



**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA**

BRENDA ANSELMO MENDES

**AÇÕES DO PROFESSOR DURANTE A METODOLOGIA DE ENSINO-
APRENDIZAGEM-AVALIAÇÃO DE MATEMÁTICA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO
DE PROBLEMAS E O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO MATEMÁTICO
DOS ALUNOS**

LONDRINA

2024

BRENDA ANSELMO MENDES

**AÇÕES DO PROFESSOR DURANTE A METODOLOGIA DE ENSINO-
APRENDIZAGEM-AVALIAÇÃO DE MATEMÁTICA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO
DE PROBLEMAS E O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO MATEMÁTICO
DOS ALUNOS**

**TEACHER'S ACTIONS DURING THE TEACHING-LEARNING-EVALUATION
METHODOLOGY OF MATHEMATICS THROUGH PROBLEM SOLVING AND
THE DEVELOPMENT OF STUDENTS' MATHEMATICAL THINKING**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, *campus* Cornélio Procopio e Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Andresa Maria Justulin

LONDRINA

2024



4.0 Internacional

Esta licença permite que outros remixem, adaptem e criem a partir do trabalho para fins não comerciais, desde que atribuam o devido crédito e que licenciem as novas criações sob termos idênticos.

Conteúdos elaborados por terceiros, citados e referenciados nesta obra não são cobertos pela licença.



BRENDA ANSELMO MENDES

AÇÕES DO PROFESSOR DURANTE A METODOLOGIA DE ENSINO-APRENDIZAGEM-AVALIAÇÃO DE MATEMÁTICA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO MATEMÁTICO DOS ALUNOS.

Trabalho de pesquisa de mestrado apresentado como requisito para obtenção do título de Mestre Em Ensino De Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Área de concentração: Ensino De Matemática.

Data de aprovação: 09 de Agosto de 2024

Andresa Maria Justulin, - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Eliane Maria De Oliveira Araman, - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dra. Janaina Poffo Possamai, Doutorado - Fundação Universidade Regional de Blumenau, Centro de Ciências Tecnológicas.

Documento gerado pelo Sistema Acadêmico da UTFPR a partir dos dados da Ata de Defesa em 10/08/2024.

Dedico este trabalho a todas as pessoas que amo e estiveram comigo durante os momentos de estudo e realização desta pesquisa.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por ter me permitido sonhar com esta conquista e com Ele poder realizá-la.

À minha orientadora Andresa Maria Justulin, pelo apoio, incentivo, dedicação, paciência e sabedoria, pois não mediu esforços para sonhar comigo, nas horas a fio que conversávamos e alinhávamos a pesquisa. Você que tanto acreditou em mim, no meu potencial e tornou esse sonho possível e real.

À Professora Doutora Eliane Maria de Oliveira Araman e à Professora Doutora Janaína Poffo Possamai, por aceitarem compor minha banca, pela disponibilidade de ler o trabalho e, também, pelas preciosas contribuições na escrita desta dissertação.

Às professoras participantes da pesquisa por todo apoio, pelo aceite ao convite, por me auxiliarem, por serem tão receptivas comigo e, principalmente, por acreditarem em mim e permitirem que tudo isso acontecesse.

Aos alunos que participaram das aulas durante a pesquisa de campo, me senti tão bem-vinda e acolhida, vocês foram o coração deste trabalho.

Aos meus pais, Valdecir e Madalena, que me ajudaram em todos os momentos, fossem nos dias em que eu precisei ir a Londrina, nos dias em que fiquei lá ou que voltei para casa. A vocês minha gratidão e amor eternos, este sonho foi por vocês!

Ao Willian, pelo seu amor, por sempre acreditar em mim, incentivar e me impulsionar a escrever quando eu já não conseguia mais, sempre me amparando quando estava exausta e ansiosa. A você meu carinho, amor e admiração.

A toda minha família, em especial à Beatriz, por ser luz em minha vida e por me auxiliar em todos os momentos, sobretudo me dando forças e acreditando em mim quando eu não acreditava.

Às minhas amigas Mariany e Helen, por sempre estarem comigo, fosse nos sorrisos ou nas lágrimas, vocês me ajudaram tanto e sou imensamente grata por isso.

Aos professores do PPGMAT pelos conhecimentos compartilhados, pelas aprendizagens e reflexões e, principalmente, por nos fazerem olhar com novas lentes para a Educação Matemática.

À UTFPR pela oportunidade de cursar o mestrado em uma instituição com excelência e qualidade.

Por fim, a todos que de forma direta ou indireta me apoiaram neste sonho!

“Ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua própria produção ou a sua construção.”

(Freire, 1996, p. 21)

MENDES, B. A. **Ações do professor durante a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da resolução de problemas e o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos**. 2024. 98 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2024.

RESUMO

A presente pesquisa tem por objetivo analisar as ações de duas professoras ao ministrarem uma aula fazendo uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas e suas influências (ou contribuições) para o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos. A pesquisa é do tipo qualitativa e a coleta dos dados ocorreu no segundo semestre de 2023, em duas etapas: inicialmente foi realizada uma entrevista semiestruturada, por meio do *Google Meet*, com cada uma das professoras individualmente. Em um segundo momento, as professoras ministraram suas aulas, fazendo uso da metodologia, e os dados foram registrados por meio de gravadores (um deles ficou junto à professora e outros seis capturaram o áudio de cada grupo de alunos), de uma câmera, e do diário de campo da pesquisadora, que registrou as ações que ocorreram durante as aulas. Após a coleta dos dados, as entrevistas e os áudios das professoras e dos alunos participantes foram transcritos e realizou-se a análise dos dados, considerando dois focos: 1) as ações que as professoras realizaram ao interagir com os grupos; e 2) os processos de pensamento matemático evidenciados pelos alunos. As ações apresentadas pelas duas professoras contribuíram para o desenvolvimento do pensamento matemático, e a ação mais evidenciada foi a *Questionar*, e a menos recorrente, e que não ajudou na mobilização do pensamento matemático, foi a de *Interromper*. O processo de pensamento matemático *Generalizar* foi o mais desenvolvido pelos alunos por meio das intervenções das professoras. Reitera-se que a escolha do problema influenciou nos processos de pensamento matemático evidenciados. Juntamente à pesquisa, foi produzido o Produto Educacional “*Ações do professor durante a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas que promovem o Pensamento Matemático*”, contendo orientações acerca da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, das ações que são desenvolvidas pelo professor ao interagir com os alunos, sobre o pensamento matemático e como desenvolvê-lo, além de encaminhamentos e dicas sobre como desenvolvê-los.

Palavras-chave: Ações do professor. Interações com grupos de alunos. Resolução de Problemas. Pensamento Matemático.

MENDES, B. A. Teacher's actions during the Teaching-Learning-Evaluation Methodology of Mathematics through problem solving and the development of students' mathematical thinking. 2024. 98 p. Dissertation (Master's degree in Mathematics Education) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2024.

ABSTRACT

This research aims to analyze the actions of two teachers when teaching a class using the Mathematics Teaching-Learning-Assessment Methodology through Problem Solving and its influences (or contributions) to the development of students' mathematical thinking. The research is qualitative and data collection took place in the second half of 2023, in two stages: initially, a semi-structured interview was conducted, through Google Meet, with each of the teachers individually. In a second stage, the teachers taught their classes, using the methodology, and the data were recorded using recorders (one of them was with the teacher and another six captured the audio of each group of students), a camera, and the researcher's field diary, which recorded the actions that occurred during the classes. After data collection, the interviews and audios of the participating teachers and students were transcribed and the data analysis was carried out, considering two focuses: 1) the actions that the teachers performed when interacting with the groups; and 2) the mathematical thought processes demonstrated by the students. The actions presented by the two teachers contributed to the development of mathematical thought, and the most evident action was Questioning, and the least recurrent, and which did not help in the mobilization of mathematical thought, was Interrupting. The mathematical thought process Generalizing was the most developed by the students through the teachers' interventions. It is reiterated that the choice of the problem influenced the mathematical thought processes demonstrated. Together with the research, the Educational Product “Teacher's Actions during the Mathematics Teaching-Learning-Assessment Methodology through Problem Solving that Promote Mathematical Thinking” was produced, containing guidelines on the Mathematics Teaching-Learning-Assessment Methodology through Problem Solving, the actions that are developed by the teacher when interacting with the students, on mathematical thinking and how to develop it, in addition to referrals and tips on how to develop them.

Keywords: Teacher's Actions. Interactions with groups of students. Problem solving. Mathematical Thinking.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Etapas sugeridas por Polya (2006)	17
Figura 2 - Etapas da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas	21
Figura 3 - Diagrama esquemático das cinco práticas	28
Figura 4 - Capa do Produto Educacional.....	43
Figura 5 - Problema gerador escolhido pela professora Natália.....	49
Figura 6 - Problema gerador escolhido pela professora Laura.....	50
Figura 7 - Resposta do A1, grupo “Matemáticos”, ao item a do problema.....	54
Figura 8 - Resposta do A3, grupo “Matemáticos”, ao item c do problema.....	55
Figura 9 - Resposta do A4, grupo “Matemáticos”, ao item c do problema.....	55
Figura 10 - Lista indicada por A5 no trecho [4.2].....	57
Figura 11 - Resposta do A5, grupo “Racionais”, ao item f do problema	58
Figura 12 - Registro das respostas pelos grupos acerca do problema dos palitos.....	60
Figura 13 - Registro do grupo “Matemáticos”	62
Figura 14 - Parte da resolução do aluno A1, do grupo 1	65
Figura 15 - Resolução do aluno A14, do grupo 4	73
Figura 16 - Registro das respostas pelos grupos no problema do enxoval.....	74
Figura 17 - Registro da resolução do Grupo 3 na lousa	75
Figura 18 - Registro da resolução do Grupo 2 na lousa	77
Figura 19 - Fluxograma dos conceitos matemáticos evidenciado pelos alunos após as ações da professora Natália no momento [1]	80
Figura 20 - Fluxograma dos conceitos matemáticos evidenciado pelos alunos após as ações da professora Natália no momento [2]	82
Figura 21 - Fluxograma dos conceitos matemáticos evidenciado pelos alunos após as ações da professora Laura no momento [1].....	84
Figura 22 - Fluxograma dos conceitos matemáticos evidenciado pelos alunos após as ações da professora Laura no momento [2].....	85

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Ações do professor durante o processo de interação com um grupo de alunos....	26
Quadro 2 - Orientações dadas pelo professor em um processo de interação com um grupo de alunos durante a resolução de problemas matemáticos	26
Quadro 3 - Práticas do professor para facilitar as discussões matemáticas dos alunos	27
Quadro 4 - Descrição dos processos de pensamento matemático evidenciados durante a atividade de resolução de problemas	29
Quadro 5 - Perguntas e respostas sobre o Pensamento Matemático	30
Quadro 6 - Descrição dos processos de pensamento matemático	30
Quadro 7 - Pesquisas sobre os temas “Resolução de Problemas” e “Pensamento Matemático”	32
Quadro 8 - Trechos que apresentam vestígios de processos de pensamento matemático mobilizados pelas ações da professora Natália no momento [1].....	79

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	12
2 REFERENCIAL TEÓRICO	15
2.1 A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS	15
2.2 ASPECTOS HISTÓRICOS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS	16
2.3 A METODOLOGIA DE ENSINO-APRENDIZAGEM-AVALIAÇÃO DE MATEMÁTICA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS	20
2.4 A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NOS DOCUMENTOS OFICIAIS	23
2.5 INTERAÇÃO ENTRE PROFESSOR E GRUPO DE ALUNOS DURANTE A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS	25
2.6 PENSAMENTO MATEMÁTICO E A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS	28
3 ESTADO DA QUESTÃO	32
4 PERCURSO METODOLÓGICO DA PESQUISA	37
4.1 METODOLOGIA	37
4.2 PARTICIPANTES, INSTRUMENTOS E PROCEDIMENTOS DE PESQUISA DE CAMPO ...	38
4.3 PROCEDIMENTOS DE ANÁLISE DE DADOS	41
4.4 PRODUTO EDUCACIONAL	42
5 ANÁLISE DE DADOS	44
5.1 APRESENTAÇÃO DA ENTREVISTA	44
5.2 PLANEJAMENTO DAS AULAS E PROBLEMA GERADOR	49
5.3 ANÁLISE DAS AULAS DESENVOLVIDAS	51
5.3.1 <i>Resolução do problema dos palitos</i>	51
5.3.1.1 Grupo Matemáticos	52
5.3.1.2 Grupo Racionais	56
5.3.2 <i>Discussão do problema dos palitos</i>	59
5.3.3 <i>Resolução do problema do enxoval</i>	63
5.3.3.1 Grupo 1	64
5.3.3.2 Grupo 4	68
5.3.4 <i>Discussão do problema do enxoval</i>	73
5.4 AÇÕES DAS PROFESSORAS E A MOBILIZAÇÃO DOS PROCESSOS DE PENSAMENTO MATEMÁTICO	79
CONSIDERAÇÕES FINAIS	87
REFERÊNCIAS	89
ANEXO – FICHA DE AVALIAÇÃO DE PRODUTO/PROCESSO EDUCACIONAL	94
APÊNDICES	98
APÊNDICE A – ROTEIRO DA ENTREVISTA SEMIESTRUTURADA	98

1 INTRODUÇÃO

Ao longo do século XX, e ainda hoje, as aulas de Matemática, em grande parte, limitam-se à realização de exercícios, visando à memorização e à fixação do conteúdo matemático. Com o avanço nas pesquisas voltadas a essa temática, educadores e pesquisadores da Educação Matemática têm mostrado a importância de permitir que o aluno construa seu próprio conhecimento por meio de situações em que ele desenvolva sua autonomia (Allevato; Onuchic, 2021; Celis; Quiroz; Toro-Vidal, 2019; Häikiöniemi; Francisco, 2019; Onuchic; Allevato, 2011).

Inserem-se as ideias da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas (MEAAMaRP)¹, na qual o professor ocupa um papel relevante de mediador e suas ações são determinantes para que o problema atinja seu objetivo e possibilite a construção de um conhecimento matemático novo e, com isso, ocorra o pensamento matemático por parte dos alunos.

Nesse contexto, esta pesquisa reflete² minha preocupação sobre as ações do professor de Matemática e como elas podem contribuir com os alunos durante as aulas. Formei-me há 3 anos no curso de Licenciatura em Matemática, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR) *campus* Cornélio Procopio, e tenho contato com a MEAAMaRP desde a graduação e sempre que possível utilizo-a em minhas aulas. Todavia, sempre me senti preocupada com os momentos que eu interagiria com os grupos de alunos, pois tinha dificuldade ao fazer questionamentos, sem apresentar argumentos ou dicas que eles poderiam usar na resolução do problema.

Essa inquietação me perseguia e, quando entrei no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGMAT) em 2022 e os mestrandos traziam para as aulas as inquietudes vivenciadas diariamente na realidade da Educação Básica, pude perceber que não estava sozinha pois, infelizmente, nossos alunos estão cada vez menos estimulados, muitos não se interessam por nada do que é proposto pelo professor. Logo, minha orientadora e eu definimos essa temática para investigar, cuja questão norteadora foi assim definida: “*Quais ações dos professores em uma aula de Resolução de Problemas podem apoiar o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos?*”

¹ De modo a evitar repetições de frases, será usada a abreviatura para se referir à metodologia de ensino.

² A escrita em primeira pessoa do singular será utilizada nesta parte do texto por se tratar de experiências pessoais da autora.

A pesquisa tem como objetivo geral analisar as ações de duas professoras, ao ministrarem uma aula, fazendo uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas (MEAAMaRP) e suas influências (ou contribuições) para o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos. Como objetivo secundário da pesquisa, foi elaborado um Produto Educacional, que se vincula à dissertação e se trata de um livro interativo, com orientações a professores e educadores que queiram fazer uso da MEAAMaRP, com vistas a possibilitar o desenvolvimento do pensamento matemático de seus alunos.

Para alcançar tais objetivos, inicialmente, foi reunido um referencial teórico que contemplou o contexto histórico da resolução de problemas, a MEAAMaRP, a Resolução de Problemas nos documentos oficiais, as interações de professor com grupos de alunos, e o pensamento matemático. Para o desenvolvimento da pesquisa de campo, contataram-se professores de Matemática que conheciam e faziam uso da MEAAMaRP. Essa escolha se deu pelo fato de a pesquisa investigar as ações do professor ao implementar essa metodologia e a relação (ou implicações) no desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos.

A princípio, o convite foi feito aos integrantes do Grupo de Estudo em Resolução de Problemas (GERP), da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), coordenado pela prof.^a Dr.^a Andresa Maria Justulin, que é formado por alunos e ex-alunos do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGMAT). Voluntariamente uma professora participante do grupo manifestou interesse e ela foi uma das professoras analisadas (aqui denominada Laura).

Um segundo convite foi feito a ex-alunos da disciplina *Resolução de Problemas no ensino de Matemática*, oferecida também no PPGMAT, que é ministrada pela prof.^a Dr.^a Andresa Maria Justulin. Uma professora de Matemática e ex-aluna da disciplina manifestou interesse em colaborar com a pesquisa (aqui denominada Natália).

As professoras que participaram da pesquisa tiveram autonomia na realização do planejamento da aula, na escolha da turma em que foi realizada a pesquisa e na escolha do problema gerador. A professora-pesquisadora participou das duas implementações, e os dados foram coletados por meio de gravadores, um deles acoplado a um microfone à professora, e os demais espalhados entre os grupos de alunos, além de uma câmera filmadora.

A presente dissertação está estruturada da seguinte forma: na seção 1 é apresentada a introdução, que traz um panorama geral do trabalho desenvolvido e das inquietações que acompanharam e motivaram a realização dessa pesquisa. Na seção 2, é apresentado o referencial teórico sobre a resolução de problemas, seus aspectos históricos, a MEAAMaRP e

como a implementar em sala de aula são trazidas considerações a partir dos documentos oficiais no que tange à Resolução de Problemas, sobre as interações que se dão entre professor e grupos de alunos na MEAAMaRP, e sobre o pensamento matemático.

Na seção 3, é apresentada uma revisão de literatura na qual são abarcadas teses e dissertações que envolvem a resolução de problemas e o pensamento matemático. Já na seção 4, é explicitado o percurso metodológico da pesquisa: a metodologia, os participantes, os instrumentos, os procedimentos de pesquisa, os procedimentos de análise de dados e o Produto Educacional.

A seção 5 é composta pelas análises e transcrições das entrevistas realizadas com as professoras-participantes, do planejamento de aula proposto por elas, além das análises das aulas desenvolvidas. Nas considerações finais são comunicados os resultados evidenciados na pesquisa realizada. Em seguida são trazidos os apêndices e anexos.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Na Matemática e no seu ensino, é comum o uso das palavras exercício e problema, bem como do uso dos termos “resolução de problemas” e “resolução de exercícios” como sinônimos. Inicia-se esta seção fazendo essa distinção, necessária para a compreensão das ações do professor e do potencial do problema para o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos.

O exercício pode ser entendido como a repetição de operações matemáticas ou outro tipo de tarefa em que “[...] o aluno *não precisa* tomar nenhuma decisão sobre os procedimentos que deve usar para chegar à solução” (Pozo, 1998, p. 48, *grifo nosso*). Assim, o exercício envolve a automatização de procedimentos já conhecidos pelo aluno. Para que uma situação se configure como problema, é necessário que a pessoa encontre “[...] alguma dificuldade que a obrigue a questionar-se sobre qual seria o caminho que precisaria seguir para alcançar a meta” (Pozo, 1998, p. 48). Complementando, o autor afirma que “os problemas exigem dos alunos a ativação de diversos tipos de conhecimento, não só de diferentes procedimentos, mas também de diferentes atitudes, motivações e conceitos” (Pozo, 1998, p. 17).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (Brasil, 1998) destacam que o problema para um determinado aluno pode não ser para outro. Esse documento também distingue exercício e problema, expressando que “o problema certamente *não é* um exercício em que o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou um processo operatório. Só há problema se o aluno for levado a interpretar o enunciado da questão que lhe é posta e a estruturar a situação que lhe é apresentada” (Brasil, 1998, p. 41, *grifo nosso*). Um problema é uma situação que precisa que seja realizada uma sequência de ações ou operações para chegar ao resultado, em outras palavras, a solução não está disponível no início da resolução, mas é possível construí-la (Brasil, 1998).

Onuchic (1999, p. 215) afirma que “o ponto de partida das atividades matemáticas não é a definição, mas o problema”, uma vez que “o problema deve começar onde os alunos estão” (Van de Walle, 2009, p. 57). O estudante deve compreender o problema, mas também tem que desejar resolvê-lo (Polya, 2006)³, e, indo além, o autor expressa que “o problema deve ser bem

³ O livro *How to Solve It* foi escrito por George Polya em 1944, publicado em 1945, e traduzido em português como *A arte de resolver problemas* em 1978. Nesta dissertação foi utilizada a versão reimpressa de 2006.

escolhido, nem muito difícil nem muito fácil, natural e interessante, e um certo tempo deve ser dedicado à sua apresentação natural e interessante” (Polya, 2006, p. 5).

Acerca do termo *resolução de problemas*, Cai e Lester (2012, p. 148) afirmam que “refere-se a tarefas matemáticas que têm o potencial de proporcionar desafios intelectuais para melhorar o entendimento e desenvolvimento matemático dos estudantes”. Neste sentido, Allevato e Onuchic (2021, p. 37) apregoam que “considerada o ‘coração’ da atividade matemática, a resolução de problemas tem sido a força propulsora para a construção de novos conhecimentos e, reciprocamente, novos conhecimentos proporcionam a resolução de intrigantes e importantes problemas”.

Para Vieira e Allevato (2012, p. 2):

em Educação Matemática a expressão resolução de problemas, e a própria definição de problema, comporta diferentes interpretações e como se trata de uma expressão abrangente, pode assumir significados distintos de acordo com a concepção do sujeito que a emprega e com a forma de implementação em sala de aula.

Apesar dessa diversidade de interpretações, todas expressam a semântica de que o *problema* é algo que precisa ser solucionado, mas que não se tem uma receita pronta para tal, ao contrário do exercício que pode ser resolvido por algum algoritmo ou mecanismo já conhecido. Com relação à *resolução de problemas*, ela é vista como uma atividade importante dentro do cotidiano das pessoas, pois permite a construção de novos conhecimentos, ainda mais em sala de aula, desafiando os alunos.

2.2 ASPECTOS HISTÓRICOS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

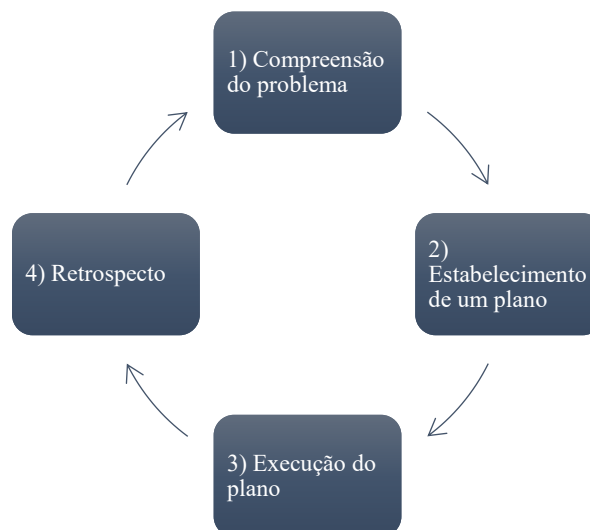
A ação de resolver problemas sempre esteve presente na vida das pessoas, desde as civilizações mais antigas (Allevato; Onuchic, 2021; Morais; Onuchic, 2021; Roque, 2012). Todavia, quando se fala em Resolução de Problemas (RP)⁴, enquanto uma teoria, remonta-se ao século XX, principalmente às mudanças ocorridas nos Estados Unidos, considerado “[...] o país em que a RP se constituiu como teoria” (Morais; Onuchic, 2021, p. 19).

Morais e Onuchic (2021) apregoam que o ensino de Matemática no início do século XX nos Estados Unidos se baseava na repetição de exercícios e na memorização. Esse método foi recebendo críticas, e é nesse momento que entra em foco o matemático e pesquisador George Polya com sua proposta de resolução de problemas.

⁴ De modo a evitar repetições de frases, será usada a abreviatura para se referir à metodologia de ensino, Resolução de Problemas.

Polya tornou-se uma referência importante em RP (Justulin, 2014) e em seu livro *A arte de resolver problemas* (2006), ele apresenta quatro etapas que um resolvidor percorre durante a resolução de um problema, conforme o esquema da Figura 1.

Figura 1 - Etapas sugeridas por Polya (2006)



Fonte: Autoria Própria.

A etapa 1) constitui-se em um momento no qual “o aluno precisa compreender o problema, mas não só isto: deve também desejar resolvê-lo” (Polya, 2006, p. 5). Em 2) é estabelecido uma relação entre os dados e a incógnita, pois “realmente, o principal feito na resolução de um problema é a concepção da ideia de um plano” (Polya, 2006, p. 7). Na etapa 3), é necessário colocar em ação o roteiro construído na etapa anterior, visto que, segundo Polya (2006), a execução do plano é mais fácil do que sua concepção, pois o que mais se precisa nesse momento é paciência. Por fim, na etapa 4), deve-se reconsiderar e reexaminar o resultado e o caminho que levou o aluno até a solução.

George Polya não estava preocupado apenas em apresentar seu método composto por essas quatro etapas de resolução, que foram disseminadas em trabalhos de seus alunos e seguidores; sua preocupação estava voltada também para a melhoria das habilidades de resolver problemas dos alunos. Para que isso de fato se efetivasse, era necessário que os professores se tornassem bons resolvidores e que eles quisessem que seus alunos fossem bons resolvidores de problemas (Morais; Onuchic, 2021).

As pesquisas que surgiram antes da década de 1980 acerca da RP se desenvolveram em paralelo ao currículo escolar oficial norte-americano. O referido currículo era orientado, à

época, pelo Movimento da Matemática Moderna que vigorou no currículo escolar norte-americano até o início da década de 1970 (Moraís; Onuchic, 2021).

Nesta perspectiva, Justulin (2014) afirma que nas décadas de 1960 e 1970 havia a forte influência da Matemática Moderna, movimento esse que valorizava a Matemática “apoiada na teoria dos conjuntos, destacando as propriedades e as abstrações matemáticas, por meio de uma linguagem precisa e concisa. O ensino de Matemática se distanciava das questões práticas” (Justulin, 2014, p. 51).

A Matemática no referido movimento era excessivamente abstrata, esse fato somado ao despreparo dos professores que não sabiam trabalhar dessa forma e a ausência da participação dos pais neste processo culminaram no fracasso dessa fase (Onuchic; Allevato, 2011).

Diante das mudanças no cenário escolar dos Estados Unidos, educadores matemáticos estadunidenses que acreditavam no potencial da resolução de problemas, objetivando um ensino e aprendizagem mais significativos, e inspirados por pesquisas já existentes, em 1980, elaboraram o documento *An Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics of the 1980*⁵ (NCTM, 1980), pelo *National Council of Teachers of Mathematics*⁶ (NCTM), que trazia como proposta que a resolução de problemas fosse o foco da Matemática escolar naquele período (Justulin, 2014; Onuchic; Allevato, 2011).

A partir desse momento, surge a fase da RP “cujas ideias apoiavam-se, especialmente, nos fundamentos do construtivismo e na teoria sociocultural, que tem Vygotsky como principal teórico” (Onuchic; Allevato, 2011, p. 78). O enfoque é sobre os processos de pensamento matemático dos alunos e à aprendizagem por descobertas dentro do contexto da resolução de problemas (Onuchic; Allevato, 2011).

No entanto, não havia uma clareza por parte dos professores sobre como deveriam trabalhar a resolução de problemas visando alcançar bons resultados com seus alunos (Onuchic; Allevato, 2011). Em 1978, Hatfield elenca três tipos de abordagens de ensino em resolução de problemas: i) ensinando *sobre* resolução de problemas; ii) ensinando *para* resolução de problemas; e iii) ensinando *via* resolução de problemas, contudo, se acredita que outros pesquisadores pudessem ter defendido algo similar antes (Moraís; Onuchic, 2021).

Posteriormente, Schroeder e Lester (1989) retomam e discutem essas abordagens:

- Ensinar *sobre* resolver problemas é fazer uso das quatro etapas (ou com pequenas variações) do método de Polya; o ensino sobre resolução de

⁵ Uma Agenda para Ação – Recomendações para a Matemática Escolar para a década de 1980.

⁶ Conselho Nacional de Professores de Matemática.

problemas “corresponde a considerá-la como um novo conteúdo” (Allevato; Onuchic, 2021, p. 39), no qual se ressaltam regras, etapas e processos para a resolução de um problema, independentemente do conteúdo específico abordado, fazendo referência à heurística de Polya.

- ao ensinar Matemática *para* resolver problemas, o foco se encontra em ensinar Matemática para que ela seja aplicada na resolução de problemas; o ensino *para* a resolução de problemas tem como ponto central a Matemática, em que se propõem problemas com o objetivo de aplicar aquilo que foi ensinado anteriormente. Nessa abordagem, “a Matemática é considerada utilitária de modo que, embora a aquisição de conhecimento matemático seja de primordial importância, o propósito principal do ensino é ser capaz de utilizá-lo” (Allevato; Onuchic, 2021, p. 39).
- e ao ensinar Matemática *via (através da)* resolução de problemas, o problema é tomado não só com o objetivo de aprender Matemática, mas também como significado primeiro de a fazer (Morais; Onuchic, 2021).

A partir do início da década de 1980, o NCTM começa a publicar uma série de materiais com o intuito de auxiliar os professores em sala de aula: *Curriculum and Evaluation Standards for the School Mathematics*⁷ (NCTM, 1989); *Professional Standards for Teaching Mathematics*⁸ (NCTM, 1991); e *Assessment Standards for School Mathematics*⁹ (NCTM, 1995). Esses esforços culminaram na publicação dos *Principles and Standards for School Mathematics*¹⁰ (NCTM, 2000), conhecido como *Standards 2000* (Morais; Onuchic, 2021).

Esses documentos desempenharam um papel importante no que tange à Resolução de Problemas no currículo das escolas estadunidenses, sua implementação, sistematização e divulgação, além de surtir reflexos nos currículos escolares de todo o mundo (Morais; Onuchic, 2021). O *Standards 2000* buscou fornecer orientações e trouxe contribuições para a Educação Matemática, desde a Educação Infantil até o Ensino Médio (Justulin, 2014), pois “foi, de fato, a partir dos *Standards 2000* que os educadores matemáticos passaram a pensar numa metodologia de ensino-aprendizagem de matemática *através* da resolução de problemas” (Onuchic; Allevato, 2011, p. 79-80, *grifo das autoras*).

⁷ Padrões de Currículo e Avaliação para a Matemática Escolar.

⁸ Padrões Profissionais para o Ensino de Matemática.

⁹ Padrões de Avaliação para a Matemática Escolar.

¹⁰ Princípios e Padrões para a Matemática Escolar.

No Brasil, os trabalhos de Onuchic (1999), Onuchic e Allevato (2011), Allevato e Onuchic (2021) e do Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas (GTERP)¹¹ buscaram trazer novas perspectivas sobre a utilização da RP para o ensino, ancoradas em Schroeder e Lester (1989), Polya (2006) e nas publicações do NCTM. Além de ressignificar a última das três abordagens, também apresentam um roteiro com sugestões para professores e educadores matemáticos trabalharem a RP em sala de aula, cuja abordagem é denominada Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas e será detalhada no item 2.3 deste trabalho.

Nessa perspectiva, o problema, entendido como “[...] tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em resolver” (Onuchic, 1999, p. 215), é utilizado, na sala de aula, para se dar início aos conteúdos matemáticos no ensino *através* da resolução de problemas. Dado que “a expressão ‘através – significando ‘ao longo’, ‘no decurso’ – enfatiza o fato de que ambas, Matemática e resolução de problemas, são consideradas simultaneamente e são construídas mútua e continuamente” (Allevato; Onuchic, 2021, p. 40).

Essa abordagem se tornou o principal interesse para desenvolver trabalhos no âmbito da RP (Onuchic; Allevato, 2011), por ser uma abordagem mais atual para trabalhar nas aulas de Matemática (Allevato; Onuchic, 2021). Além disso, ela é “uma alternativa metodológica bastante adequada ao cenário de complexidade em que se encontram atualmente as escolas, onde se insere o relevante trabalho do educador matemático” (Allevato; Onuchic, 2021, p. 41).

2.3 A METODOLOGIA DE ENSINO-APRENDIZAGEM-AVALIAÇÃO DE MATEMÁTICA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

A RP pressupõe “aulas de Matemática com professores e alunos envolvidos em comunidades de aprendizagem, desempenhando diferentes papéis e responsabilidades, visando a promover uma aprendizagem mais significativa” (Morais; Onuchic, 2021, p. 19). Na mesma perspectiva, Van de Walle (2009) afirma que “em uma comunidade de aprendizes de matemática, a aprendizagem dos estudantes é ampliada pelo pensamento reflexivo que a interação social promove” (Van de Walle, 2009, p. 50).

¹¹ Coordenado pela Profa. Dra. Lourdes de la Rosa Onuchic, o grupo é formado por alunos e ex-alunos do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (PPGEM) da UNESP de Rio Claro (SP) que tem encontros semanais desde 1992.

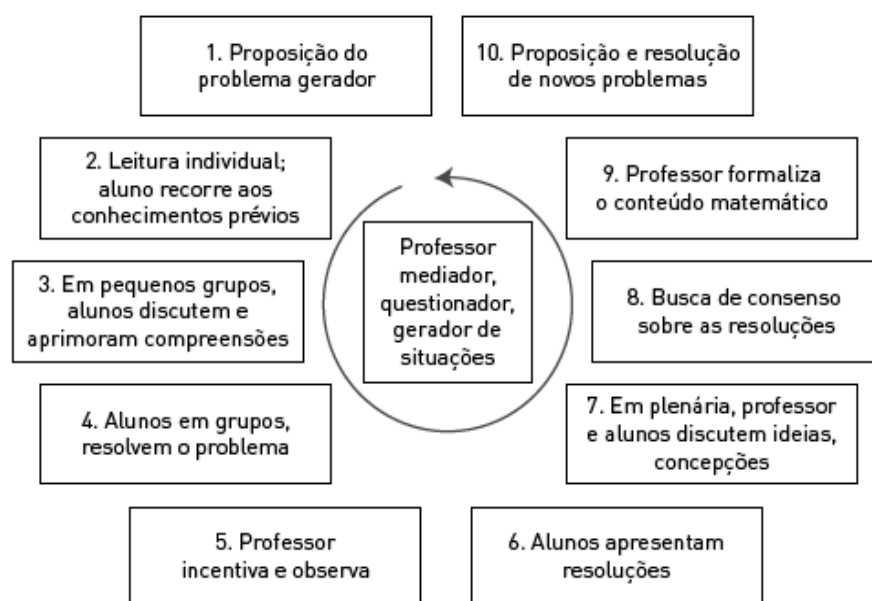
De acordo com Hähkiöniemi e Francisco (2019), o ensino através da resolução de problemas ajuda a promover a compreensão matemática por parte dos alunos. Nessa abordagem, “[...] espera-se que os alunos desenvolvam conhecimentos e habilidades à medida que exploram e resolvem problemas matemáticos, em vez de simplesmente os professores dizerem ou mostrarem aos alunos como se faz e pedir-lhes para praticar” (Hähkiöniemi; Francisco, 2019, p. 280, *tradução nossa*).

A MEAAMaRP valoriza o papel do aluno e o papel do professor, visto que se relacionam e “[...] pretende-se que, enquanto o professor *ensina*, o aluno, como um participante ativo, *aprenda*, e que a avaliação se realize por ambos” (Onuchic; Allevato, 2011, p. 81, *grifo das autoras*).

A finalidade da palavra composta ensino-aprendizagem-avaliação é “expressar uma concepção em que o ensino, a aprendizagem e a avaliação devem ocorrer simultaneamente durante a construção do conhecimento pelo aluno, com o professor atuando como guia e mediador” nesse processo (Allevato; Onuchic, 2021, p. 47).

Assim, apresentam-se dez etapas, conforme Figura 2, como sugestão para o desenvolvimento da MEAAMaRP em sala de aula: (1) proposição do problema; (2) leitura individual; (3) leitura em conjunto; (4) resolução do problema; (5) observar e incentivar; (6) registro das resoluções na lousa; (7) plenária; (8) busca do consenso; (9) formalização do conteúdo; e (10) proposição e resolução de novos problemas (Allevato; Onuchic, 2021).

Figura 2 - Etapas da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas



Fonte: Allevato e Onuchic (2021, p. 51).

1) Proposição do problema: consiste em escolher um problema gerador, que permitirá a construção de um novo conceito, conteúdo, princípio ou procedimento, ou seja, aquele conteúdo matemático não aprendido ainda pelos alunos e que o mais adequado para a resolução do problema (Allevato; Onuchic, 2021). O problema gerador pode ser selecionado ou elaborado pelo professor e proposto aos alunos, ou o professor pode aceitar um problema a partir da produção dos próprios alunos (Allevato, 2014).

2) Leitura Individual: cada aluno deve receber uma cópia do problema para realizar a leitura, de preferência impressa, para que eles não se distraiam ou percam tempo copiando da lousa (Justulin, 2014). Após receberem, os alunos são orientados, pelo professor, a realizar a leitura individual do problema gerador, pois assim ele “tem possibilidade de refletir, de colocar-se em contato com a linguagem matemática e desenvolver sua própria compreensão do problema proposto” (Allevato; Onuchic, 2021, p. 49).

3) Leitura em conjunto: os alunos se reúnem em grupos pequenos e é solicitado pelo professor uma nova leitura e discussão do problema. Nesse momento, o professor auxilia os grupos se acaso houver alguma dificuldade na leitura ou na compreensão de palavras contidas no enunciado (Allevato; Onuchic, 2021).

4) Resolução do problema: os grupos de alunos nesse momento, numa interação coletiva, buscam resolver o problema usando seus conhecimentos espontâneos. O problema gerador assume a posição de condutor, pois ele que conduzirá os alunos na construção do conhecimento que foi planejado pelo professor, ao propor esse problema, e será formalizado no fim da aula (Allevato; Onuchic, 2021).

5) Observar e incentivar: enquanto os alunos buscam a resolução do problema, o professor assume uma postura passiva e estimuladora, incentivando o trabalho coletivo, auxiliando e permitindo que os alunos sejam os protagonistas nesse processo (Allevato; Onuchic, 2021). Van de Walle (2009) expressa a importância de dar oportunidade de os alunos trabalharem sem a orientação do professor e que nessa etapa de resolução, o professor não deve tentar antecipar ou resolver as batalhas mentais de seus alunos. Em consonância, Justulin (2014) ressalta a importância de o professor incentivar, durante a resolução de problemas, que os alunos sejam autônomos, possibilitando soluções criativas.

6) Registro das resoluções na lousa: após a resolução do problema, um representante de cada grupo é convidado a colocar na lousa a forma que eles resolveram o problema. Independentemente do processo escolhido pelo grupo, sem medo do erro ou do julgamento dos demais, construindo assim o “painel de soluções”, ou seja, o registro da forma como cada grupo

resolveu o problema (Allevato; Onuchic, 2021). Esse “é um momento muito rico, pois os alunos sentem-se envolvidos e curiosos para a resposta” (Justulin, 2014, p. 64).

7) Plenária: os alunos são convidados a exporem a forma como pensaram, explicando e defendendo seus pontos de vista com relação ao problema resolvido. O professor assume a postura de mediador e guia das discussões sobre as diferentes resoluções expostas na lousa (Allevato; Onuchic, 2021). O professor deve envolver toda a turma em uma discussão produtiva, além de ajudá-los a trabalharem juntos como uma comunidade de aprendizes (Van de Walle, 2009).

8) Busca do consenso: depois de analisarem as resoluções e as dúvidas serem sanadas, o professor com seus alunos devem chegar a um consenso sobre a(s) resposta(s) correta(s), na busca pela construção do conteúdo matemático que se almeja alcançar com o problema gerador.

9) Formalização do conteúdo: nesse penúltimo momento, o professor registra na lousa uma apresentação “formal” (Allevato; Onuchic, 2021), ou seja, o conteúdo que tinha como objetivo ser construído pelos alunos nesse processo através do problema gerador, sem desconsiderar os caminhos seguidos pelos estudantes.

10) Proposição e resolução de novos problemas: visando a consolidação do processo e de modo a aprofundar e ampliar as compreensões do tópico matemático que foi introduzido na aula, se faz necessário que o professor proponha a seus alunos a resolução de novos problemas ou que incentive os alunos a elaborarem problemas por meio das experiências vivenciadas nas etapas anteriores da metodologia (Allevato; Onuchic, 2021).

2.4 A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NOS DOCUMENTOS OFICIAIS

Para contextualizar o trabalho com Resolução de Problemas em sala de aula no cenário brasileiro nas últimas décadas, é relevante destacar as orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (Brasil, 1998). De acordo com esse documento, o problema deve ser o ponto de partida da atividade matemática e ressaltam os autores que:

a resolução de problemas, na perspectiva indicada pelos educadores matemáticos, possibilita aos alunos mobilizar conhecimentos e desenvolver a capacidade para gerenciar as informações que estão a seu alcance. Assim, os alunos terão oportunidade de ampliar seus conhecimentos acerca de conceitos e procedimentos matemáticos bem como de ampliar a visão que têm dos problemas, da Matemática, do mundo em geral e desenvolver sua autoconfiança (Brasil, 1998, p. 40).

Entretanto, o documento destaca que nas aulas de Matemática, em geral, os problemas são usados apenas como uma forma de aplicação de conteúdos estudados previamente pelos

alunos (Brasil, 1998). Ao considerar essa abordagem, o uso da resolução de problemas não avança em instigar e incentivar os alunos para que construam seu próprio conhecimento.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Brasil, 2018) recomenda a resolução de problemas aos alunos do Ensino Fundamental, pois:

o desenvolvimento dessas habilidades está intrinsecamente relacionado a algumas formas de organização da aprendizagem matemática, com base na análise de situações da vida cotidiana, de outras áreas do conhecimento e da própria Matemática. Os *processos matemáticos* de resolução de problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e da modelagem podem ser citados como formas privilegiadas da atividade matemática, motivo pelo qual são, ao mesmo tempo, objeto e estratégia para a aprendizagem ao longo de todo o Ensino Fundamental. Esses processos de aprendizagem são potencialmente ricos para o desenvolvimento de competências fundamentais para o letramento matemático (raciocínio, representação, comunicação e argumentação) e para o desenvolvimento do pensamento computacional (Brasil, 2018, p. 266, *grifo dos autores*).

Andreatta e Allevato (2018), ao analisarem como a RP é entendida pela BNCC (Brasil, 2018), perceberam que ela é mencionada em várias partes do documento, tanto nos enunciados das competências gerais quanto nas competências específicas a serem desenvolvidas, em diferentes componentes curriculares. Nas competências específicas de Matemática, as menções à RP estão alinhadas “[...] à perspectiva de aprender matemática para resolver problemas e não resolver problemas para aprender matemática” (Andreatta; Allevato, 2018, p. 9).

Há menções à RP nas unidades temáticas: Números, Álgebra, e Grandezas e Medidas, todas elas indicando a atividade de resolver problemas após o aluno aprender os conteúdos matemáticos (Andreatta; Allevato, 2018). Os autores esclarecem também que há uma referência, no documento, da abordagem com a RP como um recurso para aprendizagem de conteúdos matemáticos.

Apoiados na BNCC (Brasil, 2018), os estados construíram seus currículos. No Paraná foi elaborado o Referencial Curricular do Paraná (RCP) (Paraná, 2018), que recomenda:

as tendências metodológicas dessa área – por exemplo, a resolução de problemas, a modelagem matemática, a etnomatemática, a história da matemática, a investigação matemática, as mídias tecnológicas, entre outras –, são estratégias que permitem desenvolver os conhecimentos matemáticos. Tais estratégias permitem um trabalho interdisciplinar, contextual e articulado entre os diversos conhecimentos da própria Matemática, assim como a comunicação entre os conhecimentos e saberes das diferentes disciplinas (Paraná, 2018, p. 810-811).

O RCP (Paraná, 2018) ressalta também que a Matemática e a Educação Matemática são vistas como práticas sociais e elas pressupõem que:

o ponto de partida para abordar os conteúdos matemáticos devem ser os conhecimentos e experiências que cada estudante possui, devendo esses, serem aprofundados, sistematizados, ampliados e generalizados em salas de aula, cabendo

ao professor o importante papel de mediar tais processos, adaptando-os, sem excluí-los, para atender as diversas especificidades de cada estudante e escola (Paraná, 2018, p. 811).

É indicado na BNCC (Brasil, 2018), as competências, as habilidades e os conhecimentos esperados que sejam desenvolvidos ao longo da escolaridade básica por todos os alunos. O documento foi elaborado não com o objetivo de ser um currículo, contudo é uma referência nacional obrigatória para que os sistemas e redes de ensino possam elaborar seus currículos (Teixeira; Allevato, 2020).

Em síntese, a BNCC (Brasil, 2018) e os currículos estaduais devem ter papéis complementares, de maneira que as aprendizagens essenciais de cada etapa da Educação Básica sejam asseguradas aos alunos. Tais aprendizagens só se materializam mediante o conjunto de decisões que caracterizam o currículo em ação¹² (Costa; Ericeira; Allevato; Neres, 2020).

2.5 INTERAÇÃO ENTRE PROFESSOR E GRUPO DE ALUNOS DURANTE A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Quando há o desenvolvimento da RP em uma aula de Matemática, o professor precisa dar suporte aos alunos fornecendo uma orientação adequada durante a resolução (Hähkiöniemi; Francisco, 2019). Celis, Quiroz e Toro-Vidal (2019) definem a interação do professor como sendo o momento no qual o professor visita um grupo de estudantes que está desenvolvendo uma atividade de resolução de problemas matemáticos.

Os autores relatam também que “uma típica interação do professor começa com o aluno o chamando, e então o professor visita o grupo e ouve a pergunta deles ou a solução que o grupo conseguiu e interage com eles. A interação do professor acaba quando ele deixa o grupo” (Celis; Quiroz; Toro-Vidal, 2019, p. 268, *tradução nossa*).

As interações entre professor e alunos são cruciais para que haja um efetivo processo de ensino e aprendizagem. Durante as interações com os grupos de estudantes, o professor é encorajado a intervir, principalmente por meio de questionamentos (Celis; Quiroz; Toro-Vidal, 2019; Hähkiöniemi, Francisco, 2019). Apresentam-se, no Quadro 1, as ações que um professor pode realizar ao interagir com um grupo de estudantes que está resolvendo problemas matemáticos:

¹² Segundo Geraldini (1994, p. 117, *grifo da autora*), “o currículo é entendido e trabalhado como o conjunto das aprendizagens vivenciadas pelos alunos, planejadas ou não pela escola, dentro ou fora da aula e da escola, mas sob a responsabilidade desta, ao longo de sua trajetória escolar. Denominamos essa concepção de *currículo em ação*”.

Quadro 1 - Ações do professor durante o processo de interação com um grupo de alunos

Ações	Descrição da ação
Interromper	No início da interação o professor interrompe o trabalho que está sendo desenvolvido pelos alunos.
Questionar	O professor interage com os alunos principalmente por meio de perguntas.
Investigar	Caracteriza-se pelo professor solicitando que o aluno apresente uma explicação acerca da resposta apresentada como solução do problema e/ou as estratégias utilizadas.
Julgar	O professor afirma se a solução obtida pelo grupo está correta ou não.

Fonte: Adaptado de Celis, Quiroz e Toro-Vidal (2019).

Sobre as interrupções Celis, Quiroz e Toro-Vidal (2019), por meio de sua pesquisa, conseguiram concluir que quanto menor for o número de vezes que o professor interrompe os grupos de alunos durante a resolução de problemas, mais eles avançarão no conteúdo matemático do problema. Hähkiöniemi e Francisco (2019), em seu trabalho sobre como os professores orientam seus alunos durante o desenvolvimento da resolução de problemas matemáticos em sala de aula, trazem duas principais ações dos professores, conforme Quadro 2.

Quadro 2 - Orientações dadas pelo professor em um processo de interação com um grupo de alunos durante a resolução de problemas matemáticos

Ações	Categorização
Focalizar o pensamento dos alunos	Ajudar sem deixar muito espaço para o aluno pensar.
	Ajudar parcialmente e dar espaço para o aluno pensar.
	Ajudar e dar espaço para o aluno pensar.
Enfatizar a justificativa	Pedir que os alunos repetidamente justifiquem suas ideias.
	Ajudar os alunos a formularem justificativas.

Fonte: Adaptado de Hähkiöniemi e Francisco (2019).

Na ação “Focalizar o pensamento dos alunos”, os professores tentam “[...] ajudar os alunos a prestar atenção ou focar em alguma questão relevante em sua atividade matemática, como perceber um erro que cometeram ou atender a um padrão emergente” (Hähkiöniemi; Francisco, 2019, p. 286, *tradução nossa*). Os autores relatam também que essa abordagem depende da abertura que o professor permite para que o aluno possa pensar.

Já na ação “Enfatizar a justificativa”, Hähkiöniemi e Francisco (2019) notaram que os professores participantes da pesquisa enfatizavam nos grupos de alunos a importância da justificativa da solução matemática obtida. Assim, ou o professor pedia repetidamente para que os alunos apresentassem uma justificativa ou ele ajudava o aluno a construir uma justificativa.

Stein, Engle, Smith e Hughes (2008) apresentam um modelo composto por cinco práticas que podem ser úteis aos professores para a realização de discussões coletivas de forma produtiva em suas aulas. Estas ações facilitam as discussões, apresentam uma melhora na qualidade dos debates, além de permitir aos professores anteciparem contribuições prováveis de seus alunos, preparar respostas, entre outras ações. O Quadro 3 expressa as práticas descritas pelos referidos pesquisadores, constituindo assim elementos importantes para o professor nesse processo de interação/discussão.

Quadro 3 - Práticas do professor para facilitar as discussões matemáticas dos alunos

Prática	Descrição
Antecipar	O professor realiza a antecipação de possíveis processos de resolução que os alunos terão, sejam eles corretos ou não. Ele faz um esforço para imaginar as respostas dos alunos, ou seja, o modo como cada um poderá resolver o problema.
Monitorar	Nesse momento, enquanto os alunos exploram as tarefas, o professor circula pela sala observando o trabalho que está sendo desenvolvido pelos grupos, prestando atenção ao que os alunos estão fazendo e dizendo. Por meio do que é observado, o professor pode avaliar o pensamento matemático de seus alunos.
Selecionar	Depois do professor monitorar as respostas dos alunos, ele seleciona alguns alunos para compartilharem suas estratégias de resolução para o restante da turma. Essa seleção pode ocorrer de duas formas: i) selecionar o que se quer; ou ii) pedir voluntários para apresentarem e, então, selecionar as respostas mais relevantes.
Sequenciar	Tendo selecionado alunos específicos para apresentar suas resoluções, o professor pode escolher como sequenciar as apresentações dos alunos entre si, de modo a favorecer as discussões. Aqui, o professor pode iniciar a discussão com uma estratégia que a maioria da turma utilizou, favorecendo a compreensão ou, então, começar com uma estratégia que se baseou em um equívoco e esclarecê-lo. Essa prática está relacionada com a ordem em que são apresentadas as resoluções dos alunos, com o intuito de obter uma discussão matemática coerente.
Estabelecer conexões	Finalmente, o professor deverá ajudar os alunos a estabelecerem ligações entre as suas resoluções e as dos outros alunos, levando em consideração as semelhanças e diferenças presentes e permitindo ao aluno refletir sobre o trabalho que fizeram.

Fonte: Adaptado de Stein, Engle, Smith e Hughes (2008).

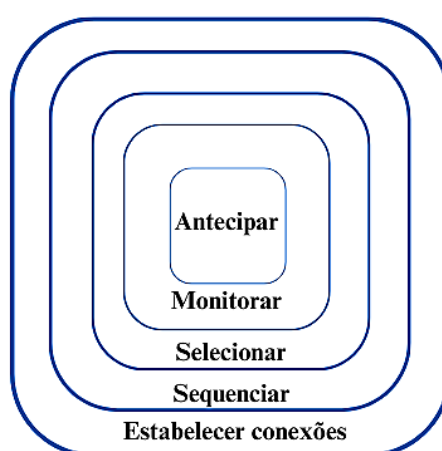
As ações, apresentadas no Quadro 3, podem ser relacionadas às etapas da MEAAMaRP. A prática “Antecipar” está presente na etapa 1 – Proposição do problema, em que além do professor fazer a escolha do problema gerador, nesse momento ele vislumbra as possíveis dificuldades e estratégias de resolução dos alunos. A prática “Monitorar” está presente na etapa 5 – Observar e incentivar, pois enquanto os alunos tentam resolver o problema, o professor tem o papel de mediador, incentivando o trabalho coletivo e o protagonismo dos alunos no processo.

A prática “Selecionar” se relaciona à etapa 6 – Registro das resoluções na lousa, na qual um representante de cada grupo, apresenta as estratégias de resolução que utilizaram para chegar à solução do problema. A ação de “Sequenciar” se faz presente nas etapas 7 - Plenária e 8 – Busca do consenso, pois é proposto aos alunos defenderem seus pontos de vista em relação ao modo como pensaram e resolveram o problema e o professor tem o papel de mediar essa

discussão coletiva, obtendo um consenso acerca da resposta correta visando a formalização do conteúdo matemático que se quer construir.

Por fim, a prática “Estabelecer conexões” se faz presente na etapa 9 – Formalização do Conteúdo, uma vez que nesse momento se faz necessário estabelecer uma conexão, uma relação entre o conhecimento matemático prévio que os alunos detêm e aquele que o professor quer formalizar, ou seja, construir a Matemática por meio do problema gerador. As cinco práticas apresentam uma sequência, uma conexão, conforme Figura 3:

Figura 3 - Diagrama esquemático das cinco práticas



Fonte: Stein, Engle, Smith e Hughes (2008, p. 322, *tradução nossa*).

Essas cinco ações se relacionam entre si, posto que cada uma se baseia na prática anterior para que a próxima possa acontecer. Vale ressaltar que sem a prática “Antecipar” as outras não podem ocorrer. A prática “Monitorar”, por exemplo, em que o professor tem o papel de acompanhar o trabalho dos alunos, suas discussões e explorações são favorecidas a partir da preparação que o professor faz na ação “Antecipar”, e o mesmo vale para todas as demais práticas.

2.6 PENSAMENTO MATEMÁTICO E A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

É comum os professores de Matemática dizerem que buscam ensinar seus alunos a “pensar matematicamente”. No entanto, o que os teóricos dizem sobre isso? Piggott (2007) expressa a existência de uma estreita ligação entre as estratégias de resolução de problemas e o pensamento matemático. A referida pesquisadora faz uma diferenciação entre esses termos, nos quais a resolução de problemas se refere às habilidades mais gerais e o pensamento matemático

baseia-se em habilidades mais específicas que sustentam o processo matemático de resolução de problemas.

Já o pensamento matemático pode ser entendido como sendo aquele “[...] que auxilia o aluno (e todos nós) a fazer as ligações necessárias para que ocorra a compreensão dos conceitos apresentados à nossa frente” (Atz, 2017, p. 13). De acordo com Tall e Yusof (1994, p. 402, *tradução nossa*), ele se caracteriza pelos aspectos de “formular, modificar, refinar, revisar problemas e as suas soluções, especializar em casos mais simples, generalizar através de uma especialização sistemática, procurar padrões, conjecturar, testar e justificar”.

Stacey (2006) considera que o pensamento matemático é: i) um objetivo importante de escolarização; ii) importante como uma maneira de se aprender matemática; e iii) importante para o ensino de matemática. Stacey (2006) afirma também que a capacidade de se pensar matematicamente e de usar o pensamento matemático para resolver problemas é uma importante finalidade da escolarização.

A autora ainda, apresenta dois pares de processos pelos quais o pensamento matemático é evidenciado na resolução de problemas, sendo eles: (i) especificar e generalizar; e (ii) conjecturar e convencer (Stacey, 2006). A autora esclarece cada um dos processos, conforme o Quadro 4.

Quadro 4 - Descrição dos processos de pensamento matemático evidenciados durante a atividade de resolução de problemas

Processos	Descrição
Especificar	O aluno busca casos particulares, exemplos
Generalizar	O aluno procura por padrões e relações
Conjecturar	O aluno prevê resultados e relações
Convencer	O aluno procura razões pelas quais algo é verdade e as comunica

Fonte: Adaptado de Stacey (2006).

Hähkiöniemi e Francisco (2019) afirmam que o problema proposto aos alunos deve ser desafiador para que estimule o pensamento matemático deles. Contudo, para que isso ocorra de fato, os professores devem intervir nos grupos durante a resolução de problemas possibilitando o pensamento matemático dos alunos, sem esgotar a autonomia intelectual deles (Hähkiöniemi; Francisco, 2019).

Segundo Hähkiöniemi e Francisco (2019), a promoção do pensamento matemático requer um gerenciamento eficiente da sala de aula para garantir que todos os alunos participem das discussões com capacidade e disposição, apresentando seus próprios métodos de resolução.

É de fato necessário que o professor tenha consciência da importância de dar espaço para o próprio pensamento dos alunos e ajudá-los sem restringi-los (Hähkiöniemi; Francisco, 2019).

Mason, Burton e Stacey (2010) apresentam uma série de perguntas e respostas que sintetizam a visão deles acerca do pensar matematicamente, conforme Quadro 5.

Quadro 5 - Perguntas e respostas sobre o Pensamento Matemático

O que é Pensamento Matemático?
R: Um processo dinâmico que nos permite aumentar a complexidade de ideias, expandindo nossa compreensão.
O que podemos usar para conseguir isso?
R: Especializar, generalizar, conjecturar e convencer.
O que aperfeiçoa o Pensamento Matemático?
R: Praticar com reflexão.
O que apoia o Pensamento Matemático?
R: Um ambiente de desafio, reflexão, questionamento, com amplo espaço e tempo.
O que o Pensamento Matemático provoca?
R: Provoca uma surpresa, um desafio, uma contradição, uma lacuna percebida na compreensão.
Onde leva o Pensamento Matemático?
R: A uma compreensão mais profunda de si mesmo, uma visão mais coerente do que se sabe, uma avaliação mais crítica sobre o que se vê e ouve, além de uma investigação mais eficaz sobre o que se deseja saber.

Fonte: Autoria Própria com base em Mason; Burton; Stacey, 2010.

Mason, Burton e Stacey (2010) destacam a importância de um ambiente que instigue a investigação, e entendem que “o pensamento matemático é apoiado por uma atmosfera de questionamento, desafio e compreensão” (Mason; Burton; Stacey, 2010, p. 145). O Quadro 6, traz uma descrição sobre cada um dos processos de Pensamento Matemático:

Quadro 6 - Descrição dos processos de pensamento matemático

Processos	Descrição
Especificar	Significa recorrer a exemplos para entender a questão, como diagramas, símbolos algébricos ou numéricos. O processo de “especificar”, por si, só não leva à resolução do problema propriamente dita, mas pode ser o início para o aluno começar a resolver e se envolver, pois casos particulares podem ajudar o resolvidor a ter uma noção mais clara do que se trata o problema.
Generalizar	É “o sangue vital da matemática” (Mason; Burton, Stacey, 2010, p.8, <i>tradução nossa</i>). Casos específicos são úteis, mas resultados matemáticos são apresentados em geral, visto que a generalização começa com a percepção de um padrão subjacente, mesmo que não se consiga articulá-lo.
Conjecturar	É uma afirmação que parece razoável, todavia ela não foi estabelecida como verdadeira ainda. Nem todas as conjecturas têm tanta importância, a maioria é falsa, e elas são modificadas logo que surgem. É o processo de sentir ou adivinhar que algo pode ser verdadeiro e investigar sua verdade.
Convencer	Explicar o porquê envolve convencer, e ainda mais importante, convencer os outros que podem justificar seus argumentos. É o processo que está por trás de tentar explicar por que algo pode ser verdade, conjecturar.

Fonte: Autoria Própria a partir de Mason, Burton e Stacey (2010).

Para esta pesquisa será utilizada a definição de Pensamento Matemático de Stacey (2006) e de Mason, Burton e Stacey (2010). Os pesquisadores em RP e, em especial, seu precursor George Polya (2006), defendem e incentivam o uso de problemas, pois eles favorecem o pensar do aluno. Em outras palavras os problemas favorecem o pensar de formas mais avançadas, possibilitando processos mais amplos para além da memorização.

Na mesma direção, Onuchic e Allevato (2011) afirmam que no ensino através da resolução de problemas, ao analisar os métodos utilizados e as soluções obtidas para o problema proposto, o aluno visa a construção de seu conhecimento, que “[...] é consequência de seu *pensar matemático*, levando-o a elaborar justificativas e a dar sentido ao que faz” (Onuchic; Allevato, 2011, p. 81, *grifo das autoras*). Na MEAAMaRP, durante a resolução do problema gerador, em que os alunos fazem uso de seu conhecimento prévio (etapa 4 - Resolução do Problema), é evidenciado o pensamento matemático do aluno nos processos de especificar, generalizar, conjecturar e convencer (Stacey, 2006).

Na seção 3, é apresentado o estado da questão, após a realização do levantamento bibliográfico que identificou os trabalhos produzidos e disponibilizados na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD) e no Catálogo de Teses e Dissertações da Capes. Por meio dele, é possível identificar trabalhos no âmbito desta pesquisa os quais trouxeram contribuições a este campo de estudo, a Resolução de Problemas e o pensamento matemático.

3 ESTADO DA QUESTÃO

Nesta seção, são apresentados os resultados do levantamento bibliográfico, realizado com o objetivo de buscar trabalhos já produzidos, possibilitando evidenciar as contribuições dessa pesquisa neste todo. Entende-se que “a finalidade do ‘estado da questão’ é a de levar o pesquisador a esclarecer, a partir de um rigoroso levantamento bibliográfico, como se encontra o tema ou o objeto de sua investigação no estado atual da ciência ao seu alcance” (Nóbrega-Therrien, Therrien, 2004, p. 7).

Inicialmente, foi realizada uma busca avançada na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD), com o uso dos termos: “*Resolução de Problemas*” e “*Pensamento Matemático*”, no dia 31 de julho de 2023, com o período de busca de 2005 até 2023, e obteve-se um total de 20 trabalhos que contemplavam os campos supracitados. Como conseguinte, observando o resumo, palavras-chave e o referencial teórico de cada trabalho, obtiveram-se cinco trabalhos que envolveram tanto a RP quanto o Pensamento Matemático, defendidas entre 2005 e 2019: Wielewski (2005), Atz (2017), Santos (2018), Souza (2018) e Chaparin (2019).

Dos cinco trabalhos, apenas Atz (2017) utilizou a MEAAMaRP, dado que os demais abordaram a RP tomando como base os trabalhos de Polya. Acerca do Pensamento Matemático, ressaltam-se aqui os enfoques trazidos por Wielewski (2005), Atz (2017) e Chaparin (2019), todavia nenhuma das pesquisas apresentou o mesmo objetivo proposto neste trabalho. O Quadro 7 apresenta as pesquisas mencionadas anteriormente e, na sequência, há informações sobre o que é abordado em cada uma delas.

Quadro 7 - Pesquisas sobre os temas “Resolução de Problemas” e “Pensamento Matemático”

Ano	Modalidade	Título	Autor(a)	Instituição
2005	Doutorado em Educação Matemática	Aspectos do pensamento matemático na resolução de problemas: uma apresentação contextualizada da obra de Krutetskii	Gladys Denise Wielewski	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
2017	Mestrado em Ensino de Matemática	A análise combinatória no 6º ano do Ensino Fundamental por meio da resolução de problemas	Dafne Atz	Universidade Federal do Rio Grande do Sul
2018	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT	Desenvolvimento do pensamento matemático: resolução de problemas de raciocínio lógico-matemático no Ensino Fundamental	José Ailton dos Santos	Universidade Federal de Alagoas
2018	Doutorado em Educação Matemática	Resolução de Problemas: enfoque metodológico e teórico	Helena Tavares de Souza	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
2019	Doutorado em Educação Matemática	A formação continuada de professores que ensinam matemática, centrada na	Rogério Osvaldo Chaparin	Pontifícia Universidade

Ano	Modalidade	Título	Autor(a)	Instituição
		resolução de problemas e em processos do pensamento matemático		Católica de São Paulo

Fonte: Consulta a Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD), em 31 de julho de 2023.

Wielewski (2005) teve por objetivo indicar dimensões e características do pensamento matemático, tanto em termos teóricos quanto experimentais. O referido trabalho consistiu em uma pesquisa exploratória qualitativa, no formato de estudo de caso, com a finalidade de investigar o pensamento matemático de alguns estudantes universitários ao resolverem problemas matemáticos. A pesquisa foi composta por três momentos, sendo que em dois deles foram propostos questionários aos participantes, e outro momento voltado à resolução de treze problemas variados tendo como público-alvo 13 alunos da Universidade Federal do Mato Grosso que cursavam ou Licenciatura Plena em Matemática ou Ciências da Computação.

Por meio de sua pesquisa, Wielewski (2005) documentou e verificou vários parâmetros e características do pensamento matemático, além de identificar que os próprios problemas e as experiências com a resolução dos alunos também influenciaram seu pensamento matemático. Nesta pesquisa, houve um grande enfoque dado ao campo do pensamento matemático apresentando aspectos que o influenciam e trazem análises desse pensamento matemático com base nas resoluções propostas pelos alunos, tomando como referência a literatura da área e a pesquisa desenvolvida pela autora. No mencionado trabalho há menções sobre como se resolver problemas, as estratégias de resolução e sobre como um mesmo problema pode ser resolvido por diferentes caminhos, ou seja, o foco se encontrou no ensinar *sobre* resolver problemas.

A pesquisa, elaborada por Atz (2017), é um estudo de caso, e a autora buscou responder “como a Resolução de Problemas pode auxiliar alunos de 6º ano a compreender os conceitos de Análise Combinatória?”. Para isso, ela elaborou uma sequência didática com atividades que expusessem o aluno aos conceitos de Análise Combinatória, e essa atividade foi desenvolvida em suas aulas fazendo uso das etapas sugeridas por Onuchic e Allevato (2011), com exceção da etapa 9 (formalização do conteúdo)¹³. A pesquisa concluiu que a abordagem auxiliou os alunos na aprendizagem de alguns conceitos iniciais de Análise Combinatória. A autora considerou, ainda, que a Resolução de Problemas auxiliou a expandir e a modificar as imagens dos conceitos dos alunos em relação à Análise Combinatória. Ressalta-se também que a pesquisa contou com um aporte teórico de Pensamento Matemático, destacando-se o autor

¹³ Onuchic e Allevato (2011) propuseram 9 etapas como sugestão para a MEAAMaRP. Todavia, em 2021, Allevato e Onuchic (2021) sugerem o acréscimo de mais uma etapa, a etapa 10 – Proposição e resolução de novos problemas.

David Tall. A pesquisa relacionou a Resolução de Problemas com o Pensamento Matemático, trazendo como principais autores Onuchic e Allevato (2011) e Tall e Yusof (1994) respectivamente, e, também, construiu uma tabela para relacionar as semelhanças encontradas entre as etapas da MEAAMaRP e os aspectos apresentados do pensamento matemático pelos alunos ao resolverem problemas.

Santos (2018) teve como objetivo principal contribuir para “o bom desempenho” dos estudantes na resolução de problemas de Matemática e raciocínio lógico. Este objetivo surge após o autor perceber a dificuldade que muitos alunos, do Ensino Fundamental – Anos Finais, têm em resolver problemas matemáticos, além de apresentarem fraco desempenho em raciocinar corretamente em termos lógicos. Ressalta-se que há no trabalho um enfoque no campo da Resolução de Problemas, no qual o autor fez uso do ensino *sobre* resolução de problemas, ou seja, evidencia-se a abordagem das quatro etapas proposta por Polya (2006) para a resolução de problemas matemáticos. O autor conclui que muitas dessas dificuldades são sequelas de um processo de aprendizagem malsucedido, que o desenvolvimento do raciocínio lógico está relacionado com a habilidade em resolver problemas e que a prática insistente de resolver exercícios poderá não garantir o saber matemático. Apesar do campo Pensamento Matemático constar no referencial teórico dessa pesquisa, o autor focou no Raciocínio Lógico evidenciado nas resoluções propostas pelos alunos durante a análise dos dados.

Souza (2018), em seu trabalho, teve por objetivo abordar a Resolução de Problemas na Educação Matemática apoiando-se nos autores, Duval (1988, 1993, 1995, 2003, 2004) e Polya (2006), analisando convergências, divergências e complementariedades, buscando responder à seguinte questão de pesquisa: “Quais as contribuições da teoria Registro de Representação Semiótica, segundo Duval, à metodologia Resolução de Problemas na perspectiva de Polya e outros autores para compreensão e interpretação de situações-problema de Matemática?”. Os resultados da pesquisa apontam que a teoria Registro de Representação Semiótica, segundo Duval, alinhada à Resolução de Problemas indicada por Polya propicia o desenvolvimento cognitivo dos sujeitos para a compreensão de conceitos e a formação do pensamento matemático. A RP se fez presente no trabalho; todavia, apesar do termo “pensamento matemático” ter sido citado diversas vezes, ele não constava como referencial teórico e a análise da pesquisa realizada não foi feita tomando-o como base.

A pesquisa de Chaparin (2019) investigou as possíveis mudanças ocorridas nas ações docentes de professores que ensinam matemática, durante e após a vivência do curso de formação continuada que tinha como foco a resolução de problemas e os processos de pensamento matemático. Durante o curso foi dado enfoque em como abordar a resolução de

problemas como metodologia de ensino, dando ênfase na aprendizagem de como resolver problemas e em como ensinar matemática utilizando problemas. A pesquisa de natureza qualitativa foi desenvolvida com 37 professores da rede estadual de São Paulo, e por meio de seu trabalho Chaparin (2019) concluiu que o curso propiciou mudanças nas práticas de sala de aula dos docentes participantes da pesquisa, uma vez que muitos revelaram que começaram a incorporar a resolução de problemas em suas aulas. Evidencia-se aqui que tanto o campo da RP quanto o de Pensamento Matemático foram utilizados no referencial teórico, na metodologia e na análise dos dados. O autor destaca Stacey (2006) e Mason, Burton e Stacey (2010), entre outros autores, enfatizando que durante a resolução de problemas há evidências dos processos de pensamento matemático, e assim constrói seu curso de formação continuada centrado nessas perspectivas.

Após a análise desses trabalhos, realizou-se uma nova busca na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD) com o uso dos termos: “Interação entre professor e alunos” e “Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas” e não houve resultados, o mesmo ocorreu ao fazer uma busca análoga utilizando os mesmos termos no Catálogo de Teses e Dissertações da Capes, e de modo concomitante não se obteve nenhum resultado.

Foi efetuada, ainda, uma pesquisa no Catálogo de Teses e Dissertações da Capes digitando no ícone de busca: “*Resolução de Problemas*” AND “*Pensamento Matemático*”, no dia 18 de agosto de 2023, e tivemos como resultado 21 trabalhos dos quais apenas 4 envolveram os dois campos supracitados, defendidos de 2017 a 2022: Atz (2017), Santos (2018), Chaparin (2019) e José (2022).

Na sequência, traz-se uma descrição sobre o que é abordado em José (2022), pois as demais pesquisas: Atz (2017), Santos (2018), Chaparin (2019), já foram detalhadas anteriormente quando ao apresentar a busca realizada na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD).

José (2022) teve como objetivo investigar vestígios do pensamento matemático e do pensamento computacional na resolução de problemas. Para isso, ele analisou as respostas fornecidas por 13 participantes do Módulo 6 da 19ª Edição do Curso do GeoGebra ofertado pela Universidade Estadual do Paraná (UNESPAR) e pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Mato Grosso (FAPEMAT), campi de Barra dos Bugres/MT. A pesquisa desenvolvida foi de caráter qualitativo interpretativo e concluiu que entender os processos mentais de Pensamento Matemático e Pensamento Computacional, além do entrelaçamento existente entre ambos, pode contribuir para uma melhor identificação de problemas oriundos

de nosso dia a dia. Evidencia-se o enfoque dado aos campos do pensamento matemático e computacional, seja no referencial teórico ou na análise dos dados. Entretanto José (2022) focou sua análise nas resoluções propostas pelos participantes, ou seja, no ato de resolver problemas, utilizando Polya (2006) como principal referencial teórico.

As pesquisas apresentadas trazem um panorama sobre a Resolução de Problemas e o Pensamento Matemático. Elas ajudaram no refinamento do objetivo de pesquisa, pois impulsionaram na busca pela compreensão de como as ações dos professores, em uma aula fazendo uso da MEAAMaRP, podem ou não favorecer o desenvolvimento do pensamento matemático de seus alunos. De modo específico, identificou-se uma lacuna, haja vista que não foram encontradas pesquisas que analisassem as ações dos professores ao interagir com seus alunos enquanto eles resolviam um problema gerador durante uma aula de Matemática utilizando a MEAAMaRP, de modo a favorecer o desenvolvimento dos processos de pensamento matemático desses estudantes. É nesta seara que se localiza a presente pesquisa.

4 PERCURSO METODOLÓGICO DA PESQUISA

4.1 METODOLOGIA

A presente pesquisa é do tipo qualitativa e tem como objetivo geral analisar as ações de duas professoras ao ministrarem uma aula fazendo uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas (MEAAMaRP) e suas influências (ou contribuições) para o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos. Houve aprovação do projeto de pesquisa pelo Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) envolvendo Seres Humanos da UTFPR em junho de 2023, sob o parecer nº 6.095.144.

Sobre a pesquisa qualitativa, Bicudo (2019) esclarece que é preciso deixar claro o que se busca ao pesquisar e, também, em que sentido se fala em qualitativo. A autora afirma que “[...] o *qualitativo* engloba a ideia do subjetivo, passível de expor sensações e opiniões” (Bicudo, 2019, p. 111, *grifo da autora*). Nesta pesquisa, busca-se investigar as ações das professoras, ao ministrar uma aula fazendo uso da MEAAMaRP, e o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos. Quanto ao qualitativo, ele se refere à busca por subjetividades e particularidades das turmas e das professoras participantes da pesquisa.

Garnica (2019) destaca que o adjetivo “qualitativa” estará adequado àquelas pesquisas que reconhecerem:

(a) a transitoriedade de seus resultados; (b) a impossibilidade de uma hipótese *a priori*, cujo objetivo da pesquisa será comprovar ou refutar; (c) a não neutralidade do pesquisador que, no processo interpretativo, vale-se de suas perspectivas e filtros vivenciais prévios dos quais não consegue se desvencilhar; (d) que a constituição de suas compreensões dá-se não como resultado, mas numa trajetória em que essas mesmas compreensões e também os meios de obtê-la podem ser (re)configuradas; e (e) a impossibilidade de estabelecer regulamentações, em procedimentos sistemáticos, prévios, estáticos e generalistas (GARNICA, 2019, p. 96-97).

Bogdan e Biklen (1994) descrevem as pesquisas qualitativas em cinco características: (1) a fonte direta dos dados é o ambiente natural, na qual o instrumento principal é constituído pelo investigador, (2) a investigação qualitativa é descritiva, (3) os investigadores se interessam mais pelo processo que se dá do que simplesmente pelos produtos ou resultados, (4) os investigadores analisam os dados de maneira dedutiva, e (5) o significado é de vital importância.

Com relação à presente pesquisa: (1) a fonte direta dos dados é o ambiente da sala de aula, composto pelas professoras e seus respectivos alunos, os dados foram produzidos por meio do *Google Meet*, durante as entrevistas, e em sala de aula com o uso de gravadores, câmera, e diário de campo; (2) a pesquisa aqui desenvolvida detalha todo o processo realizado, desde a

preparação até o momento de coleta dos dados, trazendo as transcrições e análises dos dados; (3) a pesquisadora acompanhou a implementação dos problemas, desde seu planejamento e não somente aos resultados que foram obtidos. Todo esse processo é relevante e faz parte da pesquisa de campo; (4) os dados coletados são observados e analisados de forma minuciosa; e (5) todo o processo é significativo, pois é o que dá suporte a pesquisa e auxilia na busca do objetivo.

Sobre as características da investigação qualitativa, Bogdan e Biklen (1994) consideram que os dados devem ser analisados em toda a sua riqueza, respeitando, ao máximo possível, a forma que eles foram registrados ou transcritos. Os dados são recolhidos em forma de palavras ou imagens, incluindo, assim, notas de campo, transcrições de entrevistas, fotografias, entre outros.

Ao fazer uso de uma abordagem qualitativa, os dados precisam ser analisados considerando-se que nada é trivial e tudo tem potencial para construir uma pista que permita estabelecer uma melhor compreensão do objeto de estudo (Bogdan; Biklen, 1994). De acordo com os autores, “[...] nada é considerado como um dado adquirido e nada escapa à avaliação” (Bogdan; Biklen, 1994, p. 49).

Os investigadores qualitativos, preocupados com questões educativas, dedicam grandes quantidades de tempo em escolas ou outros locais. O processo de análise dos dados “[...] é como um funil: as coisas estão abertas de início (ou no topo) e vão-se tornando mais fechadas e específicas no extremo” (Bogdan; Biklen, 1994, p. 50).

4.2 PARTICIPANTES, INSTRUMENTOS E PROCEDIMENTOS DE PESQUISA DE CAMPO

De modo a responder à questão norteadora, foram convidadas duas professoras que conheciam e faziam uso da MEAAMaRP, ou seja, que já estavam familiarizadas com a metodologia. Esta foi uma condição necessária, visto que o objetivo da pesquisa foi analisar ações das professoras, em uma aula fazendo uso da MEAAMaRP, e suas influências (ou contribuições) para o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos.

A princípio, o convite foi realizado aos integrantes do Grupo de Estudo em Resolução de Problemas (GERP), da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), coordenado pela prof.^a Dr.^a Andresa Maria Justulin. O GERP é formado por alunos e ex-alunos do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGMAT), da UTFPR, *multicampi* Cornélio Procópio e Londrina que se reúne quinzenalmente, via *Google Meet*, para discutir, refletir,

buscar novas pesquisas acerca da MEAAMaRP, além de compartilhar vivências e ensinamentos. Um segundo convite foi feito para ex-alunos da disciplina *Resolução de Problemas no ensino de Matemática*, oferecida também no PPGMAT, que é ministrada pela prof.^a Dr.^a Andresa Maria Justulin. Duas professoras (uma do grupo e uma ex-aluna) se dispuseram a colaborar com a pesquisa, e a fim de manter o anonimato foram utilizados nomes fictícios sugeridos pelas professoras participantes.

A professora Natália é formada em Licenciatura Plena em Matemática pela Universidade Camilo Castelo Branco/SP, tem especialização em Metodologia e Ensino de Matemática, além de especialização e Docência em Ensino Superior pela Pontifícia Universidade Católica do Paraná (PUC/PR), e é mestra em Ensino de Matemática pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Atua há vinte anos como professora, todavia há sete anos, com carga horária semanal de 30 horas e somente em uma escola particular na cidade de Maringá, localizada na região noroeste do Paraná. A instituição atende alunos da Educação Infantil ao Ensino Médio, contava com aproximadamente 1000 alunos matriculados, no momento da realização da pesquisa.

A professora Laura tem Licenciatura Plena em Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL), é mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR) e integrante do GERP. Atua há dois anos como professora de Matemática da rede estadual, e atualmente trabalha em uma escola cívico militar na cidade de Rolândia, localizada na região norte do Paraná, com carga horária de 39 horas/aula.

Para participar da pesquisa cada uma das professoras poderia escolher uma de suas turmas, em que desenvolveriam uma aula utilizando a MEAAMaRP. A professora Natália selecionou uma turma de sétimo ano, composta por 28 alunos do colégio particular, localizado na cidade de Maringá, na qual ela atua como professora de Matemática. Já a professora Laura escolheu uma turma de oitavo ano, composta por 30 alunos de uma escola pública cívico-militar, localizado na cidade de Rolândia, onde atua como professora da disciplina de Matemática. Todos os alunos, de ambas as professoras, foram convidados a levar o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) para seu responsável assinar e, também, fizeram a leitura e assinaram o Termo de Assentimento Livre e Esclarecido (TALE), indicando sua concordância em participar da pesquisa.

Na primeira etapa da pesquisa, a professora-pesquisadora realizou uma entrevista individual, por meio do *Google Meet*, com cada uma das participantes a partir do roteiro de entrevista semiestruturado que consta no Apêndice A, com duração média de 20 minutos.

O roteiro de entrevista semiestruturado (Apêndice A) é composto por cinco perguntas. A escolha pela entrevista, bem como a seleção das questões se deu para conhecer a visão das professoras sobre aspectos relevantes à pesquisa como: se faziam uso da MEAAMaRP, como elas costumam interagir com os alunos durante o momento da resolução, se elas costumam questionar os alunos, o que elas compreendem por “pensamento matemático” e se elas consideram que as interações entre professor-alunos ajudam no desenvolvimento do pensamento matemático.

Acerca da entrevista semiestruturada, Manzini (2012, p. 156), expressa que ela tem como característica “um roteiro com perguntas abertas e é indicada para estudar um fenômeno com uma população específica: grupo de professores; grupo de alunos; grupo de enfermeiras, etc.”. Segundo Manzini (2012), neste tipo de entrevista deve haver flexibilidade na sequência da apresentação das perguntas para o entrevistado, e o entrevistador pode fazer perguntas complementares para entender melhor o fenômeno que está em pauta.

Quando a entrevista é bem realizada, permite ao pesquisador fazer uma espécie de mergulho em profundidade, conseguindo coletar indícios do modo de como cada sujeito percebe a sua realidade, além de levantar informações consistentes que lhe permitam descrever e compreender a lógica que reside nas relações que são estabelecidas no interior daquele grupo, o que geralmente é mais difícil de ser obtido com outros instrumentos de coleta de dados (Duarte, 2004).

Na segunda etapa, as professoras deveriam ministrar uma aula de Matemática fazendo uso da MEAAMaRP. Elas tiveram autonomia na escolha da turma, como citado anteriormente, e também na seleção dos problemas geradores. Ambas as coletas foram realizadas no 2º semestre de 2023; na turma da professora Natália foram demandas duas horas-aula e na turma da professora Laura foram três horas-aula. Para o registro dos dados foram utilizados: (i) uma câmera que capturou os áudios e o vídeo, de modo geral, e que foi fundamental principalmente para registrar as etapas: 7 – Plenária e 8 – Busca do Consenso; (ii) um gravador, em cada grupo, para registrar as falas dos alunos e suas interações; e (iii) um gravador acoplado a um microfone que foi grampeado à roupa das professoras, com o intuito de registrar a fala delas de forma nítida.

Além disso, a professora-pesquisadora acompanhou as aulas fazendo anotações em seu diário de campo, compreendido como um modo de registrar os dados da pesquisa (além da gravação em áudio e vídeo), pois:

quanto maior a riqueza de detalhes registrados no dia a dia da pesquisa, melhor será o proveito que se poderá tirar do diário de campo. Observações ali contidas certamente

seriam esquecidas se não fossem registradas a seu tempo. São observações que podem colaborar na compreensão e esclarecimento de fatos e geração de novas ideias para a pesquisa (Fajer; Araújo; Waismann, 2016, p.3-4).

O diário de campo foi muito importante na análise dos dados, pois as anotações que estavam ali contidas apresentavam detalhes minuciosos observados e redigidos durante as aulas em que a pesquisadora se fez presente. Além disso, os registros escritos dos grupos também foram recolhidos pelas professoras e disponibilizados para a pesquisadora.

4.3 PROCEDIMENTOS DE ANÁLISE DE DADOS

Para a análise, primeiramente, foi realizada a transcrição das entrevistas, dos áudios dos grupos e dos áudios das professoras. Posteriormente, foram analisadas as respostas da professora Natália e da professora Laura, vislumbrando seus pontos de vista em relação as perguntas do roteiro semiestruturado (Apêndice A).

A análise das transcrições dos áudios com as interações das professoras e seus alunos ocorreu em dois momentos: 1) ações que as professoras realizaram no momento da resolução, correspondente as etapas 1, 2, 3 4 e 5 da MEAAMaRP e 2) ações realizadas pelas professoras no momento da discussão, correspondente as etapas 6, 7, 8 e 9.

Para o momento 1), tomaram-se como base os Quadros 1 e 2, já para o momento 2) tem-se por base o Quadro 3. Fez-se essa divisão, pois os autores Celis, Quiroz e Toro-Vidal (2019) e Hähkiöniemi e Francisco (2019) ressaltam as ações do professor no momento da resolução do problema, em que os alunos estão sentados em grupos e a interação ocorre quando o professor chega no grupo e se comunica com eles. Já Stein, Engle, Smith e Hughes (2008) expressam as ações que ocorrem desde a preparação da aula até o estabelecimento de conexões, de modo a analisar o momento da plenária e da busca pelo consenso realizada pelas professoras. Para analisar o Pensamento Matemático, consideraram-se os Quadros 4 e 6, para ambos os momentos, apoiando-se em Stacey (2006) e Mason, Burton e Stacey (2010).

A análise, em cada momento, ocorreu em trechos nos quais foram indicadas as ações do professor e, depois, foi realizada uma síntese mostrando se a ação do professor promoveu (ou não) o pensamento matemático dos alunos. Para essa análise, foram escolhidos dois grupos de alunos de cada professora, e o critério foi de seleção os grupos que mais interagiram com suas professoras, tanto no momento 1 quanto no momento 2. Para responder à questão: *“Como as ações dos professores em uma aula de Resolução de Problemas podem interferir no desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos?”*, foram definidos dois focos de

análise: i) as ações das professoras nos momentos de interações com os grupos de alunos; e ii) os processos de pensamento matemático evidenciados nos momentos de interação.

4.4 PRODUTO EDUCACIONAL

O Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGMAT) é da modalidade profissional e os discentes precisam desenvolver um Produto/Processo Educacional (PE), que pode ter diferentes formatos e necessita ser aplicado em um contexto real. Na área de ensino, o PE é “o resultado tangível oriundo de um processo gerado a partir de uma atividade de pesquisa, podendo ser realizado de forma individual (discente ou docente *Stricto Sensu*) ou em grupo (caso do *Lato Sensu*, PIBID, Residência Pedagógica, PIBIC e outros)” (Rizzatti *et al*, 2020, p. 4).

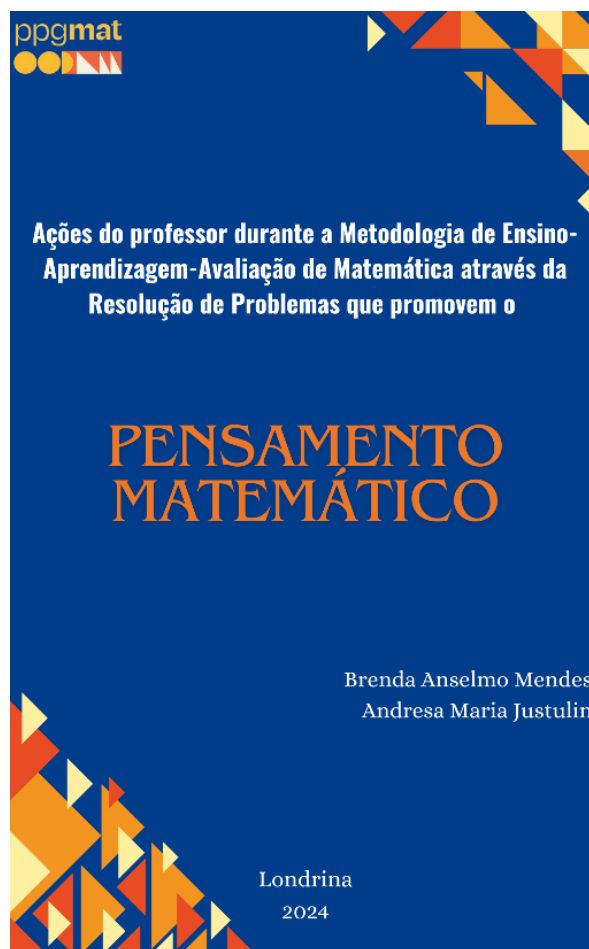
O PE se apresenta de diversas formas, segundo Rizzatti *et al* (2020), como: material didático/instrucional; curso de formação profissional; tecnologia social; software/aplicativo; evento organizados; relatório técnico; acervo; produto de comunicação; manual/protocolo; carta, mapa ou similar.

De acordo com Rôças et al. (2018), os PEs não devem ser considerados como fórmulas prontas que podem ser simplesmente replicadas por outros educadores. Sua finalidade é fornecer recursos e estratégias educacionais que possam ser utilizados por professores em uma variedade de contextos reais de ensino.

O PE vinculado a esta dissertação é intitulado *Ações do professor durante a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas que promovem o Pensamento Matemático*, cuja capa é ilustrada na Figura 4. O material consiste em um livro interativo¹⁴ para professores da Educação Básica ou demais educadores que se interessem por utilizar a MEAAMaRP em suas aulas e visam a construção do pensamento matemático de seus estudantes.

¹⁴ Um livro interativo é entendido aqui como um material que “[...] combina elementos tradicionais de um livro, como texto e imagens, com recursos digitais e interativos. Esses recursos podem incluir áudios, vídeos, animações, jogos e atividades interativas. Através desses elementos, o leitor é convidado a participar ativamente da história, explorando diferentes caminhos, tomando decisões e interagindo com o conteúdo” (Maximize Educação, 2024, *on-line*).

Figura 4 - Capa do Produto Educacional



Fonte: Mendes e Justulin (2024).

O produto está em formato digital e de forma interativa para que o leitor possa acessar links que aparecem ao longo do texto e que o encaminham para materiais complementares como folders e vídeos. Ele é composto por orientações acerca da MEAAMaRP, das ações que são desenvolvidas pelo professor ao interagir com os alunos, sobre o pensamento matemático e como desenvolvê-lo, além de encaminhamentos e dicas para o desenvolvimento da metodologia e do pensamento matemático. Ele pode ser acessado no repositório institucional da UTFPR, no site: <https://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/>.

O referido produto educacional foi produzido após as análises dos dados e, apoiando-se neles, traz orientações tanto sobre a MEAAMaRP quanto sobre o desenvolvimento dos processos de pensamento matemático que são potencializados pelas ações realizadas pelos professores durante os momentos de interação.

5 ANÁLISE DE DADOS

Nesta seção, foi feita uma análise das entrevistas realizadas com as professoras que participaram da pesquisa (5.1), indagando sobre aspectos relevantes ao uso da MEAAMaRP, da interação professor-alunos e do pensamento matemático. Reitera-se que cada professora foi entrevistada em momentos diferentes, mas se considerou mais adequado apresentar suas respostas em paralelo, para destacar particulares de cada professora. O planejamento da aula, juntamente com os problemas geradores propostos pelas docentes, será trazido em 5.2, seguido pela análise das aulas desenvolvidas na seção 5.3.

5.1 APRESENTAÇÃO DA ENTREVISTA

Como anteriormente destacado, a entrevista teve por objetivo conhecer as participantes da pesquisa, como elas usavam a MEAAMaRP, com qual frequência, qual a forma de interação com os grupos de alunos, o que elas compreendiam por “pensamento matemático” e se elas consideravam que as interações entre professor-alunos ajudam no desenvolvimento do pensamento matemático. Essa subseção faz uma apresentação dessas informações para ajudar na compreensão do cenário da pesquisa.

Na pergunta 1, “Você utiliza a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas com qual frequência em suas aulas?”, as respostas foram:

Professora Natália: *quando eu tive o primeiro contato com a metodologia para a escrita de um artigo eu utilizei sim! Mas foi tudo remoto, não foi contato com aluno, nada, né? E de lá pra cá, eu não consigo te quantificar [...], “ah, eu utilizo diariamente”, é mentira! (pausa) porque a gente é barrada por algumas coisas de currículo, de material, de ..., enfim, mas o que eu tenho feito é sempre deixar os alunos como um sujeito ativo, eu não começo já dando as resoluções, né? Eu não proponho isso, eu não consigo fazer as dez etapas sugeridas, (pausa) isso eu não consigo. Mas sempre que eu posso, eu coloco alguma situação como se fosse um problema gerador para que a gente possa estar discutindo. Eu não consigo seguir as dez etapas, então, o que eu tenho feito nesse período depois de conhecer a metodologia, depois de desenvolver, depois de apresentar a minha dissertação, o que eu tenho procurado fazer (pausa) agora em 2023 é nesse sentido. Então, dizer pra você que eu faço isso todas as aulas, não!*

Professora Laura: *Eu sempre procuro trazer o uso da metodologia nas minhas aulas. Eu costumo utilizar mais no Ensino Fundamental. Sempre que tem algum conteúdo chave, por exemplo, assim ah! (pausa) frações, conteúdos mais chaveados ... ultimamente eu tô conseguindo usar pelo menos*

quase uma vez por mês, mas eu confesso assim que (pausa) às vezes durante a correria assim, a gente acaba tendo que fazer algumas coisas mais apertadas. Então dá tempo de formar os grupos, fazer as discussões todas ali, só que às vezes acaba sendo... não dá pra ser tipo muito detalhado. Mas eu uso sim a metodologia, eu sempre procuro estar trazendo nas minhas aulas, uma vez no mês, um mês e meio por aí. Sempre que eu tô entrando em conteúdo-chave.

Ambas as professoras afirmaram que utilizam a MEAAMaRP com algumas modificações devido a questões que são enfrentadas na escola. A professora Natália atua como professora em uma escola particular e disse, durante a entrevista, que tem menos flexibilidade de desenvolver a metodologia por causa do currículo a ser cumprido, mas que sempre que pode ela a utiliza com modificações, reiterando, mais de uma vez em sua fala, que não consegue desenvolver as dez etapas da metodologia.

Já a professora Laura, professora da rede estadual, consegue desenvolver com mais frequência suas aulas utilizando a MEAAMaRP por ter uma maior autonomia no planejamento das aulas. Assim, ela afirma que consegue implementar as dez etapas sugeridas, mas esclarece que “aperta” um pouco o tempo para desenvolver tudo.

No trecho a seguir, a professora Natália, apresenta sua inquietação diante da realidade da escola em que trabalha:

Professora Natália: *É eu, (pausa) eu tenho convivido com (pausa) essa inquietação. Ela sempre existiu em mim, mas agora é um pouco pior porque agora eu conheço algo que eu posso fazer e aí eu sou barrada por algo... a metodologia tradicional. Muito se fala que tem que se fazer diferente, mas quando você vai lá e que você tem que dar... cumprir um conteúdo que a escola quer, algo novo, mas que a família quer ainda o tradicional! Muitas vezes, você acaba sendo barrada por isso, então de um jeitinho sutil eu vou colocando as coisas de maneira diferente, né? Então eu tenho procurado fazer isso com frequência, tá? Eu não falo assim “vamos resolver o exercício?” (risos) ela aparece lá no livro didático, né? “resolva os exercícios e atividades”, mas a gente sempre tenta colocar uma situação ali pra torná-los mais questionadores, né? Isso eu tenho feito bastante.*

É notório o quanto a professora Natália se preocupa com a aprendizagem de seus alunos, o que fica ainda mais evidente na observação da aula desenvolvida por ela. A professora relata, com certa tristeza, que gostaria de trazer atividades e experiências novas para seus alunos, contudo é afetada pelo currículo que deve cumprir e até pela família dos alunos.

Ao serem questionadas na pergunta 2 “Como você interage com seus alunos durante o desenvolvimento da MEAAMaRP?”, as professoras relataram:

Professora Natália: *É assim: eu procuro, dentro da realidade de cada turma, fazer uns questionamentos no sentido de algo que eles já conhecem, alguma coisa que eles trazem... às vezes da família, de casa, alguma coisa, pra que eles tragam para a sala, entende? Eles têm muito medo de errar, então eu tenho procurado incentivá-los a “se errou, não tem problema! Vamos ver”. Às vezes é de um erro que eu consigo tirar alguma coisa que vou aproveitar numa situação e aquela conversa vai levando, então sempre assim, incentivando, questionando mesmo, sabe? É nesse sentido mais como mediadora, eu tenho ficado como observadora. Alguns falam coisas até de um futebol... que, às vezes, eles colocam do nada e eu já aproveito alguma coisa ali e já puxo para aquela situação que eu quero.*

Professora Laura: *Bom, eu sempre procuro atender todos os grupos, né? Desde quando eu comecei, ou não, na metodologia, eu sempre peço pro aluno me contar o que ele tá fazendo. Eu uso exatamente essa palavra, então, no primeiro contato que eu tenho com o grupo, eu chego lá e pergunto sempre o que eles entenderam e se eles já estão traçando um caminho, alguma coisa, eu sempre falo pra eles assim: “então, me conta”, eu sempre uso isso mesmo: “então, me conta o que você tá fazendo aí!”. Então ele me conta com as palavras dele, e nesse meio do caminho se eu vejo que ele tá indo pra um caminho que não é o esperado, eu sempre vou voltando às perguntas. Eu nunca dou a resposta direta, então ele me pergunta uma coisa, eu faço uma pergunta de volta. Eu sempre também peço pra ele ler o enunciado de novo, então, eu também sempre falo assim: “Lê aí pra mim o enunciado, o que ele tá falando?”. Pergunto o que ele entendeu do enunciado também, no caso, quando ele tá indo pra um caminho que não é o esperado ...*

Ambas as professoras disseram que interagem com os alunos por meio de questionamentos, indo ao encontro de Celis, Quiroz e Toro-Vidal (2019) e Hähkiöniemi e Francisco (2019), que esclarecem que a principal forma de interação do professor com seus alunos é por meio de questionamentos.

A forma com que as professoras costumam questionar os alunos foi o foco da pergunta 3 do roteiro “Como você costuma questioná-los durante a resolução do problema que foi proposto?”, contudo na resposta da pergunta 2 elas já tratam do questionamento como uma forma de interação. As professoras são direcionadas para explicitarem ou falarem algo a mais sobre isso:

Professora Natália: *A gente tem sempre que procurar incentivá-los, né? Então o que acontece sempre é que eu [...], de uma certa forma, eu quero que eles me justifiquem o porquê estão falando sobre aquilo. É [...] uma reprodução ou eles sabem exatamente? Estão associando com alguma coisa? Porque os nossos alunos de hoje, eles são muito questionadores, eles têm acesso a muitas informações.*

Pesquisadora: *São muito!*

Professora Natália: *Eles não conseguem assimilar esse monte, esse amontoado de informações, isso eles não conseguem!*

Professora Laura: *Ele (o aluno) me faz uma pergunta, eu volto a pergunta pra ele, às vezes, com outras palavras, de um jeito mais simples. Eu sempre busco dele realmente ler (que ele faça a leitura do problema), eu peço sempre pra ele ler o enunciado pra mim, porque, às vezes, quando ele tá lendo ali, ele tem um insight de alguma coisa que ele não viu. Muitas vezes quando ele lê o enunciado pra mim, ele tem um insight, então, por isso, que eu sempre adoto isso aí... não sei se tem muita coisa a complementar (risos).*

Fica evidente no diálogo o incentivo à leitura do enunciado (professora Laura), ação presente na etapa 2 - Leitura individual. Conforme acentuam Allevato e Onuchic (2021, p. 49), o aluno, “ao ler individualmente, tem possibilidade de refletir, de colocar-se em contato com a linguagem matemática e desenvolver sua própria compreensão do problema proposto”. Há também a ênfase dada na apresentação de justificativas nas resoluções (professora Natália) que se relaciona, conforme Häikiöniemi e Francisco (2019), à ação “Enfatizar a Justificativa”, na qual o professor enfatiza a importância da justificação da resolução matemática obtida para o problema gerador. As professoras mostraram-se cientes em oferecer oportunidades para os alunos pensarem sobre o problema e, por meio dos questionamentos, participarem da construção do conhecimento matemático.

A pergunta 4 “O que você entende por “pensamento matemático”? foi realizada com o objetivo de investigar se as professoras participantes da pesquisa conheciam ou já haviam estudado algo sobre o pensamento matemático. Tal termo é corriqueiro no senso comum, em falas como: “o pensamento matemático daquele aluno é ótimo!” ou “o professor precisa desenvolver o pensar matemático de seu aluno”. Mas será que alguma das professoras apresentaria um aporte teórico sobre isso?

Professora Natália: *Dentro da linha de Raciocínio Matemático... Raciocínio Matemático e Pensamento Matemático... pensar matematicamente uma coisa e raciocinar matematicamente é outra, né? Porque (pausa) o Raciocínio Matemático ele parte de uma informação e você cria argumentos em cima daquilo e você justifica. Agora pensar, a gente pode estar conversando aqui e eu estar pensando em qualquer outra coisa, né? Eu não estou criando argumentos.*

[...]

Professora Natália: *[...] a gente pode ler um monte, sempre vai ter autores que eles vão ter várias linhas de pensamentos ali... mas eu sempre fiquei muito, sempre fiquei muito intrigada com isso, né? o pensar e o raciocinar... porque assim: dentro da metodologia a proposta é que você desenvolva esse pensamento matemático do aluno. Correto? Então esse pensamento está mais voltado para que ele desenvolva ali as suas habilidades matemáticas com justificativas, não é só uma reprodução, né?*

Professora Laura: *Ai! Pensamento matemático? Eu não sei, seria uma abordagem? Uma abordagem cognitiva que envolve a capacidade do aluno raciocinar, resolver outros problemas, compreender as coisas usando a matemática? E coisas do mundo real também? Ou pode ser também modos de pensar, baseando em conceitos, estruturas matemáticas? Ai, não sei definir muito bem.*

Ambas as professoras apresentaram visões de senso comum sobre o pensamento matemático. A professora Natália conhecia a teoria do raciocínio matemático, contudo não soube dizer se havia uma diferença entre pensamento matemático e raciocínio matemático. Conforme explicitado na sessão 2.6, apesar de haver outros termos na literatura, esta pesquisa apoia-se nas ideias de Stacey (2006) e de Mason, Burton e Stacey (2010) sobre pensamento matemático, que envolve os processos de especificar, generalizar, conjecturar e convencer. A Professora Laura também não mostrou uma base teórica sobre o assunto, e tentou definir o pensar matemático em termos de raciocinar e resolver problemas, sejam eles dentro ou fora da matemática.

Diante dessa insegurança teórica, ao responderem à pergunta 5 “Acerca das interações que se dão entre você e seus alunos durante o processo de resolução de problemas, você acha que esses momentos os ajudam no desenvolvimento do pensamento matemático? Como?”, destacaram:

Professora Natália: *Ah, com certeza e eu posso dizer com propriedade, porque ao utilizar a metodologia e eu, como professora, como pesquisadora e colocando em prática as etapas sugeridas por Onuchic e Allevato, o que eu observei, né? Você propicia a eles uma autonomia e ele se sente capaz, com um problema gerador que você coloca ali... ele consegue ter autonomia, ele consegue ser crítico, ele consegue trabalhar em espírito colaborativo, né? Porque, primeiro, ele tem o momento dele só ali, de analisar, de ver uma opinião, e aí de repente você une pessoas que têm pensamentos diferentes, fórmulas diferentes, e naquele momento saem resoluções riquíssimas porque você tem um trabalho colaborativo, questionamentos, algo que um pensou que o outro não tinha pensado, né? Faz o aluno recorrer a alguma coisa que ele já aprendeu. Então, para resolver aquela situação, ele tem que revisar coisas que ele já aprendeu, conteúdos que ele já viu.*

Professora Laura: *Eu acho que sim, porque eu acho que é como a própria metodologia... o professor vai mediando as coisas, primeiro ele observa. Então eu sempre passo, vejo o que o pessoal está fazendo, depois eu vou incentivando. Acho que também a fala do professor, às vezes, quando ele tá ali num caminho certo e você ir ali “isso, tá dando certo!”. Quando você faz os questionamentos, com o enunciado e com as coisas que ele tá fazendo, é que ele percebe, parece que dá assim até uma alegria a mais nele.*

Então eu acho que as interações que a gente tem com os alunos, muitas vezes, é um momento que... não sei, às vezes passa despercebido por ele. Então eu sempre bato na tecla do enunciado.

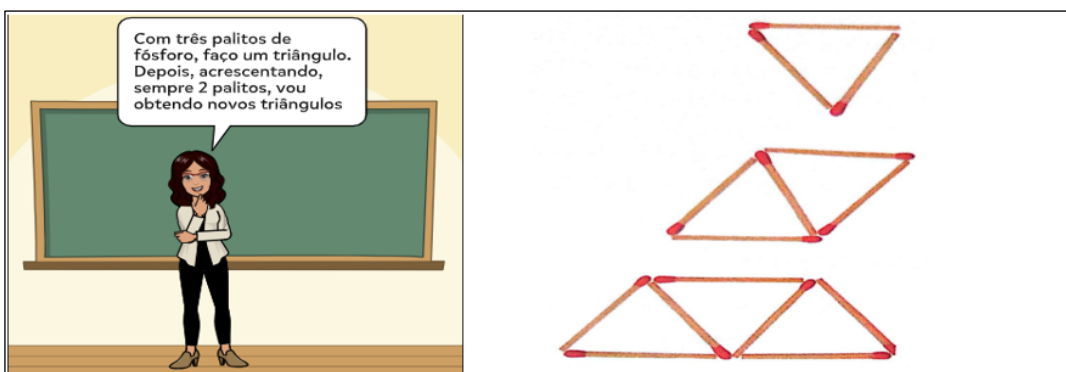
No diálogo, ambas as professoras indicaram as etapas da MEAAMaRP; todavia, elas não as relacionam diretamente com o pensamento matemático, possivelmente por não terem clareza sobre sua definição. O pensamento matemático ajuda o aluno a estabelecer relações essenciais para que possa compreender os conceitos que lhe são apresentados (Atz, 2017), e ele deve ser promovido durante a escolarização para que o aluno se sinta apto a usá-lo para resolver problemas (Stacey, 2006).

5.2 PLANEJAMENTO DAS AULAS E PROBLEMA GERADOR

Para identificar e analisar a implementação da etapa 1 do roteiro da MEAAMaRP (A proposição do problema gerador) foi solicitado às professoras o envio por *e-mail* do problema gerador e de um breve planejamento contendo: cronograma, turma, unidade temática, conteúdo, objetivos de conhecimento e habilidades da BNCC.

A professora Natália escolheu uma turma de sétimo ano com o objetivo de introduzir o conteúdo de expressões algébricas a partir do problema gerador (Figura 5):

Figura 5 - Problema gerador escolhido pela professora Natália



Seguindo este padrão, responda as seguintes questões.

- Quantos palitos terá a 4ª figura? Explique como você determinou a quantidade de palitos.
- Quantos palitos terá a 20ª figura? Explique como você determinou a quantidade de palitos.
- Alguma figura terá 100 palitos? Justifique sua resposta.
- Qual figura terá 121 palitos? Justifique sua resposta.
- Você é capaz de montar uma sequência numérica, relacionando a quantidade de palitos? Justifique sua resposta.
- Como você faria para montar uma expressão algébrica relacionando número de palitos e número de triângulos? Justifique sua resposta.
- Você consegue calcular o valor numérico da expressão algébrica para qualquer quantidade de triângulos? Justifique sua resposta.

Fonte: Adaptado de Imenes e Lellis (2010).

O Quadro 8 apresenta o planejamento, elaborado pela professora Natália, para o desenvolvimento de sua aula utilizando a MEAAMaRP.

Quadro 8 - Planejamento desenvolvido para a aula

Cronograma: 3 horas/aulas de 45 minutos cada	Turma: 7º ano
Unidade Temática: Álgebra	Conteúdo: Expressões Algébricas
Objetivos de conhecimento: Linguagem algébrica: variável e incógnita; Expressões algébricas: identificação da regularidade de uma sequência numérica.	
Habilidades da BNCC: (EF07MA13) Compreender a ideia de variável, representada por letra ou símbolo, para expressar relação entre duas grandezas; (EF07MA15) Utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas; (EF07MA16) Reconhecer se duas expressões algébricas obtidas para descrever a regularidade de uma mesma sequência numérica são ou não equivalentes.	

Fonte: Elaborado pela Professora Natália.

A professora Laura desenvolveu sua aula em uma turma de oitavo ano, escolheu o problema gerador (Figura 6) com o intuito de iniciar a temática de orçamento, familiar e pessoal.

Figura 6 - Problema gerador escolhido pela professora Laura

PLANEJANDO O ENXOVAL DO BEBÊ DE NADINE

Nadine trabalha em um restaurante 6 vezes por semana. Ela está grávida e trabalha 4 horas por dia, ganhando R\$ 10,00 por hora. Além disso, ela recebe R\$ 80,00 de gorjeta por semana. Nadine precisa juntar R\$ 850,00 para montar o enxoval do seu bebê. No entanto, há algumas despesas que ela precisa considerar. Ela recebe um vale-transporte de R\$ 100,00, mas a passagem custa R\$ 8,00 por dia. Nadine mora somente com sua mãe e ajuda pagando o aluguel de R\$ 750,00 e metade da conta de internet, que é R\$ 120,00. Em quantas semanas Nadine poderá comprar o enxoval? Crie uma estratégia para ajudá-la.

Fonte: Desenvolvido pela professora Laura.

O Quadro 9 apresenta o planejamento, feito pela professora Laura, para o desenvolvimento de sua aula fazendo uso da MEAAMaRP.

Quadro 9 - Planejamento elaborado para a aula

Cronograma: 3 horas/aulas de 50 minutos cada	Turma: 8º ano
Unidade Temática: Números	Conteúdo: Matemática Financeira
Objetivos de conhecimento: Renda: fixa e variável; Despesas: fixas e variáveis.	
Habilidades da BNCC: (EF08MA06) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculo do valor numérico de expressões algébricas, utilizando as propriedades das operações.	

Fonte: Elaborado pela Professora Laura.

5.3 ANÁLISE DAS AULAS DESENVOLVIDAS

As ações desenvolvidas pelas professoras foram analisadas em dois momentos: (1) durante a resolução¹⁵ e (2) na discussão¹⁶. Para o momento (1), a análise apoiou-se nos autores Celis, Quiroz e Toro-Vidal (2019) e Hähkiöniemi e Francisco (2019) que tratam das ações do professor no instante em que os alunos estão em grupos e a interação ocorre quando o professor chega e se comunica com eles. Para o momento (2), tem-se por base os autores Stein, Engle, Smith e Hughes (2008) que expressam as ações ocorridas desde a preparação da aula até o estabelecimento de conexões, coerentes com o momento da plenária e da busca de consenso realizada pelas professoras. As seções 5.3.1 e 5.3.2 analisam os momentos 1 e 2, relacionados à professora Natália e as seções 5.3.3 e 5.3.4 os referentes à professora Laura.

5.3.1 Resolução do problema dos palitos

A professora Natália escolheu uma turma de sétimo ano para propor um problema gerador com o objetivo de iniciar o conteúdo de sequências numéricas (Figura 5), a etapa 1 da MEAAMaRP- Proposição do Problema.

A aula foi desenvolvida no segundo semestre do ano de 2023, no dia 29 de setembro, em uma escola particular localizada na cidade de Maringá. No início da aula, a professora distribuiu uma folha para cada aluno contendo o problema gerador e solicitou-lhes que fizessem a leitura individual do problema em silêncio (etapa 2 – Leitura Individual). Após, pediu que os alunos se organizassem em grupos com 4 participantes. Foram compostos 7 grupos, contudo em um deles não foi realizada a gravação nem tiveram os registros escritos considerados, pois os alunos ou seus responsáveis não autorizaram a participação na pesquisa. A professora Natália pediu que cada um dos grupos escolhessem um nome para representá-los, e assim, se nomearam conforme o Quadro 10.

Quadro 10 - Grupos formados durante a aula

Grupo	Alunos participantes
Matemáticos	A1, A2, A3 e A4
Racionais	A5, A6, A7 e A8
THRM	A9, A10, A11 e A12
Borussia Dortmund Bellingham ¹⁷	A13, A14, A15 e A16

¹⁵ Correspondente às etapas 1, 2, 3, 4, 5 da MEAAMaRP.

¹⁶ Correspondente às etapas 6, 7, 8, 9 da MEAAMaRP.

¹⁷ Borussia Dortmund é o nome de um clube de futebol alemão, e Bellingham é o sobrenome do jogador inglês Jude Bellingham, que atuou no time Borussia Dortmund e, atualmente, está no Real Madrid.

Grupo	Alunos participantes
Paçoca	A17, A18, A19 e A20
Mabil	A21, A22, A23 e A24

Fonte: Dados da pesquisa.

Em continuação à aula, a professora Natália solicitou que os alunos lessem juntos, em grupo (etapa 3 – Leitura em conjunto). Enquanto isso, a pesquisadora distribuiu 6 gravadores, e solicitou que cada grupo marcasse com uma fita crepe o nome escolhido por eles e colassem no gravador, de modo a identificá-los. No momento em que os alunos resolviam o problema (etapa 4 – Resolução do Problema), a professora Natália passou pelos grupos fazendo questionamentos e se certificando de que todos estavam conseguindo resolvê-lo (etapa 5 – Observar e incentivar).

Para a presente análise, foram selecionados os dois grupos (“Matemáticos” e “Racionais”), que mais interagiram durante a aula com a professora nos momentos (1) e (2). Para manter o anonimato os alunos foram indicados por A1, A2, A3, ... até o total de participantes. As transcrições foram organizadas em trechos, com foco nas interações entre os grupos de alunos com a professora.

5.3.1.1 Grupo Matemáticos

Esse grupo foi formado por duas meninas e dois meninos, indicados por A1, A2, A3 e A4. As ações da professora que foram identificadas durante a interação com o grupo serão indicadas entre parênteses. A análise dessas ações está apoiada nos autores Celis, Quiroz e Toro-Vidal (2019) e Häikiöniemi e Francisco (2019), como já destacado.

Os alunos estão tentando resolver o problema, quando a professora chega e diz:

- [1.1] **Professora Natália:** *Pessoal, me fala uma coisa, vocês leram a situação? (Interromper/Questionar)*
- [1.2] **A1:** *Sim.*
- [1.3] **Professora Natália:** *O que vocês perceberam aí enquanto vocês leram? (Questionar)*
- [1.4] **A1:** *Eu percebi que um triângulo é formado por três palitos, os outros são formados por mais dois palitos, seguindo essa sequência (pausa).*
- [1.5] **A2:** *A cada* (o aluno tenta falar, mas é interrompido pelo A1).
- [1.6] **A1:** *Sempre vai somar dois palitos e sempre vai ter mais um triângulo.*
- [1.7] **A2:** *É, a cada dois palitos adicionados vai formar mais um triângulo.*
- [1.8] **Professora Natália:** *A cada dois? (Questionar)*
- [1.9] **A2:** *Aham.*

Nesse primeiro momento, a professora Natália chega ao grupo e questiona se leram o problema, buscando verificar se houve a compreensão do problema [1.3]. Os alunos percebem a relação existente entre a quantidade de palitos e a quantidade de triângulos, pois conseguem compreender que um triângulo é formado por três palitos [1.4], e que o fato de somar mais dois palitos à figura anterior permite que seja formado um novo triângulo [1.6], [1.7]. A compreensão dos alunos, explicitada por A1 como “sequência”, é fundamental para a resolução, pois permite aos alunos a percepção do padrão existente entre a quantidade de palitos e a quantidade de triângulos. Além disso, ao adicionar mais dois palitos é formado mais um triângulo juntamente à figura anterior.

Nesse trecho, identifica-se a presença das ações *Questionar* e *Interromper*. A ação *Questionar* está presente nos trechos [1.1], [1.3] e [1.8], definido por Celis, Quiroz e Toro-Vidal (2019) como o momento no qual o professor interage com os alunos por meio de perguntas. O grupo estava discutindo a questão a) do problema quando a professora chega perguntando [1.1], evidenciando a ação *Interromper*, que, segundo Celis, Quiroz e Toro-Vidal (2019), caracteriza-se pelo professor interrompendo o trabalho que está sendo desenvolvido pelos alunos no início da interação.

Referente ao pensamento matemático, a resolução apresentou vestígios do processo *Generalizar* que, de acordo com Stacey (2006) e Mason, Burton e Stacey (2010), é quando o aluno procura por padrões e relações. Observa-se que A1 e A2 conseguem estabelecer uma relação ao perceberem que a cada vez que se somar mais dois palitos, se terá mais um triângulo.

Ao continuar o diálogo, o grupo interage com a professora Natália e compreende o comportamento da sequência, de acordo com o trecho 2:

[2.1] **Professora Natália:** *E como está essa sequência?* (**Questionar**)

[2.2] **A1:** *Por exemplo, tem esse aqui, né? Tem a primeira figura, a segunda figura e a terceira figura. Aí na quarta são quatro triângulos* (ele indica as imagens formadas por palitos de fósforos que constam no problema gerador – Figura 5).

[2.3] **Professora Natália:** *Na quarta são o quê?* (**Questionar**)

[2.4] **A1:** *Na quarta são quatro triângulos juntos formados por...*

[2.5] **A3:** *Por nove palitos, por nove palitinhos.*

[2.6] **A1:** *Por nove palitinhos.*

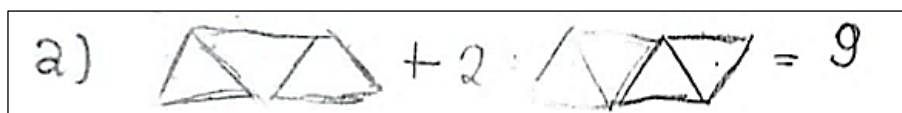
[2.7] **Professora Natália:** *Nove palitos?* (**Questionar**)

[2.8] **A2:** *Aham.*

Após o A1, no trecho [2.2], mostrar na folha as figuras que estão presentes no enunciado do problema, ele diz: “Aí na quarta são quatro triângulos!”, ou seja, a quantidade de triângulos que terá na figura 5, que ocasiona uma discussão referente a quantos palitos haverá na quarta

figura. A1 e A3 afirmam que será nove palitos [2.4], [2.5] e [2.6], e a professora Natália os questiona buscando a confirmação [2.7], que é feita por A2. A Figura 7 apresenta a resposta dada por A1, representante do grupo “Matemáticos” ao item a) do problema, conforme diálogo em [2.2], [2.4] e [2.6].

Figura 7 - Resposta do A1, grupo “Matemáticos”, ao item a do problema



Fonte: Acervo da pesquisadora.

Nos diálogos finais do grupo e na Figura 7, os alunos buscaram esclarecer à professora que na quarta figura haveria nove palitos, considerando que para construir mais uma figura é necessário que se some 2 palitos à figura anterior. Como a terceira figura apresentada no problema gerador já continha 7 palitos, a próxima então teria $7 + 2 = 9$ palitos. No trecho, destaca-se a ação *Questionar*, apresentada pela professora ao buscar entender como seria a “sequência” relatada pelos alunos e quantos palitos teria na quarta figura [2.1], [2.3] e [2.7].

Referente ao pensamento matemático, a transcrição apresentou vestígios do processo *Generalizar*, nos trechos [2.2] e [2.4], uma vez que o aluno A1 percebe um padrão ao dizer “na quarta são quatro triângulos”, ou seja, um padrão entre o número da figura e a quantidade de triângulos que ela terá.

A professora termina sua interação com o grupo e retorna minutos depois questionando-os sobre a alternativa c) do problema proposto, conforme o trecho 3:

[3.1] **Professora Natália:** *Vocês responderam na letra c que alguma figura terá 100 palitos? (Questionar)*

[3.2] **A2:** *Não tem.*

[3.3] **Professora Natália:** *Por quê? (Questionar)*

[3.4] **A2:** *Por causa do número três... quando você adiciona, vai adicionando dois até chegar próximo de 100, mas não dá 100. Vai ser ou mais que 100 ou menos que 100.*

[3.5] **A3:** *Sim, também por conta que começou com três palitos e você vai adicionando o número dois, né? Daí vai ficando número ímpar toda vez!*

[3.6] **Professora Natália:** *Ah! Então não tem a possibilidade de ter 100 palitos? (Enfatizar a justificativa)*

[3.7] **A4:** *Vai ter o 99, e o 101, mas 100 não, porque ele é par!*

[3.8] **Professora Natália:** *Muito bem pessoal, isso mesmo. (Julgar)*

Os alunos, após serem questionados pela professora, defendem que não terá uma figura formada por 100 palitos de fósforos [3.4], [3.5] e [3.7]. No trecho [3.5], A3 esclarece que como

a sequência começa com três palitos, e sempre que se adicionam dois palitos à quantidade anterior, é criada uma figura que continuará apresentando uma quantidade ímpar de palitos, conforme Figura 8.

Figura 8 - Resposta do A3, grupo “Matemáticos”, ao item c do problema

c) não é possível chegar ao número 100, pois a sequência começa em 3 e é ímpar e sem e par

Fonte: Acervo da pesquisadora.

O aluno A4 complementa a fala de A3, em [3.7], ressaltando que terá uma figura com 99 palitos e outra com 101, mas não haverá com 100 palitos, pois é uma quantidade par e que não pertence à sequência, conforme Figura 9.

Figura 9 - Resposta do A4, grupo “Matemáticos”, ao item c do problema

os palitos dão número ímpar e 100 é par, logo não pode ser 100. poderia dar 99 ou 101 mais não 100

Fonte: Acervo da pesquisadora.

A professora buscou no trecho [3.6] que os alunos confirmassem que não haveria uma figura com 100 palitos, ação essa denominada por Hähkiöniemi e Francisco (2019) como *Enfatizar a Justificativa*. Nesse caso, a professora pediu a eles para justificarem as ideias defendidas por eles em [3.4] e [3.5]. Já em [3.8] é notório que a professora aprova as afirmações que foram defendidas pelo grupo, ação caracterizada por Celis, Quiroz e Toro-Vidal (2019) como *Julgar*; contudo, ressalta-se que essa ação reforça a necessidade da validação do professor por parte do aluno, o que influencia em sua autonomia. No trecho, também se fez presente a ação *Questionar* em [3.1], [3.3], momento em que a professora Natália teve a intenção de que o grupo justificasse se alguma figura teria 100 palitos e, em [3.3], que falassem o porquê de não haver.

Acerca do pensamento matemático, a transcrição apresentou vestígios dos processos *Conjecturar* e *Convencer*. *Conjecturar*, segundo Stacey (2006) e Mason, Burton e Stacey (2010), é quando o aluno consegue prever resultados e relações, já o processo *Convencer*, é

quando o aluno procura razões para falar que algo é verdade e após as comunica. Em [3.4] A2 apresenta o processo *Conjecturar* na qual consegue prever que não haverá uma figura formada por 100 palitos, pois como a sequência começa em 3 e vai adicionando sempre 2 palitos, a quantidade de palitos chegará próxima de 100, todavia não terá uma figura com 100 palitos. Nos trechos [3.5] e [3.7], os alunos A3 e A4 buscam esclarecer que não haverá uma figura com 100 palitos, pois 100 é um número par e a sequência apenas terá números ímpares evidenciando o processo *Convencer*.

5.3.1.2 Grupo Racionais

Nesta subseção, será feita a análise das interações realizadas no momento (1), da resolução do problema, do grupo “Racionais”. Ele compôs-se por quatro meninas, A5, A6, A7 e A8. As ações da professora, identificadas durante a interação com o grupo, serão indicadas entre parênteses.

As alunas iniciam pela leitura individual do problema (etapa 2 da MEAAMaRP) e leitura em conjunto (etapa 3). Em seguida, começam a conversar sobre o problema e a professora Natália chega e diz:

[4.1] **Professora Natália:** *O que vocês estão fazendo assim de primeira mão? O que vocês perceberam? (Questionar)*

[4.2] **A5:** *A gente foi adicionando dois em dois, daí aqui a gente tá fazendo uma lista, ó (conforme indicado na Figura 10).*

[4.3] **Professora Natália:** *Ah, vocês estão contando? (Questionar)*

[4.4] **A5:** *É.*

[4.5] **Professora Natália:** *Tá.*

Figura 10 - Lista indicada por A5 no trecho [4.2]

$3^o = 7$	$17 = 39$	$40 = 81$
$4 = 9$	$20 = 41$	$50 = 101$
$5 = 11$	$21 = 43$	$60 = 121$
$6 = 13$	$22 = 45$	
$7 = 15$	$23 = 47$	
$8 = 17$	$24 = 49$	
$9 = 19$	$25 = 51$	
$10 = 21$	$26 = 53$	
$11 = 23$	$27 = 55$	
$12 = 25$	$28 = 57$	
$13 = 27$	$29 = 59$	
$14 = 29$	$30 = 61$	
$15 = 31$		
$16 = 33$		
$17 = 35$		
$18 = 37$		

Fonte: Acervo da pesquisadora.

Essa interação inicial foi bem rápida, contudo, no trecho [4.2], A5 relata que o grupo está adicionando os números de dois em dois e que estão fazendo uma lista. Essa “lista” elaborada por elas representa uma sequência numérica que relaciona o número da figura com a quantidade de palitos que ela terá.

Nesse trecho, a professora Natália apresenta a ação *Questionar* ao indagar sobre o que o grupo estava fazendo e sobre como montaram a lista (Figura 10). Referente ao pensamento matemático não foi evidenciado algum processo. À medida que os áudios foram transcritos, percebeu-se que essa lista auxiliou o grupo na resolução de mais de um item do problema. Por esse motivo, quando a professora volta ao grupo, as alunas a questionam sobre a alternativa f):

[5.1] **A5:** Professora, olha a f, a f a gente estava falando: como podemos montar uma expressão algébrica relacionando o número de palitos e o número de triângulos? Daí eu falei que a figura 167 terá x palitos porque x esconde o número, é quando a gente não sabe qual é aquele número.

[5.2] **A6:** É.

[5.3] **Professora Natália:** Ah! X esconde o número? (*Questionar*)

[5.4] **A5:** Não, não é esconde.

[5.5] **A6:** A gente não sabe o número.

[5.6] **Professora Natália:** É um termo desconhecido? (*Questionar/Focalizar o pensamento dos alunos*)

[5.7] **A6:** Não, é tipo... o x representa o número que a gente não sabe ainda qual é.

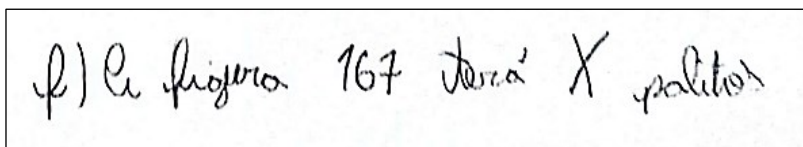
[5.8] **Professora Natália:** Ah, então se vocês não sabem, é um termo desconhecido. (**Focalizar o pensamento dos alunos**)

[5.9] **A6:** É?

[5.10] **Professora Natália:** É!

As alunas mostram compreensão acerca do que seria uma expressão algébrica. De modo complementar ao trecho 5 em [5.1], apresentam a Figura 11, com a presença de uma incógnita, representa pela letra x , e também o número 167. Contudo a forma como o grupo responde não traz uma expressão algébrica (Figura 11) que relacione o número de palitos com o número de triângulos.

Figura 11 - Resposta do A5, grupo “Racionais”, ao item f do problema



Fonte: Acervo da pesquisadora.

No trecho [5.3], a professora pergunta ao grupo sobre a afirmação dada em [5.1] de que “ x esconde o número”, então A6 responde que “a gente não sabe o número” em [5.5]. Com a intenção de ajudar, a professora pergunta se esse x não seria um termo desconhecido [5.6], ação essa caracterizada por Hähkiöniemi e Francisco (2019) como *Focalizar o pensamento dos alunos*, na qual o professor tenta ajudá-los dando espaço para eles pensarem. Contudo, em [5.8], a ação da professora não deixa tanto espaço para as alunas pensarem e ela acaba explicitando que x é um termo desconhecido. A ação *Questionar* se fez presente também no trecho, visto que a professora Natália tenta entender sobre o que as alunas se referem com a fala “ x esconde o número” [5.3], e a docente tenta *focalizar o pensamento* delas ao perguntar se x não seria um termo desconhecido [5.6].

Acerca do pensamento matemático, o processo *Convencer* foi identificado nos trechos [5.1], [5.5] e [5.7] quando as alunas A5 e A6 justificam para a professora Natália que a representação escrita “a figura 167 terá x palitos” trata-se de uma quantia que elas não sabem ainda qual é. Após esse momento, no trecho 6, a professora voltou a questionar o grupo sobre o item e) do problema gerador:

[6.1] **Professora Natália:** Isso aqui para vocês é o quê? Vocês sabem o que é isso? (Ela indica a lista de números realizada pelo grupo, presente na Figura 10) (**Questionar/Investigar**)

[6.2] **A6:** Uma sequência numérica.

[6.3] **A7:** Não é?

[6.4] **Professora Natália:** Sim, uma sequência numérica. E o que significa esse 3, 4, 5 na frente desses números? (**Julgar/Investigar**)

[6.5] **A6:** Tipo, se tiver três triângulos vai ter sete palitos, se tiver quatro triângulos vai ter nove palitos.

[6.6] **Professora Natália:** Ah! Vocês seguiram esse padrão? (**Questionar**)

[6.7] **A6:** Sim.

[6.8] **A5:** É, eu fui adicionando dois, porque estava falando que a cada dois palitos obtém novos triângulos.

Em [6.1], a professora busca questionar o grupo sobre a “lista” indicada na Figura 10 e, também, investiga o que ela representa. A6 relata que é uma sequência numérica, o que é confirmado pela professora em [6.4], caracterizando a ação denominada *Julgar*. A professora questiona o grupo, em [6.4], buscando entender o que representam os números 3, 4, 5, ... que estão na frente dos números 7, 9, 11, ..., apresentando uma ação de *Investigar*, que, segundo Celiz, Quiroz e Toro-Vidal (2019), ocorre quando o professor solicita aos alunos que apresentem uma explicação para a resposta apresentada como solução ao problema. Também houve a ação *Questionar*, haja vista que a professora tenta descobrir se as alunas sabem o que era aquela “lista” que elas criaram [6.1] e em [6.6] ela indaga se o grupo manteve aquele padrão, na lista toda, ao relacionar o número da figura e a quantidade de palitos que a figura contém.

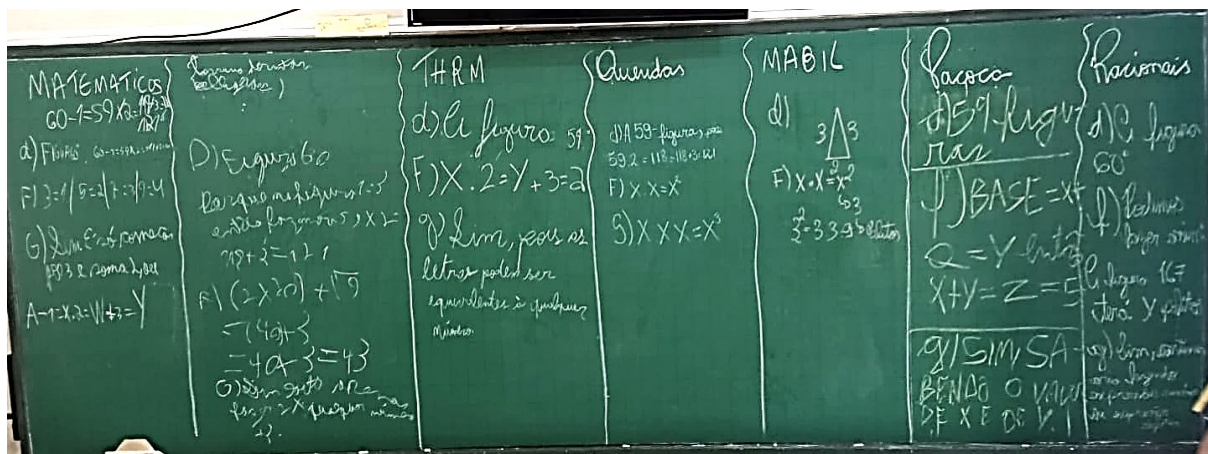
A aluna A6, em [6.5], esclarece que os números 3, 4, 5, ... são os números de triângulos e que os números 7, 9, 11, ... são os números de palitos que terá em cada triângulo correspondente. A professora Natália ainda questiona em [6.6] se o grupo seguiu esse padrão, o que é confirmado por A5 e A6, nos trechos [6.7] e [6.8]. Referente ao pensamento matemático, foi apresentado indícios do processo *Generalizar* em [6.8], pois percebeu que a cada dois palitos conseguiria construir um novo triângulo, ou seja, a percepção desse padrão.

5.3.2 Discussão do problema dos palitos

Nesta seção, serão apresentadas as análises referentes ao momento [2], da discussão do problema, envolvendo todos os grupos.

Após a resolução do problema, a professora Natália pediu que cada um dos grupos elegesse um representante que deveria ir ao quadro para registrar as resoluções feitas por seu grupo dos itens d), f) e g). Os itens a), b) e c) foram discutidos oralmente. Assim, os grupos construíram o painel de soluções, conforme Figura 12, constituindo a etapa 6 – Registro das resoluções na lousa.

Figura 12 - Registro das respostas pelos grupos acerca do problema dos palitos



Fonte: Acervo da pesquisadora.

Em seguida, a professora começa o momento da Plenária (etapa 7) e a todo instante é nítido a Busca do Consenso (etapa 8). A professora questiona os grupos sobre o item a) e houve um consenso, pois, todos responderam que haveria 9 palitos na quarta figura, relatando que a estratégia utilizada foi adicionar dois palitos à quantidade existente na terceira figura. Após esse momento, a professora pergunta a cada grupo qual foi a quantidade de palitos que eles colocaram na letra b). Os grupos começam a responder e A7 pediu para falar, aluna esta que no momento da resolução do problema interagiu muito pouco e se mostrou mais quieta que os demais participantes do grupo:

[7.1] **A7 do grupo Matemáticos:** Professora, eu coloquei 41, porque eu percebi que a quantidade de triângulo vezes dois mais um é igual ao número de palitinhos. Igual essa aqui... que é quatro triângulos deu nove, daí eu fiz vinte vezes dois mais um, quarenta e um.

[7.2] **Professora Natália:** Vinte vezes dois mais um, quarenta e um. A13? (Sequenciar)

[7.3] **A13 do grupo Borussia Dortmund Bellingham:** Quê?

[7.4] **Professora Natália:** A sua deu 41?

[7.5] **A13 do grupo Borussia Dortmund Bellingham:** A primeira figura deu 3, certo? Então, temos mais 19 figuras que fazendo vezes dois vai dá trinta e oito, e se a primeira figura tem três, fazemos trinta e oito mais três que é igual a quarenta e um.

[7.6] **Professora Natália:** Então você usou uma multiplicação!?

[7.7] **A13 do grupo Borussia Dortmund Bellingham:** Sim!

A aluna A7, no trecho [7.1] apresenta uma relação entre a quantidade de palitos e a quantidade de triângulos, na qual o número de palitos (P) será dado pelo dobro do número de triângulos (t) + 1, ou seja, $P = 2 \cdot n + 1$. No trecho [7.2] a professora realiza a ação

*Sequenciar*¹⁸, conforme Stein, Engle, Smith e Hughes (2008), definindo a ordem em que serão apresentadas as resoluções dos alunos. O aluno A13 também mostrou um raciocínio multiplicativo, contudo destacou que o número de palitos será dado pelo (número de triângulos - 1) + 3, em outras palavras, $P = 2.(n - 1) + 3$. Na alternativa b) todos os alunos conseguiram chegar a 41 palitos, que era a resposta correta, logo, houve um consenso.

Nesse momento, os alunos apresentam vestígios dos processos *Generalizar* e *Convencer*, nos trechos [7.1] e [7.5], pois eles tentaram achar um padrão que permitisse encontrar a quantidade de palitos para uma quantidade qualquer de triângulos, além de comunicarem a professora Natália suas generalizações e justificativas. Em seguida, a professora pergunta aos alunos sobre o item c) e todos afirmaram que nenhuma figura terá 100 palitos, ela pede justificativas e os alunos falam que não terá 100 palitos, pois o 100 é um número par e a sequência é composta por números ímpares.

Dando continuidade à aula, a professora questiona que figura terá 121 palitos, alternativa d). Nesse instante alguns grupos relatam que seria a 59ª figura, já outros defendem que seria a 60ª figura. A professora busca as respostas que os grupos indicaram no quadro, no painel de soluções, e os questiona conforme o trecho 8:

[8.1] **Professora Natália:** *Então gente, aqui, $60 - 1 = 59$, $59 \times 2 = 118$ e $118 + 3 = 121$. Eu só fiquei curiosa com uma coisa: por que já apareceu sessenta no começo, vocês conseguem me ajudar?* (A professora refere-se à resolução apresentada pelo grupo *Matemáticos* para o item d, conforme Figura 13)

[8.2] **A1 do grupo Matemáticos:** *Porque sessenta é o número de triângulos.*

[8.3] **Professora Natália:** *Gente, deixa eu pegar essa aqui que deu 60 também! A5 explica como vocês pensaram. (Sequenciar/Estabelecer Conexões)*

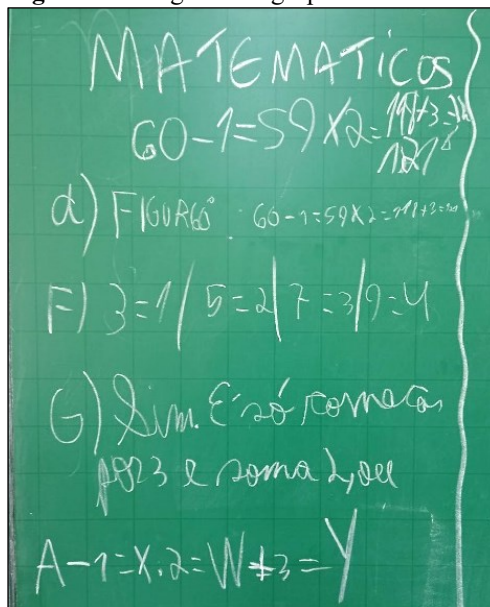
[8.4] **A5 do grupo Racionais:** *Eu fui até o trinta que deu 61, daí eu comecei a ir de dez em dez, tipo por quarenta, por cinquenta e depois por sessenta. Daí eu percebi que adicionava vinte, tipo, a gente percebeu que a cada dez, adicionava vinte.*

[8.5] **Professora Natália:** *Então fala pro pessoal isso. Gente (pausa), olha só! 121 palitos equivalem a sexagésima figura, a sexagésima figura, ou seja, a 60. Olha a estratégia do grupo chegou a 60, percebeu que, foi contando e depois percebeu que...?*

[8.6] **A5 do grupo Racionais:** *Que a cada dez, adicionava vinte. Porque na décima figura tinha vinte e um, na vigésima tinha quarenta e um, ou seja, adicionou vinte. Daí a gente parou no trinta que deu sessenta e um, então quarenta daria oitenta e um porque adicionou vinte, e assim por diante, cinquenta daria cento e um, e sessenta, cento e vinte e um.*

¹⁸ Ressalta-se que, no momento [2], as professoras apresentam ações como *Questionar*, *Enfatizar a Justificativa*, entre outras. Contudo, foi definido que, nesse momento, as ações realizadas pelas professoras seriam analisadas tomando como base os autores Stein, Engle, Smith e Hughes (2008).

Figura 13 - Registro do grupo “Matemáticos”



Fonte: Acervo da pesquisadora.

No trecho [8.1], a professora tenta compreender como o grupo descobriu que era a 60ª figura, e eles relatam em [8.2] que 60 é o número de triângulos, apresentando vestígios do processo *Convencer*. Apresentando a ação *Sequenciar*, a professora questiona o grupo “Racionais” no trecho [8.3] sobre como eles chegaram também à 60ª figura. Ela também realiza a ação *Estabelecer Conexões*, compreendida como buscar relações entre as resoluções de vários alunos, conforme Stein, Engle, Smith e Hughes (2008). Ao desenvolver a ação Estabelecer Conexões, a professora buscou uma relação entre as resoluções apresentadas pelos grupos *Matemáticos* e *Racionais*, que chegaram a mesma solução, contudo ela descartou as demais contribuições colocadas na lousa pelos grupos que chegaram à 59ª figura.

A aluna A5, nos trechos [8.4], [8.6], afirma que a figura 20 terá 41 palitos e a figura 30 terá 61 palitos, ou seja, houve um acréscimo de 20 palitos. Ela também esclarece que esse padrão é mantido para as figuras 40, 50, 60 etc. e, assim, o grupo compreendeu que a figura 40 teria 81 palitos, a figura 50 teria 101 palitos e que a figura 60 teria 121 palitos.

No trecho [8.5], a professora Natália deixa de lado a resposta 59, no entanto ela poderia ser discutida, partindo-se de um erro para se promover o desenvolvimento do pensamento matemático dos estudantes. Além disso, sua fala valida que a resposta correta é a 60ª figura, e não realiza a busca do consenso (etapa 8).

Com relação ao pensamento matemático houve indícios dos processos *Generalizar* e *Convencer*. O primeiro, no momento em que a aluna A5 apresenta o padrão encontrado pelo grupo, de que a cada dez figuras há um aumento de 20 palitos a quantidade anterior [8.4] e, o

segundo, quando ela tenta convencer a professora Natália com seus argumentos matemáticos [8.6].

Destaca-se que, para o professor notar o desenvolvimento do pensamento matemático, as etapas da plenária (etapa 7) e da busca do consenso (etapa 8), são relevantes, pois não é possível identificar todos os processos de pensamento matemático desenvolvidos pelos alunos apenas pela apresentação do quadro de soluções (etapa 6).

A aula termina durante o diálogo da professora Natália com A5, sem concluir as etapas 9 - Formalização do conteúdo e 10 - Proposição e resolução de novos problemas da MEAAMaRP. Contudo, percebe-se o quanto a aula foi dialogada, com interações os alunos nos grupos e na plenária. Além disso, a aula atendeu ao planejamento estabelecido pela professora Natália, conforme Quadro 8, pois os alunos utilizaram o conceito de sequência numérica para resolver o problema. A professora-participante afirmou que na aula seguinte seria concluída a etapa de formalização do conteúdo, mas a pesquisadora não acompanhou esse momento.

5.3.3 Resolução do problema do enxoval

A professora Laura escolheu uma turma de oitavo ano para propor um problema gerador com o objetivo de iniciar o conteúdo de orçamento familiar e pessoal (Figura 6), a etapa 1 da MEAAMaRP- Proposição do Problema.

A turma composta por 30 alunos, contou com a participação de apenas 22 alunos. O problema foi explorado no segundo semestre do ano de 2023, no dia 15 de setembro, durante 3 horas-aula, em uma escola pública cívico-militar localizada na cidade de Rolândia. No início da aula a professora distribuiu uma folha para cada aluno contendo o problema gerador e solicitou-lhes que fizessem a leitura individual do problema em silêncio (etapa 2 – Leitura Individual). Após, pediu que os alunos se organizassem em seis grupos, e eles se organizaram da seguinte maneira: dois grupos com 4 integrantes, um grupo com 3 integrantes, um grupo com 6 integrantes, um grupo com 5 integrantes e um grupo com 8 integrantes. Contudo, no grupo formado por 8 alunos não foi realizada a gravação e nem tiveram os registros escritos considerados, pois os alunos ou seus responsáveis não autorizaram a participação na pesquisa. Assim, os grupos formados se organizaram conforme o Quadro 11.

Quadro 11 - Grupos formados durante a aula

Grupo	Alunos participantes
1	A1, A2 e A3
2	A4, A5, A6, A7 e A8
3	A9, A10, A11 e A12

Grupo	Alunos participantes
4	A13, A14, A15 e A16
5	A17, A18, A19, A20, A21 e A22

Fonte: Dados da pesquisa.

Dando prosseguimento à aula, a professora Laura solicitou que os alunos lessem o problema juntos em grupo (etapa 3 – Leitura em conjunto) e, simultaneamente, a pesquisadora foi distribuindo os 5 gravadores e posicionando a câmera para captar as imagens. Enquanto os alunos resolviam o problema (etapa 4 – Resolução do Problema), a professora Laura passou pelos grupos fazendo questionamentos e se certificando de que todos estavam conseguindo resolvê-lo (etapa 5 – Observar e incentivar).

Para a presente análise, foram selecionados os grupos: 1 e 4, que mais interagiram durante a aula com a professora no momento (1) da resolução do problema e, também, no momento (2) da discussão. Para manter o anonimato os alunos foram indicados por A1, A2, A3, ... até o total de participantes. As transcrições foram organizadas em trechos, com foco nas interações entre os grupos de alunos com a professora.

5.3.3.1 Grupo 1

O grupo foi constituído por duas meninas e um menino, indicados por A1, A2 e A3. As ações da professora, que foram identificadas durante a interação com o grupo, estão destacadas entre parênteses. As análises das ações desenvolvidas estão apoiadas nos autores Celis, Quiroz e Toro-Vidal (2019) e Häikiöniemi e Francisco (2019), destacados anteriormente.

A professora chega ao grupo e começa a interação:

- [1.1] **Professora Laura:** *E aí? O que vocês conseguiram fazer? Como que tá aí?* **(Questionar)**
- [1.2] **A1:** *Ah, eu fiz assim: quarenta, quarenta é... quatro horas que ela trabalha por dia, ou seja, quatro horas trabalhadas por dia, dez reais a hora, dá quarenta.*
- [1.3] **Professora Laura:** *E que mais? Quantas vezes ela trabalha na semana?* **(Questionar)**
- [1.4] **A1:** *Aqui não tá falando não, professora.*
- [1.5] **Professora Laura:** *Olha ali, vamos ler de novo, lê ali pra mim o começo de novo.* **(Focalizar o pensamento dos alunos)**
- [1.6] **A1:** *“Nadine trabalha em um restaurante seis vezes por”, ah, eu acho que pulei essa parte!*
- [1.7] **Professora Laura:** *Ah, então e aí? O que dá pra você fazer agora?* **(Questionar)**
- [1.8] **A1:** *Fazer o quarenta vezes o seis?*
- [1.9] **Professora Laura:** *É, faz aí o quarenta vezes o seis.* **(Julgar)**
- [1.10] **A1:** *Dá duzentos e quarenta!*

De início, apenas o A1 interage com a professora Laura, todavia conforme a conversa foi fluindo os demais participantes do grupo, A2 e A3, começaram a socializar com a professora. Isso ocorreu, pois o aluno A1 estava com muita dificuldade na resolução do problema e a professora buscou auxiliá-lo.

A professora Laura chega ao grupo e busca identificar o que os alunos já estavam realizando [1.1]. O aluno A1 explica à professora que Nadine ganha quarenta reais por dia [1.2], e ela o questiona quantas vezes a Nadine trabalha por semana [1.3]. O aluno relata que não está falando no problema a quantidade de dias que ela trabalha [1.4], mas a professora o orienta a ler novamente o enunciado do problema [1.5], e A1 percebe que não havia se atentado a essa parte do problema [1.6]. Com o intuito de incentivar os alunos na resolução, ela indaga o que eles fariam [1.7] e A1 responde que fará quarenta vezes o seis [1.8] dando o total de duzentos e quarenta reais [1.10].

A professora Laura, em sua entrevista, relatou que sempre pede para seus alunos lerem de novo os enunciados dos problemas com o intuito deles perceberem algo que antes poderiam não ter observado, e a ação está presente na interação.

Em relação às ações da professora, identificam-se, nesse trecho, o *Questionar*, *Julgar* e *Focalizar o pensamento dos alunos*. O *Questionar* está presente nos trechos [1.3] e [1.7], sendo definido por Celis, Quiroz e Toro-Vidal (2019) como o momento no qual o professor se relaciona, por meio de perguntas, com os alunos. No trecho [1.5] há a ação *Focalizar o pensamento dos alunos*, que, segundo Häikiöniemi e Francisco (2019), é representada pelo professor ajudando seus alunos a perceber algo relevante que ele não havia se atentado antes.

Acerca do pensamento matemático, o trecho apresenta vestígios do processo *Generalizar* que, de acordo com Stacey (2006) e Mason, Burton e Stacey (2010), é quando o aluno procura por padrões e relações. A1 percebe que a Nadine ganha R\$ 40,00 por dia e ao realizar a multiplicação de R\$ 40,00 por 6, ele descobre quanto ela ganha por semana (R\$240,00), conforme Figura 14.

Figura 14 - Parte da resolução do aluno A1, do grupo 1

$$\begin{array}{r} 40 \\ \times 6 \\ \hline 240 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 40 \\ \times 6 \\ \hline 240 \end{array} \rightarrow R\$240,00$$

Fonte: Acervo da pesquisadora.

Dando continuidade ao diálogo, a professora questiona A1 acerca da gorjeta, de acordo com o trecho 2:

- [2.1] **Professora Laura:** *E agora? Daí deu duzentos e quarenta, ela recebe isso por semana, por dia? Como que é? (Questionar/Investigar)*
 [2.2] **A1:** *Por semana.*
 [2.3] **Professora Laura:** *Mas ela recebe só isso por semana? (Questionar)*
 [2.4] **A1:** *Não, tem mais (pausa) a gorjeta.*
 [2.5] **Professora 2:** *Quanto que é a gorjeta? (Questionar)*
 [2.6] **A1:** *É trezentos e vinte.*
 [2.7] **Professora Laura:** *A gorjeta é trezentos e vinte? (Questionar/Investigar)*
 [2.8] **A1:** *É, por quê?*
 [2.9] **Professora Laura:** *O que está escrito ali no enunciado? (Questionar)*
 [2.10] **A1:** *“...além disso ela recebe oitenta reais de gorjeta por semana”, ela trabalha quatro vezes, é quatro semanas em um mês, quatro vezes oito dá trinta e dois e como é oitenta, trezentos e vinte.*
 [2.11] **Professora Laura:** *Então você está colocando que ela recebe trezentos e vinte, de gorjeta, por mês? (Questionar/Investigar)*
 [2.12] **A1:** *É.*

A professora investigou se o aluno percebeu que Nadine recebe R\$240,00 por semana [2.1], o que é confirmado por A1 em [2.2]. O aluno também é questionado se a Nadine recebe apenas R\$ 240,00 por semana [2.3] e A1 nega, afirmando que há também o valor da gorjeta [2.4]. Em [2.5] a professora busca saber quanto é a gorjeta e A1 esclarece que é de R\$ 320,00 [2.6]. Ela então busca a confirmação do aluno se a gorjeta é realmente esse valor em [2.7], e ele responde de forma afirmativa. A professora, em [2.9], pede, então, que ele releia o enunciado.

Ao reler o problema, A1 reitera seu argumento e considera que o mês tem quatro semanas. Assim, como Nadine ganha R\$ 80,00 por semana, ele então multiplica R\$ 80,00 por quatro, obtendo R\$ 320,00 [2.10]. A professora compreende que A1, ao falar que a gorjeta era R\$ 320,00, estava se referindo à quantidade de dinheiro que Nadine ganha de gorjeta no mês [2.11].

No trecho, percebe-se que a professora Laura, novamente, pede para o aluno se atentar às informações contidas no enunciado. Observa-se também que o aluno A1 e a professora tiveram um erro de comunicação, pois A1, ao se referir à quantidade de gorjeta ganha por mês, faz a professora entender que ele estava se referindo à quantidade de gorjeta ganha pela Nadine por semana.

Há a evidência das ações *Questionar* e *Investigar*. O *Questionar* está presente nos trechos [2.1], [2.3], [2.5], [2.7], [2.9] e [2.11], nos quais a professora busca, por meio de

perguntas, entender se o grupo compreendeu o quanto Nadine ganha por semana e o quanto de gorjeta ela ganha por semana. A ação de *Investigar* foi identificada nos trechos [2.1], [2.7] e [2.11], sendo definida por Celis, Quiroz e Toro-Vidal (2019) como a ação de solicitar que o aluno explique a resposta apresentada ou as estratégias que foram utilizadas para se chegar à solução.

Em [2.1] a professora Laura busca entender se a quantia de R\$ 240,00 é o quanto Nadine ganha por semana, ou não. Em [2.7] a professora avalia se a quantia de R\$ 320,00 é o valor da gorjeta, e se esta é recebida mensalmente [2.11].

Com relação aos processos evidenciados de pensamento matemático destaca-se o processo *Generalizar*, no qual A1 consegue identificar que Nadine receberá R\$ 320,00 de gorjeta por mês, pois ele percebeu que ela ganha por semana R\$ 80,00. Então ao multiplicar R\$80,00 por 4 (a quantidade de semanas consideradas pelo grupo em um mês), obteve R\$ 320,00.

No próximo trecho, a professora Laura questiona o grupo sobre a quantidade de dinheiro que Nadine ganha por mês, ou seja, as receitas do orçamento:

[3.1] **Professora Laura:** *Vocês chegaram a fazer (a calcular) o quanto que ela ganha por mês? (Questionar)*

[3.2] **A1:** *Por mês, ela ganha... (pausa) R\$1.280,00!*

[3.3] **Professora Laura:** *O que você considerou para dar um mil duzentos e oitenta (reais)? (Questionar/Investigar)*

[3.4] **A1:** *Eu somei o que ela ganha, o R\$320,00 por mês, o R\$240,00 por semana, que deu R\$240,00 vezes quatro, que deu R\$960,00, e R\$960,00 mais R\$20,00, é igual a R\$1.280,00.*

[3.5] **Professora Laura:** *Tem mais alguma coisa que ela ganha? (Questionar)*

[3.6] **A3:** *Não.*

[3.7] **Professora Laura:** *Não? Olha ali no enunciado, vamos ver: então, ela trabalha seis vezes por semana, ganha os oitenta reais da gorjeta, daí você falou que ela ganha quarenta reais por dia, né? O que ela precisa? De...? (Questionar)*

[3.8] **A2:** *De R\$850,00.*

[3.9] **Professora Laura:** *De R\$850,00. Ela usa transporte? (Questionar)*

[3.10] **A1:** *Usa.*

[3.11] **Professora Laura:** *E ela ganha dinheiro para o transporte? (Questionar)*

[3.12] **A1:** *Ganha R\$100,00, mas o gasto dela com transporte, por mês, é R\$190,00!*

[3.13] **Professora Laura:** *Mas, então, você falou que você somou ali e deu R\$1.280,00 (pausa) isso, e como você calculou os cem reais ali? Como você fez? (Questionar/Investigar)*

[3.14] **A1:** *Eu fiz assim: como ela vai seis vezes por semana, é R\$8,00, né (por dia)? Dá R\$48,00 por semana né? R\$48,00 mais R\$48,00 mais R\$48,00 mais R\$48,00 dá R\$192,00. Daí ela tem que arcar com um prejuízo de R\$92,00 ainda.*

A professora Laura questiona o grupo quanto Nadine recebe por mês [3.1], A1 responde que ela ganha o total de R\$ 1.280,00 [3.2]. A professora investiga o que o grupo fez para chegar nesse valor [3.3], o aluno então explica que a Nadine recebe R\$ 240,00 por semana, e como o grupo considera o mês com quatro semanas, ao multiplicar R\$ 240,00 por 4 se obtém que Nadine recebe R\$ 960,00 mensais, somado com o valor da gorjeta R\$ 320,00, chega-se ao total de R\$ 1.280,00 [3.4]. Dando continuidade, a professora indaga se Nadine ganha mais algum valor durante o mês [3.5], o aluno afirma que não [3.6], e ela destaca pontos do enunciado e questiona o grupo sobre o que Nadine precisa [3.7], e o aluno confirma que ela precisa de R\$ 850,00 [3.8].

Como o aluno não havia se atentado ao vale-transporte, a professora então o questiona se Nadine usa transporte [3.9] e A1 confirma que sim [3.10]. Uma vez mais, ela questiona o grupo se a Nadine recebe dinheiro para o transporte [3.11], o aluno A1 responde que ela ganha R\$ 100,00, mas que seu gasto com o transporte é de R\$ 192,00 [3.12]. A professora, então, indaga o aluno sobre se quando ele disse que Nadine recebe R\$ 1.280,00 por mês já estava incluso o valor do vale-transporte [3.13].

A professora, no trecho [3.13], indagou o grupo sobre as receitas de Nadine para verificar se os alunos perceberam o vale-transporte como algo recebido e que deveria ser contabilizado, juntamente com o salário e a gorjeta, nas receitas do orçamento. O aluno não compreende a pergunta da professora [3.14] e começa a explicar como fez para chegar ao valor gasto com o transporte, R\$ 192,00.

As ações *Questionar* e *Investigar* da professora ocorreram durante toda interação, nos trechos [3.1], [3.3], [3.5], [3.7], [3.9], [3.11] e [3.13]. A todo momento ela buscou entender a forma como o grupo estava resolvendo o problema e se os alunos consideraram todas as informações importantes contidas no enunciado. A ação *Investigar* ocorre nos trechos [3.3] e [3.13]; em [3.3] a professora Laura busca identificar a estratégia de resolução utilizada pelo grupo para chegar à quantidade de R\$ 1.280,00 e em [3.13] a ação se dá buscando uma explicação sobre se o valor do vale-transporte estava incluso na quantia de R\$ 1.280,00.

Com relação ao pensamento matemático, foram evidenciados vestígios do processo *Generalizar*, no qual os alunos concluíram que como a Nadine gasta R\$ 8,00 de transporte por dia, na semana ela gastará R\$ 48,00, e R\$ 192,00 por mês [3.14].

5.3.3.2 Grupo 4

O grupo foi composto por quatro meninos, indicados por A13, A14, A15 e A16. As ações realizadas pela docente serão indicadas entre parênteses. A análise das ações está apoiada nos autores Celis, Quiroz e Toro-Vidal (2019) e Hähkiöniemi e Francisco (2019) conforme destacado. No grupo 1 as interações entre os alunos e a professora se deram mais em relação aos cálculos, pois o grupo em questão estava com dificuldades na resolução e a professora Laura realizou ações na tentativa de apoiar e auxiliar os alunos. O grupo 4 apresentou uma característica diferente, pois os alunos questionaram a própria situação vivida por Nadine, uma mãe solteira que mora com a mãe e as dificuldades enfrentadas. O trecho a seguir ilustra alguns pontos levantados pelos alunos:

- [4.1] **Professora Laura:** *Vamos pensar assim, a Nadine é uma mulher, o quê? (Questionar)*
- [4.2] **A14:** *Grávida.*
- [4.3] **Professora Laura:** *Grávida! Quais são as despesas dela? Quais são as despesas que falou aí? (Questionar)*
- [4.4] **A13:** *Então, R\$156,00 de transporte, R\$750,00 de aluguel e R\$60,00 de internet.*
- [4.5] **Professora Laura:** *Então vamos pensar assim: esse problema aí é fora da nossa realidade? (Questionar)*
- [4.6] **A15:** *Não.*
- [4.7] **Professora Laura:** *Então [...], mas será que, por exemplo, ela tá indo pro serviço, vê um salgadinho lá pra comer, ela pode comer o salgado? O que vocês acham? É bom ela guardar esse valor todo por mês? (Questionar)*
- [4.8] **A15:** *Metade dele.*
- [4.9] **Professora Laura:** *Metade? Por quê? E com a outra metade, ela faz o quê? (Questionar)*
- [4.10] **A14:** *A outra metade ela compra comidas mais saudáveis, fraldas.*
- [4.11] **Professora Laura:** *Por que ela mora com quem também?*
- [4.12] **A13:** *Com a mãe.*
- [4.13] **Professora Laura:** *Ela mora com a mãe dela.*
- [4.14] **A13:** *A mãe dela vai ajudar também, né?*
- [4.15] **Professora Laura:** *[...] só que aqui não citou conta de água, não citou conta de luz, alimentação...*
- [4.16] **A16:** *Verdade, mas daí ela não vai conseguir comprar esse enxoval nunca.*

A interação começa com a professora chamando a atenção dos alunos ao fato de que Nadine é uma mulher grávida [4.1], [4.2], questionando sobre as despesas dela [4.3]. A13 diz que ela gasta R\$ 156,00 com transporte, R\$ 750,00 com aluguel e R\$ 60,00 com internet [4.4]. O aluno também afirma que o valor gasto com o vale-transporte é R\$ 156,00 ao invés de R\$ 192,00, todavia a professora não questiona acerca desse valor e de como obteve. Dando continuidade, ela os indaga se aquele problema é fora da realidade [4.5] e A15 afirma que não [4.6].

O diálogo continua com a professora perguntando se Nadine teria dinheiro para comprar um salgadinho pra comer, caso quisesse, e se seria conveniente ela guardar todo o dinheiro que sobra [4.7]. A15 então sugere que ela guarde “*metade dele*” [4.8]. A professora Laura então questiona o que Nadine faria com a outra metade do dinheiro [4.9], e A14 diz que ela poderia comprar comidas e fraldas [4.10]. A professora relembra que Nadine ainda mora com sua mãe [4.11], [4.12] e [4.13], A13 questiona se a mãe dela também vai ajudar com as despesas [4.14], e a professora faz os alunos refletirem sobre não mencionar outras despesas como água e luz em [4.15] e A16 afirma que Nadine não vai conseguir comprar o enxoval [4.16].

Há questões da Educação Financeira que permeiam a discussão deste problema: se a mãe ajudará a Nadine a pagar as contas; quanto ela terá que guardar para que possa sobrar um pouco para gastar com coisas necessárias como com uma alimentação mais saudável, etc., por esse motivo a ação *Questionar* em [4.1], [4.3], [4.5], [4.7] e [4.9] foi a mais utilizada pela professora, pois a interação possibilitou essa discussão.

Em relação ao pensamento matemático, apresentaram-se indícios do processo *Especificar*, que, de acordo com Stacey (2006) e Mason, Burton e Stacey (2010), ocorre quando o aluno busca casos particulares e exemplos. Isso ocorreu quando o grupo, incentivado pela professora, relata que Nadine deveria guardar metade do dinheiro que sobra e com a outra metade do dinheiro ela poderia comprar fraldas, alimentos mais saudáveis [4.7], [4.8], [4.9] e [4.10].

Os alunos continuam ainda discutindo sobre o quanto Nadine deve guardar do dinheiro que sobra, para que ela tenha dinheiro para comprar coisas que se fizerem necessárias durante o mês e ainda tenha dinheiro para guardar e comprar o enxoval:

[5.1] **A13:** *Professora, olha aqui, sobra R\$314,00. Daí, desses R\$314,00 ela vai dividir (divide por dois, pois o grupo sugere que Nadine guarde metade do dinheiro para o enxoval), que vai dar R\$157,00. Desses R\$157,00,00 ela vai ajudar a mãe a fazer as compras e a mãe dela paga o resto da dívida, daí ela vai conseguir comprar em seis meses.*

[5.2] **Professora Laura:** *Vamos pensar: existe outra alternativa para Nadine conseguir o enxoval? Como? (Questionar)*

[5.3] **A14:** *Existe.*

[5.4] **A13:** *Sobrar quatorze reais por mês, daí ela vai vendendo paçoquinha.*

[5.5] **A14:** *(Risos).*

[5.6] **Professora Laura:** *Ué, o quê que tem? Não é um trabalho também? (Questionar)*

[5.7] **A13:** *Foi o que eu falei.*

[5.8] **Professora Laura:** *É um dinheiro extra.*

[5.9] **A13:** *Só que ela tá grávida, professora. Não pode ficar no sol ralando, vendendo paçoquinha.*

A13 afirma que iria sobrar R\$ 314,00, e o grupo pensa numa estratégia para Nadine que seria pegar o dinheiro que sobrou e dividir por dois. Metade dessa quantia seria guardada (R\$157,00) e a outra metade ela ajudaria a mãe a pagar as contas e a fazer compras. Se ela guardar essa quantia por seis meses, já conseguirá comprar o enxoval [5.1]. Todavia, o aluno cometeu um erro, pois em cinco meses Nadine já compraria, guardando exatamente R\$ 157,00 todo mês ($R\$ 157,00 \times 5 = R\$ 785,00$), visto que ela precisa de R\$ 750,00.

A professora não perguntou sobre a quantidade de meses, mas instiga o grupo a pensar se em uma alternativa para que Nadine consiga comprar o enxoval [5.2]. Os alunos afirmam que sim [5.3] e A13 apresenta outra estratégia de resolução, na qual a Nadine pagaria as contas com o dinheiro que sobrou e com R\$ 14,00, ela poderia comprar paçoquinha para revender [5.4]. A14 ridiculariza a ideia dita pelo colega e a professora chama a atenção dele, pois vender paçoquinha é um trabalho também e com ele seria possível tirar um dinheiro extra para o orçamento [5.5] e [5.6]. Os alunos ponderam que Nadine está grávida e que ela não pode ficar no sol vendendo paçoquinha [5.9]. Nota-se como a situação apresentada despertou tantas discussões no grupo para se chegar a uma solução para ajudar a Nadine.

A ação *Questionar* ocorre em [5.2] e [5.6], pois vemos a professora incentivando os alunos a refletirem sobre alternativas que poderiam ajudar Nadine a ter um dinheiro extra. Acerca do pensamento matemático, evidenciaram-se vestígios do processo *Especificar*, pois A13 ressalta que, com o dinheiro que sobrou, Nadine pagaria as contas e com R\$ 14,00 ela poderia comprar paçoquinhas e revender.

Os alunos continuam sugerindo meios para Nadine ganhar um dinheiro extra e a professora continua os incentivando:

[6.1] **Professora Laura:** *Então vocês acham que essa situação é difícil de acontecer? Alguém engravidar e morar com a mãe só? (Questionar)*

[6.2] **A14:** *Não, eu acho que geralmente acontece.*

[6.3] **A13:** *A vida do brasileiro é essa.*

[6.4] **Professora Laura:** *A vida do brasileiro é essa? Vamos pensar: sem vender a paçoquinha, há outra alternativa para ela conseguir o enxoval? (Questionar)*

[6.5] **A14:** *Arranjar um trabalho?*

[6.6] **Professora Laura:** *Mas ela já não trabalha? (Questionar)*

[6.7] **A13:** *Outro trabalho? Ela tá grávida, não pode forçar não!*

[6.8] **A14:** *Não... sei lá, ela não pode ser artista? Pintar uns quadros, pintura faz bem.*

[6.9] **A13:** *Você não sabe se ela pinta!*

[6.10] **A14:** *Mas não fala que ela não pinta!*

[6.11] **A15:** *Verdade, faz sentido! Ou ela pode fazer uma vaquinha no Instagram!*

[6.12] **Professora Laura:** *Mas daí, vocês acham que há uma outra alternativa também de conseguir um enxoval?* **(Questionar)**

[6.13] **A14:** *Ela pegar um segundo emprego de atendente.*

[6.14] **Professora Laura:** *Vocês acham que a situação financeira dela é boa ou ruim?* **(Questionar)**

[6.15] **A14:** *Ruim, ela tem que aprender a administrar o próprio dinheiro.*

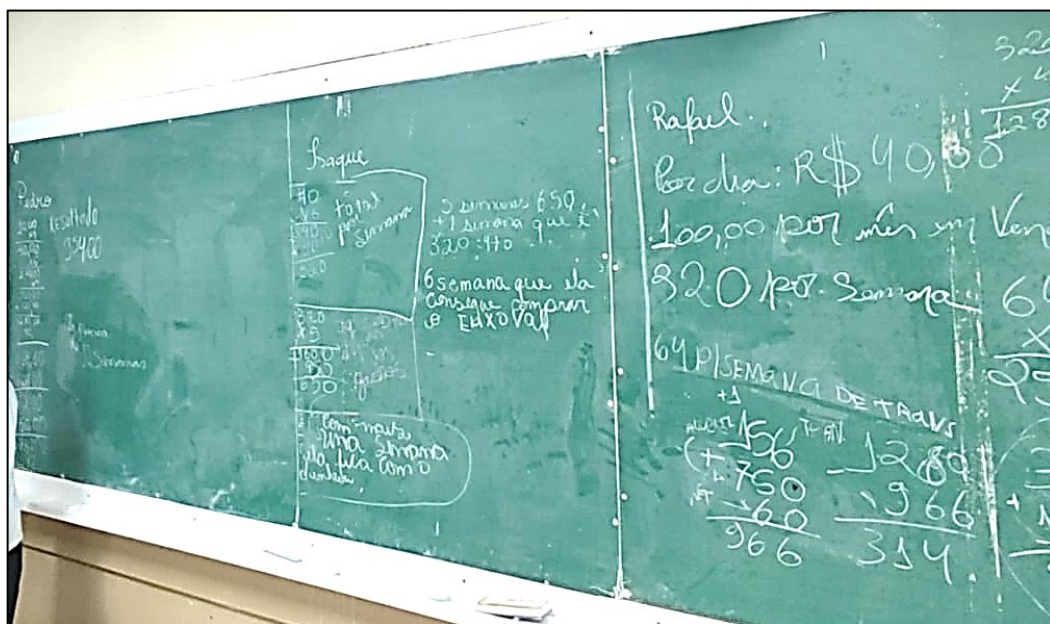
[6.16] **A15:** *Investir.*

A professora indaga os alunos se a situação retratada é difícil de acontecer na realidade atual: uma moça engravidar e morar com sua mãe, e os alunos ressaltam que não, que isso geralmente acontece [6.1], [6.2] e [6.3]. A professora Laura pergunta se há outra alternativa, além da venda das paçoquinhas para que Nadine consiga o enxoval [6.4], e A14 sugere que ela trabalhe [6.5], e a professora indaga se Nadine já não trabalha [6.6]. A13 então fala que ela não pode ter outro trabalho, pois está grávida e não pode se esforçar [6.7].

A14 sugere se Nadine não poderia ser uma artista, pintar quadros, pois, de acordo com ele, “*pintar faz bem*” [6.8], A13 e A14 começam a discutir sobre se ela pinta ou não, A15 interfere e acrescenta que Nadine poderia fazer uma vaquinha no Instagram [6.11]. A professora pergunta de novo se há outra alternativa para que Nadine consiga o enxoval [6.12], A14 propõe que ela tenha um segundo emprego de atendente [6.13], e a professora finaliza sua interação no grupo questionando se a situação financeira de Nadine é boa ou ruim [6.14]. Os alunos ressaltam que é ruim e que Nadine deveria aprender a administrar seu próprio dinheiro e investir [6.15] e [6.16].

Após a professora se ausentar do grupo, os alunos debatem até chegar ao consenso de que Nadine poderia pintar quadros, e supõem que ela ganharia R\$ 100,00 a mais, por mês, com a venda, conforme Figura 15.

Figura 16 - Registro das respostas pelos grupos no problema do enxoval



Fonte: Acervo da pesquisadora.

Dando continuidade, a professora Laura iniciou o momento da Plenária (etapa 7) e a Busca do Consenso (etapa 8) a partir das resoluções apresentadas. Ela pediu silêncio para a turma e chamou, inicialmente, o aluno A9 que foi o representante do grupo 3 para apresentar à turma a resolução obtida por seu grupo:

[7.1] **Professora Laura:** Gente, o grupo do A9 (pausa) é formado por ele, A12, A10 e A11. Então, ele vai explicar como eles pensaram pra resolver o problema, vamos prestar atenção!

[7.2] **Aluno A9 do Grupo 3:** A Nadine, ela ganha R\$320,00 por semana, ela gasta um total de R\$48,00 de transporte por semana. Se contar o vale-transporte de cem reais, ela não gasta nada nas duas primeiras semanas. Ela ganha R\$1.600,00 por mês e, no total, com todos os gastos, ela fica com R\$650,00 e com mais uma semana, ela consegue o enxoval em seis semanas.

[7.3] **Professora Laura:** Isso, então vamos pensar (pausa) só dá uma licencinha A9.

(professora começa a descrever a resolução do aluno que consta no quadro)
Ele pegou R\$40,00 multiplicou por seis, que ele falou que são os dias da semana que ele trabalha, isso deu R\$240,00. Com R\$240,00, ele somou mais R\$80,00 que ela (Nadine) ganha de gorjeta por semana, e deu R\$320,00. Vocês acham que esse R\$320,00 é por semana ou por mês?

[7.4] **Turma responde:** Por semana!

[7.5] **Professora Laura:** Por semana! E daí, o que ele fez ali? Gente, vamos continuar o raciocínio dele. Por que ele multiplicou R\$320,00 por cinco? Vocês sabem?

[7.6] **Aluno A1 do Grupo 1:** Porque ele considerou que o mês tem cinco semanas.

[7.7] **Professora Laura:** Ah, ele considerou o mês tendo cinco semanas! Então ele considerou o mês tendo cinco semanas e deu R\$1600,00. De R\$1600,00 ele começou a tirar os gastos que ela teve, não foi? Então, ele

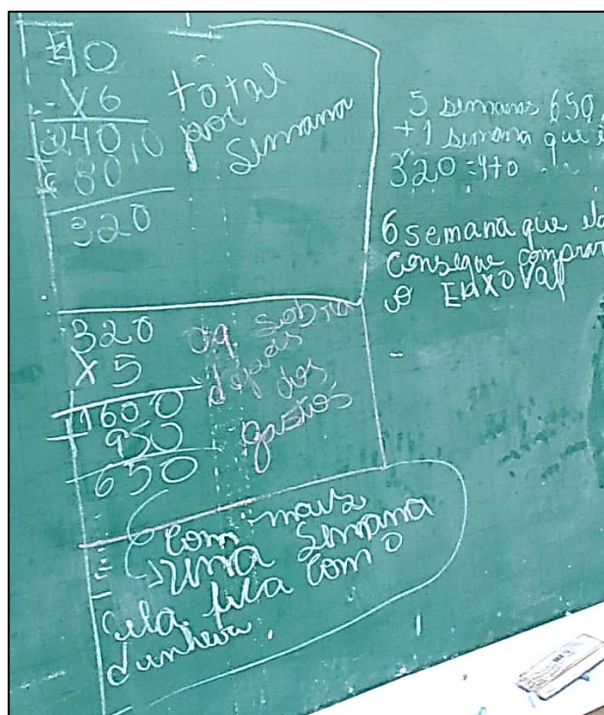
começou a tirar os gastos que ela teve ali e chegou que, por mês, [...] sobrou R\$650,00. Daí o que você fez com os R\$650,00?

[7.8] **Aluno A9 do Grupo 3:** *Com mais uma semana ela consegue o dinheiro.*

[7.9] **Professora Laura:** *Ah, então com mais uma semana ela conseguiria o dinheiro. Então, isso daqui é o que o grupo do A9 pensou, vamos ouvir o grupo do A4 agora, [...] vamos bater palmas para o grupo do A9. (Sequenciar)*

A professora inicia apresentando os integrantes do grupo [7.1], o aluno A9 começa sua explicação dizendo que Nadine ganha R\$ 320,00 por semana, gasta R\$ 48,00 com transporte por semana, ganha um vale-transporte de R\$ 100,00 que cobre o gasto das duas primeiras semanas apenas e ganha o total de R\$ 1.600,00 por mês. Tirando seus gastos sobra o total de R\$ 650,00, logo, se ela trabalhar mais uma semana, segundo A9, ela já conseguiria comprar o enxoval [7.2]. A professora então retoma à turma a resolução que A9 colocou no quadro, conforme Figura 17, e questiona os alunos se R\$ 320,00 é o quanto Nadine ganha por semana ou por mês [7.3].

Figura 17 - Registro da resolução do Grupo 3 na lousa



Fonte: Acervo da pesquisadora.

A turma então percebe que o valor de R\$320,00 é a quantidade que Nadine ganha por semana [7.4], a professora Laura pede para a turma responder por que A9 multiplicou R\$ 320,00 por 5 [7.5], e A1 afirma que é porque A9 considerou o mês com 5 semanas [7.6]. A professora então ressalta que foi realmente isso e que Nadine ganha R\$ 1.600,00 por mês e que após pagar

as contas sobra R\$ 650,00. A9 conclui que com mais uma semana de trabalho ela conseguirá comprar o enxoval [7.7], [7.8] e [7.9].

Durante as falas do grupo 3, no momento da plenária, percebe-se que os integrantes não pensaram na possibilidade de Nadine ter mais gastos do que apenas aqueles apresentados no enunciado do problema gerador, e consideraram que se ela trabalhar por seis semanas, sem gastar nada, ela conseguirá comprar o enxoval. No trecho [7.9] ocorre a ação *Sequenciar*, conforme Stein, Engle, Smith e Hughes (2008), na qual o professor define a ordem de apresentação das resoluções dos alunos, pois a professora Laura diz que após o grupo 3 (representado por A9) a turma irá ouvir o grupo 2 (representado por A4).

Nesse momento, os alunos apresentam vestígios do processo de pensamento matemático *Generalizar*, nos trechos [7.2] e [7.8], pois eles tentam achar um padrão para obter a quantidade de dinheiro ganho por Nadine na semana, no mês, e o quanto sobraria pra ela considerando as contas a pagar, e a quantidade de semanas que deveria trabalhar para juntar o dinheiro do enxoval. Nos trechos [7.4], [7.6] identificaram-se vestígios do processo *Convencer*, pois expressam que R\$ 320,00 é o valor ganho por Nadine em uma semana e que o grupo de A9 considerou o mês com 5 semanas e, por esse motivo, fizeram R\$320,00 x 5.

Dando continuidade ao diálogo, o aluno A4 apresenta a resolução do grupo 2:

[8.1] **Aluno A4 do Grupo 2:** *R\$10,00 é o total que ela recebe por hora.*

[8.2] **Professora Laura:** *R\$10,00 ela recebe por hora! Isso!*

[8.3] **Aluno A4 do Grupo 2:** *Aí vai dar R\$40,00, daí eu fiz vezes seis, que é por semana (pausa).*

[8.4] **Professora Laura:** *Vai, ajuda aí gente! Os R\$40,00 é ali o quê? (A5 se levanta, vai até o quadro e ajuda A4 com a explicação)*

[8.5] **Aluno A5 do Grupo 2:** *É por dia, ela trabalha por semana seis dias. Daí seis vezes R\$40,00 dá R\$240,00, vezes quatro que são as semanas que têm no mês, dá R\$960,00, mais os R\$80,00 que ela ganha por semana deu R\$1280,00. Menos R\$92,00 que era (pausa) do transporte, menos R\$120,00 da internet que ela paga com a mãe dela, menos R\$ 750,00 do aluguel, sobra R\$378,00. Fazendo vezes três, que são os meses que ela precisa fazer para pagar o enxoval, deu R\$954,00. Ela precisa de doze semanas para comprar o enxoval (o aluno indica a resolução apresentada no quadro, Figura 18)*

[8.6] **Professora Laura:** *Gente, vamos olhar o deles aqui, o do A9 deu que ela precisaria de seis semanas e o grupo do A4, eles colocaram que ela iria precisar de doze semanas. Então, eles fizeram o começo todo igual, pegaram o quanto ela recebe por hora vezes quatro, que é a quantidade de horas, deu quarenta reais. Fizeram aqui quarenta vezes seis, por que eles multiplicaram quarenta por seis?*

[8.7] **Aluno A5 do grupo 2:** *Por causa dos dias que ela trabalha na semana.*

[8.8] **Professora Laura:** *Isso, os dias que ela trabalha por semana (pausa). Então aqui eles fizeram R\$240,00 vezes quatro, que deu quanto ela recebe. Por que eles multiplicaram por quatro aqui? E por que A9 multiplicou por cinco aqui? [...] Se a gente olhar no calendário, a gente vê que têm alguns*

meses com quatro semanas, quatro semanas e meia, tem mês que tem cinco semanas. Então o pensamento que eles tiveram foi igual, mas o que acabou mudando? O grupo do A9 acabou considerando o mês com cinco semanas, eles aqui consideraram o mês com quatro semanas, ou seja, no problema em si ele não falou assim: “ela tá em tal mês, esse mês tinha quantas semanas”! Então, ficou a critério do grupo considerar quantas semanas teria o mês. No mês que tiver cinco semanas exatamente, o que vai acontecer? Ela vai receber isso por mês, só que as contas que ela tem, o aluguel, a internet, essas coisas, não vai mudar, essas contas vão continuar as mesmas. [...] Ali eles descontaram R\$120,00 da internet, o que vocês acham? Ela paga R\$120,00 ou ela paga metade da conta da internet? **(Estabelecer Conexões)**

[8.9] **Alguns alunos da sala:** Metade.

[8.10] **Professora Laura:** Metade! Então se a conta inteira é cento e vinte reais, quanto que seria metade?

[8.11] **Alunos da sala:** Sessenta.

[8.12] **Professora Laura:** Olha só gente! Mas isso é apenas um detalhe, porque eles foram listando todas as coisas aqui. Beleza, vamos dar uma salva de palmas para o grupo!

Figura 18 - Registro da resolução do Grupo 2 na lousa

Handwritten calculations on a green chalkboard:

$$\begin{array}{r}
 10,00 \\
 \times 4 \\
 \hline
 40,00 \\
 \times 6 \\
 \hline
 240,00 \\
 \times 4 \\
 \hline
 960,00 \\
 + 320,00 \\
 \hline
 1280,00 \\
 - 92,00 \\
 \hline
 1188,00 \\
 - 120,00 \\
 \hline
 1068,00 \\
 - 750,00 \\
 \hline
 318,00 \\
 \times 3
 \end{array}$$

Resultado 954.00

Ela precisa do 12 Semanas

Fonte: Acervo da pesquisadora.

O aluno A4 diz que Nadine recebe R\$ 10,00 por hora, contudo ele “trava” no meio da explicação, e A5 vai à frente do quadro para ajudá-lo e começa a explicar como eles resolveram. Primeiro, eles fizeram R\$ 40,00 por 6, obtendo R\$ 240,00, que é a quantidade que Nadine recebe por semana, consideraram o mês com 4 semanas e fizeram R\$ 240,00 x 4 = R\$ 1.280,00, obtendo a quantia que Nadine recebe por mês. Após, eles consideraram todos os gastos de Nadine para subtrair esse valor do seu salário: R\$ 92,00 (valor gasto com a passagem do ônibus que não é coberto pelo vale-transporte); R\$ 120,00 (valor da internet); e R\$ 750,00 (aluguel),

realizaram a subtração, $R\$ 1.280,00 - R\$ 962,00 = R\$ 318,00$, ao invés de $R\$ 378,00$, que foi dito por A5.

Nota-se que houve um erro por parte do aluno que registrou a resolução do grupo na lousa. Ele indicou o valor do custo da internet de $R\$ 120,00$ ao invés de $R\$ 60,00$ (Nadine paga metade do valor da internet), mas realizou os cálculos considerando o gasto de $R\$ 60,00$, pois:

- $R\$ 92,00 + R\$ 120,00 + R\$ 750,00 = R\$ 962,00$
- $R\$ 92,00 + R\$ 60,00 + R\$ 750,00 = R\$ 902,00$

Ao subtrair os gastos do salário total, A4 faz $R\$ 1.280,00 - R\$ 962,00 = R\$ 318,00$, contudo o correto seria $R\$ 1.280,00 - R\$ 902,00 = R\$ 378,00$, pois ele considerou o valor total da internet, $R\$ 120,00$. Logo A4 pode ter se baseado na resposta do grupo e, ao montar os cálculos na lousa, não percebeu o equívoco.

A professora mostra aos alunos que ambas as resoluções seguiram a mesma direção, contudo o grupo 2 considerou o mês com 4 semanas e o grupo 3 considerou o mês com 5 semanas [8.8]. A professora continua falando sobre isso, até que ela observa a questão que o grupo considerou no cálculo o valor total da internet, $R\$ 120,00$, e questiona a turma se Nadine paga o valor total da internet ou metade apenas. A turma afirma que ela paga apenas a metade, que seria $R\$ 60,00$. A professora considera apenas que houve uma indicação numérica equivocada e parabeniza o grupo.

No trecho [8.8], a professora desenvolve a ação *Estabelecer Conexões*, compreendida como a busca de estabelecer relações entre as resoluções apresentadas pelos grupos, conforme Stein, Engle, Smith e Hughes (2008). Ela mostra que as resoluções foram resolvidas da mesma forma, mas se chegaram a resultados distintos, porque os grupos considerarem o mês com quantidades diferentes de semanas. O grupo apresentou vestígios do processo *Convencer*, pois, no trecho [8.5] e durante toda a fala, tentam justificar os cálculos realizados e os resultados que alcançaram, além de explicitarem que consideraram a semana como tendo 6 dias.

A aula finaliza quando a professora Laura inicia a formalização do conteúdo, explicando o que é um orçamento, mas não conclui as etapas 9 - Formalização do conteúdo e 10 - Proposição e resolução de novos problemas da MEAAMaRP. Contudo, percebe-se o quanto a aula foi dialogada, promoveu muitas discussões entre os alunos e os alunos com a professora. Além disso, a aula ocorreu de acordo com o planejamento estabelecido pela professora Laura, conforme o Quadro 9, que concluiu as outras etapas na aula seguinte.

5.4 AÇÕES DAS PROFESSORAS E A MOBILIZAÇÃO DOS PROCESSOS DE PENSAMENTO MATEMÁTICO

Após a realização da análise das aulas das professoras, foram organizados quadros de modo a evidenciar ações das professoras que apoiaram processos de pensamento matemático. O Quadro 12 apresenta as ações realizadas pela professora Natália e os processos mobilizados.

Quadro 8 - Trechos que apresentam vestígios de processos de pensamento matemático mobilizados pelas ações da professora Natália no momento [1]

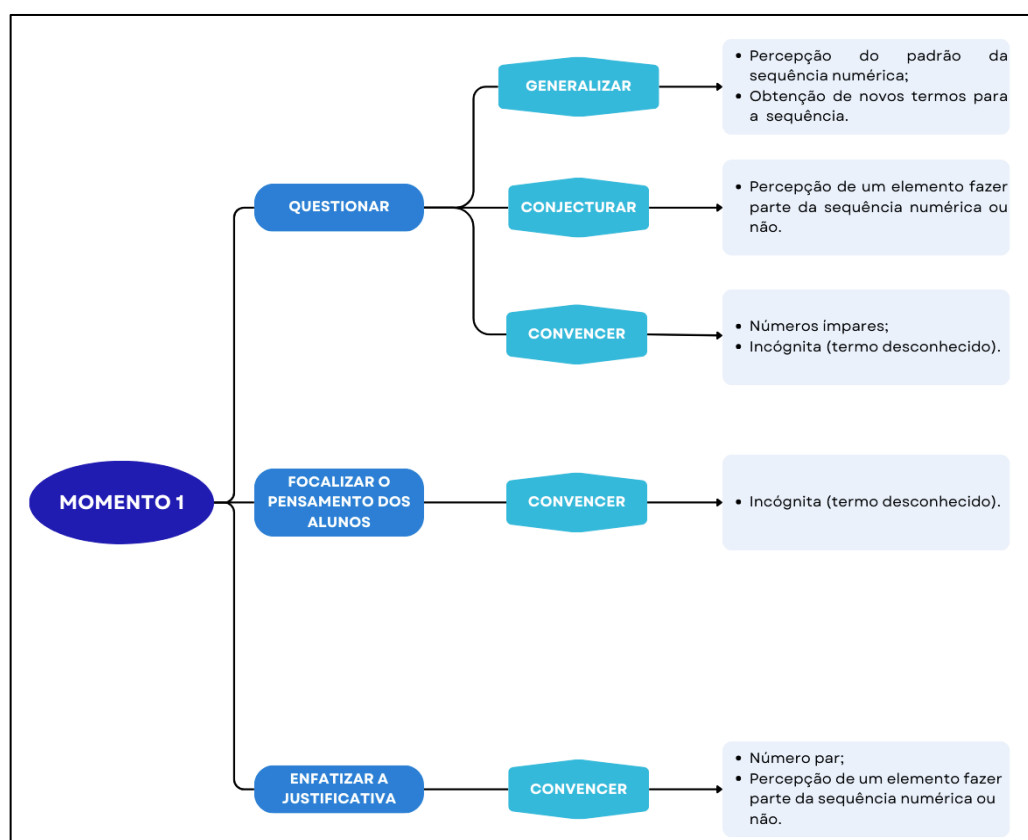
Ação da professora	Processo de pensamento matemático	Trecho de fala dos alunos
Questionar	Generalizar	[1.4] <i>Eu percebi que um triângulo é formado por três palitos, os outros são formados por mais dois palitos, seguindo essa sequência (pausa).</i> [1.6] <i>Sempre vai somar dois palitos e sempre vai ter mais um triângulo.</i> [2.2] <i>Por exemplo, tem esse aqui, né? Tem a primeira figura, a segunda figura e a terceira figura, aí na quarta são quatro triângulos.</i> [2.4] <i>Na quarta são quatro triângulos juntos formados por (pausa).</i> [2.6] <i>Por nove palitinhos.</i> [6.8] <i>É, eu fui adicionando dois, porque estava falando que a cada dois palitos obtém novos triângulos.</i>
	Conjecturar	[3.4] <i>Por causa do número três... quando você adiciona, vai adicionando dois até chegar próximo de 100, mas não dá 100. Vai ser ou mais que 100 ou menos que 100.</i>
	Convencer	[3.5] <i>Sim, também por conta que começou com três palitos e você vai adicionando o número dois, né? Daí vai ficando número ímpar toda vez!</i> [5.1] <i>Professora, olha a f, a f a gente estava falando: como podemos montar uma expressão algébrica relacionando o número de palitos e o número de triângulos? Daí eu falei que a figura 167 terá x palitos porque x esconde o número, é quando a gente não sabe qual é aquele número.</i> [5.5] <i>A gente não sabe o número.</i> [5.7] <i>Não, é tipo... o x representa o número que a gente não sabe ainda qual é.</i>
	Especificar	-
Focalizar o pensamento dos alunos	Generalizar	-
	Conjecturar	-
	Convencer	[5.7] <i>Não, é tipo... o x representa o número que a gente não sabe ainda qual é.</i>
	Especificar	-
Enfatizar a justificativa	Generalizar	-
	Conjecturar	-
	Convencer	[3.7] <i>Vai ter o 99, e o 101, mas 100 não, porque ele é par!</i>
	Especificar	-

Investigar	-	-
Julgar	-	-
Interromper	-	-

Fonte: Dados da pesquisa.

As ações *Interromper*, *Investigar* e *Julgar* não promoveram vestígios de processos de pensamento matemático nas interações analisadas pela professora Natália com seus alunos. A ação *Questionar* foi a única que possibilitou vestígios dos três processos: *Generalizar*, *Conjecturar* e *Convencer*, todavia o processo *Especificar* não se fez presente nas interações analisadas da Professora Natália no momento [1]. A Figura 19 traz um fluxograma contendo conceitos e/ou operações matemáticas que foram apresentadas pelos alunos após as interações com a professora Natália.

Figura 19 - Fluxograma dos conceitos matemáticos evidenciado pelos alunos após as ações da professora Natália no momento [1]



Fonte: Autoria Própria.

De acordo com a Figura 19, percebe-se que, por meio do problema dos palitos, os conceitos e/ou operações matemáticas evidenciados com sua resolução foram: números pares e ímpares; sequência numérica (termos de uma sequência, obtenção do próximo termo da sequência e padrão de repetição); e incógnita (termo desconhecido).

No Quadro 13, apresentam-se os processos de pensamento matemático evidenciados no momento [2] da análise da aula da professora Natália.

Quadro 13 - Trechos que apresentam vestígios de processos de pensamento matemático mobilizados pelas ações da professora Natália no momento [2]

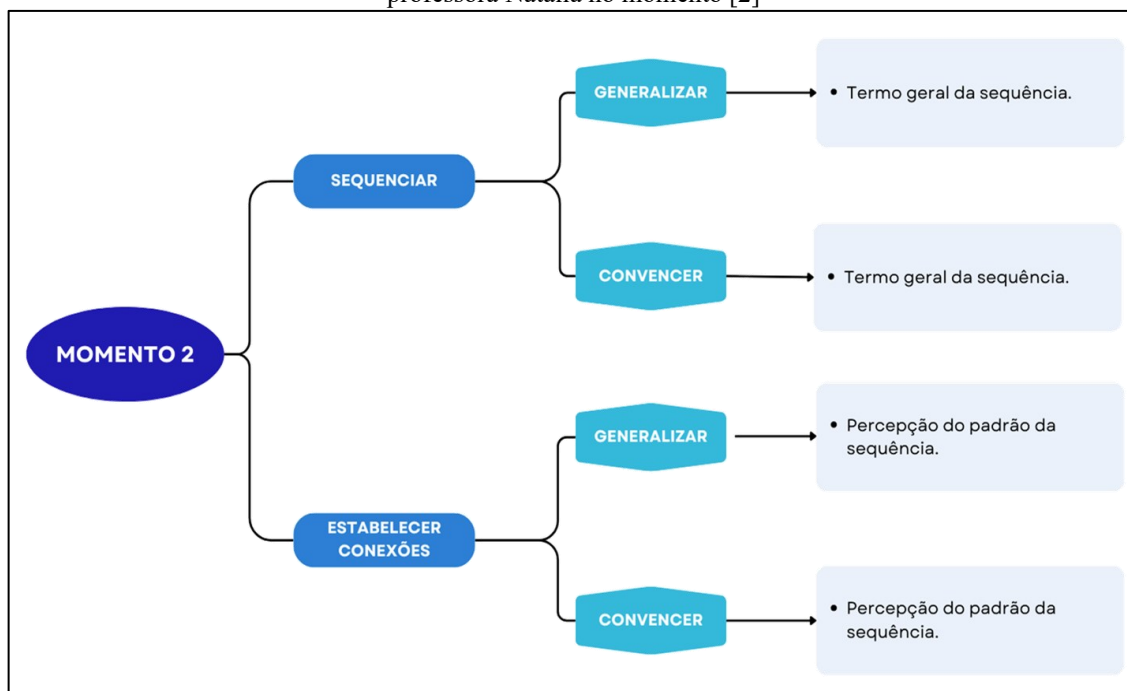
Ação da professora	Processo de pensamento matemático	Trecho de fala dos alunos
Sequenciar	Generalizar	[7.1] Professora, eu coloquei 41, porque eu percebi que a quantidade de triângulo vezes dois mais um é igual ao número de palitinhos. Igual essa aqui... que é quatro triângulos deu nove, daí eu fiz vinte vezes dois mais um, quarenta e um. [7.5] A primeira figura deu 3, certo? Então, temos mais 19 figuras que fazendo vezes dois vai dá trinta e oito, e se a primeira figura tem três, fazemos trinta e oito mais três que é igual a quarenta e um.
	Conjecturar	-
	Especificar	-
	Convencer	[7.1] Professora, eu coloquei 41, porque eu percebi que a quantidade de triângulo vezes dois mais um é igual ao número de palitinhos. Igual essa aqui... que é quatro triângulos deu nove, daí eu fiz vinte vezes dois mais um, quarenta e um. [7.5] A primeira figura deu 3, certo? Então, temos mais 19 figuras que fazendo vezes dois vai dá trinta e oito, e se a primeira figura tem três, fazemos trinta e oito mais três que é igual a quarenta e um. [8.2] Porque sessenta é o número de triângulos.
Estabelecer conexões	Generalizar	[8.4] Eu fui até o trinta que deu 61, daí eu comecei a ir de dez em dez, tipo por quarenta, por cinquenta e depois por sessenta. Daí eu percebi que adicionava vinte, tipo, a gente percebeu que a cada dez, adicionava vinte.
	Conjecturar	-
	Especificar	-
	Convencer	[8.6] Que a cada dez, adicionava vinte. Porque na décima figura tinha vinte e um, na vigésima tinha quarenta e um, ou seja, adicionou vinte. Daí a gente parou no trinta que deu sessenta e um, então quarenta daria oitenta e um porque adicionou vinte, e assim por diante, cinquenta daria cento e um, e sessenta, cento e vinte e um.

Fonte: Dados da pesquisa.

No momento [2], a professora desenvolveu as ações de *Sequenciar* e *Estabelecer Conexões*, e foram identificados indícios dos processos de pensamento matemático: *Convencer* e *Generalizar*, pois o momento é mais de discussão. Logo, os alunos apresentam as generalizações obtidas e tentaram convencer os demais com justificativas acerca de seus resultados. A Figura 20 contém um fluxograma com conceitos e/ou operações matemáticas que

foram apresentadas pelos alunos e os processos de pensamento matemático evidenciados após as ações da professora no momento [2].

Figura 20 - Fluxograma dos conceitos matemáticos evidenciado pelos alunos após as ações da professora Natália no momento [2]



Fonte: Autoria Própria.

O fluxograma, em síntese, mostra que os conceitos mais evidenciados pelos alunos foram o termo geral da sequência numérica e a percepção de padrão da sequência. No Quadro 14, são trazidas as ações realizadas pela professora Laura e os processos de pensamento matemáticos evidenciados durante o momento [1].

Quadro 14 - Trechos que apresentam vestígios de processos de pensamento matemático mobilizados pelas ações da professora Laura no momento [1]

Ação da professora	Processo de pensamento matemático	Trecho de fala dos alunos
Questionar	Generalizar	[1.2] Ah, eu fiz assim: quarenta, quarenta é... quatro horas que ela trabalha por dia, ou seja, quatro horas trabalhadas por dia, dez reais a hora, dá quarenta. [1.8] Fazer o quarenta vezes o seis? [2.4] Não, tem mais (pausa) a gorjeta. [2.10] “Além disso ela recebe oitenta reais de gorjeta por semana”, ela trabalha quatro vezes, é quatro semanas em um mês, quatro vezes oito dá trinta e dois e como é oitenta, trezentos e vinte. [3.14] Eu fiz assim: como ela vai seis vezes por semana, é R\$8,00, né (por dia)? Dá R\$48,00 por semana né?

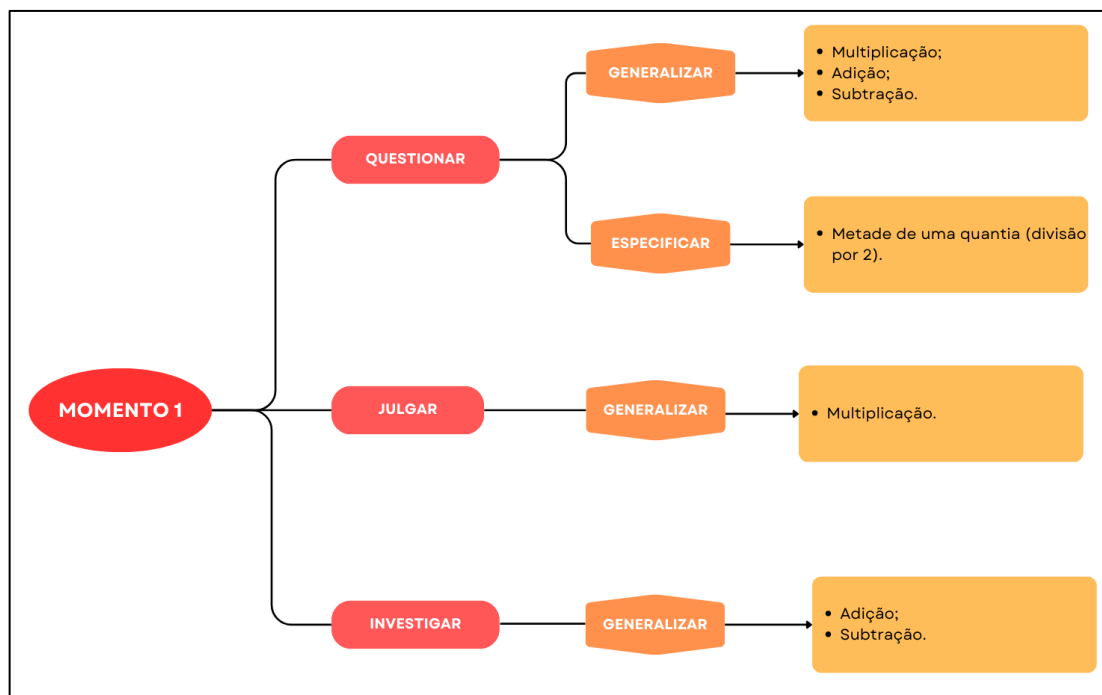
		<i>R\$48,00 mais R\$48,00 mais R\$48,00 mais R\$48,00 dá R\$192,00. Daí ela tem que arcar com um prejuízo de R\$92,00 ainda.</i>
	Conjeturar	-
	Convencer	-
	Especificar	[4.8] <i>Metade dele.</i> [4.10] <i>A outra metade ela compra comidas mais saudáveis, fraldas.</i> [5.4] <i>Sobrar quatorze reais por mês, daí ela vai vendendo paçoquinha.</i> [6.5] <i>Arranjar um trabalho?</i> [6.8] <i>Não... sei lá, ela não pode ser artista? Pintar uns quadros, pintura faz bem.</i> [6.11] <i>Verdade, faz sentido! Ou ela pode fazer uma vaquinha no Instagram!</i> [6.13] <i>Ela pegar um segundo emprego de atendente.</i>
Julgar	Generalizar	[1.10] <i>Dá duzentos e quarenta!</i>
	Conjeturar	-
	Convencer	-
	Especificar	-
Investigar	Generalizar	[3.14] <i>Eu fiz assim: como ela vai seis vezes por semana, é R\$8,00, né (por dia)? Dá R\$48,00 por semana né? R\$48,00 mais R\$48,00 mais R\$48,00 mais R\$48,00 dá R\$192,00. Daí ela tem que arcar com um prejuízo de R\$92,00 ainda.</i>
	Conjeturar	-
	Convencer	-
	Especificar	-
Interromper	-	-
Focalizar o pensamento dos alunos	-	-
Enfatizar a justificativa	-	-

Fonte: Dados da pesquisa.

As ações *Interromper*, *Focalizar o pensamento dos alunos* e *Enfatizar a justificativa* não promoveram vestígios de processos de pensamento matemático nas interações analisadas pela professora Laura com seus alunos. A ação *Questionar* foi a única que possibilitou vestígios dos dois processos: *Generalizar* e *Especificar*. As ações *Julgar* e *Investigar* promoveram apenas vestígios de um processo, *Generalizar*.

A Figura 21 apresenta o fluxograma contendo conceitos e/ou operações matemáticas desenvolvidas pelos alunos e os processos de Pensamento Matemático, após as ações da professora Laura no momento [1].

Figura 21 - Fluxograma dos conceitos matemáticos evidenciado pelos alunos após as ações da professora Laura no momento [1]



Fonte: Autoria Própria.

Já no problema do enxoval, percebe-se que os alunos usaram as operações básicas de adição, subtração, divisão e multiplicação ao pensarem matematicamente. O Quadro 15 mostra os processos de pensamento matemático evidenciados no momento [2], da análise da aula da professora Laura.

Quadro 15 - Trechos que apresentam vestígios de processos de pensamento matemático mobilizados pelas ações da professora Laura no momento [2]

Ação da professora	Processo de pensamento matemático	Trecho de fala dos alunos
Sequenciar	Generalizar	[7.2] <i>A Nadine, ela ganha R\$320,00 por semana, ela gasta um total de R\$48,00 de transporte por semana. Se contar o vale-transporte de cem reais, ela não gasta nada nas duas primeiras semanas. Ela ganha R\$1.600,00 por mês e, no total, com todos os gastos, ela fica com R\$650,00 e com mais uma semana, ela consegue o enxoval em seis semanas.</i> [7.8] <i>Com mais uma semana ela consegue o dinheiro.</i>
	Conjecturar	-
	Especificar	-
	Convencer	[7.4] <i>Por semana!</i> [7.6] <i>Porque ele considerou que o mês tem cinco semanas.</i>
Estabelecer conexões	Generalizar	-
	Conjecturar	-
	Especificar	-
	Convencer	[8.5] <i>É por dia, ela trabalha por semana seis dias. Daí seis vezes R\$40,00 dá R\$240,00, vezes quatro que são as</i>

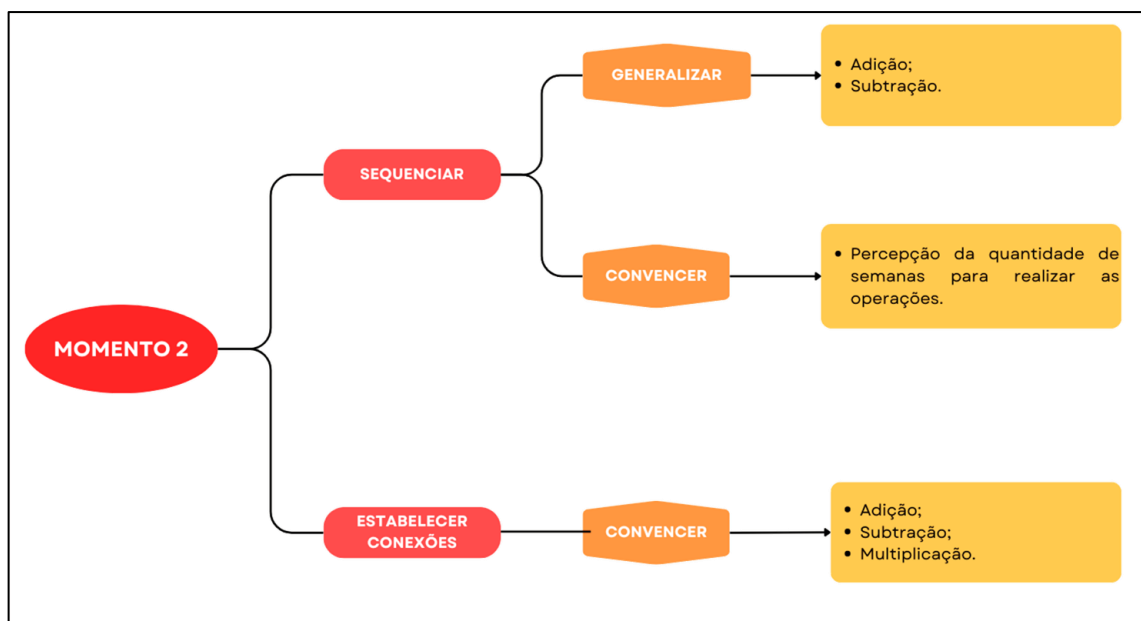
		<i>semanas que têm no mês, dá R\$960,00, mais os R\$80,00 que ela ganha por semana deu R\$1280,00. Menos R\$92,00 que era (pausa) do transporte, menos R\$120,00 da internet que ela paga com a mãe dela, menos R\$ 750,00 do aluguel, sobra R\$378,00. Fazendo vezes três, que são os meses que ela precisa fazer para pagar o enxoval, deu R\$954,00. Ela precisa de doze semanas para comprar o enxoval.</i>
--	--	---

Fonte: Dados da pesquisa.

A professora Laura no momento [2] desenvolveu as ações *Sequenciar* e *Estabelecer Conexões*, e foram identificados indícios do processo de pensamento matemático *Generalizar*, pois o momento é mais de discussão, e os alunos apresentam as generalizações obtidas para chegar à quantidade de semanas que a Nadine levará para comprar o enxoval.

A Figura 22 traz o fluxograma com conceitos e/ou operações desenvolvidas pelos alunos e os processos de pensamento matemático, após as ações da professora Laura no momento [2].

Figura 22 - Fluxograma dos conceitos matemáticos evidenciado pelos alunos após as ações da professora Laura no momento [2]



Fonte: Autoria Própria.

No momento [2], também foram utilizadas pelos alunos as operações de adição, subtração e multiplicação, além da quantificação de quantas semanas há em um mês. Esses foram os conceitos e/ou operações exploradas pela turma ao pensar matematicamente.

Ressalta-se que os dados apresentados nessa seção são oriundos da implementação das etapas da MEAAMaRP; contudo, os processos de pensamento matemático desenvolvidos foram promovidos por meio da ação das professoras responsáveis das turmas. Ambos os cenários mostram que, independente do problema gerador escolhido, foram apresentadas várias

estratégias de resolução, envolveram diversos conteúdos prévios e o professor possibilitou o desenvolvimento de processos do pensamento matemático de seus alunos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A pesquisa teve por objetivo analisar as ações de duas professoras, ao ministrarem uma aula fazendo uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas (MEAAMaRP) e suas influências (ou contribuições) para o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos. A questão norteadora foi “*Quais ações dos professores em uma aula de Resolução de Problemas podem apoiar o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos?*”.

Inicialmente, buscou-se por professores que se dispusessem a participar da pesquisa e fizessem uso da MEAAMaRP em suas aulas. Duas professoras concordaram e foram as participantes da pesquisa. Buscando conhecer melhor o cenário da pesquisa, foi realizada uma entrevista com elas e ambas afirmaram desenvolver a MEAAMaRP em suas aulas com modificações. As participantes tiveram dificuldade em definir o que seria pensamento matemático. Isso não trouxe problemas para a pesquisa; contudo, é importante que o professor conheça os processos e esteja ciente de que suas ações podem interferir no pensamento matemático de seus alunos.

Cada professora ministrou uma aula fazendo uso da metodologia, elas tiveram autonomia na escolha da turma e do problema gerador. A professora Natália escolheu um problema, de modo a formalizar o conteúdo de sequências numéricas, e a professora Laura elaborou um problema gerador para formalizar o conteúdo de orçamento familiar e pessoal.

Acerca da aula analisada, ministrada pela professora Natália, foram evidenciadas as ações: *Questionar, Investigar, Interromper, Julgar, Focalizar o pensamento dos alunos, enfatizar a justificativa, Sequenciar e Estabelecer conexões*. Todavia, a ação mais recorrente foi o *Questionar* e a menos recorrente foi a *Interromper*. Sobre o pensamento matemático, foram evidenciados os processos de: *Generalizar, Conjeturar e Convencer*, dos quais os mais recorrentes foram *Generalizar e Convencer*.

Durante a análise da aula, ministrada pela professora Laura, foram evidenciadas as ações: *Questionar, Julgar, Investigar, Sequenciar e Estabelecer conexões*. A ação mais recorrente foi o *Questionar* e as menos recorrentes foram *Investigar e Julgar*. Acerca do pensamento matemático, evidenciaram-se os processos de: *Generalizar, Especificar e Convencer*, dos quais os mais recorrentes foram *Generalizar e Especificar*.

A forma com que as professoras interagiram com seus alunos foi diferente, a professora Natália fazia perguntas e a professora Laura também fazia questionamentos, mas investigava o que o aluno estava compreendendo do enunciado, ou seja, ela apresentava duas ações conjuntas.

O tipo de problema pode influenciar os processos de Pensamento Matemático e, também, os conteúdos matemáticos que serão evidenciados. Independentemente da escolha do problema, ao utilizar a MEAAMaRP, notou-se que a ação mais realizada pelas professoras, e que favorece os processos de pensamento matemático, foi a de *Questionar*.

O problema do enxoval permitiu aos alunos apresentarem o processo *Especificar*, pois eles propõem várias alternativas para que Nadine consiga uma renda extra, o que não apareceu no problema dos palitos. A ação de *Interromper* da professora acabou atrapalhando o grupo “Matemáticos” em sua resolução; logo, recomenda-se que, enquanto os alunos estiverem resolvendo, o professor se aproxime em silêncio e espere o momento certo de começar a interagir com os grupos de alunos.

Com relação à pesquisa, uma dificuldade enfrentada foi o fato de a pesquisadora não acompanhar as professoras participantes da pesquisa nos momentos de finalização das atividades, pois ambas deixaram para as próximas aulas a finalização das etapas da MEAAMaRP. Esse momento de formalização e a etapa de proposição de novos problemas também poderiam ter sido analisados quanto às ações das professoras e o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos.

Para pesquisas futuras, uma lacuna evidenciada é se “Professores que conhecem os processos de Pensamento Matemático têm ações e abordagens diferentes daqueles professores que não os conhecem?”. A entrevista realizada e os resultados da pesquisa fomentaram esse questionamento.

Vinculado a esta dissertação também foi elaborado o PE, que é um livro interativo composto por orientações acerca da MEAAMaRP, das ações a serem desenvolvidas pelo professor ao interagir com os alunos, sobre o pensamento matemático e como desenvolvê-lo, além de encaminhamentos e dicas para o desenvolvimento da metodologia e do pensamento matemático. Ele pode ser acessado no repositório institucional da UTFPR, no *site*: <https://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/>.

REFERÊNCIAS

- ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem-avaliação de matemática: por que através da resolução de problemas? ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G.; NOGUTI, F. C. H.; JUSTULIN, A. M. (Orgs.) **Resolução de problemas: teoria e prática**. 2. ed. Jundiaí (SP): Paco Editorial, 2021. cap. 2, p. 37-57.
- ANDREATTA, C.; ALLEVATO, N. S. G. A Resolução de Problemas nos documentos de orientação curricular oficiais da Educação Básica Brasileira. *In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*, 07., 2018. Foz do Iguaçu, PR. **Anais eletrônicos...** Foz do Iguaçu: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, SBEM, 2018, p.1-12.
- ATZ, D. **A análise combinatória no 6º ano do ensino fundamental por meio da resolução de problemas**. 2017. 139 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2017.
- BICUDO, M. A. V. Pesquisa qualitativa e pesquisa qualitativa segundo a abordagem fenomenológica. BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Orgs.) **Pesquisa qualitativa em educação matemática**. 6. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2019. cap. IV, p. 107-119.
- BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Tradução Maria João Alvarez, Sara Bahia dos Santos e Telmo Mourinho Baptista. Portugal: Porto Editora, 1994.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Base nacional comum curricular**. Brasília, 2018.
- BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria da Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998.
- CAI, J.; LESTER, F. Por que o ensino com resolução de problemas é importante para a aprendizagem do aluno? **Boletim GEPEM**. Trad. BASTOS, A. S. A. M.; ALLEVATO, N. S. G., Rio de Janeiro, n. 60, p. 241-254, 2012.
- CELIS, S.; QUIROZ, C.; TORO-VIDAL, V. Do not interrupt students' work: how teacher interactions influence team's problem-solving capabilities. FELMER, P.; LILJEDAHN, P.; KOICHI, B. (Eds.). **Problem solving in mathematics instruction and teacher professional development: research in mathematics education**. Suíça: Springer Nature, 2019. v. 1, p. 261-278.
- CHAPARIN, R. O. **A formação continuada de professores que ensinam matemática, centrada na resolução de problemas e em processos do pensamento matemático**. 2019. 432 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2019.
- COSTA, M. S.; ERICEIRA, T. B.; ALLEVATO, N. S. G.; NERES, R. L. Reflexões acerca do currículo de matemática dos anos finais do ensino fundamental à luz da interdisciplinaridade de acordo com a BNCC. **Brazilian Journal of Development**, [S. l.], v. 6, n. 12, p. 103248–103256, 2020.

DUARTE, R. Entrevistas em pesquisas qualitativas. **Educar em Revista**, Curitiba, n. 24, p. 213–225, jul. 2004.

DUVAL, R. Ecarts sémantiques et cohérence mathématique: introduction aux problèmes de congruence. **Annales de Didactique et de Sciences Cognitives**, v.1. I.R.E.M, 1988.

DUVAL, R. Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. **Annales de Didactique et de Sciences Cognitives**. IREM de Starsbourg, n. 5, 37-65, 1993.

DUVAL, R. **Semiosis et pensée humaine – registres sémiotiques et apprentissages intellectuels**. New York, Paris, Wien: Peter Lang S.A., 1995.

DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo a compreensão em matemática. MACHADO, S. D. A. **Aprendizagem em matemática: registros de representações semióticas**. São Paulo: Papiros, 2003.

DUVAL, R. **Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales**. Santiago de Cali: Peter Lang, 2004.

FAJER, R. F.; ARAÚJO, M. P.; WAISMANN, M. Importância do diário de campo nas pesquisas qualitativas com metodologia de história oral. **SEMANA CIENTÍFICA UNILASALLE – SEFIC**, 12, 2016, Canoas. Comunicação oral. ISSN 1983-6783.

GARNICA, A. V. M. História oral e educação matemática. BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Orgs.) **Pesquisa qualitativa em educação matemática**. 6. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2019. cap. III, p. 85-105.

GERALDINI, C. M. G. Currículo em ação: buscando a compreensão do cotidiano da escola básica. **Pro-posições**, v. 5, n. 3, p. 111-132, 1994.

HÄHKIÖNIEMI, M.; FRANCISCO, J. Teacher guidance in mathematical problem-solving lessons: insights from two professional development programs. FELMER, P.; LILJEDAHN, P.; KOICHU, B. (Eds.). **Problem solving in mathematics instruction and teacher professional development: research in mathematics education**. Suíça: Springer Nature, 2019. v. 1, p. 279-296.

HATFIELD, L. L. Heuristical emphasis in the instruction of mathematical problem solving: Rationales and research. HATFIELD, L. L.; BRADBARD, D. A. (Org). **Mathematical problem solving: papers from a research workshop**. Columbus: ERIC, 1978.

IMENES, L. M; LELLIS, M. **Matemática Imenes & Lellis, 6º ao 9º ano: guia do professor**. São Paulo: Moderna, 2010.

JOSÉ, A. **Pensamento matemático e pensamento computacional na resolução de problemas: análise de um enunciado em um curso à distância**. 2022. 96 f. Dissertação (Mestrado – Programa de Pós-Graduação Mestrado Acadêmico em Educação Matemática) – Universidade Estadual do Paraná, Campo Mourão (PR), 2022.

JUSTULIN, A. M. **A formação de professores de matemática no contexto da resolução de**

problemas. 2014. 254 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro (SP), 2014.

MANZINI, E. J. Uso da entrevista em dissertações e teses produzidas em um programa de pós-graduação em educação. **Revista Percorso-NEMO**, Maringá, v. 4, n. 2, p. 149-171, 2012.

MASON, J.; BURTON, L.; STACEY, K. **Thinking Mathematically**. 2. ed. Harlow: Pearson, 2010.

MAXIMIZE EDUCAÇÃO. **O que é: Livro Interativo**. [S.l]. 2024. Disponível em: <https://maximizeeducacao.com.br/glossario/o-que-e-livro-interativo/>. Acesso em: 10 jun. 2024.

MORAIS, R. S.; ONUCHIC, L. R. Uma abordagem histórica da resolução de problemas. ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G.; NOGUTI, F. C. H.; JUSTULIN, A. M. (Orgs.). **Resolução de problemas: teoria e prática**. 2. ed. Jundiaí (SP): Paco Editorial, 2021. cap. 1, p. 19-36.

NCTM. **An agenda for action: Recommendations for School Mathematics in the 1980's**. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1980.

NCTM. **Curriculum and evaluation standards for school mathematics**. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1989.

NCTM. **Professional standards for school mathematics**. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1991.

NCTM. **Assessment standards for school mathematics**. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1995.

NCTM. **Principles and standards for school mathematics**. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2000.

NÓBREGA-TERRIEN, S. M.; TERRIEN, J. Trabalhos Científicos e Estado da Questão: Reflexões Teórico-Metodológicas. **Estudos em Avaliação Educacional**, v. 15, n. 30, p. 5-16, jul./dez., 2004. DOI: <https://doi.org/10.18222/ae153020042148>.

ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. BICUDO, M. A. V. (Org.) **Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas**. São Paulo: Editora UNESP, 1999. p. 199-218.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Bolema** - Boletim de Educação Matemática, Rio Claro (SP), v. 25, n. 41, p. 73-98, dez. 2011.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. **Referencial curricular do paraná: princípios, direitos e orientações**. Curitiba, PR: SEED/PR, 2018.

PIGGOTT, J. S. The nature of mathematical enrichment: a case study of implementation. **Educate**, v. 7, n. 2, p. 30-45, 2007.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**: um novo aspecto do método matemático. Tradução Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

POZO, J.I. (Org.). **A solução de problemas**: aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: Artmed, 1998.

RIZZATTI, I. M. *et al.* Os produtos e processos educacionais dos programas de pós-graduação profissionais: proposições de um grupo de colaboradores. **ACTIO**, Curitiba, v. 5, n. 2, p. 1-17, mai./ago. 2020.

RÔÇAS, G.; DO AMARAL MOREIRA, M. C.; PEREIRA, M. V. “Esquece tudo o que te disse”: os mestrados profissionais da área de ensino e o que esperar de um doutorado profissional. **Revista ENCITEC**, Cidade, v. 8, n. 1, p. 59-74, 2018.

ROQUE, T. **História da matemática**: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. 1. ed. Rio de Janeiro: Editora Zahar, 2012.

SANTOS, J. A. **Desenvolvimento do pensamento matemático**: resolução de problemas de raciocínio lógico-matemático no ensino fundamental. 2018. 124 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal de Alagoas, Instituto de Matemática, Maceió, 2018.

SCHROEDER, T. L.; LESTER, F. K. Developing understanding in mathematics via problem solving. TRAFTON, P. R.; SHULTE, A. P. (Org.). **New directions for elementary school mathematics**. Reston: NCTM, 1989. cap. 3, p. 31-42.

SOUZA, H. T. **Resolução de problemas**: enfoque metodológico e teórico. 2018. 134 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2018.

STACEY, K. What is mathematical thinking and why is it important. **Progress report of the APEC project: collaborative studies on innovations for teaching and learning mathematics in different cultures (II)—Lesson study focusing on mathematical thinking**. Japão: CRICED (University of Tsukuba), 2006, p. 39-48.

STEIN, M. K.; ENGLE, R. A.; SMITH, M. S.; HUGHES, E. K. Orchestrating productive mathematical discussions: five practices for helping teachers move beyond show and tell. **Mathematical Thinking and Learning**, 10:4, 2008, p. 313-340.

TALL, D.; YUSOF, Y.B.M. **Changing Attitudes do Mathematics through Problem Solving**. Proceedings of the Eighteenth Conference for the Psychology of Mathematics Education. Lisboa, Portugal, IV, p. 401-408, 1994.

TEIXEIRA, A. C.; ALLEVATO, N. S. G. As prescrições curriculares e o ensino dos números racionais nos anos finais do ensino fundamental. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, [S. l.], v. 8, n. 17, p. 201–228, 2020.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no ensino fundamental:** formação de professores e aplicação em sala de aula. Tradução Paulo Henrique Colonese. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

VIEIRA, G.; ALLEVATO, N. S. G. Tecendo relações entre resolução de problemas e investigações matemáticas nos anos finais do Ensino Fundamental. *In:* Anais do Encontro de Produção Discente PUCSP/ Cruzeiro do Sul, São Paulo. **Anais...** São Paulo: PUCSP/Cruzeiro do Sul, 2012, p. 1-13.

WIELEWSKI, G. D. **Aspectos do pensamento matemático na resolução de problemas:** uma apresentação contextualizada da obra de Krutetskii. 2005. 407 f. Tese (Doutorado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

ANEXO – FICHA DE AVALIAÇÃO DE PRODUTO/PROCESSO EDUCACIONAL

Adaptado de: Rizzatti, I. M. *et al.* Os produtos e processos educacionais dos programas de pós-graduação profissionais: proposições de um grupo de colaboradores. **ACTIO**, Curitiba, v. 5, n. 2, p. 1-17, mai./ago. 2020. Disponível em: <https://periodicos.utfpr.edu.br/actio/article/view/12657>. Acesso em 14 de dezembro de 2020.

Instituição de Ensino Superior	Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Programa de Pós-Graduação	Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGMAT)
Título da Dissertação	Ações do professor durante a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de problemas e o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos
Título do Produto/Processo Educacional	Resolução de Problemas: ações do professor e a mobilização do pensamento matemático dos alunos
Autores do Produto/Processo Educacional	Discente: Brenda Anselmo Mendes
	Orientadora: Andresa Maria Justulin
Data da Defesa	09/08/2024

FICHA DE AVALIAÇÃO DE PRODUTO/PROCESSO EDUCACIONAL (PE)	
Esta ficha de avaliação deve ser preenchida pelos membros da banca do exame de defesa da dissertação e do produto/processo educacional. Deve ser preenchida uma única ficha por todos os membros da banca, que decidirão conjuntamente sobre os itens nela presentes.	
Aderência: avalia-se se o PE apresenta ligação com os temas relativos às linhas de pesquisas do Programa de Pós-Graduação. <u>*Apenas um item pode ser marcado</u> Linhas de Pesquisa do PPGMAT: <i>LI: Formação de Professores e Construção do Conhecimento Matemático</i> (abrange discussões e reflexões acerca da formação inicial e em serviço dos professores que ensinam Matemática, bem como o estudo de tendências em Ensino de Matemática, promovendo reflexões críticas e analíticas a respeito das potencialidades de cada uma no processo de construção	[...] Sem clara aderência às linhas de pesquisa do PPGMAT. (X) Com clara aderência às linhas de pesquisa do PPGMAT.

do conhecimento matemático nos diferentes níveis de escolaridade); <i>L2: Recursos Educacionais e Tecnologias no Ensino de Matemática</i> (trata da análise e do desenvolvimento de recursos educacionais para os processos de ensino e de aprendizagem matemática, atrelados aos aportes tecnológicos existentes).	
Aplicação, aplicabilidade e replicabilidade: refere-se ao fato de o PE já ter sido aplicado (mesmo que em uma situação que simule o funcionamento do PE) ou ao seu potencial de utilização e de facilidade de acesso e compartilhamento para que seja acessado e utilizado de forma integral e/ou parcial em diferentes sistemas. <u>*Apenas um item pode ser marcado.</u> A propriedade de aplicação refere-se ao processo e/ou artefato (real ou virtual) e divide-se em três níveis: 1) aplicável – quando o PE tem potencial de utilização direta, mas não foi aplicado; 2) aplicado – quando o PE foi aplicado uma vez, podendo ser na forma de um piloto/protótipo; 3) replicável – o PE está acessível e sua descrição permite a utilização por outras pessoas considerando a possibilidade de mudança de contexto de aplicação. Para o curso de Mestrado Profissional, o PE deve ser aplicável e é recomendado que seja aplicado.	() PE tem características de aplicabilidade, mas não foi aplicado durante a pesquisa. () PE foi aplicado uma vez durante a pesquisa e não tem potencial de replicabilidade. (X) PE foi aplicado uma vez durante a pesquisa e tem potencial de replicabilidade (por estar acessível e sua descrição permitir a utilização por terceiros, considerando a possibilidade de mudança de contexto de aplicação). () PE foi aplicado em diferentes ambientes/momentos e tem potencial de replicabilidade (por estar acessível e sua descrição permitir a utilização por terceiros, considerando a possibilidade de mudança de contexto de aplicação).
Abrangência territorial: refere-se a uma definição da abrangência de aplicabilidade ou replicabilidade do PE (local, regional, nacional ou internacional). Não se refere à aplicação do PE durante a pesquisa, mas à potencialidade de aplicação ou replicação futuramente. <u>*Apenas um item pode ser marcado e a justificativa é obrigatória.</u>	() Local () Regional () Nacional (X) Internacional Justificativa (<i>obrigatória</i>): O PE pode ser aplicado em países cujo idioma é a Língua Portuguesa.

Impacto: considera-se a forma como o PE foi utilizado e/ou aplicado no sistema relacionado à prática profissional do discente (não precisa ser, necessariamente, em seu local de trabalho). <u>*Apenas um item pode ser marcado.</u>	() PE não utilizado no sistema relacionado à prática profissional do discente (esta opção inclui a situação em que o PE foi utilizado e/ou aplicado em um contexto simulado, na forma de protótipo/piloto). (X) PE com aplicação no sistema relacionado à prática profissional do discente.
Área impactada <u>*Apenas um item pode ser marcado.</u>	() Econômica; () Saúde; (X) Ensino; () Cultural; () Ambiental; () Científica; () Aprendizagem.
Complexidade: compreende-se como uma propriedade do PE relacionada às etapas de elaboração, desenvolvimento e/ou validação do PE. <u>*Podem ser marcados nenhum, um ou vários itens.</u>	(X) O PE foi concebido a partir de experiências, observações e/ou práticas do discente, de modo atrelado à questão de pesquisa da dissertação. (X) A metodologia apresenta clara e objetivamente, no texto da dissertação, a forma de elaboração, aplicação (se for o caso) e análise do PE. (X) Há, no texto da dissertação, uma reflexão sobre o PE com base nos referenciais teóricos e metodológicos empregados na dissertação. () Há, no texto da dissertação, apontamentos sobre os limites de utilização do PE.
Inovação: considera-se que o PE é inovador, se foi criado a partir de algo novo ou da reflexão e modificação de algo já existente revisitado de forma inovadora e original. A inovação não deriva apenas do PE em si, mas da sua metodologia de desenvolvimento, do emprego de técnicas e recursos para torná-lo mais acessível, do contexto social em que foi utilizado ou de outros fatores. Entende-se que a inovação (tecnológica, educacional e/ou social) no ensino está atrelada a uma mudança de mentalidade e/ou do modo de fazer de educadores.	() PE de alto teor inovador (desenvolvimento com base em conhecimento inédito). (X) PE com médio teor inovador (combinação e/ou compilação de conhecimentos preestabelecidos). () PE com baixo teor inovador (adaptação de conhecimentos existentes).

Membros da banca examinadora de defesa

Nome	Instituição
Andresa Maria Justulin	UTFPR
Eliane Maria de Oliveira Araman	UTFPR
Janaina Poffo Possamai	FURB

APÊNDICES

APÊNDICE A – ROTEIRO DA ENTREVISTA SEMIESTRUTURADA

1. Você utiliza a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas com qual frequência em suas aulas?
2. Como você interage com seus alunos durante o desenvolvimento da MEAAMARP?
3. Como você costuma questioná-los durante a resolução do problema que foi proposto?
4. O que você entende por “pensamento matemático”?
5. Acerca das interações que se dão entre você e seus alunos durante o processo de resolução de problemas, você acha que esses momentos os ajudam no desenvolvimento do pensamento matemático? Como?