTAR O PÁTIO DA ESCOLA: UMA EXPERIÊNCIA COM MODELAGEM MATEMÁTICA NOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL	Tamanho do pátio e quantidade de tinta	Não	Sim	Alunos
RE_CO_04	ENSINO DE MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO INFANTIL: UMA EXPERIÊNCIA POR MEIO DA	Construindo a escola com formas geométricas	Não	Sim	Professor

	MODELAGEM MATEMÁTICA				
RE_CO_05	“QUANTA PELE VOCÊ TEM?”: RELATO DE UMA EXPERIÊNCIA COM ESTUDANTES DOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL	Quantidade de pele	Sim	Não	Professor
RE_CO_06	OTIMIZAÇÃO DE RECURSOS E GERENCIAMENTO DE ESTOQUE: UM RELATO DE EXPERIÊNCIA COM MODELAGEM	Confecção de camisas	Sim	Não	Professor
RE_CO_07	UMA ATIVIDADE DE MODELAGEM MATEMÁTICA UTILIZANDO O SOFTWARE TRACKER	Lançamento de uma bola	Sim	Não	Professor
RE_CO_08	MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO: RELATO DE UMA EXPERIÊNCIA PARA DESENVOLVER COMPETÊNCIAS ESSENCIAIS DA BNCC	Divisão da conta de água prédio	Sim	Não	Professor
RE_CO_09	SOMOS O QUE COMEMOS: PERCEBENDO A MATEMÁTICA NO COTIDIANO	Obesidade Infantil	Não	Sim	Professor
RE_EX_01	COMPETÊNCIAS DESENVOLVIDAS DURANTE UMA TAREFA DE MODELAGEM MATEMÁTICA ENVOLVENDO O CONCEITO DE FUNÇÃO AFIM: UMA	Criação de um dinamômetro	Sim	Não	Professor

	EXPERIÊNCIA EM UMA TURMA DA 1ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO				
RE_EX_02	MATEMÁTICA NA EXPLORAÇÃO DE UM CONCEITO DA FÍSICA: AS POSSIBILIDADES DO USO DOS SOFTWARES EXCEL E GEOGEBRA NA OBTENÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO	Tempo de queda de uma bolinha de metal	Sim	Sim	Professor
RE_MC_01	MODELAGEM MATEMÁTICA E JOGOS: ARTICULAÇÕES E POSSIBILIDADES PARA O ENSINO FUNDAMENTAL	Preço de venda dos produtos Hay Day	Não se aplica	Não	Professor
RE_NC_01	BNCC E MODELAGEM MATEMÁTICA: RELATO DE UMA ATIVIDADE DESENVOLVIDA COM UMA TURMA DO 6º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL	Tamanho do pé/Altura	Não	Não	Professor
RE_NC_03	A MATEMÁTICA EM TODO LUGAR: UMA EXPERIÊNCIA EM UM AMBIENTE DE APRENDIZAGEM DE MODELAGEM MATEMÁTICA	A escolha de cada grupo formado: Futebol, Filme, Anime	Sim	Não	Alunos
RE_NC_04	MODELAGEM MATEMÁTICA E DIALOGICIDADE: UMA PARCERIA PARA AS COMPETÊNCIAS	Pesquisas com temas recorrentes ao Não Cotidiano da escola	Sim	Não	Alunos

	ESTATÍSTICA - COLETA, ANÁLISE E REFLEXÕES DE DADOS				
CC_NC_01	INVESTIGANDO PADRÕES EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO INFANTIL	Confecção de pulseiras	Não se aplica	Sim	Professor
CC_NC_02	O CRESCIMENTO DO PÉ DE FEIJÃO: UM ATIVIDADE DE MODELAGEM NOS ANOS INICIAIS	Pé de feijão	Sim	Não	Alunos
CC_NC_03	SIGNOS INTERPRETANTES NO PROCESSO DE COMUNICAÇÃO EM UMA ATIVIDADE DE MODELAGEM MATEMÁTICA	Por que será que a garrafa “soa” quando enche de água gelada?	Sim	Não	Alunos/Professor
RE_NC_02	UMA EXPERIÊNCIA DE MODELAGEM MATEMÁTICA NO DESENVOLVIMENTO DE CONCEITOS DE ANÁLISE COMBINATÓRIA	Treino da academia	Sim	Não	Professor

APÊNDICE B: Ficha de Avaliação de Produto/Processo Educacional

Adaptado de: Rizzatti, I. M. *et al*. Os produtos e processos educacionais dos programas de pós-graduação profissionais: proposições de um grupo de colaboradores. **ACTIO**, Curitiba, v. 5, n. 2, p. 1-17, mai./ago. 2020. Disponível em: https://periodicos.utfpr.edu.br/actio/article/view/12657. Acesso em 14 de dezembro de 2020.

Instituição de Ensino Superior	Universidade Tecnológica Federal do Paraná	
Programa de Pós-Graduação	Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGMAT)	
Título da Dissertação	Problemas de Modelagem Matemática na Visão de Alunos do Ensino Médio: uma perspectiva wittgensteiniana	
Título do Produto/Processo Educacional	Atividades de Modelagem Matemática: um olhar a partir de usos da linguagem por alunos do Ensino Médio	
Autores do Produto/Processo Educacional	**Discente**: Michael Felipe Koga	
	Orientador/Orientadora: Emerson Tortola	
	Outros (se houver):	
Data da Defesa	28 de junho de 2024	

FICHA DE AVALIAÇÃO DE PRODUTO/PROCESSO EDUCACIONAL (PE)	
Esta ficha de avaliação deve ser preenchida pelos membros da banca do exame de defesa da dissertação e do produto/processo educacional. Deve ser preenchida uma única ficha por todos os membros da banca, que decidirão conjuntamente sobre os itens nela presentes.	
Aderência: avalia-se se o PE apresenta ligação com os temas relativos às linhas de pesquisas do Programa de Pós-Graduação. *Apenas um item pode ser marcado. Linhas de Pesquisa do PPGMAT: *L1: Formação de Professores e Construção do Conhecimento Matemático* (abrange discussões e reflexões acerca da formação inicial e em serviço dos professores que ensinam Matemática, bem como o estudo de tendências em Ensino de Matemática, promovendo reflexões críticas e analíticas a respeito das potencialidades de cada uma no processo de construção do conhecimento matemático nos diferentes níveis de escolaridade);	( ) Sem clara aderência às linhas de pesquisa do PPGMAT. (X) Com clara aderência às linhas de pesquisa do PPGMAT.

L2: Recursos Educacionais e Tecnologias no Ensino de Matemática (trata da análise e do desenvolvimento de recursos educacionais para os processos de ensino e de aprendizagem matemática, atrelados aos aportes tecnológicos existentes).	
Aplicação, aplicabilidade e replicabilidade: refere-se ao fato de o PE já ter sido aplicado (mesmo que em uma situação que simule o funcionamento do PE) ou ao seu potencial de utilização e de facilidade de acesso e compartilhamento para que seja acessado e utilizado de forma integral e/ou parcial em diferentes sistemas. *Apenas um item pode ser marcado. A propriedade de aplicação refere-se ao processo e/ou artefato (real ou virtual) e divide-se em três níveis: 1) aplicável – quando o PE tem potencial de utilização direta, mas não foi aplicado; 2) aplicado – quando o PE foi aplicado uma vez, podendo ser na forma de um piloto/protótipo; 3) replicável – o PE está acessível e sua descrição permite a utilização por outras pessoas considerando a possibilidade de mudança de contexto de aplicação. Para o curso de Mestrado Profissional, o PE deve ser aplicável e é recomendado que seja aplicado.	( ) PE tem características de aplicabilidade, mas não foi aplicado durante a pesquisa. ( ) PE foi aplicado uma vez durante a pesquisa e não tem potencial de replicabilidade. (X) PE foi aplicado uma vez durante a pesquisa e tem potencial de replicabilidade (por estar acessível e sua descrição permitir a utilização por terceiros, considerando a possibilidade de mudança de contexto de aplicação). ( ) PE foi aplicado em diferentes ambientes/momentos e tem potencial de replicabilidade (por estar acessível e sua descrição permitir a utilização por terceiros, considerando a possibilidade de mudança de contexto de aplicação).
Abrangência territorial: refere-se a uma definição da abrangência de aplicabilidade ou replicabilidade do PE (local, regional, nacional ou internacional). Não se refere à aplicação do PE durante a pesquisa, mas à potencialidade de aplicação ou replicação futuramente. *Apenas um item pode ser marcado e a justificativa é obrigatória.	( ) Local ( ) Regional ( ) Nacional (X) Internacional Justificativa (*obrigatória*): O produto é composto por atividades que podem ser adaptadas e utilizadas em outro contexto. Além disso, por ser disponibilizado em um repositório digital, está disponível para acesso geral, de qualquer país.
Impacto: considera-se a forma como o PE foi utilizado e/ou aplicado no sistema relacionado à prática profissional do discente (não precisa ser, necessariamente, em seu local de trabalho).	( ) PE não utilizado no sistema relacionado à prática profissional do discente (esta opção inclui a situação em que o PE foi utilizado e/ou aplicado em um contexto simulado, na forma de protótipo/piloto).

*Apenas um item pode ser marcado.	(X) PE com aplicação no sistema relacionado à prática profissional do discente.
Área impactada *Apenas um item pode ser marcado.	( ) Econômica; ( ) Saúde; (X) Ensino; ( ) Cultural; ( ) Ambiental; ( ) Científica; ( ) Aprendizagem.
Complexidade: compreende-se como uma propriedade do PE relacionada às etapas de elaboração, desenvolvimento e/ou validação do PE. *Podem ser marcados nenhum, um ou vários itens.	(X) O PE foi concebido a partir de experiências, observações e/ou práticas do discente, de modo atrelado à questão de pesquisa da dissertação. (X) A metodologia apresenta clara e objetivamente, no texto da dissertação, a forma de elaboração, aplicação (se for o caso) e análise do PE. (X) Há, no texto da dissertação, uma reflexão sobre o PE com base nos referenciais teóricos e metodológicos empregados na dissertação. (X) Há, no texto da dissertação, apontamentos sobre os limites de utilização do PE.
Inovação: considera-se que o PE é inovador, se foi criado a partir de algo novo ou da reflexão e modificação de algo já existente revisitado de forma inovadora e original. A inovação não deriva apenas do PE em si, mas da sua metodologia de desenvolvimento, do emprego de técnicas e recursos para torná-lo mais acessível, do contexto social em que foi utilizado ou de outros fatores. Entende-se que a inovação (tecnológica, educacional e/ou social) no ensino está atrelada a uma mudança de mentalidade e/ou do modo de fazer de educadores.	( ) PE de alto teor inovador (desenvolvimento com base em conhecimento inédito). (X) PE com médio teor inovador (combinação e/ou compilação de conhecimentos preestabelecidos). ( ) PE com baixo teor inovador (adaptação de conhecimentos existentes).

Membros da banca examinadora de defesa

Nome	Instituição
Emerson Tortola	UTFPR
Ademir Pereira Junior	SEED
Andresa Maria Justulin	UTFPR